МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ МОРСА

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
АСПИРАНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

1. Невырожденные критические точки гладких функций на многообразиях

Введение

Теория Морса — это теория о связи топологии многообразия (многообразие — это топологическое пространство) и его гладкой структуры (есть гладкие функции).

$$\text{гладкие функции} \longleftrightarrow \text{топология}$$

Литература:

1) Дж. Милнор «Теория Морса».

2) L. Nicolaescu "An Invitation to Morse Theory".

Важный пример

Рассмотрим тор, поставленный вертикально, и *функцию высоты* (данным примером открывается книга Милнора) — рис. 1.1. Рассмотрим множества

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leqslant a\} \text{ — подуровневые многообразия (параметр } a),$$

где x в данном случае — точка на многообразии.

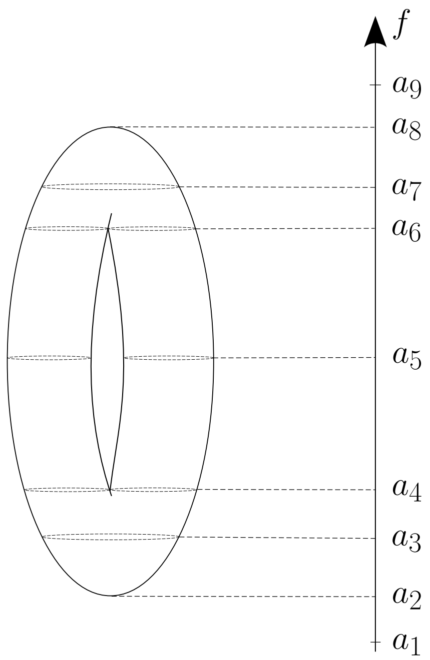

Рис. 1.1. Функция высоты для тора

Этот термин образован от термина «линии уровня», т.е. множеств

$$\{x \in M \mid f(x) = a\}.$$

Ниже на рис. 1.2 изображены девять подуровневых множеств. С точки зрения топологии есть ограниченное количество конфигураций подуровневых множеств. Изменения происходят в точках a_2, a_4, a_6, a_8. Надо заметить, что все эти точки критические, причем

$$a_2 = \min_M f, \qquad a_8 = \max_M f.$$

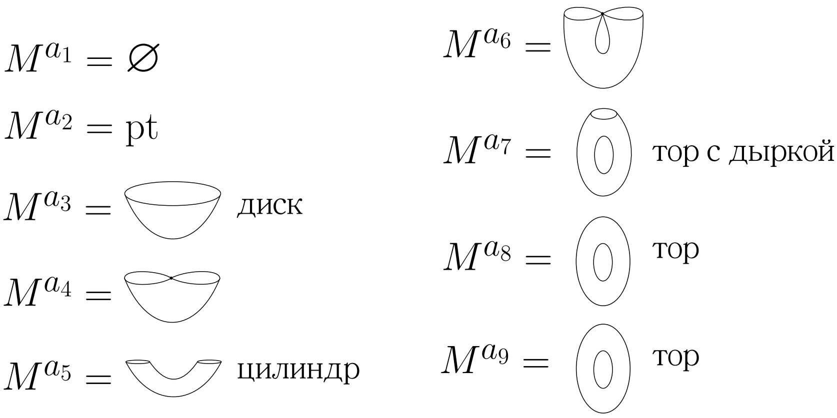

Рис. 1.2. Подуровневые многообразия

Определение 1. Точка называется критической точкой функции f, если все производные обращаются в ноль в этой точке.

Из анализа примера можно сделать вывод, что топология гладкого многообразия некоторым образом связана с критическими точками у функций.

На примере выше можно наблюдать операцию, называемую приклейкой клетки.

Приклейка клетки

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, где определено евклидово расстояние

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Рассмотрим в этом пространстве n-мерный шар $\mathbb{B}^n_1(0) = \underline{\{x \mid |x| < 1\}}$, замкнутый шар (который также называют n-мерным диском) $\mathbb{D}^n = \overline{\mathbb{B}}^n_1(0) = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$. У него есть граница $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Исключительный случай: $\mathbb{D}^0 = \mathrm{pt}$ — точка, $\partial\mathbb{D}^0 = \mathbb{S}^{-1}$ — пустое множество.

Определение 2. *Приклейка n-мерной клетки* к топологическому пространству (X, τ) вдоль отображения $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X$ — это следующая операция (рис. 1.3)

$$(X \sqcup \mathbb{D}^n)/\sim$$

Это дизъюнктное объединение пространства X и диска и берем фактор-пространство с фактор-топологией.

Комментарий 1. Фактортопология в данном случае устроена так: пусть есть $x \in X$, $p \in \mathrm{d}^n$. Имеем

$$x \sim p \Longleftrightarrow f(p) = x,$$

но так как отображение f действует только на граничной сфере, то это может быть только если $p \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n$.

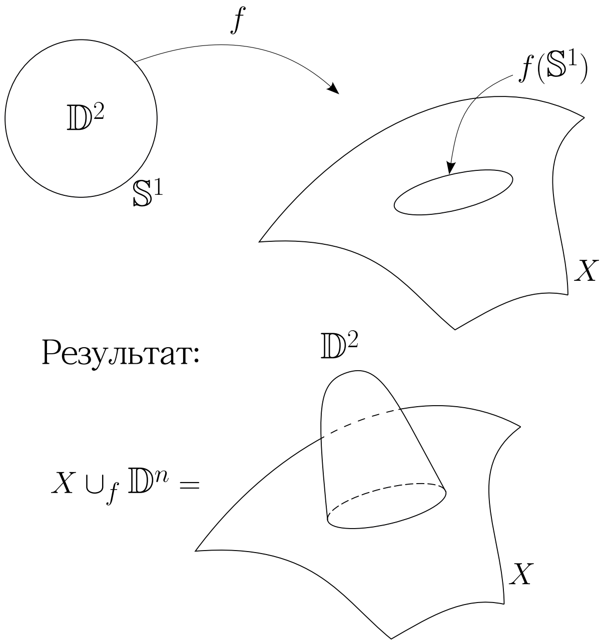

Рис. 1.3. Приклейка клетки

Пояснение к рис. 1.3: точки на $\mathbb{S}^1$ отображаются на точки $f(\mathbb{S}^1)$, после отождествления этих точек (рассмотрения фактортопологии) получается поверхность $X \cup_f \mathbb{D}^n$ (к X вдоль отображения f приклеена клетка $\mathbb{D}^n$).

Фактортопология

Пусть X — топологическое пространство с отношением эквивалентности $\sim$. Рассмотрим естественное отображение $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ (отображение из пространство в фактормножество=множество классов эквивалентности относительно $\sim$). Это отображение еще называют естественной проекции, оно каждой точке сопоставляет ее класс эквивалентности.

Определение 3. *Фактортопология* определяется следующим образом. Множество $U \subset X/\sim$ *открыто* тогда и только тогда, когда $\pi^{-1}(U) \subset X$ открыто.

Важный пример. Продолжение

Поймем теперь, как устроен наш пример с рис. 1.1 в терминах приклейки клеток.

Рассмотрим тор, поставленный вертикально, и *функцию высоты* — рис. 1.4. Рассмотрим на нем четыре критические точки: $a = \min_M f$, b, c, $d = \max_M f$.

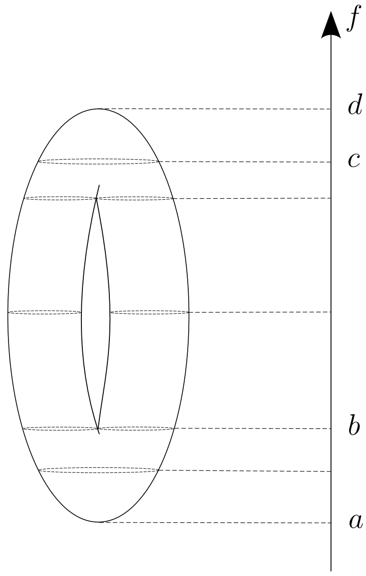

Рис. 1.4. Функция высоты для тора

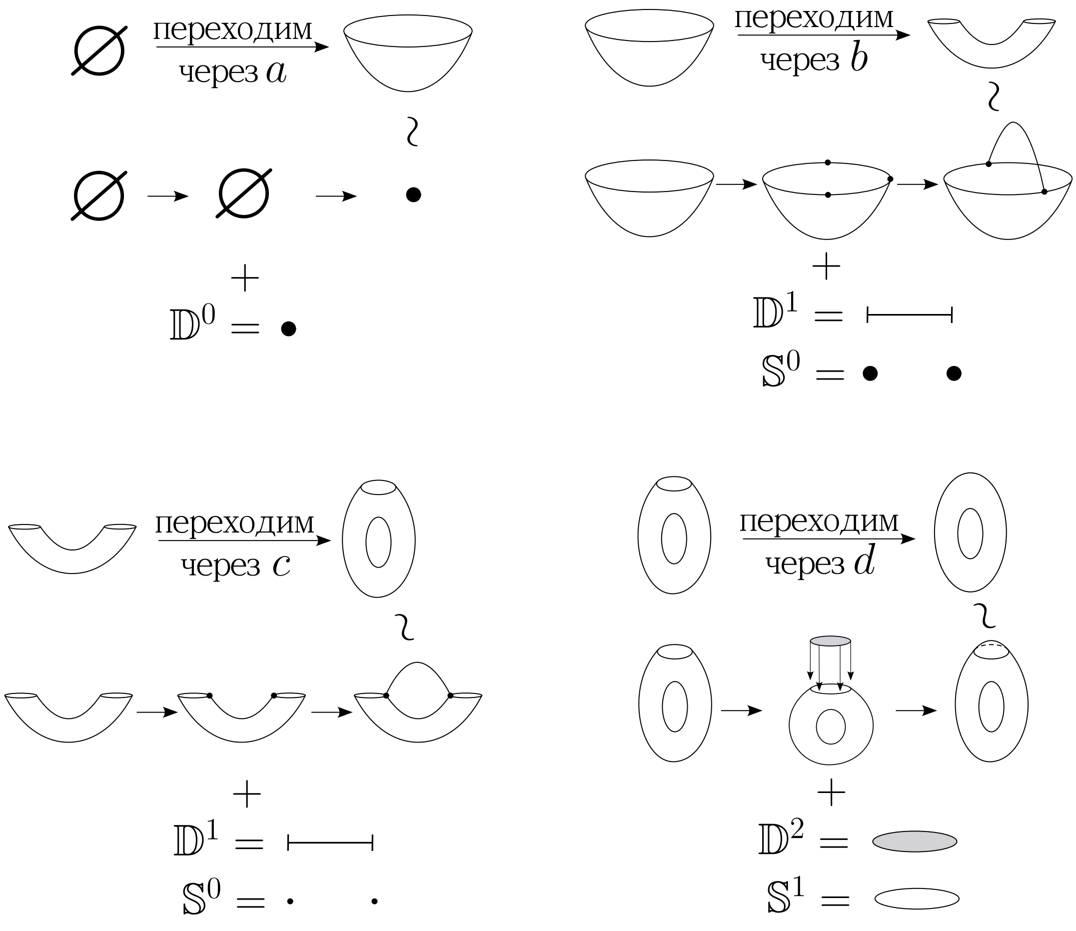

Рис. 1.5. Переходы через критические точки a, b, c, d

Посмотрим, что происходит при прохождении через критические точки — рис. 1.5. Операции устроены так: во второй строке есть исходный объект, к которому приклеивается диск $\mathbb{D}^k$ с границей $\mathbb{S}^{k-1}$. Мы получаем объект, из которого с помощью непрерывной деформации можно получить другой объект, эквивалентный тому, что стоит в первой строке — например, деформация для b показана на рис. 1.6. То есть каждый раз, когда мы проходим через критическую точку и происходят изменения в топологии, эти изменения (с точностью до некоторой «хорошей» деформации) происходят из-за приклейки клетки.

Гомотопическая эквивалентность

Ранее мы говорили, что два объекта эквивалентны с точностью до некоторой деформации. Дадим определение того, что имелось в виду выше.

Литература: Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. «Курс гомотопической топологии».

Определение 4. Пусть X, Y — топологические пространства, есть непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$, $f_1 : Y \to X$. Говорят, что f_0 *гомотопно* f_1 ($f_0 \sim f_1$), если существует такое непрерывное отображение $H : X \times [0,1] \to Y$, что

$$H(p,0) = f_0(p), \qquad H(p,1) = f_1(p).$$

В отображении $H(x,t)$ на t можно смотреть как на параметр деформации.

Комментарий 2. В дифференциальной топологии часто рассматривают гладкую гомотопию, то есть требуют, чтобы f_0, H и f_1 были гладкими отображениями. У нас все отображения непрерывны.

Определение 5. Пространство X *гомеоморфно* Y, если существуют такие непрерывные отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Гомеоморфность — это отношение эквивалентности на множестве всех топологических пространств.

Все объекты мы рассматриваем с точностью до гомеоморфизма.

Рассмотрим «более слабую» эквивалентность, то есть такую, в которой классы эквивалентности больше по сравнению с классами эквивалентности при гомеоморфизме — гомотопическую эквивалентность.

Определение 6. Топологические пространства X и Y называются *гопотопически эквивалентными* ($X \sim Y$), если есть такие непрерывные отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, что $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$, $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.

Комментарий 3. Отличие в том, что в гомеоморфизме мы требовали равенство отображений, а не гомотопность. Очевидно, что из гомеоморфности следует гомотопическая эквивалентность. Обратное неверно.

Пример 1. Гомотопическая эквивалентность: $\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Построим отображения

$$f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1,$$

где f — стандартное отображение окружности на плоскость, $g(p) = \frac{p}{|p|}$ — каждая точка отображается на точку на единичной окружности. Посмотрим на композиции:

$$q \in \mathbb{S}^1, \qquad g \circ f(q) = q \Longrightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1},$$
$$p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad f \circ g(p) = \frac{p}{|p|} \neq p \Longrightarrow f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}.$$

Однако отображения можно продеформировать. Построим гомотопию:

$$H(q,t) = \frac{q}{t|q| + (1-t)}, \qquad H(q,0) = \frac{q}{1} = q, \qquad H(q,1) = \frac{q}{|q|}.$$

Следовательно, $f \circ g \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$, а значит, $\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но они не гомеоморфны. □

При гомотопической эквивалентности еще говорят, что одно пространство (в данном случае — плоскость без точки) стягивается к другому пространству (окружности). С этим связано понятие ретракции.

Ретракт

Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$.

Определение 7. Отображение $r : X \longrightarrow X$, $r(X) \subset A$, называется *ретракцией* X на A, если $r|_A = \mathrm{id}_A$. Подмножество A называется ретрактом X.

Комментарий 4. Иногда рассматривают отображение $r : X \longrightarrow A$, так как образ X при этом отображении обязан лежать в A.

Пример 2. Рассмотрим $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и отображение $r : p \longrightarrow p/|p|$. Это отображение — ретракция, а окружность $\mathbb{S}^1$ — ретракт $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. □

Определение 8. Отображение $r : X \longrightarrow X$, $r(X) \subset A$, называется *деформационной ретракцией*, если $r|_A = \mathrm{id}_A$ и $r \sim \mathrm{id}_X$. Тогда A называется деформационным ретрактом X.

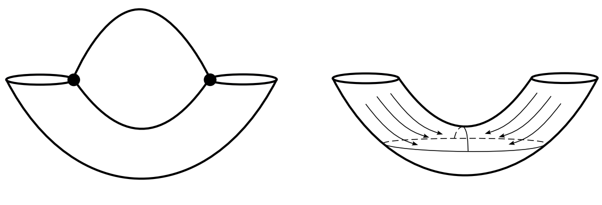

Рис. 1.6. Деформационная ретракция

Утверждение 1. *Если A — деформационный ретракт X, то A гомотопически эквивалентно X.*

Доказательство. Рассмотрим отображения $i : A \longrightarrow X$ — вложение, $r : X \longrightarrow A$ — деформационная ретракция. Тогда $r \circ i = \mathrm{id}_A$, так как $r|_A = \mathrm{id}_A$ по определению. Кроме того, $i \circ r \sim = \mathrm{id}_X$, так как $r \sim \mathrm{id}_X$. □

Стягивание — это гомотопия $r \sim \mathrm{id}_X$. Эти определения объясняют, что происходит в примерах на рисунках 1.5, 1.6. Подуровневые многообразия гомотопически эквивалентны результату приклейки клетки.

Важный пример. Продолжение

Теперь мы возвращаемся к примеру. На рисунке 1.7 справа стоят размерности приклеиваемых на каждом этапе клеток. Чтобы определить это число мы должны обратиться к анализу на многообразиях.

В анализе у функции нескольких переменных ищутся критические точки — приравнивается производная к нулю. Далее, для того чтобы найти, какие из этих точек являются максимумами и минимумами, исследуется матрица вторых производных — матрица Гессе. Это матрица билинейной формы, она может быть положительно или отрицательно определена и т.д. Ищется индекс билинейной формы. Здесь такая же ситуация.

Мы можем у функции высоты найти критические точки (на рис. 1.7 это s, r, p, q), определить матрицу Гессе, гессиан, то есть симметрическую билинейную форму на касательном пространстве. Затем можно найти у этой формы индекс — это размерность подпространства, на котором она отрицательно определена; а также можно найти вырожденность — это размерность подпространства, на котором она равна нулю. Оказывается, что размерности клеток — это индексы особых точек.

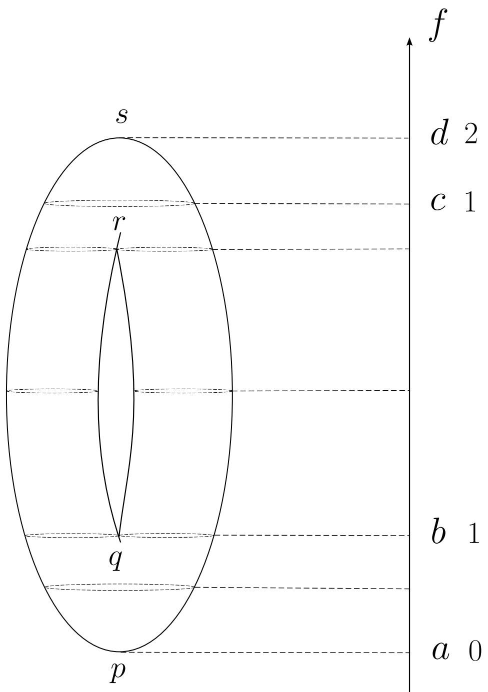

Рис. 1.7. Размерности дисков

Критические точки

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 9. Точка p является *критической* тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ для любой координаты x^i.

Это определение плохо тем, что оно зависит от координат. Вспомним, как устроен дифференциал:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Определение 10. Точка $p \in M$ является *критической* для f, если $d_p f = 0$.

Утверждение 2. *Точка p критическая для f тогда и только тогда, когда для любого вектора $X \in T_pM$ верно, что $Xf = 0$ (производная f вдоль вектора X).*

Доказательство. По определению $df(X) = Xf$. Значит, если точка критическая и дифференциал равен нулю, то на любом векторе он будет ноль. И наоборот. □

Упражнение 1. Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x) = x^{n+1}$ — функция высоты. Тогда p — критическая для функции f тогда и только тогда, когда T_pM горизонтально, т.е. ортогонально оси Ox^{n+1}.

Это упражнение иллюстрирует, что для тора уже найденные нами критические точки являются таковыми, потому что в них касательные пространства горизонтальны — рис. 1.8.

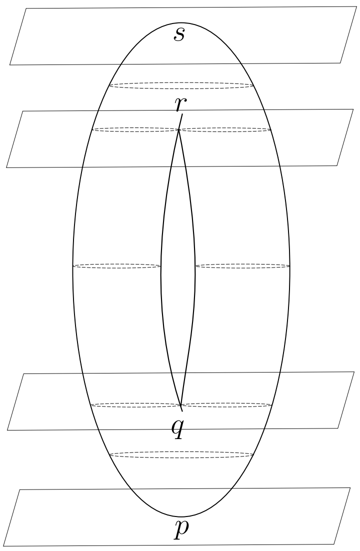

Рис. 1.8. В критических точках касательное пространство горизонтально

Гессиан в критической точке

Рассмотрим критическую точку p. Рассмотрим два вектора $X, Y \in T_pM$. Если есть вектор в точке, то его можно продлить до векторного поля. Пусть $\tilde{X}, \tilde{Y}$ — векторные поля в некоторой окрестности p, такие что $\tilde{X}(p) = X$, $\tilde{Y}(p) = Y$.

Как продлить до векторного поля? Например, рассмотрим локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$. Тогда вектор X имеет в разложении некоторые координаты (числа). Рассмотрим такое векторное поле в координатной окрестности: $X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Рассмотрим функцию $\tilde{Y} f$, затем рассмотрим производную в точке p (X определен только в точке p): число $X(\tilde{Y} f)$.

Определение 11. *Гессиан* функции f в критической точке p — это

$$\mathrm{Hess}_{f,p}(X,Y) = X(\tilde{Y}f).$$

Утверждение 3. $\mathrm{Hess}_{f,p}(X,Y) = \mathrm{Hess}_{f,p}(Y,X)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\mathrm{Hess}_{f,p}(X,Y) - \mathrm{Hess}_{f,p}(Y,X) = X(\tilde{Y}f) - Y(\tilde{X}f) = [\tilde{X},\tilde{Y}]f(p) = 0,$$

так как производная вдоль любого вектора в критической точке p равна нулю. □

Утверждение 4. *Гессиан в критической точке* $\mathrm{Hess}_{f,p}$ *— симметрическая билинейная форма на касательном пространстве* T_pM*.*

Определение 12. *Индекс критической точки* p функции f — это индекс (максимальная размерность подпространства, на котором $\mathrm{Hess}_{f,p}$ отрицательно определен) билинейной симметрической формы $\mathrm{Hess}_{f,p}$.

Вырожденность критической точки p функции f — это вырожденность (максимальная размерность подпространства, на котором $\mathrm{Hess}_{f,p} = 0$) билинейной симметрической формы $\mathrm{Hess}_{f,p}$.

Индекс критической точки — размерность приклеиваемой клетки (рис. 1.9).

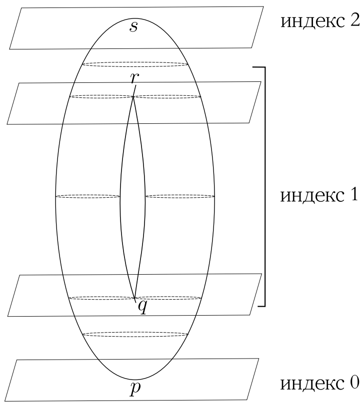

Рис. 1.9. Индексы критических точек на примере тора

Лекция 2

2. Гессиан функции в критической точке. Лемма Морса

Гессиан в критической точке

Рассмотрим отображение $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 13. Точка $p \in M$ является *критической* для f, если $d_p f = 0$.

Утверждение 5. *Точка p критическая для f тогда и только тогда, когда для любого вектора $X \in T_pM$ верно, что $Xf = 0$ (производная f вдоль вектора X) и тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ для любой координаты x^i.*

Определение 14. Пусть $p \in M$ — критическая точка для $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. *Гессиан* функции f в критической точке p на касательных векторах $X, Y \in T_pM$ — это

$$\mathrm{Hess}_{f,p}(X,Y) = X(\tilde{Y} f),$$

где $\tilde{X}, \tilde{Y}$ — векторные поля в некоторой окрестности p, такие что $\tilde{X}(p) = X$, $\tilde{Y}(p) = Y$.

Утверждение 6. *Гессиан в критической точке $\mathrm{Hess}_{f,p}$ — симметрическая билинейная форма на касательном пространстве T_pM.*

Гессиан в точке p — это симметрическая билинейная форма. У симметрической билинейной формы есть матрица в базисе (если выбрать базис, то у формы будет матрица). Если есть некоторые локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, то существует голономный базис $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$.

Утверждение 7. *Если есть локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности точки p, то в базисе $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$ в касательном пространстве T_pM гессиан $\mathrm{Hess}_{f,p}$ имеет матрицу*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n}(p) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Мы выбрали базис, поэтому можем рассматривать матрицу. Найдем элемент матрицы H_{ij}:

$$(\mathrm{Hess}_{f,p})_{ij} = \mathrm{Hess}_{f,p}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\right)(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p).$$

По теореме Шварца матрица симметрична. □

Комментарий 5. Определение гессиана в критической точке не требует никакой дополнительной структуры: мы использовали только многообразие, функцию и критическую точку.

Оказывается, нельзя определить гессиан в произвольной точке (в том числе в некритической) без некоторой дополнительной структуры — римановой метрики. □

Гессиан в произвольной точке

Рассмотрим гладкую функцию $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Ее дифференциал df — это 1-форма, или тензор типа (0,1), или сечение T^*M.

Пусть g — риманова метрика на M, (M, g) — риманово многообразие. Тогда есть связность Леви–Чевиты ∇. Так можно получить тензор типа (0,2) — ∇df. Другими словами,

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(E) = \Gamma(T^*M \otimes E)$$

— связность из сечения некоторого расслоения E «делает» 1-формы со значениями E — сечения произведения кокасательного расслоения на E, а следовательно, в нашем случае $\nabla df \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$.

Полученный объект является билинейной формой. В первом случае по определению: тензор типа (0,2) — это объект, в который можно подставить в каждой точке два вектора/векторных поля. Во втором случае мы получили расслоение, сечения которого — это билинейные формы. Итак, ∇df — билинейная форма на T_pM в каждой точке p.

Определение 15. *Гессиан функции f в произвольной точке p* — это $\mathrm{Hess}_{f,p} = \nabla df$.

Утверждение 8. *В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеем*

$$\mathrm{Hess}_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j.$$

Доказательство. Запишем дифференциал в локальных координатах:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \qquad (df)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Рассмотрим ковариантную производную тензора T_i:

$$T_{i;j} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} T_k.$$

Следовательно, после подстановки получим

$$(\nabla df)_{i;j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

□

Утверждение 9. *В критической точке определение гессиана 15 совпадает с определением 14 гессиана для критической точки.*

Доказательство. При $\frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = 0$ формула из утверждения 8 превращается в определение гессиана из определения 14:

$$\mathrm{Hess}_{f,p} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j.$$

□

Гессиан в бескоординатной записи

Как выглядит результат применения гессиана к двум касательными векторам — $\mathrm{Hess}_{f,p}(X, Y)$?

Пусть T — тензор типа (0,1), то есть дифференциальная форма. Если Y — векторное поле, то $T(Y)$ — гладкая функция, у которой есть дифференциал. Рассмотрим производную этой функции вдоль вектора (векторного поля) X:

$$X(T(\tilde{Y})) = (\nabla_X T)(Y) + T(\nabla_X \tilde{Y}).$$

В нашем случае $T = df$. Получаем $T(Y) = df(Y) = \tilde{Y} f$. Следовательно,

$$X(\tilde{Y} f) = (\nabla_X df)(Y) + df(\nabla_X \tilde{Y}).$$

Утверждение 10. *Для $X, Y \in T_pM$ верна формула*

$$\mathrm{Hess}_{f,p} = (\nabla_X df)(Y) + df(\nabla_X Y) = X(\tilde{Y} f) - df(\nabla_X \tilde{Y}),$$

где $\tilde{Y}$ — продолжение $Y \in T_pM$ в окрестность точки $p \in M$.

Утверждение 11. *В критической точке определение гессиана 15 совпадает с определением 14 гессиана для критической точки.*

Доказательство. В критической точке $p \in M$ верно равенство $d_p f = 0$. □

Упражнение 2. Доказать, что $\mathrm{Hess}_{f,p}(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y \rangle_p$.

Градиент

Рассмотрим риманово многообразие (M, g) и функцию f.

Пусть V — векторное пространство, V^* — его двойственное пространство, $\dim V < \infty$. Тогда существует канонический изоморфизм, причем, при наличии скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ он единственный. Он устроен так:

$$\xi \in V^* \longleftrightarrow v \in V,$$

что для любого вектора $w \in V$ верно $\xi(w) = \langle v, w \rangle$.

Определение 16. Градиент $\operatorname{grad}_p f \in T_pM$ — вектор, отвечающий $d_p f \in T_p^*M$: для любого $X \in T_pM$ верно $d_p f(X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle_p$.

Значит, $df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$ — векторное поле.

Упражнение 3. Верна формула $\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

Функции Морса

Пусть $p \in M$ — критическая точка f. Рассмотрим гессиан $\mathrm{Hess}_{f,p}$. Из линейной алгебры мы знаем, что если есть симметрическая билинейная форма на линейном пространстве, то можно выбрать базис в T_pM, в котором матрица $\mathrm{Hess}_{f,p}$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}
\end{array}\right)$$

Каждый блок имеет размер $\lambda \times \lambda$. Число λ — индекс $\mathrm{Hess}_{f,p}$.

Определение 17. Индекс λ критической точки p функции f — это индекс λ билинейной формы $\mathrm{Hess}_{f,p}$.

Утверждение 12. *Число λ — максимальная размерность подпространства, на котором билинейная форма $\mathrm{Hess}_{f,p}$ отрицательно определена.*

Индекс критической точки определен корректно (не зависит от выбор локальных координат), так как он определяется через индекс билинейной формы.

Определение 18 (Обозначение)**.** Дефект μ (степень вырожденности) билинейной формы $\mathrm{Hess}_{f,p}$.

Утверждение 13. *Дефект μ может быть определен инвариантным образом.*

Определение 19. Критическая точка p функции f *невырожденная*, если степень вырожденности $\mathrm{Hess}_{f,p}$ равна нулю.

Определение 20. Функция f называется функцией Морса, или *морсовской функцией*, если **все** ее критические точки невырождены.

Вопрос: есть ли на многообразии M морсовские функции? Ответ: да.

Пример 3. 1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $df = 2xdx$, $0 \in \mathbb{R}$ — критическая точка, $\mathrm{Hess}_{f,p} = 2dx \otimes dx$, следовательно, 0 — невырожденная критическая точка, f — морсовская функция.

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $df = 3x^2dx$, $0 \in \mathbb{R}$ — критическая точка функции f, $\mathrm{Hess}_{f,p} = 6xdx \otimes dx = 0dx \otimes dx$, следовательно, 0 — вырожденная критическая точка, f — неморсовская функция.

Лемма Морса

Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$.

Утверждение 14 (Формула Ньютона-Лейбница)**.**

$$\int_a^b \varphi' dt = \varphi\Big|_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Например,

$$\int_0^1 \frac{df(tx^1, \ldots, tx^n)}{dt} dt = f(x^1, \ldots, x^n) - f(0, 0).$$

Следовательно,

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0, \ldots, 0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n) x^i dt =$$
$$= f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n) dt.$$

Обозначим

$$g_i(x^1, \ldots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n) dt \in C^\infty.$$

Лемма 1. *Существуют такие гладкие функции $g_i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, что*

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \ldots, x^n).$$

Для сравнения запишем формулу Тейлора:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i + O(|x|).$$

Эта формула показывает, что функцию можно посчитать следующим образом: функция в нуле, плюс линейный добавок и некоторая ошибка. В формуле же с g_i «ошибки» нет, она точная.

Теорема 1 (Лемма Морса)**.** *Пусть p — невырожденная критическая точка функции f индекса λ. Тогда у p существует такая координатная окрестность U с локальными координатами $x^1, \ldots, x^n$, что f имеет вид*

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Замечание 1. $\mathrm{Hess}_{f,p} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \mathrm{diag}[-2, \ldots, -2, 2, \ldots, 2]$, где количество «-2» равно λ, а «2» — $n - \lambda$.

Доказательство. Можно считать, что $f(p) = 0$. Выберем такие локальные координаты в окрестности p, что $p = (0, \ldots, 0)$. По утверждению мы знаем, что $f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \ldots, x^n)$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^j} g_i(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial g_i}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^n),$$

где $\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$. Так как p — критическая, то для любого i имеем $\frac{\partial f}{\partial x^j}(0, \ldots, 0) = 0$, а значит $g_j(0, \ldots, 0) = 0$. Применяем утверждение еще раз:

$$g_j(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{k=1}^n x^k h_{jk}(x^1, \ldots, x^n),$$

следовательно,

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x^k x^i h_{ik}(x^1, \ldots, x^n).$$

Хотим записать с одним знаком суммы. Введем следующее обозначение

$$H_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}.$$

Итак,

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i,j=1}^n x^i x^j H_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$$

— симметрично по i и j.

Далее доказательство по индукции. Пусть уже есть такие координаты $u^1, \ldots, u^n$, что

$$f(u^1, \ldots, u^n) = \pm(u^1)^2 \pm \ldots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geqslant r} H_{ij}(u^1, \ldots, u^n).$$

Можно считать, что $H_{rr}(0, \ldots, 0) \neq 0$ (невырожденность!).

Введем функцию $\varphi(u^1, \ldots, u^n) = \sqrt{H_{rr}(0, \ldots, 0)}$ — как в методе Лагранжа. Вводим новые координаты $v^1, \ldots, v^n$ следующим образом: при $i \neq r$ верно $v^i = u^i$, при $i = r$

$$v^r(u^1, \ldots, u^n) = \varphi(u^1, \ldots, u^n) \left(u^r + \sum_{i \geqslant r} u_i \frac{H_{ir}(u^1, \ldots, u^n)}{H_{rr}(u^1, \ldots, u^n)} \right)$$

— это невырожденная замена, так как якобиан в точке $(0, \ldots, 0)$ не вырожден, так как на диагоналях стоят $\varphi(0, \ldots, 0) \neq 0$. Итак,

$$(v^r)^2 = \pm \left(H_{rr}(u^1, \ldots, u^n)(u^r)^2 + \sum_{i \geqslant r} u^i u^r H_{ir}(u^1, \ldots, u^n) + \sum_{i,j \geqslant r+1} u^i u^j \right),$$

следовательно

$$f(v^1, \ldots, v^n) = \pm(v^1)^2 + \pm \ldots \pm (v^{r-1})^2 \pm (u^r)^2 + \sum_{i,j \geqslant r+1} v^i v^j \tilde{H}_{ir}(v^1, \ldots, v^n).$$

Сделали шаг индукции, увеличив число квадратов на один. И так далее до n. $\square$

Замечание 2. Этот алгоритм схож с алгоритмом метода Лагранжа.

Замечание 3. Из леммы Морса следует, что в окрестности точки p нет критических точек, кроме самой $p = (0, \dots, 0)$. Это верно, так как у невырожденной квадратичной формы производная обращается в ноль только в точке ноль.

Иными словами, у морсовской функции все критические точки обязательно изолированные. В частности, если многообразие компактно, то у морсовской функции на нем только конечное число критических точек.

Лекция 3

3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Описание топологии многообразия через морсовскую функцию на нем

На этой лекции мы разберем вопрос о том, что происходит с топологией, когда мы не проходим через критическую точку или проходим через критическую точку. Для этого нам понадобятся однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Интегральные кривые

Расмотрим многообразие M с векторным полем X на нем (т.е. из каждой точки выходит вектор). Интегральные кривые — это кривые, что у них в каждой точке вектор скорости является вектором соответствующего векторного поля.

Определение 21. Кривая $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ называется *интегральной кривой* векторного поля X, если для любого момента времени $t \in (a, b)$ выполнено условие

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

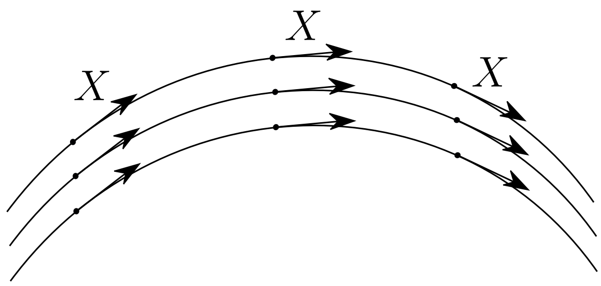

Рис. 3.1. Интегральные кривые

Интегральная кривая определена не единственным образом. Запишем ее определение в координатах $x^1, \ldots, x^n$.

$$\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) \text{ в базисе } \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Векторное поле в этом базисе запишется так: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда условие из определения 38 запишется так:

$$\dot{x}^1(t) = X^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}^n(t) = X^n(x^1(t), \ldots, x^n(t)).$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Чаще всего мы решаем не систему ОДУ, а задачу Коши — систему с начальным условием.

Фиксируем точку $p = (p^1, \ldots, p^n) \in M$, начальные условия — $\gamma(t_0) = p$, т.е.

$$\begin{cases} x^1(t_0) = p^1, \\ \vdots \\ x^n(t_0) = p^n. \end{cases}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

Однопараметрические группы диффеоморфизмов

Если есть задача Коши

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = p. \end{cases}$$

с решением $\gamma(t; p)$, то имеет место

Теорема 2 (Теорема о зависимости решения Задачи Коши от начальных данных)**.** *Пусть $p_0 \in M$. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и окрестность $U \ni p_0$, что для всякого $|t| < \varepsilon$ и всякого $p \in U$ существует гладкое по t решение $\gamma(t; p)$, и оно гладко зависит от точки p (то есть от координат $p^1, \ldots, p^n$ точки p).*

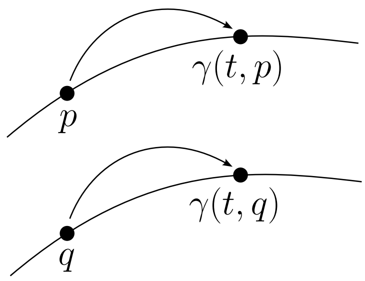

Рис. 3.2. Отображение Φ_t^X

Возникает отображение $\Phi_t^X : M \longrightarrow M$:

$$\Phi_t^X(p) = \gamma(t; p),$$

то есть каждая точка отображается в точку, куда мы вдоль интегральной кривой, которая в момент времени $t = 0$ находится в p, приходим за время t. Заметим, что $\Phi_0^X = \mathrm{id}$.

Это отображение определено не при всех t! Потому что решение дифференциального уравнения может не продолжаться.

Пример 4. Пусть $M = (-1; 1) \subset \mathbb{R}$, $X = \frac{d}{dt}$ — в каждой точке векторы длины 1. Тогда решения устроены так: $y(t, p) = p + t$. Действительно,

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} = X, \qquad \gamma(0) = p.$$

Тогда

$$\Phi_t^X(p) = p + t.$$

Ясно, что это отображение определено не при всех t: мы не можем заходить за границы интервала. Не существует в этом случае такого t, что $\Phi_t^X(p)$ определен на всем M: рассмотрим такую точку p, что расстояние от нее до точки 1 меньше, чем t, а значит, мы не сможем ее сдвинуть. □

Рассмотрим $K \subset M$ — компакт, и вне K векторное поле $X = 0$. Тогда $\dot{\gamma} = 0$, а значит $\gamma(t)$ постоянно, следовательно, $\Phi_t^X(p) \equiv p$, если $X(p) = 0$. Это означает, что Φ_t^X вне K определено для любого t.

Рассмотрим точку $p_0 \in M$, $p_0 \in K$. Существует ε_{p_0} и окрестность U_{p_0}, такая что $y(t, p)$ определено для $|t| < \varepsilon_{p_0}$, $p \in U_{p_0}$. Следовательно, Φ_t^X определено на U_{p_0} при $|t| < \varepsilon_{p_0}$. Так как K — компакт, то из любого его открытого покрытия существует конечное подпокрытие, каждую точку из открытого множества подпокрытия обозначим $p_1, \ldots, p_k$. Выберем $\varepsilon_M = (\varepsilon_{p_1}, \ldots, \varepsilon_{p_k})$. Следовательно, Φ_t^X определено на всем K при $|t| < \varepsilon_M$.

Получаем: если X равно нулю вне некоторого компакта, то существует такое $\varepsilon_M > 0$, что для всякого $|t| < \varepsilon_M$ отображение $\Phi_t^X : M \longrightarrow M$ определено на всем M.

Свойства однопараметрических диффеоморфизмов

Утверждение 15. *Заметим, что* $\Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$, *если все три отображения определены.*

Упражнение 4. Это следует из единственности решения задачи Коши. Свойство можно переписать так:

$$y(t, y(s, p)) = y(t + s, p).$$

Пусть $t = k \cdot \frac{\varepsilon_M}{2} + r$, где $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < \frac{\varepsilon_M}{2}$. Определим Φ_t^X так:

$$\Phi_t^X = \Phi_r^X \circ \underbrace{\Phi_{\frac{\varepsilon_M}{2}}^X \circ \ldots \circ \Phi_{\frac{\varepsilon_M}{2}}^X}_{k}.$$

Существование обратного: $(\Phi_{-t}^X)^{-1} = \Phi_t^X$ (оба определены для любого t из-за рассуждений о компактном множестве).

Итак, так как у Φ_t^X есть обратный и они оба гладкие, то Φ_t^X — это диффеоморфизм.

Определение 22. Если Φ_t^X определены для любого t, то они называются однопараметрической группой диффеоморфизмов.

Почему это группа? Рассмотрим отображение $\mathbb{R} \longrightarrow \{$множество диффеоморфизмов $\Phi_t^X\}$, которое устроено так $t \mapsto \Phi_t^X$. Это гомоморфизм, так как есть свойство $\Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X$.

Утверждение 16. *Если векторное поле X обращается в ноль вне некоторого компакта K, то оно порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов Φ_t^X, т.е. Φ_t^X определено для любого t и $\Phi_{t+s}^X = \Phi_t^X \circ \Phi_s^X$ верно для любого t, s.*

Введем на M риманову метрику g. Тогда есть векторное поле $\operatorname{grad} f$. Он направлен в сторону роста функции — рис. 3.3.

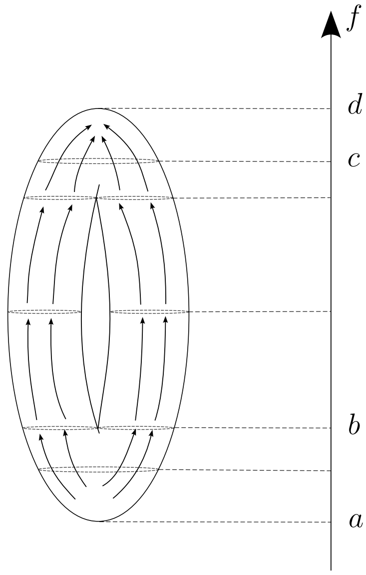

Рис. 3.3. Векторное поле $\operatorname{grad} f$ на торе

Теорема о подуровневых многообразиях

Рассмотрим функцию высоты $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Очевидно, что $M^a \subset M^b$.

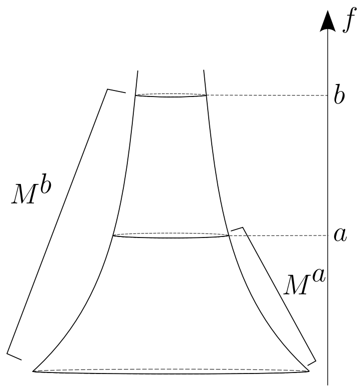

Рис. 3.4. Подуровневые многообразия $M^a \subset M^b$

Теорема 3. *Пусть $f^{-1}([a,b])$ компактно и не содержит критических точек. Тогда M^a — деформационный ретракт M^b, а поэтому $M^a \sim M^b$, более того, M^a диффеоморфно M^b.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ так, что

1) на $f^{-1}([a,b])$
$$\rho(p) = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|^2}.$$

2) вне некоторого компакта K, содержащего $f^{-1}([a,b])$, функция $\rho = 0$.

3) ρ гладкая.

Рассмотрим векторное поле $X = \rho \operatorname{grad} f$. Вне K поле $X = 0$, поэтому для любого t определены диффеоморфизмы Φ_t^X.

Пусть $\gamma(t)$ — интегральная кривая X.

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(\dot\gamma(t)) = df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle = \rho|\operatorname{grad} f|^2\Big|_{f^{-1}([a,b])} = 1.$$

Следовательно, если $p \in f^{-1}([a,b])$, $\Phi_t^X \in f^{-1}([a,b])$, то

$$f(\Phi_t^X(p)) : f(p) + t.$$

Рассмотрим отображение $\Phi_{b-a}^X : M \longrightarrow M$. Оно переводит M^a в M^b, и это диффеоморфизм.

Деформационная ретракция:

$$r_t(p) = \begin{cases} \Phi^X_{t(a-f(p))}(p), & p \in M^b \setminus M^a, \\ p, & p \in M^a, \end{cases}$$

где $r_0 = \Phi_0^X = \mathrm{id}$,

$$r_1(p) = \begin{cases} \Phi^X_{a-f(p)}(p), & p \in M^b \setminus M^a, \\ p, & p \in M^a, \end{cases}$$

Это непрерывное отображение, которое отображает непрерывно на M^a, при этом неподвижно на M^a.

Итак, $M^a \sim M^b$ (гомотопически эквивалентны). □

Получаем, что если рассматриваемое подмножество на многообразии компактно и на нем нет критических точек, то все подуровневые многообразия диффеоморфны и соответствующее отображение — деформационный ретракт. То есть если мы движемся по многообразию, по компакту в направлении роста функции высоты и не проходим критическую точку, то у нас ничего не меняется с точки зрения гладкого многообразия (так как все подуровневые многообразия диффеоморфны), ни с точки зрения топологии (так как все подуровневые многообразия гомотопически эквивалентны).

Замечание 4. Условие компактности опустить нельзя — рис. 3.5.

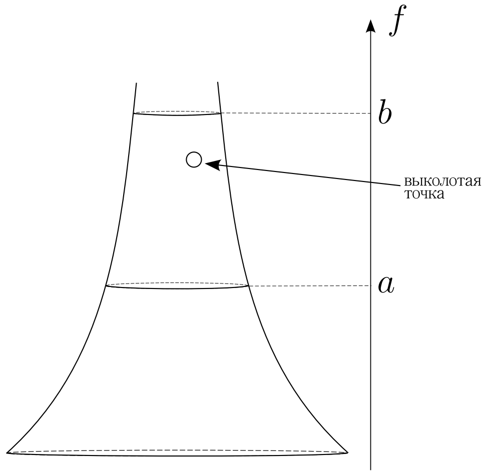

Рис. 3.5. Контрпример к теореме 3

Теорема о подуровневых многообразиях—2

Теорема 4 (рис. 3.6)**.** *Рассмотрим гладкую функцию высоты $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, p — невырожденная критическая точка f индекса λ. Пусть существует $\varepsilon > 0$ такой, что $f^{-1}([f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon])$ компактно и не содержит критических точек, кроме p. Тогда $M^{f(p)+\varepsilon} \sim M^{f(p)-\varepsilon} \cup_f \mathbb{D}^\lambda$, то есть $M^{f(p)+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип $M^{f(p)-\varepsilon}$ с приклеенной клеткой λ.*

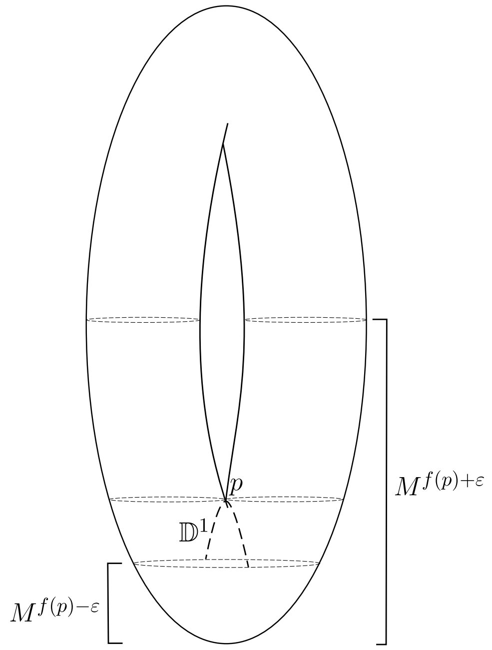

Рис. 3.6. Подуровневые многообразия $M^{f(p)-\varepsilon}, M^{f(p)+\varepsilon}$

Доказательство. Пусть $c = f(p)$. Применим лемму Морса к точке p: существует окрестность $U \ni p$ и такие локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, что

$$f(x) = c - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Можно считать, что $U = \{x \mid |x| < \sqrt{2\varepsilon}\}$.

Случаи $\lambda = 0$, $\lambda = n$ рассматриваются отдельно — упражнение.

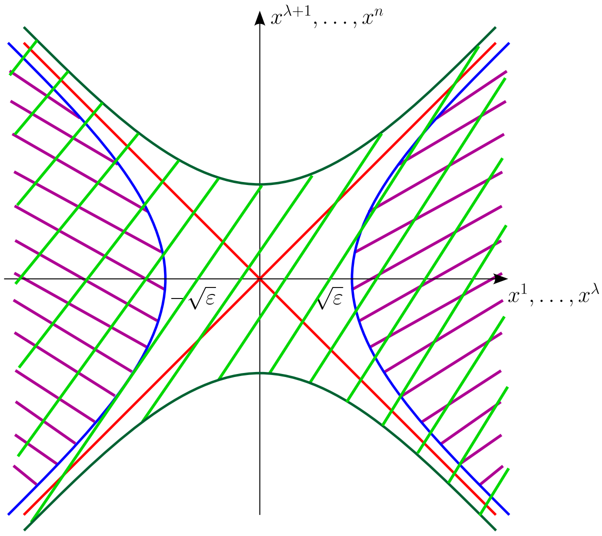

Рис. 3.7. Рисунок к доказательству теоремы 5

Конус $f(x) = x = f(p) = 0$ (красным цветом на рис. 3.7):

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0.$$

Кривые $f(x) = c - \varepsilon$ (кривая синего цвета на рис. 3.7):

$$-\varepsilon = -(x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 - (x^{\lambda+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = \varepsilon.$$

Фиолетовой штриховкой на рис. 3.7 обозначено $M^{c-\varepsilon}$.

Кривые $f(x) = c + \varepsilon$ (кривая зеленого цвета на рис. 3.7):

$$\varepsilon = -(x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 - (x^{\lambda+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = \varepsilon.$$

Светло-зеленой штриховкой на рис. 3.7 обозначено $M^{c+\varepsilon}$.

Перерисуем рисунок в трехмерном пространстве. На рисунке 3.8 оранжевым показан диск (клетка) $\mathbb{D}^\lambda$:

$$x^{\lambda+1} = \ldots = x^n = 0,$$

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Осталось понять, как устроена деформационная ретракция $M^{c+\varepsilon}$ на $M^{c-\varepsilon} \cup_f \mathbb{D}^\lambda$. Нужно внутреннюю часть, заштрихованную зеленым, но не заштрихованную фиолетовым на рис. 3.7, отобразить на диск $\mathbb{D}^\lambda$, оставив фиолетовую часть неподвижной.

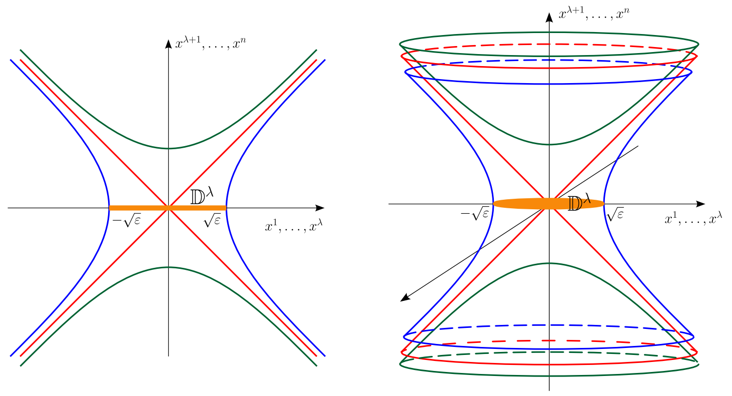

Рис. 3.8. Рисунок к доказательству теоремы 5

□

Упражнение 5. Доказать теорему 5 для случаев $\lambda = 0$, $\lambda = n$.

Лекция 4

4. Функции Морса и клеточная структура на многообразиях

Продолжение доказательства теоремы 5

Теорема 5 (рис. ??). *Рассмотрим гладкую функцию высоты $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, p — невырожденная критическая точка f индекса λ. Пусть существует $\varepsilon > 0$ такой, что $f^{-1}([f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon])$ компактно и не содержит критических точек, кроме p. Тогда $M^{f(p)+\varepsilon} \sim M^{f(p)-\varepsilon} \cup_f \mathbb{D}^\lambda$, то есть $M^{f(p)+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип $M^{f(p)-\varepsilon}$ с приклеенной клеткой λ. Обозначение: $f(p) = c$.*

Доказательство. Применим лемму Морса к точке p: существует окрестность $U \ni p$ и такие локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$, что

$$f(x) = c - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Уменьшив при необходимости ε и U, можно считать, что

$$U = \{x \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 2\varepsilon\}.$$

Имеем

$$M^{c-\varepsilon} = f^{-1}((-\infty, c-\varepsilon]) = \{x \in M \mid f(x) \leqslant c - \varepsilon\}.$$

$$\mathbb{D}^\lambda : \qquad x^{\lambda+1} = \ldots = x^n = 0, \qquad (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Стрелками обозначена ретракция $M^{c+\varepsilon}$ на $M^{c+\varepsilon} \cup_f \mathbb{D}^\lambda$. Однако не очевидно, как восстановить ретракцию вне этой области, что мы сейчас и обсудим.

Рассмотрим функцию $\mu : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\mu(0) > \varepsilon$, $\mu(r) = 0$ при $r \geqslant 2\varepsilon$, $r \in \mathbb{R}$. Кроме того, нужно потребовать, чтобы $-1 < \mu'(r) < 0$.

Определим новую функцию $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ так:

1) все U положим $F = f$;

2) в U положим $F = f - \mu((x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2 + 2(x^{\lambda+1})^2 + \ldots + 2(x^n)^2)$ — гладкая функция

Введем обозначения: $\xi = (x^1)^2 + \ldots + (x^\lambda)^2$, $\eta = (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2$. Тогда $f = c - \xi + \eta$, $F = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$ в U.

Утверждение 17. $F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = M^{c+\varepsilon} = f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon])$.

Доказательство. Вне U у нас $F = f$. Внутри U

$$F \leqslant f = c - \xi + \eta \leqslant c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leqslant c + \varepsilon.$$

Так как $U = \{x \mid |x|^2 \leqslant 2\varepsilon\} = \{x \mid \xi + \eta \leqslant 2\varepsilon\}$. □

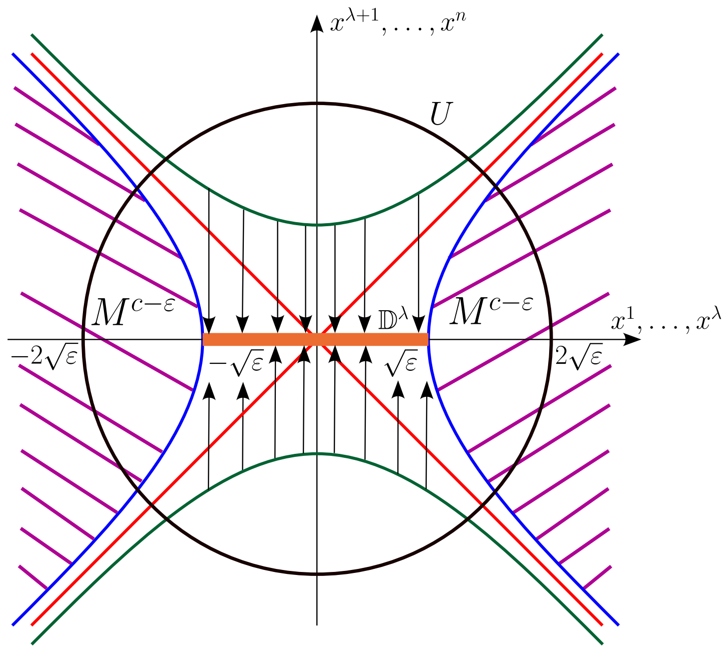

Рис. 4.1. Рисунок к доказательству теоремы 5

Где критические точки у F? Вне U имеем $F = f$, следовательно, вне U критические точки у $F = f$ совпадают.

Внутри U?

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - \mu'(\xi + 2\eta) \geqslant 1.$$

Следовательно, у F внутри U критические точки такие, что

$$\begin{cases} d\xi = 0, \\ d\eta = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\xi = 2x^1 dx^1 + \ldots + 2x^\lambda dx^\lambda, \\ d\eta = 2x^{\lambda+1} dx^{\lambda+1} + \ldots + 2x^n dx^n, \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} x^1 = 0, \\ \vdots \\ x^n = 0 \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда это точки P.

Утверждение 18. *На всем M у F и f критические точки совпадают.*

Так как $F \leqslant f$ везде, то $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Имеем

$$F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon,$$

так как $f(p) = c$, $\mu(0) < \varepsilon$, то есть $p \notin F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Утверждение 19. *1) $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, но это не «равно».*

2) $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ компактно.

3) $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ не содержит критических точек.

4) Поэтому $F^{-1}([-\infty, c-\varepsilon])$ является деформационным ретрактом $F^{-1}([-\infty, c+\varepsilon])$, в частности, они гомотопически эквивалентны.

Пусть $H := F^{-1}([-\infty, c-\varepsilon]) \setminus M^{c-\varepsilon} \subset U$, поэтому весь анализ сводится к происходящему внутри U.

Итак, H — ретракт $M^{c-\varepsilon} \cup_f \mathbb{D}^\lambda$. □

Клеточная структура

Утверждение 20. *Если M^a и M^b компактны, $a < b$ и $f^{-1}([a, b])$ нет критических точек, то M^a является деформационным ретрактом M^b. В частности, $M^a \sim M^b$. Более того, M^a диффеоморфно M^b.*

Утверждение 21. *Если M^a и M^b компактны, $a < b$ и в $f^{-1}([a, b])$ есть k критических точек $p_1, \ldots, p_k$ индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тогда M^b деформационно ретрагируется на*

$$M^a \cup_{f_1} \mathbb{D}^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{f_k} \mathbb{D}^{\lambda_k}.$$

Определение 23 (индуктивное определение)**.** Клеточный комплекс (CW-комплекс, клеточное пространство):

0) $e_0^1, \ldots, e_0^k$ — 0-мерные клетки = точки

$$e_0^1 \sqcup \ldots \sqcup e_0^k = \mathrm{sk}_0 X = X_0$$

— 0-скелет X.

1) $\mathbb{D}_1^1, \ldots, \mathbb{D}_l^1$ — 1-мерные диски,

$$\mathrm{sk}_0 X \cup_{f_1} \mathbb{D}^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{f_l} \mathbb{D}^{\lambda_l} = \mathrm{sk}_1 X = X_1,$$

то есть e_1^i — образ $f_i(\mathbb{D}_i^1)$ — 1-мерная клетка номер i.

2) $\mathbb{D}_1^2, \ldots, \mathbb{D}_n^2$ — 1-мерные диски,

$$\mathrm{sk}_1 X \cup_{f_1} \mathbb{D}^{\lambda_1} \cup \ldots \cup_{f_n} \mathbb{D}^{\lambda_n} = \mathrm{sk}_2 X = X_2,$$

то есть e_2^i — образ $\tilde{f}_i(\mathbb{D}_i^2)$ — 2-мерная клетка номер i.

И так далее.

Примеры клеточных пространств

Пример 5. S^0 — это e_0^1;
S^1 — это $e_0^1 \sqcup e_1^1$;
S^2 — это $e_0^1 \sqcup e_2^1$;
S^n — это $e_0^1 \sqcup e_n^1$.
Однако e_1^1 можно в случае S^1 заменить: $e_0^1 \sqcup e_1^1 \sqcup e_1^2 \sqcup e_0^2$.

У одного и того же объекта могут быть разные клеточные пространства.
Отображение приклейки клеток определяет топологию!

Пример 6. Рассмотрим $\mathbb{RP}^n \simeq S^n/\sim$. Вопрос: как приклеивается двумерная к одномерному остову?

$$\mathbb{D}^2: \qquad \mathrm{id}: \partial\mathbb{D}^2 = S^1 \longrightarrow S^1 = \mathrm{sk}_1\mathbb{D}^2;$$

$$\mathbb{RP}^2: \qquad z \mapsto z^2 \text{ наматывание окружности на себя дважды.}$$

$$\partial\mathbb{D}^2 = S^1 \longrightarrow S^1 = \mathrm{sk}_1\mathbb{RP}^2.$$

Рассмотрим непрерывное отображение $f : \partial\mathbb{D}^n \longrightarrow X$, где X — клеточное пространство.

Утверждение 22. *Существует гомотопное f отображение g такое, что $f(\partial\mathbb{D}^n) \subset \mathrm{sk}_{n-1}X$.*

Утверждение 23. $X \cup_f \mathrm{D}^n \sim X \cup_g \mathrm{D}^n$ *гомотопически эквивалентны.*

Теорема 6. *Пусть M компактно, а $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — морсовская функция. Тогда M гомотопически эквивалентно клеточному пространству, у которого клетки размерности λ находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками индекса λ.*

Лекция 5

5. Немного об алгебраической топологии

Степень отображения

Пусть M, N — многообразия, $\dim M = \dim N$ ориентированы. Пусть $f : M \longrightarrow N$ — гладкое отображение.

Пусть $f^{-1}(q)$, $q \in N$ состоит из некритических точек $p_1, \ldots, p_k$,

$$\deg f = \sum_k \operatorname{sqn} \det J_{p_i}.$$

Пусть q, p имеют координаты

$$q = y^1, \ldots, y^n, \qquad p = x^1, \ldots, x^n,$$

$$\det J_{p_i} = \det \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p_i).$$

Утверждение 24. *Степень* $\deg f$ *не зависит от выбора* q.

Пример 7. Пусть $f : S^1 \longrightarrow S^1$, $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f — 2π-периодическая функция $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ с точностью до добавления целого кратного $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Окружность можно представить так: $S^1 = \{z \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Тогда «наматывание на окружность задается отображением»

$$\omega_k : S^1 \longrightarrow S^1, \qquad w_k : z \mapsto z^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Утверждение 25. $[S^1, S^1] \simeq \mathbb{Z}$ *— множество классов гомотопической эквивалентности отображений* $S^1 \longrightarrow S^1$. *Более того, в каждом классе эквивалентности есть ровно одно* ω_k, *и это соответствие устроено так:* $[\omega_k] \leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$.

Определение 24. $\deg f := k$, отвечающее $[f]$.

Фундаментальная группа

Фундаментальная группа топологического пространства X с отмеченной точкой x_1 — $\pi(X, x_1)$. Элементы — гомотопические классы петель, то есть отображений $(S^1, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$.

$\pi_n(X, x_1)$ — n-я гомотопическая группа топологического пространства X с отмеченной точкой x_1. Элементы — гомотопические классы n-сфероидов $(S^n, x_0) \longrightarrow (X, x_1)$.

Верно следующее:

$$S^2/S^{n-1} = S^n \vee S^2.$$

Для классов эквивалентности выполнено $[fg] =: [f][g]$.

Утверждение 26. $\pi_n(X, x_1)$ *— группа.*

Утверждение 27. *$\pi_n(X, x_1)$ при $n \geqslant 2$ — коммутативная группа.*

Факт. $\pi_n(X, x_1)(S^n, x_1) \simeq \mathbb{Z}$. При $n = 1$ это знаем, при $n = 2$ из точной последовательности для расслоения Хопфа $S^3 \longrightarrow S^2$, при $n \geqslant 3$ — теорема Фрейденталя о надстройке.

Факт. Для гладкого f определение степени через $[f]$ совпадает со степенью, определенной через $\operatorname{sqn} \det J$.

Клеточные гомологии

Мы определим клеточные гомологии.

Пусть X — клеточное пространство.

Лемма 2. *Любое клеточное пространство (линейно связное) гомотопически эквивалентно клеточному пространству с одной нульмерной клеткой.*

e^0 — единственная нульмерная клетка, $e^1_1, \ldots, e^1_{k_1}$ — одномерные клетки, $e^2_1, \ldots, e^2_{k_2}$ — двумерные клетки и т.д.

Пусть G — абелева группа.

$$C^n(X, G) = \{a_1 e^n_1 + \ldots + a_{k_n} e^n_{k_n} \mid a_i \in G\}$$

— n-цепи. Граничное отображение, дифференциал

$$\partial : C^n(X, G) \longrightarrow C^{n-1}(X, G).$$

$$\partial(\sum a_i e^n_i) = \sum a_i \partial e^n_i,$$

$$\partial e^n_i = \sum_j [e^n_i : e^{n-1}_j] e^{n-1}_j,$$

где $[e^n_i : e^{n-1}_j] \in G$ — коэффициент инцидентности.

e^n_i:

$$f : \partial \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathrm{sk}_{n-1} X \longrightarrow \mathrm{sk}_{n-1} X / \mathrm{sk}_{n-2} X = S^{n-1} \vee \ldots \vee S^{n-1},$$

каждая из которых отвечает e^{n-1}_j.

Если $f_j : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, то $[e^n_i : e^{n-1}_j] = \deg f_j$.

Факт. $\partial^2 = 0$.

$$C_n(X, G) \longrightarrow C_{n-1}(X, G) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0(X, G)$$

— n-цепи.

$$Z_n(X, G) = \{c \in C_n(X, G) \mid \partial c = 0\}$$

— n-циклы.

$$B_n(X, G) = \{c \in C_n(X, G) \mid c = \partial b, b \in C_{n+1}(X, G)\}.$$

Так как $\partial^2 = 0$, то $B_n(X, G) \subset Z_n(X, G)$.

Определение 25. $H_n(x, G) = Z_n(X, G)/B_n(X, G)$ — n-я группа клеточных гомологий пространства X с коэффициентами в абелевой группе G.

Лекция 6

6. Примеры вычисления клеточных гомологий. n-мерное комплексное проективное пространство. Неравенства Морса

Примеры вычисления клеточных гомологий

Пример 8. S^n, $n \geqslant 2$.

$$C_k(S^n, G) = \begin{cases} ae^n,\ a \in G,\ k = n \\ ae^0,\ a \in G,\ k = 0 \\ 0,\ k \neq 0, n \end{cases}$$

Имеем $\partial e^n = 0$, $\partial e^0 = 0$;

$$Z_k(S^n, G) = C_k(S^n, G), \quad B_k(S^n, G) = 0,$$

$$H_k(S^n, G) = \begin{cases} G,\ k = 0, n \\ 0,\ k \neq 0, n \end{cases}$$

$$H_k(S^n, G) = Z_k(S^n, G)/B_k(S^n, G) = C_k(S^n, G).$$

Пример 9. S^1:

$$\partial e^n = \partial e^1 = e^0 - e^0 = 0,$$

$$Z_1(S^n, G) = C_1(S^n, G)$$

$$H_1(S^n, G) = G, \qquad H_0(S^n, G) = G, \qquad H_k(S^n, G) = 0,\ k \neq 0, 1.$$

□

Пример 10. Рассмотрим тор T^2.

$$\partial e^0 = 0, \qquad \partial e^1_1 = e^0 - e^0 = 0,$$

$$\partial e^1_2 = e^0 - e^0 = 0, \qquad \partial e^2 = e^1_1 + e^1_2 - e^1_1 - e^1_2 = 0.$$

$$C_k(T^2, G) = \begin{cases} \{ae^2, a \in G\} \simeq G,\ k = 2 \\ \{ae^1_1 + b^1_2, a, b \in G\} \simeq G \oplus G,\ k = 1, \\ \{ae^0, a \in G\} \simeq G,\ k = 0 \end{cases}$$

$$Z_k(T^2, G) = C_k(T^2, G), \qquad B_k(T^2, G) = 0.$$

$$H_k(T^2, G) = \begin{cases} G,\ k = 0 \\ G \oplus G,\ k = 1, \\ G,\ k = 2, \\ 0,\ k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

□

Пример 11. Рассмотрим тор KL — бутылка Клейна.

$$\partial e^0 = 0, \qquad \partial e_1^1 = e^0 - e^0 = 0,$$

$$\partial e_2^1 = e^0 - e^0 = 0, \qquad \partial e^2 = e_1^1 + e_2^1 - e_1^1 + e_2^1 = 2e_2^1.$$

Ответ зависит от G!

Если $G = \mathbb{Z}$, то

$$C_0(KL, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \qquad C_1(KL, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$C_2(KL, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

$$Z_0(KL, \mathbb{Z}) = C_0(KL, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \qquad Z_1(KL, \mathbb{Z}) = C_1(KL, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$Z_2(KL, \mathbb{Z}) \simeq 0,$$

$$B_0(KL, \mathbb{Z}) = 0, \qquad B_1(KL, \mathbb{Z}) = \{2ae_2^1 \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

$$B_2(KL, \mathbb{Z}) = 0,$$

$$H_k(KL, G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \ k = 1, \\ 0, \ k = 2, \\ 0, \ k \neq 0, 1, 2 \end{cases}$$

Пусть теперь $G = \mathbb{Z}_2$. Имеем

$$\partial e^0 = 0, \qquad \partial e_1^1 = 0,$$

$$\partial e_2^1 = e^0 - e^0 = 0, \qquad \partial e^2 = e_1^1 + e_2^1 - e_1^1 + e_2^1 = 2e_2^1 = 0.$$

$$Z_2(KL, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \qquad B_2(KL, \mathbb{Z}_2) = 0,$$

$$H_2(KL, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

□

Комплексное проективное n-мерное пространство $\mathbb{CP}^n$

Комплексное проективное n-мерное пространство $\mathbb{CP}^n$: $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$

$$(z^0, \ldots, z^n) \sim (\lambda z^0, \ldots, \lambda z^n), \quad \lambda \neq 0.$$

Классы эквивалентности — $[z^0 : \ldots : z^n]$ однородные координаты, U_i — i—-я аффинная карта

$$U_i \subset \mathbb{CP}^n = \{[z^0 : \ldots : z^n] \mid z^i \neq 0\},$$

$$[z^0 : \ldots : z^i : \ldots : z^n] = [\frac{z^0}{z^i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{z^n}{z^i}],$$

получаем

$$\left(\frac{z^0}{z^i}, \ldots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \ldots, \frac{z^n}{z^i}\right) \in \mathbb{C}^n$$

— неоднородные координаты в U_i.

Вещественное $2n$-мерное многообразие. Можно так отнормировать, что $|z^0|^2 + \ldots + |z^n|^2 = 1$,

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim) = S^{2n+1}/\sim,$$

$\mathbb{CP}^n$ — компакт.

Пусть U_i — i-я аффинная карта, $\frac{z^j}{z^i}$ — обычные неоднородные координаты. Подправим их. Мы берем $[z^0 : \ldots : z^n]$ так, что $|z^0|^2 + \ldots + |z^n|^2 = 1$:

$$|z^i|\frac{z^j}{z^i}.$$

Они корректно определены, так как

$$[z^0 : \ldots : z^n] \longrightarrow [\lambda z^0 : \ldots : \lambda z^n], \quad |\lambda| = 1,$$

$$[z^0 : \ldots : z^n] \longrightarrow |z^i|\frac{z^j}{z^i} \qquad |\lambda z^i|\frac{\lambda z^j}{\lambda z^i} = |\lambda||z^i|\frac{z^j}{z^i} = |z^i|\frac{z^j}{z^i}.$$

Рассмотрим U^0:

$$|z^0|\frac{z^j}{z^0} = x^j + iy^i, \quad x^j, y^i \in \mathbb{R}.$$

Здесь $x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n$ — координаты в U_0.

$$f = c_0|z^0|^2 + \ldots + c_n|z^n|^2, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$j \neq 0 \qquad |z^j|^2 = |z^0|^2\frac{|z^j|^2}{|z^0|^2} = (x^j)^2 + (y^j)^2,$$

$$j = 0 \qquad |z^0|^2 = 1 - |z^1|^2 - \ldots - |z^n|^2.$$

В U_0 имеем

$$\begin{aligned} f = c_0(1-|z^1|^2-\ldots-|z^n|^2)+c_1|z^1|^2+\ldots+c_n|z^n|^2 = c_0+(c_1-c_0)|z^1|^2+\ldots+(c_n-c_0)|z^n|^2 = \\ = c_0 + (c_1 - c_0)((x^1)^2 + (y^1)^2) + \ldots + (c_n - c_0)((x^n)^2 + (y^n)^2). \end{aligned}$$

Критическая точка $(0, \ldots, 0) \leftrightarrow [1 : 0 : \ldots : 0]$. Она невырождена, если $c_0 \neq c_i$, индекс равен количеству i таких, что $c_i < c_0$.

Имеем

$$C_k(\mathbb{CP}^n, G) = \begin{cases} G, & k = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 \end{cases}$$

$$\partial e^{2k} = 0, \qquad Z_k(\mathbb{CP}^n, G) = C_k(\mathbb{CP}^n, G), \qquad B_k(\mathbb{CP}^n, G) = 0.$$

Получаем

$$H_k(\mathbb{CP}^n, G) = Z_k(\mathbb{CP}^n, G)/B_k(\mathbb{CP}^n, G) = C_k(\mathbb{CP}^n, G) = \begin{cases} G, & k = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 \end{cases}$$

Число Бетти

Пусть $G = F$ — поле. Тогда $H_k(X, F)$ — векторное пространство над F.

Определение 26. Числом Бетти называется $b_k = \dim_F H_k(X, F)$ — k-е число Бетти X с коэффициентами в F.

Утверждение 28. $\dim_F C_k(X, F)$ — *количество критических точек f индекса k. Обозначение $\mu_k(f)$.*

Имеем

$$b_k = \dim_F H_k(X, F) = \dim_F Z_k(X, F)/B_k(X, F) \leqslant \mu_k(f).$$

Утверждение 29 (Неравенство Морса)**.** *Пусть f — морсовская функция на компактном M. Тогда для всякого $k = 0, \dots, \dim M$*

$$b_k \leqslant \mu_k(f).$$

Определение 27. Рядом Пуанкаре X с коэффициентами в F называется

$$P_{X,F} = \sum k = 0 b_k(X, F)t^k.$$

Если X компактное многообразие, то это многочлен.

Пример 12. $P_{\mathbb{CP}^\infty, F} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots$.

Определение 28. Многочлен Морса морсовской функции f на M:

$$P_f = \sum_{p_{cr.points}} t^{\lambda(p)} = \sum_k \mu_k(f)t^k.$$

Теорема 7. *Будем говорить, что $X(t) \succ Y(t)$, если существует Q с неотрицательными коэффициентами такой, что*

$$X(t) = Y(t) + (1 + t)Q(t).$$

Верно следующее

$$P_f \succ P_{M,F}.$$

Лекция 7

7. Неравенства Морса. Многообразия как клеточные пространства. Теорема Майера-Виеториса

Неравенства Морса

Пусть $G = F$ — поле. Тогда $H_k(X, F)$ — векторное пространство над F.

Определение 29. Числом Бетти называется $b_k = \dim_F H_k(X, F)$ — k-е число Бетти X с коэффициентами в F.

Утверждение 30. $\dim_F C_k(X, F)$ — *количество критических точек f индекса k. Обозначение $\mu_k(f)$.*

Имеем
$$b_k = \dim_F H_k(X, F) = \dim_F Z_k(X, F)/B_k(X, F) \leqslant \mu_k(f).$$

Утверждение 31 (Неравенство Морса)**.** *Пусть f — морсовская функция на компактном M. Тогда для всякого $k = 0, \ldots, \dim M$*
$$b_k \leqslant \mu_k(f).$$

Определение 30. Рядом Пуанкаре X с коэффициентами в F называется
$$P_{X,F} = \sum k = 0 b_k(X, F)t^k.$$

Если X компактное многообразие, то это многочлен.

Пример 13. $P_{\mathbb{CP}^\infty, F} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \ldots$.

Определение 31. Многочлен Морса морсовской функции f на M:
$$P_f = \sum_{p_{cr.points}} t^{\lambda(p)} = \sum_k \mu_k(f)t^k.$$

Теорема 8. *Будем говорить, что $X(t) \succ Y(t)$, если существует Q с неотрицательными коэффициентами такой, что*
$$X(t) = Y(t) + (1 + t)Q(t).$$

Верно следующее
$$P_f \succ P_{M,F}.$$

Цепные комплексы

Рассмотрим последовательность отображений

$$\to C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2} \to$$

Имеем $\partial^2 = 0$, то есть $\partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$, $\mathrm{Im}\partial_k \subset \mathrm{Ker}\,\partial_{k-1}$.

$$H_k(C., \partial.) = \mathrm{Ker}\,\partial_k / \mathrm{Im}\partial_{k+1}.$$

Пусть M — клеточное топологическое пространство. Тогда

$$C_k(M, G) = \{\sum a_k \sigma_i^k \mid \sigma^k,\ a_i \in G\},$$

$$H_k(M, G) := H_k(C.(M, G), \partial.).$$

Сейчас будем рассматривать случай $G = F$ поле, следовательно, C_k — векторное пространство.

Определение 32. Последовательность

$$\to V_k \xrightarrow{f_k} V_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} V_{k+2} \to$$

векторных пространств V_k и их гомоморфизмов f_k называется точной, если $\mathrm{Im}\, f_k = \mathrm{Ker}\, f_{k+1}$.

Последовательность точна в V_k, если $\mathrm{Im}\, f_{k-1} = \mathrm{Ker}\, f_k$.

Теорема Майера-Виеториса

Рассмотрим короткие точные последовательности

$$0 \to C_{k+1}(Y) \xrightarrow{i_{k+1}} C_{k+1}(X) \xrightarrow{j_{k+1}} C_{k+1}(X, Y) \to 0$$

$$0 \to C_k(Y) \xrightarrow{i_k} C_k(X) \xrightarrow{j_k} C_k(X, Y) \to 0$$

$$0 \to C_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_{k-1}} C_{k-1}(X) \xrightarrow{j_{k-1}} C_{k-1}(X, Y) \to 0$$

Кроме того, есть отображения

$$\to C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X) \to$$

$$\to C_{k+1}(Y) \xrightarrow{\partial} C_k(Y) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(Y) \to$$

$$\to C_{k+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} C_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X, Y) \to$$

Теорема 9. *Если есть короткая точная последовательность цепных комплексов, то существуют гомоморфизмы такие, что длинная последовательность точна.*

$$\ldots \to H_{k+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_k(Y) \xrightarrow{i_k} H_k(X) \xrightarrow{j_k} H_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(Y) \xrightarrow{i_{k-1}} H_{k-1}(X) \xrightarrow{j_{k-1}} \ldots$$

— длинная точная последовательность Майера-Виеториса.

Рассмотрим последовательность

$$\ldots \to A_k \xrightarrow{i_k} B_k \xrightarrow{j_k} C_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k+1} \to \ldots$$

Пусть

$$P_A = \sum_k \dim A_k t^k, \quad P_B = \sum_k \dim B_k t^k, \quad P_C = \sum_k \dim C_k t^k.$$

Утверждение 32. *Если последовательность точна, то* $P_A + P_C \succ P_B$.

Доказательство. Пусть

$$a_k = \dim A_k, \quad b_k = \dim B_k, \quad c_k = \dim C_k,$$

$$\alpha_k = \dim \operatorname{Ker} i_k, \quad \beta_k = \dim \operatorname{Ker} j_k, \quad \gamma_k = \dim \operatorname{Ker} \partial_k.$$

Имеем

$$a_k = \alpha_k + \beta_k, \quad b_k = \beta_k + \gamma_k, \quad c_k = \gamma_k + \alpha_{k+1}.$$

Следовательно,

$$a_k - b_k + c_k = \alpha_k + \alpha_{k+1},$$

$$\sum_k (a_k - b_k + c_k) t^k = \sum_k (\alpha_k + \alpha_{k+1}) t^k,$$

$$P_A - P_B + P_C = (1+t)Q, \qquad Q(t) = \sum_{\alpha_k \geqslant 0} \alpha_k t^k.$$

Следовательно, $P_A + P_C \succ P_B$. □

Пусть $Y \subset X$ — клеточное подпространство. Имеет место длинная последовательность. Имеем

$$P_X = \sum \dim H_k(X) t^k = \sum b_k(X) t^k,$$

$$P_Y = \sum \dim H_k(Y) t^k = \sum b_k(Y) t^k,$$

$$P_{X,Y} = \sum \dim H_k(X,Y) t^k = \sum b_k(X,Y) t^k,$$

где $b_k(X,Y) = \dim H_k(X,Y)$ — числа Бетти пары $Y \subset X$. Тогда

$$P_Y(t) + P_{X,Y}(t) \succ P_X(t).$$

Пусть M — компактное многообразие, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса, $c_1 < c_2 < \ldots < c_\nu$ — критические значения. Пусть

$$t_0 = c_1 - 1, \quad t_i = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \quad c_\nu = c_\nu + 1.$$

$$M^{t_i} \supset M^{t_{i-1}},$$

$$M^t = \{x \in M \mid f(x) \leqslant t\}.$$

Мы знаем, что M^{t_i} получено из $M^{t_{i-1}}$ приклеиванием клеток, отвечающих критическим точкам со значением c_i. Получаем

$$P_{M^{t_{i-1}}} + P_{M^{t_i}, M^{t_{i-1}}} \succ P_{M^{t_i}}$$

для всякого i. Просуммируем

$$\sum_{i=1}^{\nu} P_{M^{t_i}, M^{t_{i-1}}} \succ P_M,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} P_{M^{t_i}, M^{t_{i-1}}} \sum_{k=0} \#\{p \mid \lambda(p) = k\} t^k \succ P_M,$$

$$P_f \succ P_M.$$

Лекция 8

8. Существование функции Морса на многообразии. Лемма Сарда

Нормальное расслоение

Пусть M^n — многообразие. По слабой теореме Уитни оно вкладывается в $\mathbb{R}^N$. Пусть $\mathbb{R}^N$ снабжено стандартным евклидовым скалярным произведением.

Определение 33. Нормальное пространство к M в точке q — $N_qM = (T_qM)^\perp$.

Определение 34. Касательное расслоение к M — $TM = \sqcup_{q\in M} T_qM$. Это гладкое многообразие.

Определение 35. Нормальное расслоение к M — $NM = \sqcup_{q\in M} N_qM$. Это гладкое многообразие.

Доказательство. Введем локальные координаты $u^1, \dots, u^n$ в окрестности q на M. Выберем $N-n$ векторных полей $W_1, \dots, W_{N-n}$ в $\mathbb{R}^N$ на M таких, что

1) $W_i|_{q'} \perp T_{q'}M$ (нормальные поля)

2) $|W_i| = 1$, $W_i \perp W_j$ при $i \neq j$.

Это называется ортонормированный базис в нормальных векторных полях на M.

Мы знаем, что $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ — базис в T_qM. Дополним этот базис в $\mathbb{R}^N$, взяв какие-то из $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0 \dots, 0)$.

Берем $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{N-n}}$ в такой окрестности q, в которой они образуют базис. Применяем ортогонализацию по Граму-Шмидту.

Итак, $W_1, \dots, W_{N-n}$ — ортонормированный базис в нормальных векторных полях $U \subset M$, $NU \subset NM$, где

$$NU = \sqcup_{q'\in M} N_{q'}M, \quad q', v \in N_{q'}M.$$

У нас $q' = (u^1, \dots, u^n)$,

$$v = t^1 W_1(q') + \ldots + t^{N-n} W_{N-n}(q')$$

имеет координаты $(t^1, \dots, t^{N-n})$. Итак,

$$(q', v) = (u^1, \dots, u^n, t^1, \dots, t^{N-n})$$

— локальные координаты в $NU \subset NM$.

Упражнение 6. Проверить, что NM — многообразие.

□

Рассмотрим отображение $NM \longrightarrow \mathbb{R}^N$:

$$E(q+v) = q+v \in \mathbb{R}^N.$$

Так как $\sim M = n$, то $\sim NM = n + N - n = N$.

Наблюдение: отображение $NM \longrightarrow \mathbb{R}^N$ — гладкое отображение из многообразия размерности N в многообразие размерности N.

Напомним, что $p \in X$ называется критической точкой отображения $f : X \longrightarrow Y$, если $d_p f$ имеет не максимальный ранг. Значения $f(p)$ называются критическими.

Нас интересуют критические значения E.

Определение 36. Точка $x \in \mathbb{R}^N$ — фокальная точка для $q \in M$, если x — критическое значение для $E(q, v) = x$.

Точка x — фокальная для M, если существует q такое, что x фокальная для $q \in M$, то есть критическое значение для отображения E.

Лемма Сарда

Лемма 3. *Пусть $f : M \longrightarrow N$, $\dim M = \dim N$, тогда множество критических значений f имеет в N меру ноль.*

Следствие 1. *Фокальные точки в $\mathbb{R}^N$ для M имеют меру ноль, то есть почти все точки $\mathbb{R}^N$ не фокальные.*

Как устроены фокальные точки E? Рассмотрим вложение $x : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$

$$x(u^1, \ldots, u^n) = (x^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, x^N(u^1, \ldots, u^n)).$$

Отображение E в локальных координатах $u^1, \ldots, u^n, t^1, \ldots, t^{N-n}$ на NM и $x^1, \ldots, x^N$ в $\mathbb{R}^N$ имеет вид

$$x(u^1, \ldots, u^n) + t^1 w_1(u^1, \ldots, u^n) + \ldots + t^{N-n} w_{N-n}(u^1, \ldots, u^n).$$

Как устроен dE?

$$\frac{\partial E}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^{N-n} \frac{\partial W)j}{\partial u^i}, \qquad \frac{\partial E}{\partial t^k} = W_k.$$

Напомним, что $d_{(q,v)}E : T_{(q,v)}NM \longrightarrow T_{E(q,v)}\mathbb{R}^N$. Это линейный оператор, нас интересует его матрица в базисах

$$\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^{N-n}}$$

в $T_{(q,v)}NM$ и $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в $T_{q+v}\mathbb{R}^N$.

Наблюдение: у векторного пространства V верно $T_\omega V \simeq V$, поэтому $T_{q+v}\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N \simeq T_{(q,v)}NM$. Более того,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}, \frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^{N-n}}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}, W_1, \ldots, W_{N-n}\right).$$

Нас интересует фиксированная точка q. Можно выбрать такие локальные координаты $u^1, \ldots, u^n$, в окрестности точки a, что в точке q (и может быть только в ней!)

$$\frac{\partial x}{\partial u^1}(a), \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}(a)$$

образуют ортонормированный базис. Запишем в координатах

$$E(u^1, \ldots, u^n, t^1, \ldots, t^{N-n}) = x(u^1, \ldots, u^n) + t^1 w_1(u^1, \ldots, u^n) + \ldots + t^{N-n} w_{N-n}(u^1, \ldots, u^n),$$

$$\frac{\partial E}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} + \sum_j t^j \frac{\partial w_j}{\partial u^i}, \qquad \frac{\partial E}{\partial t^k} = w^k.$$

В ортонормированном базисе i-ая координата вектора $=$ скалярное произведение с i-м базисным вектором. Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial E}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^i}\right) & \left(\frac{\partial E}{\partial u^i}, w_j\right) \\ \left(\frac{\partial E}{\partial t^k}, \frac{\partial x}{\partial u^i}\right) & \left(\frac{\partial E}{\partial t^k}, w_j\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sum_l \left(\frac{\partial w_l}{\partial u^i}, w_j\right) \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \sum_l \left(\frac{\partial w_l}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^i}\right).$$

Точка (q, v) критическая $\iff d_{(q,v)}E$ вырождено, $\det dE = \det A \iff d_{(q,v)}E$ вырожден $\iff A(q, v)$ вырождена.

Пусть на многообразии есть риманова метрика. Что такое в этой ситуации вторая квадратичная форма?

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}\right) = b_{ij}.$$

В нашем случае надо рассматривать векторозначную вторую квадратичную форму

$$B : T_q M \times T_q M \longrightarrow N_q M,$$

$$B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}\right)^{\perp} \in N_q M,$$

где $\perp$ обозначает ортогональную проекцию на $N_q M$.

По определению $v^{\perp} = (v, \vec{n})\vec{n}$. Имеем

$$B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}, \vec{n}\right)\vec{n}.$$

Продифференцируем по u^j:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, w_k\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial w_k}{\partial u^j}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial w_k}{\partial u^j}\right) = -\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, w_k\right) = -\left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}\right)^{\perp}, w_k\right) = -\left(B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right), w_k\right)$$

— это вторая квадратичная форма в направлении вектора w_k.

Далее

$$\left(\frac{\partial E}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i} + \sum_{l=1}^{N-n} t^2 \frac{\partial w_l}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right) = g_{ij} - \sum_{l=1}^{N-n} t^l \left(B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right), w_l\right).$$

Это A_{ij}, которое было в матрице выше.

Итак,

$$A_{ij} = g_{ij} - \left(\sum_{l=1}^{N-n} t^l w_l, B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right)\right).$$

Обозначения: G — первая квадратичная форма, B — вторая квадратичная форма, $A = G - (v, B)$.

Утверждение 33. (q, v) — *критическая точка* $\Longleftrightarrow A = G - (v, B)$ *вырождена. Она фокальная кратности* μ, *если* dE *имеет ранг* $N - \mu$.

$q + v$ — *фокальная точка для* $q \Longleftrightarrow A = G - (v, B)$ *вырождена. Она фокальная для* q *кратности* μ, *если* dE *имеет ранг* $N - \mu$.

Лекция 9

9. Функции Морса на некомпактных многообразиях

Фокальные точки

Рассмотрим $N \subset \mathbb{R}^N$, точку $p \in \mathbb{R}^N$, $L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L_p(q) = |q - p|^2,$$

для почти всех p это функция Морса.

Пусть на многообразии есть риманова метрика. Что такое в этой ситуации вторая квадратичная форма?

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}\right) = b_{ij}.$$

В нашем случае надо рассматривать векторозначную вторую квадратичную форму

$$B : T_qM \times T_qM \longrightarrow N_qM,$$

$$B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right) := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial u^i \partial u^j}\right)^{\perp} \in N_qM,$$

где $\perp$ обозначает ортогональную проекцию на N_qM.

Итак,

$$A_{ij} = g_{ij} - \left(\sum_{l=1}^{N-n} t^l w_l, B\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right)\right).$$

Обозначения: G — первая квадратичная форма, B — вторая квадратичная форма, $A = G - (v, B)$.

Утверждение 34. *(q, v) — критическая точка $\Longleftrightarrow A = G - (v, B)$ вырождена. Она фокальная кратности μ, если dE имеет ранг $N - \mu$.*

$q + v$ — фокальная точка для $q \Longleftrightarrow A = G - (v, B)$ вырождена. Она фокальная для q кратности μ, если dE имеет ранг $N - \mu$.

Какова размерность подпространств, на которых эта билинейная форма отрицательно определена? Будем работать в таких координатах, в которых $G(q) = E \Longleftrightarrow g_{ij}(q) = \delta_{ij}$. Тогда посмотрим на оператор $E - (v, B)$, сколько у него отрицательных собственных значений с учетом кратности?

$$\det(E - (v, B) - \lambda E) = 0,$$

$$\det((v, B) - (1 - \lambda)E) = 0.$$

Обозначим $\mu = 1 - \lambda$ — это собственное число (v, B). Имеем $\lambda < 0 \Longleftrightarrow \mu > 1$. Сколько с учетом кратности есть собственных числе μ у (v, B) таких, что $\mu > 1$.

Ищем фокальные точки: p — фокальная $\Longleftrightarrow d_{(q,v)}E$ вырожден. Где фокальные точки на прямой $q+tv$?

$$E-(tv,B) \text{ — вырождена,}$$

$$\det(E-(tv,B))=0, \qquad \det((tv,B)-E)=0, \qquad \det((v,B)-\frac{1}{t}E)=0,$$

получаем, что $\frac{1}{t}=\mu$ — собственное значение (v,B), а значит $t<1$.

Утверждение 35. *Индекс критической точки q у функции L_p равно количеству (с учетом кратности!) фокальных точек на прямой, проходящей через q и p между q и p.*

Функции Морса на некомпактных многообразиях

До этого мы рассматривали только компактные многообразия. На самом деле достаточно, чтобы M^a было компактно для любого a.

Пусть (M,g) — риманово многообразие, $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, $df \in \Omega^1(M)$ — 1-форма, тензор типа (0,1).

Определение 37. Градиент $\operatorname{grad} f$ — это векторное поле на M, такое что для любого векторного поля верно

$$(\operatorname{grad} f, X) = df(X).$$

Если $x^1,\dots,x^n$ — локальные координаты

$$(\operatorname{grad} f)^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij}.$$

Расмотрим многообразие M с векторным полем X на нем (т.е. из каждой точки выходит вектор). Интегральные кривые — это кривые, что у них в каждой точке вектор скорости является вектором соответствующего векторного поля.

Определение 38. Кривая $\gamma: (a,b) \longrightarrow M$ называется *интегральной кривой* векторного поля X, если для любого момента времени $t \in (a,b)$ выполнено условие

$$\dot\gamma(t) = X(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

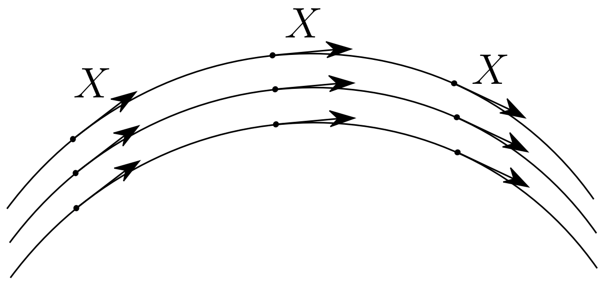

Рис. 9.1. Интегральные кривые

Интегральная кривая определена не единственным образом. Запишем ее определение в координатах $x^1, \ldots, x^n$.

$$\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

$$\dot\gamma(t) = (\dot x^1(t), \ldots, \dot x^n(t)) \text{ в базисе } \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Векторное поле в этом базисе запишется так: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда условие из определения 38 запишется так:

$$\dot x^1(t) = X^1(x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$
$$\vdots$$
$$\dot x^n(t) = X^n(x^1(t), \ldots, x^n(t)).$$

Это система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Так как есть метрика, то получаем векторное поле $\operatorname{grad} f$, следовательно, у него есть интегральные кривые. Для критической точки $\operatorname{grad} f(p) = 0$.

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \dot x^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \operatorname{grad} f^i = df(\operatorname{grad} f) = (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \geqslant 0.$$

Утверждение 36. *На интегральных кривых поле* $\operatorname{grad} f$ *функции* f *вне критических точек строго возрастает.*

Лемма Морса

Пусть $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$.

Теорема 10 (Лемма Морса)**.** *Пусть* p *— невырожденная критическая точка функции* f *индекса* λ*. Тогда у* p *существует такая координатная окрестность* U *с локальными координатами* $x^1, \ldots, x^n$*, что* f *имеет вид*

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

В окрестности критической точки $p = (0, \ldots, 0)$

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Пусть $g_{ij} = \delta_{ij}$.

$$df = -2x^1 dx^1 - \ldots - 2x^\lambda dx^\lambda + 2x^{\lambda+1} dx^{\lambda+1} + \ldots + 2x^n dx^n.$$

ОДУ для интегральных кривых:

$$\begin{cases} \dot x^1 = -2x^1, \\ \dot x^2 = -2x^2, \\ \vdots \\ \dot x^{\lambda+1} = 2x^{\lambda+1}, \\ \vdots \dot x^n = 2x^n. \end{cases}$$

$$\dot{y} = -2y, \qquad y(t) = y(0)e^{-2t}.$$
$$\dot{y} = 2y, \qquad y(t) = y(0)e^{2t}.$$
$$x_-(t) = x_-(0)e^{-2t}.$$
$$x_+(t) = x_+(0)e^{-2t}.$$

Определение 39. Векторное поле X называется градиеноподобным для функции Морса f, если

1) вне критических точек f: $Xf > 0$;

2) в окрестности каждой критической точки p есть такие координаты $x^1, \ldots, x^n$, что f имеет вид

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \ldots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

, а $p = (0, \ldots, 0)$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ