ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

АЛЕКСЕЕВ
СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ

ЧЕРНИКОВУ ПОЛИНУ ГЕОРГИЕВНУ

Оглавление

Лекция 1. Общая теория относительности **6**

Литература *6*

Общая теория относительности (ОТО) *6*

Двойные пульсары *9*

Проблемы ОТО *9*

Развитие теории гравитации *12*

Лекция 2. Многомерная гравитация **16**

Модель Бранса-Дикке (2.1) *16*

Большие и бесконечные дополнительные измерения *18*

Смещение планковской энергии *23*

Модели RS *23*

Лекция 3. Модели RS (Randall-Sundrum models) **29**

Модели RS *29*

Роль радиона *30*

Возможные пути решения космологической постоянной *33*

Модель DGP *34*

Проблема сильной связи *36*

Приливной заряд *41*

Лекция 4. Модель Гаусса-Бонэ (часть I) **43**

Гравитация Лавлока *43*

Сферически-симметричные решения *44*

Лекция 5. Модель Гаусса-Боннэ (часть II) **49**

Испарение черных дыр Гаусса-Боннэ *50*

Черная дыра Шварцшильда-Гаусса- Боннэ в 4D пространстве с зарядами *59*

Общий вывод *59*

Лекция 6. Космологическая эволюция в модели Бранса-Дикке. Отскок.. ..... **60**

Модель Бранса-Дикке *60*

Отскок *64*

Модель кротовой норы *67*

Космологические решения в расширенной гравитации *69*

Статус расширенной гравитации *72*

Лекция 7. Модель петлевой квантовой гравитации **73**

Основные идеи петлевой квантовой гравитации *73*

Формализм Гамильтона (HF) *73*

ОТО в переменных Аштекера *75*

Квантование *77*

Петлевая квантовая гравитация *79*

Применение петлевой космологии *86*

Возмущения объема *88*

Выводы *89*

Лекция 8. Петлевая гравитация **90**

Решение вида «Чёрная дыра» для петлевой квантовой гравитации *90*

Конформная гравитация *91*

Сравнение с ОТО *92*

ОТО: что можно изменить *92*

Конформная гравитация: Базовые положения *94*

Унитарность *96*

Лекция 9. Комформная гравитация (Часть II). Лоренц-инвариантная массивная гравитация. **100**

Космологическая постоянная в D =2 ..... *100*

Темная материя *102*

Связь ОТО с конформной гравитацией *105*

Проблемы космологической постоянной *106*

Модель Фирца-Паули. Лоренц-инвариантная массивная гравитация. *107*

Формализм Штюкельберга *110*

Нарушая Лоренц-инвариантность *112*

Минимальная модель с массивным гравитоном *115*

Лекция 10. Способы проверки расширенных моделей гравитации на различных пространственно-временных масштабах **119**

Что и где стоит проверять *119*

Скопления: радиус разворота *119*

Тени черных дыр: отклонение от ОТО *121*

Гравитационно-волновая астрономия: отклонения от ОТО ····· *124*
Двойные пульсары: отклонения от ОТО ····· *126*
Солнечная система: ньютоновский предел и отклонения от него ····· *131*
Большой андронный коллайдер: поведение энергии в диапазоне ТэВ ····· *134*

Лекция 1. Общая теория относительности

Литература

- Общая теория относительности. Введение, современное развитие и приложение, С. О. Алексеев, Е.А. Памятных, А. В. Урсулов, Д. А. Третьякова, Б. Н. Латош.
- Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations (https://arxiv.org/pdf/1501.07274.pdf)
- Многоканальная астрономия // Век-2 Фрязино, 2019. - 527 с.
- Журнал «Успехи физических наук» (https://ufn.ru/)
- Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики (http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index)
- Physical Revew D (https://journals.aps.org/prd/)
- Physics Reports (https://www.journals.elsevier.com/physics-reports/)

Общая теория относительности (ОТО)

ОТО задается лагранжианом (скалярной кривизной) *(1.1)*:

$$S = const \int d^4 x \sqrt{-g} R \quad (1.1)$$

Основным уравнением является уравнение Гильберта-Эйнштейна *(1.2)*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = const * T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Слева стоят характеристики, относящиеся к пространству, справа - к материи. Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое имеет бесконечно много решений.

Самым первым решением стало полученное в 16 году сферически симметричная статическая конфигурация - метрика Шварцщильда *(1.3)*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.3)$$

Особая точка M = 2r - горизонт. r = 0 выколотая сингулярность.
Далее Метрика Ресснера-Нордстрема *(1.4)*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \ (1.4)$$

Q - электрический заряд. Но Q может иметь и другое значение. Например, сейчас для теней черных дыр Q придается значение параметра дополнительных измерений.

Следующим решением является метрика Фридмана-Робертсона-Уокера *(1.5)*, которая описывает однородную, изотропную, расширяющуюся (или иначе сжимающуюся) вселенную, которая линейно связана, но не обязательно односвязна:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(d\chi^2 - sin^2\chi(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)\right) (1.5)$$

Рассмотрим различные пути развития ОТО через уравнение Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = const * T_{\mu\nu}$$

Если тензор энергии-импульса, то

$$S = const \int d^4x \sqrt{-g} R$$

$$S = const \int d^4x \sqrt{-g}\left(R + \partial_\mu \phi \partial^\mu + V(\phi) + R^2 + R^i + R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \cdots\right)$$

Скалярное вполне может быть источником материи, оно пойдет в правую часть уравнения.

$R^2 + R^i + R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \cdots$ можно переинтерпретировать и записать через Гаусса-Бонэ.

Обратим внимание на сферически-симметричные метрики в ОТО в четырёхмерном пространстве. Существуют сигнатуры:

+- - - (Ландау-Лифшиц)
-+++ (Мизнер-Торн-Уллиер)

Они абсолютно равнозначны.

Методы, которые мы обсуждаем, призваны сократить очень длинные уравнения. Так, например, в четырехмерном пространстве времени в сферически-симметричных конфигурациях используются сферические координаты: t, r, θ, φ.

- Сферический элемент

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$$

- Сферически-симметричная метрика
- $ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$

В этом уравнение возможно использование различных метрик, например, Метрика Шварца $\Delta = 1 - \frac{2M}{r}$ или Метрика Рейсснера-Нордстрема $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$.

Важным моментом является ньютоновский предел.

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$$

При $\Delta(r \to \infty) \to 1$

Обычно рассматривается плоская метрика. Нужно рассматривать какие-то большие пространственно-временные масштабы рассматривать, чтобы появилась необходимость учитывать ускоренное расширение вселенной.

Если метрическая функция стремится к 1: $\Delta(r \to \infty) \to 1$, то используется ПНН формализм - параметризация теории гравитации экспериментально проверяемыми параметрами.

Вообще говоря, следующий член

$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$ есть $\frac{1}{r^3}$ и все это представляет собой ряд Тейлора.

Вспомним из матанализа, что ряд Тейлора единственен. Таким образом, любая теория, которая сводится к Ньютону, должна иметь нормальный ряд Тейлора.
Пост-ньютоновский формализм (рис. 1.1) — это способ проверки расширенной гравитации.

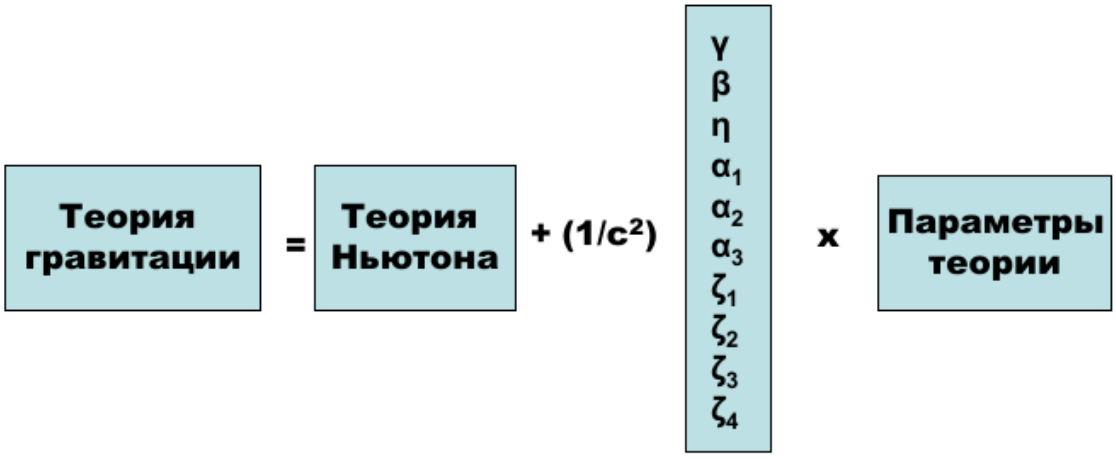


рис. 1.1 пост-ньютоновский формализм

Через 10 параметров модели разлагаются в ряд. Основная идея пост-ньютоновского предела - сказать, сводится ли модель в пределе к ОТО.

Двойные пульсары

Очень важным источников информации являются двойные пульсары. Очень долго обсуждалась идея сделать *пульсарный тайминг* альтернативной шкалой времени, потому что атомные часы очень точны, но нам нечем их проверить. В качестве двойного пульсара приведем PSR J0737-3039 A/B, за который в 1993 году Нобелевскую премию получили Халс и Тейлор. Он подтверждает ОТО с точностью 0.05% при доверительном интервале 3δ.

Это означает, что ОТО проверена в слабых полях (солнечной системе), сильных полях (двойных пульсара) и гравитационных волнах.

Таким образом ОТО применима для:

- Солнечной системы
- Черных дыр и нейтронных звезд
- Аккреции вещества на черную дыру
- Космологии (закон Хаббла) $H = \left[\frac{\partial a}{\partial t}\right] / a$
- Теорий ранней Вселенной

Проблемы ОТО

- Темная материя, темная энергия
- Отсутствие самосогласованной квантовой теории гравитации
- Отсутствие единой теории всех физических взаимодействий
- Закон сохранения
- Протяженные тела
- Отсутствие экспериментальных подтверждений.

Согласно современным представлениям о распределении типов материи во Вселенной по данным WMAP, звезды и другие объекты составляют 0.4%, а межгалактический газ 3.6% от всех материи Вселенной (рис. 1.2). Темная материя - нарушение кривых вращения галактик занимает 22%, а темная энергия- ускоренное расширение Вселенной - 74%. Получается, что ото описывает всего 4% от всей материи.

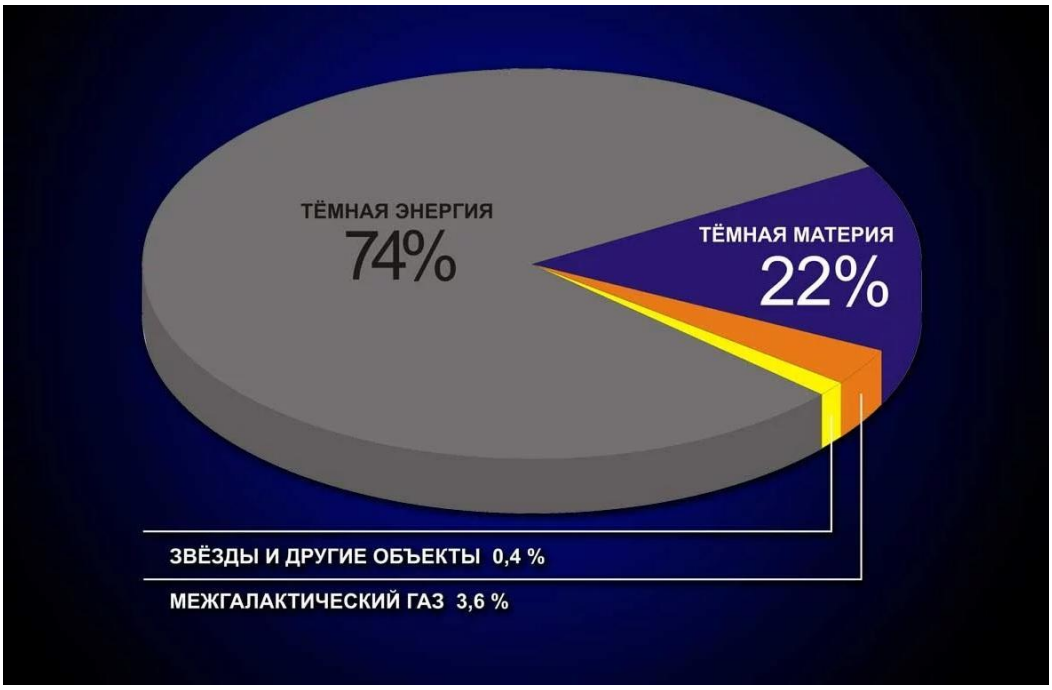


рис. 1.2 распределение материй во Вселенной

В темной материи скрещиваются несколько направлений: Новая физика и Новая геометрия. Сейчас в большинстве сошлись на том, что это скорее новая физика.

Согласно новой физике, темную материю составляют экзотические частицы или какие-то еще, которые либо в системе нормальных моделей темной материи с известными частицами построить пока не удалось до конца, либо частицы, которые существуют, но которые еще предстоит открыть. Есть теории, которые считают, что темную материю составляют остатки первичных черных дыр.

Новая геометрия — это, по сути, когда мы в закон притяжения дописываем новый член. Что может быть темной материей? Барионной моделью темной материей может быть:

- Темные галактические гало
- Коричневые карлики, массивные планеты
- Белые карлики, остывшие белые карлики
- Нейтронные звезды
- Черные дыры
- Кварковые звезды, Q-звезды (нейтронные звезды с необычным уравнением состояния)

В небарионную темную материю входят:

- Легкие нейтрино
- Тяжелые нейтрино (стерильные)

- Аксионы
- SUSY
- Топологические дефекты
- Первичные черные дыры

Таким образом, *темная материя* — это нарушение законов движения в галактиках.

Темная материя бывает *горячей* и *холодной*. Общепринятыми моделями холодной материи являются модели Λ CDM (Cold Dark Matter).

Темная энергия - ускоренное расширение Вселенной.
Ускоренное расширение Вселенной не является экспериментальным фактом!
Экспериментальным фактом является, что сверхновые типа 1A светят слабее, чем надо. Максимально непротиворечивая интерпретация - на внегалактических масштабах скорость расширения Вселенной выше, чем на галактических. Причиной этого являются сверхновые.

Самым простым способом параметризации ускоренного расширения Вселенной является космологическая постоянная Λ *(1.6)*, которую изначально ввел Эйнштейн из-за своих религиозных убеждений:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(R + \Lambda) \quad (1.6)$$

Эйнштейн использовал Λ со знаком минус, теперь же она используется со знаком плюс. Современных данных хватает только на то, чтобы на месте Λ написать какую-то константу. На этом основаны

- Модели Λ CDM (Cold Dark Matter)
- Теории инфляции
- Медленно меняющийся потенциал (модель Бранса-Дикке) *(1.7)*

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\Phi R + \frac{\omega}{\Phi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \mathrm{V}(\Phi)\right) \quad (1.7)$$

Основная цель расширения гравитации - интерпретировать Λ, потому что что именно представляет из себя Λ никто не знает. Самый простой способ ее интерпретировать - написать скалярное поле с потенциалом - модель Бранса-Дикке.
За счет членов $\Phi R + \frac{\omega}{\Phi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \mathrm{V}(\Phi)$ создается график, который моделирует Λ.

Следующая проблема ОТО - отсутствие самосогласованной квантовой теории гравитации.

Если мы попытаемся проквантовать ОТО, которая является неперенормированной моделью, то при попытке перенормировки столкнемся с требованием бесконечного числа членов.

Кроме того, мы сталкиваемся с отсутствием единой теории всех физических взаимодействий. Приведем простую аналогию.
Наука работает с помощью экстраполяции. Экстраполяция — это зачастую предположение. Если мы делаем 1 шаг (предположение) в построении теории и его вероятность, например ½ (так или не так), то для построения теории необходим еще один шаг. Когда мы сделаем 10 шагов, вероятность нашей теории станет $1/2^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0.001$. Фактически мы можем обсуждать теорию струн, но вероятность верности определённого варианта будет очень мала.

Так как фон криволинейный, все законы сохранения построены на транзакционных свойствах пространства, сохранении энергии, импульса и т.п. Тогда о каком сохранении может идти речь?

Проблема протяженных тел - достаточно давняя проблема, обсуждаемая в литературе. При попытке рассмотреть падение на черную дыру не точечной массы, а конечного протяженного тела, мы получим сингулярность еще до горизонта.

Развитие теории гравитации

- МОНД
- Черные материи
- F(R) гравитация, скалярно-тензорная гравитация
- Скалярно-тензорная гравитация: модели Хорндески
- Квантование гравитации: ряд поправок по кривизне
- Струнная гравитация
- Несохранение Лоренц-инвариантности
- Фундаментальные константы
- Модель Бранса-Дикке

Самый примитивный способ решения темной материи - МОНД/ MOND (Модифицированная ньютоновская динамика). Идея МОНДа проста - мы можем дописать поправку $(1 - \beta r^2)$ к известному закону Ньютона *(1.8)*.

$$F = \frac{Mm}{r^2} \rightarrow F = \frac{Mm}{r^2}(1 - \beta r^2) \quad (1.8)$$

β - очень малая величина
Если r мало, то βr^2 много меньше 1, следовательно $(1 - \beta r^2)$ вылетает и мы получаем закон Ньютона, действующий, например, на Земле.

В то же время, если мы отступаем на уровень галактик, то r велико настолько, что β уже не может перебить эту малость и мы отбрасываем 1, получаем плато.
Для каждой галактики β получается свое.

Против теории МОНД было выдвинуто несколько фактов. Самый главный из них - данные по скоплению Пули, которые показали, что в ее случае не совпадают оптический центр и центр тяжести. Следовательно, для темной материи там МОНД не работает.

Теория гравитации определяет, что мы поставим вместо Λ для черной материи *(1.9)*

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(R + \Lambda) \quad (1.9)$$

Рассмотрим такой пример: a = 1 — это соотношение, которое, впрочем, является и равенством, то есть, a равно единице.
Но если мы рассмотрим ab = 1, то a — это любое число, кроме 0, b = 1/a.
А если бы мы записали хотя бы abc или вообще полином…?
Это и есть работа современной теоретической физики: мы вводим дополнительные степени свободы и за счет них пытаемся объяснить те эффекты, которые не укладываются в рамки ОТО.

F(R) гравитация, скалярно-тензорная гравитация *(1.10)*:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(R + R^2 + \cdots + R^\alpha) \quad (1.10)$$

Она удобно тем, что за счёт степеней мы можем смоделировать все, что хотим. Но тут есть свои нюансы:
1) для темной материи и темной энергии нужные разные члены типа R. Единой теории, описывающей и темную энергию, и темную материю нет;
2) Уравнение Эйнштейна построено на том, что $(R + R^2 + \cdots + R^\alpha)$ линейна по старшим производным, а тут стоит R^2. Следовательно, мы автоматически получаем уравнение поля четвертого порядка, следовательно, теория относительности не обязана быть нулевым приближением (это называется отсутствием ньютоновского предела).

Есть скалярно-тензорная гравитация: модели Хорндесски, которые представляют из себя сумму лагранжианов. Они представляют из себя наиболее общий вид лагранжиана, уравнения поля в котором второго порядка. Грегори Хорндесски так подобрал степени, что старшие члены типа R^2 друг друга убивают.

$$S[g_{\mu\nu},\phi] = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{8\pi G_{\mathrm{N}}}\mathcal{L}_i\left[g_{\mu\nu},\phi\right] + \mathcal{L}_{\mathrm{m}}\left[g_{\mu\nu},\psi_M\right]\right]$$

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi,\,X)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\phi,\,X)\Box\phi$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi,\,X)R + G_{4,X}(\phi,\,X)\left[(\Box\phi)^2 - \phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}\right]$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi,\,X)G_{\mu\nu}\phi^{;\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5,X}(\phi,\,X)\left[(\Box\phi)^3 + 2\phi_{;\mu}{}^{\nu}\phi_{;\nu}{}^{\alpha}\phi_{;\alpha}{}^{\mu} - 3\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}\Box\phi\right]$$

Модель Бранса-Дикке - одна из первых моделей, попытавшихся объяснить гравитационную постоянную. В основе лежит математическая модель принципа Маха: на движение частицы оказывает влияние не только кривизна пространства, но и внешние поля. Теперь под внешними полями можно понимать распределение вещества по Вселенной. Изначально теория Бранса-Дикке была разработана именно для этого.

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)}$$

$$S^{(m)} = \int d^4x\sqrt{-g}L^{(m)}$$

ω - безразмерный параметр Бранса-Дикке

ϕ - скалярное поле, делающее ω безразмерным

Сейчас эта модель используется как первая ступень в любом расширении ОТО. С помощью этой модели можно объяснить ускоренное расширение Вселенной, потому что с помощью потенциала и члена в [] можно смоделировать космологическую постоянную.

Замечание 1. Преобразование $\phi R \rightarrow \breve{R} \rightarrow$

ОТО + скалярное поле:

$$\breve{R} + const\,\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + V(\varphi)$$

Замечание 2. Реализация принципа Маха. Низкоэнергетический предел расширенной гравитации.

Уравнение поля для модели Бранса-Дикке:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\nabla_i\phi\nabla_j\phi - \frac{1}{2} g_{ij}\nabla^k\phi\nabla_k\phi\right) + \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi\right) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu},$$

$$T_{ij}^{(m)} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{ij}}\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)}\right),$$

Варьируем уравнение по ϕ:

$$\frac{2\omega}{\phi}\Box\phi + R - \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^k\phi\nabla_k\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0$$

Берем след:

$$R = -\frac{8\pi}{\phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\phi^2}\nabla^k\phi\nabla_k\phi + \frac{3\Box\phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi}$$

$$\Box\phi = \frac{1}{2\omega+3}\left(8\pi T^{(m)} + \frac{dV}{d\phi} - 2V\right)$$

Скаляр ϕ создается материей, для которой след $T^{(m)} \neq 0$. При этом скаляр взаимодействует с материей не напрямую, а только через метрику g_{ij} - нет члена ϕL_m.

Положим $V(\phi) = \frac{m^2\phi^2}{2} \rightarrow G_{eff}(\phi) = \frac{1}{\phi} \rightarrow \phi > 0$.

Это и есть моделирование гравитационной постоянной. Точные ограничения на омегу были получены миссией Cassini: $\omega > 50000$. Если устремим омегу в бесконечность, получим стандартную версию ОТО.

Модель Бранса-Дикке дает:

- Новые типы решений для кротовых нор
- Новые типы решений в космологии
- Решение проблемы ускоренного расширения Вселенной (модели с потенциалом)
- Решение проблемы начальной сингулярности Вселенной (отскок)

Лекция 2. Многомерная гравитация

Модель Бранса-Дикке *(2.1)*

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)} \quad (2.1)$$

$$S^{(m)} = \int d^4x\sqrt{-g}L^{(m)}$$

Это первая расширенная модель, где появляются дополнительные члены $\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)}$. В принципе можно рассматривать ее даже безмассово. Однако, если мы рассматриваем физику черных дыр, то там безмассового поля просто не может быть.

В 1959 Петр Хиггс рассмотрел модель, где в качестве лагранжиана используем не стандартную скалярную кривизну, а например, начнём с члена R^2.

$$I_A = \int d^4x\, R^2(-g)^{1/2}$$

$$R(R_{(\mu\nu)} - (1/4)Rg_{(\mu\nu)}) = 0$$

$$\left(Rg_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}\right)_{;\chi} = 0$$

Фактически получается вариант уравнений со скалярным полем или уравнений с космологической постоянной.
Аналогичным образом Хиггс рассмотрел, что получится, если взять квадрат тензора Риччи:

$$I_B = \int d^4x\, R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}(-g)^{1/2}$$

$$\left(R_{\mu\rho}R_{\nu\delta} + R_{\rho\mu}R_{\delta\nu}\right)g^{\rho\delta} - 1/2\, R_{\rho\delta}R^{\rho\delta}g_{\mu\nu} = 0$$

$$\left(R^{(\alpha\beta)}(-g)^{1/2}\right)_{;\chi} = 0$$

Фактическая получается комфорная гравитация с космологической постоянной.

Он также пытался рассмотреть квадрат тензора Римана, но показал, что такого вывода сделать не получится. Основные выводы, которые были сделаны:

- Все лагранжианы инварианты относительно преобразований Вейля *(2.2)*

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \varphi(x) g_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

- В случаях A и B уравнения преобразуются к уравнения типа Эйнштейна с космологической постоянной в новой метрике. Второй набор уравнений - соотношение старой и новой метрик.

- Случай A:

$$R_{(\mu\nu)} = \lambda a_{\mu\nu}$$

$$\left(a_{\alpha\beta}(-a)^{1/2}\right)_{;\chi} = 0$$

Это уравнение Эйнштейна с космологической постоянной λ. Можно получить метрику a, после преобразований g.

В космологии даже для стандартного решения расширяющейся Вселенной, а уж тем более для инфляции нужна правая часть, источником которой могут быть поля.

Кроме того, эти лагранжианы можно использовать, чтобы заменять поля, то ест заменять вопрос с полями на вопрос с геометрией.

- Аналогично решается случай B
- Для других комбинаций такого преобразования найдено не было.

В 1971 году вышла большая статья Лавлока о требованиях к тензору Эйнштейна G^{ij} в вакууме:

1) G^{ij} симметричен по перестановкам индексов
2) G^{ij} состоит из метрики, ее первый и вторых производных
3) $G^{ij}{}_{;j} = 0$
4) G^{ij} линеен по вторым производным от метрики

Тогда уравнения Эйнштейна в пустоте имеют вид $G^{ij} = 0$. Если не в пустоте, то справа приписывается энергия тензора.

Лавлок предложил отказ от пункта 4 для того, чтобы использовать лаганжианы, рассмотренные выше. В случае 4D пространства-времени наиболее общий вид

лангранжиана второго порядка (не создающего дополнительных проблем гравитации) выглядит так:

$$L = \sqrt{-g}\left(\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\eta\varepsilon}R^{\mu\nu\eta\varepsilon}\right) + \mu R_{\mu\nu\eta\varepsilon}{}^{*}R^{\mu\nu\eta\varepsilon}$$

Лавлок предложил такое решение: $y'' + \lambda y'' = f(y, y')$

При таком решении метрика Шваршильда и метрика Фридмана не теряются.

В то время как остальные решали так: $y'' + \lambda y''' = f(y, y', \dots)$

Аспирантом Лавлока был Грегори Хорнесски, который написал еще более общую версию лагранжиана, включая массивные члены, которые он так искусно подобрал, что на выходе они убивают друг друга и получается снова уравнение второго порядка. Тогда модели Хорндесски не пользовались популярностью, к ним вернулись в 2014-2015 годах. Сейчас его модели рассматриваются как наиболее общие случаи скалярно-тензорной гравитации.

Большие и бесконечные дополнительные измерения

Обращаем внимание на следующую литературу к этой теме:

- статья 2001 г. В. А. Рубакова «Большие и бесконечные дополнительные измерения»
- статья 2012 г. Э.Э. Боос, В.Е. Буничев, И.П. Волобуев, М.Н. Смоляков «Геометрия, физика и феноменология модели Рэндалл-Сундрумана»

Вспомним шкалу энергий (рис. 2.1)

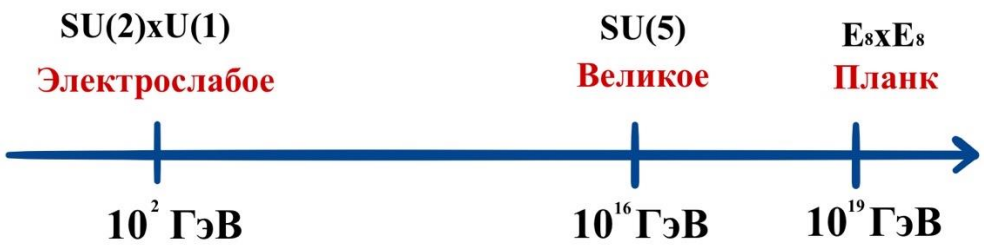


рис. 2.1 шкала энергий

Объединяем электромагнитные и слабые взаимодействия, получаем группу SU(2)xU(1) и единую теорию *электрослабого взаимодействия*. Аналогично существует

великое взаимодействие SU(5)xSU(3)xSU(2)xU(1) = SU(5). Если мы попытаемся присоединить гравитацию с учетом суперсимметрии на уровне 10^{19} ГэВ предполагается, что можно объединить все 4 вида физических взаимодействий.
Важно понимать, что при записи этих теорий в четырех измерениях будет что-то непереводимое, поэтому стали применяться дополнительные измерения, подразумевающие дополнительное скалярное поле.

Теория струн существует в 10 измерениях, теория Бран - в 11 измерениях. Получается, что есть модели с числом измерений, большим 4.
Например, у нас есть 5D модель:

$$S_5 = C_5 \int d^5x\, L_5 \to S_4 = \int d^4x\, [L_4 + X]$$

Это означает, что в четырехмерье появится дополнение, которое будет описывать то, что идет от пятимерья. Возможен и обратный переход, поэтому:

$$S_5 = C_5 \int d^5x\, L_5 \leftrightarrow S_4 = \int d^4x\, [L_4 + X].$$

Схема ухода в многомерье:

$$S_4 = c_4 \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}}[R + L_{41} + L_{42} + \cdots]$$
$$\downarrow$$
$$S_D = \int d^Dx \sqrt{-g^{(D)}} L_D$$

Именно этим занималась теоретическая физика в 70-е.

Теория струн 11D, а ОТО 4D. Куда деваются дополнительные измерения?
Есть несколько подходов:

- для компактных дополнительных измерений
- для некомпактных дополнительных измерений

- решение проблемы иерархии
- возможность решения проблемы космологической постоянной (вклад балка)
- возможная коррекция закона Ньютона

Ограничение на размер дополнительных измерений из проверки закона Ньютона в 2013 году было $\mathbf{10^{-5}}$ **мм.**

Ограничения на размер дополнительных измерений из астрофизики по данным от SN1987A:

Число некомпактных дополнительных измерений	**2**	**3**	**4**
Размер некомпактных дополнительных измерений	$\mathbf{10^{-4}}$	$\mathbf{10^{-7}}$	$\mathbf{10^{-8}}$

Ограничение на размер дополнительных измерений из космологии:

- отсутствие противоречия с моделями инфляции
- отсутствие противоречий с данными экспериментов по реликтовому излучению **COBE, WMAP**
- отсутствие противоречий с результатами **GW170817**

Вспомним, что такое компактификация Калуццы-Кляйна. Рассмотрим цилиндр (рис. 2.2) как трубочку.

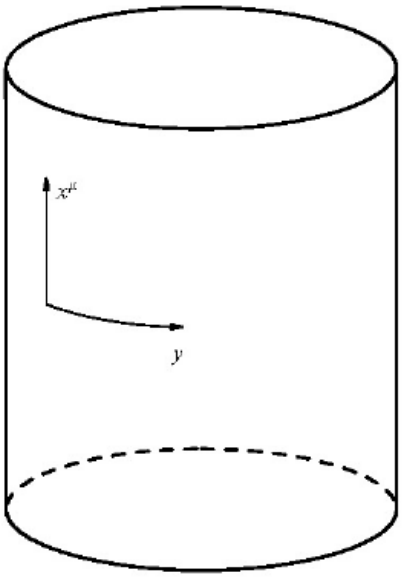


рис. 2.2 цилиндр

Вдоль трубочки будут обычные измерения, а округлое измерение будет дополнительным измерением.

Полный набор координат:

$$X^A = (x_\mu, y)$$

A = 0, 1, 2, 3, 5

$$-\infty < x < \infty$$
$$\mu = 0,1,2,3$$
$$0 < y < 2\pi L$$

Метрика:

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$$
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

Уравнение поля:

$$\Box_5 \phi(x, y) = 0 \ (\Box_5 = \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \partial_y^2)$$

Далее раскладываем в ряд Фурье:

$$\Phi_P(x, y) = e^{ip_\mu x^\mu + i\frac{ny}{L}}, n = 0, \pm 1, \ldots$$

Уравнение дисперсии останется тем же самым:

$$p^2 = p_\mu p^\mu$$
$$m_n^2 = n^2/L^2$$

Таким образом, при вводе такой парадигмы четырехмерная наука не изменится.

Что будет, если дополнительные измерения (рис. 2.3) не малы?

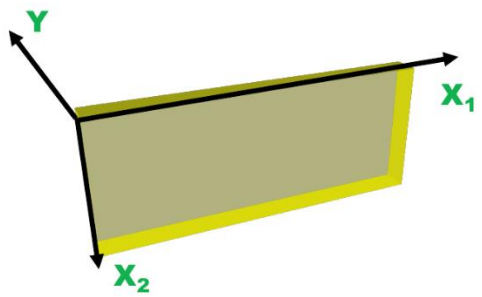


рис. 2.3 дополнительные измерения

Модель ADD (Аркани-Хамеди-Димитрополус-Двали)

$G_4 = 1/M_p^4$ - не фундаментальна

$$S = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^D X\sqrt{G}R(G_{AB})\,, D = 4 + N$$

$G_D = 1/M^{D-2}$ - фундаментальная гравитационная постоянная

Очевидным плюсом этой модели является то, что мы уже не фиксируем планковский параметр.

В низкоэнергетическом приближении (основной вклад от 4D, L - масштаб дополнительного измерения).

$$\int d^D X = \int d^N y \int d^4 x = L^N \int d^4 x$$

Интеграл по всему континууму дополнительных измерений раскладываем на интеграл по дополнительным измерениям и интеграл по тому, что было раньше. Далее, так как y слишком малы в сравнении с x, то y можно заменить их характерным масштабом.

Эффективное действие для нулевой моды

$$S_{eff}[g_{\mu\nu}] = \frac{L^N M^{N+2}}{16\pi}\int d^4 x\sqrt{-g}R(g)$$

$$G_4 = G_D/L^N$$

$$M_p = M(ML)^{N/2}$$

Следовательно, фундаментальная масса Планка связана с четырехмерной через объем дополнительного пространства и количество дополнительных измерений.
Получается, что фундаментальные планковские величины отличаются от четырехмерных:

$$M_D = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V_{D-4}}\right)^{1/(D-2)} \text{[ТэВ]}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Смещение планковской энергии

Планковская энергия в пространстве 4D	**Фундаментальная планковская энергия**
10^{19} ГэВ	до ≈ 1 ТэВ

Что такое смещение планковской энергии и проблемы иерархии (почему такие большие расстояния между фундаментальными константами)?
Если мы понижаем масштаб фундаментального взаимодействия, это означает, что *масштаб объединения взаимодействий* = 1 ТэВ.
Получается, что масштаб квантовой гравитации тоже 1 ТэВ. Квантовая гравитация означает рождение черных дыр в квантовых процессах.
Поскольку Большой андронный коллайдер 14 ТэВ, на нем должны рождаться черные дыры. Эта идея появилась в 2001 году. В 2003 году эта тема достигла своего пика: Black holes at LHC.

Чтобы найти черную дыру на Большом андронном коллайдере, можно посмотреть сечение рассеяния, но самое главное — это поперечный импульс.
Вспомним диаграмму Фейнмана с диаграммой направленности: есть направления, куда частицы влетают более вероятно и куда менее вероятно. В то же время если у нас родилась и начала испаряться черная дыра, то, в соответствии с уравнениями Хокинга, она должна светить во всех направлениях одинаково. Это, что называется, *поперечный импульс*.

В 2020 году на большом андронном коллайдере нет черных дыр.

С помощью модели ADD можно только решить проблему некомпактности дополнительных измерений, причем некомпактность можно только повысить, причем не до произвольного значения.

Модели RS

- Lisa Randall, Raman Sundrum / An Alternative to Compactificcation / 1999

В 1999 году вышла статья An Alternative to Compactification. Было предложено считать, что мир — это брана (гиперповерхности). Будем считать, что наш мир - гиперповерхность, вложенная в дополнительное пространство. Модель RS 1 — это

модель с двумя бранами (рис. 2.4): планковская брана на y = 0 и ТэВ брана, расположенная на каком-то конечном расстоянии. Между ними расположено дополнительное пространство, y и есть то самое дополнительное измерение. Все эти модельные пятимерные.

Идея модели в том, что физические измерения существуют только на бране, а гравитации позволено распространяться везде.

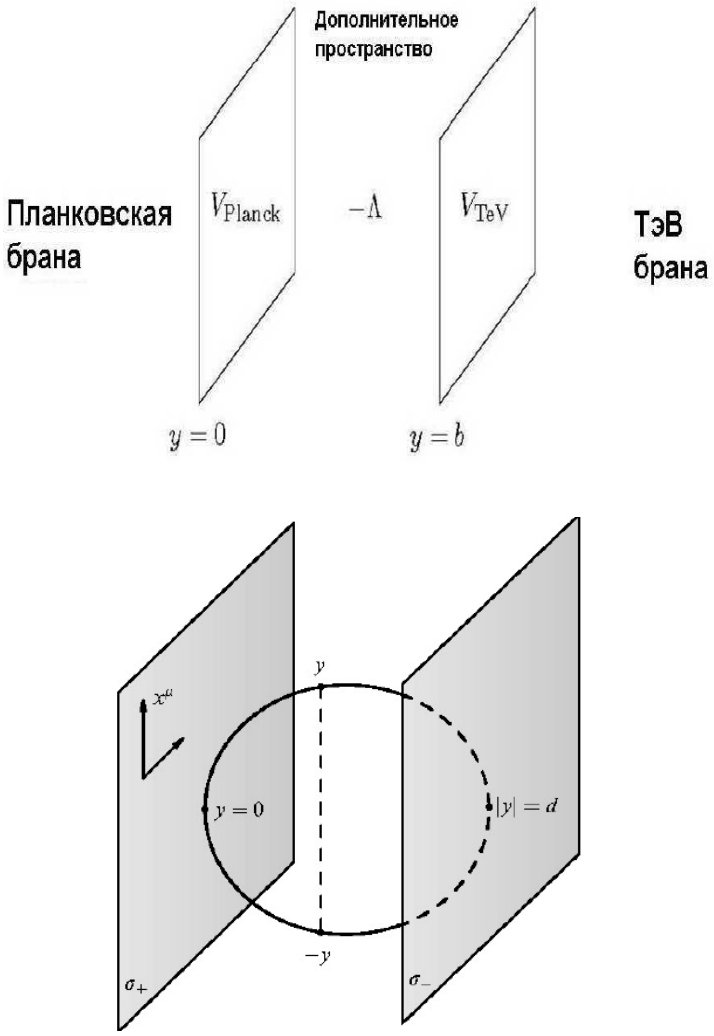


рис. 2.4 RS I

Модель RS II — это та же модель, но с ТэВ браной на бесконечности, то есть с одной браной.

Брана обладает натяжением σ и населена 4D материальным полем ψ с лагранжианом $L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi)$ и индуцированной метрикой $g_{\mu\upsilon}(x)$.

В 2018 году появились статьи о том, что ели принять во внимания событие GW170817 (когда электромагнитное и гравитационное излучение пришли с разницей в 1.7 сек.), то брана плоская.

Если мы рассмотрим лагранжиан RS II, то мы увидим, что он состоит из пятимерной части четырехмерной, которая существует на бране.

$$S[G_{AB}(X),\Psi(x)] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5X\sqrt{G}\ {}^5[R(G_{AB}) - 2\Lambda_5]$$
$$+\int d^4x\sqrt{-g}\{\frac{[K]}{8\pi G_5} + L_m(g_{\alpha\beta},\Psi,\partial\Psi)$$

Z_2 симметрия относительно плоскости браны. Вариацией действия мы можем получить уравнение поля.

Условие Израэля: сшивка барны и балка

$$[K^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}K] = 8\pi G_5 S^{\mu\nu}$$
$$S^{\mu\nu} = -\sigma g^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$$

На переходе от балки к бране и наоборот значения должны быть одинаковыми, иначе будет какой-то фазовый переход.

На бране тоже есть *проблема иерархии*. Брана с отрицательным натяжением населена Хиггсовым полем H(x) с действием

$$S_{brane} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda\{H^2 - v^2\}^2\right)$$

v - масштаб спонтанного нарушения симметрии

Поле минимальным образом взаимодействует с индуцированной метрикой

$$g^{\mu\nu} = \exp(-2|y|/|)\eta^{\mu\nu}$$

Масштабный фактор $a(y) = e^{-2\frac{|y|}{l}}$

Исходное поле H не обладает канонической нормировкой: коэффициент кинетического члена равен 1.

Замена для появления канонической нормировки:

$$H \to \exp(-2|y|/|)H$$
$$S_{brane} = \int d^4x(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda\,\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda(H^2 - v^2)^2)$$

Тогда новый эффективный масштаб нарушения симметрии:

$$v \to \exp(-2|y|/|)v$$

Это означает, что вес величины можно изменять, игра расстоянием между бранами. Масштаб экспоненциально мал, следовательно, малое изменение в положении браны вызывает экспоненциально сильное изменения энергетического масштаба теории с точки зрения наблюдателя на бране. Это и есть ключ к решению проблемы иерархии.

Локализация гравитона на бране

Если все гравитоны могут влетать в брану и балк, то получается, что для пятимерья не работает теория Ньютона, потому что она работает в четырехмерье.
Разберемся, что происходит на бране. Строим линеаризованную теорию на фоне решения RS:

$$g_{\mu\nu} = \exp(-2|y|/|)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x,y)$$

$h_{\mu\nu}(x,y)$ - ненулевые компоненты возмущений метрики в калибровке RS:

$$h_{55} = h_{5\mu} = 0$$

$\partial^{\mu} h_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\mu} = 0$

Далее можно записать вакуумное уравнение Эйнштейна и Израэля:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{4}{l^2} + \frac{\square}{a^2(y)}\right) h_{\mu\nu}(x,y) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dy} + \frac{2}{l}\right) h_{\mu\nu}(x,y) = 0, \qquad y = 0$$

Разделение переменных путем разложения метрических возмущений по плоским 4D

$$p^2 = -m^2$$

$$h_{\mu\nu}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{z}} \varphi_m(x) e^{ipx}$$

Новая переменная $|z| \geq I$

m - параметр разделения - масса КК мод

$$z = sign(y) \left| exp\left(\frac{|y|}{l}\right)\right|$$

силу линеаризованных уравнений Эйнштейна

$$\frac{z^{\frac{3}{2}}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \square - \frac{15}{4z^2}\right) \varphi_m(z) \exp(ipx) = 0$$

m^2- собственное значение уравнения Шредингера

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{15}{4z^2}\right) \varphi_m(z) = m^2 \varphi_m(z)$$

На полупрямой z ≥ I с потенциалом $V(z) = 15/4z^2$ (рис. 2.5).

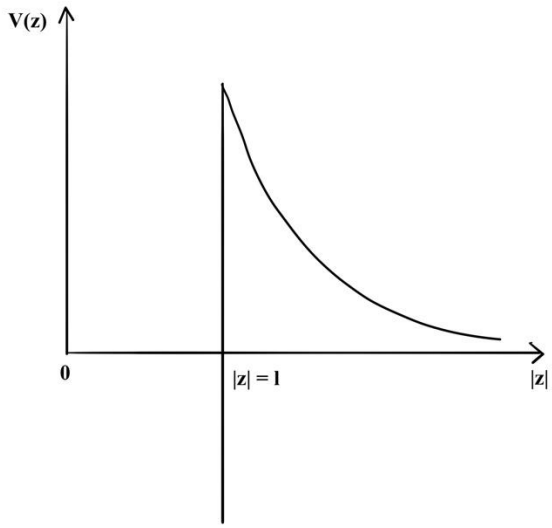


рис. 2.5 $V(z) = 15/4z^2$

Далее используем краевое условие задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{3}{2l}\right)\varphi_m(z) = 0,\ \text{z} = 0$$

Спектр содержит нулевую моду m = 0 и непрерывный спектр m > 0.

Нулевая мода $\varphi_0(z) = \left(\frac{1}{l}\right)^2 \left(\frac{l}{z}\right)^{3/2}$ удовлетворяет уравнениям и нормируема:

$$2\int_l^\infty dz {\varphi_0}^2(z) = 1$$

Массивные КК моды выражаются через функции Бесселя и Неймана второго порядка

$$\varphi_m(z) = \left(\frac{mz}{2}\right)^{1/2} \frac{Y_1(ml)J_2(mz) - J_1(ml)Y_2(mz)}{\left({J^2}_1(ml) + {Y_1}^2(ml)\right)^2}$$

И нормируемы на дельта-функцию в непрерывном спектре

$$2\int_l^\infty dz \varphi_m(z)\, \varphi_{m'}(z) = \delta(m - m')$$

Основная идея заключается в том, что есть нулевая мода и все остальные. И если нулевая мода локализуется на бране, то при уходе с браны она очень быстро гасится. Получается, что главная асимптотика - нулевая мода, которая живет на бране, а какие-то возмущения уходят. С такой точки зрения мы получаем эффекты балка в качестве всего лишь возмущения.

Это означает, что нулевая мода сконцентрирована на бране, а массивные моды уходят в бесконечность в виде стоячих волн.

Это дает локализацию безмассового гравитрона на бране и восстановление 4D гравитации.

Лекция 3. Модели RS (Randall-Sundrum models)

Модели RS

Вспомним устройство модели Рандал-Сандрум (рис. 3.1).

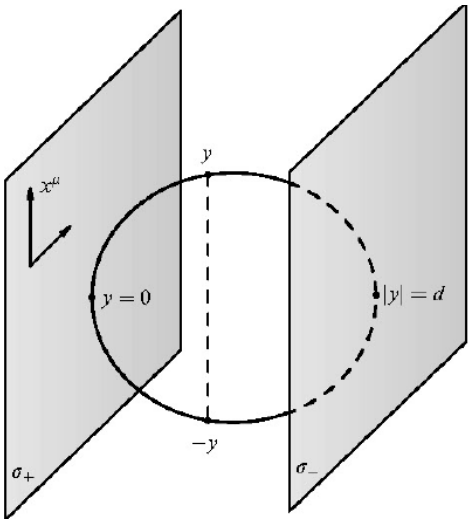


рис. 3.1 модель RS

Есть две браны (многомерных гиперповерхностей), расстояние между ними может быть любой величины вплоть до бесконечности. На бранах строим физику, попутно решая проблемы темных материй, инфляции, перехода из многомерья в четырехмерье и т.п.

Рассмотрим Закон Ньютона на бране. Надо сделать так, чтобы нулевая мода была Ньютоновской, а дальше были поправки, которые можно было бы объяснить темной материей.

Нерелятивистский закон притяжения на бране определяется функцией Грина 4D лапласиана *(3.1)*:

$$\Delta^4 = \frac{z^{3/2}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \Delta^3 - \frac{15}{4z^2}\right) z^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\frac{z^{3/2}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \square - \frac{15}{4z^2}\right)\varphi_m(z)\exp(ipx) = 0$$

Малые буквы - на бране $\Delta^3 = \delta^{mn}\partial_m\partial_n$.
Искомый потенциал напряжения:

$$G_5 D(x, x') = G_5 \frac{1}{\Delta^4}\delta(X.X'), \qquad y = y' = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На бране 4D функция → волны(x) + гармоники(z)

$$\delta(X,X') \equiv \delta^3(x,x')\delta(y-y') = \delta^3(x,x')\delta(z-z')\frac{z}{l}$$

$$\delta(z-z') = \sum_m \varphi_m(z)\varphi_m(z') \equiv \varphi_0(z)\varphi_0(z') + \int_0^\infty dm\varphi_m(z)\varphi_m(z')$$

Подставляем в функцию Грина:

$$G_5 D(x,x') = \int d^3p \sum\nolimits_m \frac{\exp(ip(x-x'))}{p^2+m^2}\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(z')}{\sqrt{zz'}} =, \qquad z = z' = l$$

$$= -\frac{G_5}{4\pi r}\varphi_0^2(l) - = -\frac{G_5}{4\pi r}\int_0^\infty dm{\varphi_m}^2(l)\exp(-mr), \qquad r = |x-x'|$$

При больших расстояниях:

$$G_5 D(x,x') == -\frac{G_5}{4\pi r}\left(1+\frac{l^2}{2r^2}+\cdots\right), \qquad r \gg l$$

В результате пятимерный закон Ньютона состоит из четырехмерного с поправками. Притяжение на бране при $r \gg l$ - 4D Ньютоновский закон.
Эффективная гравитационная постоянная определяется через комбинацию пятимерной (фундаментальной) и <<объема>> дополнительного пространства (аналогично ADD).

$$G_4 = G_5/I$$

Роль радиона

Запишем релятивистский закон взаимодействия (аналог).
Запаздывающий 5D пропагатор:

$$D^{ret}(X,X') \xRightarrow{y=y'=0} = \left|\frac{1}{l}\frac{1}{\square_4}\delta(x,x')\right|^{ret}, \qquad (x-x')^2 \gg l^2$$

В релятивистской области важна тензорная структура гравитационного потенциала - сложнее ньютоновской 00 компоненты. Запаздывающий потенциал от материи на бране: действие 4D пропагатора на правую часть условий сшивания Израэля в присутствии материи

$$\left(\frac{d}{dy}\frac{2}{l}\right)h_{\mu\upsilon}(x,y) \overset{y=0}{\Longrightarrow}= -8\pi G_5\left(T_{\mu\upsilon}-\frac{1}{3}\eta_{\mu\upsilon}T\right)$$

В длинноволновом приближении

$$h_{\mu\upsilon}(x,y) \cong -168\pi G_4\frac{1}{\Box}\left(T_{\mu\upsilon}-\frac{1}{3}\eta_{\mu\upsilon}T\right)(x)$$

Что неверно, так как должно быть $\left(T_{\mu\upsilon}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\upsilon}T\right)$!

Противоречие исчезнет, если предположить, что данная метрика - не индуцированная метрика на бране. В левой части должна стоять метрика в *нормальной Гауссовой системе координат* ${h_{\mu\upsilon}}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\upsilon}(x,y)$ в калибровке RS.
В этой калибровке брана не является плоскостью y=0, а погружение в пространство (x^μ, y) задается дополнительными степенями свободы.

Далее дополняем скалярное поле П(x): y = П(x), называемое радионом, и векторное поле $\xi^\mu(x)$, описывающего отличие 4D координатной сетки на бране от кооринат в объеме.

$${h_{\mu\upsilon}}^{NG}(x,y) = h_{\mu\upsilon}(x,y) + \frac{2}{l}\eta_{\mu\upsilon}a^2(y)\Pi(x) + l\partial_\mu\partial_\upsilon\Pi(x) + a^2(y)\left(\partial_\mu\xi_\upsilon + \partial_\upsilon\xi_\mu\right)(x)$$

Подставляем ${h_{\mu\upsilon}}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\upsilon}(x,y)$

Поле радиона, отвечающее за погружение браны в объем, определяется следом тензора натяжений материи, которая <<прогибает>> брану:

$$\Box\Pi(x) = \frac{8\pi G_5}{6}T(x)$$

В силу замены ${h_{\mu\upsilon}}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\upsilon}(x,y)$ индуцированная метрика на бране отличается конформным членом $\frac{2}{l}\eta_{\mu\upsilon}a^2(y)\Pi(x)$ и набором чисто калибровочных слагаемых $\partial_\mu\xi_\upsilon + \partial_\upsilon\xi_\mu$.

Выбором системы 4D координат калибровочные члены можно убрать.

$${h_{\mu\upsilon}}^{NG}(x,y) = h_{\mu\upsilon}(x,y) + \frac{8\pi G_5}{3l}a^2(y)\eta_{\mu\upsilon}\frac{1}{\Box}T(x)$$

В правой части уравнения для индуцированной метрики

$${h^{ind}}_{\mu\upsilon}(x) = {h^{NG}}_{\mu\upsilon}(x, y=0)$$

Возникает общерелятивистская комбинация с правильным коэффициентом:

$${h^{ind}}_{\mu\upsilon}(x) \cong -16\pi G_4\frac{1}{\Box}\left(T_{\mu\upsilon}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\upsilon}T\right)(x)$$

Легко проверить, что калибровка метрики гармоническая:

$$\partial^{\nu} h^{ind}{}_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\partial_{\mu\upsilon} h^{ind} = 0$$

Рассмотри, что будет происходить в модели с 2 бранами.

Действие:

$$[G_{AB}(X)] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5X\sqrt{G}\ {}^5[R(G_{AB}) - 2\Lambda_5] + \sum_I \int_{\Sigma_I} d^4x\sqrt{g}\left(\frac{1}{8\pi G_5}[K] - \sigma_I\right)$$

Браны локализованы на y=0 и y=d.

Натяжения бран подобраны в соответствии с 5D космологической гравитационной константами.

Метрика на бране с отрицательным натяжением содержит масштабный фактор $a^2(d) = \exp(-\frac{2d}{I})$ для решения проблемы иерархии.

Рассмотрим маые возмущения индуцированных метрик на бранах:

$$g^{\pm}_{\mu\upsilon}(x) = a^2{}_{\pm}\eta^{\mu\upsilon} + h^{\pm}_{\mu\upsilon}(h)$$

$$a_+ = 1, \qquad a_- = \exp\left(-\frac{2d}{I}\right) \equiv a$$

Возмущенное решение уравнений Эйнштейна во всем пространстве:

$$ds^2 = dy^2 + exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right)\eta_{\mu\upsilon}dx^{\mu}dx^{\nu} + h_{AB}(x,y)dx^A dx^B$$

Вычислим эффективное действие на бранах в квадратичном по $h^{\pm}_{\mu\upsilon}(x)$ приближении. Результирующее действие инвариантно относительно $h^{\pm}_{\mu\upsilon} \to h^{\pm}_{\mu\upsilon} + \partial_{\mu}\xi^{\pm}_{\upsilon} + \partial_{\upsilon}\xi^{\pm}_{\mu}$

В терминах тензорных инвариантов:

$$R^{\pm}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2}\left(-\Box h_{\mu\upsilon} + \partial_{\lambda}\partial_{\mu}h^{\lambda}_{\nu} + \partial_{\lambda}\partial_{\nu}h^{\lambda}_{\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h\right)^{\pm}$$

С помощью такой процедуры или путем функционального интегрирования эффективных 4D уравнений можно вычислить:

$$S_{eff}[g^{\pm}_{\mu\upsilon}] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^4x\left[R^T_{\mu\upsilon}\frac{2F(\Box)}{l^2\Box^2}R^{\mu\upsilon} - \frac{1}{6}R^T\frac{2F_1(\Box)}{l^2\Box^2}R\right]$$

Здесь $R_{\mu\upsilon} = \begin{bmatrix} R^{+}_{\mu\upsilon}(x) \\ R^{-}_{\mu\upsilon}(x) \end{bmatrix}$

$$R^{T}_{\mu\upsilon} = [R^{+}_{\mu\upsilon}(x) R^{-}_{\mu\upsilon}]$$

Это еще один путь смоделировать космологическую постоянную в четырехмерье.

Возможные пути решения космологической постоянной

Проблема космологической постоянной: разрыв между средней плотностью энергии.

$$\mathcal{E} \sim 10^{-29}\text{г/см}^3 \sim (10^{-5}\text{эВ})^4 \rightarrow {H_0}^2 \sim G\mathcal{E}$$

Масштаб вакуумных энергий фундаментальных взаимодействий:

$$\mathcal{E} \sim (1\ \text{ТэВ})^4 (EW) \rightarrow (10^{19}\text{ГэВ})^4 (QG)$$

Один из способов решения - замена космологической постоянной на нелокальный оператор:

$$G \rightarrow G(\Box) \rightarrow R_{\mu\upsilon} - 1/2\ g_{\mu\upsilon} R = 8\pi G(\Box) R_{\mu\upsilon}$$

Космологические уравнения для модели RS:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R^{(5)} = -\Lambda_5 G_{AB}$$
$$K_{\mu\upsilon} - K g_{\mu\upsilon} = 4\pi G_5 S_{\mu\upsilon}$$

Проецируем уравнение 4D на брану. Используем уравнения Гаусса-Кодацци (разложение 5D тензора кривизны на сумму 4D и квадратичную комбинацию внешней кривизны с ковариантными производными).
Получим:

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2} g_{\mu\upsilon} R = -\frac{1}{2} g_{\mu\upsilon} \Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\upsilon} - \mathcal{E}_{\mu\upsilon}$$

Перейдем к тензору Вейля.
Переход к тензору Вейля выглядит так:

$$\Pi_{\mu\upsilon} = -\frac{1}{4} S_{\mu\alpha} {S_\upsilon}^{\alpha} + \frac{1}{12} S S_{\mu\upsilon} + \frac{1}{8} ({S_{\alpha\beta}}^2 - \frac{1}{3} S^2) g_{\mu\upsilon}$$
$$\mathcal{E}_{\mu\upsilon} = {}^5 C_{A\mu B\nu} n^A n^B$$

Бесследовость и закон изменения:

$$\mathcal{E}^{\mu}_{\mu} = 0,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\nabla^{\mu}\mathcal{E}_{\mu\upsilon} = (8\pi G_5)^2\nabla^{\mu}\Pi_{\mu\upsilon}$$

Уравнение Кодацци *(3.2)*:

$$\partial^{\nu}K_{\upsilon\mu} - \partial_{\mu}K = {}^5R_{5\mu} \to \partial^{\mu}S_{\mu\upsilon} = 0 \quad (3.2)$$

В модели с натяжением

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2\Pi_{\mu\upsilon} = -\Lambda_4^{eff}g_{\mu\upsilon} + \cdots,$$

$$\Lambda_4^{eff} = \frac{1}{2} - \Lambda_5 + \frac{(8\pi G_5\sigma)^2}{12}$$

Вейлевский член вносит свой вклад. Явное решение 5D уравнентй Эйнштейна и Израэля:

$$ds^2 = -N^2(t,y)dt^2 + a^2(t,y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2 9t,y)dy^2$$

Фиксируем вид тензора энергии импульса:

$$T_{\upsilon}^{\mu} = diag(-p,p,p,p)$$

$$\frac{(a')^2}{a^2b^2} - \frac{(a)^2}{a^2N^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{c}{a^4} = 0$$

Штрих по пятой координате, условие сшивки: $\frac{a\prime}{ab} \overset{y=0}{\Longrightarrow} -\frac{4\pi G_5}{3}\rho$

$$G_4^{eff}(\rho) = \frac{4\pi G^2{}_5\sigma}{3}(1 + \frac{\rho}{2\sigma})$$

Получается, четырехмерная гравитационная постоянная зависит от плотности.

Модель DGP

В **модели Двали-Габададзе-Поратти** *(3.3)* действие не содержит космологической постоянной ни в 5D, ни в 4D. Вместо натяжения 4D эйнштейновский член с гравитационной постоянной G_4, существенно отличный от G_5.

$$S_{DGP} = [G_{AB}(X), \psi(x)] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5X\sqrt{G}\,R_5(G_{AB}) + \int d^4x\sqrt{g}\left(\frac{[K]}{8\pi G_5} + \frac{R_4(g_{\mu\upsilon})}{16\pi G_4} + L_m(g_{\mu\upsilon}, \psi, \partial\psi)\right) \quad (3.3)$$

Эту модель назвали моделью с усиленной гравитацией.

Механизм космологического ускорения в модели DGP устроен следующим образом:
Натяжение DGP-браны:

$$S_{\mu\upsilon} = -(8\pi G_4)^{-1}\left(R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}R\right) + T_{\mu\upsilon}$$

В отсутствии материи ($T_{\mu\upsilon} = 0$) уравнение динамики

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}R = -\frac{1}{2}\ g_{\mu\upsilon}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2\Pi_{\mu\upsilon} - \mathcal{E}_{\mu\upsilon}$$

квадратично по тензору Эйнштейна. Следовательно, возможно самоускоряющееся движение, о есть мы можем получить космологическое решение без дополнительной материи.
Таким образом, геометрия начинает играть роль материи.

Используем ДеСиттеровской анзац с постоянной Хаббла H: $R_{\mu\upsilon} = 3H^2\ g_{\mu\upsilon}$
Подставим $\Pi_{\mu\upsilon} = -3\left(\frac{H^2}{16\pi G_4}\right)^2\ g_{\mu\upsilon}$
Для $\mathcal{E}_{\mu\upsilon} \ll (\frac{G_5}{G_4})^2 H^4\ g_{\mu\upsilon} \to H^2 - L^2H^4 = 0$ порождается ДеСиттеровская стадия с характерным масштабом H = L^{-1}.
Отождествляя с современным масштабом $L{\sim}10^{28}$ см, получим космологическое расширение.

Модель DGP - классический предел инфа-красных модификаций ОТО на малых расстояниях. Инфракрасными модификациями называются те модификации, в которых мы меняем гравитацию на малых масштабах, где не проверен закон Ньютона.

Соответственно, ультрафиолетовые модификации - модификации на больших расстояниях, где модифицируются космологические постоянные, чтобы включить ускоренное расширение Вселенной.

Характерные масштабы:

- Планковский $M_p{\sim}10^{19}$ ГэВ
- Космологический m $\sim 10^{-33}$ эВ

Переход между ними в процессе эволюции осуществляется в промежуточной субмилиметровой области:

$$\sqrt{mM}{\sim}10^{-3}\ \text{эВ}\ {\sim}(10^{-2}\ \text{см})^{-1}$$

Казалось бы, DGP не противоречит экспериментам Кавендиша, но существует проблема *сильной связи*: нелинейные поправки к ОТО проявляются на больших масштабах (работают в солнечной системе, но портятся на больших расстояниях).

Проблема сильной связи

Разберем проблему сильных связей на разных моделях. Для этого рассмотрим поля общего типа, теорию возмущений на фоне плоского решения. В отличие от RS в DGP плоское решение допустимо.
Идет замена гравитационной постоянной на нелокальный оператор $G_p \to G(\Box)$,

$$\Box = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$$

Тогда уравнение Эйнштейна превращается в:

$$(16\pi)^{-1}M(\Box)\left(R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}R\right) = \frac{1}{2}T_{\mu\upsilon}$$
$$\left(G(\Box)\right)^{-1} = M^2(\Box) = M_p^2(1 + F(L^2\Box))$$

Проблема заключается в том, что для любого нетривиального оператора F ($L^2\Box$), являющегося решением уравнения Эйнштейна, левая часть не удовлетворяет тождествам Бьянки, то есть не моет быть получена как вариация ковариантного действия.

Простейшая модификация

$$M_p^2\int dx\sqrt{g}R \to \int dx\sqrt{g}M^2L^2(\Box)R = M^2(0)\int dx\sqrt{g}R$$

смысла не имеет.

Чтобы получить ведущий член $S_{NL}[g_{\mu\upsilon}]$, уравнение можно функционально проинтегрировать, используя ковариантную технику разложения по кривизне.

Суть техники - конвертирование нековариантного разложения по степеням гравитационных возмущений $h_{\mu\upsilon}$ в ряд по пространственно-временной кривизне и ее производным с нелокальными коэффициентами.

$$F_\mu \equiv \nabla^\lambda h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\nabla_\mu h$$
$$R_{\mu\upsilon} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\upsilon} + \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu F_\nu + \nabla_\upsilon F_\mu\right) + O[h^2{}_{\mu\upsilon}]$$

Линеаризованная калибровка деДондера-Фока. Первый член:

$$h_{\mu\upsilon} = -\frac{2}{\Box}R_{\mu\upsilon} + \nabla_\mu f_\nu + \nabla_\upsilon f_\mu + O[R^2{}_{\mu\upsilon}]$$

Калибровочный произвол.

В результате:

$$S_{NL}[g_{\mu\upsilon}] = -\frac{1}{16\pi}\int d\,x\sqrt{g}\left\{\left(R^{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}R\right)\frac{M^2(\Box)}{(\Box)}R_{\mu\upsilon} + O[R^3{}_{\mu\upsilon}]\right\}$$

Впоследствии в простейшем случае должно воспроизводиться действие ОТО. В общем случае

$$S_{NL}[g_{\mu\upsilon}] = -\frac{1}{16\pi}\int d\,x\sqrt{g}\left\{R^{\mu\upsilon} - \frac{M_1^2(\Box)}{(\Box)}R^{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\frac{M_2{}^2(\Box)}{(\Box)}R + O[R^3{}_{\mu\upsilon}]\right\}$$

Обе Планковские массы стремятся к единому пределу в области больших энергий. Появляются дополнительные вклады в массы.

Рассмотрим модель Паули-Фирца и проблему ВанДама-Вельтмана -Захарова. Модель Паули-Фирца *(3.4)* свободного массивного тензора поля - простейшая инфракрасная модель ОТО. Описывается квадратичной частью действия ОТО с некоторым инвариантным массовым членом на плоском фоне.

$$S_{mass}[g_{\mu\upsilon}] = -\frac{M_p^2}{16\pi}\int d^4x\left(\frac{m^2}{4}h_{\mu\upsilon}{}^2 - \frac{m^2}{4}h^2\right)$$

$$h_{\mu\upsilon} \equiv g_{\mu\upsilon} - \eta_{\mu\upsilon},\ h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\upsilon} \qquad (3.4)$$

Это единственная комбинация без духов!

Уравнение движения модели Паули-Фирца задается таким образом:

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\upsilon}R + \frac{m^2}{2}\left(h_{\mu\upsilon} - \eta_{\mu\upsilon}h\right) = 8\pi G_4 T_{\mu\upsilon}$$

Дифференцируя и используя тождество Бьянки, получим «калибровку»

$$\partial^\mu\left(h_{\mu\upsilon} - \eta_{\mu\upsilon}h\right) = 0$$

В этой калибровке $R = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\upsilon} - \Box h = 0$

В результате гравитационное поле:

$$h_{\mu\upsilon} = -\frac{16\pi G_4}{\Box - m^2}\left(T_{\mu\upsilon} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\upsilon}T\right) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

Тензорная природа пропагатора гравитона отличается от случая ОТО коэффициентом в правой части: 1/3 вместо ½ в ОТО. Это сохраняется и в пределе $M \to 0$, что называется *проблемой ВанДама-Вельтмана-Захарова*: безмассовый предел не соответствует ОТО.

Причина кроется в дополнительной продольной степени свободы.

Уравнения

$$h_{\mu\upsilon} = -\frac{16\pi G_4}{M_1^2(\Box)\Box}\left(T_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\alpha(\Box)\eta_{\mu\upsilon}T\right) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

Операторный коэффициент $\alpha(\Box) = \frac{2M_2^2(\Box) - M_1^2(\Box)}{3M_2^2(\Box) - 2M_1^2(\Box)}$ принимает значение Фрица-Паули $\alpha_{PF} = \frac{2}{3}$ только в сингулярном пределе $M_1^2(\Box) \to 0$

Включение в действие:

$$S_{NL}[g_{\mu\upsilon}] = -\frac{1}{16\pi}\int d\,x\sqrt{g}\left\{R^{\mu\upsilon} - \frac{M_1^2(\Box)}{(\Box)}R^{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\frac{{M_2}^2(\Box)}{(\Box)}R + O[{R^3}_{\mu\upsilon}]\right\}$$

лагранжева члена приводит к *правильному запаздывающему потенциалу*

$$M_1^2(\Box) = M_1^2(\Box) = \frac{1}{G_4}\frac{\Box - m^2}{\Box}$$

Рассмотрим теперь проблему сильной связи в модели DGP. В DGP ситуация аналогична модели Паули-Фирца: $m^2 \to m\sqrt{(-\Box}$)

Роль параметра m играет масштаб. Разложение по гравитационным возмущениям:

$$G_{AB}(X) = \eta_{AB} + H_{AB}(X)$$

Решим линейное уравнение для $H_{AB}(X)$:

$$X^5 = y = 0$$

Для фиксации координатной калибровки в объеме к действию добавим нарушающий калибровочную инвариантность член, квадратный по линеаризованным калибровочным условиям ДеДондера-Фока.

$$S_{gaude}[H_{AB}] = \sqrt{\frac{M_5^3}{16\pi}}\int d^5X\,\eta^{AB}F_AF_B$$

$$F_A = \partial^B H_{AB} - \frac{1}{2}\partial_A H$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В этой калибровке уравнения движения в объеме приобретают *наиболее простой вид* и образуют краевую задачу.

$$\partial_5 H_{AB}(X) = 0$$
$$H_{AB}(x,y) = h_{AB}(x), \qquad y = 0$$
$$h_{AB}(x) = (h_{\mu\upsilon}(x), N_{\mu(x)}, h_{55}(x))$$

В отличие от модели RS с искривленным фоном решение проще, поскольку на плоском фоне $\square_5 = \square + \partial^2{}_y$

$$H_{AB}(x,y) = \exp(-y\Delta) h_{AB}(x), \ \ \Delta = \sqrt{-\square}$$

Подставляем в 5D часть DGP действия с учетом калибровочного члена:

$$S_{gaude}[H_{AB}] = \sqrt{\frac{M_5^3}{16\pi}} \int d^5X\, \eta^{AB} F_A F_B$$
$$F_A = \partial^B H_{AB} - \frac{1}{2}\partial_A H$$
$$S_5[G_{AB}] + S_{gauge}[H_{AB}] = \frac{M_4^3}{16\pi}\frac{m}{4}\int d^4x(-\tilde{h}^{\mu\upsilon}\,\Delta\tilde{h}_{\mu\upsilon} + \tilde{h}\Delta h_{55} - \frac{1}{2}h_{55}\Delta h_{55})$$

новая величина m = $2M_5^3/M_4^2$ - DGP масштаб;
$\tilde{h}_{\mu\upsilon}$ - комбинация возмущения метрики, индуцированной на бране и функции сдвига в пятом измерении $G_{5\mu} = N_\mu$

$$\tilde{h}_{\mu\upsilon} = \tilde{h}_{\mu\upsilon} + \frac{1}{\Delta}(\partial_\mu N_\upsilon + \partial_\upsilon N_\mu)$$

Фиксируем калибровку:

$$\tilde{h}_{\mu\upsilon} = h_{\mu\upsilon} + \frac{1}{\Delta}(\partial_\mu N_\upsilon + \partial_\upsilon N_\mu)$$

Калибровочный вариант относительно

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\upsilon + \partial_\upsilon \xi_\mu, \qquad \delta_\xi\, N_\mu = -\Delta\xi_\mu, \ \ \delta_\xi h_{55} = 0$$

Которые в свою очередь являются ограничением для остаточных калибровочных членов $\delta_\Xi H_{AB} = \partial_A \Xi_B + \partial_B \Xi_A$

С векторным полем:

$$\Xi^\mu(x,y) = \exp(-y\Delta)\,\xi^\mu(x), \ \ \Xi^5(x,y) = 0$$

Оставляющих инвариантными калибровку ДеДондера и не сдвигающих брану с y=0.

Эффективное действие - инвариант четырехмерных преобразований.

Инвариантность реализована с помощью штюкельберговских полей - вводимых руками для ковариантинизации калибровочно-неинвариантного действия.
Варьируя эти поля, можно спрятать метрику:

$$N_\mu = \frac{1}{\Delta}(\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h + \partial_\upsilon h_{55})$$

$$\tilde{h}_{\mu\upsilon} = -2\frac{1}{\Box}R_{\mu\upsilon} + \frac{\partial_\mu\partial_\upsilon}{\Box}h_{55})$$

Подстановка приводит к

$$S_5 + S_{gauge} = \frac{M_4^2 m}{16\pi}\int d^4x(-R^{\mu\upsilon}\frac{\Delta}{\Box^2}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R\frac{\Delta}{\Box^2}R - R - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{\Box}h_{55})$$

Здесь $h_{55} = -2\Delta\Pi$
П - продольная часть функции пятимерного сдвига: $N_\mu = \partial_\mu\Pi + N_\mu{}'$, которое параметризует изгиб браны:

$$\Xi^A(x,y) = \delta_5^A \exp(-y\Delta)\,\Pi(x), \qquad \delta_\Xi H_{55} = 2\partial_y\Xi_5$$

То есть не нарушая калибровку, мы сдвигаем брану.
Модель DGP эффективно описывается в линейном приближении моделью Паулини-Фирцас нелокальным массовым членом. Гравитационный потенциал от массового источника:

$$h_{\mu\nu} = -16\pi G_4\frac{1}{\Box - m\Delta}\left(T_{\mu\upsilon} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\upsilon}T\right) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

Дальнодействие материи на бране определяется пропагатором, который в области малых интервалов (|x| << L=1/m, |□| >> m^2) совпадает с четырёхмерным.

В области ультра-больших расстояний гравитационная утечка в объем:

$$\frac{1}{\Box - m\Delta}\delta(x) \cong -\frac{1}{(2\pi)^4 m}\int d^4p\frac{\exp(ipx)}{\sqrt{p^2}} = -\frac{2}{m}\frac{1}{(2\pi)^5}\int d^5p\frac{\exp(ipx)}{p^2 + p_5^2} = \frac{2}{m}\frac{1}{\Box_5}\delta^{(5)},$$

$$y = 0, \qquad |x| \gg \frac{1}{m}$$

То есть на больших расстояниях гравитация может уходить в том числе в объем, то есть локализация четырехмерного гравитона на бране не абсолютна, следовательно радион не полностью стабилизирован, следовательно есть проблема ВанДама-Вельтмана-Захарова (безмассовый предел не соответствует ОТО).

Другая трудность DGP - наличие низкого энергетического масштаба сильной связи. Это означает, что возникает иерархия масштабов длин: масштаб горизонта,

масштаб сильной связи, масштаб перехода к инфракрасным состояниям, планковский масштаб.

Приливной заряд

Вспомним, как описывалось динамика в модели RS:

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2} g_{\mu\upsilon} R = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\upsilon}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\upsilon} - \mathcal{E}_{\mu\upsilon}$$

Правую часть равенства можно трактовать как уравнение Эйнштейна с правой частью. Запишем асимптотически-плоское сферически-симметричное решение:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

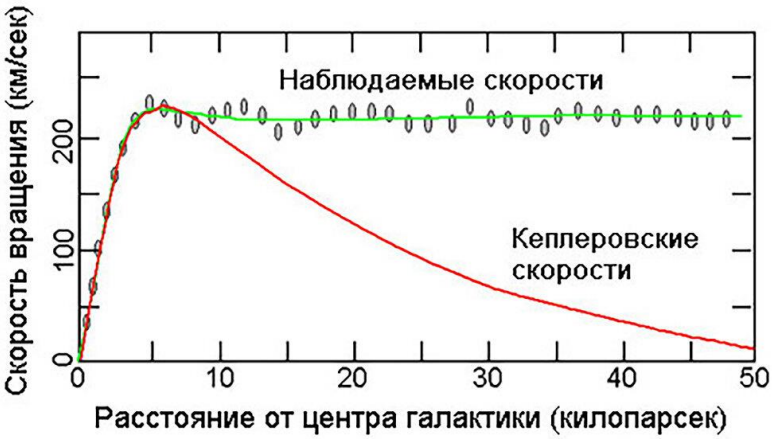
И разложим его в ряд Тейлора:

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} \pm \frac{Q^2}{r^2} + \frac{Q^3}{r^3} + \cdots$$

Q - электрический *приливной* заряд.
Метрика с Q в отличие от метрики Шварцшильда уже может быть решением уравнения.

Что касается идеи MOND, гравитационный потенциал $\varphi = \frac{m}{r}$ используется для учета темной материи в виде $\varphi = \frac{m}{r}(1 + \mu r)$, k - малая величина.

Эти поправки в закон Ньютона мы обсуждали ранее, на рис. 3.2 представлено фактически их изображение.
μ настолько мало, что если r тоже мало, то $1 + \mu r$ настолько мало, что мы его отбрасываем и получаем стандартный ньютоновский потенциал. Когда r принимает больше значения, мы получаем константу.



КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

рис. 3.2 поправки в закон Ньютона

Лекция 4. Модель Гаусса-Бонэ (часть I)

Литература:

- Черные дыры Гаусса-Бонэ и возможности их экспериментального поиска, С.О. Алексеев

Гравитация Лавлока

В случае 4D пространства-времени наиболее общий вид лагранжиана второго порядка (не создающего дополнительных проблем в гравитации).

$$L = \sqrt{g}\left(\alpha R^2 + \beta R_{ij}R^{ij} + \gamma R_{ijkl}R^{ijkl}\right) + \mu R_{ijkl}\,{}^*R^{ijkl}$$

$$y'' + \lambda y'' = f(y) \text{ - Lovelock}$$
$$y'' + \lambda y'''' = f(y) \text{ - other}$$

В лагранжиане Лавлока с расстоянием (когда увеличивается вклад классической части), поправки будут убывать быстрее. Это означает, что на бесконечности будет 0, следовательно, этой моделью нельзя объяснить темную энергию.

В другом случае можно вычислить гравитационную постоянну., но ньютоновский предел под вопросом.

По теореме Понтрягина введём $\alpha = 1, \beta = -4,\ \gamma = 1, \mu = 0$ и получим член Гаусса-Боннэ *(4.1)*:

$$S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2 \quad (4.1)$$

Он является полной дивергенцией в четырёхмерном пространстве-времени, типологически инвариантным:

$$S_{GB} = \partial_\mu I^\mu$$

$$I^\mu - \text{ток.}$$

Чтобы описать струнное действие, теорию струн, которая работает в многомерном пространстве-времени, построим топологические инварианты:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[R - 2\Lambda + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \alpha_4 S_4 + \cdots]$$

$\alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \alpha_4 S_4 + \cdots$ - дополнительные расширения;

Для черно-дырных решений $\Lambda = 0$ $(R \gg \Lambda)$, потому что слишком разные пространственно-временные масштабы. Поэтому во втором порядке получим:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[R + \alpha_2 S_{GB}]$$

Далее по теореме Уиллера *(4.2)* (о том, что у черной дыры нет волос (no hair theorem)) и из теоретической механики (если в лагранжиан входит полная дивергенция, то она не отображается на уравнениях поля):

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[-R + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \alpha_2 e^{-2\phi}S_{GB}] \quad (4.2)$$

Таким образом член Гаусса-Боннэ становится динамическим. Функция связи экспонента является следствием теории струн.
Если мы рассмотрим конфигурацию

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[-R + 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) + \alpha_2 e^{-2\phi}S_{GB}]$$

Добавив $V(\phi) > \alpha_2 e^{-2\phi}S_{GB}$, получим модель Бранса-Дикке. Если $V(\phi)$ меньше, то им можно пренебречь, если они одного порядка, то будет возможна некоторая интересная физика.

Модель вида

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[-R + 2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - e^{-2\varphi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \alpha_2 e^{-2\varphi}S_{GB}]$$

Представляет из себя струнную модель с дополнительными полями.
Модель без $\alpha_2 e^{-2\varphi}S_{GB}$ — это модель Эйнштейна -Максвелла или Эйнштейна-Янга-Миллса.

Сферически-симметричные решения

Перейдем к черно-дырным решениям. Для этого сначала рассмотрим сферически-симметричные решения.

Метрика $ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dr^2 - g_{22}d\Omega^2$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$\sqrt{-g} = \sqrt{g_{00}g_{11}{g_{22}}^2}$ - обычно стараются выбирать g_{11} как g_{00} с дополнительной функцией.

Для Шварцшильда:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \left(\frac{\sigma^2}{\Delta}\right) \mathrm{d}r^2 - f^2 d\Omega^2$$

$$\Delta = \Delta(\mathrm{r}), \qquad \sigma = \sigma(r), \qquad f = f(r)$$

Мы рассматриваем статическую конфигурацию. Вселенная настолько быстро расширяется, что временную координату можно не учитывать.

Метрика Шварцшильда: $\Delta = 1 - \frac{2M}{r},\ \sigma = 1,\ f = r$
Координаты кривизны: $f = r$ - фиксируется радиус
Координаты GM-GHS: $\sigma = 1$

Перед поиском численного решения надо рассмотреть особые точки. Первая такая точка - бесконечность.
На бесконечности:

$$\Delta(r \to \infty) = 1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\sigma(r \to \infty) = 1 - \frac{1}{2}\frac{D^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$
$$\phi(r \to \infty) = \frac{D}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

M - масса черной дыры;
D - дилатонный разряд

Уравнение поля в тензорном виде:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T^m_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu} + T^{GB}_{\mu\nu})$$

Слева тензор Эйнштейна, справа тензор материи с ϕ.

$$T_{\mu\nu}{}^{\phi} = \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_p\phi\partial^p\phi)$$

$$T_{\mu\nu}{}^{GB} = \frac{1}{8\pi}[Z_1(e^{-2\varphi}R) + 2Z_2\left(e^{-2\varphi}R_{p\sigma}\right) - 2Z_3\left(e^{-2\varphi}R_{\mu p\nu\sigma}\right)]$$

$$Z_1 = \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box$$

$$Z_1 = \Box\delta_\mu^p\delta_\nu^p + g_{\mu\nu}\nabla^p\nabla^\sigma - \nabla^p\nabla_{(\mu}\delta_{\nu)}{}^\sigma$$

$$Z_3 = \nabla^p\nabla^\sigma$$

Получим поле Ландау-Лифшица *(4.3)*, подставляя метрику в действие:

$$S = \frac{1}{2}\int dtdr[m_{Pl}^2\,(\Delta' f' f + \Delta f'^2 + \sigma^2 - \Delta f^2\phi'^2)/\sigma) + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'(\frac{\Delta\,\Delta' f'^2}{\sigma^3} - \Delta'/\sigma)] \quad (4.3)$$

Можно заметить, что из действия удалена дивергенция, то есть все вторые производные удалены из действия.

Тогда можно уравнение подключить уравнение Лагранжа-Эйлера по всем метрическим функциям:

$$\frac{\delta S}{\delta\Delta} = 0$$
$$\frac{\delta S}{\delta\sigma} = 0$$
$$\frac{\delta S}{\delta f} = 0$$
$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$$
$$f(r) = r$$

В итоге получим линейную систему уравнений относительно старших производных:

$$a_{11}\Delta'' + a_{12}\sigma' + a_{13}\Phi'' = b_1$$
$$a_{21}\Delta'' + a_{22}\sigma' + a_{23}\Phi'' = b_2$$
$$a_{31}\Delta'' + a_{32}\sigma' + a_{33}\Phi'' = b_3$$

По правилу Крамера:

$$\Delta'' = D_\Delta / D_{main}$$

Особые точки решения определяются типами (A, B, C зависят от $\Delta', \sigma, \Phi, \Phi'$):

$$D_{main} = \Delta(A\Delta^2 + BC + C)$$

По теореме единственности решение системы линейных уравнений существует и единственно, если главный детерминант не равен 0. Следовательно, нарушение единственности системы будет там, где главный детерминант будет равен 0.

$\Delta = 0,\ A\Delta^2 + B\Delta\ + C \neq 0$ - регулярный горизонт с выколотой сингулярностью
$A\Delta^2 + B\Delta\ + C = 0$ - сингулярность Rs (новый тип сингулярности, реализуемый внутри черной дыры)
$\Delta = 0,\ \Delta^2 + B\Delta\ + C = 0$ - минимальный Черная Дыра

Ситуация, где главный детерминант устремляется к бесконечности, не является особой точкой.

Как мы выяснили, горизонт — это особая точка, в которой нарушается единственность решения. Запишем ряды Тейлора, где r_h - радиус горизонта, r - координаты.

Мы делаем сильное предположение, говоря, что степени целочисленные. Проверка заключается в проверки системы в особых точках и записи асимптотического уравнения.

$$\Delta = d_1(r - r_h) + d_2(r - r_h)^2 + \cdots$$
$$\sigma = s_0 + s_1(r - r_h) + s_2(r - r_h)^2 + \cdots$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1(r - r_h) + \Phi_2(r - r_h)^2 + \cdots$$

Подставляем в систему диффуров:

$$24\lambda^2{\Phi_0}^2{d_1}^2 - m_{Pl}^4{r_h}^3{s_0}^2 d_1 + m_{Pl}^4{r_h}^2 s_0^4 = 0$$

Чтобы существовало решение, детерминант должен быть равен 0. Тогда:

$$(m_{Pl}^4{r_h}^3 s_0^4)^2 - 4\left(24\lambda^2{\Phi_0}^2\right)(\,m_{Pl}^4{r_h}^2 s_0^4) = 0$$
$${r_{h_{min}}}^2 = 2\lambda\Phi_0\sqrt{14 + 8\sqrt{3}}$$

Получается, в теории есть минимальное значение размера черной дыры за счет поправок по кривизне. Если положить $\Phi_0 = 1$, то минимальный размер черной дыры определяется размером константы связи теории, то есть это параметр своей теории.

При решении типа Шварцшильда у нас появляется регулярный горизонт и новый тип сингулярности - детерминированная сингулярность Rs, в который решение останавливается.
С точки зрения ОТО у нас нет причинно-следственной связи между областями вне и внутри черной дыры. Рассмотрим подробнее детерминированную сингулярность.
Вблизи Rs метрика ведет себя следующим образом:

$$\Delta = d_s + d_1\left(\sqrt{r - r_s}\right)^2 + d_2(\sqrt{r - r_s})^3 + \cdots,$$

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_1\sqrt{r - r_s} + \sigma_2\left(\sqrt{r - r_s}\right)^2 + \cdots,$$

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_1\left(\sqrt{r - r_s}\right)^2 + \Phi_2(\sqrt{r - r_s})^3 + \cdots,$$

То есть мы понимаем, что точка Rs - точка, в которой функции и их первые производные регулярны, а вторые производные уже расходятся, то есть сингулярны.

Таким образом, это слабая сингулярность.

Рассмотрим поведение инварианта кривизны:

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = const^*(r - r_s)^{-1} + O((r - r_s)^{-1}) \to \infty$$

Аналогичный тип сингулярности (детерминированная сингулярность) присутствует и в космологических решениях типа Bianchi I (Bianchi IX) в моделях с поправками второго порядка по кривизне.

Лекция 5. Модель Гаусса-Боннэ (часть II)

Попробуем связать чисто математическое решение из прошлой лекции с какими-то реальными ситуациями.

Рассмотрим переход из «предпоследнего» состояния в «последнее», решения, где есть все три особые точки.

Идея проста: если есть предельное состояние с $r_{h_{min}}$, то поведение метрических функций будет определяться следующими асимптотиками:

$$r_{h_{min}}:$$
$$\Delta \approx const_1{}^* \sqrt{(r - r_{h_{min}})}$$
$$\sigma \approx const_2{}^* \sqrt{(r - r_{h_{min}})}$$
$$\Rightarrow R_{ijkl}R^{ijkl} \approx \ const_3{}^*(r - r_{h_{min}})^{-6}$$

Следовательно, вероятность перехода из регулярного состояния в сингулярное:

$$\approx const^* \exp(S_{rh} - S_{rh_{min}})$$
$$= const^* \exp(S_{rh_{min}})$$
$$= const^* e^{-\infty}$$
$$= 0$$

Это означает, что система запрещает перейти из предпредельного состояния в предельное, то есть математически переход запрещен. Значит, состояние относительно устойчивое. Так как мы рассматриваем черную дыру очень маленькой массы, то мы можем связать этот эффект с остановкой испарения черной дыры. В классической теории испарение идет до нуля, но мы рассматриваем состояние с минимальной массой, которое недостижимо, что означает остановку испарения. Следовательно, будет существовать реликтовый остаток черной дыры, который может играть роль темной материи. Разберемся подробнее.

Сначала рассмотрим «Toy Model» на последних стадиях с использованием метрики Шварцшильда и обычного спектра излучения. Единственное накладываемое условие - пари испарении черная дыра не может достигнуть «запрещенного состояния» с массой менее M_{min}.

Пусть спектр испарения описывается так:

$$\frac{d^2N}{dEdt} \approx \frac{M^2E^2}{e^{8\pi ME} - (-1)^{2s}} H(M - M_{min} - E)$$

При большой массе спектр будет полностью хокинговским и, следовательно, закон испарения будет описанному в таких книгах, как Новиков, Фролов, «Черные дыры».

Тогда скорость испарения:

$$-\frac{dM}{dt} \approx \frac{1}{4096\pi^4 M^2}\left[\frac{\pi^4}{15} - e^{-A}(A^3 + 3A^2 + 6A + 6)\right]$$

где $A = 8\pi M(M - M_{min})$.

На последних стадиях $(M - M_{min}) \ll 1$.
Фермионы:

$$-\frac{dM}{dt} \approx \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^4 E dE}{e^{8\pi ME} + 1} = \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^5 dE}{1 + 8\pi ME + 1}$$
$$= \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^5 dE}{2} = const_1 * M^4 (M - M_{min})^6$$

Бозоны:

$$-\frac{dM}{dt} \approx \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^4 E dE}{e^{8\pi ME} - 1} = \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^5 dE}{1 + 8\pi ME + 1} = \int_0^{M-M_{min}} \frac{M^4 E^5 dE}{8\pi ME} = const_2 * M^3 (M - M_{min})^5$$

Таким образом, благодаря вводу ограничений мы останавливаем испарение.

Испарение черных дыр Гаусса-Боннэ

Для начала рассмотрим метрику при приближении для диапазона $10 - 10^3 M_{Pl}$. Рассмотрим, как ведут себя метрические функции:

$$\Delta(M, r) = 1 - \left(\frac{2M}{r}\right)\epsilon(M)$$
$$\sigma(M, r) = \sigma(M)$$

В Δ добавляем поправку, которую потом аппроксимируем:

$\epsilon = 1 - \frac{\epsilon_1}{M} - \frac{\epsilon_2}{M^2} + \frac{\epsilon_3}{M^3} - \frac{\epsilon_4}{M^4}$ - значения подбираются экспериментально

$$\sigma_0 = \sigma_2(M - M_{\min})^2 - \sigma_3(M - M_{\min})^3 + \sigma_4(M - M_{\min})^4 - \sigma_5 5$$

Есть несколько способов процесса описания испарения черной дыры. Воспользуемся способ, предложенный в статье 2000 г. Париха-Вильчека. Идея метода заключается в описании испарения черной дыры как просачивания частиц через потенциальный барьер горизонта событий.

Вспомним, что испарение черной дыры — это квантовый процесс на фоне классического внешнего поля. Поэтому аналогично квантовой механике можем записать мнимую часть действия:

$$Im(S) = Im\int_{M}^{M-\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}}\frac{dr}{\dot{r}}dH$$

Соответственно испарение будет пропорционально мнимой части действия.
Используем метрику Пенлеве *(5.1)* (отсутствие координатной особенности на горизонте):

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.1)$$

Здесь компонента $g_{00} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)$, а компонента g_{11} = 1. В точке r = 2M никакой особенности в данной метрике не будет.

Мы за это платим появлением в метрике компоненты g_{01} – она становится не диагональна.
Делаем замену переменных для перехода от метрики Шварцщильда:

$$t = t_s + 2\sqrt{aMr} + 2Mln\frac{\sqrt{r}-\sqrt{2M}}{\sqrt{r}+\sqrt{2M}}$$

Используя эту метрику, действительно можно изучать геометрию вблизи горизонта, так как не сталкиваемся с особой точкой.

Таким образом, чтобы рассмотреть спектр на последних стадиях:

- Вычисляем мнимую часть действия аналогично метрике Шварцшильда по методу Париха-Вильчека
- На последнем этапе используем численное интегрирование

Подготовительные замечания:

- Радиальные геодезические

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

- При замене M → $M - \omega$, $\omega \ll M$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2(M-\omega)}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2(M-\omega)}{r}}dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Туннелирование: описание

Мнимая часть действия:

$$Im(S) = Im\int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = Im\int_{r_{in}}^{r_{out}}\int_0^{p_r} dp_r{}' dr$$

Используя уравнения Гамильтона, получим:

$$Im(S) = Im\int_M^{M-\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = Im\int_0^{+\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}}(-d\omega)$$

Затем используем технику вычетов, заменяем $\omega \to \omega - i\epsilon$:

$$Im(S) = +Im\int_{r_{in}}^{r_{out}}\int_M^{M-\omega} \frac{dM'}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dr = Im\int_{r_{in}}^{r_{out}} -\pi r dr$$

$$r_{in} = 2M, \qquad r_{out} = 2(M-\omega)$$

Используем феймановскую деформацию контура $\omega' \to \omega' - i\epsilon$:

$$Im(S) = Im\int_0^{-\omega}\int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{-1 + \sqrt{\frac{2M'}{r}}} d\omega' = +4\pi\omega(M - \frac{\omega}{2})$$

В случае черных дыр Гаусса-Боннэ подставляем функции метрик и после численного интегрирования и вычисления вычетов:

$Im(S) = k(M - M_{min})^3,\ k \approx 0.0005$ в соответствующих единицах

После фетирования результатов численного интегрирования получим спектр испарения частиц:

$$\frac{d^2N}{dEdt} = \frac{\Gamma_s}{2\pi\hbar}\frac{\Theta((M - M_{\min})c^2 - E)}{e^{Im(S)} - (-1)^{2s}}$$

Скорость испарения в общем виде представляется следующим образом:

$$-\frac{dM}{dt} = \int_0^{(M-M_{\min})c^2} \frac{d^2N}{dEdt}\frac{E}{c^2}dE$$

На последних стадиях:

$$-\frac{dM}{dt} \approx \frac{16}{9\pi}\frac{G^4 M_{Pl}}{\hbar^5 c^2 k} M^4 (M - M_{\min})^3$$

Если $M = M_{\min}$, то испарение равно 0. То есть такая модель действительно даёт остановку испарения.

Нарисуем график испарения черной дыры (рис. 5.1). Если бы получилось отождествить часть графика черной дыры Гаусса-Боннэ с каким-то конкретным излучением, то можно было бы вычислить массу.

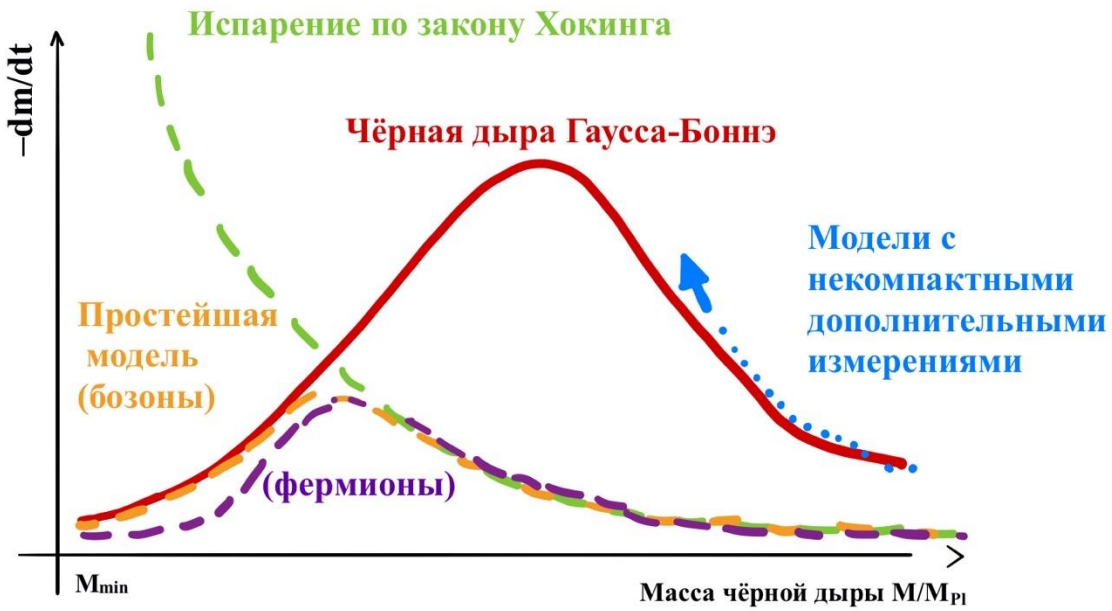


рис. 5.1 модели испарения черной дыры

Скорость испарения (рис. 5.2) гораздо выше, чем в хокинговском случае. Примерный максимум испарения черной дыры Гаусса-Боннэ наступает при $2M_{\min}$. Это означает, что появляется точка максимума испарения. При этом на хвосте, где

$M_{\min}$ будет излучаться 10^{-6} эВ, а в максимуме $2M_{\min}$ - 10^{20} эВ. То есть модель могла бы отвечать за космические лучи сверхвысоких энергий. Таким образом, в качестве нулевого предположения можно было бы сказать, что космические лучи сверхвысоких энергий — это излучения от испаряющихся черных дыр в момент максимума. К сожалению, на практике это не реализовалось.

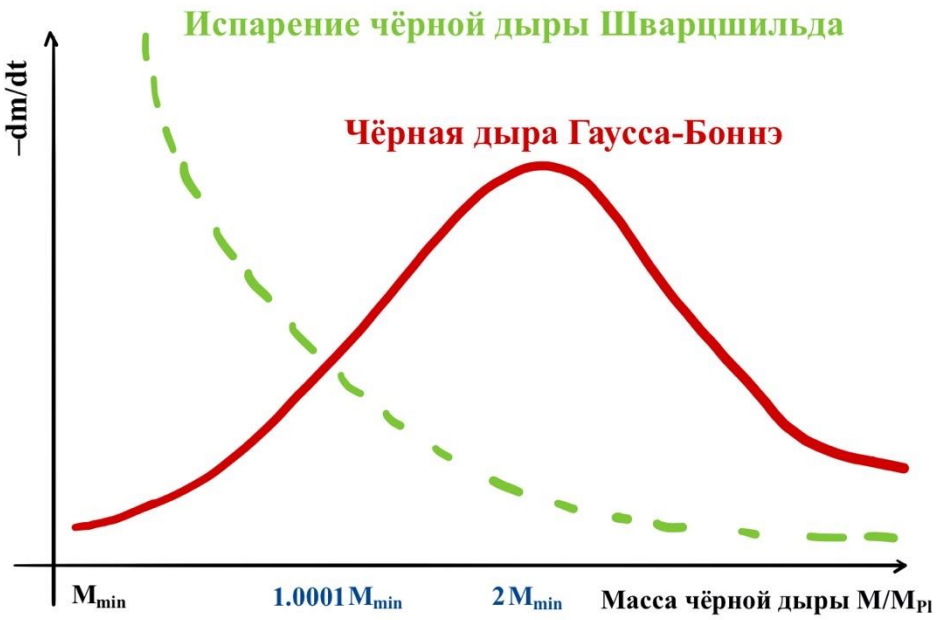


рис. 5.2 модели испарения Шварцшильд/Боннэ

Основные выводы из модели:

- На основании предложенной модели можно заключить, что первичные черные дыры с начальной массой менее 10^{15} грамм испаряются не полностью, а до устойчивого реликтового остатка массой $10 - 10^3\ M_{Pl}$.
- На последних стадиях поток частиц от испаряющейся черной дыры очень мал. Даже с учетом верхней оценки на их плотность $\Omega_{BHR} = \Omega_{\mathrm{CDM}} = 0.3$. Он на 20 порядков меньше фона, так что прямой поиск смысла не имеет.
- Частицы, испущенные в момент максимума испарения, могут давать вклад в космические лучи сверхвысоких энергий с учетом красного смещения.
- Ввиду устойчивости эти реликтовые остатки могут давать *вклад в холодную темную материю.*

Попробуем развить модель. В моделях с некомпактными дополнительными измерениями появляется понятие фундаментальной массы Планка, которая связана с четырехмерной массой Планка и дополнительным пространством-временем через

$$M_D = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V_{D-4}}\right)^{1/(D-2)}$$

- Энергия Планка в 4D: $10^{19}\ GeV$
- Фундаментальная энергия Планка: $\approx 1\ TeV$

Метрика Шварцшильда в четырехмерном пространстве-времени ((4+n)D) - это метрика Таргерлини. Она применима, если размер горизонта сравним с размером элементарных частиц:

$$ds^2 = -R(r)dt^2 + R(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{n+2}^2$$

Метрические функции:

$$R(r) = 1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{n+1}$$

При этом связь радиуса r_s и массы M_{BH} в метрике:

$$r_s = \frac{1}{\sqrt{\pi} M_*}\gamma(n)\left(\frac{M_{BH}}{M_*}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Где $\gamma(n) = \left[\frac{8\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(2+n)}\right]^{\frac{1}{n+1}}$

Теперь рассмотрим термодинамические характеристики (4+n)D черной дыры Шварцшильда.

- Температура и энтропия

$$T_H = \frac{n+1}{4\pi r_s}, \qquad S = \frac{(n+1)M_{BH}}{(n+2)T_H}$$

Таким образом, в многомерном случае черная дыра будет «горячее», а скорость испарения быстрее (рис. 5.2).

- Эффективная струнная гравитация

В многомерном случае член Гаусса-Боннэ не является полной дивергенцией, поэтому скалярное поле можно исключить. Так с поправками второго порядка по кривизне:

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^D x\sqrt{-g}[R + \lambda S_{GB}]$$

Аналитическое решение было найдено. Метрика Шварцшильда-Гаусса-Боннэ:

$$ds^2 = -e^{2v}dt^2 + e^{2\alpha}dr^2 + r^2 h_{ij}dx^i dx^j$$

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^D x\sqrt{-g}\left[R + \lambda(R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2)\right]$$

$$S = \int d^4 x\sqrt{-g}\left[-R + 2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \alpha e^{-2\varphi}S_{GB}\right]$$

И аналитическое решение имеет вид:

$$e^{2v} = e^{-2\alpha} = 1 + \frac{r^2}{2\lambda(D-3)(D-4)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{32\pi^{\frac{3-D}{2}}G\lambda(D-3)(D-4)\text{МГ}\left(\frac{D-1}{2}\right)}{(D-2)_r^{D-1}}}\right)$$

У этого решения известны

- Масса

$$M = \frac{(D-2)\pi^{\frac{D-1}{2}}r_+^{D-3}}{8\pi G\Gamma(\frac{D-1}{2})}\left(1 + \frac{\lambda(D-3)(D-4)}{r_+^2}\right)$$

- Температура

$$T_{BH} = \frac{1}{4\pi}(e^{-2\alpha})' \xRightarrow{r=r_+} = \frac{(D-3)r_+^2 + (D-5)(D-4)(D-3)\lambda}{4\pi r_+(r_+^2 + 2\lambda(D-4)(D-3))}$$

Рассмотрим поток при испарении:

- Спектр частиц при испарении

$$\frac{d^2N_i}{dQdt} = \frac{4\pi^2\left(\frac{D-1}{2}\right)^{\frac{2}{D-3}}\left(\frac{D-1}{D-3}\right)r^2 + Q^2}{e^{Q/T_{BH}} - (-1)^{2s}}$$

- Число частиц при испарении

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$N_{tot} = \frac{15(D-2)\pi^{\frac{D-9}{2}}\zeta(3)}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)G}\frac{\frac{3}{4}N_f + N_b}{\frac{7}{8}N_f + N_b}\left[\frac{r_{init+}^{D-2}}{D-2} + s(D-3)\lambda r_{init+}^{D-4}\right]$$

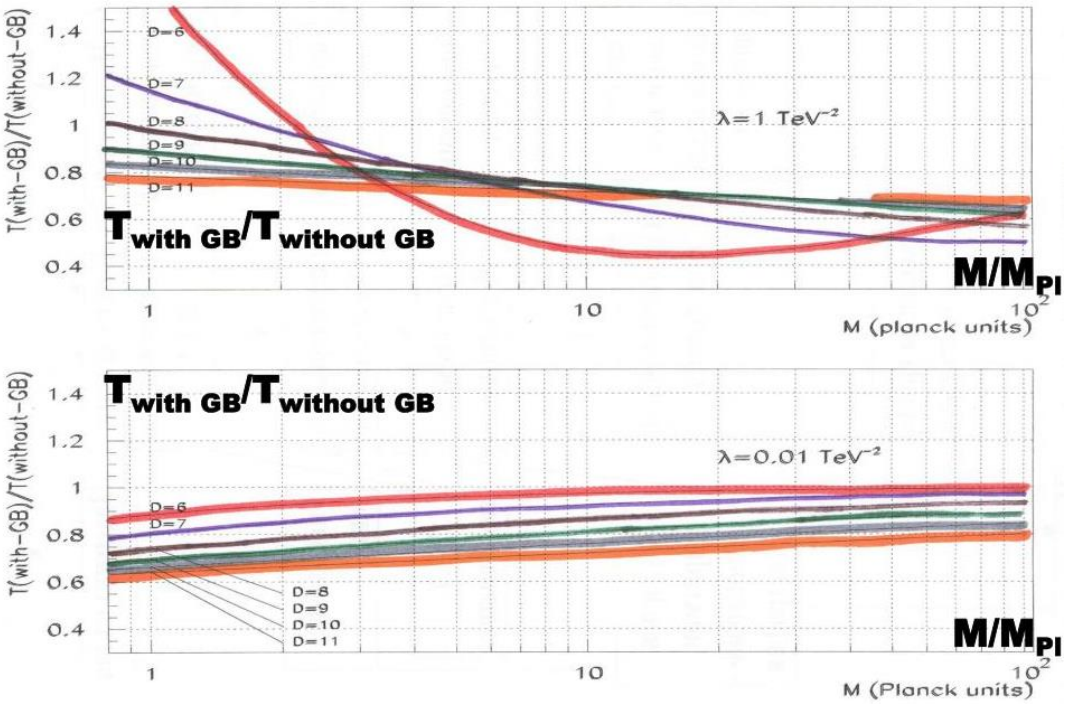


рис. 5.3 температура черной дыры

Интегральный поток в зависимости от полной энергии испущенных частиц для черной дыры с начальной массой M = 10 TeV будет отличаться.

Таким образом, если Планковская масса сместится в диапазон ТэВ из-за наличия дополнительных измерений, ускорители следующих поколений смогут различить черные дыры Шварцшильда и Шварцшильда-Гаусса -Боннэ, а также показать истинную размерность пространства-времени.

Давайте рассмотрим случай вращающейся черной дыры. Сначала запишем вырожденное решение: (4+n)D черная дыра Керра-Гаусса-Боннэ с одним моментом.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(du+dr)^2 + dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ (r^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi^2 + 2\,\mathrm{asin}^2\,\theta\, dr\varphi + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})(du - \mathrm{asin}^2\,\theta d\varphi\,)^2 \\ &+ r^2\cos^2\theta\,(d\,x_5^2 + \sin^2 x_5(dx_6^2 + \sin^2 x_6(\dots dx_N^2)\dots) \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})$ - неизвестная функция,

$$\rho^2 = r^2 \cos^2 \theta$$

Если метрику типа Керра подставить в уравнение Эйнштейна, то получатся дифференциальные уравнения в частных производных. В метрике Керра-Шильда уравнения получаются сложнее, но одно из них будет обыкновенным, благодаря чему можно раскрутить дальше всю систему и решить ее.

В таком вырожденном решении нет новы особых точек. Все отличие начинается под горизонтом.

Рассмотрим теперь полную версию 5D метрики Керра:

$$\begin{aligned} ds^2 = dt^2 - dr^2 - (r^2 + a^2) sin^2\theta d\phi_1 - (r^2 - b^2)\cos^2\theta d\phi_2^2 - \rho^2 d\theta^2 \\ - 2dr(\mathrm{asin}^2\,\theta\, d\phi_1 + bcos^2\theta d\phi_2) - \boldsymbol{\beta}\,(dt - dr \\ - \mathrm{asin}^2\,\theta d\phi_1 - bcos^2\theta d\phi_2)^2 \end{aligned}$$

Где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$,

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$ - неизвестная функция,

a, b - моменты

Если рассмотреть компоненты $\theta\ \theta$, то

$$A\beta'' + B\beta'^2 + \mathrm{C}\,\beta + D\beta + E = 0$$

$$A = r\rho^2(4\alpha\beta - \rho^2)$$

$$B = 4\alpha r\rho^2$$

$$C = 2[4\alpha\beta(\rho^2 - r^2) - \rho^2(\rho^2 + r^2)]$$

$$D = 2r(2r^2 - 3\rho^2)$$

$$E = 2r\rho^2\Lambda$$

Можно найти приближенное аналитическое решение:

$$\beta = \frac{\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - 4\alpha M - \frac{2}{3}\alpha\Lambda r^2(\rho^2 - r^2)}}{2}$$

Проверка на совместность показывает, что это действительно приближенное аналитическое решение.

Таким образом, в случае метрик Керра можно использовать параметризацию Керра-Шильда.

Вывод: с учетом пятимерного случая в решении Керра-Гаусса-Боннэ нет новых типов особых точек, следовательно все отличие от стандартного решения будет в температуре (скорости/интенсивности испарения).

Черная дыра Шварцшильда-Гаусса- Боннэ в 4D пространстве с зарядами

Рассмотрим еще одну модель - модель Шварцшильда-Гаусса Боннэ *(5.2)* в 4D пространстве с зарядами.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-R + 2\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \boldsymbol{e^{-2\varphi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} + \alpha e^{-2\varphi}S_{GB}\right] \quad (5.2)$$

Здесь мы рассматриваем тензор Максвелла. Координаты GM-GHS: $ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - f^2 d\Omega^2$

Теперь рассмотрим поведение инварианта кривизны:

$$R_{ijkl} = \Delta''^2 + 4\left(\frac{\Delta' f'}{f}\right)^2 + 8\left(\frac{\Delta f''}{f}\right)^2 + \frac{8\Delta\Delta' f' f''}{f^2} + \frac{4}{f^4} - 8\Delta\left(\frac{f'}{f^2}\right)^2 + 4\Delta^2\left(\frac{f'}{f}\right)^4$$

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \sim (f - f_s)^{-1} \text{ при } f \to f_s$$
$$R_{ijkl}R^{ijkl} \sim (f - f_x)^{6} \text{ при } f \to f_x$$

Появилась идея отождествить такое решение с кротовой норой. Учет поправки по кривизне с дополнительными зарядами даст возможность получить математически кротовую нору в другу Вселенную.

Общий вывод

- Модель гравитации с поправками второго порядка по кривизне служит как тест для любых расширений гравитации
- Модель является базовым решением при расширении
- Модель работает только в Планковской области
- У нее хороший ньютоновский предел
- Модель не решает проблем темной материи и темной энергии

Лекция 6. Космологическая эволюция в модели Бранса-Дикке. Отскок

Модель Бранса-Дикке

Лагранжиан ОТО имеет следующий вид:

$$S\sim \int d^4x\sqrt{-g}[R+\Lambda+L_{matter}]$$

В нем есть скалярная кривизна из ОТО, космологическая постоянная, отвечающая за ускоренное расширение, и часть, отвечающая за материю.

В модели Бранса-Дикке *(6.1)* добавляется дополнительное поле Φ:

$$S\sim \int d^4x\sqrt{-g}\left[\Phi R+(\frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi+L_{matter}\right] \quad (6.1)$$

Модель Бранса-Дикке можно использовать для разных эффектов:

- Смоделировать поведение космологической постоянной (расширение Вселенной), подобрав значение потенциала и учтя ограничения, налагаемые на константу Бранса-Дикке
- Смоделировать в первом приближении действие материи

При переходе к

$$S\sim \int d^4x\sqrt{-g}[R+R^2+\mathrm{R}^3+\cdots+L_{matter}]$$

Уравнение поля не будет второго порядка (будет четвертого), следовательно не будет стремления к ОТО. Например, с помощью таких членов можно смоделировать темную энергию или, подобрав соответствующие члены, смоделировать кривые вращения галактик (темную материю). Однако, это нельзя сделать одним и тем же способом. Для этого есть различные модели, например, модель Старабинского с исчезающей космологической постоянной.

В этой лекции не раз будем обращаться к статье «Идеи Я.Б. Зельдовича и современная космология Бранса-Дикке», И.Д. Новиков, А.А. Шацкий, С.О. Алексеев, Д.А. Третьяков.

Модель Бранса-Дикке с космологической постоянной *(6.2)*

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\Phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Phi}) + 16\pi L_{matter}\right] \quad (6.2)$$

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Phi})$ - потенциал

Чтобы сократить уравнение поля, вместо потенциала запишем космологическую постоянную:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\Phi(R + \mathbf{2\Lambda}) + \frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + 16\pi L_{matter}\right]$$

Так мы облегчаем уравнение относительно Φ. Запишем уравнение движения:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi}\left(\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\lambda}\partial_\sigma\Phi\partial_\lambda\Phi\right) + \frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\Phi\right),$$

$$\frac{8\pi}{\Phi}T_\mu{}^\mu + 2\Lambda = \frac{3 + 2\mathrm{w}}{\Phi}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\Phi$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = (p + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu\Phi = \delta_\mu^t\partial_t\Phi$$

Далее для удобства счет обезразмериваем все величины.

$$\Phi(t) \equiv \frac{\phi(t)}{G_0}, \qquad \epsilon(t) \equiv \frac{\partial_t\phi}{\sqrt{\Lambda}\phi},$$

$$\widetilde{H}(t) \equiv \frac{H(t)}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{\partial_t a}{\sqrt{\Lambda}a}, \qquad \tilde{p}(t) = \frac{4\pi G_0 p}{\Lambda}$$

Записываем уравнения Фридмана в новых переменных:

$$\frac{G_t^t}{\Lambda} = 3\widetilde{H}^2 = \frac{2\tilde{p}}{\phi} + 1 + \frac{w}{2}\,\epsilon^2 - 3\widetilde{H}\epsilon,$$

$$\frac{G_r^r}{\Lambda} = 2\widetilde{H} + 3\widetilde{H}^2 = \frac{2\tilde{p}}{\phi} - 1\frac{w}{2}\,\epsilon^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2\widetilde{H}\epsilon$$

С учетом конкретных значений в тензоре энергии импульса запишем запишем уравнение Клейна-Гордона:

$$\frac{2\tilde{p} - 6\tilde{p}}{\phi} + 2 = (3 + 2w)\left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\widetilde{H}\epsilon\right)$$

Добавляем уравнение непрерывности:

$$\frac{\dot{\tilde{p}}}{\tilde{p} + \tilde{p}} + 3\widetilde{H} = 0$$

Рассмотрим ограничения на параметры модели:

q- замедление Вселенной

β - безмерная плотность материи в настоящее время

$$\dot{\widetilde{H}} \equiv -(1 + q)\widetilde{H}^2, \qquad \beta \equiv \frac{4\pi G_0(p_0 - p_0)}{H_0^2} = \frac{\widetilde{p_0} - \widetilde{p_0}}{\widetilde{H}_0^2}$$

При p = 0 уравнение сведется к

$$w\left[\widetilde{H}_0^2(2 - q_0 - \beta z) - z\right]^2 - 2\widetilde{H}_0^2(3z - 1) + \widetilde{H}_0^4(6 - 6q_0 - 6\beta z + 4\beta) = 0,$$
$$z \equiv \frac{2 + 2w}{3 + 2w}$$

В приближении $|\omega| \gg 1$ в главном порядке по $1/\omega$:

$$\frac{1}{\widetilde{H}_0^2} \to (2 - q_0 - \beta) \pm \sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta}{w}}$$

Из наблюдательных данных

$$H_0 \approx 2.2\ \times 10^{-18}\ \text{сек}^{-1}$$

$p_0 \approx 0.27 \times 10^{-29} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ с учетом вклада от барионной и темной материй

$$q_0 \approx -0.6$$

Давлением в настоящий момент пренебрегаем: холодная Вселенная с пылеподобной материей.

Из экспериментов по лазерной локации Луны:

$$\left|\frac{\partial_t G}{G}\right|_0 \leq 4 \times 10^{-20}\ \text{сек}^{-1} \to |\epsilon_0| < 0.01$$

При $|\omega| \gg 1$: $\widetilde{H}_0 \approx 0{,}68,\ \widetilde{p_0} \approx 0{,}2,\ \beta \approx 0{,}4$

Для настоящего момента $\frac{\epsilon_0}{\widetilde{H}_0} = \frac{1}{\widetilde{H^2}_0} - 2(2 - q_0 - \beta) + \frac{\beta + 1/\widetilde{H^2}_0}{3+2w}$

В главном приближении по $1/\omega$:

$$\epsilon_0 \to \pm\sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta)}{w(2 - q_0 - \beta)}}$$

Решение для холодной Вселенной, как мы выяснили, без давления, поэтому $f \equiv \phi a^3 \to \frac{\tilde{p}}{\phi} = \frac{\tilde{p}}{\phi} = \frac{\tilde{p} f_0}{f}$

Подставляем: $\frac{\ddot{f}}{f} = \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 6$: $\widetilde{H}\,\epsilon + 3\dot{\widetilde{H}} + 9\widetilde{H}^2$

$$\to \ddot{f} - \eta^2(f + \widetilde{p_0} f_0) = 0, \qquad \eta^2 \equiv \frac{8 + 6w}{3 + 2w}$$

Решение: $\frac{f(\tilde{t})}{f_0} = c^+ E + \frac{c^-}{E} - \widetilde{p_0},\ E(\tilde{t}) \equiv \exp(\eta \tilde{t})$

Уравнение Клейна Гордона $\frac{2\tilde{p} - 6\tilde{p}}{\phi} + 2 = (3 + 2w)(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\widetilde{H}\,\epsilon)$

$$\to 2f + 2\tilde{p}_0 f_0 = (3 + 2w)(\dot{\phi} a^3)$$

$$\to 3\widetilde{H} = \frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{\dot{f}}{f} - \frac{2f_0}{f(3+2w)}\int_{const}^{\tilde{t}}\left(\frac{f}{f_0} + \tilde{p}_0\right)d\tilde{t} = \frac{\dot{f}}{f} - \frac{2(c^+E - \frac{c^-}{E} + c_H}{\eta(3+2w)\left(c^+E - \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0\right)} =$$

$$\frac{6(1+w)\left(c^+E - \frac{c^-}{E}\right) - 2c_H}{\eta(3+2w)\left(c^+E - \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0\right)}$$ - решение для холодной Вселенной.

Значения коэффициентов из решения $\frac{f(\tilde{t})}{f_0} = c^+E - \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0,\ E(\tilde{t}) \equiv \exp(\eta\tilde{t})$ равны:

$$c^+ = \frac{1+\tilde{p}_0}{2} + \frac{\epsilon_0 + 3\widetilde{H}_0}{2\eta}, \qquad c^- = \frac{1+\tilde{p}_0}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\widetilde{H}_0}{2\eta},$$

$$c_H = \frac{\eta\epsilon_0(3+2w)}{2} - \frac{\epsilon_0 + 3\widetilde{H}_0}{\eta}$$

После интегрирования

$$\frac{a}{a_0} = (c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0)^{1/3} \times exp\left[\frac{-1}{3(4+3w)}\int_1^E\left(\frac{c^+E^2 + c_HE - c^-}{c^+E^2 - \tilde{p}_0E + c^-}\right)\frac{dE}{E}\right]$$
$$= \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)} exp\frac{-2c_H(A - a_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}},$$

Где $\Delta \equiv 4c^+c^- - \tilde{p}_0^2 = 1 + 2\tilde{p}_0 - \frac{(\epsilon_0 + 3\widetilde{H}_0)^2}{\eta^2} = -\frac{3}{8+6w}\left[\widetilde{H}_0 - \epsilon_0(1+w)\right]^2$,

$$A(E) \equiv arctan\frac{2c^+E - \tilde{p}_0}{\sqrt{\Delta}}$$

Отскок

$$\frac{a}{a_0} = (c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0)^{1/3} \times exp\left[\frac{-1}{3(4+3w)}\int_1^E\left(\frac{c^+E^2 + c_HE - c^-}{c^+E^2 - \tilde{p}_0E + c^-}\right)\frac{dE}{E}\right]$$
$$= \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)} exp\frac{-2c_H(A - a_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

В стандартной версии космологического решения в момент времени t = 0 масштабный фактор тоже равен нулю, это означает знаменитую начальную сингулярность, с которой началась Вселенная (рис.6.1). В полученном нами решении есть второй член, за счет которого, не доходя до 0, масштабный фактор развернется. Этот разворот вместо сингулярности и называется *отскок (bounce).*

Запишем решение для скалярного поля холодной Вселенной:

$$\phi = \left(c^{+}E + \frac{c^{-}}{E} - \tilde{p}_0\right)^{1/(4+3w)} exp\frac{2c_H(A-A)}{(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

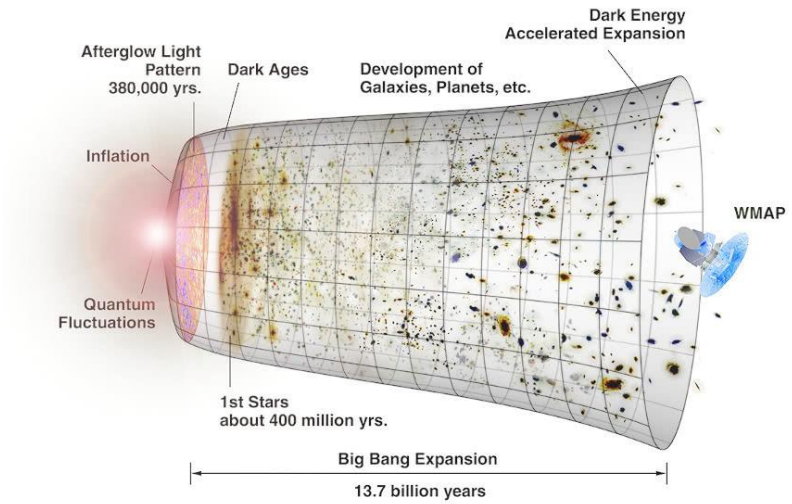


рис. 6.1 расширение после Большого Взрыва

В пределе $|\omega| \to \infty$ сводится к космологии Фридмана

$$H_{fr} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{E+E_{cr}}{E-E_{cr}}, \qquad E_{cr} \equiv \frac{\sqrt{3}\widetilde{H}_0 - 1}{\sqrt{3}\widetilde{H}_0 + 1}, \;\; \eta_{Fr} = \sqrt{3}$$

$$\frac{a_{Fr}}{a_0} = \frac{\left(\sqrt{3}\widetilde{H}_0 + 1\right)^{2/3}(E-E_{cr})^{2/3}}{(4E)^{1/3}}$$

В итоге получаем решение без начальной сингулярности. Она получается даже на уровне модели Бранса-Дикке даже с облегченным потенциалом.

$$\frac{a}{a_0} = (c^{+}E + \frac{c^{-}}{E} - \tilde{p}_0)^{1/3} \times exp\left[\frac{-1}{3(4+3w)}\int_1^E \left(\frac{c^{+}E^2 + c_H E - c^{-}}{c^{+}E^2 - \tilde{p}_0 E + c^{-}}\right)\frac{dE}{E}\right]$$
$$= \left(c^{+}E + \frac{c^{-}}{E} - \tilde{p}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)} exp\frac{-2c_H(A-a_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

Условие существования отскока: $\Delta > 0$

В точке отскока $E_m \approx \sqrt{\frac{c^-}{c^+}}$

Используя CMBR T≈ 2.7K b оценку по адиабатическому расширению $\frac{a_{hot}}{a_0} = 4 \times 10^{-5}$

$$\Delta \approx \frac{2\tilde{p}_0 a_m^3}{a_0^3} < \frac{2\tilde{p}_0 a_{hot}^3}{a_0^3} \approx 2{,}6 \times 10^{-14}$$

Теперь рассмотрим решение для горячей Вселенной: для нее нельзя пренебрегать давлением.

$$p = \frac{\rho}{3} \rightarrow \dot{\tilde{H}} + 2\tilde{H}^2 = \frac{1}{6}\left(-w\epsilon^2 + \frac{6+8w}{3+2w}\right) \equiv Q(\tilde{t})$$

Для метрики Фридмана в горячей фазе:

$$H_{Fr} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{U+1}{U-1}, \qquad U(\tilde{\tau}) \equiv exp\left(\frac{4\tilde{\tau}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{a_{Fr}}{a_{hot}} = \left[\frac{(U-1)^2 U_{hot}}{(U_{hot}-1)^2 U}\right]^{1/4}$$

В нашем случае ищем решения в общем виде ряда:

$$a = a_m + \frac{1}{2} a_m \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2 - \frac{1}{12} a_m b^2 \dot{\tilde{H}}_m^2 \tilde{\tau}^4 + \cdots$$

Подставив уравнение Хаббла, получим:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{\tilde{H}}_m[1 + \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2\left(\frac{3}{2} - b^2\right)]}{\left(1 + \dot{\tilde{H}}_m \tilde{\tau}^2/2\right)^2} = Q > 0$$

Подбирая параметры, решение можно сшить для холодной Вселенной, то есть отскок сохранится. Таким образом, отскок является шагом к решению проблем квантовой гравитации и разрешению космологических сингулярностей.

Модель кротовой норы

Литература:

- *Возможные наблюдательные проявления кротовых нор в теории Бранса-Дикке*, С.О. Алексеев, К.А. Ранну, Д.В. Гареева.

Кротовая нора (рис. 6.2) — это случай черной дыры, у которой вместо начальной сингулярности какая-то горловина, вместо горизонта -горловина.

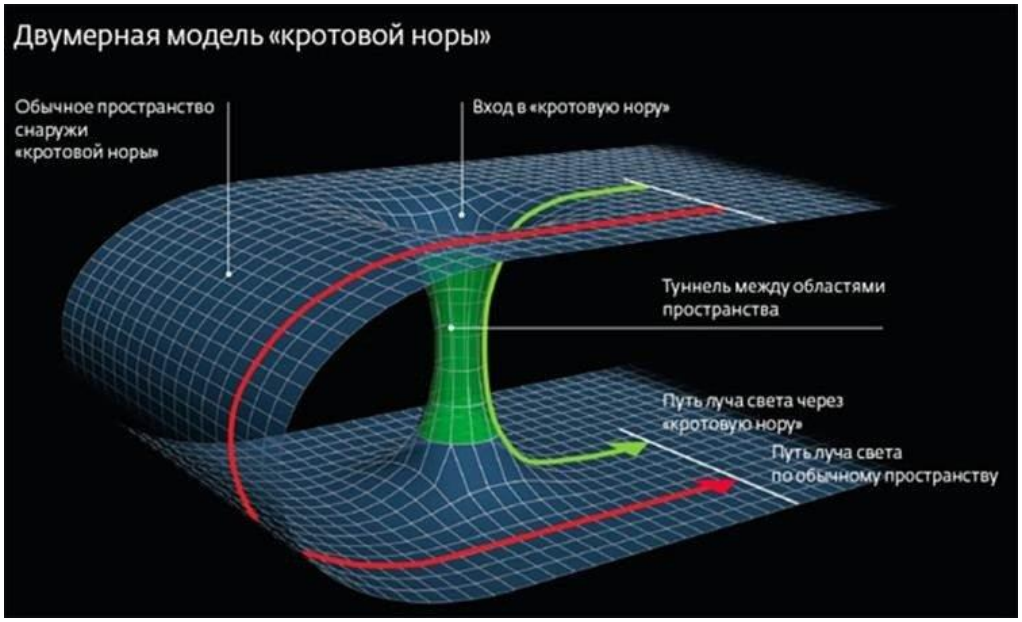


рис. 6.2 двумерная модель кротовой норы

Этот объект существует только при определенных условиях. Для кротовой норы нужна особая материя, роль которой в принципе может играть даже космологическая постоянная. Устойчивость кротовой норы достаточно условна, правда «поиграв» параметрами можно добиться того, чтобы время неустойчивости кротовой норы будет сравнима с временем жизни Вселенной, что сравнимо с устойчивостью.

Для кротовой норы критически важно наличие материи:

$$ds^2 = e^{-2\Phi_{\pm(r)}}dt^2 + (1 - b_{\pm}(r)/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

В модели RS получится уравнение Эйнштейна с правой частью:

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = -1/2 g_{\mu\nu}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}$$

Экспериментальное обнаружение кротовой норы могло бы показать наличие экзотической материи.

Рассмотрим кротовые норы в модели Бранса-Дикке.

Вспомним модель Бранса-Дикке:

$$S = C \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R + (\frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + L_{matter} \right]$$

Метрика для кротовой норы в теории Бранса-Дикке будет иметь вид:

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{2l} dt^2 + \left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^n (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

$$\phi = \phi_0 \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^p$$

$$x = \rho / B$$

$$l = \frac{1}{\lambda}$$

$$n = \frac{\lambda - C - 1}{\lambda}$$

$$p = \frac{C}{\lambda}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}}$$

$$B = \frac{\lambda M}{\phi_0}$$

$$C = -\frac{1}{\omega + 2}$$

Эта метрика очень похожа на оригинальную метрику Шварцшильда, написанную самим Шварцшильдом.

Поэтому в пределе $\omega \to \infty$: метрика Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(\frac{1-\frac{r_g}{4\rho}}{1+\frac{r_g}{4\rho}}\right)^2 dt^2 - \left(1-\frac{r_g}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

Необходимы такие значения ω, при которых будет нарушено нулевое энергетическое условие.

Уравнение Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \left(\frac{8\pi}{\phi}\right)[T_{\mu\nu} + (T_\phi)_{\mu\nu}]$$

Для компоненты G_{00}

$$G_{00} = \frac{(1-\gamma)(1+2\gamma)}{1+\gamma}\,\eta^2/\rho^4(R)\ \times\left[1-\frac{2\eta}{\rho\,(R)}\right]^{2(\sqrt{\frac{2}{1+\gamma}-1}}$$

$\gamma = \frac{\omega+1}{\omega+2}$ - PPN параметр

Кротовая нора проходима, то есть роль экзотической материи в модели Бранса-Дикке может выполнять скалярное поле ϕ.

Кротовая нора в расширенной гравитации:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + (T_\phi)_{\mu\nu} + (T_\varphi)_{\mu\nu} \ldots$$

Роль экзотической материи могут играть какие-то поправки. То есть расширенные модели гравитации дают больше возможности создания экзотической материи. Искать кротовые норы можно по наблюдениям.

Космологические решения в расширенной гравитации

Ранее мы обсудили, что в модели Бранса-Дикке есть отскок, которые означает наличие несингулярной асимптотики при $t \to 0$. Режимы квантовой гравитации в космологии существенны толь при $t \to 0$. На любых других стадиях кривизна конечна, следовательно нужна лишь квантовая теория на фоне ОТО. Модель Бранса-Дикке может рассматриваться в качестве эффективного предела.

При рассмотрении разложений по петлевым диаграммам (не LDQ) появляется ряд по кривизне. Ньютоновский предел дает только гравитация Лавлока и ее расширение.

Рассмотрим вариант действия с поправками от модулей

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-R - \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \lambda e^{-2\phi}S_{GB} + \delta\xi(\psi)S_{GB}\right]$$

Модуль - скалярное поле, которым мы описываем вклад от дополнительных измерений.

Попробуем пойти по другому пути и рассмотреть квантовую гравитацию, модель с членом Гаусса-Боннэ. В зависимости от вида функции связи $\xi(\psi)$ возможны несингулярные асимптотики.

Если $\xi \sim \psi^2$ при $t \to 0$ $a = const = (12\delta)^{\frac{1}{2}}$ $\psi = \psi_0 + (12\delta)^{\frac{-1}{2}}\, t$.

Рассмотрим подробнее условия несингулярной асимптотики.

Действие

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-R + \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \lambda e^{-2\phi}S_{GB} + \delta\xi(\psi)S_{GB}\right]$$

Можно представить как

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-R + \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + \delta\xi(\psi)S_{GB} + 2M(\psi)\right]$$

Плоский случай:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Уравнения поля:

$$3h^2(1 + 4\dot{\xi}\delta h) - \frac{\dot{\psi}^2}{2} - V = 0$$

$$2\left(\dot{h} + h^2\right)\left(1 + 4\dot{\xi}\delta h\right) + h^2\left(1 + 4\ddot{\xi}\delta\right) + \frac{\psi^2}{2} - V = 0$$

$$\ddot{\psi} + 3h\dot{\psi} + V' - 12\delta\xi' h^2(h + h^2) = 0$$

Неплоский случай:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\Omega^2$$

Уравнения поля:

$$3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{4\dot{\xi}\delta\dot{a}}{a}\right) = \frac{\psi^2}{2} + V(\psi)$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a}\left(1 + \frac{4\dot{\xi}\delta\dot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + 4\delta\ddot{\xi}\right) = V(\psi) - \frac{\psi^2}{2}$$

$$\ddot{\psi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} - \frac{12\delta\xi'\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) + V'(\psi 0 = 0$$

Теперь рассмотрим низотропные космологические решения.
Действие:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{16}\lambda e^{-2\phi}S_{GB}\right]$$

Метрика Бьянки I:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx_1^2 + b^2(t)dx_2^2 - c^2(t)dx_3^2$$

Параметры Хаббла:

$$p(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \qquad q(t) = \frac{\dot{b}}{b}, \qquad r(t) = \frac{\dot{c}}{c}$$

$$f = \frac{1}{16}\lambda e^{-2\phi}$$

$$pq + qr + rp + 24f'pqr - \frac{\phi'^2}{2} = 0$$

$$(1 + 8rf')(q' + q^2) + (1 + 8qf')(r' + r^2) + (1 + 8f'')qr + \frac{\phi'^2}{2} = 0$$

$$(1 + 8rf')(p' + p^2) + (1 + 8pf')(r' + r^2) + (1 + 8f'')rp + \frac{\phi'^2}{2} = 0$$

$$(1 + 8qf')(p' + p^2) + (1 + 8pf')(q' + q^2) + (1 + 8f'')pq + \frac{\phi'^2}{2} = 0$$

$$\phi'' = -(p + q + r)\phi' + 8\partial_\phi f[p'qr + pq'r + pqr' + pqr(p + q + r)]$$

Уравнения все достаточно симметричны. Для решения в виде расширяющейся Вселенной материю уже не нужна. На уровне Бьянки мы можем сформулировать материю за счет поправок по кривизне.

Аналогичное решение типа «черная дыра»:

$$a_{i1}p' + a_{i2}q' + a_{i3}r' = b_i, \qquad i = 1,2,3$$

$$a_{ij} = a_{ij}(p, q, r, \phi, \phi'), \qquad b_i = b_i(p, q, r, \phi, \phi')$$

Чтобы решить систему используем правило Крамера и теорему единственности.
$D_{main} = 0$ условие существования особенностей.
В этой точке:

$$h_i = h_{i_s} + h_{i1}\sqrt{t - t_s} + h_{i2}\left(\sqrt{t - t_s}\right)^2 + \cdots,$$

$$\phi = \phi_s + \phi_1\left(\sqrt{r - r_s}\right)^2 + \phi_2\left(\sqrt{r - r_s}\right)^3 + \cdots$$

В этой точке Хаббл будет разворачиваться плавным образом, а скалярное поле - более жестким образом.

При некоторых наборах начальных данных возможны и решения с несингулярными асимптотиками.

Статус расширенной гравитации

- Космологические сингулярности заменяются несингулярными решениями (решениями с отскоками)
- Решения вида «расширяющаяся Вселенная» возможны и в отсутствии материи, роль которой могут исполнять поправочные члены
- Модели квантования реально применимы только к Большому взрыву (начальной сингулярности) и центральной сингулярности в черных дырах
- Модели f(r), Хорндески и т.д. создаются для решения проблем темной материи и темной энергии
- Связь между разными моделями можно было бы установить в рамках «теории всего» - единой теории всех физических взаимодействий

Пример: теория струн/М-теория: изначально квантована, в процессе перехода от 11D к 4D за счет вклада дополнительных измерений пытаются объяснить темную материю и темную энергию.

- Теории с массивным гравитроном противоречат с GW170817

Лекция 7. Модель петлевой квантовой гравитации

Литература:

- Observational issues in loop quantum cosmology, A Barrau, T Cailletau, J Grain and J Mielczarek

Основные идеи петлевой квантовой гравитации

Та теория loop quantum gravity (LGG), которая известная сейчас, это предварительная теория. Она

- Непертрубативна, то есть не разлагается в ряды
- Не зависит от фона
- Цель модели - квантование ОТО
- Не требует суперсимметрии или дополнительных измерений
- Не является «теорией всего»
- Квантовая геометрия на планковском масштабе

Формализм Гамильтона (HF)

Формализм Гамильтона трактует пространство и время по-другому.
Из классической механики мы знаем два равнозначных формализма: лагранжев формализм и гамильтонов формализмы. Все задачи, которые мы решали ранее, мы решали через лагранжев формализм. Записав лагранжиан, мы знаем динамику системы. Гамильтонов формализм завязан на гамильтонах. Все теории квантуются через формализм Гамильтона.

Наша цель: корректная формулировка ОТО в HF.
Очень важным здесь является разложение АДМ (Арновита-Дезера-Мизнера) *(7.1)*. Оно является одним из способов разложения четырехмерной метрики:

$$ds^2 = -(\boldsymbol{N}dt)^2 + q_{ab}(\boldsymbol{N^a}dt + dx^a)(\boldsymbol{N^b}dt + dx^b) \quad (7.1)$$

$\boldsymbol{N}$ - функция ошибок (lapse function)
$\boldsymbol{N^a}$ - вектор сдвига (shift vector)
Степени свободы - 10 компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, 1 значение для N, 3 значения для $\boldsymbol{N^a}$, 6 значений q_{ab}.

Смысл этих функций заключается в следующем:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Функция N^a описывает две независимые траектории, функция N описывает, как попасть с одной траектории на другую и дает некоторую коррекцию.

Рассмотрим подробнее формализм Гамильтона для ОТО.

Вводим понятие внешней кривизны K_{ab}.
Лагранжиан

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

Канонические моменты

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Гамильтониан

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Фазовое пространство: (p_i, q_i)
Конфигурационное пространство: $\dot{q}_i$
Соответственно канонические уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Иначе можно записать:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{q_i, H\}$$

Вводится понятие скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

В другой форме уравнение Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

Понижение порядка уравнений: $f(q_i, p_i) = 0$ сохраняет f.
Поэтому полный гамильтониан можно представить в виде суммы:

$$H_{tot} = H_{init} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f_i$$

Свойство скобки Пуассона:

$$\{A_i(x), E^j(y)\} = \delta_i^j \, \delta(x - y)$$

В ОТО H=0, поэтому формально нет эволюции по времени (координате t). Динамические переменные сводятся к тождествам, канонические уравнения - к калибровкам, следовательно, все точки в фазовом пространстве физически эквивалентны.

Кривизна добавляется к этим точкам и определяет истинное положение в фазовом пространстве.

Главная идея: использовать переменные как *эффективное время* с учетом того, какая калибровочная орбита описывается.

ОТО в переменных Аштекера

Общая теория относительности: $S = (2\varkappa)^{-1} \int \sqrt{-g} R d^4x$

$$g = g^{00} = \frac{1}{N^2},$$
$$g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}$$

Имеются 6 степеней свободы и 4 тождества, следовательно, у нас есть 2 степени свободы. Далее вводятся триады плотности (densitized triads), переходим к переменным Аштекера:

$$E_i^a = \det(q)\, q^{ab} = E_i^a E_j^b\ \delta^{ij}$$

Вводятся SU(2) матрицы A_a^i, связанные со спиновыми коэффициентами Γ_a^i

$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i$ - соотношение, хорошо известное из теории групп

γ- свободный параметр (Barbero-Immirzi)

Определив спиновые коэффициенты как

$$D_a V^i = \partial_a V^i + \Gamma_{aj}^i V^j$$

Тогда

$$\Gamma_a^i = \Gamma_{ajk}^i \epsilon^{jki},\ \ K_a^i = K_{ab} E^{bi} (\det(q))^{-\frac{1}{2}}$$

$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi G\gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta(x-y)$ - триады плотности

Подставим АДМ разложение в Лагранжиан ОТО:

$$L = \int_{\Sigma} d^3x \left(\frac{1}{8\pi G\gamma} E_i^a \dot{A}_a^i - NC - N^a C_a - N^i C_i \right)$$

Где

$$C = \frac{1}{16\pi G} \frac{E_i^a E_i^b}{\sqrt{|detE|}} [\varepsilon_k^{ij} F_{ab}^k - a(1+\gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j$$

$$C_a = \frac{1}{8\pi G\gamma} (E_i^b F_{ab}^i - A_a^i C_i)$$

$$C_i = \frac{1}{8\pi G\gamma} D_a E_i^a = \frac{1}{8\pi G\gamma} (\partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a)$$

$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$- Кривизна Аштекера

E_i^a, A_a^i - канонические сопряженные

N, N^a, N^i - лагранжевы множители

Комбинации от лагранжевых множителей:

- (C) - констрейт Гамильтона
- (C_a) - констрейт диффеоморфизмов
- (C_i) - констрейт Гаусса

Таким образом, гамильтониан ОТО является комбинацией этих констрейнтов: $H_G = 0$
В переменных Аштекера ОТО - SU(2) калибровочная симметрия.
Вводим смещенные (smeared) констрейт:

$$C_1 = G[N^i] = \int_{\Sigma} d^3x\, N^i C_i$$
$$C_2 = D[N^a] = \int_{\Sigma} d^3x\, N^a C_a$$
$$C_3 = S[N\ ] = \int d^3x\ \ NC$$

Таким образом, гамильтониан можно записать как

$$H_G = [N^i, N^a, N] = G[N^i] + D[N^a] + S[N]$$

Так как гамильтониан стремится к 0,

$$H_G\left[N^i, N^a, N\right] \approx 0, \qquad \partial_t H_G\left[N^i, N^a, N\right] \approx 0$$

Уравнение Гамильтона $\partial_t f = \left\{f, H_G\left[M^i, M^a, M\right]\right\}$ приводит к

$$\left\{H_G\left[N^i, N^a, N\right], H_G\left[M^i, M^a, M\right]\right\} = 0$$

Ввиду линейности скобок Пуассона условие выполняется для алгебры

$$\left\{C_I, C_J\right\} = F_{IJ}^k\left(A_b^j, E_i^a\right)C_k$$

Структурные константы $F_{IJ}^k\left(A_b^j, E_i^a\right)$ зависят от фазового пространства переменных Аштекера $F_{IJ}^k\left(A_b^j, E_i^a\right)$, поэтому на поверхности $G\left(N^i\right) \approx 0$

$$\{D[M^a], D[N^a]\} = D[M^b \partial_b N^a - N^b \partial_b M^a],$$

$$\{D[M^a], S[\,N]\} = S[M^a \partial_a N - N \partial_a M^a],$$

$$\{S[M], S[N]\} = sD[q^{ab}(M\,\partial_b N\ - N\,\partial_b M\,)],$$

Сигнатура метрики s=1 - Лоренцева
Сигнатура метрики s=-1 - Евклидова

Квантование

Метод квантования ОТО - рассмотрение метрики как конфигурационной переменной с использованием сопряженных моментов.

Следующий шаг: из волновой $\psi(q_{ab})$ функции конструируется функционал и ищется вероятность наблюдения такой геометрии.

В переменных Аштекера аналогичная процедура состоит в рассмотрении волнового функционала $\psi\left(A_a^i\right)$, после чего A_a^i трактуется как дифференциальный оператор., действующий на ψ.

На этом этапе мы сталкиваемся с проблемой невозможности определения внешнего произведения. Также на этом этапе происходит переход к петлям. Петли конструируются из голономий - параллельные пропагаторы (формула движения параллельно) вдоль закрытых пространств.

Вводится матрица траекторий:

$$P[e^{\int_\gamma \dot{\gamma}^a(S)A_a(S)}]$$

В этой модели нет решения проблемы темной материи и темной энергии. За счет квантового режима возможно решение проблемы начальной сингулярности.

Можем ввести параметризацию переменных Аштекера:

$$A_a^i = c\delta_a^i, \qquad E_i^a = p\delta_i^a$$

$p = a^2$ - масштабный фактор
$c \sim \partial_t a$ - параметр Хаббла
$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3}$ - соотношение из структуры LDQ

Любая геометрия, которая не параметризуется переменными Аштекера, выходит за рамки петлевой квантовой гравитации.
$\partial_t p = \{p, H\} \to H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$ - уравнение Фридмана.
Далее квантование по методу Уиллера-ДеВитта:
Берем набор переменных $(c, p, \varphi, p_\varphi)$, где
φ- поле материи,
c, p объявляются операторами
$\hat{c}$ - оператор умножения
$\dot{p}$ - дифференциальный оператор

Уравнение Уиллера-ДеВитта — это квантовая версия уравнений Гамильтона. В петлевой квантовой гравитации операторами объявляются голономии. Таким образом, пространство не наделено обычными внешним произведением:

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \qquad \hat{h}|p\rangle = |p + \lambda$$

Заменой $c \to \sin(\mu c)/\mu$ классический гамильтониан переходит в LDQ гамильтониан.

$$\partial_t p = \{p, H_{eff}\} \to H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(1 - \frac{\rho}{\rho_c})$$

При $\rho = \rho_c$ вместо Большого взрыва возможен отскок.

Эффективный гамильтониан для N=1

$$C_{eff} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2}\frac{sin2(\lambda_b b)}{\lambda_b^2}V - C_{matt}$$

Получится модифицированное уравнение Фридмана, для которого плотность энергии:

$$\rho = \frac{H_{matt}}{v} = 3\sin^2(\lambda_b b)/\,8\pi G\gamma^2\lambda_b^2$$

Достигает максимума при $\sin^2(\lambda_b b) = 1$.
Уравнение движения для объема:

$$\dot{V} = \frac{3}{\gamma\lambda_b}Vsin(\lambda_b b)\cos(\lambda_b b)$$

Дает модифицированное уравнение Фридмана

$$H^2 \coloneqq \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\dot{V}}{3V}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$$

Здесь $\rho_c = \frac{9}{2\alpha^2}\ \frac{1}{\lambda_b^2}$

Следовательно, для любой траектории есть квантовые точки поворота $b \pm \frac{\pi}{2\lambda}$, когда $\partial_t V = 0$, что и является отскоком.
Максимальная плотность:

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2\gamma^3}m_{Pl}^4 \cong 0.41m_{Pl}^4$$

Петлевая квантовая гравитация

Все завязано на разложении АДМ:

$$ds^2 = -(\boldsymbol{N}dt)^2 + q_{ab}(\boldsymbol{N^a}dt + dx^a)(\boldsymbol{N^b}dt + dx^b)$$

Мы теряем общность рассмотрения из-за фиксации некоторых метрических функций. Изначально эта модель предполагает только скалярную кривизну и вставить какие-то поправки мы уже не в состоянии.

Рассмотрим уравнение Райчадхури и Клейна-Гордона:

$$\frac{a''}{a} = \frac{4}{3}\pi G\rho\left(1 - \frac{4\rho}{\rho_c}\right) + 4\pi GP(1 - \frac{2\rho}{\rho_c}$$

$$\varphi'' + 3H\varphi' + M^2\varphi \ = 0$$

Потенциал скалярного поля: $V(\varphi\ ) = \frac{1}{2}m^2\varphi$

В пределе большого объема $\rho \ll \rho_c$ воспроизводятся стандартные уравнения Фридмана.

В режиме малого объема уравнение Клейна-Гордона переходит в закон сохранения (с учетом $\rho = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + V(\varphi),\ P = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + V(\varphi)$: $\rho' + 3H(\rho + P) = 0$

Скорость изменения Хаббла вблизи начала:

$$H' = -4\pi G(\rho + P)(1 - \frac{2\rho}{\rho_c})$$

Рассмотрим случай P=0:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = (\frac{8}{3})\pi G\rho$$

$$\frac{a''}{a} = -\left(\frac{4}{3}\right)\pi G\rho, \qquad \rho' = -3H\rho$$

При движении назад невозможно изменение знака H: происходит смена сжатие -> расширение. В LDQ:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = (\frac{8}{3})\pi G\rho(1 - \frac{2\rho}{\rho_c})$$

$$\frac{a''}{a} = -\left(\frac{4}{3}\right)\pi G\rho(1 - \frac{4\rho}{\rho_c})$$

$$\rho' = -3H\rho$$

При H = 0 |a| > 0, то есть космологическая эволюция (LDQ) содержит *отскок*.
Следовательно, решается проблема квантового режима при Большом взрыве.

Следующий шаг - *инфляция* (когда расширение по степенной асимптотике заменяется на экспоненциальную, чтобы иметь возможность воссоздать современную крупномасштабную структуру нашей Вселенной).

Для инфляции необходимо скалярное поле, так как инфляция невозможна без материи, которая обеспечивает переход к экспоненциальному расширению. Поле Хиггса не может играть роль инфлатона (скалярного поля, которое отвечает за инфляцию), а других фундаментальных полей в LDQ нет.

Чтобы запустить инфляцию, начальные данные не могут быть произвольными, следовательно, необходим fine-tuning (точная подстройка). Чем меньше точной подстройки, тем более общая и точная получается модель.

Условие начала инфляции:

$$\epsilon \coloneqq \frac{(\dot{\varphi})^2}{(\dot{\varphi})^2 + 2V(\varphi)} \ll 1 \quad and \;\; \eta \coloneqq -\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1$$

Первое условие позволит Вселенной войти в режим ускоренного расширения при инфляции. Чтобы достичь нужной величины инфляции, $N_{inf} > 60$ (функция ошибок для инфляционной стадии из переменных Аштекера).

$$N_{inf} \coloneqq \int_{t_i}^{t_f} H(t)dt \simeq -8\,\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \left(\frac{V}{V_{,\varphi}}\right) d\varphi$$

Беря slow-roll потенциал $V(\varphi) = \lambda\varphi^a$

Можно выразить функцию ошибок через значение поля:

$$N_{inf} = 4\pi G(\varphi_i^2 - \varphi_f^2)/a$$

Тогда начальное значение скалярного поля:

$$\varphi_i > 2.1\sqrt{a}m_{Pl}$$

В петлевой квантовой гравитации отскок получается естественным образом. Более того отскок сосуществует с инфляцией. Это происходит за счет того, что мы сужаем пространство, введя метрики и ограничения.

Отскок необязательно установит скалярное поле в положение для инфляции, поэтому нужен fine-tuning.

Петлевое квантование на эффективном уровне производится с помощью голономий - экспоненциалов от существующих функций связи вместо самих функций связи.

Плоская космологическая модель воспроизводится при замене (n=1)

$$\bar{k} \to \mathbb{K}[n] \coloneqq \frac{\sin(n\gamma\bar{\mu}\bar{k})}{n\gamma\bar{\mu}}$$

На уровне классического гамильтониана.

В настоящий момент не существует предсказаний для новых эффектов в космологии от LDQ. Своей задачей разработчики LDQ воспроизведение существующей космологии и уже полученных результатов.

$$\bar{k} \to \mathbb{K}[n] \coloneqq \frac{\sin(n\gamma\bar{\mu}\bar{k})}{n\gamma\bar{\mu}}$$

Мотивация для подобного рассмотрения идет от использования переменных Аштекера, подставленный в виде голономий.

На классическом уровне:

$F_{ab}^{k} \sim \bar{k}^2$ - кривизна Аштекера

После регуляризации голономий:

$$F_{ab}^{k} \sim \left(\frac{\sin\left(\gamma\bar{\mu}\bar{k}\right)}{\gamma\bar{\mu}}\right)^2$$

Классика воспроизводится при $\bar{\mu} \to 0$, то есть ряд поправок сходится и LDQ перенормируема (классическая ОТО неперенормируема).

Для однородной и изотропной Вселенной голономные поправки дают модифицированное уравнение Фридмана. Изучение этого уравнения дает картину петлевой космологии.

Еще одна задача, которую ставят авторы — это показать, что петлевая космология воспроизводит, например, *спектр реликтового излучения*. Для этого были рассмотрены тензорные возмущения (гравитационные волны).

В разложении АДМ, рассмотренном ранее:

$$ds^2 = -(\boldsymbol{N}dt)^2 + q_{ab}(\boldsymbol{N^a}dt + dx^a)(\boldsymbol{N^b}dt + dx^b)$$

При рассмотрении тензорных мод метрическая функция N считается невозмущенной:

$$N = \breve{N} \to \sqrt{\breve{N}} = \sqrt{\acute{p}} = a$$

Вводим конформное время:

$$\eta = \int dt/a(t)$$

$q_{ab} = a^2(\delta_{ab} + h_{ab}),\ |h_{ab}| \ll 1$ раскладывается в ряд

$\partial^a h_{ab} = 0 \quad \delta^{ab} h_{ab} = 0$ - нулевая метрика и метрика малых параметров

Возмущения триад плотности: $\delta E_i^a = -\frac{1}{2}\acute{p} h_i^a$
Внешняя кривизна: $K_a^i = \gamma^{-1}(A_a^i - \Gamma_a^i)$

Тогда гамильтониан примет вид:

$$H_G = \frac{1}{2\varkappa}\int_\Sigma d^3x\bar{N}\left[-6\sqrt{\bar{p}k^2} - \frac{1}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\bar{k}^2\left(\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j\right) + \sqrt{\bar{p}}\left(\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_k^c \delta_j^d\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\bar{k}(\delta E_j^c \delta K_c^j + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}(\delta_{cd}\delta^{jk}\delta^{ef}\partial_e \delta E_j^c \partial_f \delta E_k^d\right]$$

Замена: $\bar{k} \to \mathbb{K}[n]$

$$H_G^{old} = \frac{1}{2\varkappa}\int_\Sigma d^3x\bar{N}\left[-6\sqrt{\bar{p}}\mathbb{K}[1]^2 - \frac{1}{2\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\mathbb{K}[1]^2\left(\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j\right) + \sqrt{\bar{p}}\left(\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_k^c \delta_j^d\right)\right.$$
$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\mathbb{K}[2](\delta E_j^c \delta K_c^j + \frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}(\delta_{cd}\delta^{jk}\delta^{ef}\partial_e \delta E_j^c \partial_f \delta E_k^d\right]$$

Пропагатор гравитона дается следующим уравнением движения:

$$\frac{1}{2}\left[h_a^{i''} + \left(\frac{\sin(\gamma\bar{\mu}\bar{k})}{\gamma\bar{\mu}}\right)h_a^{i'} - \nabla^2 - 2\gamma^2\bar{\mu}^2\left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}}\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{p}}\right)\left(\frac{\sin(\gamma\bar{\mu}\bar{k})}{\gamma\bar{\mu}}\right)^4 h_a^i\right] = \varkappa\prod_{Qa}^{i}$$

Где $\prod_{Qa}^{i}$ источник определяется как

$$\prod_{Qa}^{i} = \left[\frac{1}{3V_0}\frac{\partial \bar{H}_m}{\partial \bar{p}}\left(\frac{\delta E_j^c \delta_a^j \delta_c^i}{\bar{p}}\right)\cos\left(2\gamma\bar{\mu}\bar{k}\right) + \frac{\delta H_m}{\delta\delta E_i^a}\right]$$

V_0 - инфракрасный член регуляризации: $V_0 = \int_\Sigma d^3x$.

Пропагатор - основное уравнение петлевой космологии. К гамильтониану H_G^{old} необходимо добавить контрчлены для обеспечения отсутствия аномалий, причем их число конечно, так как модель перенормирована.

Требование об отсутствии аномалий равносильно равенству нулю уравнений Фридмана.

Добавление контрчленов H_c: $H_c = H_G^{new} = H_G^{old} + H_c$, где

$$H_c = \frac{1}{2\varkappa}\int_\Sigma d^3x\bar{N}\left[-\frac{1}{\bar{p}^{\frac{3}{2}}}\left(3\bar{k}\mathbb{K}[2] - \mathbb{K}[1]^2 - \bar{k}^2\Omega\right)\left(\delta E_j^c \delta E_k^d \delta_c^k \delta_d^j\right)\right.$$
$$\left. + (\Omega - 1)\sqrt{\bar{p}}\left(\delta K_c^j \delta K_d^k \delta_k^c \delta_j^d\right) - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\left(\mathbb{K}[2] - \bar{k}\,\Omega\right)\left(\delta E_j^c \delta K_c^j\right)\right]$$

Введена величина $\Omega \coloneqq \cos(2\gamma\bar{\mu}\bar{k})$ причем $\lim_{\bar{\mu}\to 0} H_c = 0$

Полный гамильтониан: $H_{tot} = H_G^{new} + H_m$

Материя нужна для генерации инфляции. Скалярное поле и сопряженный момент разделяются на возмущенную и однородную части:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi, \quad p_\varphi = \overline{p_\varphi} + \delta p_\varphi$$

Разделение на возмущенную и однородную части для скобок Пуассона представимо как

$$\{\cdot,\cdot\} = \{\cdot,\cdot\}_{\bar{k},\bar{p}} + \{\cdot,\cdot\}_{\delta K,\delta E} + \{\cdot,\cdot\}_{\bar{\varphi},\bar{p}_\varphi} + \{\cdot,\cdot\}_{\delta\varphi,\bar{p}_\varphi}$$

Где

$$\{\cdot,\cdot\}_{\bar{k},\bar{p}} \coloneqq \frac{\varkappa}{3V_0}\left[\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{k}}\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{p}} - \frac{\partial\cdot}{\partial\bar{p}}\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{k}}\right];$$

$$\{\cdot,\cdot\}_{\delta K,\delta E} \coloneqq \varkappa\int_\Sigma d^3x\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\delta K_a^i}\frac{\delta\cdot}{\delta\delta E_i^a} - \frac{\delta\cdot}{\delta\delta E_i^a}\frac{\delta\cdot}{\delta\delta K_a^i}\right];$$

$$\{\cdot,\cdot\}_{\bar{\varphi},\bar{p}_\varphi} := \frac{1}{V_0}\left[\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{\varphi}}\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{p}_\varphi} - \frac{\partial\cdot}{\partial\bar{p}_\varphi}\frac{\partial\cdot}{\partial\bar{\varphi}}\right];$$

$$\{\cdot,\cdot\}_{\delta\varphi,\bar{p}_\varphi} := \int_\Sigma d^3x\left[\frac{\delta\cdot}{\delta\delta\bar{\varphi}}\frac{\delta\cdot}{\delta\delta\bar{p}_\varphi} - \frac{\delta\cdot}{\delta\delta\bar{p}_\varphi}\frac{\delta\cdot}{\delta\delta\bar{\varphi}}\right];$$

Уравнение движения: $f' = \{f, H_{tot}\}$

Для однородной части:

$$\bar{p}' = \{\bar{p}, H_{tot}\} = \bar{N}2\sqrt{\bar{p}}(\mathbb{K}[2]),$$

$$\bar{k}' = \{\bar{p}, H_{tot}\} = -\frac{\bar{N}}{\sqrt{\bar{p}}}\left[\frac{1}{2}\mathbb{K}[1]^2 + \frac{\bar{p}\partial}{\partial\bar{p}}(\mathbb{K}[1])^2\right] + \frac{\varkappa}{3V_0}\left(\frac{\partial H_m}{\partial\bar{p}}\right)$$

Тогда конформный Хаббл: $\mathcal{H} := \bar{p}'/2\bar{p} = \mathbb{K}[2]$

Для получения тензорной моды h_i^a

$$\left(\delta E_i^a\right)' = -1/2\,\left(\bar{p}' h_i^a + \bar{p}\, h_i^{a\prime}\right)$$

С другой стороны:

$$(\delta E_i^a)' = \{\delta E_i^a, H_{tot}\} = -\frac{\bar{N}}{2}\left[2\sqrt{\bar{p}}\Omega\delta\mathrm{K}_\mathrm{c}^\mathrm{j}\delta_\mathrm{j}^\mathrm{a}\delta_\mathrm{i}^\mathrm{c} - \frac{2}{\sqrt{\bar{p}}}\left(2\mathbb{K}[2] - \bar{k}\Omega\right)\delta\mathrm{E}_\mathrm{i}^\mathrm{a}\right]$$

Используя уравнения

$$\delta K_a^i = \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}h_a^{i\prime} + \bar{k}H_a^i$$

Дифференцируем по δK_a^i, подставляем в уравнение движения и, комбинируя, получаем уравнение для тензорной моды:

$$\frac{1}{2}\left[h_a^{i\prime\prime} + \left(2\mathbb{K}[2] - \frac{\Omega'}{\Omega}\right)h_a^{i\prime} - \Omega\nabla^2 h_a^i\right] = \varkappa\prod\nolimits_i^a$$

$$\prod\nolimits_i^a = \Omega\left[\frac{1}{3V_0}\frac{\partial H_m}{\partial\bar{p}}\left(\frac{\delta E_j^c\delta_a^j\delta_i^c}{\bar{p}}\right) + \frac{\delta H_m}{\delta\delta E_i^a}\right]$$

В случае скалярной материи $\Pi_a^i = 0$ и

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$h_a^{i''} + 2(\mathcal{H} - \varepsilon)h_a^{i'} - c_s^2\nabla^2 h_a^i = 0$$

Выделяем квантовую поправку

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\frac{\Omega'}{\Omega} = 3\mathcal{H}\left(\frac{\rho + P}{\rho_c - 2\rho}\right)$$

И квадрат скорости

$$c_s^2 = \Omega = 1 - \frac{2\rho}{\rho_c}$$

Тогда в классическом пределе:

$$h_a^{i''} + 2\mathcal{H}h_a^{i'} - \nabla^2 h_a^i = 0$$

Таким образом, теорию космологических возмущений можно считать полностью выведенной!

Применение петлевой космологии

Космологические уравнения с голономиями можно разбить на однородную часть и поправочную. Фоновая динамика определяется модифицированным уравнением Фридмана *(7.2)*

$$\mathcal{H}^2 = \frac{a^2\varkappa}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) \quad (7.2)$$

Получающееся из $\bar{H}_G^{new} + \bar{H}_m \approx 0$

Плотность энергии $\rho = \frac{1}{2a^2}(\overline{\varphi'})^2 + V(\bar{\varphi})$

Уравнение Клейна-Гордона *(7.3)*:

$$\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' + \frac{a^2 dV(\bar{\varphi})}{d\bar{\varphi}} = 0 \quad (7.3)$$

Тензорные возмущения:

$$\varepsilon h_{ab}'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{1}{2}\frac{\Omega'}{\Omega}\right)h_{ab}' - \Omega\nabla^2 h_{ab} = 0$$

Скалярные возмущения считаются через потенциалы Бардена *(7.4)*

$$\Phi = \phi + \frac{1}{\Omega}(B' - E'') + \left(\frac{\mathcal{H}}{\Omega} - \frac{\Omega'}{\Omega}\right)(B - E') \quad (7.4)$$

$$\Psi = \psi - \frac{\mathcal{H}}{\Omega}(B - E')$$

Тогда

$$\delta\varphi^{GI} = \delta\varphi + \frac{\bar{\varphi}'}{\Omega}(B - E')$$

Новая переменная Сасаки-Муханова

$$vs = a(\eta)\left(\delta\varphi^{GI} + \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\psi\right)$$

Ее уравнение движения

$$vs'' - \Omega\nabla^2 vs - \frac{z''}{z}vs = 0$$

Где $z = a(\eta)\frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}$

$$\phi'' + 2\left[\mathcal{H} - \left(\frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}''} + \varepsilon\right)\right]\phi' + 2\left[\mathcal{H}' - \mathcal{H}\left(\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'} + \varepsilon\right)\right]\phi - c_s^2\nabla^2\phi = 0$$

Пространство-время разбивается на кубическую решетку, в каждом из которых действует своя *однородная* метрика FLRW. Неоднородности описываются через взаимодействие соседних ячеек.

Применение уравнений к инфляционному сценарию медленного скатывания. Одно скалярное поле с потенциалом:

$$\epsilon := \frac{m_{Pl}^2}{16\pi}\left(\frac{V_{,\bar{\varphi}}}{V}\right)^2 \frac{1}{1 - \delta_H}, \quad \eta := \frac{m_{Pl}^2}{8\pi}\left(\frac{V_{,\bar{\varphi}}}{V}\right)\frac{1}{1 - \delta_H}$$

$$\delta_H = V/\rho_c$$

Определение энергетического спектра основано на стандартной технике КТП в искривленном пространстве с использованием WKB

$$vs(T)_{,k} - \frac{1}{\sqrt{2k\sqrt{\Omega}}}e^{-ik\int^{\tau}\sqrt{\Omega(\tau')}d\tau'}$$

Таким образом получается спектр скалярных и тензорных возмущений

$$\mathcal{P}s(k) = As\left(\frac{k}{aH}\right)^{ns-1}$$
$$\mathcal{P}_T(k) = A_T(\frac{k}{aH})^{nT}$$

Значения индексов:

$$As = \frac{1}{\pi\epsilon}\left(\frac{H}{m_{Pl}}\right)^2 (1+2\delta_H)\ and\ n_S = 1 + 2\eta - 6\epsilon + O(\delta_H^2)$$

$$A_T = \frac{16}{\pi}\left(\frac{H}{m_{Pl}}\right)(1+2\delta_H)^2\ and\ \ n_S = -2\epsilon + O(\delta_H^2)$$

В пределе $\rho_c \to \infty$ воспроизводится классический спектр *slow-row inflation.*

Возмущения объема

Некоторые члены в гамильтониане нельзя проквантовать напрямую, а только после дополнительного представления. Обратный объем связан с детерминантами триад плотности. Эти возмущения можно учесть в квазиклассичсеком приближении.

$$\alpha \sim 1 + \alpha_0\delta_{inv} \quad v \sim 1 + v_0\delta_{inv}, \text{ где } \delta_{inv} \sim a^{-\sigma}$$

α_0, v_0, σ - параметры LDQ из наблюдений

С учетом этих возмущений $v_S'' - (s^2\Delta + \frac{z''}{z}{}_{v_S} = 0$

Тогда

$$\mathcal{P}s = \frac{G}{\pi}\frac{\mathcal{H}^2}{a^2\epsilon}\left[1 + \left(v_0\left(\frac{\sigma}{6}+1\right) + \frac{\sigma a_0}{2\epsilon} - \frac{\chi}{\sigma+1}\right)\delta_{Pl}\right]$$

Где

$$n_s - 1 = 2\eta - 4\epsilon + \sigma\left(a_0 - 2v_0 + \frac{\chi}{\sigma+1}\right)\delta_{Pl}$$

Тогда уравнение для тензорных мод:

$$v_T'' + \left(\alpha^{-2}\Delta - \frac{\tilde{a}''}{\tilde{a}}\right)v_T = 0$$
$$\frac{\tilde{a}''}{\tilde{a}} = a(1 - \frac{\alpha_0}{2}\delta_{inv}$$

Инфракрасный предел тензорных мод:

$$\mathcal{P}_T^{IR} = \left(\frac{\ell_{Pl}}{\ell_0}\right)^2 \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\epsilon\right)^2}{\pi}\right)[2Z(1+\epsilon)]^{-\frac{3}{2}-\epsilon}k^3 exp\left(\frac{\pi\sqrt{2Z}(1+\epsilon)}{2k}\right)$$

Полный спектр тензорных возмущений:

$$\mathcal{P}_T = \frac{16G}{\pi}\frac{\mathcal{H}^2}{a^2}\left[1+\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)\delta_{Pl}\right]$$

Выводы

Плюсы:

- Петлевая квантовая космология — это часть петлевой квантовой гравитации
- Модель хорошо определена и самосогласована
- Дает интересные сценарии космологической эволюции и возмущений
- Разрешает космологические сингулярности, вычисляет пропагатор гравитрона
- Не имеет противоречий с существующими астрономическими данными
- Имеет предел в виде стандартной модели

Минусы:

- Не решает проблемы объединений взаимодействий
- Масштаб квантовых явлений неясен
- Не имеет критических предсказаний (2018)
- Неясна ситуация с локальными решениями и их сингулярностями!

Лекция 8. Петлевая гравитация

Петлевая квантовая гравитация не является основным направлением развития, но каждый месяц в мире на эту тему выходит 1-2 статьи на тему *петлевой квантовой гравитации*. Подход, который развивается в данном направлении, является перспективным.

Основные положения *петлевой квантовой гравитации* заключаются в том, чтобы, с одной стороны, сузить пространство решений, за счёт того, чтобы использовать разложение арновейтдейзеровинзора изначально, а с другой стороны, функции –метрические функции, которые стоят с помощь преобразований привести к такому виду, чтобы они составляли замкнутую алгебру.
Благодаря этому удаётся создать закрытую алгебру коммутаторов и за счёт этого модель можно проквантовать. Это и есть основным для направления петлевой квантовой гравитации. В петлевой квантовой гравитации имеются решения в виде отскока. В этой модели есть инфляционное решение.
Несколько слов о чёрно-дырных решениях в моделях петлевой квантовой гравитации.
Ссылки на статьи размещены ниже.

Решение вида «Чёрная дыра» для петлевой квантовой гравитации

Можно записать в следующем виде метрики сферической симметрии:

$$ds^2 = -\frac{1}{F(t)}dt^2 + \left(\frac{2b}{r_s}\right)^2 F(t)dr^2 + t^2 d\Omega^2$$

В качестве фона рассматриваем метрику Фридмана, где

$$F(t) = \frac{1}{4}\left[f' \circ f^{-1}(\frac{r_s}{t} - 1)\right]^2 = \left[2\frac{df^{-1}}{dx}(\frac{r_s}{t} - 1)\right]^{-2} (3.18)$$

Вне горизонта, следовательно $f(x) \approx x^2 \quad F(t) \approx |r_s/t - 1|$

стандартная метрика Шварцшильда,
используется для того, чтобы согласовать теорию с наблюдением. Потому что, во-первых, грегистрация чёрных дыр в гравитационно-волновой астрономии налайга и других установках, во-вторых, последние события по теням чёрных дыр являются очень веским аргументом в пользу того, что чёрные дыры существуют и описываются метриками, которые мы предполагаем. Поэтому если у модели нет асимптотики хотя бы в виде Шварцшильда, то эта модель не работает.

Соответственно, вне горизонта у нас будет метрика Шварцшильда, а внутри горизонта:

$$F(t) \;=\; \left(\frac{r_s}{t} - 1\right)\;\left[1 + \rho^2 - \rho^2 \frac{r_s}{t}\right]$$

Следовательно, появляются внутренние горизонты, при этом инвариант кривизны $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ конечен.

Если инвариант кривизны конечен, следовательно, это сингулярность, которую можно устранить с помощью преобразования координат.

Если инвариант расходится, то это физическая сингулярность.

Внутренние горизонты, которые появляются если мы рассмотрим поведение внутри функции инвариант кривизны конечен, то, когда мы подходим к началу координат, инвариант кривизны ведёт себя как:

При r → 0

$$\mathbf{R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \sim t^{-2} \rightarrow \infty\ (Sw\ \ t^{-6})}$$

по метрике Шварцшильда – **(Sw t^{-6}),** т.е. сингулярность более слабая

При r → 0 будет $\mathbf{t^{-2}}$, что является аналогом метрики Рейснера-Нордстрема!
Т.е. это чёрная дыра с дополнительным зарядом.

Метрика Рейснера-Нордстрема – это чёрная дыра с электрическим зарядом (например, с приливным зарядом).

Пример: решение вида «Чёрная дыра» в гравитации Гаусса-Боннэ:

$$S = (16\pi)^{-1}\int d^4x g^{-1/2}[R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \alpha_1 e^{-2\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \alpha_2 e^{2\phi}S_{GB}]$$

Чёрная дыра может превращаться в кротовую нору.

Конформная гравитация

Конформная гравитация – это теория гравитации, альтернативная общей теории относительности (далее –ОТО).

- Главное качество – перенормируема и унитарна т.е. в отличии от ОТО, которую нельзя проквантовать, в конформной гравитации эту проблему удаётся решить.

- Кандидат на роль квантовой теории гравитации (перспективный кандидат)
- Симметрия PT (parity time) заложена изначально
- Объяснение тёмной материи и тёмной энергии

Сравнение с ОТО

Важными чертами ОТО являются наличие ньютоновского предела (теория должна воспроизводить наблюдательные данные)

Способ описания, при котором наблюдатели могут двигаться с ускорением, при этом наблюдая одинаковую физику.

Та физика, которую видят наблюдатели не зависит от того, в какой системе отчёта он находится.

Центральную роль в описании играют символы Кристофеля *(8.1)*

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\sigma} \right]$$

То есть, минимальный путь в пространстве с

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

описывается уравнением

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0.$$

Из символов Кристофеля строится тензор кривизны – тензор Римана

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}$$

В плоском пространстве все его компоненты равны 0.

При ненулевом тензоре кривизны разложение за метрику Шварцшильда даёт *Ньютоновский предел.*

Метрика Шварцшильда и её продолжение даёт решение для солнечной системы и других *наблюдаемых* ситуаций.

ОТО: что можно изменить

Уравнения Эйнштейна получаются из действия (минимальный выбор):

$$I_{\mathrm{UNIV}} = I_{\mathrm{EH}} + I_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x(-g)^{1/2}R^{\alpha}{}_{\alpha} + I_{\mathrm{M}}$$

Метрику Шварцшильда (как отражение реальной физики) можно получить и при более общем выборе действия.

Рассмотрим конформно-инвариантное действие:

$$I_{\mathrm{UNIV}} = I_{\mathrm{W}} + I_{\mathrm{M}} = -\alpha_g \int d^4x(-g)^{1/2}C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\lambda\mu\nu\kappa} + I_{\mathrm{M}}$$
$$\equiv -2\alpha_g \int d^4x(-g)^{1/2}\left[R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2\right] + I_{\mathrm{M}}$$

Здесь тензор Вейля:

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \frac{1}{6}R^{\alpha}{}_{\alpha}\left[g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}\right]$$

Уравнения поля:

$$-4\alpha_g W^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = 0$$

Уравнения поля:

$$-4\alpha_g W^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = 0$$

Здесь

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta} + R^{\mu\nu;\beta}{}_{;\beta} - R^{\mu\beta;\nu}{}_{;\beta} - R^{\nu\beta;\mu}{}_{;\beta} - 2R^{\mu\beta}R^{\nu}{}_{\beta}$$

$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{2}{3}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta}$$

$$+\frac{2}{3}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\mu;\nu} + \frac{2}{3}R^{\alpha}{}_{\alpha}R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2$$

Закладывается конформная симметрия за счёт этого меняются действия и получается, что появляются дополнительные степени свободы, которые позволяют смоделировать космологическую постоянную и поэкспериментировать с Законом Ньютона. Это и есть объяснение тёмной материи и тёмной энергии.

В этой теории также есть вакуумное решение $R_{\mu\nu} = 0$.

Значит, уравнения Эйнштейна – это не единственно возможный выбор уравнений гравитационного поля, отражающих реальность (метрику Шварцшильда). Возможен иной вариант уравнений поля для теории гравитации.

Конформная гравитация: Базовые положения

Свободный массовый фермион в плоском пространстве с калибровочным полем

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \beta(x)$$

Инвариантен относительно

$$\psi(x) \to e^{i\beta(x)}\psi(x)$$

Инвариантное действие

$$I_{\mathrm{M}} = -\int d^4x \bar{\psi}(x)\gamma^\mu[i\partial_\mu + A_\mu(x)]\psi(x)$$

Аналогично локальное координатно-инвариантное действие

$$I_{\mathrm{M}} = -\int d^4x(-g)^{1/2}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)[i\partial_\mu + i\Gamma_\mu(x)]\psi(x)$$

где

$$\gamma^\mu(x) = V_a^\mu(x)\hat{\gamma}^a$$
$$\Gamma_\mu(x) = ([\gamma^\nu(x), \partial_\mu\gamma_\nu(x)] - [\gamma^\nu(x), \gamma_\sigma(x)]\Gamma^\sigma_{\mu\nu})/8$$

V – virbein, **γ** – релятивистские гамма-матрицы

$\boldsymbol{I_M}$ имеет дополнительную симметрию: **локальная конформная инвариантность**

$$\psi(x) \to e^{-3\alpha(x)/2}\psi(x),\ V_\mu^a(x) \to e^{\alpha(x)}V_\mu^a(x)$$
$$g_{\mu\nu}(x) \ \to\ e^{2\alpha(x)}g_{\mu\nu}(x)$$

$\Gamma_\mu(x)$: локальная координатная инвариантность, следовательно, переходит в локальную - конформная инвариантность

Требование инвариантности кинетической энергии относительно комплексных фазовых преобразований

$$\psi(x) \to e^{-3\alpha(x)/2+i\beta(x)}\psi(x)$$

Приводит к

$$I_{\mathrm{M}} = -\int d^4x(-g)^{1/2}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(x)[i\partial_{\mu} + i\Gamma_{\mu}(x) + A_{\mu}(x)]\psi(x)$$

Логарифмически расходящаяся часть

$$\int D\bar{\psi}D\psi \exp(iI_{\mathrm{M}})$$

После размерной регуляции

$$I_{\mathrm{EFF}} = \int d^4x(-g)^{1/2}C\left[\frac{1}{20}[R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2] + \frac{1}{3}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$

Итак:

$$I_{\mathrm{EFF}} = \int d^4x(-g)^{1/2}C\left[\frac{1}{20}[R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2] + \frac{1}{3}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$

Это не что иное, как

$$I_w=\alpha_g\int d^4x(-g)^{1/2}C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Кроме прочего, инвариантно относительно

$$g_{\mu\nu}(x) \to e^{2\alpha(x)}g_{\mu\nu}(x)$$

Так как $\boldsymbol{\alpha_g}$ – безразмерная константа ==> модель <u>перенормируема</u>!
Уравнения поля 4-го порядка ==> модель неунитарна.

В 2008м году нашли, что унитарности можно добиться. Напомню, что тензор Вейля был уже известен между I и II Мировыми войнами.
$\mathbf{I_w}$ **– замена** неперенормируемого действия Эйнштейна-Гильберта.

Добавляем массовый параметр **M(x)** и возвращаемся к действию для фермионов:

$$I_{\mathrm{M}} = -\int d^4x(-g)^{1/2}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}(x)[i\partial_{\mu} + i\Gamma_{\mu}(x) + A_{\mu}(x) + M(x)]\psi(x).$$

Проделав аналогичную процедуру с расходящейся частью:

$$I_{\mathrm{MF}} = \int d^4x(-g)^{1/2}C\left[-M^4(x) + \frac{1}{6}M^2(x)R^{\alpha}{}_{\alpha} - g_{\mu\nu}\partial^{\mu}M(x)\partial^{\nu}M(x)\right]$$

==>

$$I_{\mathrm{MF}} = \int d^4x(-g)^{1/2}C\Big[-M^4(x) + \frac{1}{6}M^2(x)R^{\alpha}{}_{\alpha} - g_{\mu\nu}(\partial^{\mu} + iA^{\mu}(x))M(x)(\partial^{\nu} - iA^{\nu}(x))M(x)\Big].$$

Соображение: если принять, что все шкалы масс и длин возникают из динамики, единственно возможным решением будет *плоское пространство*.
Необходим внешний источник!

Волновое уравнение:

$$\rightarrow \qquad k_0^2 = \bar{k}^2 \qquad\qquad k_0^2 = \bar{k}^2 + m^2/\hbar^2$$

В конформной гравитации необходимо раскладывать метрику в ряд по постоянной Планка, а не по гравитационной постоянной, следовательно, нельзя работать в пустом пространстве

$$T^{\mu\nu}_{GRAV} = 0 \qquad T^{\mu\nu}_{\mathrm{UNIV}} = T^{\mu\nu}_{\mathrm{GRAV}} + T^{\mu\nu}_{\mathrm{M}} = 0.$$

→

Унитарность

Линеаризуем усложнённую версию тензора Эйнштейна

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta} + R^{\mu\nu;\beta}{}_{;\beta} - R^{\mu\beta;\nu}{}_{;\beta} - R^{\nu\beta;\mu}{}_{;\beta} - 2R^{\mu\beta}R^{\nu}{}_{\beta}$$
$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{2}{3}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\beta}{}_{;\beta}$$
$$+\frac{2}{3}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^{;\mu;\nu} + \frac{2}{3}R^{\alpha}{}_{\alpha}R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}{}_{\alpha})^2$$

вокруг плоского фона:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

При этом $\mathbf{W}^{\mu\nu}$ зависит от бесследовой

$$K^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - (1/4)\eta^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$$

В калибровке

$$\partial_\mu K^{\mu\nu} = 0$$

в первом порядке:

$$W^{\mu\nu}(1) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \partial^\alpha)^2 K^{\mu\nu}$$

Ввиду отсутствия смешивания компонент $K^{\mu\nu}$ можно использовать унитарность и работать с однокомпонентной теорией.

==> $W^{\mu\nu}(1) = 0$

Этот класс теорий описывается действием:

$$I_{\mathrm{S}} = -\frac{1}{2}\int d^4x \left[\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + (M_1^2 + M_2^2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + M_1^2 M_2^2\phi^2\right].$$

Уравнение поля:

$$(-\partial_t^2 + \bar{\nabla}^2 - M_1^2)(-\partial_t^2 + \bar{\nabla}^2 - M_2^2)\phi(x) = 0$$

Пропагатор:

$$D(k, M_1, M_2) = \frac{1}{(M_2^2 - M_1^2)}\left(\frac{1}{k^2 + M_1^2} - \frac{1}{k^2 + M_2^2}\right)$$

Тензор энергии-импульса (компонента (0, 0)):

$$\begin{aligned} &T_{00}(M_1, M_2) \\ &= \pi_0\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left[\pi_{00}^2 + (M_1^2 + M_2^2)(\dot{\phi}^2 - \partial_i\phi\partial^i\phi) - M_1^2 M_2^2\phi^2 - \pi_{ij}\pi^{ij}\right] \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} - \partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\lambda}}\right) = -(M_1^2 + M_2^2)\partial^\mu\phi + \partial_\lambda\partial^\mu\partial^\lambda\phi, \\ \pi^{\mu\lambda} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu,\lambda}} = -\partial^\mu\partial^\lambda\phi. \end{aligned}$$

$$T_{00}(M_1, M_2) \sim (-M_1^2 M_2^2 \phi^2)$$

Выбор контура $\mathbf{k^0}$ интегрированная по Фейнману:
положительные моды – перёд по времени, отрицательные – назад
==> в некоторых полюсах вычеты отрицательны
==> невозможность определения метрики в Гильбертовом пространстве

При выборе альтернативного контура, где все вычеты в полюсах положительны ==> часть отрицательных мод пойдёт вперёд по времени.

При квантовании со стандартной дираковской нормой:

$$T_{00}(M_1, M_2) \sim (- M_1^2 M_2^2 \phi^2)$$

Следовательно, спектр собственных значений не ограничен снизу!
Следовательно, теория не физическая

Выбор собственных значений для

$$H = \int d^3x T_{00}(M_1, M_2)$$

в том секторе, где спектр собственных значений ограничен снизу.

Следовательно, волновые функции можно нормализовать на действительной оси. Гамильтониан не эрмитов.

Волновые функции можно нормализовать на мнимой оси. Следовательно, поле ф антиэрмитово, следовательно, член $(- M_1^2 M_2^2 \phi^2)$ ограничен снизу, и интеграл по траекториям существует только при мнимом поле ф.

Гамильтониан не эрмитов, соответственно собственные значения не обязаны быть действительными.
Условие:

Эрмитовость гамильтониана → действительные собственные значения – достаточное, а не необходимое!

В 2008 найдено необходимое условие действительности собственных значений: PT – симметрия гамильтониана, при этом:

- P – линейный оператор,
- T – антилинейный.

Теорема:

H-PT инвариантен ➔ **|H-λI| = 0** – действительное.

CPT норма для PT теорий, поэтому для неэрмитова гамильтониана с действительным спектром собственных значений:

$$VHV^{-1} = H^\dagger$$

Если R – действительный правый единичный вектор

$$H|R\rangle = E|R\rangle \rightarrow$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\langle R|H^\dagger = \langle R|E$ ➔ нет левого

– левый $\langle L| = \langle R|V$ единичный вектор, если $\langle L|H = \langle L|E.$

Тогда имеется норма

$$\langle L|R\rangle = \langle R|V|R\rangle$$

и есть унитарная эволюция

$$\langle L(t)|R(t)\rangle = \langle L(t=0)|e^{iHt}e^{-iHt}|R(t=0)\rangle =$$

$$= \langle L(t=0)|R(t=0)\rangle.$$

При применении к пропагатору 4-го порядка нет неопределённости метрики. Причем левый вакуум – не сопряжённый правому!

Ссылки:

1. Статья «Black Hole Evolution Traced Out with Loop Quantum Gravity» → https://physics.aps.org/articles/v11/127
2. Статья «Rainbow-Like Black-Hole Metric from Loop Quantum gravity» → https://arxiv.org/pdf/1812.02136.pdf
3. Статья «Polymer Schwarzschild black hole: An effective metric» → https://arxiv.org/pdf/1803.01152.pdf
4. Статья «Effective line elements and black-hole models in canonical (loop) quantum gravity» → https://arxiv.org/pdf/1803.01119.pdf
5. Статья «Making the Case for Conformal Gravity» → https://arxiv.org/pdf/1101.2186.pdf

Лекция 9. Комформная гравитация (Часть II). Лоренц-инвариантная массивная гравитация

Литература:

- *Making the Case for Conformal Grabity*, Philip D. Mannheim
- *Recent advancements in conformal gravity*, James G., O'Brien, Spasen S. Chaykov, Jeremy Dentico, Modestas Stulge, Brian Stefanski and Robert J. Moss
- *From Conformal to Einstein gravity*, Giorgos Anastasiou, and Rodrigo Olea
- *Testing conformal gravity with astrophysical black holes*, Cosimo Bambi, Zheng Cao, and Leonardo Modesto
- *A Class of Elementary Particle Models Without Any Adjustable Real Parameters*, Gerard't Hooft

Вспомним основные формулы конформной гравитации.
Действие:

$$I_{UNIV} = I_W + I_M$$
$$= -\alpha_g \int d^4x \sqrt{-g} C_{\lambda\mu\nu\kappa} C^{\lambda\mu\nu\kappa} + I_M$$
$$= -2\alpha_g \int d^4x \sqrt{-g} \left[R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (R^\alpha_\alpha)^2 \right] + I_M$$

Уравнение поля:

$$-4\alpha_g W^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_M = 0$$

Где

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^{;\beta}_{;\beta} + R^{\mu\nu;\beta}_{;\beta} - R^{\mu\beta;\nu}_{;\beta} - R^{\nu\beta;\mu}_{;\beta} - 2R^{\mu\beta} R^\nu_\beta + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} g^{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^{;\mu;\nu}$$
$$+ \frac{2}{3} R^\alpha_\alpha R^{\mu\nu} - \frac{1}{6} g^{\mu\nu} (R^\alpha_\alpha)^2,$$

Нельзя работать в пустом пространстве:

$$T^{\mu\nu}_{UNIV} = T^{\mu\nu}_{GRAV} + T^{\mu\nu}_M = 0$$

Космологическая постоянная в D =2

Рассмотрим проблему космологической постоянной в D = 2. Для генерации масс фермионов меняем вакуумное состояние:

с нормального $\langle N|\bar{\psi}\psi|N\rangle = 0$
на спонтанное нарушенное $\langle S|\bar{\psi}\psi|S\rangle \neq 0$

$$T^{\mu\nu}_{UNIV} = T^{\mu\nu}_{GRAV} + T^{\mu\nu}_{M} = 0 \text{ должно работать}$$

Вводим для плоского пространства:

$$I_M = -\int d^2x[i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \left(\frac{g}{2}\right)(\bar{\psi}\psi)^2]$$

Где $T^{\mu\nu}_M = i\hbar\bar{\psi}\gamma^{\breve{\mu}}\partial^\nu\psi - \eta^{\mu\nu}(\frac{g}{2})(\bar{\psi}\psi)^2$ бесследовый

Ищем самосогласованное состояние, где $\langle S|\bar{\psi}\psi|S\rangle = \frac{im}{g}$ и $\left\langle S\left|\left(\bar{\psi}\psi - \frac{im}{g}\right)^2\right|S\right\rangle = 0$

Следовательно, уравнение движения $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - im\psi = 0$

Тогда $\langle S|T^{\mu\nu}_{MF}|S\rangle = \langle S|i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi|S\rangle + \frac{m^2}{2g}\eta^{\mu\nu}$
Подставляя

$$k^\mu = (\omega_k, k) \text{ где } \omega_k = \left(k^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Получим

$$\langle S|i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi|S\rangle = -\frac{\hbar}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{k^\mu k^\nu}{\omega_k}$$

Вычислив

$$\rho_{MF} = -\frac{\hbar}{2\pi}\left[K^2 + \frac{m^2}{2\hbar} + \frac{m^2}{2\hbar}\ln(\frac{4\hbar^2K^2}{m^2})\right]$$

$$p_{MF} = -\frac{\hbar}{2\pi}\left[K^2 + \frac{m^2}{2\hbar} + \frac{m^2}{2\hbar}\ln(\frac{4\hbar^2K^2}{m^2})\right]$$

Последний член в [] можно интерпретировать как космологическую постоянную

$$\Lambda_{MF} = \frac{m^2}{4\pi\hbar}\ln(\frac{4\hbar^2K^2}{m^2})$$

Подставим:

$$\langle S|T^{\mu\nu}_{MF}|S\rangle = (\rho_{MF} + p_{MF})U^\mu U^\nu + p_{MF}\eta^{\mu\nu} - \Lambda_{MF}\eta^{\mu\nu}$$

Так как этот тензор бесследовый, $p_{MF} - \rho_{MF} - 2\Lambda_{MF} = 0$ при D =2.

Рассмотрим теперь четырехмерное пространство-время.
При D=4 четырехчастичная

$$\epsilon(m,4F) = -\frac{\hbar}{4\pi^2}\left(K^4 + \frac{m^2K^2}{\hbar^2} - \frac{m^4}{4\hbar^4}ln\left(\frac{4\hbar^2K^2}{m^2}\right) + \frac{m^4}{8\hbar^4}\right)$$

Перейдет в

$$\epsilon(m) = \frac{i}{\hbar}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}TrLn\left[\gamma^\mu p_\mu - m\left(-\frac{p^2}{M^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + i\epsilon\right]$$
$$= -\frac{\hbar K^4}{4\pi^2} + \frac{m^2M^2}{16\pi^2\hbar^3}\left[ln\left(\frac{m^2M^2}{16\hbar^4K^4}\right) - 1\right]$$

При $M^4 = 16\hbar^4K^4\exp(\frac{8\pi^2\hbar^3}{M^2g})$ энергия перейдет в

$$\epsilon(m) - \frac{m^2}{2g} = \frac{\hbar\ K^4}{4\pi^2} + \frac{m^2M^2}{16\pi^2\hbar^3}\left[ln\left(\frac{m^2}{M^2}\right) - 1\right]$$

Максимум при m=0, минимум при m=$\pm M$
В минимуме

$$\epsilon(M) - \frac{M^2}{2g} = \frac{\hbar\ K^4}{4\pi^2} - \frac{M^4}{16\pi^2\hbar^3}$$

При m=M

$$\epsilon(M) - \frac{M^2}{2g} = -\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk^3\left[\left(k^2 + \frac{M^2}{\hbar^2}\right)^{1/2} - \frac{M^2}{4\hbar^2(k^2 + M^2/\hbar^2)^{\frac{1}{2}}} + (k^2 - \frac{M^2}{\hbar^2})^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left. + M^2/4\hbar^2(k^2 + M^2/\hbar^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Дополнительный вклад во все величины, то есть это и есть космологическая постоянная.

Темная материя

Ввиду перенормируемости число квантов устремим к бесконечности, получим микроскопическое описание.

Берем стандартную сферически симметричную метрику:

$$ds^2 = -B(r)dt62 + \frac{dr^2}{B(r)} + R^2 d\Omega_2$$

Уравнение поля четвертого порядка

$$\frac{3}{B(r)}(W_0^0 - W_r^r) = \nabla^4 B == B'''' + \frac{4B'''}{r} = \frac{(rB)''''}{r} = 3/4\alpha_g B(r)(T_0^0 - T_r^r) \equiv f(r)$$

Где

$$2\beta = \frac{1}{6}\int_0^{r_0} dr' r'^4 f(r'), \quad \gamma = -\frac{1}{2}\int_0^{r_0} dr' r'^2 f(r')$$

так как метрика Шварцшильда экспериментально доказана.

Тогда гравитационный потенциал

$$V^*(r) = -\frac{\beta c^2}{r} + \frac{\gamma^* c^2 r}{2}$$

В ОТО:

$$\nabla^2 \phi(r) = g(r)$$

Следовательно,

$$\phi(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r dr' r'^2 g(r') - \int_r^\infty dr' r' g(r'), \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 g(r')$$

То есть у нас появилась добавка к гравитационному потенциалу, с помощью которой можно интерпретировать кривые вращения вдали от центра галактик, следовательно мы можем выйти на плато.

То есть теория локальна, что означает локализацию темной материи.

В конформной гравитации, определив

$$f(r) = \nabla^4 B(r)$$
$$h(r) = \frac{c^2 f(r)}{2}$$

Получим уравнение поля четвертого порядка:

$$\nabla^4 \phi(r) = h(r)$$

Общее решение:

$$(r) = -\frac{r}{2}\int_0^r dr' r'^2 h(r') - \frac{1}{6r}\int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{1}{2}\int_r^\infty dr' r'^3 h(r') - \frac{r^2}{6}\int_r^\infty dr' r' h(r'),$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{1}{2}\int_0^r dr' r'^2 h(r') + 1/6r^2\int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{r}{3}\int_r^\infty dr' r' h(r')$$

На потенциал влияет общее распределение материи во Вселенной, то есть естественным образом действует принцип Маха, что означает, что конформная гравитация глобальна.

Следовательно, фоновая метрика будет не плоская, как в стандартной версии, а FRW. В любой модели в качестве фона висит расширение Вселенной. Можно подобрать параметры фоновой FRW так, чтобы метрика описывала темную материю.

Для этого сделаем преобразование

$$\rho = \frac{4r}{2(1+\gamma_0 r)^{1/2} + 2 + \gamma_0 r}, \;\; \tau = \int dt R(t)$$

И приведем к виду:

$$-(1+\gamma_0 r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1+\gamma_0 r} + r^2 d\Omega_2$$
$$= \frac{1}{R^2(\tau)}\left(\frac{1+\frac{\gamma_0\rho}{4}}{1-\frac{\gamma_0\rho}{4}}\right)^2\left[-c^2 d\tau^2 + \frac{R^2(\tau)}{\left[1-1-\frac{\gamma_0^2\rho^2}{16}\right]}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2)\right]$$

Метрика конформна открытой FRW с кривизной $K = -\frac{\gamma_0^2}{4}$
При этом $W^{\mu\nu} \to 0$ и в пределе слабого поля:

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} = \frac{v_{LOC}^2}{R} + \frac{\gamma_0 c^2}{2}$$

Используя астрономические данные

$$\gamma^* = 5.42 \times 10^{-41} cm^{-1}, \;\; \gamma_0 = 3.06 \times 10^{-30} cm^{-1}$$

Учитываем поправки от неоднородностей. На масштабах галактик добавляется еще один член:

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} = \frac{v_{LOC}^2}{R} + \frac{\gamma_0 c^2}{2} - \kappa c^2 R$$

С асимптотикой

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} \to \frac{N^* \beta^* c^2}{R^2} + \frac{N^* \gamma^* c^2}{R^2} + \frac{\gamma_0 c^2}{2} - \kappa c^2 R$$

Где

$$\kappa = (\frac{1}{3c^2}) \int_{r_{claus}}^{\infty} dr' r' h(r')$$

Из астрономии:

$$\kappa = 9.54 \times 10^{-54} cm^{-2} \approx (100 Mpc)^{-2}$$

Фактически мы получили еще одну версию MOND.

Связь ОТО с конформной гравитацией

Т'Хофт предложил в своей статье 2011 г. рассматривать конформный фактор как независимую степень свободы.

Производится конформное преобразование

$$g_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x) \hat{g}_{\mu\nu}(x)$$

Действия Эйнштейна-Гильберта, не являющегося конформно-инвариантным, чтобы получить:

$$I_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\omega^2 \hat{R}_\alpha^\alpha - 6 \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right)$$

Где все определяется $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$

При переходе к интегралу по траекториям вместо меры $Dg_{\mu\nu}$ берется

$$D\omega D\left(\frac{g_{\mu\nu}}{\omega^2}\right) = D\omega D\hat{g}_{\mu\nu}$$

В результате получим действие конформной гравитации:

$$I_{EFF} = \frac{C}{120}\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\hat{R}^{\alpha}_{\alpha}\right)^2\right]$$

Это означает, что работает принцип дополнительности. В нормальном состоянии мы работаем с ОТО, но, если нам нужно выйти на глобальные масштабы и объяснить космологические неоднородности, мы должны переходить к более сложным уравнениям поля.

- Отказ от темной материи требует очень жесткой точной подстройки всех параметров.
- Термодинамика черных дыр имеет дополнительные степени свободы.
- Конформную гравитацию можно рассматривать в качестве базиса МОНД.
- ОТО + космологическая постоянна <- конформная гравитация.
- Совместимость с данными по Керровским черным дырам.

Проблемы космологической постоянной

Литература:

- *Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитрон*, В.А. Рубаков, П.Г. Тиняков

$$\epsilon_\Lambda \approx 0.75\rho_c \approx 4\times 10^{-6}\ \text{ГэВ см}^{-3}$$

$$\epsilon_\Lambda \approx 10^{-46}\epsilon_{CDQ} \approx 10^{-54}\epsilon_{EW} \approx 10^{-123}\epsilon_{grav}$$

Космологическая постоянная лежит далеко от любого другого взаимодействия, то есть космологическую постоянную надо объявлять пятой силой, так как к обычным ее свести не получается.

Почему $\epsilon_\Lambda \approx 0$, но $\epsilon_\Lambda \neq 0$
ϵ_Λ - истинная космологическая постоянная, значение определяется из антропного принципа.
Вселенная много больше видимой части, в каждой из них своя ϵ_Λ.

Объяснения космологической постоянной:

- Новая физика при низких энергиях (ИК)

- Модели квинтэссенции: скалярное поле вместо космологической постоянной. За счет этого можно добиться изменения законов гравитации на сверхбольших (космоогических) масштабах.
- Модели «мир на бране» - среди возмущений имеются «духи»
- QCD (квантовую хромодинамику) можно сформулировать в терминах теории струн. В GR (ОТО) есть безмассовое состояние со спином 2, в QCD его нет.

Соответственно, задача: убрать это состояние из струнной теории, введя массу гравитрона.

Модель Фирца-Паули. Лоренц-инвариантная массивная гравитация.

Введя массу гравитрона, мы можем добиться более корректной связи теории относительности и теории струн. Кроме того, можно попытаться с помощью него решить проблему темной энергии.

Еще один возможный подход: взаимодействие ОТО с безмассовыми полями. Как только безмассовое поле получает фоновое значение, зависящее от метрики, нарушается общая ковариантность. Следовательно, включается механизм Хиггса, и гравитрон приобретает массу.

Общие требования:

- Метрика Минковского должна быть фоновой метрикой (решением уравнения Эйнштейна)
- На фоне Минковского нет лёгких полей за исключением возмущений метрики
- На этом фоне Лоренц-инвариантность не нарушена

Модель Фирца-Паули — это Лоренц-инвариантная массивная гравитация на фоне пространства Минковского, то есть ОТО + наиболее общий массивный член.

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ параметризация метрики

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\lambda}h^{\nu}_{\lambda},$$

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2}h^{\mu}_{\mu} + \frac{1}{8}h^{\mu}_{\mu}h^{\lambda}_{\lambda} - \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

В квадратичном порядке общий вид действия:

$$S = M_{Pl}^2 \int d^4x \left\{ L_{EH}^2\left(h_{\mu\nu}\right) + \frac{\alpha}{4}h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \frac{\beta}{4}\left(h^{\mu}_{\mu}\right)^2 \right\}$$

$$L_{EH}^2 = \frac{1}{4}\left[\partial_\lambda h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\mu\nu} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_\nu^\lambda + 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\nu h_\lambda^\lambda - \partial_\mu h_\nu^\nu \partial^\mu h_\lambda^\lambda\right]$$

Используем (3+1) разложение возмущения метрики:

$$h_{00} = 2\varphi,$$

$$h_{0i} = S_i + \partial_i B$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{TT}\partial_i F_j - \partial_j F_i - 2(\psi\delta_{ij} - \partial_i\partial_j E)$$

h_{ij}^{TT} - поперечный бесследовый 3-тензор

$$\partial^i h_{ij}^{TT} = 0, \qquad h_{ii}^{TT} = 0$$

S_i и F_i - поперечные 3-векторы: $\partial^i S_i = \partial^i F_i = 0$

Тензорная, векторная и скалярные части соответственно:

$$L_{EH}^{(2)} = L_{EH}^{(T)} + L_{EH}^{(V)} + L_{EH}^{(S)}$$

Разложение массовых членов будет аналогично:

$$L_m = \frac{\alpha}{4}h_{ij}^{(TT)}h_{ij}^{(TT)} + \frac{\alpha}{2}\left(\partial_i F_j \partial_i F_j - S_i S_i\right) + [(\alpha+\beta)\varphi^2 + 2\beta(3\psi - \Delta E)\varphi +](\alpha+\beta)(\Delta E)^2 - 2((\alpha+3\beta)\psi\Delta E + 3(\alpha+3\beta)\psi^2 + \frac{\alpha}{2}B\Delta B]$$

Так как в ОТО распространяются только гравитационные волны, их удобно параметризовать поперечными бесследовым тензором $h_{\mu\nu}^{(TT)}$.
Тогда калибровочная свобода ОТО:

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu\zeta_\nu(x) + \partial_\nu\zeta_\mu(x)$$

При добавлении массового члена калибровочная инвариантность будет нарушена, следовательно, появляются новые степени свободы. Безмассовый гравитрон со спином 2 превращается в массивную частицу со спином 2. Гравитрон имеет 2 поляризации, а массивная частица спина 2 -5 со спиральностями $\pm 2, \pm 1, 0$.
На языке (3+1) разложения это 2 тензорные моды, 2 векторные и 1 скалярная.

В тензорном секторе 2 моды приобретают массу:

$$L_{EH}^{(T)} = \frac{1}{4}(\partial_0 h_{ij}^{TT}\partial_0 h_{ij}^{TT} - \partial_k h_{ij}^{TT}\partial_k h_{ij}^{TT}),$$
$$L_{EH}^{(V)} = \frac{1}{2}\partial_k(S_i + \partial_0 F_i)\partial_k(S_i + \partial_0 F_i),$$

$$L_{EH}^{(S)} = 2[\partial_k\psi\partial_k\psi - 3\partial_0\psi\partial_0\psi + 2\partial_k(\varphi - \partial_0 B + \partial_0^2 E)\partial_k\psi].$$

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu\zeta_\nu(x) + \partial_\nu\zeta_\mu(x)$$

$m_G^2 = -\alpha,\ \alpha < 0$ - избегаем тахионов

$(\Delta - m_G^2)S_i = -\Delta\partial_0 F_i$ - уравнение в векторном секторе

До добавления массивного члена F_i - произвольное поле, что является следствием калибровочной свободы. При наличии массовых членов F_i - динамическое поле с лагранжианом:

$$L_F = \frac{m_G^2}{2}\left[\frac{p^2}{p^2 + m_G^2}\partial_0 F_i^*(p)\partial_0 F_i(p) - p^2 F_i^*(p)\, F_i(p)\right]$$

Вводим канонически нормированное поле:

$$\mathcal{F}_i(p) = M_{Pl} m_G \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + m_G^2}}\, F_i(p)$$

Выводим линеаризованное действие:

$$S_{\mathcal{F}} = \int d^3p \frac{1}{2}[\partial_0\mathcal{F}_i^*\partial_0\mathcal{F}_i - (p^2 + m_G^2)\mathcal{F}_i^*\mathcal{F}_i]$$

В нем действительно есть 2 степени свободы.
Скалярный сектор, общий случай: $\alpha \neq 0, \alpha \neq -\beta, \alpha \neq -2\beta$

$$L^{(S)} = 2\left[-2\varphi\Delta\psi - 2\dot{\psi}\Delta B + 2\dot{\psi}\Delta\dot{E} - 3\dot{\psi}^2 - \psi\Delta\psi + \frac{\alpha+\beta}{2}\varphi^2 + \beta(3\psi - \Delta E)\varphi \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha+\beta}{2}(\Delta E)^2 - (\alpha + 3\beta)\psi\Delta E + \frac{3(\alpha+3\beta)}{2}\psi^2 B\Delta B\right]$$

В ОТО $\alpha = \beta = 0,\ \ \psi = 0,\ \ B, E -$ произвольны

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В массивном случае:

$$L^{(S)} = L_B + L_\varphi + \left[2\dot{\psi}\Delta\dot{E} - 3\dot{\psi}^2 - \psi\Delta\psi + \frac{\alpha+\beta}{2}(\Delta E)^2 - (\alpha+3\beta)\psi\Delta E + \frac{3(\alpha+3\beta)}{2}\psi^2\right]$$

ψ и E - динамические, следовательно 2 степени свободы, причем вторая степень - «дух»
(так как «-» перед кинетическим членом).

Чтобы увидеть явно, выделяем члены с производной по времени. A, B - коэффициенты, зависящие от импульса

$$L_{kin} = \frac{A}{2}(\partial_t\psi)^2 + B(\partial_t\psi)(\partial_t E) = \frac{A}{2}\left(\partial_t\psi + \frac{B}{A}\partial_t E\right)^2 - \frac{B^2}{2A}(\partial_t E)^2$$

Особый случай: точная теория Фирца-Паули
$\beta = -\alpha = m_G^2$ связь имеет вид $\Delta E = 3\psi - \frac{2}{\beta}\Delta\psi$
Остается 1 степень свободы с «правильным» знаком

$$L_{kin,\psi} = 6\dot{\psi}^2$$

Формализм Штюкельберга

Идея: добавить в массивную гравитацию с нарушенной калибровкой дополнительные поля так, чтобы восстановить калибровочную инвариантность, а потом заново зафиксировать калибровку.

Добавление в теорию массивного члена изменяет гравитационное взаимодействие как между массивными телами, так и массивным телом со светом. Следовательно, предсказание отклонения луча света отличается от ОТО даже в пределе $m_G \to 0$. Это явление получило название явление Ван Дама-Вельтмана-Захарова, то есть линеаризованная теория Фирца-Паули не переходит в линеаризованную ОТО при $m_G \to 0$.

Появление радиуса Шварцшильда как параметра разложения в ОТО:

Квадратичное действие $\int d^4x[M_{Pl}^2(\partial h)^2 + Th]$
h- возмущение метрики

Решение: $h = \frac{1}{\partial^2}\frac{T}{M_{Pl}^2} \to h = \frac{M}{M_{Pl}^2 r}$

Нелинейные поправки: $M_{Pl}^2 \int d^4x[h(\partial h)^2]$

Условие малости по сравнению с квадратичным вкладом: $h \ll 1 \rightarrow \frac{M}{M_{Pl}^2 r} \ll 1$, то есть $r \gg r_s$

В модели Фирца-Паули после добавления полей *(9.1)*:

$$\int d^4x \left[M_{Pl}^2 \left(\partial \hat{h}\right)^2 + M_{Pl}^2 m_G^4 (\partial\phi)^2 + T\hat{h} + m_G^2 T\phi + \cdots\right] \quad (9.1)$$

Вклад поля имеет тот же порядок, что и гравитационный потенциал h: $m_G^2 \phi = \frac{M}{M_{Pl}^2 r}$
ϕ само по себе велико. Обобщение массового члена:

$$\int d^4x[M_{Pl}^2 m_G^2 (\partial^2\phi)^3]$$

Члены того же порядка идут из нелинейных калибровочных преобразований ОТО:

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x)$$
$$= g_{\mu\nu}(\chi+\zeta) + \partial_\mu \zeta^\lambda g_{\nu\lambda}(\chi+\zeta) + \partial_\nu \zeta^\lambda g_{\mu\lambda}(\chi+\zeta) + \partial_\mu \zeta^\lambda \partial_\nu \zeta^\rho g_{\lambda\rho}(\chi+\zeta)$$

После подстановки $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ во втором порядке:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \zeta^\lambda + \partial_\nu \zeta_\lambda + \partial_\mu \zeta^\lambda + \partial_\nu \zeta^\lambda h_{\mu\lambda}$$

Массовый член получает дополнительный вклад:

$$\int d^4x[M_{Pl}^2 m_G^2 (\partial^2\xi)^3]$$

Линеаризованная теория справедлива, когда вклад третьего члена меньше вклада второго, то есть

$M/M_{Pl}^2 m_G^4 r^5 \ll 1$ - здесь появляется радиус Вайнштейна

Эта формула справедлива только для массивного гравитрона.

В ОТО линейное приближение справедливо на расстояниях, много больших Шварцшильдовского радиуса. В модели Фирца-Паули линейное приближение неприменимо на расстоянии, большем радиуса Вайнштейна *(9.2)*:

$$r_V = \left(\frac{M}{M_{Pl}^2 m_G^4}\right)^{1/5} \quad (9.2)$$

Если масса гравитрона имеет порядок параметра Хаббла (максимально возможный во Вселенной), для Солнца $r_V \approx 100$ кпк

Нарушая Лоренц-инвариантность

Квадратичное действие для возмущений:

$$S^{(2)} = S_{EH}^{(2)} + S_m^{(2)}$$

Массовый лагранжиан:

$$L_m = \frac{1}{4}[m_0^2 h_{00} h_{00} + m_1^2 h_{0i} h_{0i} - m_2^2 h_{ij} h_{ij} + m_3^2 h_{ii} h_{jj} - 2m_4^2 h_{00} h_{ii}]$$

Лагранжиан Фирца-Паули реализуется при $S^{(2)} = 0,\ m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = m_4^2 = m_G^2$

То есть данный лагранжиан является обобщением Лоренца-инвариантной модели Фирца-Паули.

Используем (3+1) разложение. В тензорном секторе массовый член в дополнение к кинетическому:

$$L_{m,T} = -\frac{m_2^2}{4} h_{ij}^{TT} h_{ij}^{TT}$$

Имеются 2 физические тензорные моды с дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 = p^2 + m_G^2$$

$m_G = m_2$ - масса тензорных гравитонов $m_2^2 \geq 0$

В векторном секторе будет следующий дополнительный член:

$$L_{m,V} = \frac{m_1^2}{2} S_i S_i - \frac{m_2^2}{2} \partial_i F_j \partial_i F_j$$

Если $m_1 = 0$, то F=0 - векторных мод нет
Если $m_1 \neq 0$ все аналогично Фирцу-Паули
$m_1^2 \geq 0$ условие отсутствия тахионов

В скалярном поле полный квадратичный лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned} L_S^{(2)} &= 2[\partial_k \psi \partial_k \psi - 3\partial_0 \psi \partial_0 \psi + 2(\partial_k \varphi \partial_k \psi + \partial_k B \partial_0 \partial_k \psi + \partial_0 \Delta E \partial_0 \psi)] \\ &+ \left[\frac{m_0^2}{2}\varphi^2 + \frac{m_1^2}{4}(\partial_i B)^2 + \frac{3(3m_3^2 - m_2^2)}{3}\psi^2 - (3m_3^2 - m_2^2)\psi \Delta E \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}(m_3^2 - m_2^2)(\Delta E)^2 + m_4^2 \varphi (3\psi - \Delta E)\right] \end{aligned}$$

При произвольных массах появляются две моды, одна из них - «дух». «Дух» в общем случае есть всегда.

Рассмотрим частные случаи:

$$m_0 = 0 \rightarrow \ 2\Delta\psi = m_4^2(3\psi - \Delta E)$$

Если $m_1 \neq 0, m_4 \neq 0$ при $\omega^2 \gg m^2, p^2 \gg m^2$ останется

$$L_\psi = 4\left[2\left(\frac{1}{m_4^2} - \frac{1}{m^2}\right)\partial_0 \partial_i \psi \partial_0 \partial_i \psi - \frac{m_2^2 - m_3^2}{m_4^4}(\Delta\psi)^2\right] + \cdots$$

Лагранжиан не имеет явных патологий при $m_1^2 > m_4^2 > 0,\ m_2^2 > m_3^2$

Если $m_1 = 0$, то нет членов со вторыми производными, следовательно, в скалярном и векторном секторах нет гравитонов, только в тензорной моде есть массивные гравитоны.
Если $m_2 = m_3,\ m_4 = 0$,то уравнение поля:

$$2\ddot{\psi} + (3m_3^2 - m_2^2)\psi = 0$$

То есть высокочастотных мод не будет.

Можно провести аналогию с процессом Годстоуна: нарушение Лоренц-инвариантности происходит при приобретении фоновым полем массы, что является спонтанным нарушением Лоренц-инвариантности.

Фоновые поля: $\phi^0 = a\Lambda^2 t \quad \phi^i = b\Lambda^2 x^i$
Λ- параметр размерности массы

Лагранжиан инвариантен относительно трансляций и пространственных вращений:

$$\phi^a(x) \to \phi^a(x) + \lambda^a \quad \phi^i(x) \to \Lambda^i_j \phi^j$$

Рассмотрим скаляры, нарушающие Лоренц-инвариантность. На уровне первых производных $S = S_{EH} + S_\phi$

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\Lambda^4 F(X, V^i, Y^{ij}, Q)$$

Где

$$X = \frac{1}{\Lambda^4} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^0,$$

$$V^i = \frac{1}{\Lambda^4} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^i,$$

$$Y^{ij} = \frac{1}{\Lambda^4} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j,$$

$$Q = \frac{1}{\Lambda^4}\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^i\partial_\lambda\phi^j\partial_\rho\phi^k$$

Тензор энергии-импульса обращается в 0 в пространстве Минковского, следовательно, пространство Минковского-допустимое решение, если

$$-\frac{1}{2}F + \frac{a^2\partial F}{\partial X} = 0$$

$$\frac{1}{2}F\delta_{ij} + \frac{b^2\partial F}{\partial Y^{ij}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial V^i} = 0$$

При $X = a^2,\ Y^{ij} = -b\delta^{ij}, V^i = 0$

Удобно выбрать a=b=1, переопределив поля. Рассматриваемую теорию нужно понимать как эффективную при низких энергиях.
Следовательно, ее можно записать в виде лагранжиана возумещений:

$$L_\pi = (\partial\pi)^2 + \frac{1}{\Lambda}(\partial\pi)^3 + \cdots$$

И найти масштаб УФ обрезания $\Lambda_{UV} < \Lambda$

Включим в рассмотрение гравитацию. Калибровочному преобразованию

$x^\mu \to x^\mu + \zeta^\mu(x)$ соответствует: $\pi^\alpha(x) \to \pi^\alpha(x) + \Lambda^2 + \zeta^\alpha(x)$

$\zeta^\alpha = \Lambda^{-2}\pi^\alpha$- штюкельберговское поле

В унитарной калибровке: $\pi^\alpha = 0: X = 1 - h_{00}, V_{ij} = -1 - h_{ij}$

Квадратичная по $h_{\mu\nu}$ часть содержит массовый член с масштабом $m = \frac{\Lambda^2}{M_{Pl}}$, следовательно, теория с

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\Lambda^4 F(X, V^i, Y^{ij}, Q)$$

Есть массивная гравитация с нарушением Лоренц-инвариантности. Нарушение локализовано только в голдстоуновском секторе.

При произвольной величине F возможны патологии. Их можно избежать, если часть калибровочной симметрии ОТО не нарушена, то есть действие для голдстоуновских полей будет иметь специальный вид.

Пример: остаточная калибровочная симметрия $t \to t + \zeta^0(x^i, t)$ лагранжиан инвариантен при замене $\phi^0 \to \phi^0 + \Xi^0(\phi^i, \phi^0)$. То есть на лагранжиан (массовый член) накладываются дополнительные ограничения.

Минимальная модель с массивным гравитоном

Для обеспечения остаточно калибровочной симметрии $t \to t + \zeta^0(x^i, t) \to m_1 = 0$ достаточно $x^i \to x^i\zeta^i(t)$.
Симметрия голдстоуновского лагранжиана:

$$\phi^i \to \phi^i + \Xi^i(\phi^0)$$

На уровне первых производных - 2 комбинации:

$$X = \Lambda^{-4} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^0 \partial_\nu \phi^0$$

$$W^{ij} = \Lambda^{-4}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^i\left(g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\phi^0\partial_\rho\phi^j\right)/X\right] = Y\hat{}ij - (V^iV^j)/\Lambda^4 X$$

На этом уровне голдстоуновское действие:

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}F(X, W^{ij})$$

Фоновые поля:

$$\phi^0 = a\Lambda^2 t \quad \phi^i = b\Lambda^2 x^i$$

Условие для $T^{\mu\nu} = 0$: $-\frac{1}{2}F + \frac{\partial F}{\partial X} = 0$ $\frac{1}{2}F\delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial Y^{ij}} = 0$ при X = 1, $W^{ij} = -\delta^{ij}$.

Рассмотрим ситуацию без гравитации. Здесь квадратичное действие для возмущений:

$$L_\pi = \frac{a}{2}(\dot{\pi}^0)^2 - \frac{b}{2}(\partial_i\pi^0)^2 + c\dot{\pi}^0\partial_i\pi^i + \frac{d_1}{2}\left(\partial_i\pi^i\right)^2 + \frac{d_2}{2}(\partial_i\pi^j)^{\,2}$$

Поля π^i - нединамические, так как в векторном секторе $\pi^{Ti} = 0$ (π^{Ti} – поперечная часть).

Для продольной компоненты: $\pi^i = const\frac{\partial_i}{\Delta}\dot{\pi}^0 \to \tilde{a}\ddot{\pi}^0 - b\Delta\pi^0 = 0$

Дисперсионное соотношение: $\omega^2 = const\, p^2$

После учета полей в дисперсионном соотношении появляется параметр обрезания:

$$\omega^2 = const\,\Lambda^2 + O(p^2)$$

Благодаря УФ обрезанию в низкоэнергетическом пределе этих мод нет.

Рассмотрим феноменологию. Запишем закон Ньютона в унитарной калибровке:

$$L^{(2)} = L_{EH}^{(2)} + L_m + L_s$$

В тензорном секторе есть только поперечные бесследовые возмущения.
В векторном секторе:

$$-\Delta(S_i + \partial_0 F_i) = -T_{0i},$$

$$\partial_0 \Delta(S_i + \partial_0 F_i) + m_2^2 \Delta F_i = \partial_0 T_{oi}$$

Следовательно, F=0, то есть асимптотика соответствует ОТО.

Рассмотрим космологические решения.

Пространственно-плоские решения:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx_i^2$$

$$\phi^0 = \phi(t), \quad \phi^i = \Lambda^2 x^i$$

$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6M_{Pl}^2}\{\rho_m + 2\Lambda^4 X F_X - \Lambda^4 F\} \equiv \frac{1}{6M_{Pl}^2}\{\rho_m + \rho_1 + \rho_2\}$ - уравнение Фридмана

Полевое уравнение:

$$\partial_t\left(a^3\sqrt{X}F_X\right) = 0$$

Получаются обычные космологические решения, возможны метрики с отрицательным давлением. То есть результат соответствует ОТО с точностью до функций связи.

Теперь рассмотрим черные дыры.
Вне черной дыры:

$$0 = T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}F$$
$$+\frac{2\delta F}{\delta W^{ij}}\left\{\left(\frac{\gamma W^{ij}}{X} + \frac{V^i V^j}{X^2}\right)\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^0 + X^\gamma \partial_\mu\phi^i\partial_\nu\phi^j\right.$$
$$\left.-\frac{V^i}{X}(\partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^j + \partial_\mu\phi^0\partial_\nu\phi^j\right\}$$

Решение: метрика Густава-Пейнлеве, которое можно обратно привести к метрике Шварцшильда.

$$ds^2 = d\tau^2 - \left(dx^i - \frac{R_S^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{3}{2}}}x^i d\tau\right)^2$$

Решения для черных дыр в массивной гравитации имеют волосы, то есть дополнительные скалярные поля!

Необходимо, чтобы теории с массивным гравитоном не противоречили с GW170817. Выживают модели, в которых подавлена модификация закона Ньютона!

Лекция 10. Способы проверки расширенных моделей гравитации на различных пространственно-временных масштабах

Что и где стоит проверять

На масштабах скоплений галактик можно искать объяснения темной энергии, сравнение с ΛCDM. На меньших масштабах, рассматривая тени черных дыр, можно искать отклонения от Общей Теории Относительности. Также отклонения от ОТО можно выявить, рассматривая гравитационно-волновую астрономию и двойные пульсары, которые являются наиболее точными данными в дальнем космосе.
В Солнечной системе логично проверять ньютоновский предел и отклонения от него, так как теория относительности наиболее точным образом проверяется естественным экспериментами на Земле. На большом андронном коллайдере можно наблюдать поведение при энергиях в диапазоне ТэВ и потенциально обнаружить поправки.

Скопления: радиус разворота

Одним из способов проверки модели темной энергии на скоплениях является вычислении радиуса разворота (turnaround radius).
У нас есть наблюдательные данные - сверхновые типа 1А. Соответственно $\Lambda - CDM$ и модели темной энергии — это не наблюдательные данные, а уже интерпретация.

$\Lambda - CDM$ описывает Вселенную на больших космологических масштабах.

Лагранжиан теории относительности в этом случае *(10.1)*:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}(R + \Lambda) \quad (10.1)$$

При локальном рассмотрении Λ не влияет на старшие производные, поэтому ее можно игнорировать.

Для того, чтобы объяснить модели темной энергии строятся скалярно-тензорная гравитация, F(R) гравитация, то есть к основному лагранжиану добавляется хвост поправок (например, поправки по кривизне, модифицирующие поведение на бесконечности). Одним из примеров, который наиболее точно моделирует космологическую постоянную, является *модель А.А. Старобинского с исчезающей космологической постоянной.*

Это модель F(R) гравитации с несколькими параметрами, подбирая которые, можно моделировать поведение космологической постоянной.

$$f(R) = R + \lambda R_0 \left(\left[1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right]^{-n} - 1 \right)$$

Из скопления галактик выбираем те, которые имеют форму, близкую к сферической. Если есть масса, то есть и сила притяжения (обозначена красной буквой F на рис. 10.1). В то же время ускоренное расширение Вселенной можно представить в качестве силы, действующей в обратном направлении - F как *гравитационное отталкивание*. Если в пространстве действует две силы, направленные в противоположных направлениях, то, следовательно, в самой простой модели должна существовать сфера, на которой эти силы уравновесят друг друга. Эта поверхность и получила название *радиус нулевой силы (радиус разворота)*.

Значение радиуса нулевой силы можно вычислить двумя различными независимыми способами:

1) пользуясь методами обычно теории относительности (зная массу центральной части и при сферичности плоскости) или моделями гравитации, которые мы хотим проверить;
2) пользуясь астрономическими данными: данными гравитационного линзирования.

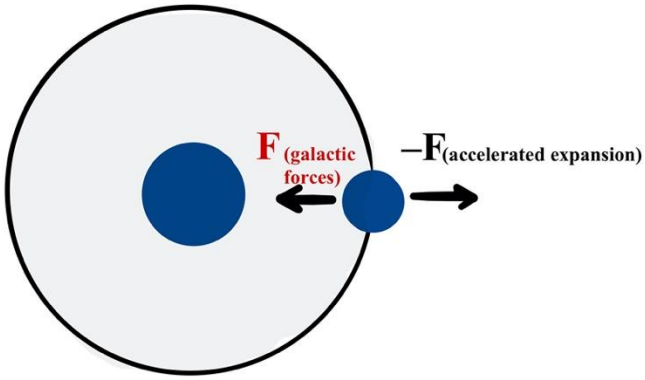


рис. 10.1 радиус разворота

Разберем это на примере модели Старобинского.
Диапазон масс, который стоит проверять в данной модели:

От $10^{11} M_{Sun}(Milky\ Way)$ до $10^{15} M_{sun}(Galaxy\ clusters)$

Фактически наша задача близка к классической задаче гравитации. Разные модели расширенной гравитации будут различаться формами сферически симметричных метрик. Рассмотрим в качестве примера метрику типа Швацшильда:

$$ds^2 = e^A c^2 dy^2 - e^{-A} dr^2 - r^2 d\Omega$$

В качестве первого приближения возьмем $g_{00} = g_{11}^{-1}$.
Выпишем в общем виде полевые уравнения для модели Старобинского:

$$f'(R)R_{ii} - f(R)\frac{g_{ii}}{2} - (\nabla_i^2 - g_{ii}\Box)f'(R) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dr} = a, \\ \dfrac{da}{dr} = e^{-A}\left(R + \dfrac{2}{r^2}\right) - a^2 - \dfrac{4a}{r} - \dfrac{2}{r^2} \\ \dfrac{dR}{dr} = \dfrac{f'(R)R_{00}/g_{00} - f(R)/2}{\left(e^A\left(a + \frac{2}{r}\right) + \frac{a}{2}\right)f''(R)} \end{cases}$$

Далее сюда можно подставить данные модели, которую мы хотим проверить, и вычислить радиус разворота. Важно, что производная гравитационного потенциала на радиусе разворота должна равняться 0:

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{oo} - 1)$$
$$\frac{d\phi}{dr} = 0$$

Таким образом получаем ограничения на нашу модель. Этот метод работает для любой модели расширенной гравитации.

Тени черных дыр: отклонение от ОТО

Тени черной дыры — это то, что видит телескоп. Телескоп не может увидеть черную дыру в чистом виде, потому что всегда будет существовать темная область, из которой поглощаются фотоны. Вокруг этой области светится аккреционный диск, и темная область на этом диске, которую видит телескоп, и называется тенью черной дыры.

Тень черной дыры не обязана по размерам равняться самой черной дыре.

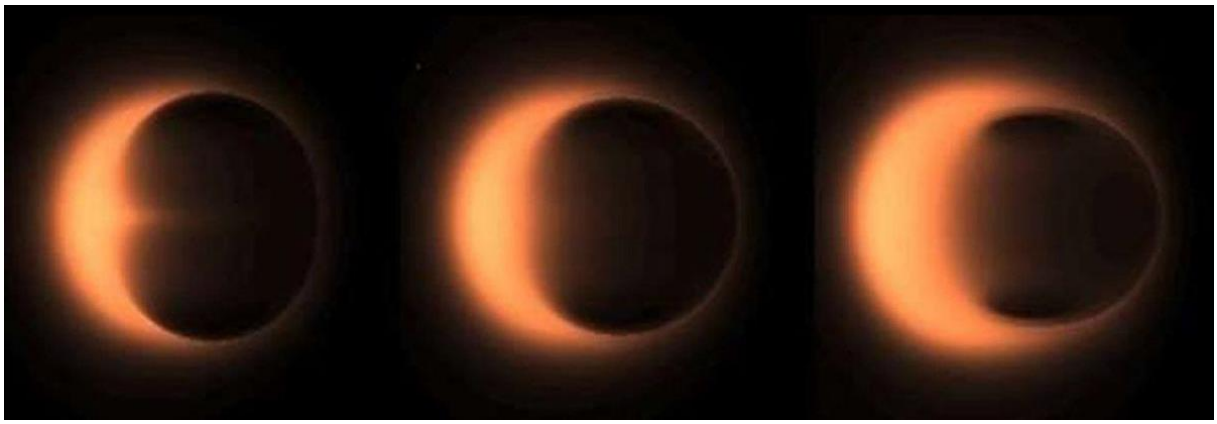


рис. 10.2 снимок горизонта событий. Тени черной дыры.

Размер тени черной дыры Рейсснера-Нордстрена *(10.2)* можно вычислить точно. Так радиус равен:

$$D = \sqrt{\frac{(8q^2-36q+27)+\sqrt{(8q^2-36q+27)^2+64q^2(1-q)}}{2(1-q)}} \quad (10.2)$$

Минимальный радиус тени будет при q = 1 (заряд) и будет равняться D=4.
При q > 1 у объекта нет горизонта событий (голая сингуярность).
При q > 9/8 решения нет: «исчезновение тени».

Можно сделать следующий вывод: в формулу входит метрика, следовательно, возможна обратная задача: по форме тени восстановить метрику и получить тип теории гравитации.

На рис. 10.3 изображены формы тени вращающейся черной дыры Керра. a - момент вращения. При увеличении момента вращения изменяется форма.

Соответственно, чем больше и ближе черная дыра, тем четче ее может увидеть телескоп.

Тени черных дыр ищут с помощью сетей телескопов (рис. 10.4), которые одновременно снимают один и тот же объект. Благодаря возможности синхронизации времени мы можем наблюдать за одним объектом с разных точек земного шара. Кстати, именно из-за этого стала возможна регистрация гравитационных волн. Получается, что эффективным размером телескопа после обработки изображения будет являться не радиус зеркала, а расстояние между телескопами.

Таким образом, используя данные из разных телескопов и обрабатывая их совместно, мы получаем телескоп размером с Землю.

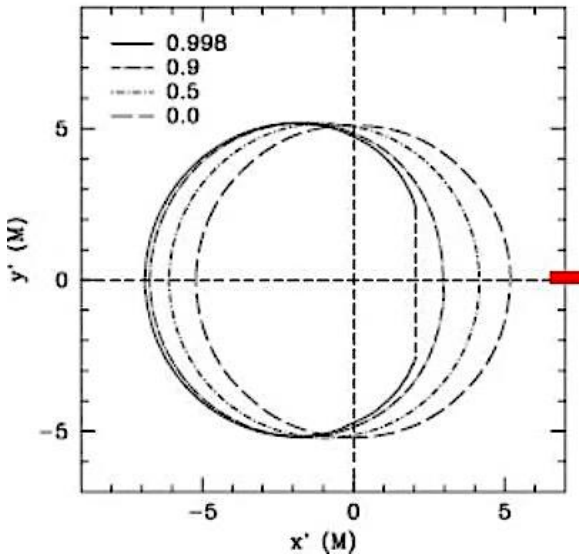


рис. 10.3 форма тени вращающейся черной дыры Керра

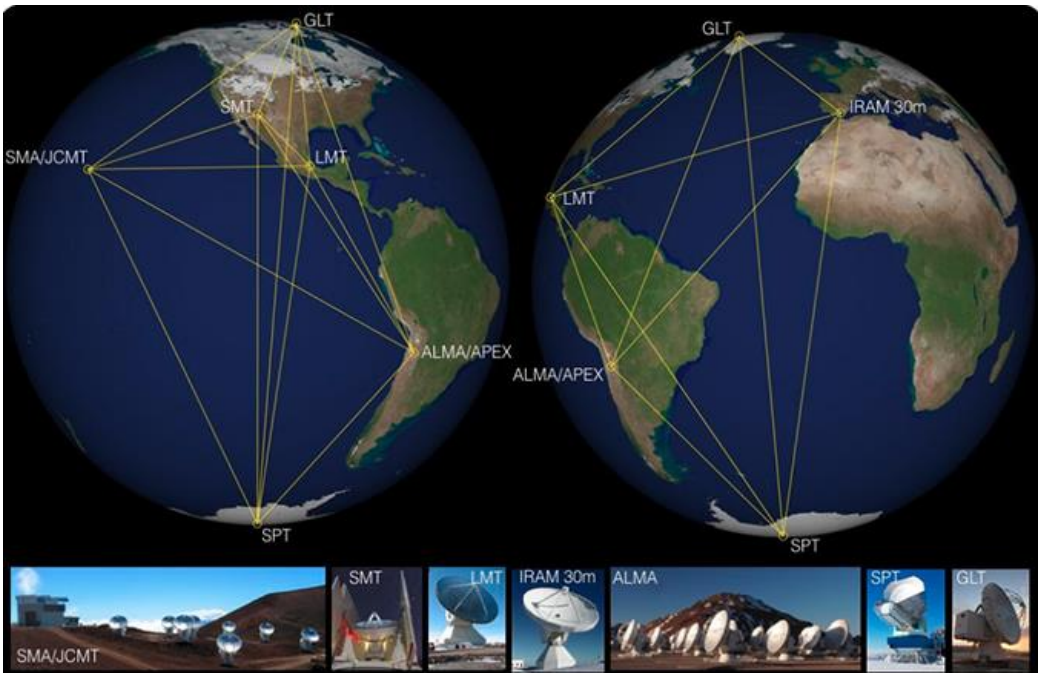


рис. 10.4 сеть телескопов

Сейчас существует 2 основных проекта наблюдения теней черных дыр:

- Event Horizon Telescope
- Black Hole Cam

Первый направлен на изучение сверхмассивной черной дыры в центре галактики - Sag A, а второй на M87.

Рассмотрим ограничения от теней черных дыр для моделей с учетом третьей поправки.
Например, метрика Рейсснера-Нордстрена отождествляется с помощью ряда Тейлора:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}$$

Возможны ситуации, при которых форму тени от черных дыр нельзя объяснить только параметром M, для этого нужно привлекать параметр q. То есть возможны ситуации, в которых при анализе формы теней будет понятно, что необходимо привлечь приливной заряд для объяснения формы теней.

Для выхода за пределы ОТО требуется увеличение точности на 4 порядка. Тень с размером, меньшим 8 M, невозможно описать точной метрикой Керра-Нюмана, поэтому обнаружение тени такого размера покажет необходимость учета следующих членов разложения.

Гравитационно-волновая астрономия: отклонения от ОТО

Еще раз вспомним про знаменательное событие 17 августа 2017 года - GW170817.

Во-первых, стоит отметить, что LIGO и Virgo, находящиеся на разных конца земной шара синхронизировались и наблюдали один и тот же объект, то есть работал эффективный радиус Земли.
Во-вторых, они смогли указать направление, из которого был получен сигнал разных типов излучений. Благодаря этому удалось отождествить объект и измерить разницу во времени между приходом гравитационного сигнала.

Эти данные не зависят от модели, то есть это объективные данные. Вычисляем скорость распространения гравитационных волн:

$$m_{gravitation} < 7.7^{*}10^{-23}\ eV$$

$\left|\frac{c_g}{c} - 1\right| < 4.5^{*}10^{-16}$ - отличие скорости распространения электромагнитных волн от гравитационных меньше, чем 10^{-16}.

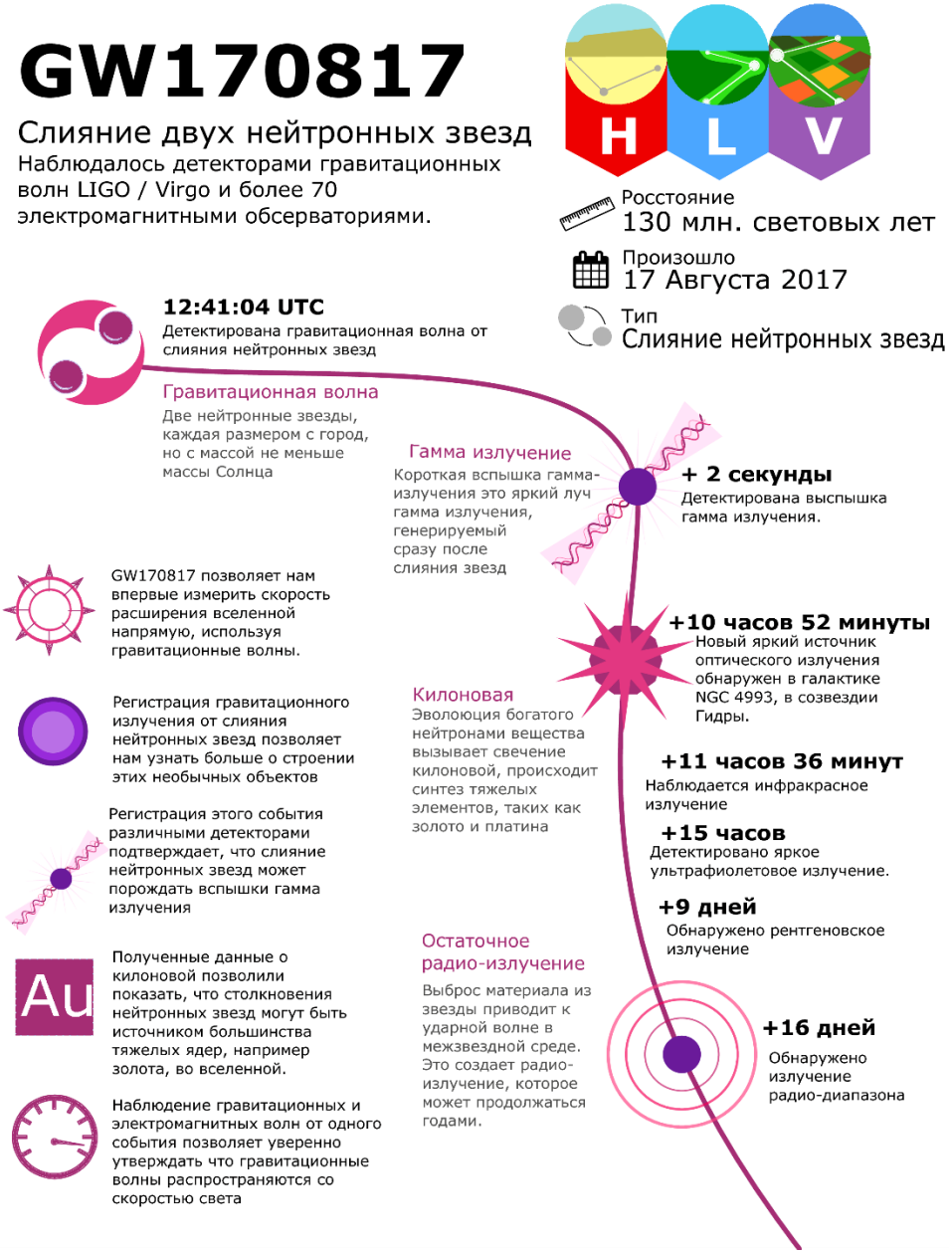


рис. 10.5 слияние двух нейтронных звёзд

В некоторых моделях темная энергия может корректировать скорость распространения гравитационных волн. Измерение соотношения времен прихода гравитационных и электромагнитных волн исключает модели с различными временами прихода гравитационных и электромагнитных волн ($c_g \neq c$) . Тогда появилось разделение моделей (рис. 10.6) на жизнеспособные и нежизнеспособные после GW170817 (рис.10.5).

	$c_g = c$	$c_g \neq c$
Horndeski	General Relativity quintessence/k-essence [46] Brans-Dicke/$f(R)$ [47, 48] Kinetic Gravity Braiding [50]	quartic/quintic Galileons [13, 14] Fab Four [15] de Sitter Horndeski [49] $G_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ [51], $f(\phi)$·Gauss-Bonnet [52]
beyond H.	Derivative Conformal (19) [17] Disformal Tuning (21) quadratic DHOST with $A_1 = 0$	quartic/quintic GLPV [18] quadratic DHOST [20] with $A_1 \neq 0$ cubic DHOST [23]
	Viable after GW170817	Non-viable after GW170817

рис. 10.6 разделение моделей после GW170817

Модели, в которых скорость распространения волн равна скорости света, выжили (Бранс-Дикке, Хорндески). Модели, в которых гравитон массивен изначально и нет безмассовой моды в ведущем порядке, не выживают. Таким образом, это событие стало своеобразным критерием отсева моделей.

Двойные пульсары: отклонения от ОТО

По двойным пульсарам (рис. 10.6) можно искать ограничения на модели расширенной гравитации, потому что ОТО в двойных пульсарах подтверждается с очень высокой точностью.

PSR B1913+16 (также обозначается как J1915+1606) - пульсар, представляющий собой двойную звездную систему, состоящую из звезд примерно одинаковых по массе, около 1,4$M_\odot$. Обнаружен Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в 1974 году при проведении наблюдений на радиотелескопе обсерватории Аресибо. Они были удостоены Нобелевской премии по физике в 1993 году с формулировкой «за открытие нового типа пульсаров, давшее новые возможности в изучении гравитации».

На текущий момент этот пульсар является наиболее точной лаборатории для проверки гравитации.

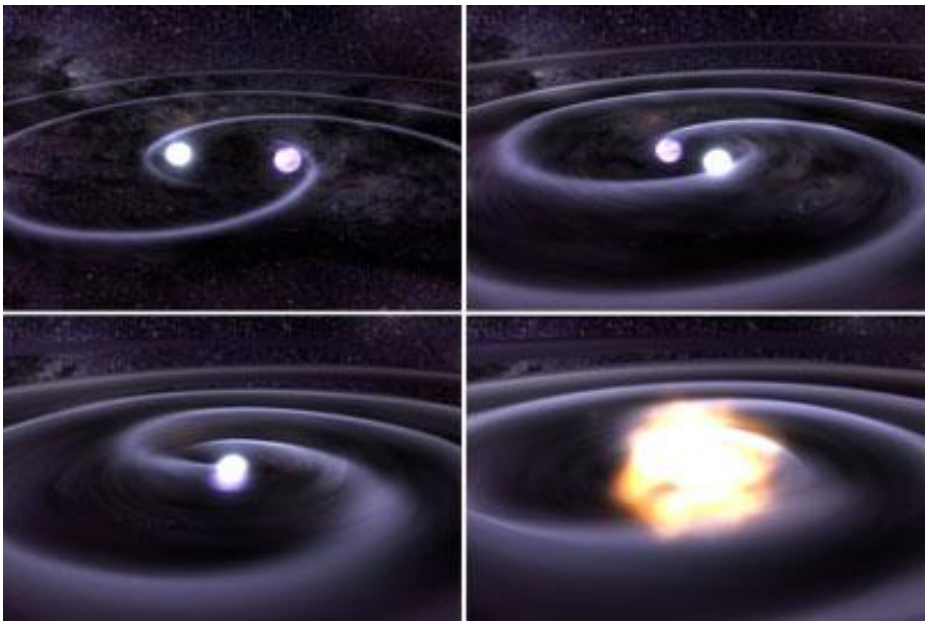


рис. 10.7 двойные пульсары

На рис. 10.8 изображено вращение пульсара. Периодический сигнал возникает за счет сложения вращения самого объекта.

Наиболее точно пульсарный тайминг описывала теория, в которой учитывалось рассеивание гравитационных волн.

Для анализа излучения пульсаров был создан посткеплеровский формализм *(10.3)*:

$$t_b - t_0 = D^{-1}[T + \Delta_R\left(T, \dot{\omega}, \dot{P}_b, \delta_r, \delta_\theta\right) + \Delta_E(T, \gamma) + \Delta_S(T, r, s) + \Delta_A(T, A, B)] \quad (10.3)$$

t_b - время прихода импульса в барицентр Солнечной системы,

t_0 - наблюдаемое время прихода импульса,

T - собственное время испускания импульса пульсара,

D - доплеровский фактор

$\Delta_R = xsin\omega[cosu - e(1+\delta_r)] + x[1 - e^2(1+\delta_\theta)^2]^{\frac{1}{2}}cos\omega sinu$ - задержка Ремера

$\Delta_E = \gamma sinu$ - задержка Эйнштейна

$\Delta_S = -2rln\{1 - ecosu - s\left[sin\omega(cosu - e) + (1-e^2)^{\frac{1}{2}}cos\omega sinu\right]\}$- задержка Шапиро

$\Delta_A = A\{\sin[\omega + A_e)\, u)] + esin\omega\} + B\{\cos[\omega + A_e(u)] + ecos\omega\}$ - задержка аберрационная

Зная это можно вычислить кеплеровские и посткеплеровские параметры:

$\{p^K\} = \{P_b, T_0, e_0, \omega_0, x_0\}$

$\{p^{PK}\} = \{k, \gamma, \dot{P}_b, r, s, \delta_\theta, \dot{e}, \dot{x}\}$

$\{q^{PK}\} = \{\delta_r, A, B, D\}$

$$A_e(u) = 2arctan\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \tan\frac{u}{2}\right]$$

$$u - esinu = 2\pi\left[\left(\frac{T-T_0}{P_b}\right) - \frac{1}{2}\dot{P}_b\left(\frac{T-T_0}{P_b}\right)^2\right]$$

P_b- орбитальный период пульсара
e_0 - эксцентриситет
ω_0 -долгота периастра
x_0 - проекция большой полуоси орбиты пульсара на луч зрения
$k \equiv \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{P_b}{2\pi}$
γ - параметр задержки Эйнштейна
r - параметр задержки Шапиро
$s = \sin(i)$
i - угол
δ_θ, δ_r - параметры деформации орбиты
A, B - параметры аберрации

-

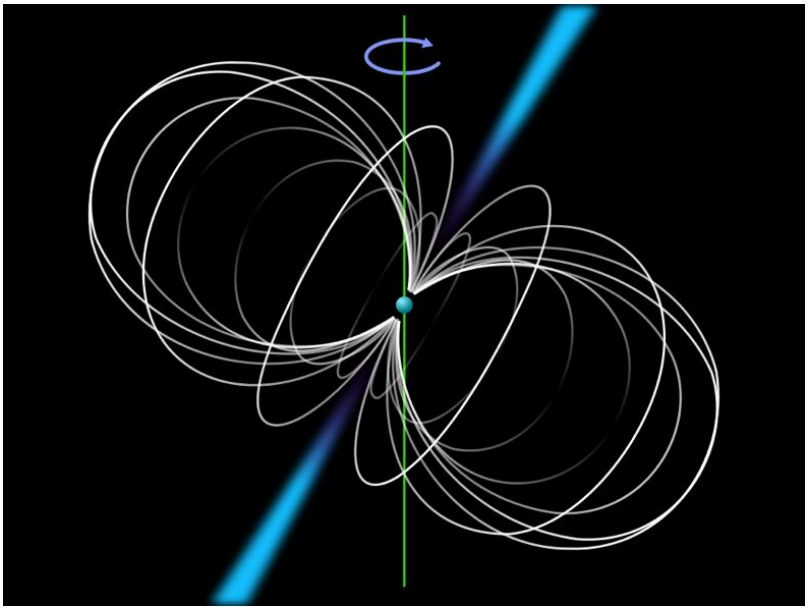


рис. 10.8 пульсар

$$\dot{\omega} = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{\frac{5}{3}} \frac{G_{AB}^{\frac{2}{3}}(m_1+m_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2(1-e^2)} \times ((2\gamma^{PPN}+1) - \frac{1}{2}\frac{m_1(2\beta^{PPN}-1)G^2 + m_2(2\beta^{PPN}-1)G^2}{G_{AB}^2} + \frac{1}{2},$$

$$\gamma = e\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(G_{02} + \frac{G_{AB}m_2}{m_1+m_2}\kappa\eta^*\right)\frac{G_{AB}^{-\frac{1}{3}}(m_1+m_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2}$$

$$r = \frac{G_{02}}{4c^3}(1+\varepsilon_{02})m_2$$

$$s = \frac{\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-\frac{2}{3}} cx(m_1+m_2+2)^{\frac{2}{3}}}{G_{AB}^{\frac{1}{3}}m_2}$$

Возможный дополнительный вклад орбитальной модуляции момента инерции пульсара отражает влияние компаньона на значение гравитационной постоянной вблизи пульсара.

На выходе получаем:

$$\delta_r^{intrinsic} = \left(2\gamma + 2 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2\pi\gamma}{P_b e}$$

$$\delta_\theta^{intrinsic} = \left(2\gamma + 2 - \frac{m_1(m_2+\frac{m_1}{2})}{(m_1+m_2)^2}\right)\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2\pi\gamma}{P_b e}$$

$$A = -\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_2 P_p}{2\pi(m_1+m_2)(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\sin\eta}{sin\lambda}$$

$$B = -\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{m_2 P_p}{2\pi(m_1+m_2)(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{\cos i\cos\eta}{\sin\lambda}$$

λ - угол между осью вращения и лучом зрения,

η - долгота оси вращения пульсара, измеряемая от восходящего узла.

Первая производная орбитального периода описывает все, что необходимо сделать. Чтобы это вычислить:

- определяем псевдотензор теории $t_{\mu\nu}$
- подставляем метрику в виде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- решаем уравнения поля относительно $h_{\mu\nu}$ и представляем решение в виде запаздывающих потенциалов
- выражаем тензор энергии-импульса через монопольный, дипольный и квадрупольный моменты
- находим поток энергии системы
- используем формулы небесной механики для расчета орбиты и формулу для тензора квадрупольных моментов

В ОТО все параметры уже известны:

$$\dot{\omega} = 3\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-\frac{5}{3}}\left(T_\odot M\right)^{\frac{2}{3}}(1-e^2)^{-1}$$

$$\gamma = e\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} T_\odot^{\frac{2}{3}} M^{-\frac{4}{3}} m_2(m_1 + 2m_2)$$

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5}\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-\frac{5}{3}}\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \times (1-e^2)^{-\frac{7}{2}} T_\odot^{\frac{5}{3}} m_1 m_2 M^{-\frac{1}{3}}$$

$$r = T_\odot m_2$$

$$s = \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} T_\odot^{-\frac{1}{3}} m_2^{-1}$$

Для двойного пульсара PSR J0737-3039 все параметры уже вычислены, рис. 10.09.

ППК параметр	Физический смысл	Экспериментальное значение
$P_b(day)$	орбитальный период	0.10225156248(5)
e	эксцентриситет	0.0877775(9)
$x(s)$	проеция большой полуоси	1.415032(1)
$\dot{\omega}(deg/yr)$	скорость движения периастра орбиты	16.89947(68)
$\gamma(ms)$	параметр Эйнштейна	0.3856
$\dot{P}_b$	изменение орбитального периода	$-1.252(17) \times 10^{-12}$
s	параметр задержки Шапиро	$0.99974(-39, +16)$
$r(\mu s)$	параметр задержки Шапиро	6.21(33)
R	отношение масс	1.0714(11)

рис. 10.09 параметры пульсара PSR J0737-3039

Далее по формулам ОТО и найденным параметром «рисуется» график, в котором все должно сойтись в одной точке при правильных m_1 и m_2. Для теории относительности именно таким образом и были получены значения m_1 и m_2.

Теперь рассмотрим f(R)-гравитацию:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) + \kappa L_m]$$

L_m- лагранжиан материи,
g - определитель метрического тензора,
$\kappa = \frac{16\pi G}{c^2}$,
G - гравитационная постоянная,
c - скорость света,
R - скаляр Риччи,
$f(R)$ - аналитическая функция

(54:00) - много формул

Для f(R)-гравитации можно локализовать значения $f_0'' \in [0; -0.1]$.
Вычисляя все величины через формулы ОТО, мы можем проверять модель, используя данные пульсарного тайминга как наиболее точные.

Солнечная система: ньютоновский предел и отклонения от него

Один из наиболее интересных и популярных инструментов - Пост-Ньютонвский формализм. Аналогией Пост-ньютоновского формализма может служить ряд Тейлора, в котором степени фиксированы, а функции отличаются значениями коэффициентов:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \cdots$$

В пост-ньютоновском формализме теория гравитация может быть разложена (рис. 10. 9) на теорию ньютона и 10 поправок, производных для M_2, M_3 и т.д.

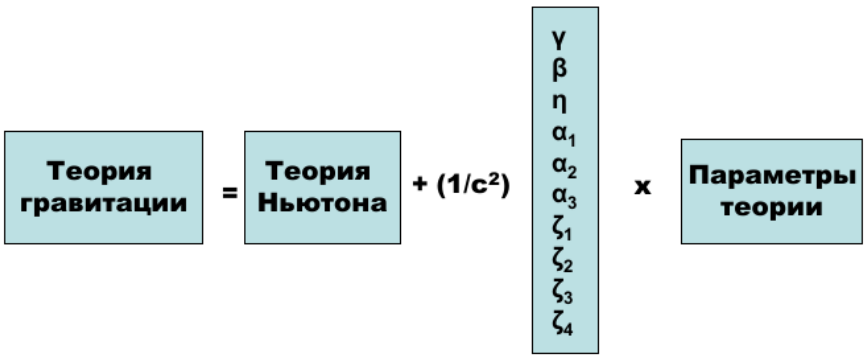


рис. 10.10 пост-ньютоновский формализм

Первая версия ППН формализма *(10.)*была предложена в 1922 году Артуром Эддингстоном:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - 2\beta\left(\frac{M}{r^2}\right);$$

$$g_{0j} = 0; \quad g_{jk} = \left(1 + \frac{2\gamma M}{r}\right)\delta_{jk}. \ (10.4)$$

Для параметризованного пост-ньютоновского формализма есть определенные требования:

- Слабое поле
- Асимптотически плоское пространство (не выходим за пределы небольших временных масштабов, чтобы иметь возможность пренебречь расширением)
- Малые скорости

ППН метрика в приближении материальной точки подводит все коэффициенты так, чтобы их можно было измерить экспериментально (рис. 10.09).
Обратим внимание на 10 параметров пост-ньютоновского формализма рис. 10.10.

Каждая группа параметров имеет свое значение и экспериментальные значения.

Таким образом, представив теории в виде метрики приближений, мы можем вычислить для нее все пост-ньютоновские параметры. И так как параметры вычислены экспериментально, они служат способом проверки.

Point-Mass Metric

$$g_{00} = 1 - 2\sum_k \frac{m_k}{r_k} + 2\beta\left(\sum_k \frac{m_k}{r_k}\right)^2 - 2(1 - 2\beta + \zeta_2)\sum_k \frac{m_k}{r_k}\sum_{j\neq k}\frac{m_j}{r_{jk}}$$
$$- (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1)\sum_k \frac{m_k v_k^2}{r_k} + \zeta_1 \sum_k \frac{m_k}{r_k^3}(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{r}_k)^2$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2 \sum_k \frac{m_k}{r_k^3} + \alpha_2 \sum_k \frac{m_k}{r_k}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_k)^2 - (2\alpha_3 - \alpha_1)\sum_k \frac{m_k \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_k}{r_k},$$
$$g_{0\alpha} = \tfrac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)\sum_k \frac{m_k v_k^\alpha}{r_k} + \tfrac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1)\sum_k \frac{m_k}{r_k^3}(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{r}_k)r_k^\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^\alpha \sum_k \frac{m_k}{r_k} + \alpha_2 \sum_k \frac{m_k}{r_k^3}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_k)r_k^\alpha,$$
$$g_{\alpha\beta} = -\left(1 + 2\gamma\sum_k \frac{m_k}{r_k}\right)\delta_{\alpha\beta}.$$

рис. 10.11 ППН метрика

ППН параметр	Что он характеризует	ОТО	Экспериментальные значения
γ	Кривизну пространства, создаваемую единицей массы покоя	1	$1 \pm 2.3 \cdot 10^{-5}$
β	Степень нелинейности закона суперпозиции для гравитации	1	$1 \pm 8 \cdot 10^{-5}$
ξ	Наличие эффектов привилегированного положения	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-9}$
α_1	Наличие эффектов привилегированной системы отсчета	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-5}$
α_2		0	$0 \pm 2 \cdot 10^{-9}$
α_3		0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-20}$
ζ_1	Нарушение закона сохранения полного импульса	0	0 ± 0.02
ζ_2		0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-5}$
ζ_3		0	0 ± 10^{-8}
ζ_4		0	$0 \pm 0.006^*$

рис. 10.12 ППН параметры

Для расчета:

- вводим переменные: метрика, скалярное поле, векторное поле и т.д.
- устанавливаем космологические граничные условия
- раскладываем в пост-ньютоновский ряд вокруг асимптотических значений интересующие нас величины (метрику, скалярное поле и т.д.)
- подставляем разложенные до необходимого порядка выражения в уравнения поля
- сравниваем метрику теории с общей ППН метрикой, находим выражения для ППН параметров
- найденные выражения ППН параметров сравниваем с экспериментальными значениями и накладываем ограничения на исследуемую теорию

Одним из способов измерения значений этих параметров является лазерная локация луны. Таким образом можно получить как минимум более точные значения γ.

Большой андронный коллайдер: поведение энергии в диапазоне ТэВ

Сейчас можно искать поправки в модель гравитации в режиме высоки энергий (квантовые поправки). Рассчитаны идущие из эффекта нелокальности в квантовой гравитации поправки по взаимодействию элементарных частиц на Большом адронном коллайдере.

На основе последних данных ускорителя были представлены ограничения на масштаб возможных нелокальностей пространства-времени:

$$M^* > 3 \times 10^{-11} GeV$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ