



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СОВРЕМЕННЫЙ КУРС ГРАВИТАЦИИ. ЧАСТЬ 2

ГАЛЬЦОВ
ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

1 Лекция 1. Модель Фридмана (Часть 1). Проблема горизонта. Инфляционная модель Вселенной.	6
1.1 Историко-физическое вступление	6
1.2 Проблема Горизонта	7
1.3 Глобально выбранная Фридманом система отсчета	8
1.4 Пространство Робертсона-Уокера	9
1.5 Конформное время	9
1.6 Тензор Эйнштейна для метрики Фридмана	10
1.7 Тождество Бьянки для метрики Фридмана	10
1.8 Уравнения Фридмана	11
1.9 Уравнение состояния в виде политропы	12
1.10 Решения Фридмана	13
1.11 Проблема горизонта (часть 2)	13
1.12 Модели инфляции	14
2 Лекция 2. Модель Фридмана (Часть 2). Модель горячей Вселенной.	17
2.1 Решения Фридмана	17
2.2 Законы расширения	18
2.3 Характерные моменты времени для Вселенной	18
2.4 Модель Старобинского (1979)	19
2.5 Модель горячей Вселенной	20
2.6 Проблема горизонта (Часть 3)	20
2.7 Метрика де Ситтера	21
2.8 Пространство Анти-де Ситтера	22
2.9 Анизотропные однородные решения	23
3 Лекция 3. Анизотропные решения. Формализм Ньюмана-Пенроуза.	26
3.1 Анизотропные решения	26
3.2 Решение БКЛ. Модель Bianchi I.	26
3.3 Точные решения Казнера	27
3.4 Модель Бианки IX	28
3.5 Решение БКЛ 2	30
3.6 Решение Контовского-Сакса	30
3.7 Формализм Ньюмана-Пенроуза	33

4	Лекция 4. Формализм Ньюмана-Пенроуза. Классификация Петрова-Пирани.	36
4.1	Спиноры и формализм Ньюмана-Пенроуза	36
4.2	Лемма о приведении.	39
4.3	Примеры применения леммы о приведении	40
4.4	Классификация полей Максвелла	41
4.5	Классификация Петрова-Пирани.	42
5	Лекция 5. Спиноры и формализм Ньюмана-Пенроуза. Диадный формализм	45
5.1	«Алгебра» в формализме Ньюмана-Пенроуза	45
5.2	Тетрадный формализм	46
5.3	Диадный формализм	47
5.4	Формализм Ньюмана-Пенроуза без спиноров	48
5.5	Дифференцирование спиноров и спиновые коэффициенты	48
5.6	Уравнения Максвелла в формализме Ньюмана-Пенроуза	50
5.7	Представление тензора Римана. Девиатор	52
6	Лекция 6. Симметрии в формализме Ньюмана-Пенроуза. Метрика Taub-NUT. Метрика Керра	54
6.1	Первая группа уравнений Ньюмана-Пенроуза.	54
6.2	Вторая группа уравнений Ньюмана-Пенроуза	54
6.3	Третья группа уравнений Ньюмана-Пенроуза	55
6.4	Симметрии в формализме Ньюмана-Пенроуза	56
6.4.1	Уравнения Киллинга для $s = \frac{1}{2}$. Спинор Киллинга	56
6.4.2	Уравнения Киллинга для $s = 1$. Тензор Яно-Киллинга	57
6.5	Формализм бивекторов	58
6.6	Генерация решений. Метрика Taub-NUT.	60
6.7	Метрика Керра	64
7	Лекция 7. Метрика Керра. Уравнения Эрнста	66
7.1	Потенциалы Эрнста	66
7.2	Теория Эйнштейна-Максвелла	67
7.3	Метрика Керра	68
7.4	Теорема Голдберга Сакса	70
7.5	Тетрада Киннерсли	71
7.6	Симметрии метрик типа D	72

7.7	Уникальность метрики Керра. Теоремы единственности +	73
7.8	Интегралы Комара	73
7.9	Форма Керра-Шильда	75
8	Лекция 8. Метрика Керра	77
8.1	Сингулярность метрики Керра	77
8.1.1	Главные изотропные направления в метрике Керра	78
8.2	Симметрии метрики Керра	79
8.3	Эргосфера метрики Керра	79
8.4	Эффект увлечения систем отсчета	80
8.5	Неаффинность вращающегося вектора Киллинга.	82
8.6	Процесс Пенроуза	82
8.7	Аналитическое продолжение. Координаты Финкельштейна.	83
8.8	Движение тел в окрестности черной дыры	83
9	Лекция 9. Поведение частиц и полей в метрике Керра	86
9.1	Орбиты частиц в метрике Керра	86
9.1.1	Сферические орбиты	87
9.2	Волновые уравнения в метрике Шварцшильда.	90
9.3	Волновые уравнения в метрике Керра	92
9.4	Парадокс Клейна	94
10	Лекция 10. Волновые поля в метрике Керра. Преобразования Боголюбова.	96
10.1	Волновые уравнения в метрике Керра	96
10.1.1	Эффект суперрадиации	96
10.2	Вторичное квантование в искривленных метриках	97
10.3	Квазинормальные моды	97
10.3.1	Квазинормальные моды в метрике Шварцшильда	98
10.4	Неинвариантность вакуума в гравитационных полях. Преобразования Боголюбова	99
11	Лекция 11. Эффект Хокинга	105
11.1	Теория Гармонического осциллятора	105
11.2	Понятие о смешанных состояниях в квантовой механике и стат. физике	106
11.3	Эффект Хокинга	106
11.4	Неоднозначность определения вакуума в различных пространствах . .	107
11.5	Коллапс безмассовой оболочки	109

11.6	Классификация решений уравнения Клейна-Гордона	110
11.6.1	Нормировка решений	111
11.7	Коллапс безмассовой оболочки (продолжение)	113
11.8	Положительно частотные решения на \mathcal{I}^- . Уравнение Хокинга	114
12	Лекция 12. Эффект Хокинга. Термодинамика черных дыр	116
12.1	Эффект Хокинга в метрике Шварцшильда	116
12.1.1	Вакуум $U_{\text{нру}}$	119
12.1.2	Квантование в пространстве Риндлера	119
12.1.3	Аналогия с электрическим полем	120
12.2	Эффект Хокинга в метрике Керра	121
12.2.1	Расчет для полей полуцелого спина	122
12.3	Термодинамика черных дыр	123
13	Лекция 13. Термодинамика черных дыр. Формула Смарра	125
13.1	Эффект Хокинга - повторение	125
13.2	Энтропия черной дыры	126
13.2.1	Мысленный эксперимент Бекенштейна	126
13.2.2	Теорема Хокинга о горизонте	127
13.2.3	Поверхность горизонта для метрики Керра	128
13.3	Формула Смарра	128
13.4	Статистическая физика для черной дыры. Функциональный интеграл .	131
14	Лекция 14. Законы термодинамики черных дыр. Формула Смарра.	134
14.1	Законы термодинамики черных дыр.	134
14.2	Применение второго закона ТД черных дыр	136
14.3	КТП-подход к термодинамике черных дыр.	138
14.3.1	Каноническое распределение Гиббса	139
14.3.2	Большое каноническое распределение	139
14.3.3	Вычисление Ω с помощью евклидовой метрики	140
14.3.4	Евклидова метрика Шварцшильда	140
14.3.5	Система Эйнштейна-Максвелла. Евклидова метрика Керра-Ньюмана.	142
15	Лекция 15. Квантование в стационарных пространствах	145
15.1	Уравнение на радиальную функцию положительно частотных мод в кривых метриках	148
15.1.1	Оценка коэффициентов отражения и прохождения в приближе- нии ВКБ	152

15.2 Квантование в пространстве Риндлера	152
15.3 Диаграмма Пенроуза коллапсирующей оболочки	154

Лекция 1. Модель Фридмана (Часть 1). Проблема горизонта. Инфляционная модель Вселенной.

Решение Фридмана - это еще одно простое решение уравнений общей теории относительности, которое имело эпохальное значение для физики. Оно является основой для интерпретации всех данных, получаемых из астрофизических наблюдений, а также основой релятивистской астрофизики и космологии.

Историко-физическое вступление

Фридман родился в 1888 году в семье музыкантов, но он не пошел по их стезе и стал математиком. Уже в 17 лет, будучи гимназистом, он опубликовал работу по числам Бернулли. За свою короткую жизнь - он дожил только до 1925 года и умер от брюшного тифа, он смог создать несколько научных школ, опубликовать большое число научных работ в различных областях физики и математики.

В 1924 году Фридман добровольно ушел в армию и служил в воздушных войсках, где требовалось изучение метеорологии и аэронавигации. После чего вернулся в Петербург, где стал заниматься общей теорией относительности.

Решение Фридмана было опубликовано в 1922 и 1924 годах.

Еще одно его достижение - Фридман поставил мировой рекорд подъема в стратосферу - на аэростате поднялся на высоту 6500 метров.

Космологические решения основаны на усреднении материи по большим областям пространства. Необходимо усреднить материю по таким расстояниям, чтобы можно было считать ее распределение однородным и изотропным.

Хотя эти условия кажутся очень естественными, они не являются обязательными - существуют и другие модели. Аргументы в поддержку необходимости изотропии были даны позже - когда стали изучать квантовые эффекты. В метриках Фридмана оказывается, что рождение частиц сильно подавлено, а в анизотропном случае оно интенсивно происходит. Одной из пионерских работ в этой области является работа Старобинского.

Старобинский - также блестящий теоретик. Его работы касались теории черных дыр и позже - космологии. Старобинский с соавторами обнаружили, что рождение частиц будет иметь в качестве обратной реакции именно изотропизацию.

Космологическая метрика (в трехмерном пространстве) строится на основе нескольких предположений:

- 1) Однородность и изотропия (в трехмерном пространстве) в каждой точке, т.е.

пространства являются максимально симметричными. Как известно, есть только 3 максимально симметричных пространства - Плоское Евклидово пространство, 3-мерная сфера и гиперboloид.

- 2) Выбор системы отсчета - считается, что время глобально, и оно во всех точках системы отсчета течет независимо и одинаково.

Такая система отсчета наиболее понятным образом связана с реликтовым излучением. Согласно теории горячей Вселенной Гамова, по мере расширения Вселенной, если изначально во вселенной была плазма, состоящая из безмассовых частиц - фотонов, и вещество, два вида материи расширяются по разному закону.

Горячая плазма расширяется по закону $\sim \frac{1}{a^4}$, а в случае холодной Вселенной (когда Вселенная наполнена пылью) $\sim \frac{1}{a^3}$. Из-за того, что разные виды материи расширяются по-разному, на уровне энергий связи электронов в атоме происходит рекомбинация электронов с протонами - образование атомов, и вещество становится нейтральным. Фотоны, в свою очередь, перестают взаимодействовать с веществом и "запоминают" температуру Вселенной в конкретный момент времени ≈ 3000 К. (Сейчас ≈ 2.7 К).

Проблема Горизонта

Проблема горизонта состоит в том, что мы наблюдаем реликтовое излучение из разных углов. Если мы предположим, что наша Вселенная представляет собой шар, на поверхности которого она "живет то в системе отсчета, которую использовал Фридман, все тела покоятся относительно нее:

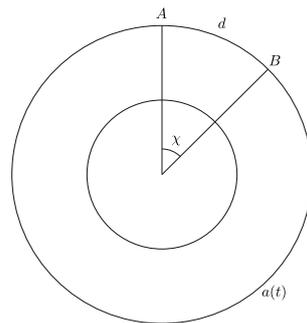


Рис. 1.1. Проблема горизонта

В силу изотропии пространства, все 3 угловых координаты на сфере эквивалентны. Две из них мы можем зафиксировать, тогда единственной значимой координатой

становится третья угловая координата - обозначим ее χ . Относительно этой системы отсчета усредненная материя покоится.

Пусть на этой сфере есть две точки A и B . Тогда физическое расстояние между этими двумя точками меняется со временем и будет определяться как

$$d \sim a(t) \cdot \chi, \quad (1.1)$$

где $a(t)$ - радиус сферы, который является функцией от времени, а $\chi = \text{const}$ - постоянная угловая координата в сопутствующей системе. Возникает разбегание Галактик, то есть производная расстояния d по времени не равна нулю:

$$\dot{d} = \dot{a} \cdot \chi \neq 0. \quad (1.2)$$

Выражая координату χ из уравнения (1.1):

$$\dot{d} = \frac{\dot{a}}{a} d. \quad (1.3)$$

Таким образом скорость галактики является линейной функцией расстояния:

$$v_{\text{Гал}} = Hd, \quad (1.4)$$

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ - постоянная Хаббла. Эта величина сама зависит от времени.

Глобально выбранная Фридманом система отсчета

Трехмерное пространство является максимально симметричным. Таких пространств всего 3.

$$dl_3^2 = d\chi^2 - \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \text{sh}^2 \chi \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.5)$$

где верхний случай соответствует параметризации сферы, средний - плоскому пространству, а нижний - параметризации псевдосферы.

Тогда метрика Фридмана ($c = 1$):

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t) dl_3^2} \quad (1.6)$$

Время здесь соответствует такой системе отсчета (называемой сопутствующей), относительно которой реликтовое излучение покоится.

Таким образом, наши предположения:

- 1) Однородность и изотропия 3- мерного пространства;
- 2) Выбор синхронной системы отсчета (для 4-мерия), то есть компоненты метрики $g_{0i} = 0$;
- 3) Наличие сопутствующей системы отсчета. Мы предполагаем, что есть материя, которая заполняет все пространство, и скорость этой материи определяется только одной компонентой: $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$.

Пространство Робертсона-Уокера

Другой способ изображения формулы (1.5):

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \begin{cases} \arcsin r = \chi, & k = 1 \\ r = \chi, & k = 0 \\ \operatorname{arcsh} r = \chi, & k = -1 \end{cases}, \quad (1.7)$$

для верхнего, среднего и нижнего случаев формулы (1.5) соответственно.

Тогда для метрики трехмерного пространства:

$$dl_3^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.8)$$

Формулу для метрики (1.6) можно теперь переписать в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega \right) \quad (1.9)$$

В литературе пространство с метрикой, которая записывается таким образом, называется пространством Робертсона-Уокера. Такая терминология связана с тем, что под таким названием она была приведена в книге Вайнберга.

Вся теория стала называться FRWL - космология.

Конформное время

В терминологии конформного времени распространение лучей в метриках Фрийдмана описывается как распространение в плоском пространстве. Сделаем замену переменных:

$$dt = a(t)d\eta, \text{ где} \quad (1.10)$$

η - новая временная координата. Тогда метрика:

$$ds^2 = a^2 \left(d\eta^2 - d\chi^2 - \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \text{sh}^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right), \quad (1.11)$$

и в силу изотропии мы можем зафиксировать углы φ и θ , и $d\Omega \equiv 0$.

Тогда получаем конформно плоское двумерное пространство

$$ds^2 = a^2 (d\eta^2 - d\chi^2) \quad (1.12)$$

И распространение лучей будет описываться уравнением:

$$\chi = \pm \eta + \text{const} \quad (1.13)$$

Тензор Эйнштейна для метрики Фридмана

Координаты в такой метрике - $x^\mu = (\eta, \chi, \theta, \varphi)$, и нетрудно записать тензор Эйнштейна. По определению:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.14)$$

Для нашей метрики в компонентах:

$$G_{\eta\eta} = 3 \left(\frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (1.15)$$

$$G_{ij} = \left(\frac{2a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} \right) g_{ij}, \quad (1.16)$$

где $a' = \frac{da}{d\eta}$.

Надо сказать, что первая реакция Эйнштейна на решение его уравнения с космологической постоянной была отрицательной. Но после разъяснений физика Крутковца, который работал с Фридманом и смог встретиться с Эйнштейном лично, ученый признал правоту Фридмана.

Тождество Бьянки для метрики Фридмана

Тождества Бьянки для тензора Эйнштейна

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

Уравнение Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \underbrace{\kappa}_{=\frac{8\pi G}{c^4}} T_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Тогда тождество Бьянки должно быть совместно с уравнением Эйнштейна и

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.19)$$

Запишем тождество Бьянки относительно Тензора Энергии-Импульса (1.19):

$$\boxed{\varepsilon' = -\frac{3a'}{a} \cdot (\varepsilon + P)} \text{ - уравнение непрерывности} \quad (1.20)$$

Что такое в этом уравнении ε и P ?

Необходимо так задать материю, чтобы она была совместима с симметрией метрики, т.е. чтобы производная Ли по векторам Киллинга была равна нулю:

$$\mathcal{L}_{\hat{\xi}^i} T_{\mu\nu} = 0 - \quad (1.21)$$

Решая эту систему дифференциальных уравнений на компоненты ТЭИ, получим:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P) u_{\mu} u_{\nu} - P g_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

где параметры $\varepsilon(t)$ и $P(t)$ - должны быть функциями только времени в сопутствующей системе. Их физический смысл - плотность энергии и давление. В сопутствующей системе скорости имеют вид $u^{\mu} = (u^0, 0, 0, 0)$.

Рассмотрим частный случай (1.22): $\varepsilon = -P$.

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon g_{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

это и есть космологическая постоянная.

Уравнения Фридмана

Преобразуя полученные уравнения, можно получить систему уравнений Фридмана:

$$\begin{cases} \frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} = \frac{\varkappa}{3} \varepsilon \\ \left(\frac{a'}{a}\right)' = -\frac{\varkappa}{3} (\varepsilon + 3P) \end{cases} \quad (1.24)$$

Время t в сопутствующей системе координат назовем синхронным. Тогда, если вспомнить связь между $d\eta$ и dt (ур. 1.10), можем получить

$$a' = \underbrace{\dot{a}}_{= \frac{da}{dt}} a. \quad (1.25)$$

Второе уравнение системы (1.24) переписется в виде:

$$\boxed{\ddot{a} = -\frac{\varkappa}{3} a (\varepsilon + 3P)} \quad (1.26)$$

В таком виде это уравнение для Космологического ускорения.

Одна из текущих проблем космологии состоит в том, что в выделенной области времени вклад темной материи становится ощутимым. На некотором времени (Dark Energy) вклад темной энергии становится доминирующим, т.е. с этих моментов времени $\ddot{a} > 0$. В наше время мы наблюдаем ускоренное расширение Вселенной. Предположение состоит в том, что темная энергия была всегда, но до определенного момента она была не видна.



Рис. 1.2. Вклад темной материи

Уравнение состояния в виде политропы

Введем уравнение состояния в виде политропы:

$$P = w\varepsilon, \quad (1.27)$$

где $w = \text{const}$. Выбирая определенные значения w можно получить различные виды материи:

$$\left\{ \begin{array}{ll} w = 0 & \text{— пыль;} \\ w = \frac{1}{3} & \text{— горячая материя;} \\ w = -1 & \text{— отвечает космологической постоянной } \Lambda; \\ w = -\frac{1}{3} & \text{— струнный газ.} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Значение $w = \frac{1}{3}$ приводит к равенству нулю следа Тензора Энергии-Импульса $T^\mu_\mu = 0$.

В качестве **упражнения**: Подобрать такие $\{w_i\}$, которым отвечают: 1) Цилиндрическая система Эйнштейна. 2) Метрика де Ситтера.

Рассмотрим уравнение непрерывности (1.20), при учете уравнения состояния (1.27). Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + 3\frac{da}{a}(1+w) = 0. \quad (1.29)$$

Проинтегрировав, получим уравнение расширения, согласно которому

$$\varepsilon \sim a^{-3(1+w)} \quad (1.30)$$

Проверяя этот закон для наших примеров (1.28), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \implies \varepsilon \sim \frac{1}{a^3} - \text{пыль} \\ w = \frac{1}{3} \implies \varepsilon \sim \frac{1}{a^4} - \text{горячая материя} \\ w = -1 \implies \varepsilon \sim a^0 - \Lambda \\ w = -\frac{1}{3} \implies \varepsilon \sim \frac{1}{a^2} - \text{струнный газ} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Таким образом, разные виды материи по-разному остывают.

Решения Фрийдмана

Решениями Фрийдмана называются функции $a(\eta)$. Явный их вид можно посмотреть в литературе.

Упражнение: получить решения Фрийдмана $a(\eta)$ для различных k и различных w .

Важно понимать динамику всего космологического расширения, начиная от некоторого планковского времени $t_{pl} \sim 10^{-44}$ с (см. рис 1.2). Раньше считалось, что именно в этот момент произошел Большой Взрыв, и началось космологическое расширение.

Оказалось, что если исходить из этого предположения и учесть динамику уравнений, которые мы получили, то невозможно объяснить свойства реликтового излучения.

Для решений Фрийдмана $a(\eta)$ для пыли горячей материи и струнного газа, которые считаются классическими ($w = 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$), можно получить, что $a \sim t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Важно отметить, что решение для космологической постоянной Λ ($w = -1$): $a = e^{Ht}$, где $H = \text{const}$ и является постоянной Хаббла.

Проблема горизонта (часть 2)

Рассмотрим на сфере очень далекую точку C . Допустим, световой сигнал испускается в самый начальный момент времени. Пока происходит распространение по закону конформного времени (1.13), значение χ ограничено для каждого момента времени $\chi < \chi_\Gamma(t)$. Чем ближе к большому взрыву, тем меньше область $\Delta\chi$, в пределах которой два объекта могут успеть обменяться световыми сигналами. Т.к. закон расширения Вселенной нелинейный, область $\Delta\chi$ увеличивается непропорционально. В самом крайнем случае $\Delta\chi$ может увеличиться настолько, что перекрывается на сфере.

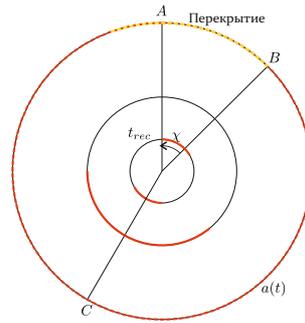


Рис. 1.3. Проблема горизонта. Часть 2

Может получиться так, что в данный момент мы наблюдаем синхронное состояние Вселенной, т.е. все области могут обмениваться световыми сигналами. Мы можем фиксировать реликтовое излучение, испускаемое в противоположных направлениях на сфере. Области на сфере, соответствующие различным направлениям, не могли обменяться между собой световыми сигналами. Но фотоны в этих двух областях одинаковой температуры! Это и есть проблема Горизонта.

Решать проблему горизонта можно по-разному, но обязательным является условие, что в начальные моменты времени закон расширения Вселенной не является степенным.

Если принять $a(t') \sim t'^\alpha$, то для видимого χ

$$\chi < \eta_1 - \eta = \int_t^{t_1} \frac{dt'}{a(t')} \sim t_1^{1-\alpha}, \quad (1.32)$$

где η_1 соответствует t_1 и $\eta_1 - \eta = \chi_\Gamma$. Тогда при устремлении $t_1 \rightarrow 0$, χ_Γ также стремится к нулю $\chi_\Gamma \rightarrow 0$. Но реликтовое излучение когерентно $T = 2.7$ К, т.е. успело обменяться сигналами.

Модели инфляции

Проблема горизонта была четко поставлена в 1980 году. Тогда вспомнили работу Старобинского, опубликованную в 1979 году, в которой он предположил, что вследствие поляризации вакуума возникают безмассовые поля, которые в метриках Фридмана не рождают частицы. В его работе было показано, что в таких ситуациях возникают квадратичные поправки по кривизне $R_{\mu\nu}^2$, которые проявляются как контрчлены. А квантовые поправки существенны только на самой ранней стадии Вселенной.

Тогда лагранжиан Эйнштейна:

$$\mathcal{L} \sim -R + \frac{R^2}{\mu^2} \implies e^{Ht} \quad (1.33)$$

И в этом случае решением будет Вселенная де Ситтера. Это т.н. "инфляция Старобинского".

Разные модели инфляции можно также предложить используя скалярно-тензорные теории, т.е. вводя в теорию скалярные поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$, и, подбирая потенциалы таким образом, чтобы они приводили к правильному виду инфляционной зависимости.

В работах Гута (1981 год) был принят именно такой подход - рассмотрение потенциала скалярного поля в виде:

$$V(\phi) = m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 + \dots \quad (1.34)$$

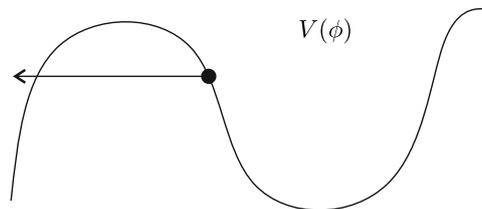


Рис. 1.4. Модель Гута

Гут предположил, что скалярное поле живет в потенциальной яме, потом начинает туннелировать и, пока оно туннелирует, поле сохраняет свое значение, близкое к максимуму, и теория сводится к теории с космологической постоянной Λ .

Однако вскоре эта работа была раскритикована, т.к. туннельный переход должен быть фазовым переходом второго рода, и тогда теория предсказывает слишком большие квантовые флуктуации на фоне этой инфляции.

Далее, в 1982 году Линде - выпускник кафедры теоретической физики, предложил другую модель: пусть поле массивное, тогда в потенциале есть член $V(\phi) \sim m^2\phi^2$. Если предположить, что в начальный момент времени поле не равно нулю, то можно так подобрать крутизну потенциала, чтобы пока поле будет «скатываться», будет происходить инфляция, а Вселенная успеет расширяться.

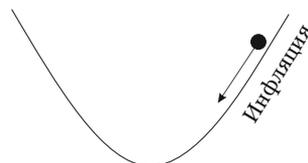


Рис. 1.5. Модель Линде

Модель Линде получила название Хаотической инфляции. Из нее, в частности, следует теория Мультивселенных.

Чем можно "заменить" инфляцию? Можно выбрать какое-то более экзотическое уравнение состояния - это модели с сильным нарушением изотропного условия.

Лекция 2. Модель Фридмана (Часть 2). Модель горячей Вселенной.

Решения Фридмана

Рассмотрим наиболее наглядную замкнутую модель, в которой 3-мерное пространство является 3-мерной сферой, радиус которой зависит от времени.

Рассмотрим в сопутствующей системе координат 2 точки, которые покоятся относительно этой системы - в первой точке находится наблюдатель, а во второй - далекий квазар. Физическое расстояние определяется как $d = \chi \cdot a$, где χ - угловая координата на сфере, а $a(t)$ - радиус сферы.

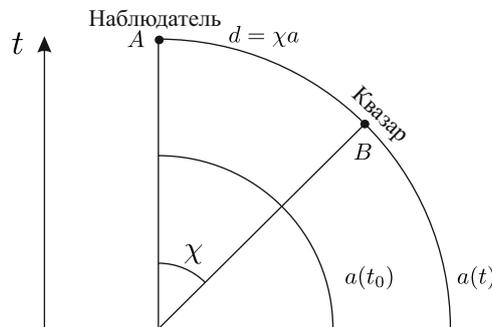


Рис. 2.1. Замкнутая модель - сфера

Чтобы наблюдатель смог измерить расстояние до квазара, необходимо получить световой сигнал.

Метрика в синхронной системе сопутствующих координат:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega), \quad (2.1)$$

где $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$. либо, вводя конформное время, можем записать

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi d\Omega). \quad (2.2)$$

Допустим, квазар испустил световой сигнал в момент t_0 , находясь на сфере радиуса $a(t_0)$. Из преобразований координат следует, что

$$d\eta = \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.3)$$

и тогда расстояние измерить не просто. Получается, что не все удаленные квазары мы сейчас можем видеть, все зависит от закона $a(t)$ и связи $\eta(t)$.

В терминах конформных координат изотропная геодезическая между точками:

$$\chi_A = \chi_B - (\eta - \eta_B). \quad (2.4)$$

Можно сказать, что мы увидим только такие χ , которые соответствуют границе значений η в наш момент времени.

Законы расширения

Выберем $k = 1$ (см. 1.7) и проинтегрируем 2 варианта уравнения движения:

1) Пыль ($P = 0$) \implies

$$\begin{cases} t = a_0(\eta - \sin \eta) \\ a = a_0(1 - \cos \eta) \end{cases} \quad (2.5)$$

при $\eta \ll 1 \implies a \sim t^{2/3}$. При этом постоянная Хаббла ведет себя как: $H = \frac{\dot{a}}{a} \sim \frac{1}{t}$

2) Горячая вселенная (Hot Universe) $P = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\begin{cases} a = a_0 \sin \eta \\ t = a_0(1 - \cos \eta) \end{cases} \quad (2.6)$$

При $\eta \ll 1 \implies a \sim t^{1/2}$, $H \sim \frac{1}{t}$. В модели горячей Вселенной есть понятие температуры:

$$\frac{1}{a^4} \sim \varepsilon \sim T \sim \frac{1}{t^2}$$

Характерные моменты времени для Вселенной

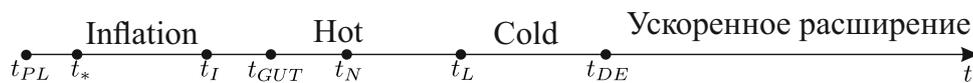


Рис. 2.2. Характерные моменты времени для Вселенной

Отметим, что шкала времени на рисунке нелинейная.

- 1) Планковский момент времени t_{PL} , с которого начинается отсчет, и от которого хотелось бы «отступить», т.к. не понятно, что в этом момент времени происходит.
- 2) С момента t^* мы начинаем наше рассмотрение.

- 3) От момента t^* до t_I происходила инфляция. В этот момент времени происходило ускоренное расширение Вселенной. В момент t_I происходит «рехитинг» - Вселенная должна нагреться.
- 4) После этого Вселенная описывается горячей моделью. В этом промежутке есть несколько важных моментов:
- 5) Момент Великого Объединения t_{GUT} при масштабах энергий 10^{16} ГэВ. В этот момент рождаются монополи.
- 6) На масштабах энергий порядка массы протона возникает нуклеосинтез t_N , после чего вещество существует в виде плазмы.
- 7) Плазма существует до момента последнего рассеяния t_L (Last Scattering). В этот момент образуются атомы, после чего фотоны «запоминают эту температуру» - образуется реликтовое излучение.
- 8) Далее происходит процесс, описываемый холодной моделью Вселенной, который заканчивается в момент времени t_{DE} (Dark Energy). В веществе Вселенной доминирующим становится вклад темной энергии, который вызывает ускоренное расширение Вселенной.

В качестве «начинки» для модели инфляции нам необходимы определенные типы вещества: Материя ϵ_M , горячий газ ϵ_{hot} . Необходимо ввести и космологическую постоянную Λ .

Старобинский предложил, что если учесть в уравнениях Эйнштейна поляризацию вакуума, то это дает поправки, квадратичные по кривизне.

Модель Старобинского (1979)

На Фридмановском решении все кривизны выражаются через скалярную кривизну. Тогда можно ввести контрчлен, возникающий при учете квантовых поправок в уравнении Эйнштейна в виде:

$$R - \frac{R^2}{\mu^2} \quad (2.7)$$

В этой модели есть решение де Ситтера, которое является максимально симметричным пространством. Такая модель, если считать, что метрики зависят только одной координаты - времени t , может быть сведена к квантовой механике. Тогда можно построить уравнение Шредингера и найти волновую функцию Вселенной.

Модель горячей Вселенной

Ключевым моментом для понимания моделей является существование проблем горячей Вселенной - модели, которую придумал Гамов. Эта теория предсказала моменты нуклеосинтеза t_N , и последнего рассеяния t_L . Также, она предсказывала, что в момент времени t_L фотоны «запоминают» температуру $T_\gamma \sim 10^4$ К.

Пусть у нас есть критическая плотность: $\epsilon_{кр} = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2 \approx 67,8 \pm 09 \frac{\text{КМ}}{\text{сек} \cdot \text{МПс}}$, если тогда рассчитать возраст Вселенной, получим $t_{вс} \sim 14.4 \cdot 10^9$ лет. Тогда плотности энергий различных видов материи удобно задать как:

$$\Omega_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{кр}}. \quad (2.8)$$

Учтем также добавку, которая входит в уравнения Эйнштейна:

$$\Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.9)$$

Эта величина условно является плотностью энергии за счет кривизны пространства. Тогда можно написать, что условием равновесия будет:

$$\sum_i \Omega_i = 1, \quad (2.10)$$

причем в сумму входят Ω_Λ , Ω_k и Ω_{DE} .

Различные компоненты материи расширяются по-разному. Если давление зависит от плотности как $P = w\epsilon$, тогда из тождества Бьянки для Тензора Энергии Импульса этой материи:

$$\epsilon_w = \frac{1}{a^{3(1+w)}} \quad (2.11)$$

Варьируя w , можем получить плотности для различных видов материй, в частности, если $w = -1$, то

$$\epsilon_\Lambda \sim const$$

Проблема горизонта (Часть 3)

В каждом момент времени мы видим не всю Вселенную. На сфере из рисунка (2.1) мы видим вселенную до определенного момента - хи-горизонта χ_Γ . Условие возможности наблюдения: если квазар испускает свет в момент времени, соответствующий конформному времени η_Γ , а наблюдатель находится в η_A , то видимая часть сферы:

$$\chi \leq \chi_\Gamma^{(A)} = -(\eta_A - \eta_\Gamma) \quad (2.12)$$

$$\chi_{\Gamma}^{(t)} = \int_{t_*}^{t_A} \frac{dt'}{a(t')} \sim t^{1-\alpha}, \text{ т.к. } a \sim t^{\alpha} \quad (2.13)$$

Т.е. при расширении по закону горячей и холодной модели возникают горизонты видимости, причем размеры этих горизонтов, при движении назад во времени, быстро уменьшаются.

Исходная проблема называется проблемой плоскостности - на наших временах мы наблюдаем плотность энергии материи, близкую к критической, но если экстраполировать назад величину Ω_k по соответствующему закону:

$$\Omega_k = \frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (2.14)$$

то, если мы дотянем ее до момента времени Великого объединения t_{GUT} , то мы получим значение:

$$\Omega_k \rightarrow \frac{\varepsilon - \varepsilon_{кр}}{\varepsilon_{кр}} \leq 10^{-55}. \quad (2.15)$$

Это является фантастической точностью! В модели инфляции такая проблема разрешается, что показал Гут.

Радиус сферы к моменту окончания инфляции:

$$a(t_I) = a_0 e^{H_I(t_I - t_0)}, \quad (2.16)$$

где $H_I t_I \sim 70$. Такой масштаб этого произведения и разрешает проблему плоскостности.

Важно упомянуть также проблему монополей - в момент Великого Объединения t_{GUT} должно было родиться такое огромное количество монополей, что сейчас мы должны были бы наблюдать один монополю на протон, чего, однако, не происходит. В модели инфляции решается и эта проблема.

Таким образом, сейчас не остается никаких сомнений, что инфляция была.

Метрика де Ситтера

Метрика де Ситтера может быть представлена в разных системах координат, например, в статической системе координат:

$$ds^2 = dt^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right)} - r^2 d\Omega \quad (2.17)$$

Строим пространство де Ситтера в пространстве, как гиперboloид в пространстве Минковского:

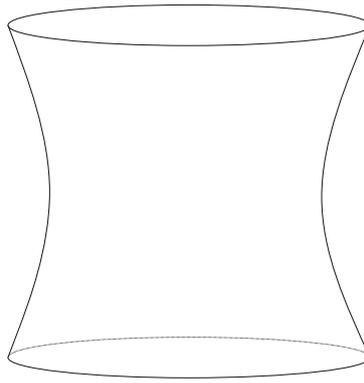


Рис. 2.3. Гиперboloид для пространства де Ситтера

$$a^2 = \sum_{i=1}^4 z_i^2 - z_0^2 \quad (2.18)$$

$$ds^2 = dz_0^2 - \sum_i dz_i^2 \quad (2.19)$$

На этом гиперboloиде можно вводить различные системы координат. Одной из них является система для формулы (2.17), а, например, для $k = 0$

$$ds^2 = dt^2 - a^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad a = a_0 e^{Ht} \quad (2.20)$$

В этой метрике есть космологический горизонт, который порождает тепловые эффекты.

Существует также метрика Шварцшильда - де Ситтера

$$ds^2 = dt^2 \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{r_c^2} \right) - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{r_c^2} \right)} - r^2 d\Omega \quad (2.21)$$

Пространство Анти-де Ситтера

Пространство анти-де Ситтера также представляет собой гиперboloид, но другой.

Метрика Шаврцишильда - анти-де Ситтера - *топологические черные дыры*.

$$ds^2 = dt^2 \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{2M}{r} \right) - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{2M}{r} \right)} - r^2 d\Omega \quad (2.22)$$

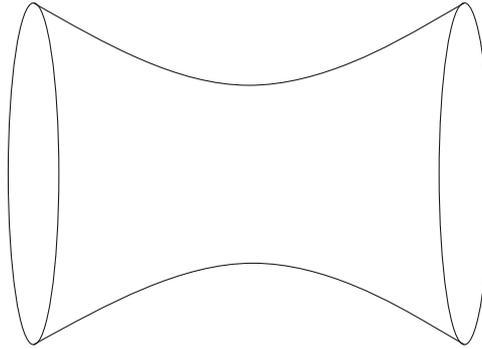


Рис. 2.4. Гиперболоид для пространства анти-де Ситтера

Угловая координата в пространстве анти-де Ситтера открывает несколько топологических возможностей.

$$d\Omega_k = d\theta^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \\ \theta^2 \\ \text{sh}^2 \theta \end{pmatrix} d\varphi^2 \quad (2.23)$$

В бесконечном пространстве анти-де Ситтера возникает возможность того, что горизонт имеет топологию плоскости $T^2 \leftrightarrow k = 0$, топологию сферы - $S^2 \leftrightarrow k = 1$ или топологию пространства Лобачевского $H^2 \leftrightarrow k = -1$.

Анизотропные однородные решения

Еще одно космологическое решение для черных дыр - внутренность сферической черной дыры Шварцшильда, оно является анизотропным решением.

Рассмотрим *однородные трехмерные пространства*: пусть существует некоторая кривая поверхность, и на ней действует трехмерная группа изометрий, состоящая из векторов Киллинга:

$$\hat{K}_a = K_a^i \partial_i, \quad (2.24)$$

где производная берется по координатам x^i на поверхности.

Вектора Киллинга образуют алгебру Ли. Возникает задача классификации этих алгебр.

Запишем метрику трехмерного пространства.

$$dl_3^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.25)$$

Уравнения Киллинга:

$$K_{\{i;j\}}^a = 0 \text{ - симметризация по индексам} \quad (2.26)$$

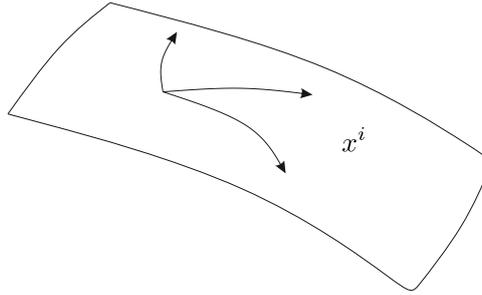


Рис. 2.5. Трехмерная поверхность

Коммутационные соотношения для элементов алгебры Ли:

$$[\hat{K}_a, \hat{K}_b] = \underbrace{C_{ab}^c}_{\text{структурные константы}} \hat{K}_c \quad (2.27)$$

И выполняется тождество Якоби:

$$[[\hat{K}_a, \hat{K}_b], \hat{K}_c] + \text{цикл} = 0. \quad (2.28)$$

Тождество Якоби можно записать и на языке структурных констант

$$CC + CC + CC = 0$$

Система таких уравнений для структурных констант может быть решена. Простейшая группа - модель Bianchi I, в которой группой симметрий является T^3 - 3 трансляции. Метрика для такой модели:

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t)dx_1^2 - a_2^2(t)dx_2^2 - a_3^2(t)dx_3^2 \quad (2.29)$$

Для вакуумного случая (без материи) есть решение Казнера уравнения Эйнштейна для такой метрики

$$a_i = t^{p_i}, \text{ причем} \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1, \quad \left(\sum_i p_i \right)^2 = \sum_i p_i^2 \quad (2.31)$$

Продолжим линию анализа уравнений для структурных констант. Можно выделить след, обозначим:

$$C_{ba}^b = A_a, \quad M^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{acd} (C_{cd}^b - \delta_c^b A_d). \quad (2.32)$$

Тогда из тождества Якоби:

$$\implies M^{ab} A_b = 0, \quad M^{ab} = M^{ba} \quad (2.33)$$

Таким образом, мы параметризовали структурные константы симметричной матрицей и трехмерным вектором. Пользуясь свойствами этих объектов, можем классифицировать алгебры:

- Класс A : $A_a = 0$. Тогда устоятся только матрицы M^{ab} . Матрица может иметь разный ранг, а пространство - разные сигнатуры.

$$\text{rank}M = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2, (+ +), (+ -) \\ 3, (+ + -), \underbrace{(+ + +)}_{SO(3)} \end{cases} \quad (2.34)$$

- Класс $A \neq 0 \implies \text{rank}M \leq 2$ и также можно указать их свойства.

Другая классификация была предложена Бьянки, на основе коммутационных соотношений (подробнее - см. Ландау и Лифшиц). Наиболее интересной моделью является Bianchi IX. Она замечательна тем, что можно записать метрику для 1-форм общего вида

$$ds^2 = - \sum_{a=1}^3 (e_i^a dx^i)^2 \quad (2.35)$$

С помощью этих форм можно записать уравнение Эйнштейна. Для этой модели решение было получено Белинским, Халатниковым и Лифшицом (решение БКЛ). Оказалось, что решение сводится к динамической системе, которая описывает хаотическое движение, хаотическую смену казнеровских эпох.

Лекция 3. Анизотропные решения. Формализм Ньюмана-Пенроуза.

Решения Фридмана существуют для однородного и изотропного трёхмерного пространства при наличии материи. А что происходит вблизи сингулярностей? Там проявляются анизотропные решения, которые допускают нетривиальные решения в отсутствие материи.

Анизотропные решения

Анизотропные решения основаны на представлении об однородных пространствах. В понятие однородности входит транзитивное действие группы изометрий, т.е. для любых точек P_1 и P_2 найдется такое групповое преобразование g :

$$\forall P_1, P_2 \exists g(P_1) \rightarrow P_2 \quad (3.1)$$

Если g - единственный, то действие группы называется *просто транзитивным*

Петров доказал, что существует только 2 случая не просто транзитивных действий: $SO(3) \times R$, $SO(1, 2) \times R$ - цилиндрические и гиперболические поверхности. Явно такие решения построили Кантовский и Сакс.

Рассмотрим просто транзитивное действие группы изометрий. Такие решения называются решениями Бьянки и их можно пронумеровать $I - IX$. Они имеют различные группы изометрий.

Центром исследований анизотропных решений в 60-70-х годах была Москва, где работали общегородские семинары. Поэтому, когда Белинский, Халатников и Лифшиц открыли свое решение (БКЛ), весь город следил за публикацией их статьи.

Решение БКЛ. Модель Bianchi I.

Получение решения БКЛ начинается с того, что в модели Bianchi I с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \quad (3.2)$$

рассматривается действие группы трансляций. Вектора Киллинга этой группы:

$$\{\hat{K}^i\} = \partial_x, \partial_y, \partial_z. \quad (3.3)$$

Расписывая для этой метрики тензор Эйнштейна, получим:

$$G^{tt} = \frac{\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{b}\dot{c}\dot{a} + \dot{c}\dot{a}\dot{b}}{abc} \quad (3.4)$$

$$G^{xx} = -\frac{\dot{b}\dot{c} + b\ddot{c} + c\ddot{b}}{a^2cb}. \quad (3.5)$$

Чтобы построить остальные компоненты, необходимо в последнем выражении произвести циклически перестановки $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$.

Скалярная кривизна для этой метрики:

$$R = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ac} + \underbrace{\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a}}_{=0} \quad (3.6)$$

Если одновременно с этим учесть уравнения Эйнштейна в отсутствие материи:

$$G^{\mu\nu} = 0, \quad (3.7)$$

то можно показать, что последние 3 члена для скалярной кривизны (3.6) обращаются в ноль.

По каждой из осей можно ввести 3 постоянные Хаббла для $\frac{\dot{a}}{a}$, $\frac{\dot{b}}{b}$ и $\frac{\dot{c}}{c}$.

Точные решения Казнера

Можно получить точные решения вблизи сингулярности, которые оказываются степенными. Такие решения построил Казнер (1927). Будем искать коэффициенты в виде

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}. \quad (3.8)$$

После подстановки их в уравнения на компоненты $G_{\mu\nu}$, получим цепочку простых равенств:

$$\begin{cases} a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Решения $\{p_1, p_2, p_3\}$ будем задавать в виде троек чисел, удовлетворяющих условию попарного равенства. Таких решений несколько:

$$(0, 0, 1), \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad (3.10)$$

Для первого случая метрика будет плоской:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - t^2 dz^2. \quad (3.11)$$

Кроме того, после преобразований вида:

$$\begin{cases} t \operatorname{sh} z = \xi \\ t \operatorname{ch} z = \tau \end{cases} \quad (3.12)$$

получим просто метрику Минковского:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - d\xi^2. \quad (3.13)$$

Второе же решение не столь тривиально.

В общем случае для решений $\{p_i\}$ мы всегда будем получать, что одно из чисел будет отрицательным, а два других - положительными. В качестве отрицательного числа выберем p_1 . Удобно ввести параметризацию этих чисел:

$$p_1 = -\frac{u}{1+u+u^2}; \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}; \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}, \quad u \geq 0 \quad (3.14)$$

Видно, что эти числа получаются друг из друга некоторым сдвигом по u , что и стало ключевым в решении БКЛ.

Кроме того, есть замена при $0 \leq u < 1$:

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = p_2(u) \quad (3.15)$$

Это точное решение Казнера, описывающее приближение к сингулярности. Хотя это решение и является точным, модель не так интересна.

Модель Бианки IX

Решение отличается тем, что в метрике (3.2) вместо пространственных координат подставляются координатные формы. Обозначим буквой $\sigma_k = e_i^{(k)} dx^i$, $k = 1, 2, 3$ - дифференциальные 1-формы, где в качестве x^i выберем углы Эйлера :

$$x^i = (\psi, \theta, \varphi) \text{ - параметризация группы вращений.} \quad (3.16)$$

В алгебре $SO(3)$:

$$d\sigma_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \sigma^l \wedge \sigma^m, \quad (3.17)$$

где ε_{klm} - структурные константы алгебры $SO(3)$. Введем аналог пространственных координат.

$$\sigma_x = \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\varphi \quad (3.18)$$

$$\sigma_y = \cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\varphi \quad (3.19)$$

$$\sigma_z = -(d\psi + \cos \theta d\varphi), \quad (3.20)$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$. Тогда сама метрика записывается как:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\sigma_x^2 - b^2\sigma_y^2 - c^2\sigma_z^2. \quad (3.21)$$

Далее, снова расписывая уравнение Эйнштейна в пустоте в форме (3.7), получим:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{(\dot{abc})'}{abc} = \frac{[(b^2 - c^2)^2 - a^4]}{2(abc)^2} \quad (3.23)$$

Все остальные уравнения получаются циклической перестановкой коэффициентов $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ в последнем выражении.

При малых $abc \ll 1$ решение переходит в модель Bianchi I. Можно усовершенствовать запись, если ввести экспотенциальную параметризацию:

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad c = e^\gamma; \quad d\tau = \frac{dt}{abc} \quad (3.24)$$

Тогда 3 последних уравнения системы (3.23) перепишутся в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\alpha} = \frac{1}{2} \left((b^2 - c^2)^2 - \underbrace{a^4}_{=e^{4\alpha}} \right) \\ \text{перестановка } a \rightarrow b \rightarrow c, \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Видно, что это сводится к простому осциллятору. В итоге, при росте a возникает ситуация отражения $\dot{\alpha}$.

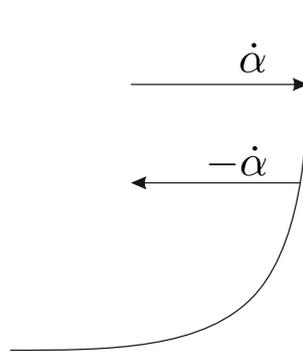


Рис. 3.1. Отражение в модели Бьянки IX

Таким образом, в отличие от модели Bianchi I, в этой модели есть потенциал, причем частица от него отражается с противоположным импульсом $P_1 \rightarrow -P_1$. Значит какой-то другой индекс из тройки $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ становится отрицательным.

$$P_1 \rightarrow -P_1, \quad P_2 \rightarrow \dots, \quad P_3 \rightarrow \dots \quad (3.26)$$

А общий сдвиг можно представить в виде

$$u \rightarrow u - 1$$

Происходит замена индексов, т.е. p_2 - теперь расширяющееся решение, а p_1 и p_3 - сжимающиеся решения. Т.к. знаки p_i изменились, то происходит смена Казнеровских эпох. Для более подробного изложения - можно обратиться к книге Ландау и Лифшица.

Важно отметить и работу Мизнера, который вводил цилиндрические координаты в пространстве $\{p_i\}$ и также рассматривал модель с потенциалом, отражение от которого, однако, оказывалось хаотическим. Такая система получила название «Биллиард». Если построить это решение на машине, мы получим хаос. Ссылка на работу для подробного изложения: [gr-qc/9612066](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9612066).

Таким образом, решение Bianchi IX оказывается хаотическим и описывает приближение к сингулярности.

Решение БКЛ 2

Спустя несколько лет эти же авторы (БКЛ) рассмотрели неоднородные решения (БКЛ 2). Дело в том, что однородные решения не являются общими. Общее решение уравнения Эйнштейна, если оно вакуумное, содержит 4 независимых функции, а решение с материей - 8 независимых функций, т.к. надо добавить начальное распределение массы материи и поле скоростей материи.

$$\begin{cases} \text{vac} \leftrightarrow 4 \text{ независимых функций} \\ \text{mat} \leftrightarrow 4 + 4 \text{ независимых функций} \end{cases} \quad (3.27)$$

В однородном случае независимых функций меньше.

В решении БКЛ 2 показано, что ситуация Хаоса остается, и также происходит смена эпох, однако теперь это казнеровские эпохи с материей.

Решение Контовского-Сакса

Приведем решение Контовского-Сакса - анизотропное решение, для которого группа симметрией является транзитивной, но не просто транзитивной.

Например, на сфере $S(2) \times R$ между двумя точками, лежащими на большом круге, можно пройти двумя разными путями, которым соответствуют два групповых преобразования вращения круга.

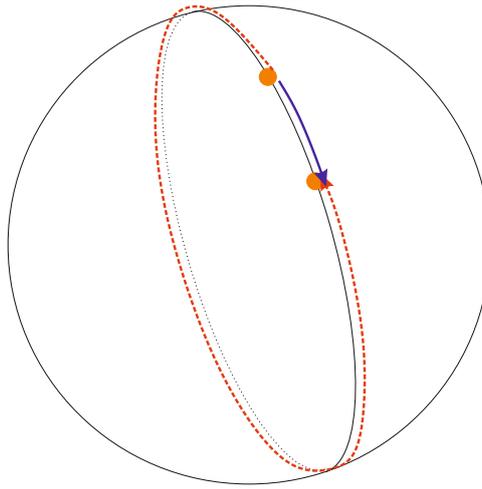


Рис. 3.2. Транзитивная группа симметрий сферы

Также к пространствам с транзитивной, но не просто транзитивной группой симметрий относится пространство Лобачевского $H_2 \times R$. Метрики в таких пространствах выглядят как:

$$ds^2 = dt^2 - X^2(t)dr^2 - Y^2(t) \underbrace{d\Omega}_{\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2} - \text{ для } S_2 \times R \quad (3.28)$$

$$ds^2 = dt^2 - X^2(t)dr^2 - Y^2(t) (\text{sh}^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \text{ для } H_2 \times R \quad (3.29)$$

Решение для сферы можно назвать закрытым (closed), а для гиперболоида - открытым (opened).

Векторы Киллинга группы симметрий состоят из трансляций и векторов группы $SU(3)$:

$$\{\hat{K}_i\} = \{\partial_r, \partial_\varphi, \sin \varphi \partial_\theta + \text{ctg } \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \cos \varphi \partial_\theta - \text{ctg } \theta \sin \varphi \partial_\varphi\}$$

Для гиперболического случая - тригонометрические функции меняются на гиперболические.

Из уравнения Эйнштейна: ($8\pi G = 1$)

$$T_0^0 = 2 \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \frac{1 + \dot{Y}^2}{Y^2} \quad (3.30)$$

$$T_1^1 = 2 \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{1 + \dot{Y}^2}{Y^2} \quad (3.31)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} \quad (3.32)$$

Если материя представляет собой пыль - $T_0^0 = \rho$, тогда решениями для открытого случая являются функции:

$$X = \varepsilon + (\varepsilon\eta + b) \operatorname{tg} \eta \quad (3.33)$$

$$Y = a \cos^2 \eta \quad (3.34)$$

$$t = a \left(\eta + \frac{1}{2} \sin 2\eta \right) \quad (3.35)$$

А плотность материи задается как:

$$\rho = \varepsilon \frac{1}{\cos^4 \eta a^2} (1 + (\eta + b) \operatorname{tg} \eta), \quad (3.36)$$

где $\varepsilon = 0, 1$; $-\infty < a < \infty$; $0 < b \leq \frac{\pi}{2}$. Решения для закрытого случая получаются заменой тригонометрических функций на гиперболические.

Рассмотрим случай $\eta \rightarrow 0$, $\varepsilon = 0$, тогда $t \sim \eta a$ и

$$X \rightarrow 0 \quad (3.37)$$

$$Y \rightarrow a = \operatorname{const}. \quad (3.38)$$

То есть сферический элемент «схлопывается» и пространство представляет собой «блин».

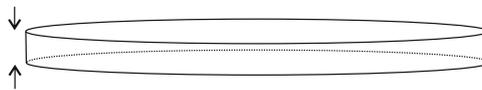


Рис. 3.3. Частный случай. «Блин»

Рассмотрим частный случай решения, когда $\varepsilon = 0$; $a = 2M$, $Y = r$, $r = t$ и будем рассматривать случай, когда $Y < 2M$, тогда:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\frac{2M}{r} - 1} - dt^2 \left(\frac{2M}{r} - 1 \right) - r^2 d\Omega = \quad (3.39)$$

$$= dt^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega. \quad (3.40)$$

Заметим, что мы получили решение Шварцшильда.

Формализм Ньюмана-Пенроуза

Формализм Ньюмана-Пенроуза был предложен как метод решения уравнения Эйнштейна в спинорных переменных. Вся теория основана на том, что группа Лоренца покрывается группой $SL(2, \mathbb{C})$.

Обзоры по теме - Г.А. Алексеев, В.И. Хлебников в ЭЧАЯ; Пенроуз, Риндлер - «Спиноры и Пространство-Время».

Рассмотрим двухкомпонентный спинор $\xi^A \in \mathbb{C}^2$, $A = 0, 1$ - спинорный индекс:

$$\xi^A = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix}.$$

Введем в \mathbb{C}^2 симплектическую метрику, т.е. скалярное произведение спиноров обозначается как $[\xi, \eta]$ и является антисимметричным.

$$[\xi, \eta] = \xi^A \eta^B \epsilon_{AB}, \quad (3.41)$$

где

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \text{метрика.} \quad (3.42)$$

Такие величины образуют пространство $S(\mathbb{C}^2, \epsilon)$.

Поскольку мы работаем с комплексными величинами, можем ввести комплексно сопряженное (или просто «сопряженное») пространство \bar{S} . Будем обозначать объекты в этом пространстве $\bar{\xi}^{\dot{A}}$, спинорные индексы обозначаются буквой с точкой (\dot{A}). Метрика в таком пространстве - $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$.

Кроме того, можно образовать дуальное пространство (или пространство функционалов, сопряженных к S), которое будем обозначать S^* . Оно состоит из объектов с нижним индексом ξ_A . Аналогично, дуальное пространство для комплексно сопряженных величин обозначим \bar{S}^* с объектами $\bar{\xi}_{\dot{A}}$.

Таким образом, мы ввели 4 типа пространств: S , \bar{S} , S^* , \bar{S}^* .

Имея метрику, мы можем превращать спиноры в коспиноры и наоборот, путем поднятия и опускания индексов.

Опусканием спинорного индекса назовем операцию:

$$\xi_A = \xi^B \epsilon_{BA}, \quad (3.43)$$

причем, в силу антисимметричности метрики, порядок важен - индекс суммирования «бежит сверху вниз».

Поднятием спинорного индекса назовем операцию:

$$\xi^A = \epsilon^{AB} \xi_B, \quad (3.44)$$

где индекс суммирования снова «бежит сверху вниз».

Метрику с верхними индексами определим как

$$\epsilon^{AB} = \epsilon_{AB} \quad (3.45)$$

Метрику сопряженного пространства определим как:

$$\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{AB} \quad (3.46)$$

и т.д. **Упражнение** - проверить соотношение (3.45) для метрик.

Интересно, что если рассмотреть метрику как матрицу $\|\epsilon_{AB}\|$ (3.42) и вычислить от нее обратную, то

$$\|\epsilon_{AB}\|^{-1} = -\|\epsilon^{AB}\| \quad (3.47)$$

Упражнение: используя правила для поднятия и опускания индексов, показать, что:

$$\epsilon_C^A = -\epsilon_C^A = \delta_C^A \quad (3.48)$$

Рассмотрим произведения пространств. Например, пространство $S \otimes S$ является пространством двухиндексных спиноров ξ^{AB} .

Аналогично, пространство $S^* \otimes S^*$ - пространство спиноров с нижними индексами ξ_{AB} .

Так можно рассматривать различные тензорные произведения пространств $S, \bar{S}, S^*, \bar{S}^*$, и в качестве элементов пространства получать смешанный многокомпонентный спинор типа $\xi_{CD...}^{AB...}$.

Рассмотрим спинор $U^{A\dot{B}} \in S \otimes \bar{S}$, причем рассмотрим только случай, когда этот спинор является эрмитовой матрицей.

В пространстве таких эрмитовых матриц есть базис, который состоит из матриц Паули и единичной матрицы, причем нумерация и нормировка отличаются от

общепринятых.

$$\sigma_0^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$\sigma_1^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\sigma_2^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\sigma_3^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

Тогда можно написать:

$$U^{A\dot{B}} = \sum_{\mu=0}^3 U^\mu \sigma_\mu^{A\dot{B}}, \quad (3.54)$$

где U^μ - набор коэффициентов.

Нетрудно видеть, что мы получили накрывающую группу $SL(2, \mathbb{C})$ группы Лоренца, т.к.

$$\det \|U^{A\dot{B}}\| = \frac{1}{2} \left((U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 \right) = \frac{1}{2} U^\mu U^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (3.55)$$

Таким образом, мы получили правило соответствия, по которому коэффициенты U^μ , U^ν являются векторами пространства Минковского. Тогда можем использовать метрику Минковского $\eta_{\mu\nu}$ для поднятия и опускания индексов коэффициентов $\{U^\mu\}$.

Таким образом, если у нас есть тензор с большим количеством Лоренцевых индексов $t^{\mu\dots}_{\nu\dots}$, можем умножить его на элементы базиса $\sigma_\mu^{A\dot{B}}$ и получить соответствующий ему спинор τ^{MM}_{NN} причем каждому пунктирному индексу должен соответствовать один не пунктирный.

Будем обозначать такой соответствие как:

$$t^{\mu\dots}_{\nu\dots} \Leftrightarrow \tau^{MM}_{NN} \dots \quad (3.56)$$

Упражнение: Показать, что $\eta_{\mu\nu} \implies \varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}}$.

Лекция 4. Формализм Ньюмана-Пенроуза. Классификация Петрова-Пирани.

Спиноры и формализм Ньюмана-Пенроуза

Рассматриваем спиноры, как заданные числа, привязанные к одной точке. Сама алгебраическая структура пространства спиноров порождает метрику Минковского, т.к. это пространство строится так, что группа, оставляющая инвариантной симплектическую метрику - это группа, локально изоморфная группе Лоренца.

Рассматриваем пару комплексных чисел: S - пространство \mathbb{C}^2 с метрикой

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.1)$$

Элементы пространства - спиноры - ξ^A :

$$\xi^A = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Скалярное произведение, построенное с помощью такой метрики:

$$[\xi, \eta] = \epsilon_{AB} \xi^A \eta^B. \quad (4.3)$$

Можно ввести также сопряженное пространство - S^* : каждому спинору ξ^A сопоставляется η_A - спинор с нижними индексами (ковариантное представление спиноров):

$$\eta = \eta_A \xi^A. \quad (4.4)$$

Правила поднятия и опускания индексов:

$$\xi_B = \xi^A \epsilon_{AB}, \quad (4.5)$$

«причем индекс суммирования должен бежать сверху-вниз».

Заметим, что антисимметричное скалярное произведение удовлетворяет условию:

$$\xi_A \xi^A = 0. \quad (4.6)$$

Метрика сама представляет собой спинор. Возникает вопрос - как построить контрвариантную метрику, если она не является обратной к ковариантной.

Зададим по определению:

$$\epsilon^{AB} = \epsilon_{AB}, \quad (4.7)$$

Тогда можем ввести базис, состоящий из спинора \mathcal{O} - «Омикрон»

$$\mathcal{O}^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

И «иисилон»

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Тогда метрика представляется тензорным произведением:

$$\varepsilon^{AB} = \mathcal{O}^A \otimes \mathbf{v}^B - \mathbf{v}^A \otimes \mathcal{O}^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

и можно убедиться, что соотношения для этих объектов с разными расположениями индексов:

$$\mathcal{O}_A = \mathbf{v}^A, \quad \mathbf{v}_A = -\mathcal{O}^A, \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{AB} = \mathcal{O}_A \otimes \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \otimes \mathcal{O}_B. \quad (4.12)$$

Поскольку мы работаем с комплексными величинами, их можно комплексно сопрячь. Введем другое представление - $\bar{\mathcal{S}}$, с объектами $\bar{\xi}^{\dot{A}}$. Метрика в таком представлении:

$$\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Утв. Рассмотрим дробно-линейное преобразование базисных спиноров вида

$$\mathcal{O}'^A = \alpha \mathcal{O}^A + \beta \mathbf{v}^A \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v}'^A = \gamma \mathcal{O}^A + \delta \mathbf{v}^A. \quad (4.15)$$

Тогда такое преобразование сохраняет метрику, если коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \quad (4.16)$$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1 \quad (4.17)$$

$$\implies \varepsilon'^{AB} = \mathcal{O}'^A \mathbf{v}'^B - \mathbf{v}'^A \mathcal{O}'^B = \varepsilon^{AB}$$

Рассмотрим двухкомпонентный спинор смешанной валентности, причем будем считать, что сама матрица эрмитова - $U^{\dot{A}\dot{B}}$.
 $S \otimes \bar{\mathcal{S}}$

Базис в пространстве таких эрмитовых матриц:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Можем записать элементы базиса как: $\sigma_\mu^{A\dot{B}}$. Тогда, разлагая эрмитову матрицу по базису, получим:

$$U^{A\dot{B}} = \sum_{\mu=0}^3 U^\mu \sigma_\mu^{A\dot{B}} \quad (4.22)$$

Рассмотрим преобразование базиса, при котором метрика в спинорном пространстве не меняется и вычислим определитель матрицы $U^{A\dot{B}}$:

$$\det |U^{A\dot{B}}| = \frac{1}{2} \left((U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 \right) \quad (4.23)$$

Видим, что выделяется сигнатура Минковского $(+---)$, и

$$\det |U^{A\dot{B}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} U^0 + U^1 & U^2 + iU^3 \\ U^2 - iU^3 & U^0 - U^1 \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

Это не удивительно, т.к. группа $SL(2, \mathbb{C})$ унимодулярных преобразований в пространстве спиноров имеет ту же алгебру Ли, т.е. $sl(2, \mathbb{C}) = so(1, 3)$.

Таким образом, у коэффициентов разложения индексы μ поднимаются и опускаются метрикой $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Если построить такой вектор $U^{A\dot{B}}$, который равен

$$U^{A\dot{B}} = \xi^A \otimes \bar{\xi}^{\dot{B}}, \quad (4.25)$$

то ему будет соответствовать вектор U_μ с нормой, равной нулю, - изотропный вектор

$$U^\mu U_\mu = 0.$$

В обратную сторону это тоже справедливо. Если есть изотропный вектор $k^\mu k_\mu = 0$, то ему будет соответствовать спинор

$$k^\mu \Leftrightarrow \pm \varkappa^A \bar{\varkappa}^{\dot{B}} \quad (4.26)$$

Правило соответствия - умножение вектора k^μ на символ $\sigma_\mu^{A\dot{B}}$. Таким образом, каждый одновалентный спинор порождает изотропный вектор.

Лемма о приведении.

Будем рассматривать общую спинорную конструкцию. Заметим, что на множестве индексов без точек порядок расположения индексов имеет значение, то же - на множестве индексов с точками. Но индексы с точкой и без точек относительно друг друга можно перемещать. Рассмотрим объект:

$$\tau_{CD... \dot{C}\dot{D}...}^{AB... \dot{A}\dot{B}...} - \text{спин-тензор общего вида.}$$

В пространстве таких спин-тензоров можно установить простое соответствие:

$$\eta_{\mu\nu} \Leftrightarrow \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}. \quad (4.27)$$

Для этого необходимо свернуть правую часть с $\sigma_{\mu}^{A\dot{C}}\sigma_{\nu}^{B\dot{D}}$, либо правую часть с $\sigma_{A\dot{C}}^{\mu}\sigma_{B\dot{D}}^{\nu}$.

Спиноры, которые мы рассматриваем, образуют приводимое представление $SL(2, \mathbb{C})$. Если рассмотреть многоиндексный спинор валентности n , то выделяя последовательно все пары индексов, можем сказать, что

$$\tau_{[n]...AB...} = \tau_{\dots\{A,B\}\dots} + \epsilon_{AB}\tau_{\dots C\dots} \quad (4.28)$$

Т.е., для любой пары индексов

$$BD = \{B, D\} + \underbrace{[B, D]}_{=\epsilon_{BD}}, \quad (4.29)$$

где $\{ \}$, $[\]$ - симметризация и антисимметризация индексов соответственно.

Применяя эту лемму последовательно, можем прийти к разложению вида:

$$\epsilon \times \epsilon \times \dots \times \epsilon \times \xi, \quad (4.30)$$

где ξ - однокомпонентный спинор либо число.

Полное доказательство основано на тождестве Якоби, которое можно написать для симплектической метрики:

$$0 = \epsilon_{A[B\epsilon_{CD}] = \epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} \quad (4.31)$$

Свернем тождество Якоби с тензором τ^{CD} , тогда получим:

$$\tau_{[AB]} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\tau_C^C \quad (4.32)$$

Это конструкция, которая позволяет разложить это представление на неприводимые. Симметричный же тензор ни с чем свернуть нельзя - они лежат в неприводимом представлении $SL(2, \mathbb{C})$

Примеры применения леммы о приведении

- 1) Символ Леви-Чивиты - $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$. Для построения соответствия, нужно умножить его на $\sigma_{AB}^\mu \sigma_{CD}^\nu \sigma_{EF}^\lambda \sigma_{GH}^\tau$. Т.к. символ Леви-Чивиты абсолютно антисимметричный, то все симметричные части в разложении будут отсутствовать. Возникает разложение по парам индексов:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = \varepsilon_{[\mu\nu\lambda\tau]} \Leftrightarrow i (\varepsilon_{AE} \varepsilon_{CG} \varepsilon_{\dot{B}\dot{H}} \varepsilon_{\dot{D}\dot{F}} - \varepsilon_{AG} \varepsilon_{CE} \varepsilon_{\dot{B}\dot{F}} \varepsilon_{\dot{D}\dot{H}}) \quad (4.33)$$

- 2) Максвелловский тензор поля $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}$$

Если мы хотим сделать из него спинор, необходимо свернуть его с $\sigma_{AB}^\mu \sigma_{CD}^\nu$. Такой спинор будет равен:

$$\begin{aligned} F_{AC\dot{B}\dot{D}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} F_E^E \{ \dot{B}\dot{D} \} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} F_{\{AC\}\dot{H}}^{\dot{H}} + F_{\{AC\}\{\dot{B}\dot{D}\}} \overset{0}{C} + \frac{1}{4} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} F_{E\dot{H}}^{E\dot{H}} \implies \\ &\implies \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{AC} \underbrace{\bar{\Phi}_{\dot{B}\dot{D}}}_{=\bar{\Phi}_{\dot{D}\dot{B}}} + \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \underbrace{\Phi_{AC}}_{=\Phi_{CA}} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

- 3) Рассмотрим тензор вида:

$$F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F^{\lambda\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Phi_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad (4.35)$$

где \tilde{F} - дуальная по Ходжу:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F^{\lambda\tau}. \quad (4.36)$$

Можем ввести *просто дуальность*, а дуальность по Ходжу будем обозначать звездочкой \star :

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \text{dual } F_{\mu\nu} = i \star F_{\mu\nu}. \quad (4.37)$$

Тогда наша комбинация $F + i\tilde{F}$ является *автодуальной* в смысле такого определения дуализации (4.37):

$$i \star (F + i \star F) = F + i \star F, \quad (4.38)$$

т.к. $\star\star = -1$.

Теорема 1.

Полное разложение тензора на неприводимые симметричные спин-тензоры:

$$\begin{aligned} \tau_{A\dots F} = \tau_{\{A\dots F\}} + \varepsilon_{AB}\alpha_{\{C\dots F\}} + \dots \\ \text{разложение с одним } \varepsilon - \text{выбор других пар} \\ + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} \underbrace{\beta_{\{\dots\}}}_{n-4} + \dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

Теорема 2.

$$\tau_{AB\dots F} = \tau_{\{AB\dots F\}} = \alpha_{\{A}\beta_{A\dots}\gamma_F\} \quad (4.40)$$

Каждый неприводимый симметричный спинор представим в виде произведения однокомпонентных спиноров. Однокомпонентные спиноры ассоциируются с изотропными направлениями (4.26), т.е. однокомпонентные спиноры порождают направление, которому соответствует изотропный вектор K^μ

$$K^2 = 0, K^\mu \Leftrightarrow \alpha_A \bar{\alpha}^{\dot{B}}. \quad (4.41)$$

Пример использования такого подхода - это классификация полей Максвелла.

Классификация полей Максвелла

Рассмотрим автодуальный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, которому соответствует двухкомпонентный симметричный спинор φ_{AC} :

$$F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi_{AC} \\ \text{симметр.} \end{matrix} \quad (4.42)$$

Симметричный спинор, согласно теореме 2 (4.40) можно разложить на произведение однокомпонентных спиноров:

$$\varphi_{AC} = \alpha_{\{A}\beta_{C\}} \quad (4.43)$$

Тогда возможные варианты:

- Спиноры пропорциональны друг другу: $\beta_C = c\alpha_C$. Тогда оба спинора порождают какое-то одно изотропное направление $\implies l^\mu$ и $l^2 = 0$ - тип *N*.
- α и β различны, тогда они порождают два направления l^μ и n^μ , которые ассоциированы со спинорными конструкциями: $l^\mu \leftrightarrow \alpha_A \bar{\alpha}^{\dot{B}}$ и $n^\mu \leftrightarrow \beta_A \bar{\beta}^{\dot{B}}$ - тип *III*.

Пользуясь этой классификацией, можно учесть запаздывающий потенциал в электродинамике. Закону убывания полей можно сопоставить тип тензора: так, запаздывающий потенциал при $r \rightarrow \infty$

$$F_{\text{ret}}^{\mu\nu} \underset{r \rightarrow \infty}{=} F_Q^{\mu\nu} + F_{\text{rad}}^{\mu\nu}(a) \quad (4.44)$$

$\sim \frac{1}{r^2}$ $\sim \frac{1}{r}$

Тогда различные типы тензорных полей ведут себя по-разному на пространственной бесконечности:

$$\frac{1}{r \rightarrow \infty} : \frac{III}{r^2} + \frac{N}{r} \quad (4.45)$$

Используя то же самое соответствие, можно комплексному симметричному спинору сопоставить тензор $\varphi_{AC} \rightarrow F_{\mu\nu}$.

Используя разложение на неприводимые однокомпонентные части, сами изотропные векторы можно искать как решение характеристического уравнения:

$$l_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu]\lambda} l^\nu = 0 \quad (4.46)$$

Тогда решениями будут l^μ, l^ν либо l^μ, n^ν

Если направления совпадают, то уравнение выше (4.46) упрощается до

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} l^\nu = 0 \quad (4.47)$$

Классификация Петрова-Пирани.

Оставаясь на уровне алгебраической классификации, в гравитации можем рассмотреть тензор Вейля $C_{\mu\nu\lambda\tau}$ - бесследовая часть тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\tau}$, причем вся остальная часть тензора кривизны заключена в тензоре Ричи $R_{\mu\nu}$. Две этих величины полностью описывает тензор кривизны.

Классификация основана на приведении к неприводимым представлениям и понятии изотропных направлений, когда тензору Вейля будет соответствовать один симметричный спинор $\Psi_{\{ABCD\}}$, который «рассыпается» на произведение однокомпонентных спиноров:

$$\Psi_{\{ABCD\}} = \alpha_{\{A} \beta_B \gamma_C \delta_{D\}} - \text{главные спиноры} \quad (4.48)$$

Здесь классификация, конечно, шире:

- 1) Существует единственный главный спинор, а все остальные - ему пропорциональны. Это единственный главный спинор порождает изотропное направление

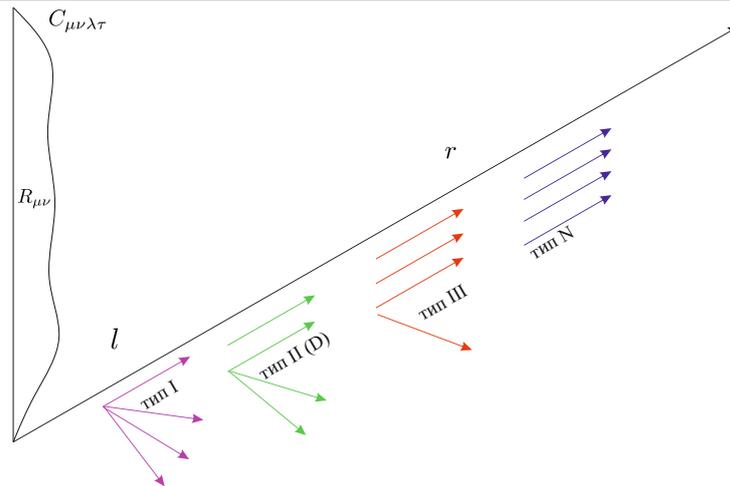


Рис. 4.1. Классификация полей Петрова-Пирани

l^μ , и можно ввести радиальную координату вдоль этого направления. Такое поле называется полем типа N , а кратность корня равна 4. Такое поле ведет себя как $\sim \frac{1}{r}$ при $r \rightarrow \infty$.

Пусть у нас есть коллапсирующая материя, которая излучает гравитационные волны, а наблюдение производится вдоль некоторого изотропного направления, вдоль которого будем выбирать аффинный параметр r . Стрелками будем показывать различные направления изотропных векторов для различных типов полей относительно направления рассмотрения.

Для более подробного изложения можно ознакомиться с «теоремой о расщеплении Сакса».

- 2) 3 главных спинора порождают l^μ , а один - n^μ - тип III . (3,1)-кратность корней, поле ведет себя как $\sim \frac{1}{r^2}$ на бесконечности.
- 3) Тип II - кратность корней (2,1,1). Поле $\sim \frac{1}{r^3}$.
- 4) Тип D - кратность (2, 2). Поле $\sim \frac{1}{r^3}$.
- 5) Тип I - кратность (1,1,1,1). Поле $\sim \frac{1}{r^4}$.
- 6) Тип I' - кратность (1,1,1,1), но ни один из векторов не совпадает с направлением рассмотрения. Поле $\sim \frac{1}{r^5}$.
- 7) Тип O - тензор Вейля равен 0: $C_{\mu\nu\lambda\tau} = 0$.

Такая классификация называется **классификацией Петрова-Пирани**.

Пусть есть пара базисных спиноров - \mathcal{O}^A, ν^A . Тогда мы можем построить векторы как:

$$l_\mu \leftrightarrow \mathcal{O}_A \bar{\mathcal{O}}^{\dot{A}} \quad (4.49)$$

$$n_\mu \leftrightarrow \nu_A \bar{\nu}^{\dot{A}} \quad (4.50)$$

$$m_\mu \leftrightarrow \mathcal{O}_A \bar{\nu}^{\dot{B}} \quad (4.51)$$

$$\bar{m}_\mu \leftrightarrow \nu_A \bar{\mathcal{O}}^{\dot{B}} \quad (4.52)$$

при этом свойства получившихся векторов:

$$l^2 = n^2 = 0, \quad l_\mu n^\mu = 1.$$

Для m, \bar{m} :

$$m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0, \quad \bar{m}_\mu m^\mu = -1.$$

Соответствующие векторы также можно построить, пользуясь тетрадным формализмом. На элементах ортогональной тетрады e_μ^a :

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = \eta_{\mu\nu}. \quad (4.53)$$

Тогда векторы могут быть построены, как:

$$l = e^0 + e^1, \quad (4.54)$$

$$n = \frac{1}{2} (e^0 - e^1), \quad (4.55)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^2 + ie^3), \quad (4.56)$$

$$\bar{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^2 - ie^3) \quad (4.57)$$

Это эквивалентно тому, что мы представили метрику в виде комбинации изотропных векторов:

$$\eta_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (4.58)$$

Такой подход носит название «формализм изотропной тетрады Ньюмана-Пенроуза». Такая тетрада естественным образом ассоциируется с двумя спинорами.

Лекция 5. Спиноры и формализм Ньюмана-Пенроуза. Диадный формализм

«Алгебра» в формализме Ньюмана-Пенроуза

Как правило, в ОТО мы имеем дело с тензорами: $t_{\mu\dots}^{\nu\dots}$. Также, можно рассмотреть объект σ_{AB}^{μ} , который позволяет «конвертировать» тензоры в т.н. *мультикомпонентные спиноры* путем сворачивания по латинским индексам:

$$t_{\mu\dots}^{\nu\dots} \xrightarrow{\sigma_{AB}^{\mu}} t_{AB\dots}^{\nu\dots} \quad (5.1)$$

Индексы можно упорядочивать сверху и снизу отдельно так, чтобы пунктирные и не пунктирные индексы стояли рядом, причем внутри пунктирных и не пунктирных индексов порядок менять нельзя.

По теореме о приведении можно показать, что наиболее интересно рассматривать именно симметричные относительно перестановок индексов $A, B, \dots = \{0, 1\}$ мультикомпонентные спиноры.

Действительно, рассмотрим произвольный $t_{\dots AB \dots}$. Тогда, разлагая спинор на симметричный и антисимметричный по этим индексам:

$$AB \rightarrow \{A, B\} + [A, B] \quad (5.2)$$

можем заметить, что часть, соответствующая $[A, B]$ - это антисимметричная метрика ϵ_{AB} .

Значит достаточно рассматривать симметричные спиноры, которые обладают тем свойством, что факторизуются на произведение т.н. *главных* однокомпонентных спиноров

$$t_{\{AB\dots G\}} = \alpha_{\{A} \beta_B \dots \gamma_G\}. \quad (5.3)$$

Ранее мы уже вводили комплексную метрику ϵ_{AB} . Мы доказали утверждение, что дробно-линейное преобразование компонент метрики с коэффициентами, образующими группу $SL(2, \mathbb{C})$, не меняет метрику, а значит - является ее изометрией. Отсюда мы вывели рецепт, по которому каждому двухиндексному спинору с одним пунктирным и одним не пунктирным индексом можно сопоставить вектор в пространстве Минковского.

Можно доказать также свойство, что каждому однокомпонентному спинору α_A соответствует некоторое изотропное направление:

$$\forall \alpha_A : \exists \text{ вектор } l^{\mu} = \alpha^A \bar{\alpha}^{\dot{B}} \sigma_{AB}^{\mu}, \quad (5.4)$$

$$l^\mu l_\mu = 0 \quad (5.5)$$

Последнее свойство выполняется в силу того, что $\alpha_A \alpha^A = 0$:

Тетрадный формализм

Рассмотрим спинорные поля, зависящие от точки: $t_{AB\dots}(x)$. Пусть пространство имеет кривую метрику $g_{\mu\nu}$, и ее мы также можем описать в спинорном виде.

Прежде всего, у нас есть необходимость научиться дифференцировать тензоры.

Каждому тензору можно сопоставить тетрадную проекцию, т.е. если тензор - $t_{\mu\dots}^{\nu\dots}$, а e_m^μ - базисные векторы, то

$$e_m^\mu \cdot t_{\mu\dots}^{\nu\dots} \rightarrow t_{m\dots}^{\nu\dots}, \quad (5.6)$$

и тогда вектор по индексу m преобразуется уже по метрике Минковского.

Метрика в тетрадном формализме:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn} \quad (5.7)$$

В качестве базиса в формализме Ньюмана-Пенроуза выбирается изотропный базис, т.е. векторы e_μ^m - изотропные. Тогда η_{mn} не обязательно будет иметь вид $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$, но останется матрицей с постоянными коэффициентами.

Тетрадная проекция t_{mn} , которая соответствует тензору $t_{\mu\nu}$, - это скаляры, относительно диффеоморфизмов, т.е. ковариантная производная таких объектов по аффинной связности равна нулю. Однако, если мы ввели тетраду, возникает группа изометрий - $SO(1,3)$ и, как следствие, появляется также Лоренцева связность

Будем обозначать символом $\overset{tot}{\nabla}_\mu \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \omega^{mn} \right)$ связность, включающую в себя как аффинную связность Γ , так и Лоренцеву ω .

Требование: Пусть тетрада переносится параллельно по отношению к полной ковариантной производной:

$$\overset{tot}{\nabla}_\mu e_\nu^m = 0 \quad (5.8)$$

В итоге, это дает нам связь между ω и Γ . Выраженные связности ω^{mn}_μ через $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ называются *коэффициентами вращения Риччи*.

Если подействовать на объект t_{mn} полной ковариантной производной:

$$\overset{tot}{\nabla}_\mu t_{mn} = \partial_\mu t_{mn} + \omega \dots, \quad (5.9)$$

то возникает член с Лоренцевой связностью.

Диадный формализм

Подобную структуру можно построить и в пространстве спиноров. Рассмотрим спинор ξ^A . Аналогично тому, что мы делали для тензоров, разложим его по т.н. *базисной диаде* (аналогу тетрады для спиноров) и получим объект с *диадным* индексом ξ^a :

$$\xi^A = \xi^a \zeta_a^A(x), \quad a = 0, 1 \quad (5.10)$$

Диада факторизует метрику:

$$\varepsilon^{AB}(x) = \zeta_a^A \zeta_b^B \varepsilon_{ab}, \quad \text{где} \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Аналогично тому, как в случае тетрадного формализма метрика, зависящая от координат $g_{\mu\nu}(x)$ приводилась к постоянной η_{mn} (5.7).

Введем обозначения для базисной диады:

$$\zeta_0^A = \mathcal{O}^A(x), \quad \zeta_1^A = \nu^A(x) \quad (5.13)$$

Аналогичным образом, можем разложить по диаде символы ван дер Вардена σ_{AB}^μ : (индексы «переворачиваются» по соответствующим им метрикам)

$$\sigma_{AB}^\mu = \sigma_{ab}^\mu \zeta_a^A \bar{\zeta}_B^b \quad (5.14)$$

Введем новую систему обозначений: любой паре, состоящей из базисных векторов \mathcal{O} и ν , можно сопоставить 4-вектор в пространстве-времени как:

$$l^\mu = \sigma_{ab}^\mu \mathcal{O}^a \bar{\nu}^b, \quad (5.15)$$

или в краткой записи:

$$l^\mu \sim \mathcal{O} \bar{\nu} \quad (5.16)$$

$$n^\mu \sim \nu \bar{\mathcal{O}} \quad (5.17)$$

$$m^\mu \sim \mathcal{O} \bar{\nu} \quad (5.18)$$

$$\bar{m}^\mu \sim \nu \bar{\mathcal{O}} \quad (5.19)$$

причем

$$l^2 = n^2 = 0, \quad n \cdot l = 1 \quad (5.20)$$

$$m^2 = \bar{m}^2 = 0, \quad \bar{m} \cdot m = 1. \quad (5.21)$$

По построению, l^μ и n^μ - изотропные вещественные векторы, а m^μ и \bar{m}^μ - изотропные комплексные векторы.

Переведем метрику в спинорный вид:

$$g_{\mu\nu}\sigma^\mu_{ab}\sigma^\nu_{cd}. \quad (5.22)$$

Получаем объект со спинорными индексами, который по лемме о приведении, можем разложить на неприводимые представления - симметричную и антисимметричную части. Но если учесть наше определение векторов l, n, m, \bar{m} , матрица σ^μ_{ab} представляется в виде:

$$\sigma^\mu_{ab} = \begin{pmatrix} l^\mu & m^\mu \\ \bar{m}^\mu & n^\mu \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Видно, что наш выбор базиса соответствует параметризации векторов диады изотропными векторами l, n, m, \bar{m} . Это эквивалентно представлению метрики в форме Ньюмана-Пенроуза

$$g^{\mu\nu} = l^\mu l^\nu + n^\mu n^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu. \quad (5.24)$$

Формализм Ньюмана-Пенроуза без спиноров

Более того, к формализму Ньюмана-Пенроуза можно прийти вообще не вводя спиноры, а просто выбирая изотропный базис. Так, выбирая $\mu = \{t, r, \theta, \varphi\}$, а вектора:

$$l = \partial_t - \partial_r \quad (5.25)$$

$$n = \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_r) \quad (5.26)$$

$$m = \partial_\theta + \frac{i}{\text{sh } \theta} \partial_\varphi \quad (5.27)$$

можно построить естественную тетраду в пространстве Минковского в сферических координатах.

Дифференцирование спиноров и спиновые коэффициенты

Рассмотрим спроецированный на диаду спинор $\xi^A = \xi^a \zeta_a^A(x)$. Подобно дифференцированию в тетрадном формализме, здесь должен возникнуть аналог Лоренцевой связности, который принято обозначать буквой $\Gamma_{\mu b}^a$ - спинорная связность.

$$\nabla_\mu \xi^m = \partial_\mu \xi^m + \Gamma_{\mu b}^m \xi^b \quad (5.28)$$

Найти выражение для спинорной связности можно из *диадного постулата*: полная производная элементов диады (включающая теперь аффинную и спинорную

связности) равна нулю, т.е.

$$\overset{tot}{\nabla}_\mu (\text{Аф., спинорн.}) \zeta_a^A = 0. \quad (5.29)$$

Свертывая спинорную связность $\Gamma_{\mu b}^a$ с символами ван дер Вардена σ_c^μ , получим четырехиндексный объект Γ_{abcd} - матрицу, элементами которой являются т.н. *спиновые коэффициенты*. Введем обозначения:

	ab	00	01	11
\dot{cd}				
$\dot{00}$		κ	ε	π
$\dot{10}$		ρ	α	λ
$\dot{01}$		σ	β	μ
$\dot{11}$		τ	γ	ν

Таблица 5.1. Спиновые коэффициенты

Саму ковариантную производную также можно умножить на символы ван дер Вардена, и тогда:

$$\nabla_\mu \rightarrow \nabla_{ab}. \quad (5.30)$$

Этот новый дифференциальный оператор имеет вид:

$$\nabla_{ab} = \begin{pmatrix} D & \delta \\ \bar{\delta} & \Delta \end{pmatrix}, \text{ где} \quad (5.31)$$

$$D = l^\mu \nabla_\mu \quad (5.32)$$

$$\Delta = n^\mu \nabla_\mu \quad (5.33)$$

$$\delta = m^\mu \nabla_\mu \quad (5.34)$$

$$\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu \quad (5.35)$$

Пользуясь новыми обозначениями, можно переписать спиновые коэффициенты в виде дифференцирований по направлениям (по аналогии с коэффициентами враще-

ния Риччи):

$$\varkappa = m^\mu D l_\mu \quad (5.36)$$

$$\rho = m^\mu \bar{\delta} l_\mu \quad (5.37)$$

$$\sigma = m^\mu \delta l_\mu \quad (5.38)$$

$$\tau = m^\mu \Delta l_\mu \quad (5.39)$$

$$\pi = -m^\mu D n_\mu \quad (5.40)$$

$$\lambda = -\bar{m}^\mu \bar{\delta} n_\mu \quad (5.41)$$

$$\mu = -\bar{m}^\mu \delta n_\mu \quad (5.42)$$

$$\nu = m^\mu \Delta n_\mu \quad (5.43)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (n^\mu D l_\mu - \bar{m}^\mu D m_\mu) \quad (5.44)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (n^\mu \bar{\delta} l_\mu - \bar{m}^\mu \bar{\delta} m_\mu) \quad (5.45)$$

$$\beta = \frac{1}{2} (n^\mu \delta l_\mu - \bar{m}^\mu \delta m_\mu) \quad (5.46)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} (n^\mu \Delta l_\mu - \bar{m}^\mu \Delta m_\mu) \quad (5.47)$$

Физические поля, которые нам интересны - это поле Максвелла и гравитационное поле в пустоте, которое описывается тензором Вейля. По теореме редукции, они описываются симметричными спинорами различного ранга.

Уравнения Максвелла в формализме Ньюмана-Пенроуза

Рассмотрим самодуальный тензор:

$$F_{\mu\nu}^\dagger = \frac{1}{2} \left(F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F^{\lambda\tau} \right), \text{ где} \quad (5.48)$$

тензор дуальный по Ходжу:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \equiv \star F_{\mu\nu}. \quad (5.49)$$

Определим операцию дуализации, как: $\text{dual} : A^\dagger = i \star A$. Тогда:

$$i \star F_{\mu\nu}^\dagger = F_{\mu\nu}^\dagger$$

Уравнения Максвелла и тождества Бьянки одновременно могут быть записаны в плоском пространстве как:

$$\partial_\mu F^{\dagger\mu\nu} = 0. \quad (5.50)$$

Подействуем на $F_{\mu\nu}^\dagger$ символами ван дер Вардена (индексы диадные или координатные):

$$F_{\mu\nu}^\dagger \rightarrow F_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \varphi_{\dot{A}\dot{C}} = \varphi_{\{\dot{A}\dot{C}\}} \quad (5.51)$$

Тогда в искривленном же пространстве уравнения Максвелла (5.50) могут быть записаны в виде:

$$\nabla_\mu F^{\dagger\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\nabla^{ab} \varphi_{ac} = 0} \quad (5.52)$$

Это *уравнения Максвелла в формализме Ньюмана-Пенроуза* - уравнения для безмассового поля спина $s = 1$.

В формализме Ньюмана-Пенроуза такие же уравнения можно записать для произвольного спина s :

$$\nabla^{ab} \underbrace{\varphi_{\{ac \dots f\}}}_{2s} = 0 \quad (5.53)$$

Для спина $s = 2$ - это уравнение для тензора Вейля.

Тензор кривизны по своему геометрическому происхождению - это аналог тензора $F_{\mu\nu}$, и его вакуумная часть - это тензор Вейля, а для тензора Вейля мы получили уравнение:

$$\nabla^{ab} \Psi_{acde} = 0 \quad (5.54)$$

Для $s = \frac{3}{2}$ - возникает трехиндексный спинор - φ_{abe} .

Рассмотрим подробнее уравнение (5.52):

$$\partial^{ab} \varphi_{ac} - \Gamma_a^{dab} \varphi_{dc} - \Gamma_d^{adb} \varphi_{ac} = 0 \quad (5.55)$$

Все коэффициенты для Γ были записаны в таблице (5.1).

Введем обозначения для компонент спинора φ :

$$\varphi_{00} = \varphi_0 \quad (5.56)$$

$$\varphi_{01} = \varphi_1 \quad (5.57)$$

$$\varphi_{11} = \varphi_2 \quad (5.58)$$

В итоге уравнения Максвелла переписываются в виде системы дифференциальных уравнений для 3-ех комплексных величин:

$$(D - 2e) \varphi_1 - (\delta + \pi - 2\alpha) \varphi_0 + \varkappa \varphi_2 = 0 \quad (5.59)$$

$$(D - \rho + 2\varepsilon) \varphi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi) \varphi_1 + \lambda \varphi_0 = 0 \quad (5.60)$$

$$(\delta - 2\tau) \varphi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma) \varphi_0 + \sigma \varphi_2 = 0 \quad (5.61)$$

$$(\delta - \tau + 2\beta) \varphi_2 - (\Delta + 2\mu) \varphi_1 + \nu \varphi_0 = 0 \quad (5.62)$$

В метрике Керра именно таким образом удастся решить уравнения Максвелла, уравнения для гравитационных возмущений полей Дирака наиболее простым образом.

Упражнение: Записать аналогичное уравнение для тензора Вейля спина $s = \frac{1}{2}$. Так, автодуальный тензор:

$$C_{\mu\nu\lambda\tau}^\dagger = \frac{1}{2} \left(C_{\mu\nu\lambda\tau} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\alpha\beta\lambda\tau} \right) \implies \underbrace{\Psi_{\{ABCD\}}}_{=\prod_i \alpha_i} \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} \quad (5.63)$$

Каждый главный спинор индуцирует изотропный вектор, направления которых определяют тип поля по Петрову. Подробнее см. лекцию 4 (4.1).

Представление тензора Римана. Девиатор

Рассмотрим коммутатор двух ковариантных (по аффинной связности) производных, действующих на вектор U^ν , т.е. рассмотрим тождество Риччи:

$$2\nabla_{[\lambda} \nabla_{\tau]} U^\nu = U^\mu R_{\mu\nu\lambda\tau}; \quad (5.64)$$

Разложим вектор U^ν по векторам тетрады:

$$U^\nu = U^n e_n^\nu \quad (5.65)$$

Вектор U^n является скаляром по отношению к ковариантному дифференцированию (правда, только с аффинной связностью):

$$\nabla_{[\lambda} \nabla_{\tau]} U^n = 0. \quad (5.66)$$

Таким образом, дважды применяя разложение по тетрадному базису, получим:

$$2 \left(U^\mu e_{n\mu} \right) \nabla_{[\lambda} \nabla_{\tau]} e_n^\nu = U^\mu R_{\mu\nu\lambda\tau}. \quad (5.67)$$

Получили тензор Римана, выраженный через коммутатор ковариантных производных, действующих на вектора тетрады. Проецируем это на спиноры и получаем выражение для векторов диады:

$$\implies R_{ABCD\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \zeta_{\dot{A}\dot{A}} \varepsilon_{\dot{B}\dot{B}} 2\nabla_{[\lambda} \nabla_{\tau]} \zeta_{\dot{C}\dot{D}}^{\dot{A}} + \text{к.с.} \quad (5.68)$$

Введем обобщение дифференциального оператора второго порядка Даламбертиана \square - запишем «проекцию на спиноры» коммутатора ковариантных производных:

$$2\nabla_{[\lambda} \nabla_{\tau]} \stackrel{\text{def}}{\iff} \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} \square_{CD} + \text{к.с.}, \quad (5.69)$$

Можно также представить этот оператор в виде:

$$\square_{CD} \equiv \nabla_{\dot{C}} \nabla_{\dot{D}} \dot{C}. \quad (5.70)$$

Введем т.н. *девиатор тензора Риччи*:

$$\Phi_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \underbrace{R}_{=\Lambda} \quad (5.71)$$

$$\Phi_{\mu}^{\mu} = 0, \quad (5.72)$$

Будем обозначать Ψ_{ABCD} - представление тензора Вейля. Тогда можно записать:

$$R_{ABCD} \dot{A} \dot{B} \dot{C} \dot{D} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} (\Psi_{ABCD} - 2\epsilon_{\{A\{C}\epsilon_{D\}B\}} \Lambda) + \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \epsilon_{\dot{C}\dot{D}} \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \text{к.с.} \quad (5.73)$$

Спинорное представление девиатора удовлетворяет свойствам:

$$\Phi_{AC\dot{B}\dot{D}} = \Phi_{\{AC\}\{\dot{B}\dot{D}\}} = \bar{\Phi}_{AC\dot{B}\dot{D}} \quad (5.74)$$

Компоненты девиатора в диадном представлении: $\Phi_{abcd} =$

	$\dot{c}\dot{d}$	$\dot{0}\dot{0}$	$\dot{0}\dot{1}$	$\dot{1}\dot{1}$
ab				
00		Φ_{00}	Φ_{01}	Φ_{02}
01		Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}
11		Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{22}

Таблица 5.2. Компоненты девиатора

Можно доказать, что у девиатора 9 вещественных компонент. Проектируя девиатор на изотропные вектора, в новых обозначениях получим:

$$\Phi_{00} = \Phi_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} \quad (5.75)$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{\mu\nu} l^{\mu} \bar{m}^{\nu} \quad (5.76)$$

$$\Phi_{02} = \Phi_{\mu\nu} m^{\mu} m^{\nu} \quad (5.77)$$

...

Таким образом, полное гравитационное поле изображается компонентами девиатора (см. табл. 5.2), самими векторами базисной тетрады l, n, m, \bar{m} и спиновыми коэффициентами (см. табл. 5.1)

Подробный разбор формализма Ньюмана-Пенроуза можно найти в книге Stewart - Advanced General Relativity.

Лекция 6. Симметрии в формализме Ньюмана-Пенроуза. Метрика Тауб-NUT. Метрика Керра

Первая группа уравнений Ньюмана-Пенроуза.

Приведем краткое повторение подхода - вводится изотропная тетрада $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$, через которую известным образом выражается метрика (5.24). Преимущество уравнений в формализме Ньюмана - Пенроуза состоит в том, что они представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения выводятся из тождества Бьянки:

$$R_{\mu\nu[\lambda\tau;\sigma]} = 0 \quad (6.1)$$

это можно записать в спинорной форме $\implies R_{AB\dots}$. Из тождеств Бьянки можно получить уравнения на компоненты тензора Вейля и тензора Риччи, которые в спинорной форме «конвертируются» в Ψ_{ABCD} - спинор, соответствующий тензору Вейля, $\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}}$ - девиатор тензора Риччи и $\Lambda = -\frac{1}{24}R$. Эти величины описывают все степени свободы исходного уравнения (6.1).

Действительно, тензор Римана имеет 20 независимых компонент, которые разбиваются на 10 компонент спинора, который соответствует тензору Вейля (5 комплексных величин $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$), 9 компонент девиатора Риччи (в силу того, что это эрмитова матрица с вещественной диагональю) и след Λ .

Тождества Бьянки в итоге конвертируются в выражения:

$$\nabla_{\dot{C}}^D \Psi_{ABCD} = \nabla_{\{C} \dot{D} \Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} - 8 \text{ уравнений} \quad (6.2)$$

$$\nabla^{B\dot{B}} \Phi_{AB\dot{A}\dot{B}} = -3 \nabla_{A\dot{A}} \Lambda - 3 \text{ уравнения} \quad (6.3)$$

Таким образом, получаем 11 «тождеств Бьянки». Можно привести одно из уравнений для примера - с использованием спиновых коэффициентов (5.1):

$$(D - 4\rho - 2\varepsilon)\Psi_1 - (\bar{\delta} - 4\alpha - 2\varepsilon)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{11} + 2\sigma\Phi_{10} - \bar{\kappa}\Phi_{20} = 0 \quad (6.4)$$

Конечно, в практических задачах будут симметрии, и тогда эти уравнения сильно упрощаются.

Вторая группа уравнений Ньюмана-Пенроуза

Следующая группа уравнений - это уравнения, которые выражают компоненты тензоров Вейля и Риччи через связности. Т.е. это будут аналоги формул, которые

выражают $R_{\mu\nu\lambda\tau}$ через $\partial_\mu \Gamma \dots \Gamma$.

Можно получить сначала производящее выражение, рассматривая коммутаторы ковариантных производных:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] l^\lambda = R^\lambda_{\tau\mu\nu} l^\tau \quad (6.5)$$

Переходя к спинорной форме, получим уравнения, выражающие компоненты $R^\lambda_{\tau\mu\nu}$. Таких уравнений 18 штук. Это число трудно сопоставлять со степенями свободы тензоров Вейля и Риччи, как в предыдущем случае, т.к. не все из этих уравнений независимы. Одно из получившихся уравнений, для примера (в диадном формализме):

$$\begin{cases} \Phi_{ABC\dot{D}} = \zeta_{bA} \square_{\dot{C}\dot{D}} \zeta_B^b \\ \Psi_{ABCD} = \zeta_{bA} \square_{CD} \zeta_B^b \end{cases} \quad (6.6)$$

В уравнениях использовался спинорный оператор Даламбера (5.69). Тогда:

$$\Psi_0 = (D - \rho - \bar{\rho} - 3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\rho - (\delta - \tau + \bar{\tau} - \bar{\alpha} - 3\beta)\varkappa \quad (6.7)$$

Такие 18 уравнений называются 2-ой группой уравнений Ньюмана-Пенроуза.

Третья группа уравнений Ньюмана-Пенроуза

Наконец, последняя группа - это коммутаторы ковариантных производных:

$$D = l^\mu \nabla_\mu \quad (6.8)$$

$$\Delta = n^\mu \nabla_\mu \quad (6.9)$$

$$\delta = m^\mu \nabla_\mu \quad (6.10)$$

$$\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu. \quad (6.11)$$

Рассмотрим

$$[D, \Delta] = (\gamma + \bar{\gamma})D + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta - (\bar{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} \quad (6.12)$$

Если теперь таким коммутатором подействовать на скалярную функцию, можно заметить, что величины, которые образуются в каждом слагаемом в правой части - это вектора $l^\mu, n^\mu \dots$. Тогда можно переписать это уравнение в виде:

$$\Delta l^\alpha - D n^\alpha = (\gamma + \bar{\gamma})l^\alpha + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})n^\alpha - (\bar{\tau} + \pi)m^\alpha - (\tau + \bar{\pi})\bar{m}^\alpha \quad (6.13)$$

Такие уравнения составляют 3-ю группу уравнений Ньюмана-Пенроуза.

Можно, выбирая анзац для метрики, решать эти уравнения - таким путем было получено много результатов. Самое главное, что этот формализм приводит к простой классификации полей Петрова-Пирани (4.1).

Симметрии в формализме Ньюмана-Пенроуза

Векторы Киллинга - это эффективный аппарат, позволяющий находить интегралы движения, находить симметрии и т.д. Интересно, что уравнения Киллинга тоже можно трансформировать в спинорную форму. Уравнения Киллинга:

$$K_{\{\mu; \nu\}} = 0. \quad (6.14)$$

Введем эрмитовы спиноры, которые получаются из векторов Киллинга сверткой с символами ван дер Вардена:

$$K_\nu \Leftrightarrow \varkappa_{A\dot{B}} \quad (6.15)$$

Тогда уравнения Киллинга в спинорной форме:

$$\nabla_{\{C}^{\dot{D}} \varkappa_{A\dot{B}}\} = 0. \quad (6.16)$$

Последнее уравнение легко обобщается на случай спиноров произвольной размерности:

$$\nabla_{\{C}^{\dot{D}} \varkappa_{A_1 \dot{B}_1 \dots}\} = 0 \quad (6.17)$$

Так, если спинор однокомпонентный - обладает только одним индексом, то такой спинор называется *спинором Киллинга*.

Уравнения Киллинга для $s = \frac{1}{2}$. Спинор Киллинга

Ранг такого спинора: $s = 1/2$, и он удовлетворяет уравнению:

$$\nabla_{\{C}^{\dot{D}} \varkappa_{A\dot{B}}\} = 0. \quad (6.18)$$

Упр. Показать, что если существует решение для спинора Киллинга, то по такому решению можно построить и вектор Киллинга. Вектор Киллинга можно построить с помощью формализма Дирака - образуем четырехкомпонентный спинор как:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varkappa^A \\ \bar{\varkappa}_{\dot{B}} \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

введем матрицы

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

где σ^μ - символы Ван дер Вардена:

$$\sigma^\mu \equiv \sigma_{A\dot{B}}^\mu, \quad \bar{\sigma}^\mu = \sigma^{\mu A\dot{B}}. \quad (6.21)$$

Тогда можем построить «нетеровский ток», как:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = K^\mu \quad (6.22)$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что K^μ является вектором Киллинга, т.е. $K_{\{\mu;\nu\}} = 0$.

Уравнения Киллинга для $s = 1$. Тензор Яно-Киллинга

Другой интересный случай уравнения Киллинга для $s = 1$ - эти уравнения оказываются похожи на уравнения Максвелла.

$$\nabla_{\{C}^D \varkappa_{AB\}} = 0 \quad (6.23)$$

Если такое уравнение выполняется, то существует антисимметричный тензор Яно-Киллинга:

$$\exists Y_{\mu\nu} = Y_{[\mu\nu]}, \quad (6.24)$$

который удовлетворяет уравнениям Киллинга на языке векторов:

$$Y_{\mu\{\nu;\lambda\}} = 0. \quad (6.25)$$

Можно сказать, что Y - «квадратный корень тензора Киллинга», подобно тому, как уравнение Дирака - это «квадратный корень» уравнения Даламбера. Так, если рассмотреть тензор Киллинга $K_{\mu\nu}$, то связь его с $Y_{\mu\nu}$:

$$K_{\mu\nu} = Y_\mu^\lambda Y_{\lambda\nu} \quad (6.26)$$

Можно найти связь между спин-тензором \varkappa_{AB} и тензором Яно-Киллинга. Переходя в спинорную форму:

$$Y_{\mu\nu} \rightarrow Y_{A\dot{B}C\dot{D}}, \quad (6.27)$$

получим:

$$\varkappa_{AB} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\dot{C}\dot{D}}Y_{A\dot{C}B\dot{D}}^\dagger - \text{автодуальный тензор}, \quad (6.28)$$

где

$$Y^\dagger \equiv \frac{1}{2}(Y + i \star Y). \quad (6.29)$$

Интересно, что для всех метрик типа D в классификации Петрова-Пирани (4.1), тензоры Яно-Киллинга существуют и являются самой мощной симметрией, которую можно придумать. В частности, это выполняется для метрики Керра.

Формализм бивекторов

Формализм бивекторов коррелирует с еще одним вариантом формализма Ньюмана-Пенроуза. **Бивектор** - косоое произведение векторов. Так

$$l^\mu n^\nu - n^\mu l^\nu - \text{бивектор} \quad (6.30)$$

Из всего множества нас будут интересовать *комплексные автодуальные* бивекторы. Их можно написать в общем виде через 2-формы, в которые он превращается при опускании индексов:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu + i \star dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (6.31)$$

Рассмотрим вариант разложения тензора Максвелла по таким автодуальным формам:

$$F_{\mu\nu}^\dagger = \varphi_0 \underbrace{U_{\mu\nu}}_{=2l_{[\mu}n_{\nu]}} - \varphi_1 M_{\mu\nu} - \varphi_0 V_{\mu\nu}, \quad (6.32)$$

где автодуальные бивекторы:

$$U_{\mu\nu} = 2l_{[\mu}n_{\nu]} \quad (6.33)$$

$$M_{\mu\nu} = 2(l_{[\mu}n_{\nu]} - m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}) \quad (6.34)$$

$$V_{\mu\nu} = 2n_{[\mu}m_{\nu]} \quad (6.35)$$

Преимущества такого подхода в том, что можно разлагать тензоры в векторном виде, не прибегая к спинорам. Приведем также разложение тензора Вейля:

$$C_{\mu\nu\lambda\tau}^\dagger = -\Psi_0 V_{\mu\nu} V_{\lambda\tau} - \Psi_1 (VM + MV) - \quad (6.36)$$

$$-\Psi_2 (MM - UV - VU) + \Psi_3 (UM + MU) - \Psi_4 UU. \quad (6.37)$$

Классификация Петрова в таком подходе строится следующим образом: будем рассматривать автодуальные бивекторы в такой системе отсчета, в которой можно ввести трехмерное пространство и выбрать некоторое временноподобное направление. Для этого необходимо произвести перепараметризацию бивекторов.

Рассмотрим некоторый бивектор X_{mn} , индексы которого тетрадные:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn}. \quad (6.38)$$

Тетрадные компоненты такого бивектора можно разложить как ($U \in \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{C}$):

$$X_{mn} = 2U_{[m}X_{n]} + i\epsilon_{mnpq}U^p X^q, \quad (6.39)$$

где предполагается, что $U^2 = 1$ - временноподобный вектор. Будем считать, что номера компонент пробегает значения: $m, n \in \{0, 1, 2, 3\}$, а $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда можем перейти к объектам:

$$X_n = X_{nm}^\dagger U^m, \text{ и } X_n U^n = 0 \quad (6.40)$$

и ввести пространство, ортогональное U^n :

$$X_{ij}^\dagger = i\epsilon_{ijk} X^k. \quad (6.41)$$

Рассмотрение сводится к преобразованию трехмерных комплексных векторов, которые преобразуются по группе $SO(3, \mathbb{C})$, которая, в свою очередь, изоморфна $SO(1, 3)$.

Таким образом, ставится задача о нахождении базисных бивекторов. Идея состоит в том, что нужно также разложить тензор Вейля:

$$-\frac{1}{2}C_{mnpq}^\dagger = 4U_{nm}Q_{np}U_q + \dots \quad (6.42)$$

Для матрицы Q_{np} будем решать уравнение на собственные значения:

$$Q_n^m X^m = \lambda X^n \quad (6.43)$$

Последнее уравнение сводится к уравнению для трехмерной матрицы:

$$\implies \det |Q_j^i - \lambda \delta_j^i| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} (\lambda - \lambda_3)^{n_3}, \quad (6.44)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 1$$

Тогда *типы полей по Петрову* теперь такие:

1) Тип *I*: Матрица Q представляется в виде:

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

и ее след равен нулю:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

2) Тип *D*: Матрица Q - такая же, но

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Интересно сравнить эти утверждения с результатами в формализме Ньюмана Пенроуза. Конечно, корни λ связаны с проекциями тензора Вейля и для типов I, D :

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \quad (6.46)$$

$$\Psi_1 = \Psi_3 = 0; \Psi_2 = -\frac{\lambda_3}{2} \quad (6.47)$$

3) Тип II :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -i & 0 \\ -i & -\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

4) Ее подтип - тип N , в котором $\lambda = 0$.

5) Тип III :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Для более подробного изложения - см. учебник Ландау и Лифшица.

Общее соответствие с формализмом Пирани может быть прямо записано через компоненты тензора Вейля:

$$Q = \begin{pmatrix} \Psi_2 - \frac{\Psi_0 + \Psi_1}{2} & \frac{i}{2}(\Psi_1 - \Psi_0) & \Psi_1 - \Psi_3 \\ \frac{i}{2}(\Psi_1 - \Psi_0) & \frac{i}{2}(\Psi_0 + \Psi_4) & i(\Psi_1 + \Psi_3) \\ \Psi_1 - \Psi_3 & i(\Psi_1 + \Psi_3) & -2\Psi_3 \end{pmatrix}. \quad (6.50)$$

Генерация решений. Метрика Taub-NUT.

Метрику Керра, в отличие от метрики Шварцшильда, нельзя получить просто интегрируя уравнения Эйнштейна. Но оказывается, что из уравнений Эйнштейна можно получить интегрируемые системы, налагая определенные симметрии.

Все поля зависят от 4-х компонент x^μ . Пусть $g_{\mu\nu}$ зависит только от трех координат x^i . По сути, это означает, что ∂_t - вектор Киллинга, и такие поля называются стационарными.

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i) \quad (6.51)$$

Для таких полей можем записать трехмерный Лагранжиан: сначала запишем метрику

$$ds^2 = f(dt - \omega_i dx^i)^2 - \frac{1}{f} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.52)$$

где все величины f, ω_i, h_{ij} зависят только от трехмерных x^i . Далее, подставляем такую метрику в уравнение Эйнштейна, которое разбивается на некоторую трехмерную часть и одномерный вклад.

Вычислим тензор Риччи. Будем обозначать 4-мерный тензор, зависящий от полной метрики как $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu})$, а 3-мерный, построенный на 3-мерной метрике h_{ij} , как $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}(h_{ij})$. Подставляя анзац (6.52) в вакуумные уравнения Эйнштейна для стационарных метрик, получим:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left(f \Delta_3 f - (\nabla f)^2 + \tau_i^2 \right) = 0, \quad (6.53)$$

где трехмерный лапласиан:

$$\Delta_3 = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i \left(h^{ij} \sqrt{h} \partial_j \right) \quad (6.54)$$

и оператор «Набла»:

$$\nabla f = \partial_i f \partial_j h^{ij}. \quad (6.55)$$

Смешанная компонента, если ввести 3-мерный символ Леви-Чивиты E^{ijk} :

$$R_0^i = -\frac{f}{2} E^{ijk} \nabla_j \tau_k = 0, \quad (6.56)$$

где τ_k - дуализация объекта $\partial_j \omega_k$:

$$\tau_k = -f^2 E^{ijk} \partial_i \omega_j \quad (6.57)$$

Решая уравнение $R_0^i = 0$, получим:

$$\tau_k = \nabla_k \chi - \text{решение уравнения } R_0^i = 0, \quad (6.58)$$

где χ - твист-потенциал.

Если написать обратное равенство к R_0^i (6.56), получим

$$\nabla_k \left(\frac{\nabla^k \chi}{f^2} \right) = 0 \implies \quad (6.59)$$

$$\implies f \Delta \chi = 2 \partial_i f \partial_j \chi h^{ij} \quad (6.60)$$

Таким образом, метрика $g_{\mu\nu}$ «разбивается» на два скаляра - f, χ и метрику h_{ij} . Осталось написать трехмерную часть 4-мерного тензора Риччи ($f_i \equiv \partial_i f$):

$$R_{ij}^{(h)} = f \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2} (f_i f_j + \underbrace{\tau_i \tau_j}_{=\chi_i \chi_j}) = 0 \quad (6.61)$$

Это уравнения Эйнштейна для тензора \mathcal{R}_{ij} :

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{2f} (f_i f_j + \chi_i \chi_j) \quad (6.62)$$

Все эти уравнения могут быть получены из трехмерного действия:

$$S_3 = \int \left(\mathcal{R}(h) - G_{\alpha\beta} X_i^\alpha X_j^\beta h^{ij} \right) \sqrt{h} d^3x \quad (6.63)$$

$G_{\alpha\beta}$ - это метрика «мишени», X^α, X^β - «координаты этой мишени», а $X_i^\alpha = \partial_i X^\alpha$ - такой подход называется «target space». Таким образом, наша 4-мерная вакуумная система уравнений Эйнштейна свелась к 3-мерной. Далее, мы увидим, что $G_{\alpha\beta}$ - метрика однородного пространства, причем оно представляет собой фактор-пространство (косет) - $SO(1,2)/SO(2)$.

Это эквивалентно тому, что в пространстве мишени есть симметрия вектора Киллинга, образующая алгебру группы $SO(1,2)$.

В нашем случае координаты пространства $X^1 = f, X^2 = \chi$, тогда метрика:

$$dl_\sigma^2 = G_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = \frac{1}{2f^2} (df^2 + d\chi^2). \quad (6.64)$$

Над такой метрикой нетрудно решить уравнения Киллинга:

$$k_{\{\alpha;\beta\}} = 0. \quad (6.65)$$

Тогда получим вектора Киллинга:

$$M = 2(f\partial_f + \chi\partial_\chi) \quad (6.66)$$

$$L_+ = \partial_\chi \quad (6.67)$$

$$L_- = (\chi^2 - f^2)\partial_\chi + 2\chi f\partial_f, \quad (6.68)$$

где M - подалгебра Картана этой группы. Далее коммутируем и смотрим - какая алгебра:

$$[ML_+] = -2L_+ \quad (6.69)$$

$$[ML_-] = 2L_- \quad (6.70)$$

$$[L_+L_-] = M \quad (6.71)$$

Сравнивая со значениями в таблицах, получим, что это действительно группа $SO(1,2)$. Интересно, что эта группа изоморфна $SL(2, R)$ - группе унимодулярных матриц. Таким образом, пространство мишени имеет симметрии, что означает, что любую точку-решение (f_0, χ_0) можно перевести в другое решение (f, χ) действием этой группы. Такая процедура является *генерацией решений*. С помощью этой процедуры из метрики Шварцшильда можно получить метрику Taub-NUT.

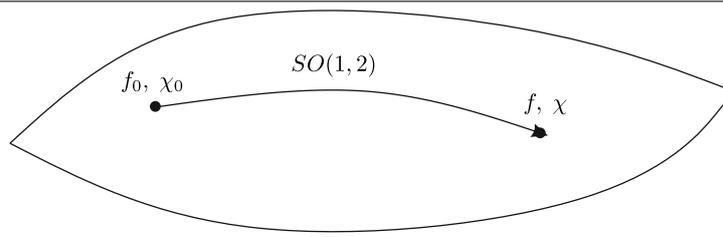


Рис. 6.1. Генерация решений

Пусть есть асимптотически плоское решение. При преобразованиях оно этого свойства терять не должна. Перейдем к матричным представлениям:

$$dl_\sigma = -\frac{1}{4} \text{tr}(d\mathcal{M}d\mathcal{M}^{-1}), \text{ где} \quad (6.72)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} f + \frac{\chi^2}{f} & \frac{\chi}{f} \\ \frac{\chi}{f} & f^{-1} \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

Сделаем над этой матрицей преобразование $SL(2, \mathbb{R})$, которое должно сохранять ее унимодулярность, и \mathcal{M}' должна быть представима в такой же форме, но с другими потенциалами:

$$\mathcal{M}_0(f_0, \chi_0) \xrightarrow{SL(2, \mathbb{R})} \mathcal{M}'(f', \chi')$$

Для метрики Шварцшильда:

$$f_0 = 1 - \frac{2M_0}{r_0}, \quad \chi_0 = 0 \quad (6.74)$$

Тогда при $r_0 \rightarrow \infty$ получим для матрицы \mathcal{M}_0 :

$$\mathcal{M}_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.75)$$

Преобразование матрицы \mathcal{M} должно быть таким, чтобы оно не меняло этой точки, тогда:

$$\mathcal{M}(f, \chi) = P\mathcal{M}P^{-1}, \quad (6.76)$$

где P - принадлежит подгруппе изотропии, т.е. $P \in SO(2)$:

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

Таким образом, можем преобразовать метрику Шварцшильда, принимая:

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & f_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad f_0 = 1 - \frac{2M_0}{r_0}$$

и применяя формулу (6.76). Получим матрицу

$$\mathcal{M}(f_0, \alpha) = \begin{pmatrix} f + \frac{\chi^2}{f} & \frac{\chi}{f} \\ \frac{\chi}{f} & f^{-1} \end{pmatrix}, \quad (6.78)$$

в которой новые потенциалы f, χ можно найти в явном виде, и они являются функциями от параметров (M_0, r, α) . **Задача:** Найти функции f, χ и сделать замену переменных:

$$M = M_0 \cos 2\alpha \quad (6.79)$$

$$N = M_0 \sin 2\alpha \quad (6.80)$$

$$r = r_0 - 2M_0 \sin^2 \alpha \quad (6.81)$$

При этом метрика h_{ij} для Шварцшильда остается неизменной, в координатах (r, θ, φ) :

$$h_{ij} dx^i dx^j = (dr_0^2 + r_0^2 f_0 d\Omega)$$

$$\chi = \frac{2N}{r} \implies \omega_i dx^i = 2N \cos \theta d\varphi$$

$$ds^2 = f (dt - \omega_i dx^i) - \frac{1}{f} h_{ij}(r, \theta, \varphi) dx^i dx^j \quad (6.82)$$

Тогда получим решение Taub-NUT:

$$f = \frac{r^2 - 2Mr - N^2}{r^2 + N^2} \quad (6.83)$$

$$ds^2 = f (dt - 2N \cos \theta d\varphi)^2 - \frac{1}{f} (dr^2 + (r^2 + N^2) d\Omega) \quad (6.84)$$

Можно заметить приятное свойство такой метрики, которое состоит в том, что при $r = 0$ в ней нет сингулярности. **Задача:** показать, что решение обладает симметрией $SO(3)$.

Метрика Керра

Метрику Керра получить таким образом нельзя. Оставляем ту же самую σ -модель, но предполагаем, что $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$, или, аналогично, можно выбрать ρ, z в качестве координат. Тогда 4-мерная метрика имеет в качестве векторов Киллинга: $\partial_t, \partial_\varphi$. Рассмотрим т.н. анзац Папапетру:

$$h_{ij} dx^i dx^j = e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \quad (6.85)$$

Согласно сказанному выше, от φ в этом анзаце зависимости не будет, и задача эквивалентна двумерной, конформно плоской. На пространстве координат ρ, z, φ можем ввести лапласиан:

$$\Delta_3 = \partial_z^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \rho \partial_\rho + \partial_\varphi^2 \quad (6.86)$$

И вектор-оператор «Набла»:

$$\vec{\nabla} = \{\partial_\rho, \partial_z, \partial_\varphi\} \quad (6.87)$$

Это приводит к *уравнениям Эрнста*. Введем комплексный потенциал \mathcal{E} как:

$$\mathcal{E} = f + i\chi \quad (6.88)$$

Тогда после преобразований:

$$\text{Re} \mathcal{E} \cdot \Delta \mathcal{E} = |\nabla \mathcal{E}|^2, \quad (6.89)$$

причем такое уравнение оказывается точно интегрируемым.

Метрика Керра получается в результате замены переменных - перехода в т.н. сфероидальные координаты:

$$z = xy, \quad \rho^2 = (x^2 - 1)(1 - y^2) \quad (6.90)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \rightarrow \xi = px + iqy, \quad (6.91)$$

где $p, q = \text{const}$ и $p^2 + q^2 = 1$. Из того же уравнения:

$$\gamma_\rho^2 = \frac{1}{4f} (\mathcal{E}_\rho \bar{\mathcal{E}}_\rho - \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_z) \quad (6.92)$$

$$\gamma_z^2 = \frac{\rho}{4f} (\mathcal{E}_\rho \bar{\mathcal{E}}_z + \mathcal{E}_z \bar{\mathcal{E}}_\rho) \quad (6.93)$$

Лекция 7. Метрика Керра. Уравнения Эрнста

Потенциалы Эрнста

Метрику Керра, в отличие от метрик Шварцшильда, Фридмана, которые зависят от одной переменной, нельзя получить просто интегрируя уравнения Эйнштейна.

Метрика зависит от двух координат - выберем их в виде обобщенных цилиндрических координат (координат Вейля): $g_{\mu\nu}(\rho, z)$. А интервал представляется в виде

$$ds^2 = f(dt - \omega_i dx^i)^2 - \frac{1}{f} h_{ij} dx^i dx^j, \quad (7.1)$$

где трехмерная метрика h_{ij} , скаляр f и 3-вектор ω_i зависят только от трех координат. Выберем в качестве координаты $x^i = \{\rho, z, \varphi\}$. Тогда, вставляя анзац Папаметру:

$$h_{ij} dx^i dx^j = e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2 \quad (7.2)$$

В итоге, у нас в 3-мерном пространстве возникает 3-мерная задача Эйнштейна, но не вакуумная, а с материальными полями. Эти материальные поля - это функция f и

$$\partial_z \omega_\varphi = -\frac{1}{F} \partial_\rho \chi \quad (7.3)$$

$$\partial_\rho \omega_\varphi = \frac{1}{F} \partial_z \chi - \text{уравнения дуализации} \quad (7.4)$$

$$F = \frac{f^2}{\rho} \quad (7.5)$$

В итоге получаем уравнения Эрнста для комплексного потенциала $\mathcal{E} = f + i\chi$. Этот потенциал может быть записан в 3-мерном плоском пространстве, т.к. от φ зависимости нет.

Можем ввести оператор «набла» $\vec{\nabla} = \{\partial_\rho, \partial_z, \partial_\varphi\}$, и лапласиан $\Delta = \nabla_i \nabla^i = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Потенциал \mathcal{E} , в результате последовательного решения 4-мерных уравнений Эйнштейна, будет удовлетворять уравнению:

$$\boxed{(\text{Re} \mathcal{E}) \Delta \mathcal{E} = (\nabla \mathcal{E})^2} \quad (7.6)$$

Это уравнение является интегрируемой системой. Решение Керра строится, если ввести замену

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad (7.7)$$

и сфероидальные координаты:

$$\begin{cases} z = kxy \\ \rho^2 = k^2(x^2 - 1)(1 - y^2) \\ x^2 > 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \end{cases}, \quad (7.8)$$

где k - масштабный фактор.

Решением будет являться линейная функция:

$$\begin{cases} \xi = px + iqy, \\ p, q = const \\ p^2 + q^2 = 1 \end{cases} \quad (7.9)$$

Далее вводятся координаты **Бойера-Линдквиста**: (M - параметр)

$$z = (r - M) \cos \theta \quad (7.10)$$

$$\rho^2 = (r^2 - 2Mr + a^2) \sin^2 \theta \quad (7.11)$$

Теория Эйнштейна-Максвелла

Вскоре Эрнстом было дано обобщение на случай теории Эйнштейна-Максвелла. Эта теория не является вакуумной - вводится вектор-потенциал A_μ :

$$A_\mu dx^\mu = A_t dt + A_\varphi d\varphi. \quad (7.12)$$

Уравнения Максвелла можно частично решить, если дуализировать компоненту A_φ - введем другой потенциал \tilde{A} :

$$\tilde{A}_{\varphi,\rho} = \frac{f}{\rho} (A_{\varphi,z} - \omega_\varphi A_{t,z}) \quad (7.13)$$

$$\tilde{A}_{\varphi,z} = -\frac{f}{\rho} (A_{\varphi,\rho} - \omega_\varphi A_{t,\rho}) \quad (7.14)$$

и дуализируем потенциал χ :

$$\chi_{,z} = -\frac{f^2}{\rho} (\Phi^* \Phi_{,\rho} - \Phi \Phi_{,\rho}^*) \quad (7.15)$$

$$\chi_{,\rho} = \frac{f^2}{\rho} (\Phi^* \Phi_{,z} - \Phi \Phi_{,z}^*) \quad (7.16)$$

Далее, нужно ввести еще один комплексный потенциал Φ - электромагнитный потенциал Эрнста, как:

$$\Phi = A_t + i\tilde{A}_\varphi \quad (7.17)$$

и переопределить \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = f + i\chi - \Phi\Phi^*. \quad (7.18)$$

Тогда сами уравнения Эрнста (7.6):

$$\begin{cases} (\text{Re}\mathcal{E} + \Phi\Phi^*) \Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \nabla\mathcal{E} \\ (\text{Re}\mathcal{E} + \Phi\Phi^*) \Delta\Phi = (\nabla\mathcal{E} + 2\Phi^*\nabla\Phi) \nabla\Phi \end{cases} \quad (7.19)$$

это обобщение уравнений Эрнста на случай полей электро-вакуума. В такой системе - 2 вектора Киллинга - $\partial_t, \partial_\varphi$ - система стационарна. После того, как найдены потенциалы из решения этой системы уравнений, нужно еще найти функцию γ из (7.2). Уравнение для нее - (6.93).

Более подробное описание можно найти в книгах:

- 1) Exact Solutions of Einstein's Field Equations - Hans Stephani
- 2) Exact Space-Times in Einstein's General Relativity - Jerry B. Griffiths, Jiri Podolsky

Большие классы интегрируемых систем строятся, если имеется 2 коммутирующих вектора Киллинга. В нашем случае, имеем

$$K = \partial_t \quad (7.20)$$

$$\tilde{K} = \partial_\varphi \quad (7.21)$$

$$[K, \tilde{K}] = 0$$

Заметим еще, что если есть 2 вектора Киллинга и электромагнитное поле, то тогда производная Ли вдоль векторов Киллинга:

$$\mathcal{L}_K A_\mu = 0. \quad (7.22)$$

Метрика Керра

Метрика Керра может быть получена решением уравнений Эрнста - нахождением χ, f, γ .

Напишем метрику Керра-Ньюмана, которая отвечает решению с электрическим зарядом:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr - \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 d\varphi - a dt)^2 \quad (7.23)$$

$$A_\mu = \frac{er}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \quad (7.24)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (7.25)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr^2 + a^2 + e^2 \quad (7.26)$$

Можем сказать, что существует тетрада (l, n, m, \bar{m}) и в формализме Ньюмана-Пенроуза, будем решать задачу о главных изотропных направлениях. Согласно теореме о расщеплении, любой симметричный спинор может быть представлен в виде произведения однокомпонентных спиноров, каждому из которых соответствует изотропный вектор - главные изотропные направления. Тогда для спинора, соответствующего тензору Вейля:

$$\Psi_{\{ABCD\}} = \alpha_{\{A} \beta_B \gamma_C \delta_{D\}}. \quad (7.27)$$

Хотим построить тетраду таким образом, чтобы хотя бы один вектор l соответствовал главному изотропному направлению. Тогда возникает классификация полей по Петрову (4.1)

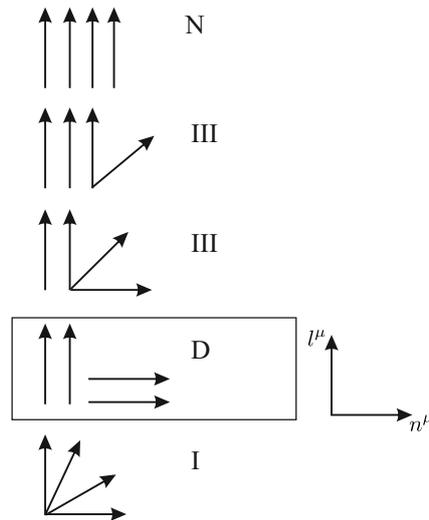


Рис. 7.1. Классификация полей по Петрову. Введение обозначений

Метрика (7.23) соответствует *type D* классификации. Альтернативно, можно написать уравнение в терминах тензора Вейля:

$$K_{[\alpha} C_{\mu] \nu \lambda} K_{\sigma]} K^\nu K^\lambda = 0, \quad (7.28)$$

откуда можно найти 4 K , которые отвечают типам по Петрову.

Для типа D есть 2 главных изотропных направления (см. 7.1), и нормировка векторов:

$$l^\mu n_\mu = 1 \quad (7.29)$$

Тогда из всех компонент проекций тензора Вейля только $\Psi_2 \neq 0$:

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} + \frac{e^2}{\Sigma(r - ia \cos \theta)^2} \quad (7.30)$$

Метрики, в которых есть несколько совпадающих изотропных направлений, называются *алгебраически специальными*.

Теорема Голдберга Сакса

Пространство является алгебраически специальным, если хотя бы одно из главных изотропных направлений является геодезическим и бессдвиговым.

Это означает, например, что действие оператора $D = l^\mu \nabla_\mu$ на сам вектор l^μ :

$$Dl^\mu = 0 \quad (7.31)$$

Это условие того, что вектор переносится параллельно вдоль себя самого, т.е. это уравнение геодезической для касательного вектора l^μ . Тогда происходит обнуление некоторых спиновых коэффициентов (5.1): $\kappa = 0, \bar{\epsilon} + \epsilon = 0$. Условие бессдвиговости определяется как:

$$\sigma = -l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu = 0 \quad (7.32)$$

Если будем рассматривать интегральные кривые векторного поля l и в сечении будем рассматривать его сечения, то в зависимости от свойств пучка, будет меняться и форма сечения. Изменение формы поперечного сечения означает, что $\sigma \neq 0$.

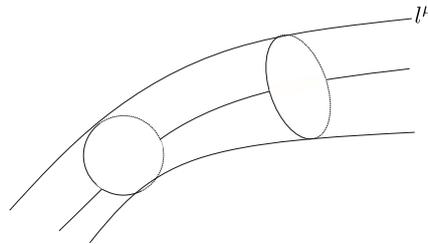


Рис. 7.2. Интегральные кривые векторного поля l^μ

В типе D - есть 2 бессдвиговых и геодезических направлений. Для метрики типа D спиновые коэффициенты: $\epsilon = \kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0$.

Тетрада Киннерсли

Пусть $x^\mu(\lambda)$ - бессдвиговая геодезическая, тогда система уравнений в метрике Керра:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (7.33)$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm 1 \quad (7.34)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \quad (7.35)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{a}{\Delta} \quad (7.36)$$

Тогда

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \quad (7.37)$$

а вектор n_μ можно найти из условия нормировки: $l^\mu n_\mu = 1$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) \quad (7.38)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (7.39)$$

Задача: Получить ненулевые спиновые коэффициенты. Такая тетрада расщепляет метрический тензор как:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}^\mu m^\nu \quad (7.40)$$

Спиновые коэффициенты:

$$\rho^{-1} = ia \sin \theta - r \quad (7.41)$$

$$\tau = -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma} \quad (7.42)$$

$$\pi = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \quad (7.43)$$

$$\beta = -\frac{\bar{\rho} \operatorname{ctg} \theta}{2\sqrt{2}} \quad (7.44)$$

$$\alpha = \pi - \bar{\beta} \quad (7.45)$$

$$\mu = \frac{\Delta \rho}{2\Sigma} \quad (7.46)$$

$$\gamma = \mu + \frac{r - M}{2\Sigma} \quad (7.47)$$

Любопытно, что:

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{\pi}{\bar{\pi}} = \frac{r + ia \cos \theta}{r - ia \cos \theta}. \quad (7.48)$$

Наконец, запишем тетрадные компоненты тензора Максвелла и тензора Риччи (Девиатора):

- Для Максвелловского тензора отлична от нуля только:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) = -\frac{e\rho^2}{2} \quad (7.49)$$

- Для Девиатора

$$\Phi_{11} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + m^\mu \bar{m}^\nu) = \frac{e^2}{2\Sigma} \quad (7.50)$$

Симметрии метрик типа D

Теорема: Для метрик типа D обязательно существует тензор Киллинга второго ранга. Взяв «корень» из этого тензора, получим тензор Яно-Киллинга, и также существует спинор Киллинга.

Теорема: Пусть существует 2 вектора Киллинга K^μ, \tilde{K}^μ , такие, что, согласно уравнению Киллинга:

$$K_{\{\mu;\nu\}} = 0 \quad (7.51)$$

Для метрик типа D существует тензор Киллинга, который по определению:

$$K_{\mu\nu} = K_{\{\mu\nu\}} \quad (7.52)$$

$$K_{\{\mu\nu;\lambda\}} = 0 \quad (7.53)$$

и равен:

$$K_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{\{\mu} n_{\nu\}} - r^2 g_{\mu\nu} \quad (7.54)$$

Зам. Важнейшие свойства векторов Киллинга состоит в том, что для геодезических \dot{x}^μ :

$$K_\mu \dot{x}^\mu = const \quad (7.55)$$

и для тензора Киллинга:

$$K_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = const. \quad (7.56)$$

Для метрик типа D существует еще одно представление тензора Киллинга:

$$K_{\mu\nu} = f_\mu^\lambda f_{\lambda\nu}, \text{ где} \quad (7.57)$$

$$f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu} - \text{тензор Яно-Киллинга} \quad (7.58)$$

и уравнение для тензора Яно-Киллинга:

$$f_{\mu\{v;\lambda\}} = 0 \quad (7.59)$$

и в нашем случае:

$$f_{\mu\nu} = 2(a \cos \theta l_{[\mu} n_{\nu]} - i r m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]}) \quad (7.60)$$

Все эти величины хорошо описываются на спинорном языке. Так, спинор Яно-Киллинга \varkappa_{AB} :

$$\varkappa_{00} = 0 = \varkappa_{11} \quad (7.61)$$

$$\varkappa_{01} = i a \sin \theta - r \quad (7.62)$$

Уникальность метрики Керра. Теоремы единственности +

Само решение Керра уникально в целом ряде смыслов. Керр открыл уникальное решение, которое описывает все астрофизические черные дыры.

- 1) Хоккинг: Если горизонт событий H стационарный (∂_t - вектор Киллинга), асимптотически плоский, регулярный, то тогда такое пространство является аксиально симметричным (∂_ϕ - вектор Киллинга).
- 2) Биркгоф: Если пространство сферически симметричное (инвариантное относительно $SO(3)$ -преобразований) и вакуумное ($R_{\mu\nu} = 0$), то тогда такое пространство является статическим (стационарным и инвариантным относительно $t \rightarrow -t$) и является пространством Шварцшильда.
- 3) Израэль: Статическое, асимптотически плоское, вакуумное пространство является сферически симметричным.
- 4) Картер: Стационарное, Асимптотически плоское, (аксиально симметричное) пространство, с регулярным горизонтом H пространство является пространством Керра.

Интегралы Комара

Векторы Киллинга приводят к интегралам Комара. Введем еще одну форму уравнений Киллинга:

$$K_{\mu;\nu} = K_{[\mu;\nu]}, \quad (7.63)$$

где в правой части стоит 2-форма (аналогом является $F_{\mu\nu}$). Мы знаем, что 2-формы можно интегрировать по 2-мерным поверхностям. Если пространство не вакуумное,

то, разность интегралов по S_1 и S_2 (см. рис. 7.3) будет выражаться через тензор тензор энергии-импульса ($T_{\mu\nu}$) «внутри». Если же проинтегрировать эти 2-форму

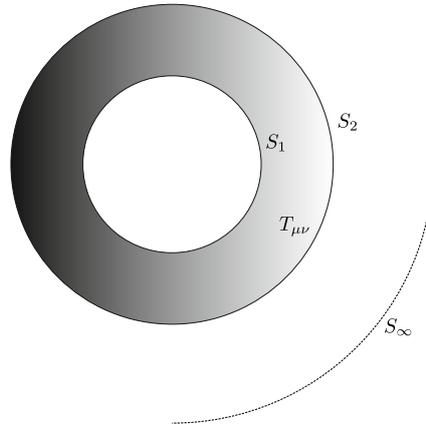


Рис. 7.3. Интегрирование 2-форм

по бесконечной поверхности, то тогда мы должны получить в одном случае полную энергию, а в другом - полный момент (Массу). Т.е. ожидаем, что для $K^\mu = \partial_t$ и $\tilde{K}^\mu = \partial_\varphi$

$$M = -\frac{1}{8\pi G} \oint K^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} \quad (7.64)$$

$$J = \frac{1}{16\pi G} \oint \tilde{K}^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu}, \quad (7.65)$$

где $J = aM$. **Задача** - проверить последние соотношения.

Утв. При $M = 0$, $a \neq 0$ метрика Керра переходит в пространство Минковского, и интервал:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - \Sigma d\theta - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.66)$$

Тензор кривизны для такой метрики равен нулю. Замена координат, которая переводит интервал в пространство Минковского:

$$\begin{cases} z = r \cos \theta \\ x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (7.67)$$

Тогда интервал перейдет в

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (7.68)$$

Форма Керра-Шильда

Пусть теперь $M \neq 0$. Сделаем преобразование координат по тем же формулам:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} (k_\mu dx^\mu)^2, \quad (7.69)$$

где

$$k_0 = 1 \quad (7.70)$$

$$k_i = \begin{pmatrix} \frac{rx+ay}{r^2+a^2} \\ \frac{rx-ay}{r^2+a^2} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

Такая метрика нужна, чтобы понять, где сингулярность. Сингулярность здесь анизотропна. В этих координатах можно сказать, что поверхности $r = \text{const}$ являются эллипсоидами. Такие поверхности сужаются при уменьшении r . При $r = 0$ поверхность превращается в диск. Такая поверхность описывается как:

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = 0 \quad (7.72)$$

Граница этого диска *сингулярна*. Это следует из формулы (7.69), если рассмотреть случай $z = r$. Такой случай называется кольцевой сингулярностью.

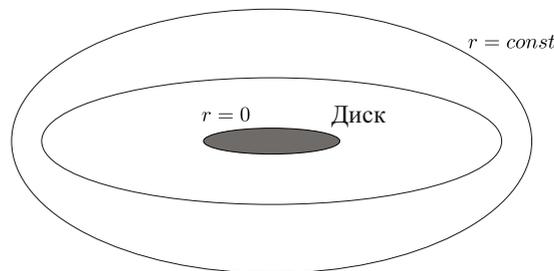


Рис. 7.4. Кольцевая сингулярность

Можно построить диаграммы Пенроуза для двух случаев: а) Проходим через центр диска «сверху вниз» - прямая $\theta = 0, r = z$. б) Движемся вдоль $\theta = \frac{\pi}{2}, r = z$ - появляется сингулярность.

Зам. Такая картина наблюдается под *горизонтом событий*, а значит ее наблюдение затруднено.

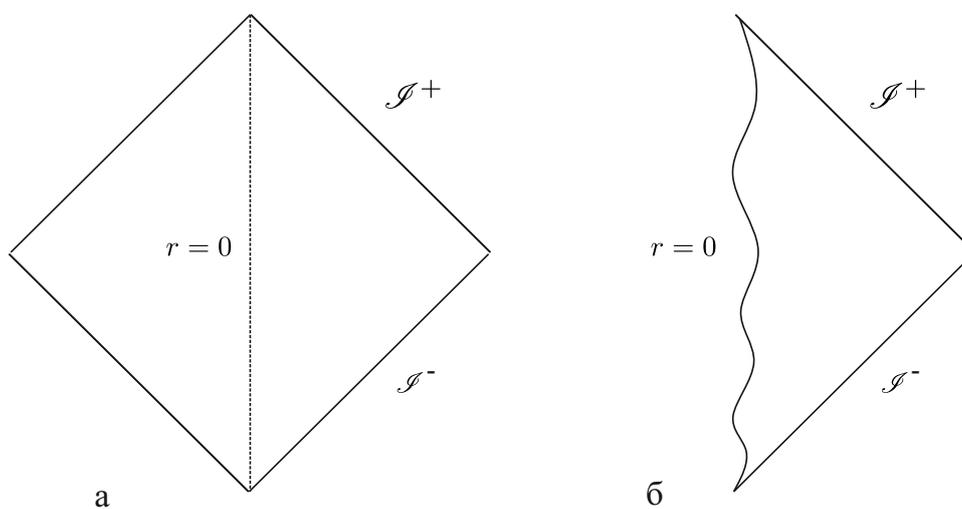


Рис. 7.5. Диаграммы Пенроуза кольцевой сингулярности

Лекция 8. Метрика Керра

Запишем метрику Керра в координатах Бойера-Линдквиста - $\{t, r, \theta, \varphi\}$. Введем обозначения:

$$\alpha = a^2 \sin^2 \theta \quad (8.1)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (8.2)$$

$$\beta = r^2 + a^2 \quad (8.3)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (8.4)$$

Тогда метрику можно записать в виде:

$$ds^2 = \frac{\Delta - \alpha}{\Sigma} dt^2 + \frac{2\alpha\beta - \Delta}{a\Sigma} dt d\varphi - \left(\frac{\beta^2 - \Delta\alpha}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \Sigma \quad (8.5)$$

Можно заметить, что такая метрика диагональна в секторе r, θ , но не диагональна в секторе t, φ , что связано с вращением.

Также можно записать метрику Керра в т.н. **координатах Керра-Шильда**. Координаты (\tilde{t}, x, y, z) . Преобразование выглядит так:

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta \exp \left(i \int \left(d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \right) \right) \quad (8.6)$$

$$z = r \cos \theta \quad (8.7)$$

В этих координатах легко заметить, что метрика становится плоской, если масса равна нулю:

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2 \frac{Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left(\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{\beta} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t} \right)^2. \quad (8.8)$$

В этих координатах также есть замечательное тождество:

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) r^2 = a^2 z^2. \quad (8.9)$$

Сингулярность метрики Керра

В координатах Бойера-Линдквиста (8.4) - сингулярность там, где $\Sigma = 0$. В этой области эллипсоид «схлопывается».

$$\Sigma \rightarrow 0: r = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \quad (8.10)$$

Из рассмотрения метрики в координатах Керра-Шильда можно понять, что сингулярная область является не точкой (См. рис. 7.4). Область, образованная диском в экваториальной плоскости - $-a \leq x, y \leq a$. Сингулярностью является только граница диска:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{- сингулярное кольцо метрики Керра} \quad (8.11)$$

Из последнего тождества видно, что точка $r = 0$ отображается в границу диска. Диаграммы Пенроуза для различных случаев представлены на рисунке (7.5). Пользуясь диаграммой Пенроуза для случая (а) рисунка можно продолжить метрику на случай $r < 0$. **Задача:** Пусть $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $r < 0$. Проверить, что в этой области появляется *граница причинности*, т.е.

$$g_{\varphi\varphi} > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8.12)$$

Координата φ становится «замкнутым временем». А ситуация, когда $g_{\varphi\varphi} = 0$ называется **Хронологическим горизонтом**.

Вернемся к рассмотрению сингулярности в координатах Бойера-Линдквиста (8.4). В таких координатах вводится специальная тетрада, векторы которой выбраны вдоль главных изотропных направлений тензора Вейля. Рассмотрим подробнее 2 вектора - l, n , определяющие физические радиальные направления, и отвечающие лучам вдоль радиуса r в координатах Бойера-Линдквиста.

Главные изотропные направления в метрике Керра

Спинор Вейля - симметричный 4-компонентный спинор. Следовательно, он факторизуется на 4 одновалентных спинора, которым соответствуют 4 изотропных направления. Метрика Керра - метрика типа D, для которой существуют только 2 изотропных направления l^μ, n^μ , которые, к тому же, двукратно вырождены.

Кроме того, для метрик типа D эти векторы геодезические и бессдвиговые. По определенному алгоритму можно подобрать элементы тетрады как:

$$l^\mu = \left(\frac{\beta}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \quad (8.13)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (\beta, -\Delta, 0, a), \quad (8.14)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right). \quad (8.15)$$

Тогда единственная компонента кривизны, которая, к тому же, совпадает с компо-

нентой тензора Вейля определяется как:

$$\Psi_2 = -C_{\mu\nu\lambda\tau} \left(l^\mu n^\nu l^\lambda n^\tau - l^\mu n^\nu m^\lambda \bar{m}^\tau \right) = -\frac{M}{(r - ia \cos \theta)^3} \quad (8.16)$$

Запишем также **потенциал Эрнста**, с помощью которого была выведена метрика Керра:

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{2M}{r - ia \cos \theta}. \quad (8.17)$$

Симметрии метрики Керра

У метрики Керра есть 2 вектора Киллинга:

$$K = \partial_t, \quad \tilde{K} = \partial_\varphi. \quad (8.18)$$

Тензор Киллинга:

$$K_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{\{\mu} n_{\nu\}} - r^2 g_{\mu\nu}. \quad (8.19)$$

Тензор Яно-Киллинга $Y_{\mu\nu}$ определяется как:

$$K_{\mu\nu} = Y_{\mu\lambda} Y_{\nu}^{\lambda}, \quad Y_{\mu\nu} = -Y_{\nu\mu}. \quad (8.20)$$

Эргосфера метрики Керра

Имеем в метрике Керра временной вектор Киллинга: $\partial_t = (1, 0, 0, 0)$. Его норма:

$$\|\partial_t\|^2 = g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = g_{tt} \quad (8.21)$$

Поверхность, на которой $\|\partial_t\| = 0$ - это эллипс, который называется *границей эргосферы*. Его уравнение

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (8.22)$$

То, что мы называем энергией это:

$$E = m u^\mu K_\mu, \quad (8.23)$$

где m - масса частицы, u^μ - касательный вектор к ее мировой линии. Но в области пространства, где норма вектора K_μ становится отрицательной, энергия тоже может стать отрицательной. Вектор Киллинга:

$$K_\mu = (g_{tt}, 0, 0, g_{t\varphi}). \quad (8.24)$$

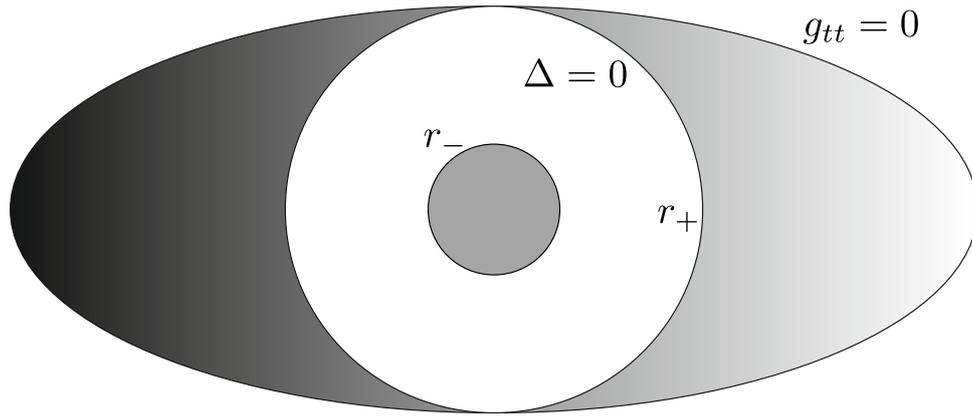


Рис. 8.1. Эргосфера и горизонт событий метрики Керра

Тогда

$$E = m(g_{tt}u^0 + g_{t\varphi}u^\varphi) \quad (8.25)$$

Внутри эргосферы $g_{tt} < 0$. Для частицы, которая не вращается, второе слагаемое обращается в ноль. Значит, внутри эргосферы энергия частицы может стать отрицательной. Энергия - интеграл движения, следовательно частица с отрицательной энергией из под эргосферы никогда не выйдет.

Эффект увлечения систем отсчета

Рассмотрим временноподобную кривую, которая существует внутри эргосферы: $\dot{x}^2 > 0$

Тогда условие существования *временноподобных* орбит внутри эргосферы может быть записано как (для вращательного движения - $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \Omega)$).

$$u^2 > 0, \text{ если } \Omega_- < \Omega < \Omega_+, \quad (8.26)$$

где

$$\Omega_{\pm} = \frac{-g_{t\varphi} \pm \sqrt{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}{g_{\varphi\varphi}}. \quad (8.27)$$

Это условие можно сформулировать иначе - Если построить на круговой орбите вектор Киллинга ξ^μ :

$$\xi^\mu = K^\mu + \underbrace{\Omega}_{=const} \tilde{K}^\mu - \text{вращающийся вектор Киллинга}, \quad (8.28)$$

то ξ^μ - должен быть временноподобным: $\xi^2 > 0$.

Можно проверить, что при уменьшении r , Ω_{\pm} сближаются. Процесс заканчивается, когда $\Omega_{+} = \Omega_{-}$, что соответствует:

$$-\frac{\Delta - \alpha\beta - \Delta\alpha}{\Sigma} + \left(\frac{\alpha\beta - \Delta}{a\Sigma}\right)^2 = 0, \quad (8.29)$$

откуда

$$\Delta = 0 \text{ - горизонт событий} \quad (8.30)$$

Т.е. вращающийся вектор Киллинга становится изотропным при

$$\Omega_{+} = \Omega_{-} = \Omega_H = \frac{a}{\beta} \quad (8.31)$$

Для того, чтобы «пожить» внутри эргосферы необходимо двигаться вдоль времени-подобной кривой - начать вращательное движение в направлении вращения самой черной дыры. Временные кривые с вращением существуют между границей эргосферы и горизонтом событий - в этой области существует эффект, который называется **увлечением систем отсчета**. Можно сказать, что метрика вовлекает во вращение все, что находится внутри этой области.

Распишем явно скорость вращения:

$$\Omega_H = -\left.\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right|_{r=r_+}, \quad (8.32)$$

откуда

$$\Omega_H = \frac{a}{a^2 + r_+^2}, \quad (8.33)$$

где координата r_+ такая, что является большим корнем уравнения $\Delta(r_+) = 0$. Распишем последнее условие подробнее:

$$r^2 - 2M^2 + a^2 = 0. \quad (8.34)$$

Его решением является

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (8.35)$$

Горизонт событий является также горизонтом Киллинга вектора ξ^μ (см. 8.28) в этой метрике.

Не случайно получилось, что угловая скорость черной дыры не зависит от углов. Более того, не только для метрики Керра, но и в общем случае можно доказать, что $\Omega_H = const$ - см. лекции Townsend P. - Black Holes.

Менее очевидное свойство вектора ξ^μ - это то, что если определять интегральные кривые, то они будут неаффинно параметризованными.

Неаффинность вращающегося вектора Киллинга.

Рассмотрим кривую v^μ . Тогда уравнение геодезической можно записать как:

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = \begin{cases} 0, & \text{в случае аффинной параметризации} \\ -\kappa v^\nu, & \text{в случае неаффинной параметризации} \end{cases} \quad (8.36)$$

Задача: Рассмотреть уравнение при $v^\mu = \xi^\mu$. Ответ:

$$\kappa_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{a^2 + r^2} = \text{const.} \quad (8.37)$$

В общем случае имеет место теорема о том, что мера неаффинности вращающегося вектора Киллинга, определяемого по схеме, подобной приведенной выше, то будет постоянна, даже если это решение не вакуумных уравнений Эйнштейна. Для более подробного описания можно обратиться к книге *Фролов, Новиков - Black Hole Physics*.

Заметим, что на самом деле, мы имеем 2 корня, соответствующих $\Delta(r) = 0$, т.е. существует 2 области, где вектор Киллинга ξ становится изотропным:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (8.38)$$

Как и в метрике Райснера-Нордстрема, r_- (см. рис. 8.1) соответствует бесконечному голубому смещению, т.е. любые возмущения внутри будут нарастать со временем - эта поверхность нейстойчива.

Процесс Пенроуза

Пусть некая квантовая частица влетает в эргосферу (см. рис. 8.2) и там распадается на пару частиц - одна из получившихся частиц будет иметь положительную энергию, а вторая - отрицательную. Частице в состоянии с отрицательной энергией не остается ничего другого, кроме как «упасть» на дыру.

В результате, у дыры отнимается энергия - она уносится первой частицей с положительной энергией. Наблюдается ситуация, когда фотон может вылететь из эргосферы с энергией большей, чем энергия первоначальной частицы. Этот процесс используется в астрофизике для извлечения энергии из черных дыр. Есть гипотеза, что космические лучи сверхвысоких энергий так и образуются - благодаря процессу Пенроуза.

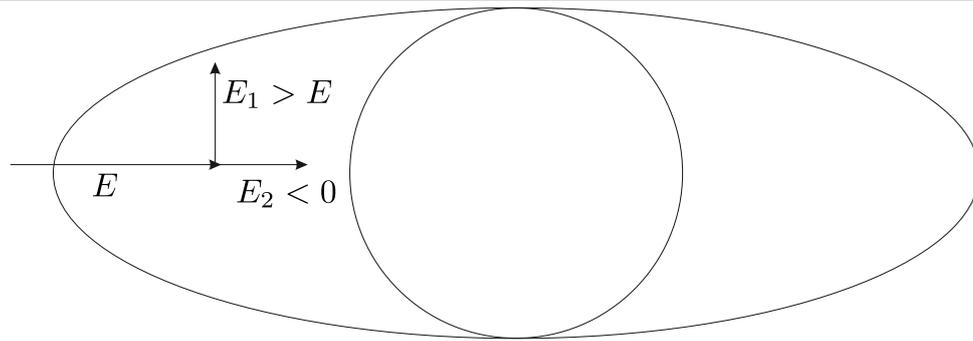


Рис. 8.2. Процесс Пероуза

Аналитическое продолжение. Координаты Финкельштейна.

Как можно продолжить метрику внутрь горизонта? Введем координаты Эдингтона-Финкельштейна для вращающейся черной дыры:

$$dv = dt - \frac{r^2 - a^2}{\Delta} dr \quad (8.39)$$

$$d\phi = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr \quad (8.40)$$

Координата v является новой временной переменной. Метрика принимает вид:

$$ds^2 = \frac{\Delta - \alpha}{\Sigma} dv^2 - 2dvdr + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dv d\phi + 2a \sin^2 \theta dr d\phi - \frac{(\beta^2 - \Delta\alpha)}{\Sigma} d\phi^2 \quad (8.41)$$

И можно явно видеть, что область $\Delta = 0$ не является сингулярностью метрики.

Рассмотрим при $r < r_+$ радиальную кривую (λ - аффинный параметр): $x^\mu(\lambda) = \{v, r, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0\}$. Тогда справедливо:

$$\dot{v} > 0 \implies \dot{r} < 0. \quad (8.42)$$

Т.е. внутри черной дыры радиальное движение является падением в центр.

Движение тел в окрестности черной дыры

Конечно, для астрофизики важнее всего уметь предсказывать то, как в окрестности черной дыры будут двигаться тела. Этот вопрос хорошо изучен экспериментально.

Рассмотрим геодезические общего вида. Как решить уравнение геодезических?

1) Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = m^2 \quad (8.43)$$

Решение такого уравнения состоит в том, что интегралы движения нужно искать в виде:

$$S = -Et - L\varphi - \underbrace{f(r, \theta)}_{f_1(r)+f_2(\theta)}, \quad (8.44)$$

где E - интеграл энергии, L - интеграл, отвечающий вращению, $f(r, \theta)$ - неизвестная функция, определяющаяся из уравнений Гамильтона-Якоби.

Задача: Расписать уравнения Гамильтона-Якоби для такого Анзаца. Найти константу Картера.

- 2) Более простым способом является нахождение интегралов движения. Хотим найти 4-мерную кривую $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Для нахождения каждой компоненты необходимо 4 уравнения, т.е. нужно найти 4 интеграла движения. В качестве одного можно использовать свертку метрики:

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \begin{cases} 1 & \text{Временеподобная геодезическая} \\ 0 & \text{Изотропная геодезическая} \end{cases} \quad (8.45)$$

Другой интеграл движения - энергия ($K_\mu = \partial_t$ - временной вектор Киллинга):

$$E = mK_\mu \dot{x}^\mu. \quad (8.46)$$

Еще один интеграл движения - момент импульса ($\tilde{K}_\mu = \partial_\varphi$):

$$L = -m\tilde{K}_\mu \dot{x}^\mu \quad (8.47)$$

Также можно получить интеграл движения, используя тензор Киллинга $K_{\mu\nu}$, C - константа Картера.

$$K_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = C \quad (8.48)$$

Таким образом, имеем 4 интеграла движения, т.е. мы свели задачу к системе уравнений первого порядка. Приведем эту систему. С помощью двух интегралов движения E и L можем выразить компоненты x_t и x_φ и подставить в другие интегралы. В итоге:

$$\Sigma \dot{r} = \pm \sqrt{\mathcal{R}(r)} \quad (8.49)$$

$$\Sigma \dot{\theta} = \pm \sqrt{\Theta(\theta)}, \quad (8.50)$$

где $\mathcal{R}(r)$, $\Theta(\theta)$ - некоторые функции, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Далее, можем написать:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}, \quad (8.51)$$

и, умножая на Σ , получим:

$$\Sigma \dot{r} = \frac{dr}{dy} \equiv r', \quad (8.52)$$

где y - некий параметр на кривой. Провели репараметризацию, чтобы избавиться от параметра Σ . Таким образом:

$$r' = \pm \sqrt{\mathcal{R}(r)} \implies \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{R}(r)}} = dy \quad (8.53)$$

Аналогичные выражения можно получить и для координаты θ . Приведем функции \mathcal{R} и Θ в явном виде:

$$\mathcal{R} = (\beta E - aL)^2 - \Delta (C + m^2 r^2) \quad (8.54)$$

$$\Theta = C - m^2 a^2 \cos^2 \theta - \left(Ea \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2 \quad (8.55)$$

А уравнения на φ и t :

$$\Sigma \dot{\varphi} = \frac{L}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} (\beta E - aL) \quad (8.56)$$

$$\Sigma \dot{t} = a (L - aE \sin^2 \theta) + \frac{\beta (\beta E - aL)}{\Delta} \quad (8.57)$$

Лекция 9. Поведение частиц и полей в метрике Керра

Керра

Орбиты частиц в метрике Керра

В прошлый раз было написано уравнение для геодезических в разделенном виде (8.50). Приведем систему в виде:

$$\Sigma^2 \dot{r} = \mathcal{R} = ((r^2 + a^2)E - aL)^2 - \Delta(C - \mu^2 r^2) \quad (9.1)$$

$$\Sigma^2 \dot{\theta} = \Theta = C - \mu^2 a^2 \cos^2 \theta - \left(aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2, \quad (9.2)$$

где E, L, C - 3 интеграла движения, которые ассоциированы соответственно с векторами Киллинга $\partial_t, \partial_\phi$ и тензором Киллинга $K_{\mu\nu}$ (константа Картера), μ - масса частицы. Выводы из такой записи:

- 1) Член $\frac{L}{\sin \theta}$ содержит потенциальную сингулярность. Поэтому траектории, пересекающие полярную ось, возможны только при $L = 0$.
- 2) Нетрудно видеть, что *плоскими* будут только траектории, соответствующие $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тогда функция $\Theta(\theta) \equiv 0$. Она будет равна нулю при:

$$\boxed{C - (aE - L)^2 = 0} \text{ - условие плоского движения.} \quad (9.3)$$

Рассмотрим также радиальное направление - будем считать $\mathcal{R}(r) = 0$, считая, что выполнено условие (9.3). Тогда получается квадратичное уравнение для E и L . Такой случай соответствует круговым орбитам, т.к. тогда него $\dot{r} = 0$.

Устойчивость круговых орбит зависит от того, какой знак имеет \ddot{r} . Добавим условие $\mathcal{R}' = 0$. Тогда получим 2 квадратичных уравнения на E, L . Обозначим r - радиус круговой орбиты.

$$\mu^{-1} E = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}} \quad (9.4)$$

$$\mu^{-1} L = \pm \sqrt{\frac{M}{r}} \frac{r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2}{(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}} \quad (9.5)$$

Решение с верхним знаком соответствует вращению в том же направлении, что вращается Черная дыра, а с нижним - в противоположном. Можно заметить, что радиусы совращающихся орбит меньше, чем радиусы противоположно вращающихся

орбит, при тех же значениях параметров. Получается, что вовлечение во вращение вместе с черной дырой приводит к тому, что частица оказывается ближе к горизонту.

Чтобы проверить устойчивость орбиты можно ввести радиальный потенциал. Вместо E необходимо поставить в уравнение (9.2) некую функцию $U(r)$ и приравнять к нулю все выражение. Тогда, если $E = U$, то это будет условие на точку поворота. Рассматривая вторую производную $U(r)$, можно разрешить вопрос об устойчивости орбит.

Задача: Найти условие на устойчивость круговых орбит. (Более подробно можно найти в книге Ландау и Лифшица)

Из формул (9.5), исключая из них r , можем получить E как функцию L .

Обратим также внимание, что знаменатель в обеих формулах может обращаться в нуль. Это интерпретируется как случай $E = const$, $\mu \rightarrow 0$. Нули знаменателя соответствуют уравнениям на радиусы фотонных орбит:

$$r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr} = 0. \quad (9.6)$$

Получаются два решения - две орбиты в экваториальной плоскости:

$$r_{1,2} = 2M \left(1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\pm \frac{a}{M} \right) \right] \right). \quad (9.7)$$

Легко видеть, что $r_1 < r_2$ и вращение по орбите r_1 совпадает с направлением вращения черной дыры. Для круговой скорости азимутального движения можем найти соотношение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{\sqrt{Mr}}{r^2 \pm a\sqrt{Mr}} \quad (9.8)$$

Возможны ли траектории $\theta = \theta_0 = const$? Возможны, просто мы получим какое-то другое, отличное от (9.3) соотношение на интегралы движения C, E, L и θ_0 . **Задача:** Исследовать траектории $\theta = \theta_0$. Их вид - кривые, которые «навиваются на конус» (см. рис. 9.1) Можем сразу заметить, что этот конус может вырождаться в прямую только на полярной оси. Этот случай соответствует $\theta = 0$, и при этом $L = 0$ по причинам, которые обсуждались выше. Этот случай является единственной реализацией строго радиальной орбиты, кроме плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Сферические орбиты

Будем считать $r = const$, $\theta \neq const$, и условие (9.3) не возникает - C, L, E - произвольные параметры. Тогда $\mathcal{R}(r) = 0$. Потребуем чтобы $\mathcal{R}' = 0$, чтобы радиус оставался постоянным. Таким образом, имеем 2 уравнения на 4 величины. Пусть r_1 и r_2 - радиусы экваториальных орбит, которые лежат в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. (См. рис.

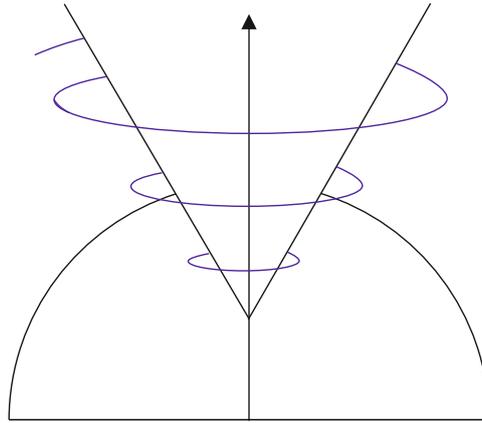


Рис. 9.1. Траектории, соответствующие $\theta = \theta_0$

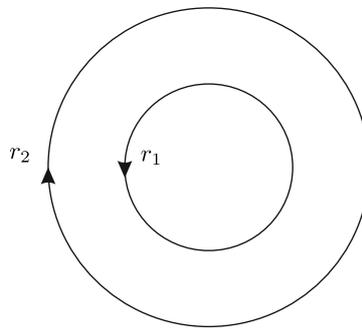


Рис. 9.2. Вращение по экваториальным орбитам

9.2) Начинаем движение из точки r_1 под некоторым углом и требуем, чтобы радиус оставался постоянным. Получим уравнение на координату θ . Обозначим $\cos \theta = y$, тогда уравнение будет полиномом 4-ой степени по y . Движение по θ будет колебательным (см. рис.9.3) На все это накладывается вращение, т.к. $\dot{\phi} \neq 0$. Пусть T_θ и T_ϕ - периоды колебаний по θ и движения по ϕ соответственно. Если эти периоды рационально соизмеримы, то орбиты будут замкнутыми на сфере (см. рис. 9.4) Нетрудно усмотреть, что радиус этой орбиты имеет зависимость $r_{ph} = r_{ph}(L/E)$. Радиусы фотонных орбит лежат между радиусами экваториальных (См. рис. 9.5)

$$\boxed{r_1 < r_{ph} < r_2}. \quad (9.9)$$

Область между экваториальными радиусами называется *фотонным регионом*: Сами экваториальные радиусы ограничены единицами массы черной дыры:

$$M \leq r_1 \leq 3M \leq r_2 \leq 4M \quad (9.10)$$

Сферические фотонные орбиты - это более простой случай, соответствующий

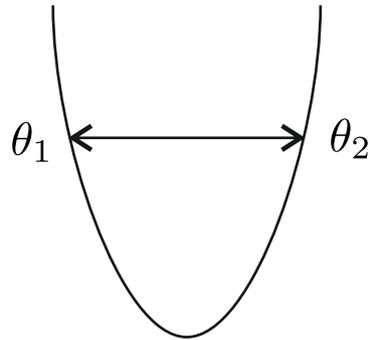


Рис. 9.3. Колебательное движение для координаты θ

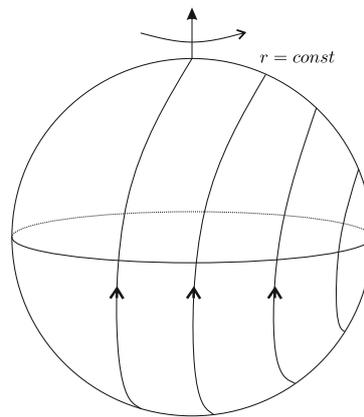


Рис. 9.4. Замкнутые сферические орбиты

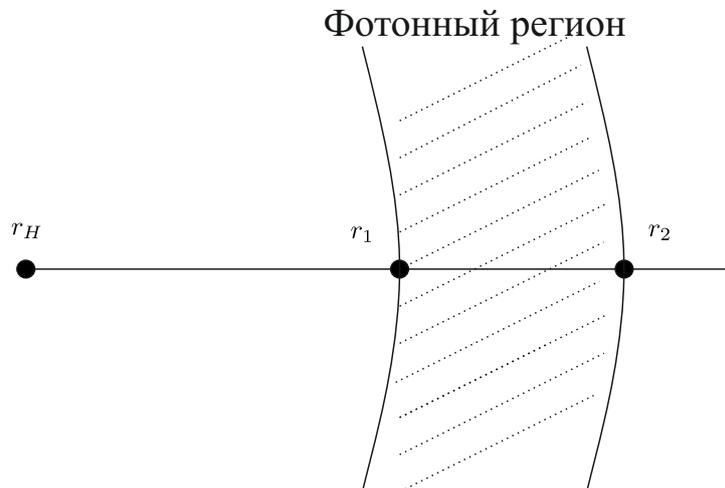


Рис. 9.5. Фотонный регион

$\mu = 0$. Все уравнения становятся однородными квадратичными уравнениями по E и L . **Задача** Для сферических орбит получить соотношения между C, L, E .

Волновые уравнения в метрике Шварцшильда.

Уравнение Клейна-Гордона (Даламбера) - это аналог квантовомеханической релятивистской задачи движения в кулоновском поле. Решения также будут похожи, но вместо полиномов Лежандра в радиальной функции будут т.н. **функции Хойна**. Оператор Даламбера обозначим как:

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \quad (9.11)$$

Применим его к скалярному полю ϕ :

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \quad (9.12)$$

Для метрики Шварцшильда:

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{r^2}, \quad g^{tt} = -\frac{r^2}{\Delta}, \quad \Delta = r^2 - 2Mr, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (9.13)$$

Переменные в метрике Шварцшильда разделяются. Ищем решения в виде:

$$\phi_{lm\omega} = R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (9.14)$$

Это решение, в котором определены энергия ω и квантовые числа $l = 0, 1, \dots, j$, $|m| \leq l$.

Введем *черепашью координату* r^* :

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (9.15)$$

тогда при $r \rightarrow 2M \implies r^* \rightarrow -\infty$.

Сделаем замену переменных такую же, как и в кулоновском поле: $R(r) \rightarrow \frac{R(r)}{r}$. Подставляя метрику и анзац (9.14) в уравнение Даламбера, получим для функции $R(r)$ релятивистский аналог уравнения Шредингера:

$$(\partial_{r^*}^2 - \omega^2 - V_l(r)) R = 0. \quad (9.16)$$

Проанализируем асимптотики при $r^* \rightarrow \pm\infty$. Потенциал V_l имеет вид:

$$V_l = \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (9.17)$$

Получается, если $r \rightarrow 2M$, то никакого барьера нет! А при больших радиусах потенциал сводится к кулоновскому, т.к. вторым множителем можно пренебречь. Круговые орбиты фотона, с точки зрения этого уравнения, - это квазиклассическое решение.

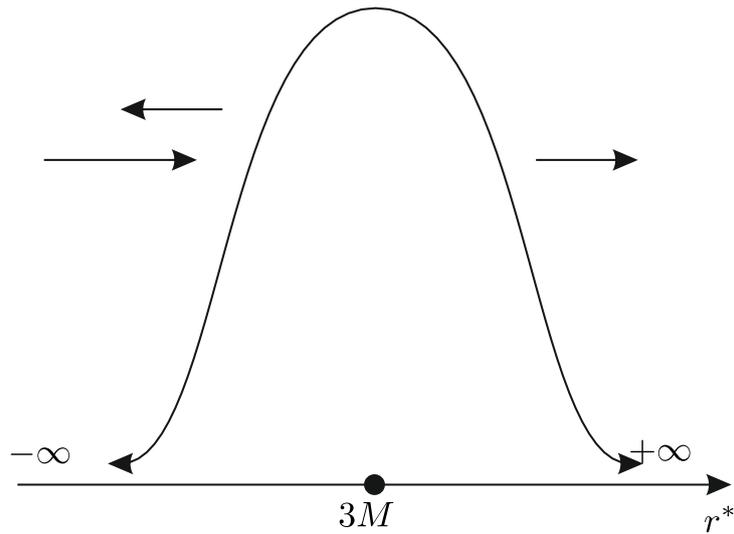


Рис. 9.6. Потенциал в метрике Шварцшильда

При $l \gg 1$ потенциал V_l совпадает с геодезическим потенциалом. Поскольку при $r^* \rightarrow \pm\infty \implies V_l \rightarrow 0$, то радиальная функция:

$$R^{\text{in}}(r) = \begin{cases} e^{-i\omega r^*}, & r^* \rightarrow -\infty \\ A^{\text{out}} e^{i\omega r^*} + A^{\text{in}} e^{-i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (9.18)$$

Решение представляет собой картину прохождения через потенциальный барьер с соответствующими коэффициентами прохождения и отражения.

Т.к. уравнение (9.16) - уравнение второго порядка с вещественными коэффициентами, поэтому можно посчитать Вронскиан:

$$W(R\bar{R}) = R'\bar{R} - \bar{R}'R \quad (9.19)$$

и приравнять значения Вронскиана на $\pm\infty$, т.е.

$$W(R\bar{R}) \Big|_{r^*=\infty} = W(R\bar{R}) \Big|_{r^*=-\infty} \quad (9.20)$$

Тогда можем найти соотношение на коэффициенты:

$$1 + |A_{\text{out}}|^2 = |A_{\text{in}}|^2, \quad (9.21)$$

и коэффициенты прохождения τ и отражения ρ :

$$\tau = \frac{1}{|A_{\text{in}}|^2}, \quad \rho = \left| \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} \right|^2 \quad (9.22)$$

и соотношение унитарности:

$$\boxed{\tau + \rho = 1}. \quad (9.23)$$

Можно было построить и другое решение:

$$R^{\text{up}}(r) = \begin{cases} B_{\text{out}} e^{i\omega r^*} + B_{\text{in}} e^{-i\omega r^*}, & r^* \rightarrow -\infty \\ e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (9.24)$$

Но результат будет тот же самый, просто относительно других коэффициентов.

Волновые уравнения в метрике Керра

Из симметрий метрики Керра, можем искать поле $\phi_{lm\omega}$ в виде:

$$\phi_{lm\omega} = \underbrace{\frac{\chi(r)}{\sqrt{r^2 + a^2}}}_{\equiv R_{m\lambda}^\omega(r)} S_{lm}^\omega(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi}. \quad (9.25)$$

Разделение переменных производится с помощью тетрады Ньюмана-Пенроуза. Рассмотрим тензор Киллинга:

$$K_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{\{\mu} n_{\nu\}} - r^2 g_{\mu\nu} \quad (9.26)$$

и введем оператор

$$\square_\theta = K^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu. \quad (9.27)$$

Вспомним, что

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right) \quad (9.28)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) \quad (9.29)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right) \quad (9.30)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (9.31)$$

Тогда уравнение Даламбера можно переписать в виде:

$$\square \phi = 2\nabla_\mu \left(l^{\{\mu} n^{\nu\}} - m^{\{\mu} \bar{m}^{\nu\}} \right) \nabla_\nu \phi. \quad (9.32)$$

В результате, используя формализм коэффициентов (5.47) $D = l \cdot \nabla$, получим

$$\square \phi = (D - \rho - \rho^*) \Delta + (\Delta + \mu + \mu^* - \gamma - \gamma^*) D - \quad (9.33)$$

$$- (\delta + 2\beta - \tau) \delta^* - (\delta^* + 2\beta^* - \tau^*) \delta = -\frac{1}{2\Sigma} (\square_r + \square_\theta). \quad (9.34)$$

$$\square_r = \underset{\text{коэф. из метрики}}{\Delta} \left(D_1 D_0^\dagger + D_1^\dagger D_0 \right), \quad (9.35)$$

где

$$D_n = \partial_r + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_\perp + \frac{a}{\Delta} \partial_\parallel + 2n \frac{r - M}{\Delta} \quad (9.36)$$

$$D_n^\dagger = D(-t, -\varphi) \quad (9.37)$$

Для оператора по углам:

$$\square_\theta = \mathcal{L}_1^\dagger \mathcal{L} + \mathcal{L} \mathcal{L}_1^\dagger, \quad (9.38)$$

где

$$\mathcal{L}_s = \partial_\theta + s \operatorname{ctg} \theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi - ia \sin \theta \partial_t. \quad (9.39)$$

и введем операторы:

$$\hat{E} = K^\mu \nabla_\mu^{(t)}, \quad \hat{L} = K^\mu \nabla_\mu^{(\varphi)}. \quad (9.40)$$

В итоге, получаем уравнения для радиальной и угловой функций:

$$\hat{E} \phi = \omega \phi_{\omega m \lambda} \quad (9.41)$$

$$\hat{L} \phi = m \phi_{\omega m \lambda} \quad (9.42)$$

$$\square_\theta \phi = -2\lambda \phi \quad (9.43)$$

Введем черепашую координату в метрике Керра:

$$r^* = r + \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(r_+ \ln \frac{r - r_+}{r} - r_- \ln \frac{r - r_-}{r} \right), \quad (9.44)$$

где r_\pm такие, что

$$\Delta(r_\pm) = 0 - 2 \text{ горизонты событий.} \quad (9.45)$$

Уравнение на радиальную функцию:

$$(\partial_{r^*}^2 - V) \chi = 0, \quad (9.46)$$

$$V = \frac{1}{(r^2 + a^2)} \left(\lambda \Delta - Q^2 + \frac{2\Delta(Mr - a^2)}{r^2 + a^2} + \frac{3a^2 \Delta^2}{(r^2 + a^2)^2} \right) \quad (9.47)$$

где

$$Q = (r^2 + a^2) \omega - am. \quad (9.48)$$

Проанализируем поведение потенциала при $r^* \rightarrow \infty$. $Q^2 \sim r^4$, поэтому весь потенциал имеет кулоновскую асимптотику на пространственной бесконечности. Таким образом,

$$r^* \rightarrow \infty \implies V \rightarrow \omega^2, \quad \chi \rightarrow e^{\pm i\omega r} \quad (9.49)$$

$$r^* \rightarrow -\infty \implies V \rightarrow k^2, \quad \chi \rightarrow e^{\pm ikr^*}, \quad (9.50)$$

где $k = \omega - m\Omega_H$, $\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2}$ - угловая скорость черной дыры. Интересно, что если $\omega > 0$, то k может при этом иметь любой знак. Тогда построим решение как:

$$\chi_{\text{in}} = \begin{cases} e^{-ikr^*}, & r \rightarrow r_+ \\ A^{\text{out}} e^{i\omega r} + A^{\text{in}} e^{-i\omega r}, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (9.51)$$

Вычисляем определитель Вронского и приравниваем значения на бесконечностях:

$$W(\chi, \bar{\chi}) \Big|_{r^*=\infty} = W(\chi, \bar{\chi}) \Big|_{r^*=-\infty}. \quad (9.52)$$

И видим, что

$$\frac{k}{\omega} \tau = 1 - \rho \quad (9.53)$$

Т.е. если $k > 0 \implies \rho < 1$, но если $k < 0 \implies \rho > 1$ - **эффект суперрадиации**, т.е. если послать в черную дыру Керра волну, то в этом случае она отразится с усилением.

Эффект суперрадиации похож на индуцированное излучение. Представим себе атомную систему, которая облучается волной. У нее есть спектр частот и возможны переходы вниз и вверх. Если решать такую задачу в квантовой электродинамике, то, если налетающая волна состоит из N_ω мод фотонных полей, то амплитуда переходов вниз $\sim N_\omega + 1$, а амплитуда переходов вверх $\sim N_\omega$. В $N_\omega + 1$ единица соответствует спонтанному переходу - суперрадиация. Это описание не подходит для излучения

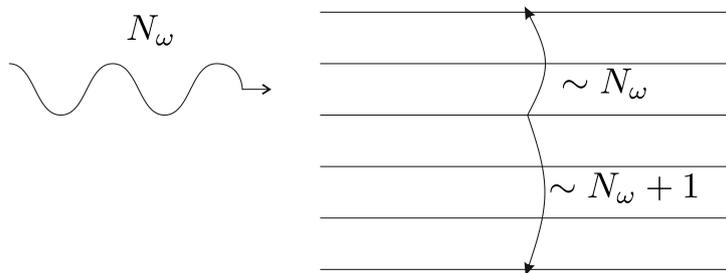


Рис. 9.7. Индуцированное излучение

Хоккинга - это существенно квантовый эффект.

Парадокс Клейна

Для задачи в метрике Керра также можно усмотреть аналог *парадокса Клейна* в электродинамике. Рассмотрим в плоском пространстве, в двумерном случае (t, x) уравнение:

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)^2 \phi = 0, \quad A_\mu = (A_0, 0) \quad (9.54)$$

Возьмем потенциал A_0 в виде ступеньки (см. рис.) Снова возникает задача о рассеянии на потенциале.

$$\phi = X(x)e^{-i\omega t} \quad (9.55)$$

причем

$$X \sim \begin{cases} e^{ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ A_{\text{in}}e^{i\omega x} + A_{\text{out}}e^{-i\omega x}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (9.56)$$

где $k = \omega - eV_0$. В итоге, приравнивая Вронскианы, получим

$$\frac{k}{\omega} \tau = 1 - \rho \quad (9.57)$$

Парадокс Клейна состоит в том, что если взять такие частоты, чтобы k было отрицательным, то $\rho > 1$. Это случай полностью аналогичен ситуации для черной дыры. Такая же картина наблюдается для черной дыры Райснера-Нордстрема: если

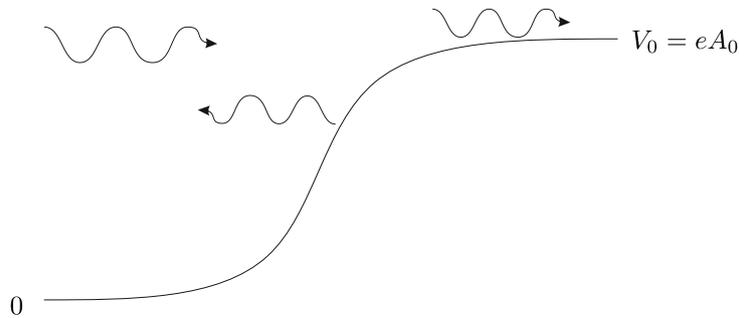


Рис. 9.8. Парадокс Клейна

$$A_\mu = \left(\frac{Q}{r}, 0, 0, 0 \right),$$

$$(\nabla_\mu - ieA_\mu)^2 \phi = 0, \quad (9.58)$$

и, выполняя те же действия, получим:

$$\frac{\omega - eQ/r_+}{\omega} \tau = 1 - \rho \quad (9.59)$$

- эффект суперрадиации для черной дыры Райснера-Нордстрема.

Интересно, что если вместо уравнения Клейна-Гордона рассмотреть уравнение Дирака, то суперрадиации не будет!

Лекция 10. Волновые поля в метрике Керра. Преобразования Боголюбова.

Волновые уравнения в метрике Керра

Рассмотрим решение уравнения Даламбера для скалярного поля ϕ в метрике Керра с помощью разделения переменных:

$$\square\phi = 0; \quad \phi = \sum_{\lambda m \omega} \mathcal{R}(r) S_{\lambda}(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi}, \quad (10.1)$$

где S_{λ} - т.н. сфероидальные функции.

Нужно отметить, что в метрике Керра хорошо изучены не только скалярные поля ($s = 0$), но и более сложные поля с другими спинами: $0 \leq s \leq 2$, через $\frac{1}{2}$. Переменные в этих случаях разделяются похожим образом.

Эффект суперрадиации

Рассмотрим уравнение для $\mathcal{R}(r) = \frac{\chi}{\sqrt{r^2 + a^2}}$:

$$(\partial_{r^*}^2 - V)\chi = 0, \quad (10.2)$$

где потенциал ведет себя как:

$$V = \begin{cases} O\left(\frac{1}{r}\right), & r \rightarrow \infty \\ k^2, & r^* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (10.3)$$

где $k = \omega - m\Omega_H$, r^* - черепашня координата. Поведение потенциала V иллюстрирует рисунок (10.1) (H - Горизонт).

Уравнения, аналогичные (10.2) существуют для всех спинов. Отличается только дополнительный член в потенциале, и многокомпонентность полей - их надо описывать в формализме Ньюмана-Пенроуза. Так, для $s = \frac{1}{2}$ уравнение сводится к уравнению Дирака, а решение соответствует спинорам/биспинорам, а в формализме Ньюмана-Пенроуза, решение описывается в базисе величин ξ^A со спинами вверх и вниз соответственно.

В итоге, для случая полей произвольных спинов, $\phi \rightarrow \phi_s$, где $s = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$. С одной стороны, квантовые числа ϕ_s представляют собой спиральности, а другой, в формализме Ньюмана-Пенроуза, - компоненты спин-тензоров.

Так, $\phi_{\pm 1}$, соответствуют в формализме НП - φ_0, φ_2 , а $\phi_{\pm 2}$ - Ψ_0, Ψ_4 соответственно. Интересен случай $\phi_{\pm\frac{3}{2}}$, который соответствует полю Рариты-Швингера.

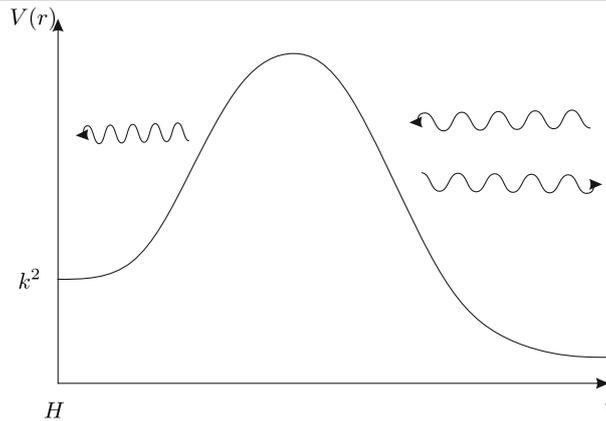


Рис. 10.1. Поведение потенциала для радиальной функции

Введем обобщенный оператор Даламбера - оператор Тьюкольского:

$$\square_s \phi_s = J_s \quad \text{- уравнение Тьюкольского} \quad (10.4)$$

Уравнение Тьюкольского описывает поведение полей различных спинов, J_s - функции источников, т.е. некоторые возмущения, которые генерируют поля ϕ_s .

Интересна задача с потенциальным барьером для полей ϕ_s (см. рис. 10.1). В такой задаче становится возможным вычислить коэффициенты прохождения и отражения. Было показано, что для скалярного поля, используя только асимптотики полей и теорему о Вронскиане, можно получить, что коэффициент отражения может быть больше единицы, если выполняется условие сверхизлучения:

$$m\Omega > \omega \quad (10.5)$$

Можно ознакомиться с работой DeWitt, 1975, Physics Report.

Вторичное квантование в искривленных метриках

Суть формализма состоит в том, что необходимо найти классические решения с определенными аналитическими свойствами, которые будут интерпретироваться как положительно частотные решения волновых уравнений. Эти решения будут далее использоваться в качестве коэффициентов в разложении операторов поля.

Все это можно проделать в метрике Керра, при этом обнаруживается, что выделение положительно частотных решений - не однозначная процедура.

Квазинормальные моды

Рассмотрим задачу о рассеянии на потенциале такого вида, который изображен на рисунке (10.2). Хотим найти такие волновые возмущения, чтобы они расходились

в разные стороны от барьера (черной дыры). В квантовой механике такая задача известна, и она приводит к комплексным уровням энергии. Все зависит от того, сколько в потенциале $V(r)$ при конкретной частоте «укладывается» Де Бройлевских длин волн - возникают квазистационарные состояния:

$$E = \text{Re } E - i\Gamma, \quad (10.6)$$

где Γ - ширина резонанса.

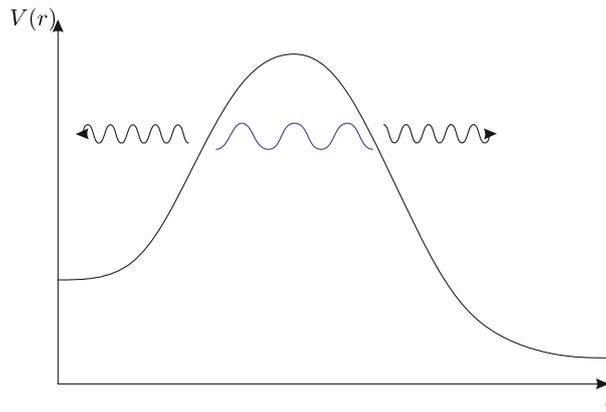


Рис. 10.2. Квазинормальные моды

Похожая ситуация наблюдается, когда сталкиваются две черные дыры, в результате чего, образуется третья, вокруг которой возникают гравитационные возмущения. В экспериментальных наблюдениях таких процессов также обнаружился спектр квазинормальных мод.

Квазинормальные моды в метрике Шварцшильда

Потенциал был выписан на одной из прошлых лекций. Будем искать радиальную функцию в приближении WKB. Приближение работает при $l \gg 1$, где l - орбитальное квантовое число.

Задача: Найти решение радиального уравнения в метрике Шварцшильда в ВКБ приближении. Показать, что если условие представлено в виде, как на рисунке (10.2), то задача решается аналитически и приводит к комплексным частотам:

$$\omega \approx \frac{1}{3\sqrt{3}M} \left(l + \frac{1}{2} \right) - \frac{i\sqrt{3}}{18M}. \quad (10.7)$$

С точки зрения теории поля, решение задачи состоит в нахождении полюсов функции Грина. Можно построить функцию Грина неоднородного уравнения Даламбера:

$$\square G(x, x') = \delta^4(x, x') \quad (10.8)$$

Решение уравнения ищется в виде разложения по модам:

$$G = \sum_{l\omega m} \phi_{l\omega m}(x) \phi_{l\omega m}(x') \quad (10.9)$$

и необходимо учесть дополнительные условия на функцию Грина о том, как правильно обходить полюс. Эти условия можно переписать на языке радиальных функций. Обозначения для асимптотик \mathcal{R}_{in} и \mathcal{R}_{up} проиллюстрированы на рисунке (10.3).

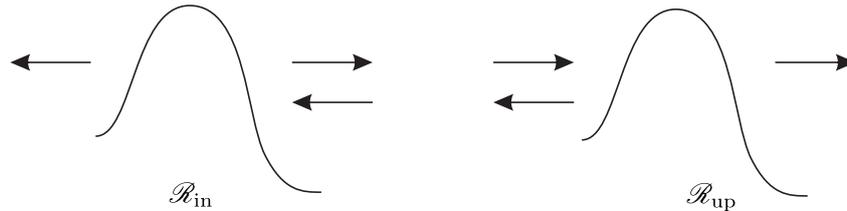


Рис. 10.3. Асимптотики радиальных функций

Запаздывающая функция Грина представляется как:

$$G_{\text{ret}} = \sum Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*(\theta', \varphi') e^{-i\omega(t-t')} g(r, r') \quad (10.10)$$

Чтобы функция Грина действительно была запаздывающей, необходимо построить ее радиальную часть $g(r, r')$ в виде:

$$g_{\text{ret}}(r, r', \omega) = -\frac{1}{2i\omega A_{\text{in}}} (\mathcal{R}^{\text{in}}(r) \mathcal{R}^{\text{up}}(r') \theta(r' - r) + \mathcal{R}^{\text{in}}(r') \mathcal{R}^{\text{up}}(r) \theta(r - r')) \quad (10.11)$$

Рассмотрим теперь для квазинормальных мод полюса радиальной функции Грина, зависящей от частоты - см. рис. (10.4)

Эта задача имеет отношение к теореме об отсутствии волос черной дыры.

Неинвариантность вакуума в гравитационных полях.

Преобразования Боголюбова

Рассмотрим модельный пример для «фридмановской» метрики в пространстве 1 + 1:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 = a^2 (d\eta^2 - dx^2), \quad (10.12)$$

где $a = a(t)$ и конформное время η : $ad\eta = dt$. Выберем коэффициент в виде «ступеньки» аппроксимированной гиперболическим тангенсом.

$$a^2 = A + B \text{th} \rho \eta; \quad \rho = \text{const} \quad (10.13)$$

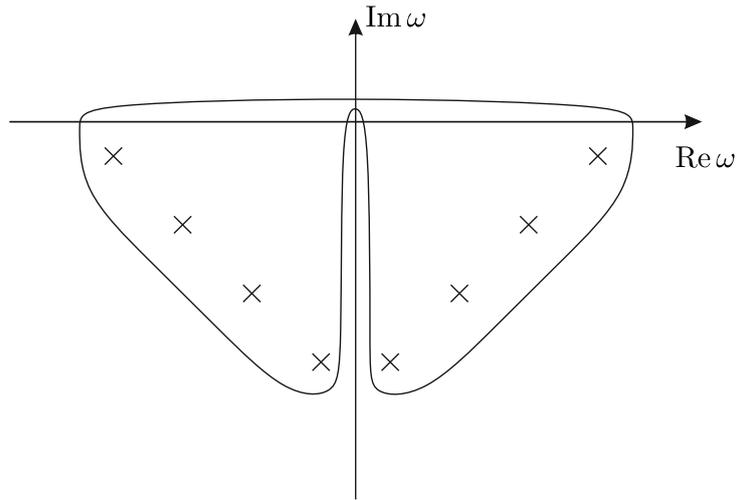


Рис. 10.4. Полюса функции Грина

Поведение a^2 приведено на рисунке (10.5), где

$$a_{\text{in}}^2 = A - B \quad (10.14)$$

$$a_{\text{out}}^2 = A + B \quad (10.15)$$

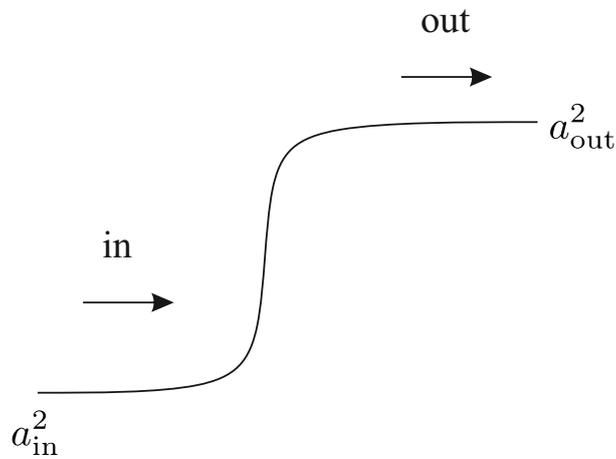


Рис. 10.5. Поведение коэффициента a^2

Решение волнового уравнения в такой метрике:

$$\square\phi + m^2\phi = 0 \quad (10.16)$$

ищется в виде:

$$\phi_k = e^{ikx} \chi_k(\eta). \quad (10.17)$$

Тогда уравнение на функцию $\chi(\eta)$:

$$\frac{\partial^2 \chi_k}{\partial \eta^2} + (k^2 + ma^2(\eta)) \chi_k = 0, \quad (10.18)$$

что является уравнением для маятника с переменной частотой. Т.е. в космологии рождение частиц может быть интерпретировано, как «раскачка вакуумных осцилляторов» за счет переменности частоты.

Уравнение (10.18) имеет точное решение χ_k^{in} , которое имеет одну асимптотику в области in (см. рис. 10.5) - плоская волна:

$$\chi^{\text{in}} \sim e^{-i\omega_{\text{in}}\eta}, \quad \eta \rightarrow -\infty \quad (10.19)$$

А само решение:

$$\chi_k^{\text{in}} = \exp\left(-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln 2 \operatorname{ch} \rho \eta\right) \times \\ \times F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}, 1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}; \frac{1 + \operatorname{th} \rho \eta}{2}\right) \quad (10.20)$$

где

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_{\text{in}} \pm \omega_{\text{out}}}{2} \quad (10.21)$$

$$\omega_{\text{in}}^2 = k^2 + m^2(A - B) \quad (10.22)$$

$$\omega_{\text{out}}^2 = k^2 + m^2(A + B) \quad (10.23)$$

а F_1 - гипергеометрический ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2} + \dots \quad (10.24)$$

Таким образом, решение χ_k^{in} можем назвать положительно частотным в области in. При $\eta \rightarrow -\infty$ оно ведет себя как $e^{-i\omega_{\text{in}}\eta}$. Рассмотрим асимптотики, из которых следуют формулы сшивания:

$$\eta \rightarrow \infty; \quad z \rightarrow 1 \quad (10.25)$$

$$\eta \rightarrow -\infty; \quad z \rightarrow 0 \quad (10.26)$$

Второе решение обозначим χ_k^{out} и потребуем, чтобы при $\eta \rightarrow +\infty$ оно вело себя как $\chi_k^{\text{out}} \sim e^{-i\omega_{\text{out}}\eta}$. Это решение также можно записать через гипергеометрическую функцию:

$$\chi_k^{\text{out}} = \exp\left(-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln 2 \operatorname{ch} \rho \eta\right) \times \\ \times F_1\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}, 1 + \frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho}; \frac{1 - \operatorname{th} \rho \eta}{2}\right) \quad (10.27)$$

В декартовом случае, решение было бы одно, представимое в виде:

$$e^{-i\omega t + ikx}, \quad \omega^2 = k^2 + m^2 \quad (10.28)$$

Квантование можно провести в in-области. Назовем $\hat{\Psi}$ - оператором поля и выразим его, раскладывая по положительно частотным решениям, определенным ранее:

$$\hat{\Psi} = \sum_k a_k^{\text{in}} \phi_k^{\text{in}} + (a_k^{\text{in}})^\dagger (\phi_k^{\text{in}})^* \quad \text{- квантование поля} \quad (10.29)$$

и операторы поля a_k^{in} и $(a_k^{\text{in}})^\dagger$ должны удовлетворять соотношениям:

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k') \quad (10.30)$$

$$a_k^{\text{in}} |\text{vac in}\rangle = 0 \quad (10.31)$$

Аналогичную операцию можем провести в out-области:

$$\hat{\Psi} = \sum_k a_k^{\text{out}} \phi_k^{\text{out}} + (a_k^{\text{out}})^\dagger (\phi_k^{\text{out}})^* \quad (10.32)$$

и для вакуума в out-области:

$$a_k^{\text{out}} |\text{vac out}\rangle = 0. \quad (10.33)$$

Можем найти формулу «сшивки» для двух решений:

$$\phi_k^{\text{in}} = \alpha_k \phi_k^{\text{out}} + \beta_k \phi_{-k}^{\text{out}*} \quad (10.34)$$

где коэффициенты:

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}} \right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}\right) \Gamma\left(-\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\omega_+}{\rho}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i\omega_+}{\rho}\right)} \quad (10.35)$$

$$\beta_k = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}} \right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_{\text{in}}}{\rho}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\omega_-}{\rho}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}\right)} \quad (10.36)$$

Если у нас меняются местами моды, то меняются и сами операторы с теми же коэффициентами, т.е.

$$a_{\text{out}} = \alpha a_{\text{in}} + \beta^* a_{\text{in}}^\dagger \quad (10.37)$$

$$a_{\text{out}}^\dagger = \alpha^* a_{\text{in}}^\dagger + \beta a_{\text{in}} \quad (10.38)$$

Рассмотрим случай Гайзенберговской картины. С физической точки зрения, это означает, что если в начальном состоянии был вакуум:

$$a_{\text{in}} |0\rangle_{\text{in}} = 0, \quad (10.39)$$

то

$$\langle 0_{\text{in}} | a_{\text{out}}^\dagger a_{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = |\beta|^2 - \text{поток рождения частиц} \quad (10.40)$$

В черных дырах также есть in- и out-области, которые определяются тем, что на горизонте пространство локально плоское, но время в этой области и в остальном пространстве ведет себя существенно по-разному. Тогда можно провести вторичное квантование аналогичным образом.

Хоккинг показал, что вакуум в черных дырах определен неоднозначно. Он рассмотрел связь между входящими и уходящими модами. Рассмотрим диаграмму Пенроуза коллапсирующей черной дыры (см. рис. 10.6) Координаты для диаграммы

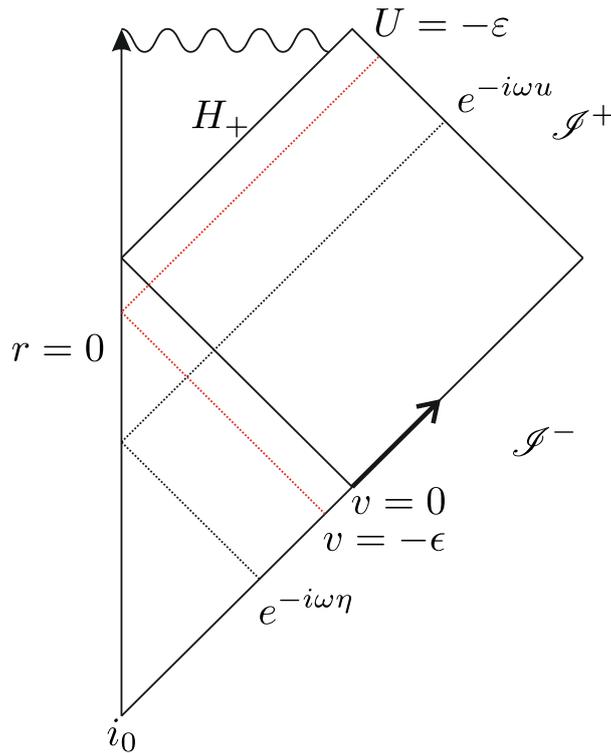


Рис. 10.6. Диаграмма Пенроуза для коллапсирующей черной дыры

Пенроуза:

$$v = t + r^* \quad (10.41)$$

$$u = t - r^* \quad (10.42)$$

$$(10.43)$$

и можно перейти к координатам Крускала:

$$U = -e^{\chi u} \quad (10.44)$$

$$V = e^{\chi v}, \quad (10.45)$$

где для Шварцшильда $\kappa = \frac{1}{4M}$ - поверхностная гравитация. На горизонте метрика ведет себя, как метрика Минковского - светоподобные координаты.

$$ds^2 \Big|_{H_+} = dUdV \quad (10.46)$$

Посылаем схлопывающуюся сферическую волну из области \mathcal{I}^- - оно переходит в расширяющееся решение, т.е. имеет место отражение от $r = 0$. Если схлопывающееся решение $e^{-i\omega v}$, то после оно переходит в $\rightarrow e^{-i\omega u}$. Пусть интервал между последним лучом и горизонтом H_+ равен $V = -\varepsilon$, тогда интервал для отраженной волны: $U = -\varepsilon$. Последний луч переходит в

$$\phi(\omega) = e^{-i\omega/\kappa \ln \varepsilon} = e^{-i\omega/\kappa \ln(-v)}. \quad (10.47)$$

Лекция 11. Эффект Хокинга

То, о чем пойдет речь в этой лекции, происходит на стыке нескольких дисциплин - классической гравитации, Квантовой теории поля, квантовой механики и статистической физики. А именно, будем использовать упрощенный метод квантования, вводя положительно частотные решения и вводя ассоциированный с ними оператор уничтожения. Задача при этом опирается на теорию гармонического осциллятора - число частиц в системе будем сопоставлять с номером возбуждения гармонического осциллятора, на который «рассыпаются» поля при их разложении по модам.

Теория Гармонического осциллятора

Гамильтониан гармонического осциллятора:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (11.1)$$

Вакуумные состояния определяются как состояния, которые уничтожаются оператором a :

$$a|0\rangle = 0 \quad (11.2)$$

Полная система собственных функций гармонического осциллятора:

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (11.3)$$

В силу полноты этой системы:

$$\mathbf{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|. \quad (11.4)$$

Такие моды в теории поля глобальны, т.е. их фурье образы заполняют все пространство. В случае черных дыр нам, скорее, должны подходить некоторые локализованные в пространстве моды. На роль таких конструкций больше подходят т.н. *когерентные состояния* $|\alpha\rangle$ - собственные функции оператора уничтожения:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \text{ где } \alpha \in \mathbb{C} \quad (11.5)$$

Они представляют собой волновые пакеты, построенные из собственных функций гамильтониана. Свойством такой системы также является полнота. Рассмотрим комплексное число α в виде $\alpha = \rho e^{i\varphi}$, тогда $d\alpha = \rho d\rho d\varphi$, и

$$\mathbf{1} = \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (11.6)$$

Когерентные состояния существуют только для бозонов и не существуют для фермионов, поскольку фермионы - чисто квантовые системы.

Понятие о смешанных состояниях в квантовой механике и стат. физике

Рассмотрим какую-то большую квантовую систему, состоящую из двух частей (см. рис. 11.1). Пусть x - физическая система, y - среда. Тогда можно рассмотреть волновую функцию $\psi(x, y)$, где обозначим x - координаты всех частиц системы, y - частиц среды. Если мы будем вычислять среднее оператора, который зависит только

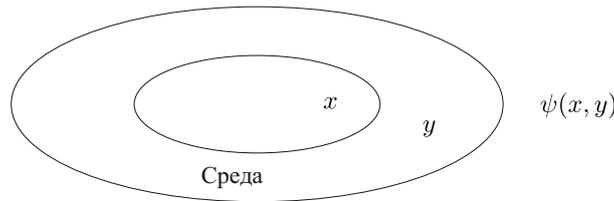


Рис. 11.1. Система со смешанными состояниями

от координат физической системы, то получим, что:

$$\langle \hat{F}(x) \rangle_{\psi} = \int dx dy \psi^*(x, y) \hat{F}(x) \psi(x, y). \quad (11.7)$$

Введем объект, который называется *матрицей плотности* и вычисляется как:

$$\rho(x, y) = \int \psi(x, y) \psi^*(x, y) dy. \quad (11.8)$$

Тогда среднее от оператора $\hat{F}(x)$ можем записать как:

$$\langle \hat{F}(x) \rangle_{\psi} = \int F(x, x') \rho(x', x) dx dx', \quad (11.9)$$

где $F(x, x')$ - бесконечномерная матрица, соответствующая оператору $\hat{F}(x)$.

Если матрица $\rho(x', x)$ диагональная, и для собственных функций наблюдаемых используется дискретный базис, тогда можно показать, что такие состояния могут быть стационарными, не зависящими от времени. Представим себе теорию поля, в которой есть черная дыра (см. рис. 11.2). Черная дыра теперь является пространством y , от которого наблюдаемые нашей системы (вне черной дыры) не должны зависеть. Тем не менее в черную дыру что-то «падает». Черная дыра «переводит» чистые состояний системы физической системы $|\psi(x)\rangle$ в некоторое смешанное состояние - возникает матрица плотности $\rho(x, y)$.

Эффект Хокинга

Эффект Хокинга говорит о том, что как только в пространстве, в котором строится квантовая теория поля в обычных терминах чистых состояний, образуется черная

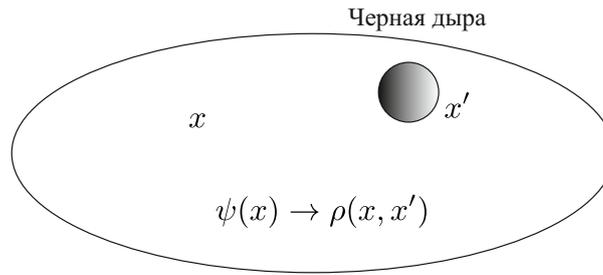


Рис. 11.2. Система с черной дырой

дыра с горизонтом событий, система может быть описана только в терминах матрицы плотности.

Хокинг доказал, что матрица плотности, которая появляется таким образом, является тепловой, т.е. в системе реализуется ансамбль Гиббса с определенной температурой. Как следствие, в области возле черной частицы «перемешиваются» операторы рождения и уничтожения - рождаются частицы. Такой эффект напрямую связан в экспоненциальным характером красного смещения.

Более глубокое значение этого эффекта состоит в том, что черная дыра является «термостатом без термостата». Т.е. черная дыра поглощает, но система вокруг нее ведет себя так, как будто она погружена в термостат при температуре Хокинга.

Эффект Хокинга для макроскопических черных дыр очень мал, в силу малости температуры Хокинга. Однако для реликтовых черных дыр, которые могут образовываться на ранней стадии космологического развития вселенной, этих температур достаточно, чтобы к нынешнему моменту эти черные дыры полностью испарились.

Неоднозначность определения вакуума в различных пространствах

Рассмотрим стационарное или даже статическое пространство (например, метрику Шварцшильда). Неоднозначность определения вакуума связана с тем, что положительные частоты должны соответствовать определенному выбору параметра времени. Нарисуем диаграмму Пенроуза коллапсирующего тела (см. рис. 11.3). В некоторый момент времени образуется горизонт событий H_+ . Наши координаты u, v :

$$u = t - r^* \tag{11.10}$$

$$v = t + r^* \tag{11.11}$$

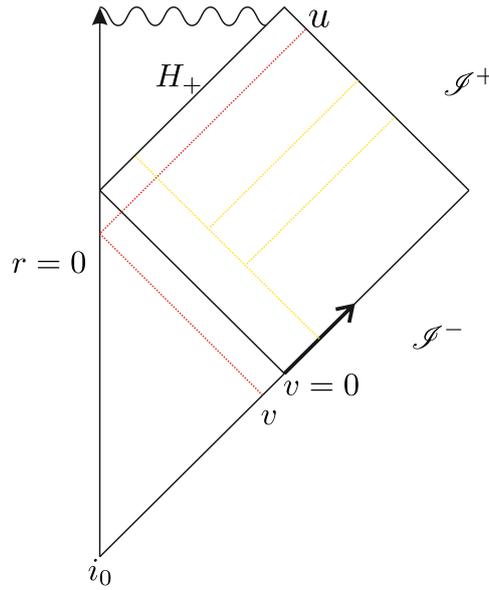


Рис. 11.3. Диаграмма Пенроуза коллапсирующего тела

интересны также координаты Крускала:

$$U = -e^{\varkappa u} \quad (11.12)$$

$$V = e^{\varkappa v}, \quad (11.13)$$

где $\varkappa = \frac{1}{4M}$ - поверхностная гравитация для метрики Шварцшильда. Выберем координаты таким образом, чтобы момент образования горизонта (v - время) был $v = 0$. Тогда поверхность \mathcal{S}^- делится на 2 области - $v < 0$ и $v > 0$.

Если мы из области $v < 0$ (отступаем на малое v от момента образования горизонта) начинаем двигаться в центр (красная пунктирная линия), отражаясь от области $r = 0$, приходим в область \mathcal{S}^+ на расстоянии u от сингулярности (волнистая линия). Тогда связь между u и v :

$$u = -\frac{1}{\varkappa} \ln(-\varkappa v). \quad (11.14)$$

Если производить более детальное исследование этой диаграммы, можно рассмотреть также лучи, выходящие из области $v > 0$. После отражения от $r = 0$, лучи попадают на сингулярность. Однако их часть (желтые пунктирные линии) «по дороге» рассеивается на гравитационном поле и тоже попадает в \mathcal{S}^+ - такие лучи тоже нужно учесть.

В конечном итоге, необходимо найти правильное определение положительно частотных мод на \mathcal{S}^- : $\omega > 0$ и сопоставить им оператор a_{in} , чтобы с помощью него определить физический вакуум для черной дыры: $|0_{\text{in}}\rangle$.

Наблюдатель на бесконечности \mathcal{I}^+ видит не эти моды, а какие-то другие - a_{out} моды, ассоциированные со всеми лучами, приходящими на \mathcal{I}^+ . Такой расчет можно найти в литературе:

- 1) Статья de Witt, Сборник «Черные дыры»
- 2) Фролов, Новиков - Физика черных дыр
- 3) Unruh - 1974.

Коллапс безмассовой оболочки

Рассмотрим некоторый «сгусток» фотонного газа в форме оболочки. Такая поверхность схлопывается со скоростью света, т.е. на диаграмме Пенроуза будет двигаться под углом 45° к направлению времени. В такой модели можно более четко проследить процесс «сшивки» мод. Работаем в метрике Шварцшильда. Диаграмма

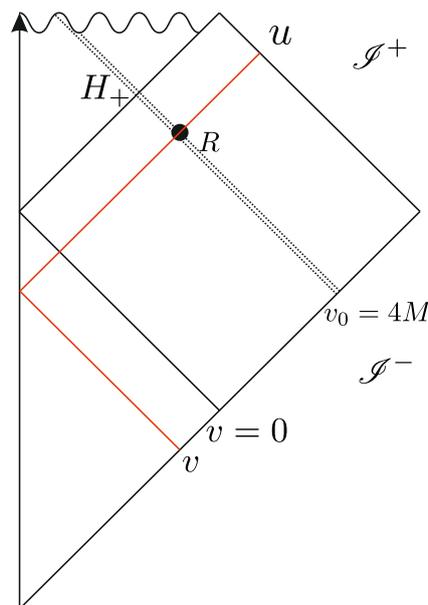


Рис. 11.4. Диаграмма Пенроуза фотонной оболочки

Пенроуза для нашего случая представлена на рисунке (11.4). Фотонную оболочку на диаграмме изобразим в виде двойной пунктирной линии. Можно доказать, что координата, вдоль которой движется оболочка $v_0 = 4M$. В некоторый момент времени происходит пересечение фотонной оболочки с горизонтом (координата горизонта $H_+ : r = 4M$. Момент времени $v = 0$ на \mathcal{I}^- снова выбирается в момент образования горизонта.

Полезные формулы:

$$u = v - 2r^* \quad (11.15)$$

$$r^* = r - 2M + 2M \ln \left[\frac{r - 2M}{2M} \right] \quad (11.16)$$

Рассмотрим моду, которая входит в некоторую точку u на \mathcal{I}^+ . Будем продлевать луч из этой точки назад во времени ($u = \text{const}$) - красная линия на рисунке. В некоторый момент времени луч пересекает фотонную оболочку. Радиальная координата пересечения $r = R$ определяется из уравнения:

$$u = 4M - 2R - 4M \ln \left(\frac{R - 2M}{2M} \right). \quad (11.17)$$

Из тех же соображений, основанных на том, что движение происходит со скоростью света, можно показать, что если u близко к радиусу горизонта, получается, что R тоже близко к радиусу горизонта и логарифмический член в формуле (11.17) доминирует.

u определяется на \mathcal{I}^+ , т.е. в моменты времени $t \rightarrow \infty$. После отражения от поверхности $r = 0$: $u \rightarrow v$ и v определяет моменты времени $t \rightarrow -\infty$. В этой точке имеем соответствие между u и v :

$$u = t - r = v. \quad (11.18)$$

Рассмотрим обратную ситуацию - начинаем двигаться по красной линии, стартуя из точки v . Тогда мы будем пересекать фотонную оболочку изнутри. Снова имеем соответствие между u и v , но в точке $r = R$:

$$v = -2(R - 2M). \quad (11.19)$$

Итоговое уравнения для соответствия геодезических u и v :

$$\boxed{u = -\frac{1}{\kappa} \ln(-\kappa v)}. \quad (11.20)$$

Формула (11.20) совпадает с формулой, полученной с помощью координат Крусскала (11.14).

Классификация решений уравнения Клейна-Гордона

Рассмотрим скалярное поле. Можем найти решения с определенной частотой, разделив переменные:

$$\phi = \sum_J \frac{R(r)}{r} Y_{lm} e^{-i\omega t}, \quad (11.21)$$

где $J = \{lm\omega\}$ - обозначение для совокупности квантовых чисел.

Граничные условия здесь можно выбирать 4-мя различными способами. Их удобно изобразить на диаграмме Пенроуза, которая представляет собой внешнюю часть черной дыры, «склеенной» с белой дырой.

Рассмотрим радиальное уравнение:

$$(\partial_{r^*}^2 + \omega^2 - V)R = 0, \quad (11.22)$$

где потенциал $V \rightarrow 0$ при $r^* \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, в областях \mathcal{I}^\pm получаем свободное уравнение - решение которого определяется асимптотиками

- 1) Решение in представлено на рисунке (рис. 11.5). Решение начинается в области \mathcal{I}^- , на которой радиальная функция $R \sim e^{-i\omega r}$ - сходящаяся волна. На \mathcal{I}^+ радиальная функция $R \sim e^{+i\omega r}$, а в области H_+ : $R \sim e^{-i\omega r^*}$. Таким образом, вид решения определяет виды асимптотик в различных областях.
- 2) Решение ur - нет асимптотик на \mathcal{I}^- .
- 3) Решение out - нет асимптотик на H^+ . Можно сказать, что out = $\bar{\text{in}}$
- 4) Решение down - нет асимптотик на \mathcal{I}^+ , down = $\overline{\text{ur}}$.

В первом приближении, нам достаточно только in и ur состояний, чтобы определить вакуум, но на самом деле, все сложнее, т.к. необходимо учесть все возможные геодезические, чтобы определить вакуум. Не все геодезические определяются решениями 1-4.

Кроме того, по отношению к коллапсу у нас тоже есть два вида решений - внутреннее $v < v_0$ и внешнее $v > v_0$. Таким образом, нас интересуют решения в трех областях:

$$v > v_0 \quad (11.23)$$

$$0 < v < v_0 \quad (11.24)$$

$$v < 0. \quad (11.25)$$

Нормировка решений

Мы рассматриваем решения уравнения:

$$\square\phi_J = 0 \quad (11.26)$$

Для оператора Клейна-Гордона вводится скалярное произведение двух решений:

$$(\phi^1, \phi^2) = i \int_{\Sigma_{\text{Couchi}}} d\Sigma^\mu (\bar{\phi}^1 \phi_{,\mu}^2 - \phi_{,\mu}^1 \bar{\phi}^2), \quad (11.27)$$

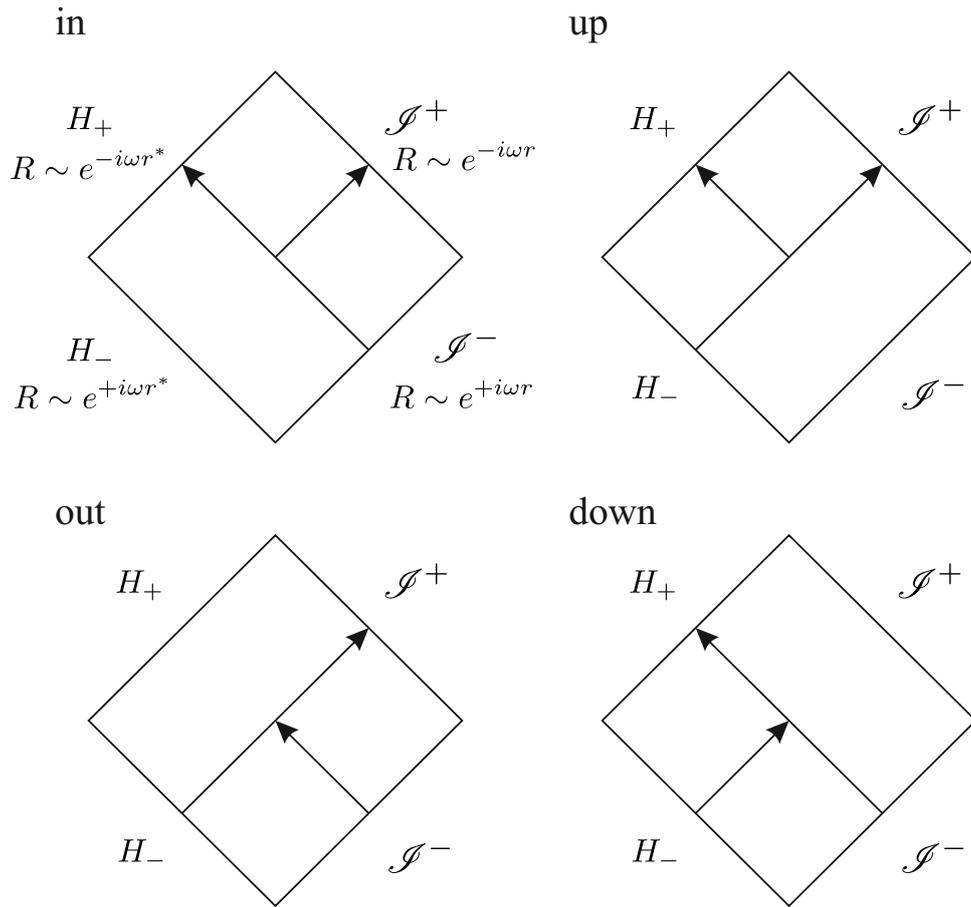


Рис. 11.5. Виды решений уравнения Клейна-Гордона

где интегрирование ведется по Σ_{Couchi} - поверхности Коши. Поверхность Коши - это такая поверхность, которой можно достичь из всех точек в будущем, двигаясь назад, либо из всех точек в прошлом, двигаясь вперед. Таким образом, поверхность Коши дает начальные условия для запаздывающих и опережающих решений.

На нашей диаграмме, поверхность Коши представляет собой $H_+ \cup \mathcal{I}^+$. Соответственно дифференцирование в формуле (11.27) в области \mathcal{I}^+ будет производиться по координате u , а сама поверхность:

$$d\Sigma^u = dud\Omega \Big|_{\mathcal{I}^+}, \quad (11.28)$$

а на горизонте H^+ дифференцирование производится по v , а поверхность :

$$d\Sigma^v = dvd\Omega \Big|_{H^+}. \quad (11.29)$$

Введем величину ϕ_J такую, что:

$$r\phi_J = \phi. \quad (11.30)$$

Нормировать дальше будет удобнее именно функции φ_J . Нам нужны будут моды, нормированные таким образом, что

$$\langle \varphi_J \varphi_{J'} \rangle = \delta_{JJ'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (11.31)$$

Коллапс безмассовой оболочки (продолжение)

Вернемся к рассмотрению коллапса безмассовой оболочки (см. рис. 11.4). Рассматриваем моду, которую мы распространяем с \mathcal{I}^+ назад - такая ситуация отвечает решению out (см. рис. 11.5). Для out мод получаем условие нормировки (11.31). Если взять комплексно сопряженные решения в φ , то

$$\langle \bar{\varphi}_J^{\text{out}} \bar{\varphi}_{J'}^{\text{out}} \rangle = 0. \quad (11.32)$$

Следующий шаг - построение волновых ВКБ пакетов. Волновые пакеты - это суперпозиция решений. Рассмотрим дискретное преобразование Фурье:

$$\varphi_{jnlm} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon} \varphi_{\omega lm} e^{2\pi i n \omega / \varepsilon} d\omega, \quad (11.33)$$

где $\varepsilon = \delta \cdot x$, и $\delta \ll 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}^+$.

φ_{jnlm} можно понимать как когерентное состояние в определенной области частот, локализованное в пространстве - обозначим $\varphi_{jnlm} \equiv \varphi_\alpha$. Масштаб области локализации L таков, что $L \cdot \delta \ll \frac{1}{z}$. Для таких волновых пакетов можно использовать геометрическую оптику для сопряжения асимптотик.

Будем считать, что для нашей ситуации мы нашли хорошие волновые пакеты - $\varphi_\alpha^{\text{out}}$. Далее строим такие же решения для up, образуем из них пакеты и нормируем должным образом - $\varphi_\alpha^{\text{up}}$. Аналогичным образом, строятся $r\varphi^{\text{in}} = \phi^{\text{in}}$:

$$\phi^{\text{in}} = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \text{ на } \mathcal{I}^-. \quad (11.34)$$

Остальные решения также определяются асимптотиками на \mathcal{I}^\pm и H^\pm :

$$\phi^{\text{down}} = e^{-i\omega v} Y_{lm} \text{ на } H^+. \quad (11.35)$$

Но и это еще не все решения, т.к. нам нужно отличать внутренние по отношению к оболочке решения и внешние. Нужно еще решение ϕ^{dn} :

$$\phi^{\text{dn}}(v, \theta, \varphi) = \bar{\varphi}^{\text{up}}(-v, \theta, \varphi), \quad (11.36)$$

оно ведет себя как $\sim e^{-i\omega \ln(\frac{2v}{z})}$ на \mathcal{I}^- . Можно сказать, что ϕ^{dn} соответствует области $0 < v < v_0$ на \mathcal{I}^- .

Решения, выходящие из области $v > v_0$ - решения ϕ^{in} .

Получим из этих мод положительно частотные.

Положительно частотные решения на \mathcal{I}^- . Уравнение Хокинга

Положительно частотные моды строятся как линейные комбинации различных решений для каждого α :

$$\varphi^d = C\varphi^{\text{dn}} + s\bar{\varphi}^{\text{up}} \quad (11.37)$$

$$\varphi^p = C\varphi^{\text{up}} + s\bar{\varphi}^{\text{dn}}, \quad (11.38)$$

где коэффициенты:

$$s = w(1 - w^2)^{-1/2} \quad (11.39)$$

$$c = (1 - w^2)^{-1/2}, \quad (11.40)$$

$$w = \exp\left(\frac{-\pi\omega}{\varkappa}\right). \quad (11.41)$$

φ^d и φ^p - положительно частотные решения, т.к. можно образовать линейную комбинацию:

$$F(v) = \theta(v)e^{-iq\ln\varkappa v} + \theta(-v)e^{-\pi q}e^{-iq\ln(-\varkappa v)} \quad (11.42)$$

и эти решения являются положительно частотными по схеме аналитического продолжения. За критерий положительности частот можно принять аналитичность выхода в комплексную область.

Введем разложение оператора поля:

$$\hat{\phi} = \sum_{\alpha} \vec{a}_{\text{in}} \vec{\phi}^{\text{in}} + \vec{a}_{\text{in}}^{\dagger} \vec{\phi}^{\text{in}}, \quad (11.43)$$

где $\vec{\phi}$ - набор положительно частотных решений:

$$\vec{\phi}^{\text{in}} = \begin{Bmatrix} \phi^{\text{in}} \\ \phi^d \\ \phi^p \end{Bmatrix}, \quad \vec{\phi}^{\text{out}} = \begin{Bmatrix} \phi^{\text{out}} \\ \phi^{\text{down}} \\ \phi^{\text{dn}} \end{Bmatrix} \quad (11.44)$$

, т.е. рассматриваем решения в виде пакетов, соответствующих различным областям в области \mathcal{I}^- . Это означает, что у нас будет \mathcal{S} -матрица, которая будет определять не только частицы, которые уходят на бесконечность, но и те, которые уходят за горизонт черной дыры. Кроме того, она учитывает полный вакуум.

Определим также:

$$\hat{\phi} = \sum_{\alpha} \vec{a}_{\text{down}} \vec{\phi}^{\text{down}} + \vec{a}_{\text{down}}^{\dagger} \vec{\phi}^{\text{down}}, \quad (11.45)$$

и у нас определяются 2 типа операторов рождения и уничтожения. Число частиц в каждой моде α :

$$N_0 = \langle \text{in} | a_{\text{out}}^{\dagger} a_{\text{out}} | \text{in} \rangle \Big|_{\mathcal{I}^+}. \quad (11.46)$$

Такое разложение сразу приводит к уравнению Хокинга:

$$N_0 = \frac{|\tau_\alpha|^2}{e^{\frac{2\pi\omega}{\varkappa}} - 1}, \quad (11.47)$$

где τ_α - коэффициент прохождения. По сути, это Планковское распределение с температурой Хокинга $T_H = \frac{\varkappa}{2\pi}$.

Рассмотрим функцию $f(v) = e^{\frac{i\omega}{\varkappa} \ln(-v)} \theta(-v)$ - аналитически продолженная мода, которая «выходит» на точку u . До аналитического продолжения она была положительно частотной. Разложим эту функцию в интеграл Фурье:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega v + \frac{i\omega}{\varkappa} \ln(-v)}. \quad (11.48)$$

Чтобы вычислить этот интеграл необходимо использовать:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 p^{\pm ix} \frac{dp}{p} \quad (11.49)$$

$$|\Gamma(1 + ix)|^2 = \frac{\pi x}{\text{sh } \pi x}. \quad (11.50)$$

Тогда

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2}{i} (i\omega)^{-i\omega/\varkappa} \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{\varkappa}\right). \quad (11.51)$$

И можно показать, что

$$\tilde{f}(-\omega) = -e^{-\pi\omega/\varkappa} f(\omega), \quad (11.52)$$

откуда также следует уравнение Хокинга.

Лекция 12. Эффект Хокинга. Термодинамика черных дыр

Эффект Хокинга в метрике Шварцшильда

Эта лекция является продолжением предыдущей и посвящена эффекту Хокинга. Мы закончили на обсуждении построения положительно частотных мод в метрике Шварцшильда с коллапсирующей оболочкой (см. рис. 11.4)

Оболочка коллапсирует, ее масса отлична от нуля. $v = 0$ - момент времени, когда оболочка «уходит» под свой гравитационный радиус.

Диаграмма Крускала такого процесса - вакуумное решение без материи. На диаграмме Крускала есть 2 пространства Шварцшильда (I и II), а Волнистые линии обозначают сингулярность.

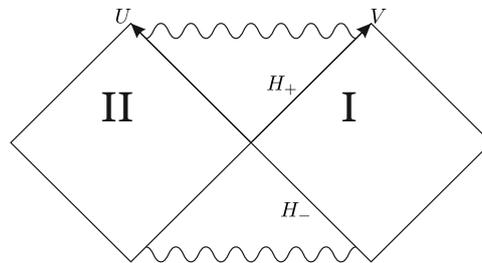


Рис. 12.1. Диаграмма Крускала коллапсирующей оболочки

Координаты u и v на диаграмме Пенроуза выбраны как:

$$u = t - r^* \quad (12.1)$$

$$v = t + r^* \quad (12.2)$$

На диаграмме Крускала координаты выбраны как U и V : в квадранте I :

$$U = -e^{-\kappa u} \quad (12.3)$$

$$V = e^{\kappa v} \quad (12.4)$$

Моды различного характера возникают из-за того, что у нас в модели присутствует радиальный потенциальный барьер (см. типичную ситуацию на рис. 10.3). Решения по асимптотикам по отношению к радиальному потенциалу были классифицированы как in, out, down, up (см рис. 11.5).

Уравнение, из которого следуют эти моды:

$$(\partial_{r^*}^2 - V) \phi = 0, \quad (12.5)$$

это уравнение второго порядка, а значит, оно имеет 2 независимых решения. Однако мы имеем 4 решения, т.к. происходит удвоение мод рассеяния за счет наличия в системе горизонта - частицы могут уходить не только на бесконечность, но и на горизонт.

Более того, можно ввести и «третью моду» ϕ^{dn} . Рассмотрим решение u^{p} (см. рис. 12.2). Интересно посмотреть поведение этого решения при $v < 0$. Поэтому определим $\phi_{\text{dn}} = \phi_{\text{up}}^*(-v)$. На диаграмме Крускала это означает, что из области I мы переходим в область II , т.е. мы производим симметричное отображение $U, V \rightarrow -U, V$ - «отражение». Правило для запоминания состоит в том, что при отражении в зеркале $p \rightarrow d$, а $u \rightarrow n$.

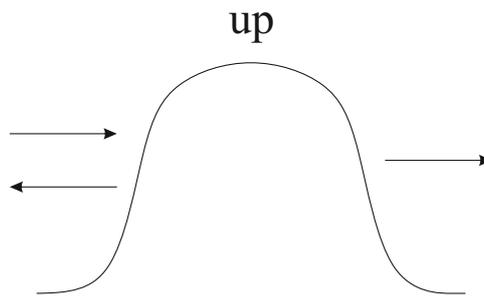


Рис. 12.2. Асимптотика решения u^{p}

Отметим, что положительно частотные решения мы хотим определять по отношению к «временной» координате v , лежащей на \mathcal{I}^- , на горизонте же временной координатой является u .

Вспомним, что в координатах Крускала пространство имеет вид

$$ds^2 = c dV dU + \dots, \quad (12.6)$$

и на горизонте пространство можно считать плоским, поэтому выбор времени должен быть другой.

Полные моды in утраиваются, то есть:

$$\vec{\Phi}^{\text{in}} = \begin{pmatrix} \phi^{\text{in}} \\ \phi^{\text{d}} \\ \phi^{\text{p}} \end{pmatrix}, \quad (12.7)$$

где ϕ^{d} , ϕ^{p} - представляют собой линейные комбинации ϕ^{dn} и ϕ^{up} , которые позволяют определить положительную частотность на горизонте по отношению к времени Крускала.

Соответствующая выкладка сводится к некоторому интегралу - разложению Фурье фактора красного смещения. Правило последнего луча:

$$\boxed{u = -\frac{1}{\kappa} \ln(-\kappa v)}. \quad (12.8)$$

Можно показать, что φ^{in} является положительно частотной модой на \mathcal{I}^- , а φ^{d} и φ^{p} - на горизонте H . Вакуум, который будет уничтожаться такими модами можно обозначит как $|0, \text{in}\rangle$, а общее квантовое состояние $|\psi, \text{in}\rangle$ можно разбить как:

$$|\psi, \text{in}\rangle = |\text{in}, \text{d}, \text{p}\rangle. \quad (12.9)$$

Частицы с модами d, p для нас не наблюдаемы. Таким образом, следуя аналогии со статистической физикой, необходимо определить матрицу плотности (см. рис. 11.1). Когда мы будем вычислять средние по этим состояниям - $\langle \psi_{\text{in}} | F_{\text{phys}} | \psi_{\text{in}} \rangle$, необходимо просуммировать по состояниям d и p.

Введем оператор числа частиц $N_{\omega}^{\text{phys}} = a_{\text{in}}^{\dagger} a_{\text{in}}$, где операторы рождения относятся только к φ^{in} . Также можно ввести операторы частиц, падающих на дыру - $a_{\text{d}}^{\dagger}, a_{\text{p}}^{\dagger}$ - такие моды нам не видны. Тогда, снова расписывая среднее некоторого физического оператора F_{phys} :

$$\langle \psi_{\text{in}} | F_{\text{phys}} | \psi_{\text{in}} \rangle = \text{tr}(\rho F_x). \quad (12.10)$$

Введем также оператор числа частиц в моде out:

$$\vec{\Phi}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \varphi^{\text{out}} \\ \varphi^{\text{down}} \\ \varphi^{\text{dn}} \end{pmatrix}, \quad (12.11)$$

$$N_{\omega}^{\text{out}} = a_{\text{out}}^{\dagger} a_{\text{out}}. \quad (12.12)$$

Квантовое состояние, соответствующее этой моде - $|\psi, \text{out}\rangle = |\text{out}, \text{down}, \text{dn}\rangle$. Можно вычислить среднее и показать, что:

$$\langle 0, \text{in} | N_{\omega}^{\text{out}} | 0, \text{in} \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\kappa}{2\pi} \omega\right) - 1} \quad (12.13)$$

Последнюю формулу можно сравнить со средним числом фотонов, посчитанному по планковскому распределению в определенной моде k :

$$n_{\gamma} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1}. \quad (12.14)$$

Таким образом, для скалярных мод (Бозе-частиц), которые рождает черная дыра, имеет место распределение Планка.

В статистической физике этот результат получался после введения статистического ансамбля Гиббса и соответствующей матрицы плотности. Здесь мы матрицу плотности не вводили, а экспоненциальный фактор появился как результат Фурье-разложения формулы красного смещения (12.8).

Это совпадение не должно нас удивлять, т.к. мы потеряли информацию о частицах, которые падают на дыру. Т.е. в формулах типа (12.5) происходит усреднение по модам down.

Вакуум Унру

Унру рассматривал диаграмму Крускала. «in-вакуум Унру» такой, в котором положительные частоты определены на \mathcal{I}^- и на H^- . Иначе говоря, все, что приходит на изотропную бесконечность прошлого, может порождаться как частицами из прошлого (\mathcal{I}^-), так и частицами, выходящими из белой дыры (H^-). Вакуум Унру определяется так, чтобы ни со \mathcal{I}^- , ни с белой дыры ничего не приходило. Тогда будет ненулевой поток out-частиц.

Квантование в пространстве Риндлера

Пространство Риндлера - двумерное пространство Минковского $M_{1,1}$ в других координатах, разбитое на подпространства (см. рис. 12.3) В пространстве Минковского

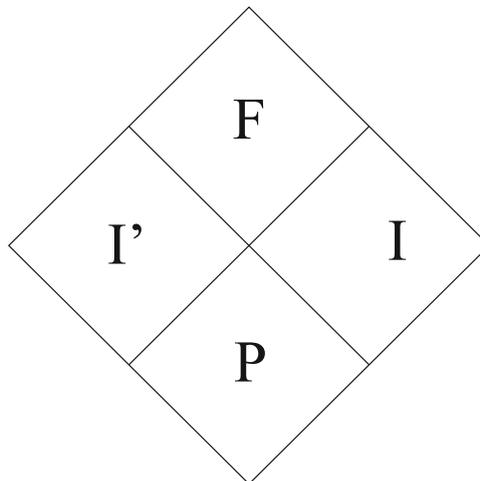


Рис. 12.3. Пространство Риндлера

положительно частотные моды определены на всем многообразии, но они определенным образом разбиваются на «кусочки» в каждом из подпространств. Квантуем только в области I , а потом распространяем на все остальные.

Вычисление средних по формуле Боголюбова автоматически ведет усреднение по модам черной дыры.

Аналогия с электрическим полем

Если есть электрическое поле, то существуют виртуальные электрон-позитронные пары. Если электрическое поле совершает работу на комптоновской длине волны, равную массе частицы: $eE\lambda_C = m$, где $\lambda_C = \frac{1}{m}$, то происходит рождение частицы. Происходит растаскивание частиц электрическим полем в разные стороны.

Из этой оценки следует, что

$$E = E_{\text{shv}} = \frac{m^2}{e}. \quad (12.15)$$

Для черной дыры происходит примерно то же самое. Пусть черная дыра не вращается, ее вектор Киллинга ∂_t , и норма этого вектора под горизонтом отрицательна $|\partial_t| < 0$. Получается, под горизонтом могут быть заряженные частицы, но их энергия отрицательна $E < 0$. Снаружи черной дыры есть, конечно частицы с $E > 0$. И под действием гравитационного поля частицы с различным знаком энергии будут растаскиваться в разные стороны. (См. рис. 12.4) Таким образом, еще одно толкование

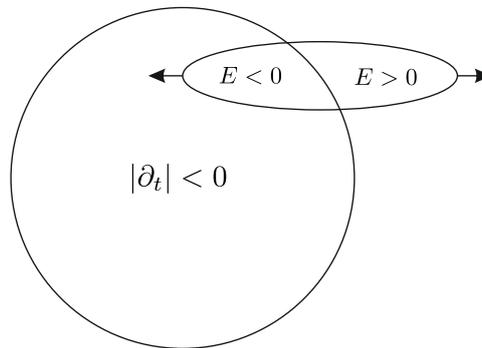


Рис. 12.4. Растаскивание частиц с различными знаками энергии

эффекта Хокинга состоит в разрыве частиц с отрицательной энергией и с положительной энергией.

Матрицу плотности же необходимо вводить, т.к. частицы внутри черной дыры принципиально не наблюдаемы, а значит, по ним необходимо усреднить.

Эффект Хокинга в метрике Керра

Для радиальных мод в метрике Керра у нас также есть уравнение типа (12.5), но потенциал теперь другой:

$$\begin{cases} V \rightarrow \omega^2, & r^* \rightarrow +\infty \\ V \rightarrow k^2, & r^* \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (12.16)$$

где $k = \omega - m\Omega_H$. Это эффект увлечения систем отсчета, который приводит к Суперрадиации.

Полная мода в метрике Керра:

$$\Phi \sim \frac{R(r)}{\sqrt{r^2 + a^2}} Z_{lm}^\omega(\theta) e^{-i\omega t + im\varphi}. \quad (12.17)$$

Введем также $\sigma = \frac{k}{|k|}$, если $\sigma = -1$, то наблюдается ситуация суперизлучательных (superradiant) мод.

Моды в метрике Керра, относительно потенциала - см. рис. 12.5 В такой класси-

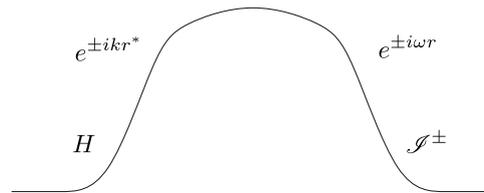


Рис. 12.5. Моды в метрике Керра, относительно потенциала

фикации in, out, down также можно определить, но возникает различие в асимптотиках на горизонте и на бесконечности.

Общий же алгоритм разбиения по полному набору положительно частотных мод, определению in-вакуума (вакуума Унру) сохраняется.

in-вакуум уничтожается положительно частотными операторами уничтожения a_J (J - совокупность квантовых чисел) на H_- по отношению к ∂_U (U - аналог времени на H_-), и на \mathcal{I}^- по отношению к ∂_v . В состоянии вакуума Унру вычислим изменение массы черной дыры ($T^{\mu\nu}$ - тензор Энергии-Импульса):

$$\sum_{\omega lm} \oint \langle \text{in}, 0 | T_{\omega lm}^{tr}(\hat{\phi}_{\text{out}})_{r \rightarrow \infty} | \text{in}, 0 \rangle r^2 d\Omega = -\frac{dM}{dt}. \quad (12.18)$$

В итоге, отсюда мы получим оператор для числа частиц, похожий на (12.12). Но при вычислении мы получим барьерный фактор - нельзя игнорировать коэффициенты прохождения и отражения в расчетах, т.к. часть частиц излучается в качестве суперрадиации.

После этого существенного усложнения, продолжаем равенство (T_J - фурье-образ моды, барьерный фактор)

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \sum_{\omega lm} \frac{\sigma \omega |T_J|^2}{e^{(\omega - m\Omega_H)/T_H} - 1}, \quad (12.19)$$

где температура Хокинга:

$$T_H = \frac{\varkappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (12.20)$$

Перепишем температуру Хокинга в нормальных единицах:

$$T_H = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{M} \frac{1}{8\pi}, \quad (12.21)$$

где Планковская масса $m_{\text{Pl}} \sim 10^{-5}$ г. Тогда, если мы хотим взять $T_H \sim 1$ МэВ, то масса черной дыры должна быть порядка массы астероида. Такой спектр масс могли иметь только первичные черные дыры, если таковые образовывались.

Аналогичную формулу можно написать для излучения углового момента в эффекте суперрадиации ($T_{\omega lm}^{tr} \rightarrow T_{\omega lm}^{\varphi r}$):

$$\frac{dJ}{dt} \sim \frac{\sigma m |\tilde{T}_J|^2}{e^{\frac{\omega - m\Omega_H}{T_H}} - 1}. \quad (12.22)$$

Тогда при $T_H \rightarrow 0$ наблюдается «чистая суперрадиация», которую можно интерпретировать в терминах отрицательного коэффициента поглощения - волны отражаются с усилением.

Таким образом, черная дыра Керра испаряется более сложным способом, потому что есть эффект суперрадиации.

Расчет для полей полуцелого спина

Рассмотрим поля полуцелого спина - фермионы. Квантование, соответственно, будет происходить в статистике Ферми - коммутаторы в канонических соотношениях заменятся на антикоммутаторы.

Для статистики Ферми, алгоритм нахождения $\frac{dM}{dt}$ и $\frac{dJ}{dt}$ будет аналогичен, и в итоге получим:

$$-\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \sum_{\omega lm} \frac{\omega |T_J|^2}{e^{(\omega - m\Omega_H)/T_H} + 1} \quad (12.23)$$

$$\frac{dJ}{dt} \sim \frac{m |\tilde{T}_J|^2}{e^{\frac{\omega - m\Omega_H}{T_H}} + 1}, \quad (12.24)$$

изменился знак перед единицей в знаменателе - распределение Ферми по энергиям в термостате. Таким образом, для фермионов снова получаем матрицу плотности (Ферми) при температуре Хокинга T_H .

Важно отметить, что для фермионов не возникает фактора σ , и следовательно не наблюдается эффекта суперрадиации.

Термодинамика черных дыр

Чисто геометрическая теория черных дыр позволяет вычислить интеграл Комара для черной дыры, возможно, находящейся в окружении вещества с заданным тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и написать закон сохранения энергии и момента количества движения.

В итоге получается *формула Смарра*, в которую входит площадь горизонта событий.

Будем исходить из того, что для метрики Керра существует инвариантное определение массы в виде интеграла Комара (обозначения для векторов Киллинга как и ранее - $K = \partial_t$, $\tilde{K} = \partial_\phi$):

$$M_\infty = \frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \nabla^\mu K^\nu dS_{\mu\nu} \quad (12.25)$$

который вычисляется по бесконечной сфере, и $K = \partial_t$. Комбинация $(\nabla^\mu K^\nu)$ - антисимметричная (в силу уравнений Киллинга), а значит - мы интегрируем 2-форму по двумерной поверхности.

Можно также вычислить такой интеграл по поверхности горизонта:

$$M_H = \frac{1}{8\pi} \oint_{S_H} \nabla^\mu K^\nu dS_{\mu\nu} \quad (12.26)$$

тогда это будет называться массой черной дыры. Аналогично можно ввести интегралы для углового момента:

$$J_H = -\frac{1}{16\pi} \oint_{S_\infty} \nabla^\mu \tilde{K}^\nu dS_{\mu\nu} \quad (12.27)$$

и

$$J_H = -\frac{1}{16\pi} \oint_{S_H} \nabla^\mu \tilde{K}^\nu dS_{\mu\nu}. \quad (12.28)$$

Такие интегралы мы умеем вычислять, когда нормаль к поверхности пространственно подобна. Нормаль к горизонту черной дыры является изотропной.

Введем вектор ξ^μ , который является вращающимся вектором Киллинга:

$$\xi^\mu = K^\mu + \Omega_H \tilde{K}^\mu, \quad (12.29)$$

и тогда горизонт H можно определить как область, на которой норма вектора Киллинга обращается в ноль $\|\xi\| = 0$, ξ^μ становится изотропным. Переопределим изотропный вектор: $\xi^\mu \rightarrow l^\mu$.

Тогда можем дать определение интеграла по изотропной поверхности, которое соответствует интегралу по поверхности сферы с радиусом, равным радиусу горизонта, в 3-мерном пространстве.

Уравнение Киллинга для вектора ξ^μ :

$$\xi_{(\mu;\nu)} = 0, \quad (12.30)$$

откуда можно получить (после коммутации ковариантных производных) (R^μ_ν - тензор Риччи):

$$\nabla_\nu (\xi^{\mu;\nu}) = -R^\mu_\nu \xi^\nu. \quad (12.31)$$

Это уравнение является аналогом уравнения Максвелла:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\nu. \quad (12.32)$$

Тогда ожидаем, разность интегралов Комара между поверхностями H и S_∞ будет давать именно вклад материи (см. рис. 7.3), получаем закон сохранения энергии.

Если на поверхности горизонта H вектор $\xi^\mu \rightarrow l^\mu$, то к нему можно построить другой изотропный вектор n^μ такой, что $n_\mu l^\mu = 1$. Тогда интеграл по поверхности H :

$$\int_H l^{\mu;\nu} dS_{\mu\nu} = \kappa \mathcal{A}, \quad (12.33)$$

где $\mathcal{A} = \int \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi$ - двумерная поверхность горизонта событий.

В итоге, взяв разность интегралов между бесконечностью и горизонтом, предполагая $T_{\text{mat}}^{\mu\nu} = 0$, можем получить:

$$M_\infty = \frac{\kappa \mathcal{A}}{4\pi} + 2\Omega_H J_\infty \quad \text{- формула Смарра} \quad (12.34)$$

Эта формула теперь приобретает термодинамическую интерпретацию, т.к. $\frac{\kappa}{2\pi} = T_H$, и $\frac{\mathcal{A}}{4} = S$ - энтропия.

Лекция 13. Термодинамика черных дыр. Формула Смарра

Эффект Хокинга - повторение

Итог предыдущей лекции состоит в том, что мы можем определять вакуумные состояния в метрике Шварцшильда относительно времени. Это время должно рассматриваться по отношению к той области, в которой рассматриваются асимптотики полей, фиксирующие операторы поля. Таких областей у нас несколько (см. рис. 11.4) \mathcal{I}^- - изотропная бесконечность прошлого, и H^+ - горизонт. В итоге, мы образуем in-вакуум (вакуум Унру) $|0, \text{in}\rangle$ такой, что в нем нет частиц на \mathcal{I}^- и H^- . Диаграмма Крускала процесса - рис. 12.1

На поверхностях \mathcal{I}^\pm пространство плоское (а все пространство тогда называется асимптотически плоским), значит естественным временем является t (вектор Киллинга ∂_t), а на горизонте - естественным временем является другая величина $T = \frac{U+V}{2}$. Таким образом, вакуумные состояния в этих областях также оказываются разными, и они связаны преобразованиями Боголюбова, перепутывающими операторы рождения и уничтожения. В этом заключается техническое обоснование эффекта Хокинга. В итоге можно вычислить поток частиц через \mathcal{I}^+ , который, оказывается, будет иметь Планковское распределение по энергиям.

Вычисляем тензор энергии-импульса квантованного поля $\hat{\phi} - \hat{T}^{\mu\nu}(\hat{\phi}\hat{\phi})$. Далее вычисляем поток в состоянии in-вакуума через \mathcal{I}^+ , от соответствующей компоненты ТЭИ:

$$-\frac{dM}{dt} = \oint \langle 0, \text{in} | \hat{T}^{0r} | 0, \text{in} \rangle r^2 d\Omega \quad (13.1)$$

Такой поток можно трактовать, как изменение массы черной дыры. Вычисляя среднее, в случае черной дыры Шварцшильда, можем получить:

$$-\frac{dM}{dt} \sim \int \frac{\Gamma_\omega \omega^2 d\omega}{e^{-\frac{\omega}{T_H}} \mp 1}, \quad (13.2)$$

где верхний знак соответствует бозонам, а нижний - фермионам, температура Хокинга - $T_H = \frac{\kappa_H}{2\pi}$, κ_H - поверхностная гравитация (в нормальных единицах $T_H = \frac{m_{\text{Pl}}^2}{8\pi M}$), Γ - барьерный фактор.

Можно получить оценку этого интеграла примерно такую же, как по формуле для спектра излучения абсолютно черного тела (с точностью до барьерного фактора). Можно сказать, что распределение Планка приводит интегрально к закону Стефана-

Больцмана

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma \left(\frac{MG}{c^2} \right)^2 T_H^4, \quad (13.3)$$

где постоянная σ :

$$\sigma = \frac{\pi k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}. \quad (13.4)$$

Проведем некоторую оценку. Если $T_H \sim \frac{1}{M}$, то

$$\frac{dM}{dt} \sim \frac{\hbar c^4}{G^2 M^2} - \text{закон испарения черной дыры}. \quad (13.5)$$

Можно проинтегрировать и найти время жизни черной дыры:

$$\tau_{\text{life}} = \frac{G^2}{\hbar c^4} M^2. \quad (13.6)$$

Если $M \sim 10^{15} \text{Г}$, то время испарения такой черной дыры ~ 10 млрд. лет.

Энтропия черной дыры

Мысленный эксперимент Бекенштейна

Если имеется черная дыра и она окружена идеальным газом, который «несет в себе» некоторую энтропию S (См. рис. 13.1). Допустим облако газа поглощается черной дырой. Тогда, если черная дыра собственной энтропии не имеет, то общая энтропия не будет возрастать при аккреции вещества, несущего энтропию, - глобально нарушается второе начало термодинамики. Если же предположить, что энтропия у

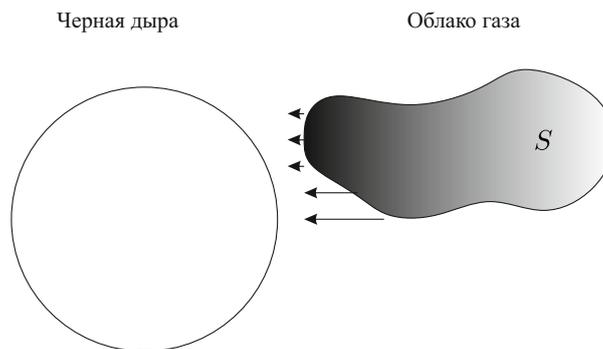


Рис. 13.1. Аккреция облака газа черной дырой

черной дыры имеется, и, кроме того, оно пропорциональна двумерной площади горизонта черной дыры, то это противоречие снимается - черная дыра увеличивает свою массу, как следствие, увеличивает свой гравитационный радиус и возрастает площадь поверхности горизонта.

Теорема Хокинга о горизонте

Двумерная площадь поверхности горизонта, согласно теореме Хокинга при аккреции не может уменьшаться.

Рассмотрим пучок геодезических и сечение этого пучка и введем параметр θ , характеризующий эффективную площадь такого пучка. (см. рис. 2) На горизонте параметр расширения θ является константой, потому что в противном случае, геодезические могли бы уходить из под черной дыры.

$$\theta = \text{const на } H_+ \quad (13.7)$$

Более подробно - «Крупномасштабная структура пространства-времени» - Стивен

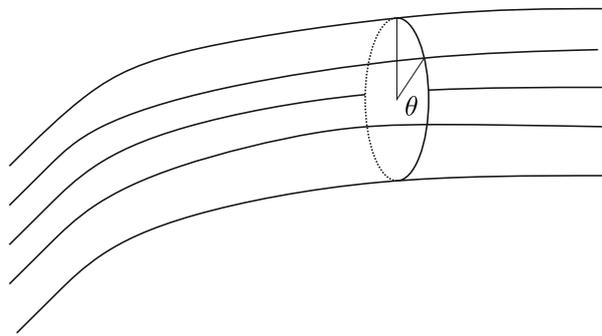


Рис. 13.2. Расширение пучка геодезических

Хокинг, Джордж Эллис.

Рассмотрим поверхность горизонта и возьмем на ней маленькую область $a(\lambda)$ (λ - параметр) - эта область состоит из геодезических, которые не покидают этой поверхности. Тогда можно утверждать, что

$$\frac{da}{d\lambda} \sim a\theta. \quad (13.8)$$

Параметр θ постоянен на горизонте и неотрицателен (т.к. геодезические не могут сходиться). значит $\frac{da}{d\lambda} > 0$. Обозначим \mathcal{A} - площадь горизонта, тогда

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\lambda} \geq 0 \quad \text{- теорема Хокинга о горизонте.} \quad (13.9)$$

При доказательстве теоремы предполагается, что черная дыра не изолирована, вокруг нее есть аккрецирующее вещество. Условия теоремы

- 1) Слабое энергетическое условие (WEC) - пусть $T_{\mu\nu}$ - ТЭИ аккрецирующего вещества, v^μ - такой вектор, что $\|v\| \geq 0$, тогда

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (13.10)$$

- 2) Космическая цензура. Если в пространстве и есть сингулярности, то они должны быть окружены горизонтом событий.

Поверхность горизонта для метрики Керра

Рассмотрим метрику Керра на горизонте - в уравнении (8.5) необходимо положить $\Delta = 0$, $dt = 0$, $dr = 0$. Тогда метрика Керра переходит в метрику двумерной поверхности - $ds_{\text{Kerr}}^2 \rightarrow dl^2$.

$$dl^2 = \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2)^2 d\varphi^2 \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (13.11)$$

где $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Чтобы вычислить площадь горизонта, необходимо вычислить

$$\mathcal{A}_{\text{Kerr}} = \oint \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi = (r_+^2 + a^2) 4\pi. \quad (13.12)$$

Аналогично, для черной дыры Шварцшильда $\mathcal{A}_{\text{Shw}} = 4\pi r_+^2$.

Формула Смарра

Формула Смарра выражает связь массы как функции углового момента и площади поверхности горизонта. Она возникает из формулы Комара для массы черной дыры ($G = c = 1$):

$$M = \frac{1}{8\pi} \int K^{v;\mu} dS_{\mu\nu}, \quad (13.13)$$

где $K = \partial_t$. Предположим, что асимптотически у нас пространство Минковского ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$), и $h_{\mu\nu}$ такой же, как в теории Фирца-Паули, которая формулируется в плоском пространстве, где хорошо определена энергия. Тогда

$$M = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_\infty} \partial_i h_{00} dS_i \quad (13.14)$$

Величину $\partial_i h_{00}$ можно выразить через символы Кристоффеля как

$$\partial_i h_{00} = g^{ij} \Gamma_{0j}^0. \quad (13.15)$$

Интеграл для углового момента:

$$J = -\frac{1}{16\pi} \oint_{S_\infty} \tilde{K}^{v;\mu} dS_{\mu\nu}, \quad (13.16)$$

где $\tilde{K} = \partial_\varphi$. Введем вектор Киллинга $\xi = K + \Omega_H \tilde{K}$, тогда можно определить горизонт как область, в которой $\|\xi\| = 0$ - ξ - становится изотропным вектором: $\xi^\mu \Big|_{H^+} = l^\mu$ из тетрады Ньюмана-Пенроуза. Кроме того, свойство этого вектора состоит в том, что

$$\xi^\nu \xi_{;\nu}^\mu = \varkappa \xi^\mu, \quad (13.17)$$

где \varkappa - поверхностная гравитация.

Сам вектор Киллинга порождает сохраняющийся ток по той же формуле, как тензор $F^{\mu\nu}$ порождает ток. Тогда сохраняющийся ток массы:

$$\int \xi^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu}. \quad (13.18)$$

С помощью тождества Риччи:

$$\nabla_\nu (K^\nu_{;\mu}) = R_{\mu\nu} K^\nu = 8\pi \left(T_{\mu\nu} K^\nu - \frac{1}{2} T K_\mu \right) = j_\mu \quad (13.19)$$

Свойством этого тока будет ковариантное сохранение - $\nabla^\mu j_\mu = 0$.

В итоге, можем сказать, что если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\int_{H_+} \xi^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu} = \int_{S_\infty} \xi^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu} \quad (13.20)$$

в силу сохранения тока.

Интегралы по S_∞ дают (согласно 13.14 и 13.16):

$$\int_{S_\infty} \xi^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu} = M - 2\Omega_H J. \quad (13.21)$$

Если на горизонте мы выберем $\xi_\mu \sim l_\mu$, то можем достроить к нему n_μ такой, что $l_\mu n^\mu = 1$, чтобы записать относительно этих векторов элемент двумерной площади - $dS_{\mu\nu} = (\xi_\mu n_\nu - \xi_\nu n_\mu) d\mathcal{A}$.

И тогда интеграл по поверхности горизонта выдает:

$$\int_{H_+} \xi^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa \mathcal{A}}{4\pi}. \quad (13.22)$$

Таким образом, из двух последних формул получаем:

$$M = \frac{\varkappa \mathcal{A}}{4\pi} + 2\Omega_H J. \quad (13.23)$$

Или, вводя температуру Хокинга, и, считая массу энергией в термодинамическом смысле, можем истолковать формулу как аналог формулы для внутренней энергии в термодинамике:

$$dE = T dS + \mu dN. \quad (13.24)$$

Т.к. $\mathcal{A} \sim M^2$, $J \sim M^2$, то можно воспринимать как однородную функцию параметров $M(\mathcal{A}, J)$ степени $\frac{1}{2}$. Для однородных функций ($f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^v f(x, y)$) справедлива теорема Эйлера. В нашем случае:

$$\frac{\partial M}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A} + \frac{\partial M}{\partial J} J = \frac{M}{2} = \frac{\kappa \mathcal{A}}{8\pi} + \Omega_H J, \quad (13.25)$$

отсюда

$$\frac{\partial M}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\kappa}{8\pi} \quad (13.26)$$

$$\frac{\partial M}{\partial J} = \Omega_H. \quad (13.27)$$

В итоге получаем дифференциальную формулу, которую называют первым началом термодинамики черных дыр:

$$\boxed{dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega_H dJ} \quad (13.28)$$

Сравнивая с первым началом ТД (см формулу 13.24), получаем

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4} \text{ в норм. ед. } \frac{\mathcal{A}}{4l_{\text{Pl}}^2}. \quad (13.29)$$

Можно определить также аналог теплоемкости в термодинамике:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \quad (13.30)$$

В нашем случае $E \leftrightarrow M$, а $T \sim \frac{1}{M}$. Получаем производную массы по обратной массе и, следовательно, $C < 0$ - отрицательная теплоемкость. Отрицательная теплоемкость - признак неустойчивого равновесия со средой.

Поместим черную дыру в некоторую «емкость». С одной стороны, черная дыра испускает излучение Хокинга с температурой T_H , а с другой - поглощает излучение с некоторой температурой T .

- Если предположить, что $T > T_H$, то будет превалировать процесс аккреции, и масса черной дыры будет возрастать. Но у нее отрицательная теплоемкость, а значит - ее масса будет нарастать до бесконечности.
- Если предположить, что $T < T_H$, то превалирует излучение Хокинга, и при этом изменяется энтропия таким образом, что процесс будет заканчиваться полным испарением черной дыры.

Таким образом, в бесконечном объеме равновесие черной дыры со средой невозможно.

Статистическая физика для черной дыры. Функциональный интеграл

В статистической физике важную роль играет т.н. производящий функционал, который можно вычислить с помощью функционального (континуального) интеграла. Литература по теме:

- 1) В.Н. Попов - «Континуальный интеграл в Квантовой теории поля и Статистической физике»,
- 2) Polchinski - «Strings», приложение.

Рассмотрим амплитуду перехода некоторого квантованного поля ϕ из состояния ϕ_1 в ϕ_2 в соответствующие моменты времени (в картине Шредингера):

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_2 | e^{-iH(t_1-t_2)} | \phi_1 \rangle \quad (13.31)$$

На языке континуального интеграла эту амплитуду можно записать в виде:

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int D\phi e^{-iS(\phi)}, \quad (13.32)$$

где $S(\phi)$ - функционал действия. Отрезок времени от t_1 до t_2 мы дискретизируем на ∞ -ное число кусков, определяем операторы поля ϕ_i для каждого времени t_i , и интегрируем по всем ϕ_i .

Далее, перейдем к мнимому времени $t \rightarrow -i\tau$ - Евклидизация. Тогда пропагаторный множитель изменится:

$$e^{-iH(t_1-t_2)} \rightarrow e^{-H\tau}, \quad (13.33)$$

и далее будем считать, что $\tau = \frac{1}{T}$, где T - температура. Если также принять $t_1 = t_2$, то получим

$$\langle \phi_2 | e^{-iH(t_1-t_2)} | \phi_1 \rangle \rightarrow \langle \phi | e^{-H/T} | \phi \rangle. \quad (13.34)$$

С помощью этого формального трюка, можем определить производящий функционал как

$$Z = \sum_{\phi_i} \langle \phi_i | e^{-H/T} | \phi_i \rangle = \int D\phi_E e^{-S_E(\phi_E)}. \quad (13.35)$$

причем рассматриваем только такие конфигурации полей, которые удовлетворяют условию периодичности по мнимому времени: $\phi_E(\tau + \frac{1}{T}) = \phi_E(\tau)$ с периодом, равным обратной температуре.

Континуальный интеграл можно вычислять методами теории возмущений. Пусть 2 точки соединяются классической траекторией, вдоль которой вариация действия

$\delta S = 0$ (прямая линия на рис. 13.3). Существуют также другие траектории (пунктирные линии), в континуальном интеграле мы интегрируем по всевозможным путям из точки 1 в точку 2. Понятно, что согласно методу наискорейшего спуска, классическое траектория будет давать основной член в разложении. Таким образом, в основном

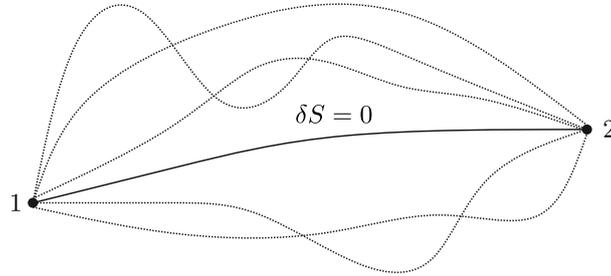


Рис. 13.3. Траектории между двумя точками

приближении:

$$Z \sim e^{-S_E(\bar{\phi}_E)}, \quad (13.36)$$

где $\bar{\phi}_E$ такое, что

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\bar{\phi}_E} = 0. \quad (13.37)$$

Таким образом траектория $\bar{\phi}$ - классическое решение в теории поля в Евклидовом времени (инстантон в теории Янга-Миллса) - тепловой инстантон.

Наконец, в приближении квазиклассики:

$$Z_{\text{кв.клас.}} \sim e^{-S_E(\phi_{\text{кл.}})}, \quad (13.38)$$

где $\phi_{\text{кл.}}$ - классическое решение в Евклидовом времени.

Далее введем термодинамический потенциал Ω :

$$F - \mu N = \Omega = -T \ln Z. \quad (13.39)$$

Ожидаем, что метрика Шварцшильда является тем решением, которое в Евклидовом секторе будет тепловым инстантоном. Для невращающейся черной дыры $F = -T \ln Z$. Можем написать, что $dF = -SdT$, и тогда энтропия:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (13.40)$$

Вычислим свободную энергию F , если

$$Z = e^{-S(g_{\mu\nu}^{\text{Евкл.}})}. \quad (13.41)$$

Запишем метрику Шварцшильда, переходя в Евклидов сектор:

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega. \quad (13.42)$$

На горизонте событий $r \rightarrow 2M$ возникают «проблемы».

Роль инстантона состоит в том, что, если мы рассматриваем переход из 1 в 2 через инстантон, то амплитуда перехода задается

$$\langle 2 | e^{-S_{\text{inst}}} | 1 \rangle, \quad (13.43)$$

то действие S_{inst} должно быть конечным, иначе - переход невозможен.

Введем в окрестности горизонта локальную координату $\rho^2 = 1 - \frac{2M}{r}$. Тогда метрика в окрестности горизонта перейдет в

$$ds_E^2 = 4r_g^2 \left(d\rho^2 + \left(\frac{\rho}{4M}\right)^2 d\tau^2 \right) + r_g^2 d\Omega. \quad (13.44)$$

Для конечности действия нужно, чтобы решение было не сингулярным. Однако величина $\frac{d\tau}{4M} \sim d\varphi$ играет роль азимутальной координаты. Если $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то особенностей не будет, а иначе - будет коническая особенность (вырезаем из плоскости сегмент и складываем - появляется особенность).

Таким образом, необходимо, чтобы $\Delta\tau_{\text{период}} = 8\pi M = \frac{1}{T_H}$.

Таким образом, метрика Шварцшильда оказывается регулярным решением во внешней части черной дыры, но при этом она должна быть периодичной по мнимому времени.

Рассмотрим действие:

$$S = \int_M -R\sqrt{-g} d^4x + 2 \oint_{\partial M} (K - K_0) \sqrt{\gamma} d^3x, \quad (13.45)$$

где $K = K_a^a$, $K_{ab} = -n_{\mu;\nu} X_{,a}^\mu X_{,b}^\nu$, $K_0 = K(M=0) = \text{const}$. Для метрики Шварцшильда $R(g_{\text{Shw}}) = 0$ и вклад дает только поверхностный член.

Задача: Вычислить вторую квадратичную форму на Евклидизированной метрике Шварцшильда. Получить

$$S_E = 4\pi M^2 = \frac{\pi M}{\varkappa}, \quad (13.46)$$

где $\frac{\varkappa}{2\pi} = T_H = \frac{1}{8\pi M}$. Свободная энергия:

$$F = -T \ln Z = -T \ln e^{-S_E}, \quad (13.47)$$

и после подсчета получим:

$$F = M - TS, \quad (13.48)$$

где $T = \frac{1}{8\pi M}$, $S = \mathcal{A}$.

Лекция 14. Законы термодинамики черных дыр. Формула Смарра.

Термодинамика черных дыр - это тема, которая возникала на стыке классических теорем и вычислений Квантовой теории поля на фоне пространства с горизонтом событий. Литература по классической теории - Джеймс Бардин - «4 закона динамики черных дыр».

Эти 4 закона можно сопоставить тому, что мы знаем как законы (начала) термодинамики.

Законы термодинамики черных дыр.

Соотношение для внутренней энергии в термодинамике:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN. \quad (14.1)$$

Это соотношение соответствует большому каноническому распределению Гиббса в определенном объеме.

В теории черных дыр часть pdV мы рассматривать не будем. Для черных дыр за химический потенциал можем считать $\mu = \Omega_H$ - угловая скорость среды, а за число частиц - угловой момент $N = J$. Другая возможность выбора - для заряженной среды $\mu = \Phi_H$ - электрический потенциал, $N = Q$ - электрический заряд.

Законы термодинамики:

- 0) Постоянство температуры и соответствующих термодинамических величин - $T_H, \Omega_H, \Phi_H = \text{const}$ в термодинамическом ансамбле (решении уравнений Эйнштейна-Максвелла). Для черной дыры Керра-Ньюмана эти величины известны в явном виде и действительно являются константами.

Рассматривается также более общий случай - конфигурации полей, при которых образуется горизонт событий. Горизонт событий, как и в предыдущих лекциях, можно определить как горизонт Киллинга вектора Киллинга $\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_\varphi$. Тогда на горизонте норма этого вектора обращается в нуль $\|\xi\|_H = 0$.

Можно определить также интегралы Комара по замкнутым двумерным поверхностям, которые задают сохраняющиеся величины (заряды) теории - для векторов Киллинга $K = \partial_t, \tilde{K} = \partial_\varphi$:

$$\oint K^{[\mu;\nu]} dS_{\mu\nu}. \quad (14.2)$$

Для теорий Эйнштейна-Максвелла, если к векторам Киллинга добавить также потенциал A_μ , можно определить сохраняющиеся заряды - массу, угловой момент и электрический заряд. По отношению к этим зарядам и строится термодинамический ансамбль.

Таким образом, **нулевой закон термодинамики черных дыр** состоит в том, что для системы уравнений Эйнштейна-Максвелла, в конфигурации полей, в которой имеется горизонт Киллинга, удовлетворяется слабое энергетическое условие (см. пред. лекцию), и горизонт событий не сингулярный, - величины $\kappa, \Omega_H, \Phi_H = \text{const}$ (κ - поверхностная гравитация) на горизонте.

- 1) **Первый закон ТД черных дыр.** Рассмотрим формулы Смарра, которые вытекают из тех же предположений, и основаны на интегрировании векторов Киллинга K, \tilde{K}, ξ . Когда мы применяем критерий образования горизонта $\|\xi\|_H = 0$, то мы получаем возможность интегрирования по H и S_∞ , и если внутри нет материи, то получаем, что вклад в энергию системы пропорционален площади двумерной поверхности горизонта

$$\mathcal{A} = \oint \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}d\theta d\varphi. \quad (14.3)$$

Таким образом, итоговая формула Смарра:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}d\mathcal{A} + 2\Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad (14.4)$$

Формула (14.4) может быть выведена чисто геометрически и называется - **первым законом ТД черных дыр.**

- 2) **Второй закон термодинамики черных дыр** состоит в том, что площадь горизонта $d\mathcal{A} \geq 0$ - теорема Хокинга (аналог закона о неубывании Энтропии), эта теорема также может быть доказана геометрическими методами.

Доказательство этого факта основано на том, что если в пучке геодезических определить величину, которая называется «расширением» θ (см. рис. 13.2, то эта величина не может быть отрицательной ($\theta \geq 0$), т.к. это противоречит свойству горизонта событий. Из этого факта, используя уравнение Райчаудури, доказывается, что площадь горизонта не может убывать.

Причем черную дыру может окружать материя - этот закон также будет справедлив. Материя может падать на дыру и дыра будет увеличивать свою массу, а значит, и площадь.

- 3) **Третий закон - недостижимость абсолютного нуля температуры.** Зададим вопрос - какие черные дыры могут иметь нулевую температуру Хокинга? Черная дыра Шварцшильда не может, т.к. для нее не обращается в ноль поверхностная гравитация. В метрике же Райснера-Нордстрема, для экстремальной черной дыры, температура может стремиться к нулю.

Общее определение поверхностной гравитации:

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} l_{\mu;\nu} l^{\mu;\nu}} \quad (14.5)$$

Поверхностная гравитация для метрики Керра-Ньюмана:

$$\kappa_{\text{KN}} = \frac{\sqrt{M - Q^2}}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}} \quad (14.6)$$

Тогда при $Q \rightarrow M$ поверхностная гравитация стремится к нулю $\kappa_{\text{KN}} \rightarrow 0$.

В классической теории можно доказать, что, если в черную дыру «опускать» заряженные частицы, заряжающие черную дыру, то в результате баланс сил таков, что процесс достижения $Q \rightarrow M$ требует бесконечного времени (см. рис. 14.1).

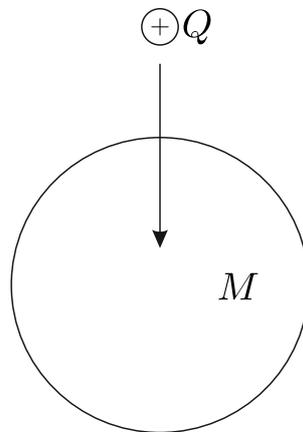


Рис. 14.1. Падение зарядов в черную дыру

Применение второго закона ТД черных дыр

Из закона $d\mathcal{A} \geq 0$ следует, что черная дыра не может распадаться. Пользуясь обозначениями рис. (14.2) для распада необходимо, чтобы

$$M_1 + M_2 + \mathcal{E}_{\text{изл}} = M. \quad (14.7)$$

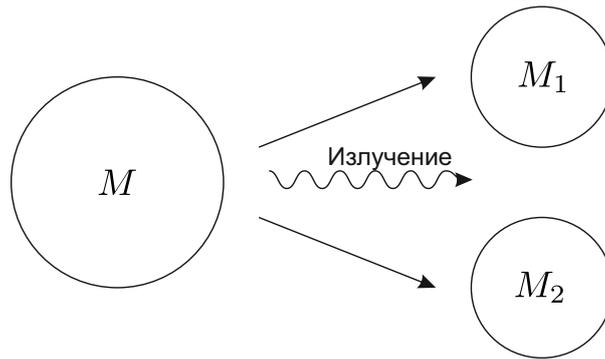


Рис. 14.2. Распад черной дыры

Величины площадей горизонтов черных дыр для нашей ситуации:

$$\mathcal{A}_1 = 4\pi (2M_1)^2 \quad (14.8)$$

$$\mathcal{A}_2 = 4\pi (2M_2)^2 \quad (14.9)$$

$$\mathcal{A} = 4\pi (2M)^2, \quad (14.10)$$

И для масс, пренебрегая излучением, необходимо, чтобы:

$$M = M_1 + M_2 \quad (14.11)$$

А из формул для площадей (14.10) следует, что (поскольку энтропия не может убывать):

$$M^2 \leq M_1^2 + M_2^2. \quad (14.12)$$

Обратный же процесс возможен, и даже можно написать коэффициент полезного действия (КПД) гравитационного излучения при слиянии: $M_1 + M_2 = M + \mathcal{E}_{\text{изл}}$.

$$\eta = 1 - \frac{M}{M_1 + M_2} \quad (14.13)$$

Исходя из того, что энтропия должна возрасти \implies в случае двух черных дыр площади горизонтов просто складываются, и тогда получаем ограничение:

$$\boxed{\eta \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}. \quad (14.14)$$

Таким образом, при слиянии двух черных дыр есть верхняя граница для выработки гравитационного излучения.

Далее, хочется подтвердить эти выводы с точки зрения Квантовой теории поля (КТП).

КТП-подход к термодинамике черных дыр.

Подход основан на том, что в системе можно найти волновые пакеты, с помощью которых становится возможно построить полную систему состояний. Это приводит к тому, что в рассмотрении возникает матрица плотности. Рассмотрим диаграмму Крускала (см. рис. 14.3): Существует возможность образования частиц, выходящих из

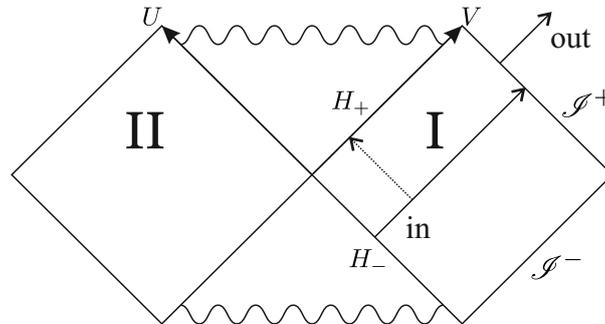


Рис. 14.3. Диаграмма Крускала черной дыры

H_- - белой дыры. Они могут, частично рассеиваясь на гравитационном поле, уходить под горизонт H_+ и на бесконечность будущего \mathcal{S}^+ . Также есть частицы, выходящие из \mathcal{S}^- .

Вводится понятие in-вакуума (вакуума Унру) как состояния $|0, \text{in}\rangle$, в котором нет частиц, выходящих из \mathcal{S}^- и H^- .

Состояние же out формируется так, что в нем есть частицы, выходящие из \mathcal{S}^+ .

Соответствующая диаграмма Пенроуза представлена на рисунке (11.4).

В итоге, состояние out можно ввести, как состояние, уничтожающееся операторами a_{out}^∞ , можем ввести оператор числа частиц, уходящих на бесконечность

$$N = a_{\text{out}}^\dagger a_{\text{out}}^\infty \quad (14.15)$$

Но в состоянии out могут также присутствовать частицы, уходящие в черную дыру. По ним усреднение происходит автоматически, когда мы вычисляем среднее:

$$\langle 0, \text{in} | N | 0, \text{in} \rangle. \quad (14.16)$$

Это свойство объясняет неизбежность появления матрицы плотности ρ , т.к. мы видим только частицы, уходящие в \mathcal{S}^+ .

Если рассмотреть вероятностное распределение по состояниям w для нашего случая, то оно будет совпадать с распределением для ансамбля Гиббса, и стат. сумму для такого распределения можно записать как

$$Z = e^{\Omega - TS - \mu N}, \quad (14.17)$$

где в качестве μN можно брать различные наборы величин:

$$\mu N = \begin{cases} \Omega_{\text{H}} J \\ \Phi_{\text{H}} Q \end{cases} \quad (14.18)$$

Каноническое распределение Гиббса

Вероятность состояния n для канонического распределения задается формулой:

$$w_n = \frac{e^{-E_n/T}}{Z}, \quad (14.19)$$

и определение энтропии (черта обозначает усреднение):

$$S = -\overline{\ln w_n}. \quad (14.20)$$

Из такого определения энтропии следует, что свободная энергия, которая по определению $F = E - TS$, может быть выражена как

$$F = -T \ln Z, \quad (14.21)$$

где $Z = \sum w_n$

Большое каноническое распределение

Аналогичным образом, большое каноническое распределение приводит к тому, что термодинамический потенциал $\Omega = F - \mu N$ может быть выражен, как

$$\Omega = -T \ln \mathbf{Z}, \quad (14.22)$$

где $\mathbf{Z} = \sum_n w_{nJQ}$, а соответствующие вероятности состояний в БКР:

$$w_{nJQ} = \frac{1}{\mathbf{Z}} e^{-\frac{E_n}{T} + \Omega_{\text{H}} J + \Phi_{\text{H}} Q}. \quad (14.23)$$

Для черных дыр термодинамический потенциал Ω выражается как:

$$\Omega = F - \mu N = F - \Omega_{\text{H}} J - \Phi_{\text{H}} Q. \quad (14.24)$$

В термодинамике было показано, что дифференциал потенциала Ω задается как

$$d\Omega = -SdT - Nd\mu, \quad (14.25)$$

тогда в случае черных дыр

$$d\Omega = SdT - Jd\Omega_{\text{H}} - Qd\Phi_{\text{H}}. \quad (14.26)$$

Отсюда, зная Ω можно рассчитать другие величины:

$$S = \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad J = -\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega_{\text{H}}}, \quad Q = -\frac{\partial \Omega}{\partial \Phi_{\text{H}}} \quad (14.27)$$

Вычисление Ω с помощью евклидовой метрики

Вычисление основано на представлении стат. суммы через функциональный интеграл. Рассмотрим переход $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ под действием гамильтониана H , тогда в виде континуального интеграла это можно представить как:

$$\langle \phi_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle = \int_{M(\phi)} D\phi e^{iS(\phi)}. \quad (14.28)$$

Многообразие $M(\phi)$, по которому происходит интегрирование, должно быть таким, чтобы в момент t_1 оно совпадало с ϕ_1 , а в момент t_2 - с ϕ_2 .

Перейдем к Евклидовому времени $t \rightarrow t_E = -it$, считая поля периодичными с периодом β :

$$\phi(t_E + \beta) = \phi(t_E). \quad (14.29)$$

Тогда, если считать $\beta = \frac{1}{T}$, где T - температура, то величина

$$\text{Tr} \langle \phi | e^{-H/T} | \phi \rangle = Z \quad (14.30)$$

является статистической суммой. Таким образом, представление для стат. суммы:

$$Z = \int_{\text{periodic}} D\phi e^{-S(\phi_{\text{Eucl}})}. \quad (14.31)$$

Такой функциональный интеграл может быть вычислен в приближении стационарной фазы в главном порядке - весь интеграл заменяется на функцию от евклидова действия на классических решениях

$$Z = e^{-S(\phi_{\text{кл}})}, \quad (14.32)$$

причем $\phi_{\text{кл}}(t_E + \beta) = \phi_{\text{кл}}(t_E)$.

Далее, применим этот алгоритм к полю, которое само является метрикой (по сути это квантовая гравитация).

Евклидова метрика Шварцшильда

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\Omega. \quad (14.33)$$

В окрестности горизонта $r \rightarrow 2M$, вводя координату $\rho^2 = 1 - \frac{2M}{r}$,

$$ds_E^2 \approx 4r_g^2 \left(d\rho^2 + \left(\frac{\rho}{4M}\right)^2 dt_E^2 \right) \quad (14.34)$$

и тогда координатная особенность превращается в коническую особенность - это плохо, т.к. в этом случае тензор Римана будет иметь δ -образный вид. Чтобы этого не происходило, t_E должна быть периодична с периодом $\beta = 8\pi M$.

Мы можем вычислить термодинамический ансамбль, соответствующий метрике Шварцшильда в древесном приближении, просто как классическое евклидово действие, взятое на метрике Шварцшильда:

$$I = S_E(g_{\text{Shw, Eucl}}). \quad (14.35)$$

Такое действие автоматически периодически по мнимому времени, а значит усреднение будет отвечать матрице плотности, а не чистым состояниям \implies можем рассматривать теорию с точки зрения статистической физики.

Действие гравитационной системы - это просто скаляр кривизны. Примем сигнатуру $(-+++)$. В такой сигнатуре гравитационное действие:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \left(\int_M R \sqrt{g} d^4x + 2 \int_{\partial M} (K - K_0) \sqrt{|h|} d^3x \right). \quad (14.36)$$

Необходимо оставить поверхностный член при варьировании - полная производная будет иметь отношение к самой величине действия.

Такой вид действия выводится достаточно просто. Рассмотрим евклидовое многообразие M , имеющее 2 границы - на бесконечности и граница горизонта черной дыры. Радиально направленная нормаль к бесконечной поверхности n^μ , такая, что $n^\mu n_\mu = 1$. Можем также определить индуцированную метрику на поверхности S_∞ - для тех же координат t, θ, φ :

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (14.37)$$

Таким образом, след для второй квадратичной формы K :

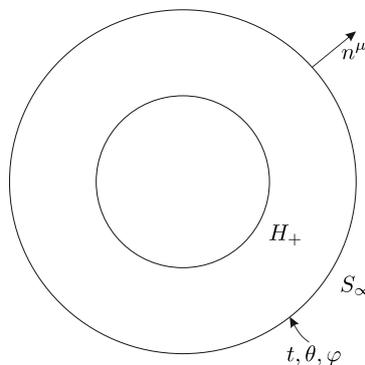


Рис. 14.4. Евклидово многообразие M

$$K = h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} \quad (14.38)$$

Более подробное рассмотрение - Wald - «General relativity»

Обобщим эту формулу (14.36) на случай системы Эйнштейна-Максвелла для заряженной черной дыры.

Система Эйнштейна-Максвелла. Евклидова метрика Керра-Ньюмана.

$$S_g \implies \frac{1}{16\pi G} \int_M (R - F^2) \sqrt{|g|} d^4x - 2 \int_{\partial M} ((K - K_0) + 2A_{\mu} n_{\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{|h|} d^3x, \quad (14.39)$$

где $K_0 = \frac{2}{r}$.

УТВ. Если вычислить значение этого действия, выбирая евклидовы конфигурации, периодичные по мнимому времени, то получим потенциал Ω , который будет определять термодинамику черных дыр Керра-Ньюмана.

Метрика Керра-Ньюмана в лоренцевой сигнатуре:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} ((r^2 + a^2) d\varphi - adt)^2 \quad (14.40)$$

При евклидизации необходимо совершить преобразования $t \rightarrow -it$, $a \rightarrow -ia$ и, кроме того, нужно евклидизировать заряд Q , который фигурирует в

$$\Delta = r^2 - 2M^2 - a^2 - Q^2. \quad (14.41)$$

и тогда $Q \rightarrow -iQ$.

Тогда для Евклидовой сигнатуры метрика:

$$ds^2 = +\frac{\Delta}{\Sigma} (d\tau - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2) (d\varphi + ad\tau)^2 \quad (14.42)$$

Видим, что конфигурации, периодические по τ , должны еще и «завращаться».

В теории есть два горизонта:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (14.43)$$

И когда $r \rightarrow r_+$ возникает коническая особенность. Тогда

$$r - r_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{r_+^2 + a^2} \rho^2. \quad (14.44)$$

В итоге, получаем, что требуемое отсутствие конической особенности определяет период мнимой координаты $\tau - \beta = \frac{2\pi}{\varkappa}$, где

$$\varkappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{r_+^2 + a^2}. \quad (14.45)$$

Кроме того, чтобы член $\sim (r^2 + a^2) (d\varphi + ad\tau)^2$ после периодического отождествления $\tau + \beta \sim \tau$ имел правильный вид, необходимо «довращать» координату φ , вводя отождествление:

$$\varphi + 2\pi\Omega_H \sim \varphi. \quad (14.46)$$

Хотя в случае метрики Шварцшильда $R = 0$ и первый член в действии (вставить ссылку на эйнштейна максвелла) вклада не дает, в общем случае это не так. Вклад же $\sim F$ в том же действии можно получить из того, что

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi \left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} + g_{\mu\nu}\frac{F^2}{4} \right). \quad (14.47)$$

Знак потенциала $A = \frac{Q}{r}dt$ меняет знак. Чтобы посчитать внешнюю кривизну, необходимо найти нормаль. Ненормированная нормаль к $f(r) = r = const$, $n_{\mu} = \partial_{\mu}f$

$$n_{\mu} = (0, 1, 0, 0). \quad (14.48)$$

Введем нормированную нормаль

$$n_{\mu} = \left(0, \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, 0, 0 \right) \quad (14.49)$$

Ковариантная производная определяется через связности Леви-Чивита по евклидовой метрике:

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu}n_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}n_{\lambda}. \quad (14.50)$$

Тогда, используем формулу для следа второй квадратичной формы

$$K = h^{\mu\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu}, \quad (14.51)$$

где $h_{\mu\nu}$ определена как в формуле (14.37). В итоге, Евклидово действие для метрики Керра-Ньюмана:

$$I = \frac{\beta}{4} \left[r_+ + \frac{a^2 + Q^2}{r_+} - \frac{2r_+Q^2}{r_+^2 + a^2} \right] = \beta\Omega \quad (14.52)$$

и дифференцируя, согласно формулам выше, можем определить энтропию черной дыры:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial T} = S = \frac{\mathcal{A}}{4}, \quad (14.53)$$

где $\mathcal{A} = \pi(r_+^2 + a^2)$. Аналогичным образом, можно определить

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega_H} = J \quad (14.54)$$

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi_H} = Q \quad (14.55)$$

$$E = M \quad (14.56)$$

Можно сказать, что основное приближение квантовой гравитации приводит к матрице плотности и термодинамике. В результате:

$$\boxed{dM = T_H dS_H + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ}, \quad (14.57)$$

и КТП-подход привел к тому же результату, который был получен классически - 1-му началу термодинамики черных дыр.

Лекция 15. Квантование в стационарных пространствах

Квантовая теория поля обычно формулируется в пространстве Минковского. Более того, ее аксиомы жестко привязаны к геометрии именно плоского пространства-времени. Однако есть такие задачи, которые близки к задачам гравитации - например, квантование в электромагнитном поле.

Рассмотрим стационарное пространство, в котором есть вектор Киллинга $\hat{K} = \partial_t$. Это свойство позволяет нам воспользоваться обычной схемой гамильтонова квантования.

Будем рассматривать для определенности скалярное вещественное поле с действием (сигнатура $(+---)$):

$$S = \frac{1}{2} \int \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (15.1)$$

Тензор энергии-импульса, который ему соответствует:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial\phi)^2. \quad (15.2)$$

Теперь можем определить сохраняющийся ток как $T^{\mu\nu} \hat{K}_\nu$. Этот ток удовлетворяет уравнению непрерывности, и можем проинтегрировать его по некоторой пространственно подобной гиперповерхности Σ и назвать такой объект Гамильтонианом:

$$\int_\Sigma T^{\mu\nu} \hat{K}_\nu d\Sigma_\mu = H. \quad (15.3)$$

Далее можно определить набор классических мод, который мы называем положительно частотными решениями - они определяются по отношению к вектору Киллинга как (\mathcal{L}_K - производная Ли):

$$\mathcal{L}_K \phi_\omega = -i\omega \phi_\omega. \quad (15.4)$$

Простейший вид таких мод - $\phi_\omega = e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, где $\omega = |\vec{k}|$. Как правило, задачи допускают разделение переменных в координатах, близких к сферическим (координаты Бойера-Линдквиста в метрике Керра), поэтому возникает разложение по модам (обозначим ϕ_J , где $J = \omega, l, m$):

$$\phi_J = N_J \frac{R_{lm}}{\sqrt{r^2 + a^2}} S_{lm}^\omega(\theta) e^{im\varphi - i\omega t}. \quad (15.5)$$

Чтобы было возможно ввести разложение по полному набору мод, моды должны быть нормированы. Нормируются они по отношению к скалярному произведению, ассоциированному с уравнением Клейна-Гордона.

Уравнение Клейна-Гордона для свободного поля:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0. \quad (15.6)$$

Вводя ϕ_1 и ϕ_2 и рассматривая систему:

$$\begin{cases} \phi_1^* \nabla_\mu \nabla^\mu \phi_2 = 0 \\ \phi_2 \nabla_\mu \nabla^\mu \phi_1^* = 0 \end{cases} \quad (15.7)$$

можем получить сохраняющийся ток:

$$\nabla_\mu (\phi_1^* \nabla^\mu \phi_2 - \phi_2 \nabla^\mu \phi_1^*) = 0. \quad (15.8)$$

Скалярное произведение полей ϕ_1 и ϕ_2 можем ввести как интеграл по поверхности Коши (обозначение $\overleftrightarrow{\partial}^\mu$ - производная действует сначала направо, а потом - налево):

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_C \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_2 dS_\mu \quad (15.9)$$

Обычно моды нормируются на той поверхности, откуда возникают падающие волны. В метрике черной дыры есть горизонт событий, куда волны могут «уходить» и есть светоподобные поверхности \mathcal{S}^+ и \mathcal{S}^- . Диаграмма Крускала этих процессов (см. рис. 14.3). \mathcal{S}^- - начальная гиперповерхность, откуда приходят безмассовые частицы. Для массивных частиц гиперповерхность Коши показана на рисунке красным - она пересекает пространство таким образом, что из любой области она достижима с углом наклона не более 45° (т.е. с сохранением причинности). В случае безмассовых частиц, поверхность Коши мы можем деформировать так, что она будет представлять собой нижнюю часть светового конуса $H^- \cup \mathcal{S}^-$ (желтый цвет) (см. рис. 15.1). Например, для in-состояний будем выбирать поверхность нормировки как $C = H^- \cup \mathcal{S}^-$, а для уходящих мод (out-состояний) $C = H^+ \cup \mathcal{S}^+$.

Для изотропных поверхностей в формуле (15.9) индекс μ нумерует координаты $\mu = u, v$, где

$$\begin{cases} u = t - r^* \\ v = t + r^* \end{cases} \quad (15.10)$$

После того, как мы определили операцию скалярного произведения, можем ввести нормировку для двух положительно частотных мод:

$$(\phi_{J'}, \phi_J) = \delta_{JJ'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (15.11)$$

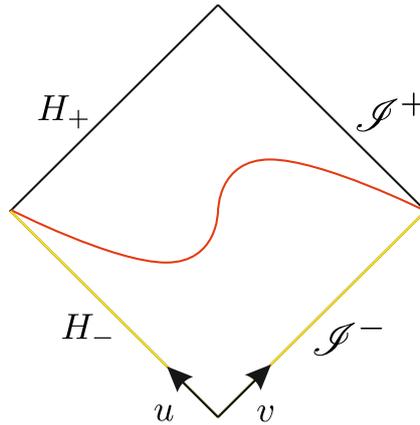


Рис. 15.1. Гиперповерхность Коши

Теперь, можем так же, как и в пространстве Минковского, представить вторично квантованное скалярное поле $\hat{\phi}$ как сумму по всем положительно частотным модам:

$$\hat{\phi} = \sum_J \phi_J a_J + \phi_J^* a_J^\dagger \quad (15.12)$$

a_J^\dagger, a_J - операторы рождения и уничтожения. Перестановочные соотношения для них определяются обычным образом:

$$[a_{J'}, a_J^\dagger] = \delta_{JJ'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (15.13)$$

а все остальные коммутаторы равны нулю.

Для квантованного оператора поля $\hat{\phi}$ должны выполняться гейзенберговские уравнения движения, которые в ковариантном виде могут быть записаны как:

$$\mathcal{L}_K \hat{\phi} = i[\hat{H}, \hat{\phi}]. \quad (15.14)$$

Рассмотрим квантованный тензор энергии-импульса (обозначения $\hat{\phi}_\mu \equiv \hat{\phi}_{,\mu}$):

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{\phi}_\mu \hat{\phi}_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial \hat{\phi})^2 \quad (15.15)$$

это квадратичная функция от операторов поля. Однако произведение обобщенный функций плохо определено - требуется нормальное упорядочение.

Одним из принципиальных отличий квантования в искривленном пространстве от случая плоского пространства является то, что нельзя производить нормальное упорядочение, т.к. возникают «неподходящие» варианты поведения. Так, существуют области, в которых определение положительно частотных мод не является однозначным (например, на асимптотиках, т.к. вектор Киллинга ∂_t не определен).

Будем понимать под вакуумным состоянием поля такое состояние, которое уничтожается оператором уничтожения:

$$a_J |\text{vac}\rangle = 0. \quad (15.16)$$

Тогда, если неоднозначно определяются положительно частотные моды (операторы поля), то и вакуум в таких областях определен неоднозначно, и, следовательно, невозможно ввести нормальное упорядочение.

Будем считать, что нормально упорядоченный Гамильтониан может быть определен как:

$$\hat{H}(\hat{\phi}, \hat{\phi}) = H - \langle H \rangle, \quad (15.17)$$

но будем держать в голове, что вакуумное среднее $\langle H \rangle$ может быть определено неоднозначно (процедура нуждается в уточнении в каждой конкретной задаче).

Таким образом, с точностью до нескольких нюансов, процедура квантования в пространстве Минковского переносится напрямую на случай кривого пространства.

Уравнение на радиальную функцию положительно частотных мод в кривых метриках

Еще одно важное обстоятельство состоит в том, что в кривых метриках уравнение на радиальную функцию можно привести к виду:

$$(\partial_{r^*}^2 - V) R(r) = 0. \quad (15.18)$$

Потенциал V имеет вид барьера (см. рис. 15.2). Тогда обязательно возникнет ситуация отражения и прохождения за горизонт черной дыры. Таким образом, в пространстве распространяется не просто плоская волна, а возникает ситуация наложения плоских волн. Возникает задача нормировки такой суперпозиции волн, у которых есть коэффициенты прохождения и отражения.

Принято нормировать «на падающую волну» (в пунктирном овале на рисунке). Падающая волна ассоциирована с областью \mathcal{I}^- , и в областях, где есть падающая и отраженная волны, будет нормировать именно **на падающую** волну. Оправданием служит то, что мы можем работать не строго с плоскими волнами, а с локализованными волновыми пакетами.

Рассмотрим нормировку решений R_{in} и R_{up} . Напомним, что решение in приходит из \mathcal{I}^- , затем оно рассеивается на потенциальном барьере и частично уходит на \mathcal{I}^+ , а частично уходит под горизонт H^+ (см. рис. 11.5). Асимптотики радиальной функции

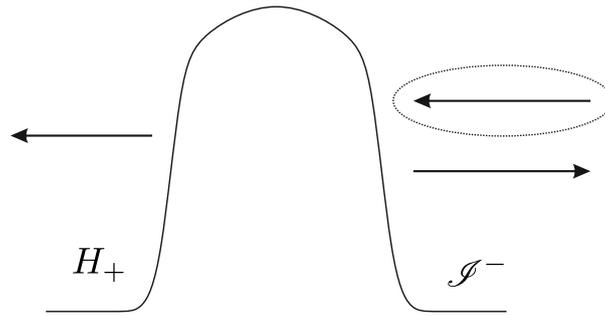


Рис. 15.2. Барьерный потенциал

решения in ($r^* \rightarrow -\infty$ на H^\pm):

$$R_{\text{in}} = N \begin{cases} e^{-i\omega r^*} + A_{\text{in}} e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty \\ B_{\text{in}} e^{-ikr^*}, & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (15.19)$$

где $A_{\text{in}}, B_{\text{in}}$ - коэффициенты отражения и прохождения соответственно, $k = \omega - m\Omega_H$, т.к. потенциальный барьер для метрики Керра $V \xrightarrow{r^* \rightarrow -\infty} k^2$.

Скалярное произведение, т.к. волны падают из \mathcal{S}^- , а координата на этой поверхности v , принимает вид:

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{\mathcal{S}^-} \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}^v \phi_2 dv \quad (15.20)$$

Правильно нормировать ее надо по подчеркнутой экспоненте (т.к. она соответствует падающей волне) - нормировка на \mathcal{S}^- $\phi_\omega^{\text{пад.}} \sim e^{-i\omega v}$, где $v = t + r^*$. Итоговая нормировка:

$$\phi_\omega^{\text{пад.}} = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}}. \quad (15.21)$$

Рассмотрим решение up - плоская волна на горизонте (см. рис. 11.5):

$$R_{\text{up}} = N \begin{cases} B_{\text{up}} e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty \\ e^{ikr^*} + A_{\text{up}} e^{-ikr^*}, & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (15.22)$$

Это решение нужно нормировать на плоскую волну, которая подчеркнута, т.к. она является падающей из H_- . Скалярное произведение:

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{H^-} \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}^U \phi_2 dU \quad (15.23)$$

В итоге, нормировочный коэффициент для волны up :

$$N = \frac{1}{\sqrt{4\pi|k|}}. \quad (15.24)$$

Для вечной черной дыры, раскладывая оператор поля по модам, необходимо добавить еще один индекс Λ :

$$\hat{\phi} = \sum_{J,\Lambda} \left(\phi_J^\Lambda a_J^\Lambda + \phi_J^{\Lambda*} a_J^{\Lambda\dagger} \right), \quad (15.25)$$

где $\Lambda = \text{in}, \text{ur}$. Заметим, что при таком разложении нет «выходящий частиц», и нет частиц, выходящих из белой дыры. Значит можно ввести такое вакуумное состояние, которое будет уничтожаться обоими операторами уничтожения, т.е. $\forall \Lambda$:

$$a_J^\Lambda |0, \text{in}\rangle = 0. \quad (15.26)$$

Такое состояние называется вакуумом Унру.

Сферические гармоники в разложении $S_{lm}^\omega(\theta)$ нормируются как

$$\int S_{lm}^{\omega*}(\theta) S_{l'm}^\omega(\theta) \sin \theta d\theta = \delta_{ll'}. \quad (15.27)$$

В итоге, получаем общий нормировочный коэффициент, который складывается из нормировки сферических и радиальных членов в разложении.

Далее, будем вычислять среднее по вакууму Унру от квантованного оператора тензора энергии-импульса:

$$\langle \text{in}, 0 | \hat{T}^{\mu\nu}(\hat{\phi}, \hat{\phi}) | \text{in}, 0 \rangle = ? \quad (15.28)$$

Такое вакуумное среднее не будет равняться нулю, т.к. при подстановке разложений операторов поля возникнут такие члены как

$$\langle \text{in}, 0 | a_{lm\omega}^{\text{in}} a_{l'm'\omega'}^{\text{in}\dagger} | \text{in}, 0 \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (15.29)$$

и в метрике Керра они не равны нулю.

Не равными нулю будут компоненты, которые описывают поток на бесконечности:

$$\text{поток } \langle T^{rt} \rangle \Big|_{t,r \rightarrow \infty} \neq 0. \quad (15.30)$$

Моды ur и in - независимые моды. Но коэффициенты отражения и прохождения в формулах (15.19) и (15.22) можно связать между собой. Рассмотрим вронскианы различных пар:

$$W(R_1, R_2) = R_1 R_2' - R_1' R_2. \quad (15.31)$$

Вронскианы сохраняются, их можно приравнять:

$$W(r \rightarrow -\infty) = W(r \rightarrow +\infty). \quad (15.32)$$

1) Если расписать Вронскианы для пары $R_{\text{in}}, R_{\text{in}}^*$, то можем получить:

$$1 - |A_{\text{in}}|^2 = \frac{k}{\omega} |B_{\text{in}}|^2. \quad (15.33)$$

2) Если рассмотреть пару $R_{\text{up}}, R_{\text{up}}^*$, получим:

$$1 - |A_{\text{up}}|^2 = \frac{\omega}{k} |B_{\text{up}}|^2. \quad (15.34)$$

3) Если рассмотреть $R_{\text{in}}, R_{\text{up}}$:

$$kB_{\text{in}} = \omega B_{\text{up}}. \quad (15.35)$$

Тогда поток компоненты ТЭИ вычисляется как

$$\begin{aligned} \langle 0, \text{in} | \underbrace{\hat{T}^{rt}}_{\sim \hat{\phi}_r \hat{\phi}_t} | 0, \text{in} \rangle \Big|_{\mathcal{I}^+(t \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty)} &= \sum_{\Lambda, J} T^{rt} (\phi_J^\Lambda, \phi_J^{\Lambda*}) = \\ &= \sum_{l, m} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 |S_{lm}^\omega(\theta)|^2}{4\pi r^2} \left(\frac{-1 + |A_{\text{in}}|^2}{\omega} + \frac{|B_{\text{up}}|^2}{|k|} \right). \end{aligned} \quad (15.36)$$

Если эта сумма отлична от нуля, то наблюдается эффект **суперрадиации**. С учетом соотношений между коэффициентами прохождения и отражения, последнюю формулу можно переписать как

$$\sum_{\Lambda, J} T^{rt} (\phi_J^\Lambda, \phi_J^{\Lambda*}) = \sum_{l, m} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 |S_{lm}^\omega(\theta)|^2}{4\pi r^2} \left(-\frac{|B_{\text{in}}|^2 k}{\omega^2} + \frac{|B_{\text{up}}|^2}{|k|} \right). \quad (15.37)$$

Таким образом, если $k > 0$, то вакуумное среднее равно нулю, а если $k < 0$ (за счет модуля), происходит удвоение первого члена. В результате, сегмент, в котором мы интегрируем ω в пределах от 0 до $m\Omega_{\text{H}}$ и соответствует $k < 0$. Тогда величина, соответствующая изменению массы черной дыры:

$$-\frac{dM}{dt} = \oint d\Omega \langle 0 | T^{rt} | 0 \rangle \sqrt{-g} \Big|_\infty = \frac{1}{2\pi} \sum_{lm} \int_0^{m\Omega_{\text{H}}} d\omega (|A_{\text{in}}|^2 - 1) \omega \quad (15.38)$$

это спонтанная суперрадиация - испускание квантов энергии ω с вероятностью $|A_{\text{in}}|^2 - 1$.

Аналогичным образом, можно получить выражение для углового момента:

$$\frac{dJ}{dt} = - \oint \langle T^{t\varphi} \rangle \sqrt{-g} d\Omega \Big|_\infty = \frac{1}{2\pi} \sum_{lm} \int_0^{m\Omega_{\text{H}}} m (|A_{\text{in}}|^2 - 1) d\omega. \quad (15.39)$$

Оценка коэффициентов отражения и прохождения в приближении ВКБ

Т.к. форма для барьера нам известна, то можем применять формулу для «туннельного эффекта». Введем барьерный фактор Γ - «набегание действия под барьером». Основной вклад будут давать члены $l = 1, m = 1$. И в итоге, время жизни относительно спонтанной суперрадиации будет $\tau_{\text{life}} = 8\pi e^{\gamma} M^3$.

Квантование в пространстве Риндлера

При стремлении $r^* \rightarrow \infty$ 4-мерное многообразие \mathcal{M} ведет себя как пространство Минковского на двумерную сферу: $\mathcal{M} = M_{1,1} \times S^2$. Будем рассматривать плоское пространство Минковского, но будем вводить там 2 типа вакуума, исходя из того, что наблюдатель может двигаться с ускорением.

Метрика пространства Минковского:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = d\bar{u}d\bar{v}, \quad (15.40)$$

где $\bar{u} = t - x$, $\bar{v} = t + x$. Диаграмма Пенроуза пространства Минковского (см. рис. 15.3).

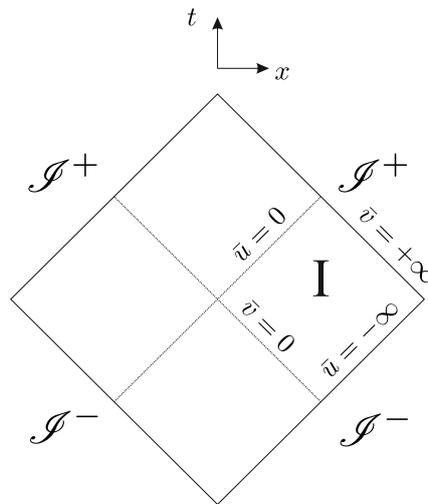


Рис. 15.3. Диаграмма Пенроуза пространства Минковского

Разделим диаграмму пополам линиями $\bar{v} = 0$ и $\bar{u} = 0$. Рассмотрим только область I пространства Минковского. Введем в I координаты ускоренного наблюдателя, делая замену переменных u, v - координаты Риндлера:

$$\begin{cases} \bar{v} = e^{av} \\ \bar{u} = -e^{-au} \end{cases} \quad (15.41)$$

Метрика при этом переписывается в виде:

$$ds^2 = e^{a(u-v)} dudv \quad (15.42)$$

- конформно плоское пространство. Физический смысл координат Риндлера состоит в том, что собственное ускорение равно ae^{-aR} , где $R = \frac{u-v}{2}$.

Уравнение для безмассового поля $\square\phi = 0$ можно записать в кривых координатах, для этого необходимо потребовать, чтобы ТЭИ был переопределен как конформный.

Таким образом, это неинерциальная система отсчета специального вида. Можем ввести 2 определения вакуума. Разложение оператора поля по модам:

$$\hat{\phi} = \sum_{\Lambda} \int \left(a_{\omega}^{\Lambda} f_{\omega} + a_{\omega}^{\Lambda\dagger} f_{\omega}^* \right), \quad (15.43)$$

где $\Lambda = \{\text{правые, левые}\}$ - индекс, показывающий, в какую сторону относительно оси x движутся частицы, и вакуум Минковского: $a_{\omega}^{\Lambda} |0, M\rangle = 0$. Левые частицы (частицы, движущиеся в отрицательном направлении) будем ассоциировать с частицами, падающими в черную дыру.

В этих координатах на прямой $\bar{u} = 0$ вектор ∂_T будет иметь нулевую норму, т.е. эта область будет являться горизонтом для вектора T : $\|\partial_T = 0\|$, где вектор $T = \frac{u+v}{2}$. В координатах Риндлера можем считать область $\bar{u} = 0$ горизонтом будущего, а $\bar{v} = 0$ - горизонтом прошлого.

В итоге, можем написать для плоских мод, нормированных на падающую волну:

$$f^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \begin{cases} e^{-i\omega\bar{v}}, & \text{in} \\ e^{-i\omega\bar{u}}, & \text{out.} \end{cases} \quad (15.44)$$

где in - моды, двигающиеся влево, out - вправо. Далее, можем по отношению к этим модам проквантовать и определить вакуум Минковского. После этого, хотим найти аналогичные конструкции для «Риндлеровского наблюдателя», который находится в области I - будем обозначать такие моды J^{ω} :

$$g^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \begin{cases} e^{-i\omega v}, & \text{in} \\ e^{-i\omega u}, & \text{out.} \end{cases} \quad (15.45)$$

Понятно, что положительно частотные моды в плоском пространстве и в пространстве Риндлера связаны преобразованием Боголюбова.

Для каждой моды Λ можем написать, что мода

$$g_{\omega} = \int d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}) \quad (15.46)$$

Если вычислить среднее значение по вакууму Минковского оператора $b^\dagger b$ в некоторой моде, то получим

$$\langle 0, M | b_\omega^\dagger b_{\omega'} | 0, M \rangle = |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (15.47)$$

Кроме того,

$$\alpha_{\omega\omega'} = \left(f\omega' g^\omega \right)_{H^-} = \int \left(e^{i\omega'\bar{u}} \partial_{\bar{u}} e^{-i\omega u} - \partial_{\bar{u}} \left(e^{i\omega'\bar{u}} \right) e^{-i\omega u} \right) d\bar{u} \quad (15.48)$$

где зависимость u от \bar{u} .

$$-u = \frac{1}{a} \ln(-\bar{u}) \quad (15.49)$$

В итоге, в интеграле возникает член вида:

$$\int e^{i(\omega'\bar{u} + \frac{\omega}{a} \ln(-\bar{u}))}, \quad (15.50)$$

что можно воспринимать как Фурье-преобразование логарифмического фактора. И тогда

$$|\beta_{\omega\omega'}| e^{\frac{\pi\omega}{a}} = |\alpha_{\omega, -\omega'}|. \quad (15.51)$$

И нормировочное соотношение:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (15.52)$$

Комбинация последних двух выражений дает формулу:

$$|\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} = \langle 0, M | N_2 | 0, M \rangle. \quad (15.53)$$

и чистым образом воспроизводится распределение Планка. Возникает ситуация, что движущийся в ускорении наблюдатель в пространстве Минковского будет «видеть» черное излучение так же, как и излучение Хокинга.

Диаграмма Пенроуза коллапсирующей оболочки

Если посмотреть на диаграмму Пенроуза коллапсирующей оболочки (см. рис. 10.6), можно заметить, что до образования черной дыры - у нас in-мода Минковского, которая нормируется на \mathcal{I}^- - мода f . Мода g строится по координатам Крускала.

Последний луч (красный пунктир) испытывает большое красное смещение, поэтому он из \mathcal{I}^+ выходит с другой частотой, но мы его раскладываем по тем же самым модам $e^{-i\omega u}$. В итоге, эту моду надо «протащить назад» и посмотреть, чему она соответствует на горизонте черной дыры. Соответствие получается такое же, как для координат Риндлера, а именно:

$$e^{-i\omega u} \Big|_{\mathcal{I}^+} \leftrightarrow e^{-i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-u)}. \quad (15.54)$$

Так как коэффициенты α и β определяются через скалярные произведения, которые берутся на \mathcal{S}^- , то мы должны будем совершить «сшивку» в координатах Крускала.

В конечном итоге, хотим вычислить среднее от потока тензора энергии-импульса, причем ТЭИ - функция операторов $\hat{\phi}$, разложенных по out-модам, вакуум же определяется для in-мод. Окончательная формула в терминах тензора энергии-импульса.

$$\langle 0, \text{in} | T^{tt}(\hat{\phi}) | 0, \text{in} \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty} = \sum_{l,m} N |S_{lm}(\theta)|^2 \int_0^\infty \frac{|B|^2 \omega d\omega}{e^{\frac{\omega}{T}} \mp 1} \quad (15.55)$$

Таким образом, отличие от Риндлеровского случая состоит только в наличии барьерного фактора $|B|^2$. Отсюда следует, что черная дыра теряет массу и угловой момент.

Таким образом, Квантовая теория поля (с поправкой на то, что мы не использовали нормальное упорядочивание) дает строгое обоснование эффекта суперрадиации, с точностью до технических деталей.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ