ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ АСТРОНОМОВ

АЛЕКСЕЕВ
СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЕМЕЛЬЯНОВУ АНАСТАСИЮ РОМАНОВНУ

Оглавление

Лекция №1. Развитие ОТО. Введение 7

Введение. Программа курса. Литература 7

Общая теория относительности. Пути развития ОТО 9

Сферически-симметричные метрики. Применения ОТО 10

Тёмная энергия. Проблемы ОТО 11

Развитие теории гравитации 13

Лекция №2. Современная космология 15

Наблюдательные основы космологии. Структура и состав Вселенной 15

Метрика: требования, построение. Метрика FRW 17

Уравнения Фридмана. Тензор энергии-импульса 19

Уравнения Эйнштейна. Метрики Бьянки 20

Модель Бранса-Дикке 21

Higgs. Lovelock Gravity 22

Лекция №3. Космологическая эволюция в модели Бранса-Дикке. Отскок. 24

Модель Бранса-Дикке 24

Ограничения на параметры модели. Уравнение Клейна-Гордона 25

Космология без сингулярности. Методы решения задач в ОТО 28

Использование симметрий задачи. Тензоры 30

Уравнения Лагранжа-Эйлера. Общий вид уравнений 33

Лекция №4. Теория ранней Вселенной 35

Теория инфляции: предпосылки, основные положения 35

Основные уравнения космологии. Модель горячей Вселенной. Динамика инфляции 39

Медленное скатывание. Возмущения при инфляции 41

Модели инфляции slow-roll. Типы моделей инфляций 44

Проблемы теории инфляции. Её преимущества. Критика теории 47

Лекция №5. Теория ранней Вселенной. Свойства и термодинамика черных дыр 49

E-фолд. Образование крупномасштабной Вселенной 49

Свойства черных дыр. Эффект Пенроуза 53

Термодинамика чёрных дыр 55
Начала термодинамики и законы физики чёрных дыр 56
Соответствие величин термодинамики и физики черных дыр 57
Лекция №6. Чёрные дыры. Гравитационный коллапс. Кротовая нора. 60
Термодинамика черных дыр 60
Кротовые норы 62
Гравитационный коллапс 65
Лекция №7. Механизм Хиггса 69
Калибровочный принцип в электродинамике, инвариантность 69
Решение уравнений Максвелла. Спонтанное нарушение симметрии 70
Намбу-голдстоуновский бозон 71
Механизм Хиггса 72
Лекция №8. Гравитационные волны 74
Теория Янга-Миллса. Уравнения Эйнштейна: гармоническая калибровка . 74
Плоские гравитационные волны, их поиск, характеристики 75
Поляризация гравитационных волн. Гравитационное излучение от двойной системы 76
Способы проверки расширенной гравитации. Примеры 79
Лекция №9. Квантовая и многомерная гравитация 83
Квантовая гравитация: ряд по кривизне 83
Многомерная гравитация. Дополнительные измерения 84
Компактификация дополнительных измерений 85
Модель ADD. Смещение фундаментальных планковских величин 87
Лекция №10. Многомерная гравитация. Часть 2 88
Модели RS 88
Проблема иерархии на бране 89
Локализация гравитона на бране 89
Закон Ньютона на бране 92
Роль радиона 93
Возможные пути решения космологической постоянной 96
Модель Двали-Габададзе-Порратти (DGP) 97

Инфракрасные модификации ОТО 98

Лекция №11. Многомерная гравитация. Часть 3. Конформная гравитация 100

Модель Паули-Фирца и проблема ВанДама-Вельтмана -Захарова 100

Приливной заряд 101

Конформная гравитация 102

Темная материя 104

Связь ОТО с конформной гравитацией 106

Emergent gravity 107

Лекция №12. Петлевая квантовая гравитация 109

Основные идеи петлевой квантовой гравитации. Формализм Гамильтона 109

ОТО в переменных Аштекара 110

Петлевая квантовая космология: основные идеи. Космологическая эволюция 112

Вселенная с отскоком и инфляцией 114

Петлевая квантовая космология: выводы. Локальные решения 115

Лекция №13. Телепараллельная гравитация 117

Основная идея телепараллельной гравитации. Основные величины 117

Соотношение между наборами величин. Частные случаи, их соотношения 118

Запись тензоров через тетрады. Преобразование тетрад 119

TEGR как калибровочная теория. Космология в TEGR, в f (T, B) гравитации 122

Поляризация гравитационных волн. Сферически-симметричные локальные метрики. Кривые вращения 133

Лекция №14. Способы проверки расширенных моделей гравитации на различных пространственно-временных масштабах 139

Что и где нужно проверять? Масштабы скоплений: объяснение тёмной энергии 139

Тени чёрных дыр: отклонения от ОТО 142

Гравитационно-волновая астрономия: отклонения от ОТО 144

Двойные пульсары: отклонения от ОТО 146

Солнечная система: ньютоновский предел 151
БАК: поведение при энергиях в диапазоне ТэВ 154
Лекция №15. Bi-Gravity 155
Уравнения поля. Тензор энергии импульса. Разложение полей 155
Квадратичное действие, в частности на космологическом фоне 156
Применение к темной энергии, к инфляции 160
Дополнительная активность. Причины расширения ОТО 162

Лекция №1. Развитие ОТО. Введение

Введение. Программа курса. Литература

Программа курса:

1. Основные положения общей теории относительности (ОТО). Современные астрофизические подтверждения ОТО. Способы применения ОТО в астрофизике. Нерешенные проблемы. Пути дальнейшего развития. Способы расширения ОТО.
2. Способы решения задач в ОТО. Подстановка метрики в действие или получение уравнений Эйнштейна в тензорном виде. Применение систем аналитического программирования для решения задач в ОТО. Решение уравнений Эйнштейна на примере струнной гравитации с поправками второго порядка по кривизне.
3. Ньютоновский предел. Параметризованный пост-ньютоновский формализм (ППН) различных порядков. Применение к проверке моделей гравитации: получение ППН параметров модели.
4. Современная космология. Наблюдательные основы космологии. Получение метрики Фридмана-Робертсона-Уокера и невозможность космологического расширения при нулевом тензоре энергии-импульса. Теория инфляции: предпосылки, основные положения, круг решаемых проблем, недостатки. Теории формирования крупномасштабной структуры Вселенной.
5. Гравитационные волны. Гравитационно-волновая астрономия: основные результаты. GW170817 и его роль в ограничении расширенных моделей гравитации.
6. Квантование гравитации. Аналоги диаграмм Фейнмана. Контрчлены. Модели с поправками высших порядков по кривизне. Квазиклассическое приближение, его границы применимости.
7. Кротовые норы. Условия существования решения, допустимые виды материи, проблемы с устойчивостью решения. Возможные проявления в реальной Вселенной.
8. Гравитационный коллапс и "голые" сингулярности. Гипотеза космической цензуры.
9. Модель Бранса-Дике как первое расширение ОТО. Решения вида «отскок масштабного фактора». Роль несингулярной космологии.
10. Основы теории калибровочных полей. Теорема Голдстоуна. Механизм Хиггса.
11. Идеи П. Хиггса о введении в рассмотрение квадратичных членов. Лагранжианы Хиггса. Гравитация Лавлока. Струнные модели гравитации с поправками второго порядка по кривизне (гравитация Гаусса-Бонне).

Космологические модели вида $R + R^2$ (модели Старобинского) и их применение для описания инфляции.

12. Многомерная гравитация. Модели с некомпактными дополнительными измерениями. Черные дыры на Большом адронном коллайдере. Модели Randall-Sundrum. Инфракрасные модификации ОТО. Приливной заряд и способы его поиска в астрономии. Поправки от геометрии пространства-времени как эффективный тензор энергии-импульса.
13. Модели Хорндески как наиболее общий вид скалярно-тензорной гравитации с уравнения поля 2го порядка. Модели DHOST.
14. Петлевая квантовая гравитация. Переменные Аштекара. Квантование. Петлевая космология.
15. Модели с нарушением лоренц-инвариантности. Массивный гравитон. Радиус Вайнштейна.
16. Конформная гравитация: линейная реализация как пример теории с уравнениями поля 4го порядка. Нелинейные реализации симметрии и их проблемы в настоящее время. Emergent gravity.
17. Телепараллельная гравитация: основные идеи, проблемы, которые подход может решить. Современное состояние теории, полученные локальные и космологические решения.
18. Методы проверки расширенных моделей гравитации на различных масштабах. В качестве примеров: Радиус разворота для скоплений. Тени черных дыр. Двойные системы с пульсаром (теория Дамура-Деруэль, параметризованный пост-кеплеровский формализм). Гравитационно-волновая астрономия. Солнечная система (параметризованный пост-ньютоновский формализм). Большой адронный коллайдер.

Рекомендуемая литература:

- С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсуловидр., «Общая теория относительности. Введение. Современное развитие и приложения» (2022)
- С. Г. Турышев «Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований» (2009)
- Emanuele Berti, Enrico Barausse et al, Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations, Class. Quant. Grav. 32, 2430 (2015)

Рекомендуемые сайты:

- https://arxiv.org/archive/gr-qc
- https://ufn.ru/
- http://jetp.ras.ru/cgi-bin/r/index
- https://journals.aps.org/prd/
- https://www.journals.elsevier.com/physics-reports/

Общая теория относительности. Пути развития ОТО

Вид лагранжиана: $S = const \int d^4x\sqrt{-g}R$. Зная Лагранжиан, можно узнать свойства системы, получить уравнения Лагранжа-Эйлера, динамические уравнения.

Основными полевыми уравнениями ОТО являются уравнения Гильберта-Эйнштейна, дифференциальное уравнение 2-ого порядка:

$$\underbrace{R_{\mu\upsilon}}_{\text{Тензор Риччи}} - \underbrace{0{,}5g_{\mu\nu}R}_{\text{Произведение метрики и скалярной кривизны}} = \underbrace{const * T_{\mu\nu}}_{\text{Тензор энергии-импульса материи}}$$

Слева от знака «равно» - геометрические характеристики пространства, справа – поля, характеристики пространства.

Метрика Шварцшильда (без констант):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Является локальным решением. Единственное сферически симметричное точное решение уравнений Эйнштейна без космологической константы в пустом пространстве. Эта метрика достаточно точно описывает гравитационное поле уединённой невращающейся и незаряженной чёрной дыры и гравитационное поле снаружи от уединённого сферически симметричного массивного тела.

Это решение является статическим, так что сферические гравитационные волны оказываются невозможными.

Метрика Рейсснера-Нордстрема:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Данная метрика представляет собой статическое решение уравнений поля Эйнштейна–Максвелла, которое соответствует гравитационному полю заряженного, невращающегося сферически симметричного тела массой M.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (закрытая модель):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(d\chi^2 - sin^2\chi(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)\right)$$

Данная метрика основана на точном решении уравнений поля Эйнштейна ОТО. Общая форма метрики вытекает из геометрических свойств однородности и изотропии, а уравнения поля Эйнштейна при этом необходимы только для получения масштабного коэффициента Вселенной как функции времени.

Пути развития ОТО

Рассмотрим уравнение Гильберта-Эйнштейна. Мы можем добавить в правую его часть физические поля, но так как уравнение подтверждается наблюдательно, то используются поправки, а не изменение структуры уравнения в целом.

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = const * T_{\mu\nu}$$

Используем лагранжиан теории относительности, попробуем его расширить за счёт физических полей, степеней по кривизне.

$$S = const \quad d^4x\sqrt{-g}R$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$S = const \int d^4x\sqrt{-g}R(R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) + R^2 + R^i + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \cdots)$$

Сферически-симметричные метрики. Применения ОТО

Сферически-симметричные метрики ОТО в 4D

Сигнатуры

+ - - - (Ландау-Лифшиц)

-+++ (Мизнер-Торн-Уиллер)

Сферические координаты: $t,\ r,\ \theta,\ \varphi$ – наиболее удобна в работе при наличии сферической симметрии.

Сферический элемент: $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$

Сферически-симметричная метрика: $ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$

Метрика Шварцшильда: $\Delta = 1 - \frac{2M}{r}$

Метрика Рейсснера-Нордстрема: $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$

Ньютоновский предел: $\Delta(r \longrightarrow \infty) \longrightarrow 1$

ППН формализм – параметризация теории гравитации экспериментально проверяемыми параметрами.

Пост-ньютоновский формализм

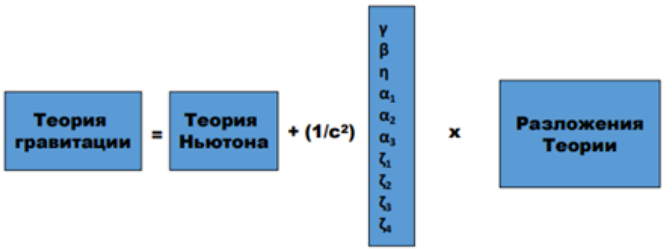


Рисунок 1.1 Схема представления теории гравитации

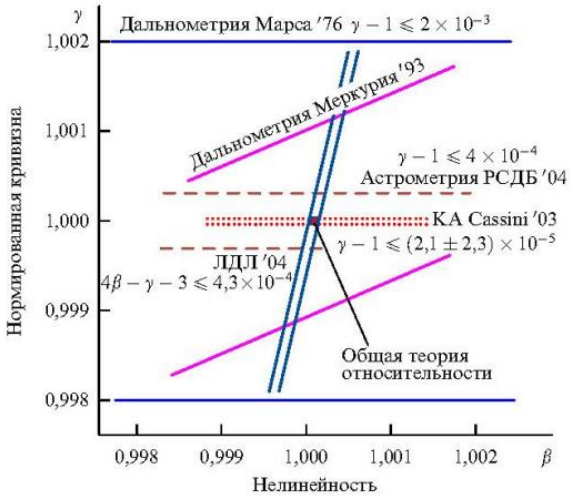


Рисунок 1.2 Прогресс в определении ППН-параметров γ и β за последние три десятилетия с помощью экспериментов в Солнечной системе.

Двойные пульсары

Объект PSR J0737-3039 A/B подтверждает ОТО с точностью 0.05% (доверительный интервал 3δ).

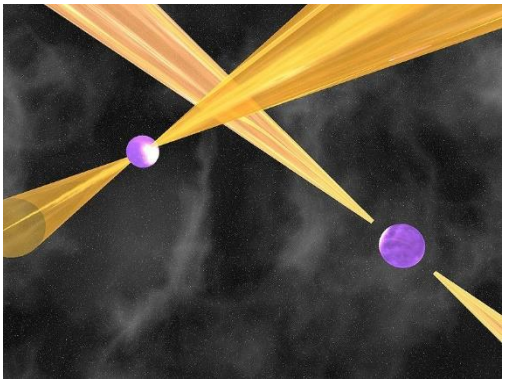


Рисунок 1.3 Двойной пульсар P constd4R J0737-3039 A/B, фантазия художника (Michael Kramer). Пропорции не соблюдены

<u>Типы полей, в которых проверена ОТО</u>

- Слабые поля (Солнечная система)
- Сильные поля (Двойные пульсары)

<u>Применения ОТО</u>

- Солнечная система
- Черные дыры, нейтронные звезды
- Аккреция вещества на черную дыру
- Космология (закон Хаббла) $H = [\partial a/\partial t]/a$
- Теории ранней Вселенной

Тёмная энергия. Проблемы ОТО

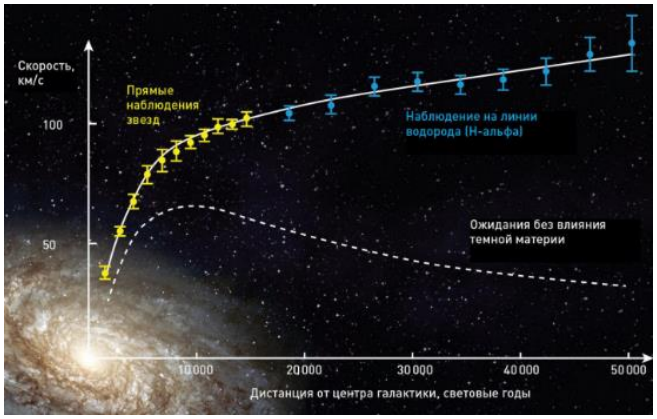


Рисунок 1.4 Зависимость скорости вращения материи в зависимости от расстояния от центра галактики

Рассмотрим некоторые проблемы ОТО подробнее.

Тёмная материя – нарушение законов движения в галактиках.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тёмная энергия (теории, объясняющие и подтверждающие её существование)

Результаты по сверхновым типа IA – наблюдательный результат, а *ускоренное расширение Вселенной* на внегалактических масштабах – его интерпретация. В лагранжиан добавляется космологическая постоянная Λ для описания ускоренного расширения:

$$S = d^4x\sqrt{-g}(\underbrace{R}_{\text{скалярная кривизна}} + \underbrace{\Lambda}_{\text{космологическая постоянная}})$$

Кроме ускоренного расширения Вселенной, существование тёмной энергии подтверждают:

- Модели Λ CDM (Cold Dark Matter)
- Теории инфляции (появляется необходимость скалярного поля или дополнительных членов по кривизне)
- Медленно меняющийся потенциал

$$S = d^4x\sqrt{-g}\left(\Phi R + \frac{\omega}{\Phi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + V(\Phi)\right)$$

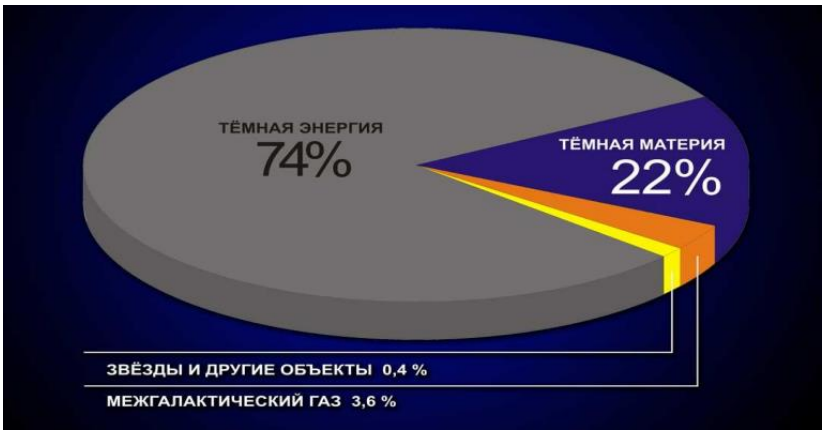


Рисунок 1.5 Современные представления о распределении типов материи во Вселенной по данным WMAP

Суммируя, выделяем следующие **проблемы ОТО**

- Темная материя, темная энергия;
- Отсутствие самосогласованной квантовой теории гравитации;
- Отсутствие единой теории всех физических взаимодействий;
- Законы сохранения;
- Протяженные тела;
- Отсутствие экспериментального подтверждения новых моделей.

Развитие теории гравитации

Модифицированная ньютоновская динамика (MOND) – поправка в закон Ньютона.

$$F = \frac{Mm}{r^2} \to F = \frac{Mm}{r^2}(1 - \beta r^2)$$

Данная физическая гипотеза - альтернативная теория гравитации, предлагающая изменение в законе тяготения Ньютона, объясняющее вращение галактик без привлечения тёмной материи.

MOND устанавливает нелинейную зависимость ускорения от создающей его массы для малых ускорений, и стоит особняком от широко распространённых и практически общепринятых теорий тёмной материи.

F(R) гравитация, скалярно-тензорная гравитация

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(R + R^2 + \cdots + R^\alpha)$$

F(R) гравитация - разновидность модифицированной теории гравитации, которая обобщает ОТО Эйнштейна. Она представляет собой семейство теорий, каждая из которых определяется отдельной функцией f от скаляра Риччи R. Простейшим случаем является просто функция, равная скаляру; это ОТО. В результате введения произвольной функции может появиться свобода объяснения ускоренного расширения и формирования структуры Вселенной без добавления неизвестных форм темной энергии или темной материи.

Модели Хорндески – наиболее общий вид скалярно-тензорной гравитации, которая даёт уравнение поля второго порядка. Лагранжиан – сумма всех полей (галионов). Теория имеет много степеней свободы, что позволяет объяснить инфляцию, космологическую постоянную и тёмную материю.

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_I L_I$$

$$L_2 \equiv G_2(\phi, X), \quad L_3 \equiv G_3(\phi, X)\Box\phi$$

$$L_4 \equiv G_4(\phi, X)^{(4)}R - 2G_{4,X}(\phi, X)\left(\Box\phi^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right) + F_4(\phi, X)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}$$

$$L_5 \equiv G_5(\phi, X)^{(4)}G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \frac{1}{3}G_{5,X}(\phi, X)\left(\Box\phi^3 - 3\Box\phi\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + 2\Box\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}\phi^\nu_\sigma\right) + F_5(\phi, X)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}\phi_{\sigma\sigma'}$$

Другие теории, помогающие развить теорию относительности:

- *Квантование гравитации – ряд поправок по кривизне*
- *Струнная гравитация*
- *Несохранение Лоренц-инвариантности*
- *Фундаментальные константы*
- *Петлевая квантовая гравитация, конформная гравитация, телепараллельная гравитация*

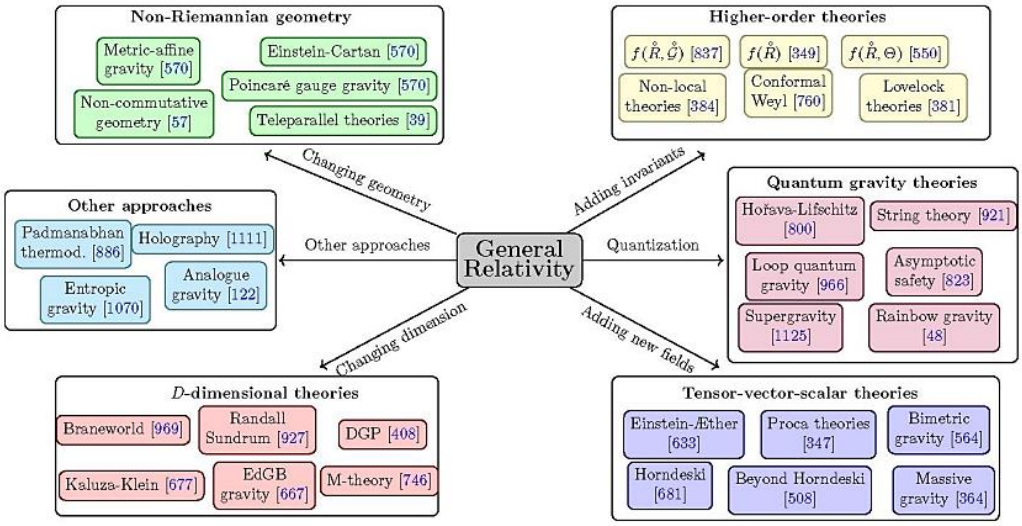


Рисунок 1.6 Способы расширения гравитации

Рисунок 1.7 Гравитация на различных масштабах

Лекция №2. Современная космология

Наблюдательные основы космологии. Структура и состав Вселенной

Что изучает космология?

1. **Реликтовое излучение** - тепловое излучение, которое равномерно заполняет Вселенную. Обладает высокой степенью изотропности и спектром, свойственным для абсолютно чёрного тела с температурой около 2,7 К.

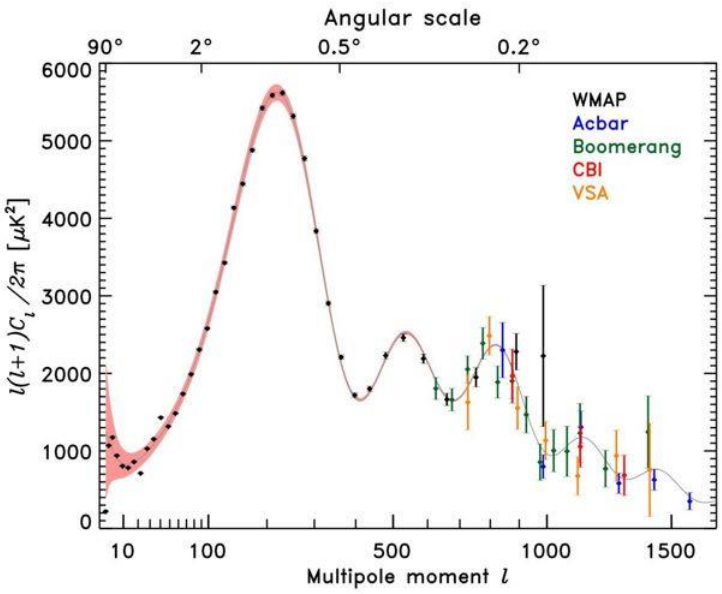


Рисунок 2.1 Спектр реликтового излучения

2. **Ускоренное расширение Вселенной** (первична - проблема со сверхновыми типа IA, Вселенная на внегалактических масштабах расширяется быстрее, чем на галактических)

3. **Темная материя** $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

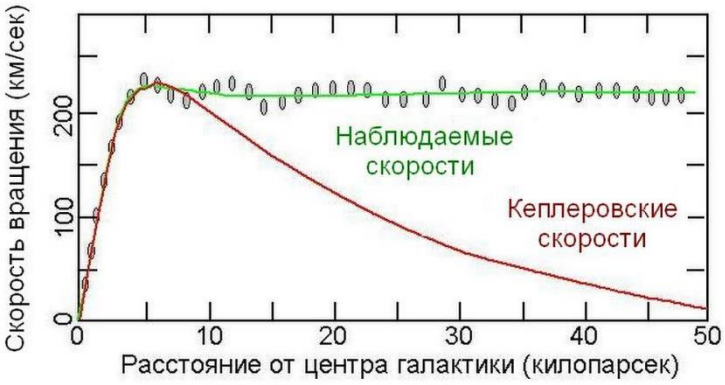


Рисунок 2.2 Сравнение скорости вращения при наличии «тёмной материи» и без неё.

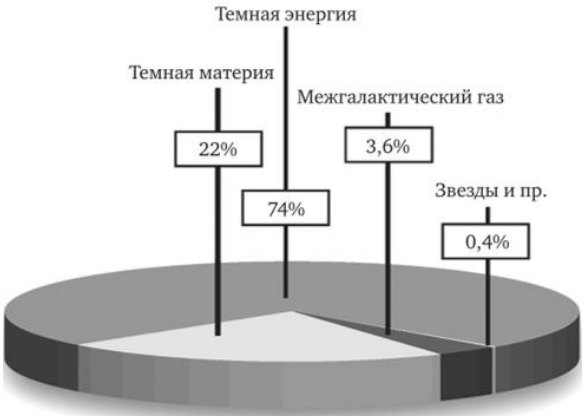


Рисунок 2.3 Состав Вселенной

4. **Крупномасштабная структура Вселенной**: на больших масштабах – однородна и изотропна. Переход к неравномерностям на масштабах 200 МПк.

5. **Распространенность химических элементов**

6. **Гравитационное линзирование** – эффект, обусловленный тем, что массивное тело изменяет своим гравитационным полем направление распространения электромагнитного излучения, подобно тому как обычная линза изменяет направление светового луча. Обнаружение гравитационных линз стало одним из подтверждений ОТО.

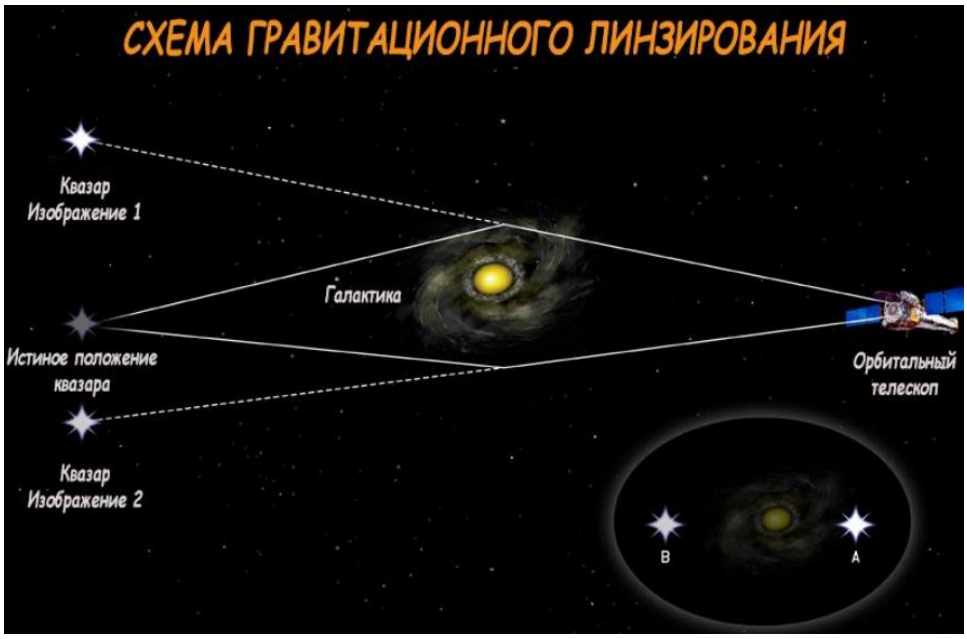


Рисунок 2.4 Схема гравитационного линзирования

Структура и состав Вселенной

Радиус наблюдаемой Вселенной: $L_V \sim 10^{28}$см

На масштабах $L_V \sim 10^{27}$см Вселенная однородна (с точностью 20-30%), изотропна (с точностью 10^{-3}%)

Средняя плотность барионов $\rho_B \sim (3 \pm 2) \cdot 10^{-31}$ г/см^3

Средняя плотность излучения $\rho_S \sim 6 \cdot 10^{-34}$ г/см^3

Средняя плотность тёмной материи $\rho_{DM} \sim (3 \pm 2) \cdot 10^{-30}$ г/см^3

Средняя плотность тёмной энергии $\rho_{DE} \sim (7.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-30}$ г/см^3

Вселенная нестационарна и расширяется по закону Хаббла $v = H \cdot l$ (v – относительная скорость между двумя точками, l – расстояние между этими точками, H – постоянная Хаббла)

$$H = 66.93 \pm 0.62 \ \text{(км/с)/Мпк}$$

Метрика: требования, построение. Метрика FRW

В теории относительности пространство описывается метрикой. Запишем метрику трёхмерного пространства:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{00}(x)(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}(x) dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Здесь $\alpha, \beta = 1,2,3$. В силу изотропности $g_{0\alpha}(x) = 0$, в силу однородности $g_{00} = g_{00}(x^0)$. Выбор сопутствующих координат: $g_{00}(x^0) = 1$. Метрика примет вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dl^2, \text{где } dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Однородное изотопное пространство – пространство постоянной кривизны, т.е.

$$\mathfrak{R} = \gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = const$$

Пространство		
Плоское	Открытое	Закрытое
$\mathfrak{R} = 0$	$\mathfrak{R} < 0$	$\mathfrak{R} > 0$

Переход в сферические координаты

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \qquad \text{где } d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$$

В однородном и изотропном пространстве

$$d\Omega^2 \text{ постоянна } \rightarrow dl^2 = f^2(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Ненулевые символы Кристоффеля

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \text{ctg}\theta$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial r} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{f^2}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r sin^2\theta}{f^2} \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

Скалярная кривизна

$$R = \frac{3}{2r^3}\frac{d}{dr}[r^2(1-f^{-2})] = const$$

$$\left[r^2\left(1-\frac{1}{f^2}\right)\right] = r^4\frac{R}{6} + C$$

В плоском пространстве $R = 0 \rightarrow$ постоянная $C = 0$

$$f^2 = 1 - \frac{1}{1-k\rho^2}, \text{где } \rho = \sqrt{\left|\frac{R}{6}\right|}r$$

$$k = 1 \text{ при } R > 0, k = 0 \text{ при } R = 0, k = -1 \text{ при } R < 0$$

Метрика FRW: построение

Вводим новую переменную χ

$$\rho = \begin{cases} \sin\chi, & k = 1; \\ \chi, & k = 0; \\ \operatorname{sh}\chi, & k = -1. \end{cases}$$

Тогда

$$d\rho = \begin{cases} \cos\chi\, d\chi, & k = 1; \\ d\chi & k = 0; \\ \operatorname{ch}\chi d\chi, & k = -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$d\chi^2 = \frac{d\rho^2}{1-k\rho^2}$$

Метрика примет вид

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2), \qquad \text{где } \Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2\chi, & k = 1; \\ \chi^2, & k = 0; \\ \operatorname{sh}^2\chi, & k = -1. \end{cases}$$

Если $a = a(t), x = ct$

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2)$$

Вводим конформное время η: $\pm ct = a(\eta)d\eta$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2))$$

Для расширяющейся Вселенной работает метрика Фридмана-Робертсона-Уокера

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2\Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2\Sigma^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Уравнения Фридмана. Тензор энергии-импульса

Получая метрику Шварцшильда, мы искали локальное сферически-симметричное решение. В данной случае метрика должна быть решением уравнений Эйнштейна

$$R_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i R = \kappa T_k^i + \Lambda\delta_k^i$$

Подсчёт ненулевых компонентов

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{11}^0 = \frac{\acute{a}}{a} \qquad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \Gamma_{\beta 0}^\alpha = \frac{\acute{a}}{a}\delta_\beta^\alpha$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{\acute{a}}{a}\Sigma^2(\chi) \qquad \Gamma_{33}^0 = \frac{\acute{a}}{a}\Sigma^2(\chi)sin^2\theta$$

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa'') \quad R_\beta^\alpha = -\frac{1}{a^4}(2ka^2 + a'^2 + aa'')\delta_\beta^\alpha$$

Скалярная кривизна имеет вид

$$R = R_0^0 + R_\alpha^\alpha = -\frac{6}{a^3}(ka^2 + a'')$$

Получаем два уравнения

$$\frac{3}{a^4}(ka^2 + a'') = \kappa T_0^0 + \Lambda$$

$$\frac{1}{a^4}(ka^2 - a'^2 + 2aa'')\delta_\beta^\alpha = \kappa T_\beta^\alpha + \Lambda\delta_\beta^\alpha$$

Тензор энергии-импульса

Тензор сплошной среды: $T_k^i = (\varepsilon + p)u^i u_k - p\delta_k^i$. В сопутствующей системе $T_0^0 = \varepsilon, T_\beta^\alpha = -p\delta_\beta^\alpha$.

Получим уравнения

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{\kappa}{3} a^2(\varepsilon + \varepsilon_v) - k$$

$$\frac{1}{a^4}(ka^2 - a'^2 + 2aa'') = -\kappa(p + p_v)$$

$$\varepsilon_v = \kappa\Lambda, \qquad p_v = -\varepsilon_v$$

Уравнения Фридмана:

$$\begin{cases} a'^2 a^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \tilde{\varepsilon} - k \\ -3(\tilde{\varepsilon} + \tilde{p})\frac{a'}{a} = \acute{\tilde{\varepsilon}} \\ p = p(\varepsilon) \end{cases}$$

Виды решений

Рассмотрим случай $\Lambda = 0$. Второе уравнение получается из термодинамики: $dE = -pdV$. Виды уравнений состояния зависят от модели.

- Пылевидная материя без давления: $\varepsilon = \rho c^2, p = 0$
- Материя с преобладанием излучения: $p = \varepsilon/3$

Закон Хаббла

В уравнениях Фридмана везде $\frac{a'}{a}$. Вводим параметр Хаббла: $H = \frac{a'}{a}$. Возраст Вселенной $\mathrm{t}_u \sim 1/\mathrm{H} \approx 1.5 \cdot 10^{10}$лет.

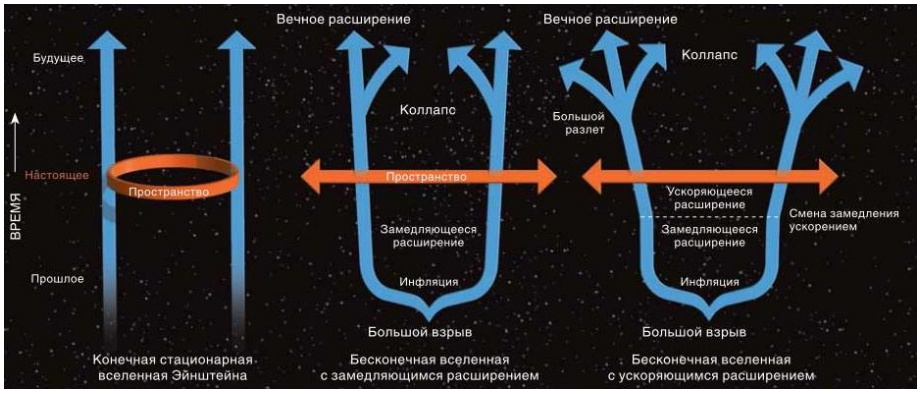


Рисунок 2.5 Космологическая эволюция

Уравнения Эйнштейна. Метрики Бьянки

Уравнения Эйнштейна: $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}$

В правой части стоит тензор энергии-импульса. Различные виды полей в лагранжиане обеспечивают различные типы тензоров энергии-импульса:

$$S = const * \int d^4x\sqrt{(-g)}[R + \partial_\nu\phi\partial^\nu\phi + V(\phi)]$$

Антропный принцип: Вселенная идеально настроена под нас. Данный принцип применим при решении любого уравнения космологии, начиная с момента Большого взрыва, в итоге мы должны прийти к значениям, равным тем, что были измерены в последних исследованиях. Или наоборот, начать решение уравнения можно с момента «нашего времени» и закончить моментом Большого взрыва.

Метрика Фридмана не является единственным способом описания. Есть разные способы, наиболее простой - метрики Бьянки (в разных направлениях Вселенная расширяется с разной скоростью).

Тип I $ds^2 = dt^2 - a^2(t){dx_1}^2 - b^2(t){dx_2}^2 - c^2(t){dx_3}^2$

В расширенной гравитации возможны новые типы решений с $T_{ij} = 0$

Модель Бранса-Дикке

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)}$$

$$S^{(m)} = \int d^4x\sqrt{(-g)}L^{(m)}$$

Здесь ω – безразмерный параметр Бранса-Дикке, φ – скалярное поле, делающее ω безразмерным. Модель была создана с целью объяснить гравитационную постоянную и реализовать принцип Маха.

<u>Замечание 1</u>

Если сделать преобразование $\varphi R \to \check{R}$, получим ОТО + скалярное поле: $\check{R} + const\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + V(\varphi)$. Чаще всё же используют модель в стандартном виде.

<u>Замечание 2</u>

Реализация принципа Маха – цель создания модели. Любое значение $S^{(m)}$ можно описать аппроксимацией/асимптотикой. Низкоэнергетический предел расширенной гравитации

Уравнения поля

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\varphi}T_{ij}^{(m)} + \frac{\omega}{\varphi^2}\left(\nabla_{i\varphi}\nabla_{j\varphi} - \frac{1}{2}g_{ij}\nabla^k\varphi\nabla_k\varphi\right) + \frac{1}{\varphi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\phi\right) - \frac{V}{2\varphi}g_{\mu\nu},$$

$$T_{ij}^{(m)} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{ij}}\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)}\right)$$

Варьируем уравнение по φ

$$\frac{2\omega}{\varphi}\Box\varphi + R - \frac{\omega}{\varphi^2}\nabla^k\varphi\nabla_k\varphi - \frac{dV}{d\varphi} = 0$$

$$R = -\frac{8\pi}{\varphi}T^{(m)} + \frac{\omega}{\varphi^2}\nabla^k\varphi\nabla_k\varphi + \frac{3\Box\varphi}{\varphi} + \frac{2V}{\varphi}$$

$$\Box\varphi = \frac{1}{2\omega+3}\left(8\pi T^{(m)} + \varphi\frac{dV}{d\varphi} - 2V\right)$$

Скаляр φ создается материей, для которой след $T^{(m)} \neq 0$, скаляр взаимодействует с материей не напрямую, а только через метрику g_{ij} – нет члена φL_m. Положим

$$V(\varphi) = m^2\varphi^2/2 \;\rightarrow\; G_{eff}(\varphi) \;=\; 1/\,\varphi \rightarrow \varphi \;>\; 0$$

Это и есть моделирование гравитационной постоянной. Точные ограничения на омегу были получены миссией Cassini: $\omega \;>\; 50000$. Если $\omega \rightarrow \infty$, получим стандартную версию ОТО.

Модель Бранса-Дикке дает:

- Новые типы решений для кротовых нор
- Новые типы решений в космологии
- Решение проблемы ускоренного расширения Вселенной (модели с потенциалом)
- Решение проблемы начальной сингулярности Вселенной (отскок)

Higgs. Lovelock Gravity

Higgs, 1959

$$I_A = \int d^4x R^2(-g)^{1/2} \qquad I_B = \int d^4x R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}(-g)^{1/2}$$

$$R\left(R_{(\mu\nu)} - \left(1/4\right)Rg_{\mu\nu}\right) = 0 \qquad \left(R_{\mu\rho}R_{\nu\delta} + R_{\rho\mu}R_{\delta\nu}\right)g^{\rho\delta} - \left(1/2\right)R_{\rho\delta}R^{\rho\delta}g_{\mu\nu} = 0$$

$$\left(Rg_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}\right)_\chi = 0 \qquad \left(R^{(\alpha\beta)}(-g)^{1/2}\right)_\chi = 0$$

Все лагранжианы инвариантны относительно преобразования Вейля:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \varphi(x)\, g_{\mu\nu}$$

В случаях A и B уравнения преобразуются к уравнениям типа Эйнштейна с космологической постоянной в новой метрике. Второй набор уравнений – соотношение старой и новой метрик. Рассмотрим случай A

$$R_{(\mu\nu)} = \lambda a_{\mu\nu}$$

$$\left(a_{\alpha\beta}(-a)^{1/2}\right)_{\chi} = 0$$

Это уравнение Эйнштейна с космологической постоянной λ. Можно получить метрику a, после преобразований: g. Аналогично решается случай B. Для других комбинаций такого преобразования найдено не было.

Lovelock Gravity, 1971

Требования к тензору Эйнштейна G^{ij} в вакууме:

1. G^{ij} симметричен по перестановкам индексов
2. G^{ij} состоит из метрики, ее первых и вторых производных
3. $G^{ij}{}_{j} = 0$
4. G^{ij} линеен по вторым производным от метрики

Тогда уравнения Эйнштейна в пустоте имеют вид $G^{ij} = 0$.

В случае 4D пространства-времени наиболее общий вид лагранжиана второго порядка (не создающего дополнительных проблем в гравитации)

$$L = \sqrt{-g}\left[\left(\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\eta\varepsilon}R^{\mu\nu\eta\varepsilon}\right) + \mu R_{\mu\nu\eta\varepsilon}{}^{*}R^{\mu\nu\eta\varepsilon}\right]$$

$$y'' + \lambda y'' = f(y, y') - Lovelock$$

$$y'' + \lambda y'''' = f(y, y', \dots) - other$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция №3. Космологическая эволюция в модели Бранса-Дикке. Отскок

Модель Бранса-Дикке

→ представляет собой скалярно-тензорную теорию гравитации, совпадающую в одном из пределов с общей теорией относительности. В данной теории материя влияет на метрику как непосредственно, так и через генерируемое дополнительно скалярное поле. Из-за этого гравитационная постоянная G не обязательно постоянна, она зависит от скалярного поля, которое может изменяться в пространстве и времени.

Лагранжиан ОТО имеет следующий вид:

$$S\sim\int d^4x\sqrt{(-g)}[R+\Lambda+L_{matter}]$$

$$\Uparrow$$

$$S\sim\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[\Phi R+\frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi+V(\Phi)+L_{matter}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$S\sim\int d^4x\sqrt{(-g)}[R+R^2+R^3+\cdots+L_{matter}]$$

В лагранжиан ОТО включена скалярная кривизна, космологическая постоянная, отвечающая за ускоренное расширение, и часть, отвечающая за материю.

Данную модель используют для моделирования поведения космологической постоянной (расширение Вселенной) и моделирования в первом приближении действия материи.

Модель Бранса-Дикке с Λ (BDΛ) имеет вид:

$$S=\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[\Phi R+\frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi+V(\Phi)+16\pi L_{matter}\right]$$

Чтобы сократить уравнение поля, вместо потенциала записывают космологическую постоянную, что упрощает уравнение относительно Φ:

$$S=\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[\Phi(R+2\Lambda)+\frac{\omega}{\Phi}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi+16\pi L_{matter}\right]$$

Уравнения движения:

$$G_{\mu\nu}=\frac{8\pi}{\Phi}T_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}+\frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\lambda}\,\partial_\sigma\Phi\,\partial_\lambda\Phi\right)+\frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi-g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\Phi\right),$$

$$\frac{8\pi}{\Phi}T^\mu_\mu+2\Lambda=\frac{3+2\omega}{\Phi}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\Phi$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu \Phi = \delta_\mu^t \partial_t \Phi$$

Реализуется обезразмеривание:

$$\Phi(t) \equiv \frac{\phi(t)}{G_0}, \qquad \epsilon(t) \equiv \frac{\partial_t \phi}{\sqrt{\Lambda}\phi}$$

$$\widetilde{H}(t) \equiv \frac{H(t)}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{\partial_t a}{\sqrt{\Lambda} a}, \qquad \tilde{\rho}(t) = \frac{4\pi G_0 \rho}{\Lambda}, \qquad \tilde{p}(t) = \frac{4\pi G_0 p}{\Lambda}$$

Уравнения Фридмана в новых переменных можно переписать как:

$$\frac{G_t^t}{\Lambda} = 3\widetilde{H}^2 = \frac{2\tilde{\rho}}{\phi} + 1 + \frac{w}{2}\epsilon^2 - 3\widetilde{H}\epsilon$$

$$\frac{G_r^r}{\Lambda} = 2\dot{\widetilde{H}} + 3\widetilde{H}^2 = -\frac{2\tilde{p}}{\phi} + 1 - \frac{w}{2}\epsilon^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2\widetilde{H}\epsilon$$

Уравнение Клейна-Гордона с использованием параметризации имеет вид уравнения второго порядка:

$$\frac{2\tilde{\rho} - 6\tilde{p}}{\phi} + 2 = (3 + 2w)\left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\widetilde{H}\epsilon\right)$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\dot{\tilde{\rho}}}{\tilde{\rho} + \tilde{p}} + 3\widetilde{H} = 0$$

Ограничения на параметры модели. Уравнение Клейна-Гордона

Пусть q – замедление Вселенной, β – безразмерная плотность материи в настоящее время, тогда

$$\dot{\widetilde{H}} \equiv -(1 + q)\widetilde{H}^2, \qquad \beta \equiv \frac{4\pi G_0(\rho_0 - p_0)}{H_0^2} = \frac{\tilde{\rho}_0 - \tilde{p}_0}{\widetilde{H}_0^2}$$

При p = 0 уравнения сведутся к виду

$$w[\widetilde{H}_0^2(2 - q_0 - \beta z) - z]^2 - 2\widetilde{H}_0^2(3z - 1) + \widetilde{H}_0^4(6 - 6q_0 - 6\beta z + 4\beta) = 0, \;\; z \equiv \frac{2 + 2w}{3 + 2w}$$

В приближении $|\omega| >> 1$ в главном порядке по $1/\omega$:

$$\frac{1}{\widetilde{H}_0^2} \to (2 - q_0 - \beta) \pm \sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta)}{w}}$$

В главном приближении $\sqrt{\ }$ можно пренебречь! Из наблюдательных данных получено, что

- $H_0 \approx 2.2 * 10^{-18}\text{сек}^{-1}$
- $\rho_0 \approx 0.27 * 10^{-29}\text{г/см}^3$ (с учетом вклада от барионной и темной материй)
- $q_0 \approx -0.6$ – параметр замедления

Давлением в настоящий момент пренебрегаем: холодная Вселенная с пылеподобной материей. Для космологической постоянной

$$\Lambda \to (2 - q_0)H_0^2 - 4\pi G_0(\rho_0 - p_0) \approx 11.3 * 10^{-36}\text{сек}^{-2}$$

Из экспериментов по лазерной локации Луны

$$|\partial_t G/G|_0 \leq 4 * 10^{-20}\text{сек}^{-1} \to |\epsilon_0| < 0.01$$

При $|\omega| >> 1$: $\widetilde{H}_0 \approx 0.68, \tilde{\rho}_0 \approx 0.2, \beta \approx 0.4$

Для настоящего момента

$$\frac{\epsilon_0}{\widetilde{H}_0} = \frac{1}{\widetilde{H}_0^2} - (2 - q_0 - \beta) + \frac{\beta + 1/\widetilde{H}_0^2}{3 + 2w}$$

В главном приближении по $1/\omega$

$$\epsilon_0 \to \pm\sqrt{\frac{2(1 + q_0 - \beta)}{w(2 - q_0 - \beta)}}$$

Решение для холодной Вселенной

$$p = 0 \to f \equiv \phi a^3 \to \tilde{\rho}/\phi = \tilde{\rho}_0 f_0/f$$

Подставили $\ddot{f}/f = \ddot{\phi}/\phi + 6\widetilde{H}\epsilon + 3\dot{\widetilde{H}} + 9\widetilde{H}^2$

$$\ddot{f} - \eta^2(f + \tilde{\rho}_0 f_0) = 0, \qquad \eta^2 \equiv \frac{8 + 6w}{3 + 2w}$$

Решение представимо в виде

$$\frac{f(\bar{t})}{f_0} = c^+ E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0, \qquad E(\bar{t}) \equiv \exp(\eta\bar{t})$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{2\tilde{\rho}-6\tilde{p}}{\phi}+2=(3+2w)\left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi}+3\widetilde{H}\epsilon\right)$$

$$2f+2\bar{p}_0 f_0=(3+2w)\left(\dot{\phi}a^3\right)$$

Решение для холодной Вселенной представимо в виде

$$3\widetilde{H}=\frac{\dot{f}}{f}-\frac{\dot{\phi}}{\phi}=\frac{\dot{f}}{f}-\frac{2f_0}{f(3+2w)}\int_{const}^{\bar{t}}\left(\frac{f}{f_0}+\tilde{\rho}_0\right)d\tilde{t}=\frac{\dot{f}}{f}-\frac{2(c^+E-c^-/E+c_H)}{\eta(3+2w)(c^+E-c^-/E-\tilde{\rho}_0)}$$
$$=\frac{6(1+w)(c^+E-c^-/E)-2c_H}{\eta(3+2w)(c^+E-c^-/E-\tilde{\rho}_0)}$$

Значения коэффициентов из решения равны

$$c^+=\frac{1+\tilde{\rho}_0}{2}+\frac{\epsilon_0+3\widetilde{H}_0}{2\eta},\qquad c^-=\frac{1+\tilde{\rho}_0}{2}-\frac{\epsilon_0+3\widetilde{H}_0}{2\eta},\qquad c_H=\frac{\eta\epsilon_0(3+2w)}{2}-\frac{\epsilon_0+3\widetilde{H}_0}{\eta}$$

После интегрирования получим

$$\frac{a}{a_0}=\left(c^+E+\frac{c^-}{E}-\tilde{\rho}_0\right)^{\frac{1}{3}}\times\exp\left[\frac{-1}{3(4+3w)}\int_1^E\left(\frac{c^+E^2+c_HE-c^-}{c^+E^2-\tilde{\rho}_0E+c^-}\right)\frac{dE}{E}\right]$$
$$=\left(c^+E+\frac{c^-}{E}-\tilde{\rho}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)}\exp\frac{-2c_H(A-A_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

$$\Delta\equiv 4c^+c^-{\tilde{\rho}_0}^2=1+2\tilde{\rho}_0-\frac{\left(3\widetilde{H}_0+\epsilon_0\right)^2}{\eta^2}=-\frac{3}{8+6w}\left[\widetilde{H}_0-\epsilon_0(1+w)\right]^2$$

$$A(E)\equiv\arctan\frac{2c^+E-\tilde{\rho}_0}{\sqrt{\Delta}}$$

В момент времени $t=0$ согласно ОТО масштабный фактор равен нулю, это означает начальную сингулярность, с которой началась Вселенная. В полученном выше решении второй член обеспечивает, не доходя до 0, разворот масштабного фактора, который называется отскок.

Космология без сингулярности. Методы решения задач в ОТО

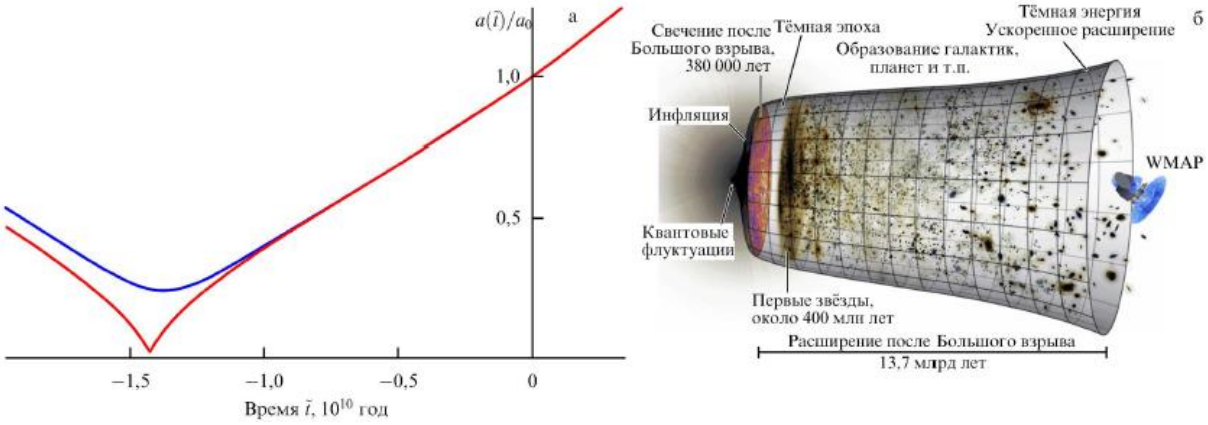


Рисунок 3.1 График $\frac{a(t)}{a_0}$ и схематичное изображение Большого взрыва

Решение для скалярного поля

$$\phi = \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0\right)^{1/(4+3w)} * \exp\frac{2c_H(A - A_0)}{(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

В пределе $|\omega| \to \infty$ сводится к космологии Фридмана

$$H_{Fr} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{E + E_{cr}}{E - E_{cr}}, \qquad E_{cr} \equiv \frac{\sqrt{3}\widetilde{H}_0 - 1}{\sqrt{3}\widetilde{H}_0 + 1}, \qquad \eta_{Fr} = \sqrt{3}$$

$$\frac{a_{Fr}}{a_0} = \frac{(\sqrt{3}\widetilde{H}_0 + 1)^{2/3}(E - E_{cr})^{2/3}}{(4E)^{1/3}}$$

Получаем решение без начальной сингулярности

$$\frac{a}{a_0} = \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{\rho}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)} \exp\frac{-2c_H(A - A_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

Условие существования отскока: $\Delta > 0$.

В точке отскока $E_m \approx \sqrt{\frac{c^-}{c^+}}$

Используя CMBR $T \approx 2.7\,K$ и оценку по адиабатическому расширению $a_{hot}/a_0 = 4 * 10^{-5}$, получим

$$\Delta \approx \frac{2\tilde{\rho}_0 a_m^3}{a_0^3} < \frac{2\tilde{\rho}_0 a_{hot}^3}{a_0^3} \approx 2{,}6 * 10^{-14}$$

Решение для горячей Вселенной находится, пренебрегая давлением

$$p = \rho/3 \to \dot{\tilde{H}} + 2\tilde{H}^2 = \frac{1}{6}\left(-w\epsilon^2 + \frac{8+6w}{3+2w}\right) \equiv Q(\bar{t})$$

Для метрики Фридмана в горячей фазе

$$H_{Fr} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{U+1}{U-1}, \qquad U(\tilde{\tau}) \equiv \exp\left(\frac{4\tilde{\tau}}{\sqrt{3}}\right), \qquad \frac{a_{Fr}}{a_{hot}} = \left[\frac{(U-1)^2 U_{hot}}{(U_{hot}-1)^2 U}\right]^{1/4}$$

В нашем случае ищем решение в виде

$$a = a_m + \frac{1}{2}a_m\dot{\tilde{H}}_m\tilde{\tau}^2 - \frac{1}{12}a_m b^2\dot{\tilde{H}}_m^2\tilde{\tau}^4 + \cdots$$

$$\tilde{H}^2 = \dot{\tilde{H}}_m^2\tilde{\tau}^2, \qquad \dot{\tilde{H}} = \frac{\dot{\tilde{H}}_m(1 - b^2\dot{\tilde{H}}_m\tilde{\tau}^2)}{1 + \dot{\tilde{H}}_m\tilde{\tau}^2/2} - \dot{\tilde{H}}_m^2\tilde{\tau}^2$$

Подставив в уравнение Хаббла

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\dot{\tilde{H}}_m[1 + \tilde{\tau}^2\dot{\tilde{H}}_m(3/2 - b^2)]}{(1 + \dot{\tilde{H}}_m\tilde{\tau}^2/2)^2} = Q > 0$$

Подбирая параметры, решение можно сшить с решением для холодной Вселенной отскок сохраняется, т.е. отскок есть шаг к решению проблем квантовой гравитации и разрешению космологических сингулярностей.

Методы решения задач в ОТО

Действие ОТО => уравнения поля (уравнения Эйнштейна)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$$

$$S = const * \int d^4x\sqrt{(-g)}[R + T_{matter}]$$

Прямая подстановка метрики в действие, получение уравнений Лагранжа-Эйлера

Действие в extended gravity

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[m_{Pl}^2\left(-R + 2\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) + \lambda e^{-2\phi}S_{GB}\right]$$

$$S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2$$

Методы решения задач в ОТО: получение уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T^{\phi}_{\mu\nu} + T^{GB}_{\mu\nu}) + \frac{\omega}{\varphi^2}\left(\nabla_{i\varphi}\nabla_{j\varphi} - \frac{1}{2}g_{ij}\nabla^k\varphi\nabla_k\varphi\right) + \frac{1}{\varphi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\Box\phi\right)$$

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\,\partial_\rho\phi)$$

$$T^{GB}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}[\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)\left(e^{-2\phi}R\right) + 2\left(\Box\delta^\sigma_\mu\delta^\sigma_\nu + g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma - \nabla^\rho\nabla_{(\mu\delta^\sigma_{\nu)}}\right)\left(e^{-2\phi}R_{\rho\sigma}\right) - 2\nabla^\rho\nabla^\sigma\left(e^{-2\phi}R_{\mu\rho\nu\sigma}\right)$$

Использование симметрий задачи. Тензоры

Действие равно:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[m^2_{Pl}\left(-R + 2\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) + \lambda e^{-2\phi}S_{GB}\right]$$

где $S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2$

Задача сферически-симметричная, асимптотически-плоская, статическая => метрику можно записать в виде:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\sigma^2}{\Delta}dr^2 - f^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Важные условия и их следствия:

- Асимптотическая плоскость => на бесконечности: метрика Минковского (+1,-1,-1,-1)
- Статичность => нет зависимости от временной координаты
- Сферическая симметрия => сферические координаты
- Статичность + сферическая симметрия => Зависимость только от радиальной координаты

Метрика имеет вид:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\delta^2}{\Delta}dr^2 - f^2 d\Omega^2$$

$$\Delta = \Delta(r), \qquad \delta = \delta(r), \qquad f = f(r)$$

$$\sqrt{-g} = \delta f^2 \sin\theta$$

$$g_{00} = \Delta, \qquad g_{11} = -\frac{\delta^2}{\Delta}, \qquad g_{22} = -f^2, \qquad g_{33} = -f^2 \sin^2\theta$$

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\Delta'}{\delta^2} \qquad \Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{\delta'}{\delta}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\Delta f f'}{\delta^2} \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{\Delta f f'}{\delta^2} sin^2\theta \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{f'}{f}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{f'}{f} \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Тензор Римана:

$$R_{0101} = -R_{0110} = -R_{1001} = R_{1010} = \frac{1}{2}\frac{\Delta'\delta'}{\delta} - \frac{1}{2}\Delta''$$

$$R_{0202} = -R_{0220} = -R_{2002} = R_{2020} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta f \Delta' f'}{\delta^2}$$

$$R_{0303} = -R_{0330} = -R_{3003} = R_{3030} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta f \Delta' f'}{\delta^2} sin^2\theta$$

$$R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121} = \frac{1}{2}\frac{f\Delta' f'}{\Delta} - \frac{f f'\delta'}{\delta} + f f''$$

$$R_{1313} = -R_{1331} = -R_{3113} = R_{3131} = \left(\frac{1}{2}\frac{f\Delta' f'}{\Delta} - \frac{f f'\delta'}{\delta} + f f''\right) sin^2\theta$$

$$R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} = \left(\frac{\Delta f^2 (f')^2}{\delta^2} - f^2\right) sin^2\theta$$

Тензор Риччи:

$$R_{00} = \frac{\Delta\Delta' f'}{f\delta^2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta\Delta''}{\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\Delta'\delta'}{\delta^3}$$

$$R_{11} = -\frac{\Delta' f'}{\Delta f} + \frac{1}{2}\frac{\Delta'\delta'}{\Delta\delta} - \frac{1}{2}\frac{\Delta''}{\Delta} + 2\frac{f'\delta'}{f\delta} - 2\frac{f''}{f}$$

$$R_{22} = \frac{\Delta f f''}{\Delta f} + \frac{\Delta f \Delta'\delta'}{\delta^3} - \frac{\Delta (f')^2}{\delta^2} + 1$$

$$R_{33} = R_{22} sin^2\theta$$

Тензор Эйнштейна:

$$G_{00} = -2\frac{\Delta^2 f''}{f\delta^2} + 2\frac{\Delta^2 f'\delta'}{f\delta^3} - \left(\frac{\Delta f'}{f\delta}\right)^2 - \frac{\Delta\Delta' f'}{f\delta^2} + \frac{\Delta}{f^2}$$

$$G_{11} = \frac{\Delta' f'}{\Delta f} - \frac{\delta^2}{\Delta f^2} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2$$

$$G_{22} = \frac{\Delta f f''}{\delta^2} - \frac{\Delta f f' \delta'}{\delta^3} + \frac{1}{2}\Delta''\left(\frac{f}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{f^2 \Delta' \delta'}{\delta^3} + \frac{f \Delta' f'}{\delta^2}$$

$$G_{33} = G_{22} sin^2\theta$$

Скалярная кривизна

$$R = 4\frac{\Delta f''}{f\delta^2} - 4\frac{\Delta f' \delta'}{f\delta^3} + 2\Delta\left(\frac{f'}{f\delta}\right)^2 + 4\frac{\Delta'\delta'}{f\delta^2} - \frac{2}{f^2} + \frac{\Delta''}{\delta^2} - \frac{\Delta'\delta'}{\delta^3}$$

Инвариант кривизны

$$\begin{aligned} R_{ijkl}R^{ijkl} = {} & 8\Delta^2 f^{-2}\sigma^{-4} f''^2 - 16\Delta^2 f^{-2}\sigma^{-5} f'' f' \sigma' + 8\Delta^2 f^{-2}\sigma^{-6} f'^2 \sigma'^2 + 4\Delta^2 f^{-4}\sigma^{-4} \\ & + 8\Delta f^{-2}\sigma^{-4}\Delta' f'' f' - 8\Delta f^{-2}\sigma^{-5}\Delta' f'^2 \sigma' - 8\Delta f^{-4}\sigma^{-2} f'^2 + 4 f^{-2}\sigma^{-4}\Delta'^2 f'^2 \\ & + 4 f^{-4} + \sigma^{-4}\Delta''^2 - 2\sigma^{-5}\Delta''\Delta'\sigma' + \sigma^{-6}\Delta'^2\sigma'^2 \end{aligned}$$

Выделение полной производной

$$\frac{R\sqrt{-g}}{\sin\theta} = \left[\frac{\Delta' f^2}{\delta} + 4\frac{\Delta f f'}{\delta}\right]' - \frac{2}{\delta}(\Delta' f f' + \Delta(f')^2 + \delta^2)$$

$$\frac{S_{GB}\sqrt{-g}}{\sin\theta} = 4\left[\frac{\Delta\Delta'(f')^2}{\delta^3} - \frac{\Delta'}{\delta}\right]'$$

Подстановка метрики в действие

1. Интегрирование по углам
2. Приведение дилатонного члена
3. Интегрирование по частям в члене Гаусса-Боннэ

$$S = \frac{1}{2}\int dtdr\left[\frac{m_{Pl}^2}{\delta}(\Delta' f f' + \Delta(f')^2 + \delta^2 - \Delta f^2(\phi')^2) + 4e^{-2\phi}\lambda\phi'\left(\frac{\Delta\Delta'(f')^2}{\delta^3} - \frac{\Delta'}{\delta}\right)\right]$$

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{\delta^2}{\Delta}dr^2 - f^2 d\Omega^2$$

Координаты кривизны: $f(r) = r$
Координаты GM-GHS: $\delta(r) = 1$

Уравнения Лагранжа-Эйлера. Общий вид уравнений

$$m_{Pl}^2\sigma^2[-r\sigma' + \sigma r^2(\phi')^2] + 4e^{-2\phi}\lambda\sigma(\Delta - \sigma^2)[\phi'' - 2(\phi')^2] + 4e^{-2\phi}\phi'\lambda\sigma'(\sigma^2 - 3\Delta) = 0$$

$$m_{Pl}^2\sigma^2[\sigma^2 + \Delta\sigma r^2(\phi')^2 - \Delta' r - \Delta] + 4e^{-2\phi}\phi'\lambda\Delta'(\sigma^2 - 3\Delta) = 0$$

$$m_{Pl}^2\sigma^2[\Delta'' r\sigma - \Delta' r\sigma' + 2\Delta'\sigma - 2\Delta\sigma' + 2\Delta r\sigma(\phi')^2] + 4e^{-2\phi}\lambda 2\sigma\Delta\Delta'[\phi'' - 2(\phi')^2] + 4e^{-2\phi}\phi'\lambda 2[(\Delta')^2\sigma + \Delta\Delta''\sigma - 3\Delta\Delta'\sigma'] = 0$$

$$-2m_{Pl}^2\sigma^2[\Delta' r^2\sigma\phi' + 2\Delta r\phi'\sigma - \Delta r^2\phi'\sigma' + \Delta r^2\phi''\sigma] + 4e^{-2\phi}\lambda 2[(\Delta')^2\sigma + \Delta\Delta''\sigma - 3\Delta\Delta'\sigma' - \Delta''\sigma^3 + \Delta'\sigma'\sigma^2] = 0$$

Асимптотики в особых точках

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Метрика Рейсснера-Нордстрема: $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}$
Асимптотики в особых точках: бесконечность ($r \to \infty$)

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\delta(r) = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\Phi(r) = \Phi_\infty + \frac{D}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Асимптотики в особых точках: горизонт r_h ($r \to r_h$)

$$\Delta(r \to r_h) = d_1(r - r_h) + d_2(r - r_h)^2 + \cdots$$
$$\delta(r \to r_h) = s_h + s_1(r - r_h) + \cdots$$
$$\Phi(r \to r_h) = \phi_h + \phi_1(r - r_h) + \phi_2(r - r_h)^2 + \cdots$$

Система уравнений

$$a_{i1}\Delta'' + a_{i2}\sigma' + a_{i3}\Phi'' = b_i$$

$a_{11} = 0$
$a_{12} = -r\sigma^2 + 4e^{-2\phi}\phi'\lambda(\sigma^2 - 3\Delta)$
$a_{12} = 4e^{-2\phi}\lambda\sigma(\Delta - \sigma^2)$
$a_{21} = \sigma^3 r + 4e^{-2\phi}\lambda\phi' 2\Delta'\sigma$
$a_{22} = -\sigma^2\Delta' r - 2m_{Pl}^2\sigma^2\Delta - 4e^{-2\phi}\lambda\phi' 6\Delta\Delta'$
$a_{23} = 4e^{-2\phi}\lambda\sigma\Delta\Delta'$

$$a_{31} = 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta - \sigma^2)$$
$$a_{32} = 2\sigma^2\Delta r^2\phi' - 4e^{-2\phi}\lambda\Delta'(\sigma^2 - 3\Delta)$$
$$a_{33} = -2\Delta\sigma^3 r^2$$
$$b_1 = -\sigma^3 r^2\phi^2 + 4e^{-2\phi}\lambda\sigma(\Delta - \sigma^2)2(\phi')^2$$
$$b_2 = -2\sigma^3 2(\Delta' + \Delta r) + 4e^{-2\phi}\lambda 2\phi'\Delta'\sigma(2\Delta\phi' - \Delta')$$
$$b_3 = 2\sigma^3\phi' r(\Delta' r + 2\Delta) - 4e^{-2\phi}\lambda(\Delta')^2\sigma$$

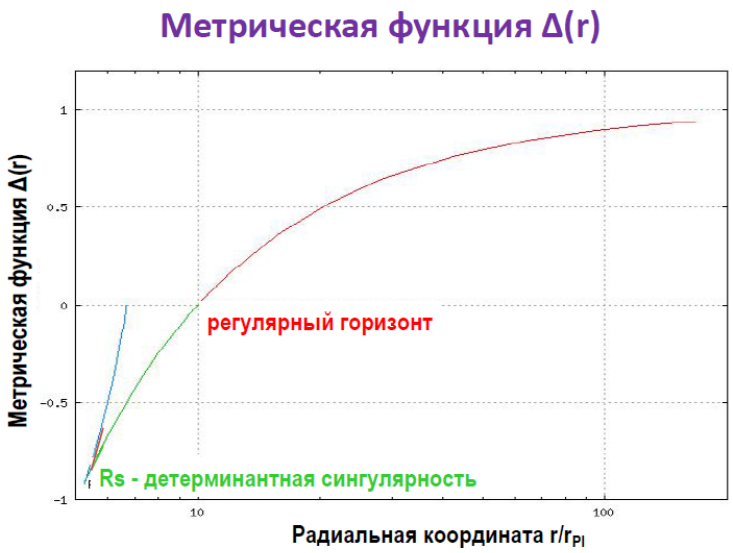


Рисунок 3.2 Метрическая функция

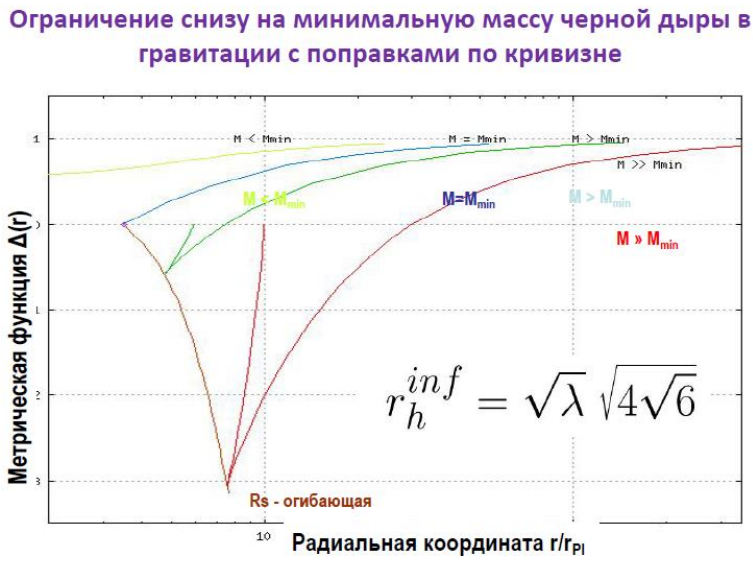


Рисунок 3.3 Метрические функции при различных массах

Лекция №4. Теория ранней Вселенной

Теория инфляции: предпосылки, основные положения

Рекомендуемая литература

1. Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, «Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва», 2006
2. В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева, А. М. Малиновский, “Образование крупномасштабной структуры Вселенной”, УФН, 181:10 (2011), 1017–1040; Phys. Usp., 54:10 (2011), 983–1005
3. Э. Б. Глинер, “Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды”, УФН, 172:2 (2002), 221–228; Phys. Usp., 45:2 (2002), 213–220
4. А. Д. Долгов, “Космология: от Померанчука до наших дней”, УФН, 184:2 (2014), 211–221; Phys. Usp., 57:2 (2014), 199–208
5. С. И. Блинников, А. Д. Долгов, “Космологическое ускорение”, УФН, 189:6 (2019), 561–602; Phys. Usp., 62:6 (2019), 529–567
6. Shinji Tsujikawa, «Introductory Review of Cosmic Inflation», Research Center for the Early Universe, University of Tokyo, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan
7. Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Christopher Pattison, «Inflation: a quantum laboratory on cosmological scales», March 2020

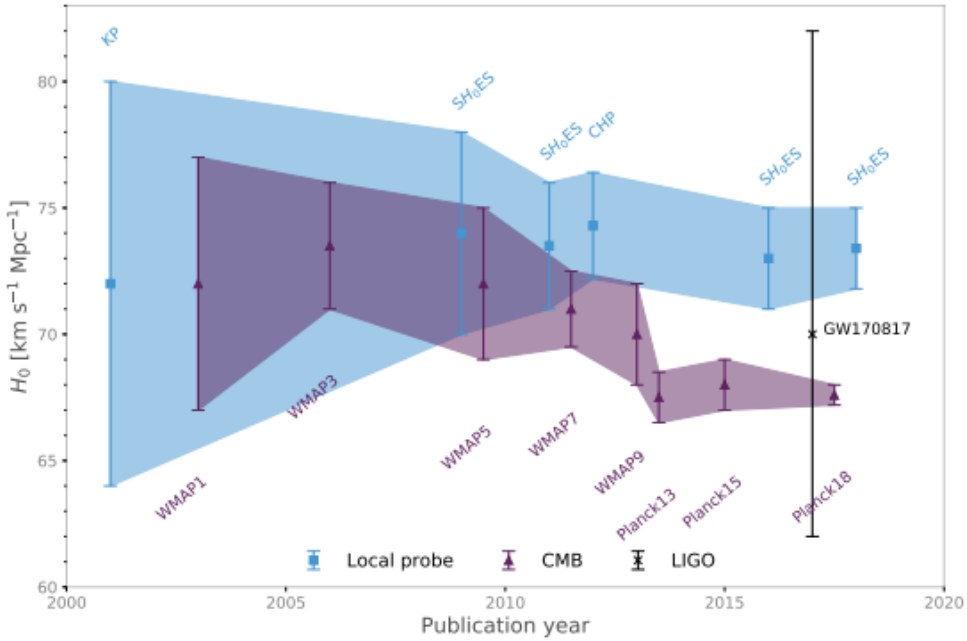


Рисунок 4.1 Измерения H_0 с течением времени, демонстрирующие возникновение противоречия между локальными измерениями и теми, которые получены из измерений CMB с использованием модели ΛCDM. ”KP“ обозначает ключевой проект космического телескопа Хаббл, "CHP” - программу Карнеги Хаббл. WMAP и Planck - это ограничения космического микроволнового фона (CMB), а SH0ES - локальные ограничения сверхновых. Точка данных LIGO использует одно событие гравитационной волны для ограничения H_0.

Рекомендовано к просмотру: «Теория инфляционной Вселенной, или теория Мультивселенной» Лекцию читает Андрей Дмитриевич Линде, Стэндфордский университет (США), профессор, от 10 июня 2007 года, Москва, ФИАН.

Ссылка на лекцию: https://forany.xyz/a-170

Теория инфляции: предпосылки к созданию

- Постоянство (с точностью до 10^{-4}) температуры реликтового фона по всему небу, изотропность структуры

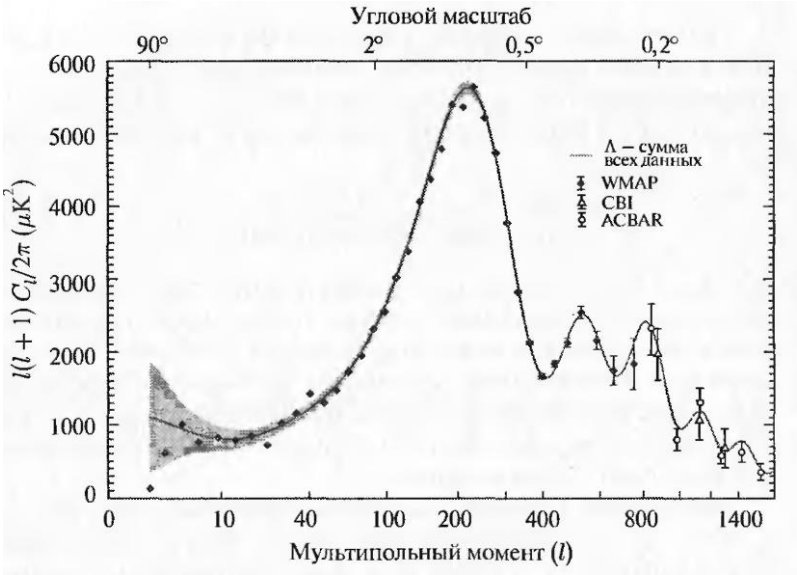


Рисунок 4.2 Спектр флуктуаций микроволнового фона согласно измерениям космической обсерватории Planck

По положению и высоте пиков в спектре температурных флуктуаций CMB можно получить информацию о космологических параметрах.

- Квазиоднородность Вселенной на больших масштабах
- Близость параметра Ω_{tot} к 1, т.е. тот факт, что Вселенная плоская. Для реализации этого необходима подгонка параметров в ранней Вселенной:
  - $|\Omega_{tot} - 1| < 10^{-16}$ при первичном нуклеосинтезе
  - $|\Omega_{tot} - 1| < 10^{-60}$ на планковской стадии
- Наличие небольших флуктуаций плотности на астрономических масштабах.
- Непонятны причины Большого взрыва
- Проблема антивещества: барионная асимметрия (преобладание в видимой части Вселенной вещества над антивеществом)
- Проблема космологического горизонта (вопрос о взаимосвязи различных областей Вселенной друг с другом)

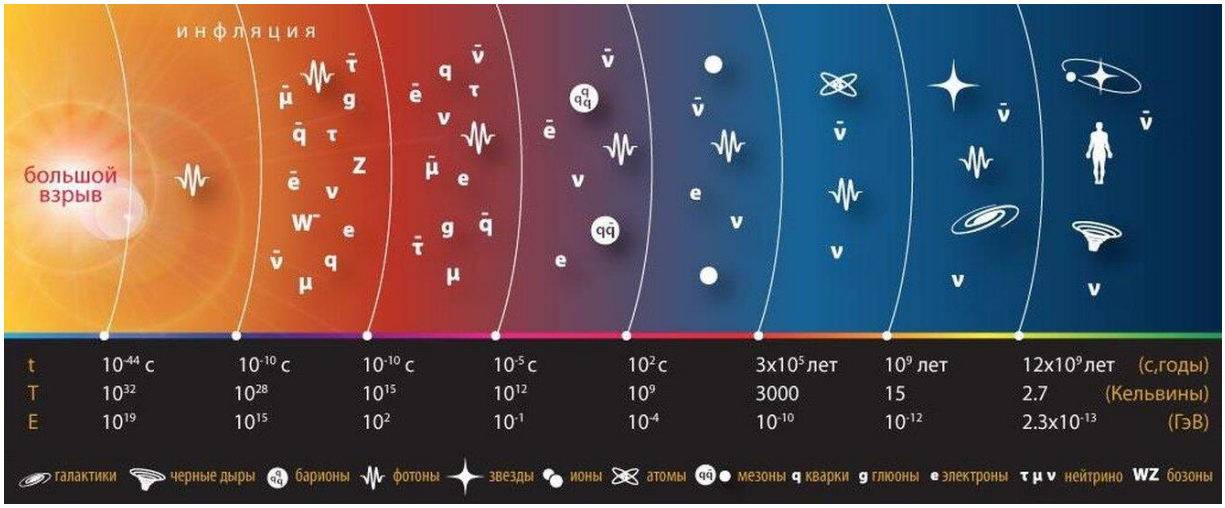


Рисунок 4.3 Временные рамки формирования различных структур

Теория инфляции: основные положения

Период: $10^{-42} - 10^{-36}$ секунд.

Основная идея данной теории заключается в том, что производится замена степенного закона расширения на экспоненциальный. Решением уравнения Фридмана является величина $R(t) \sim t^{0,5}$. Она заменяется на $R(t) \sim e^{H(t)t}$, где $H(t) = (1/R)\, dR/dt$ – постоянная Хаббла инфляционной стадии. Разница в поведении степенной и экспоненциальной функции в том, что последняя растёт быстрее, то есть данная замена позволяет сделать предположение об ускоренном расширении Вселенной

$$10^{-42} > H_{inflation} > 10^{-36}$$

$$H_{inflation} > H_{now}$$

Любое решение имеет отношение к ОТО только если является решением уравнения Эйнштейна и согласовано с другими решениями. Поле инфлатона с уравнением состояния $p = -\varepsilon$. Поле с отрицательным давлением => плотность энергии $\varepsilon = const$.

Инфляционная теория решает много проблем теории Большого Взрыва и объясняет, как можно создать Вселенную из одного миллиграмма материи особого типа. (Линде)

Инфляция и скалярное поле

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$$

Рисунок 4.4 Сценарий хаотической инфляции

Уравнения движения (основа, идейно)

Уравнение Эйнштейна:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{m^2}{6}\varphi^2$$

Уравнение Клейна-Гордона:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi$$

Можно сравнить с уравнением для осциллятора с трением:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = -kx$$

Основная идея заключается в следующем: имеется большое поле, следовательно, имеется большое значение масштабного фактора, а значит и большое трение. Получаем, что поле и его потенциальная энергия изменяются очень медленно.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m\varphi}{\sqrt{6}} \approx const \ \rightarrow a \sim e^{Ht} - \text{ стадия инфляции}$$

<u>Инфляция делает Вселенную плоской, однородной и изотропной.</u> Почему? В простейших вариантах инфляционной теории Вселенная раздувается в $10^{1000000000000}$ раз во время инфляции. Мы можем видеть только малую часть Вселенной, размером 10^{10} световых лет. Поэтому она и кажется плоской, однородной и изотропной.

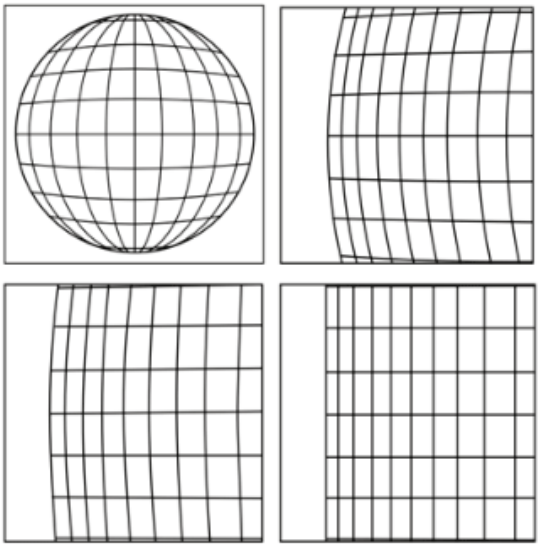
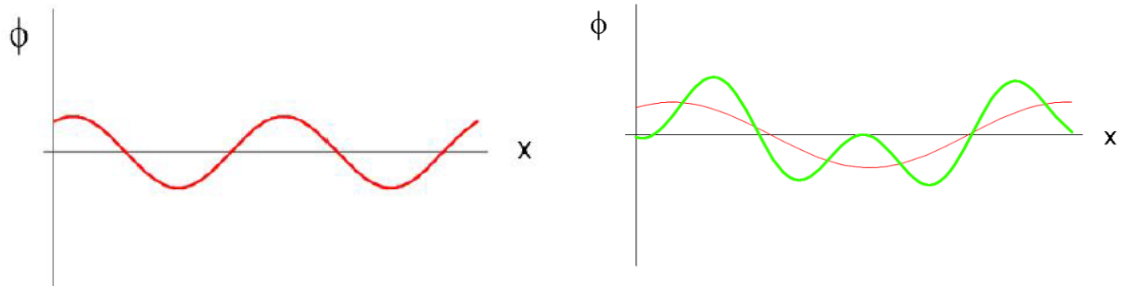


Рисунок 4.5 Плоская Вселенная

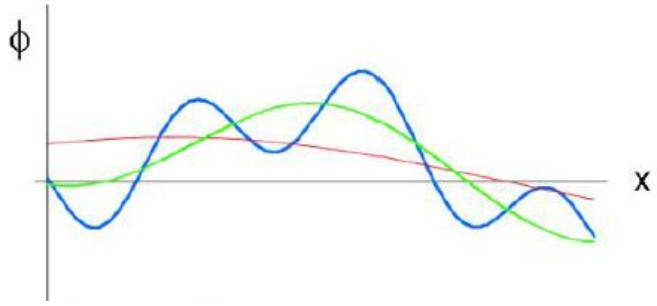
Инфляция и квантовые флуктуации

Квантовые флуктуации существуют всюду. Они подобны волнам, которые быстро возникают и исчезают. Инфляция растянула их, вместе с тем как она растянула

Вселенную. Когда их длина волны стала достаточно большой, они "замерзли", перестали двигаться и исчезать.



Затем новые флуктуации растянулись и замерзли поверх старых.



В результате Вселенная заполнилась неоднородным скалярным полем. Эти неоднородности ответственны за последующее образование галактик. Иногда эти флуктуации накапливаются и сильно увеличивают энергию скалярного поля в некоторых частях Вселенной. В этих частях инфляция ускоряется, Вселенная входит в режим самовосстановления, процесс инфляции становится вечным.

Основные уравнения космологии. Модель горячей Вселенной. Динамика инфляции

Уравнение Эйнштейна (правая часть образуется скалярным полем):

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{Pl}^2} T_{\mu\nu}$$

Тензор энергии импульса идеальной жидкости:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$$

Уравнение Фридмана (уравнение Эйнштейна с подставленной в него метрикой Фридмана):

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Уравнение Райчадхури (вторая производная масштабного фактора):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{Pl}^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Запишем закон сохранения, чтобы получить уравнение непрерывности

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6M_{Pl}^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad => \quad \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$

Решение при $\omega = \frac{P}{\rho}$ выглядит как

$$\rho(a) = \rho_{in}\left(\frac{a}{a_{in}}\right)^{-3(1+\omega)}$$

Уравнение Фридмана перепишется в виде:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2}[\rho_{matter} + \rho_{rad} + \rho_K + \rho_\Lambda] \equiv \frac{1}{3M_{Pl}^2}\rho_{tot}$$

Уравнения состояния для разных космологических моделей

fluid	**Equation of state parameter ω**	***ρ(a)***	***a(t)***
cold matter	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{2/3}$
radiation	$1/3$	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{1/2}$
spatial curvature	$-1/3$	$\propto a^{-2}$	$\propto t$
cosmological constant	-1	$\propto a^{0}$	$\propto e^{Ht}$
scalar field	$-1 + 2\epsilon_1/3$	$\propto a^{-2\epsilon_1}$	$\propto t^{1/\epsilon_1}$

Модель горячей Вселенной: проблемы

1. Проблема горизонта: космологический горизонт меньше поверхности последнего рассеяния, значит области Вселенной не связаны причинно-следственной связью, следовательно, однородность реликтового излучения можно обеспечить только точной подстройкой
2. Проблема плоской Вселенной: можно обеспечить только точной подстройкой
3. Проблема отсутствия магнитного монополя (полюс магнита): можно обеспечить только точной подстройкой

Классическая динамика инфляции

Уравнение Райчадхури в отсутствие космологической постоянной записывается в простом виде $\rho + 3P < 0$. Действие в таком случае:

$$S_{infl} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_{Pl}^2}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right]$$

Уравнение для скалярного поля имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right]\right) = -\frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,\partial_\upsilon\phi\right) - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0,$$

откуда получим уравнение Клейна-Гордона, которое можно разбить на две части:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0$$

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$$
$$P = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$$

Из второго уравнения $V(\phi) > \frac{\dot{\phi}^2}{2}$ $=>$ доминирование над кинетикой

Уравнение Фридмана для инфляционной стадии:

$$H^2 = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)}{3M_{Pl}^2}$$

Медленное скатывание. Возмущения при инфляции

Полагаем, что $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$. Тогда $P \approx -\rho$ $=>$ $\dot{\rho} \simeq 0$, откуда видно, что плотность энергии не меняется (const).

Из уравнения Фридмана: $a(t) \simeq a_{in}\exp[H(t - t_{in})]$. Получена искомая инфляционная асимптотика. Кинетическая энергия много меньше потенциальной, значит инфляция медленно катится вниз по потенциалу.

Параметры медленного скатывания

$$\epsilon_{i+1} = \frac{d\ln|\epsilon_i|}{dN} = \frac{1}{\epsilon_i}\frac{d|\epsilon_i|}{dN}$$

Здесь $\epsilon_0 = H_{in}/H$, $dN = d\ln a = Hdt$, N - число е-фолдов.

Длительность инфляционной стадии находится из уравнения:

$$\frac{d\phi_{SR}}{dN} \simeq -\frac{V_\phi}{3H^2}$$

Интегрируя:

$$dN_{SR} \equiv N_{end} - N_{in} = \int_{N_{in}}^{N_{end}} dN \simeq -\frac{1}{M_{Pl}^2}\int_{\phi_{in}}^{\phi_{end}} \frac{V}{V_\phi} d\phi$$

В ведущем порядке:

$$\epsilon_0^{LO} \simeq H_{in}\sqrt{\frac{3M_{Pl}^2}{V}}$$

$$\epsilon_1^{LO} \simeq \frac{M_{Pl}^2}{2}\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2$$

$$\epsilon_2^{LO} \simeq 2M_{Pl}^2\left[\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^2 - \frac{V_{\phi\phi}}{V}\right]$$

$$\epsilon_3^{LO} \simeq \frac{2M_{Pl}^4}{\epsilon_2^{SR}}\left[2\left(\frac{V_\phi}{V}\right)^4 - 3\frac{V_{\phi\phi}{V_\phi}^2}{V^3} + \frac{V_{\phi\phi\phi}V_\phi}{V^2}\right]$$

Возмущения при инфляции

Метрика с учетом возмущений:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2A)d\eta^2 + 2\partial_i B dx^i d\eta + [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E]dx^i dx^j\}$$

С учетом преобразования Фурье ($\nabla^2 \to -k^2$) уравнение для скалярных возмущений:

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{\phi\phi}\right)\delta\phi_k = -2V_\phi A_k + \dot{\phi}\left[\dot{A}_k + 3\dot{\psi}_k + \frac{k^2}{a^2}\left(a^2\dot{E}_k - aB_k\right)\right]$$

Другие ограничения:

$$3H\left(\dot{\psi}_k + HA_k\right) + \frac{k^2}{a^2}\left[\psi_k + H\left(a^2\dot{E}_k - aB_k\right)\right] = -\frac{1}{2M_{Pl}^2}\left[\dot{\phi}\left(\delta\dot{\phi}_k - \dot{\phi}A_k\right) + V_\phi\delta\phi_k\right]$$

$$\dot{\psi}_k + HA_k = \frac{\dot{\phi}}{2M_{Pl}^2}\delta\phi_k$$

Параметр Сасаки-Муханова:

$$Q_k = \delta\phi_k + \frac{\dot{\phi}}{H}\psi_k$$

Уравнение перепишется как

$$\ddot{Q}_k + 3H\dot{Q}_k + \left[\frac{k^2}{a^2} + V_{\phi\phi} - \frac{1}{a^3 M_{Pl}^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2}{H}\dot{\phi}^2\right)\right]Q_k = 0,$$

тогда

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)v_k = 0, \qquad z = a\sqrt{2\epsilon_1}M_{Pl},$$

то есть получили гармонический осциллятор.

Решение имеет вид:

$$v_k(\eta) = \sqrt{-\eta}[AJ_\upsilon(-k\eta) + BY_\upsilon(-k\eta)] = \sqrt{-\eta}[\alpha H_\nu^{(1)}(-k\eta) + \beta H_\nu^{(2)}(-k\eta)]$$

$$H_\nu^{(1)} = J_\upsilon + iY_\upsilon, \qquad H_\nu^{(2)} = J_\upsilon - iY_\upsilon$$

Фиксация констант через вакуум Банча-Дэвиса:

$$\lim_{\eta\to-\infty} v_k(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}$$

Асимптотики для функций Ханкеля:

$$\lim_{k\eta\to-\infty} H_\nu^{(1)}(-k\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{-k\eta}}e^{ik\eta}e^{i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{k\eta\to-\infty} H_\nu^{(2)}(-k\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{-k\eta}}e^{-ik\eta}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{\eta\to-\infty} v_k(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\left[\alpha e^{ik\eta}e^{i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} + \beta e^{-ik\eta}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}$$

$$v_k(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2}H_\nu^{(2)}(-k\eta)$$

$$z = C_1(-\eta)^{\frac{1}{2}-\nu} + C_2(-\eta)^{\frac{1}{2}+\nu} \;\; => \;\; z \propto (-\eta)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

При больших значениях времени $\lim\limits_{k\eta\to-\infty} H_\nu^{(2)}(-k\eta) = \frac{i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(-\frac{k\eta}{2}\right)^{-\nu}$

В этом пределе $v_k(\eta) = \frac{i\Gamma(\nu)}{\pi}\frac{\sqrt{-\eta}}{\pi}\left(-\frac{k\eta}{2}\right)^{-\nu}$, тогда для возмущений кривизны

$$\varsigma_k = \frac{v_k}{z} = \frac{i}{2M_{Pl}}\left(\frac{k_*}{k}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(-\eta_*)^{\frac{1}{2}}}{a_+\sqrt{\epsilon_{1+}}} = const$$

<u>При больших временах на больших масштабах возмущения кривизны постоянны.</u>

Отсев моделей на основе данных Planck

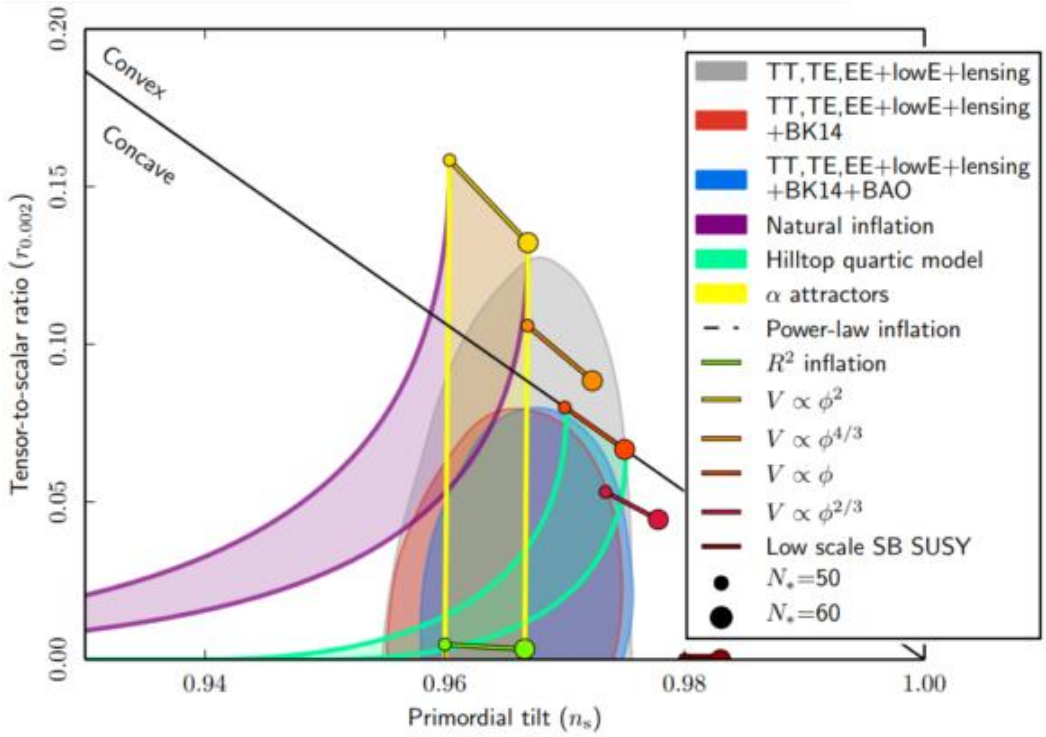


Рисунок 4.6 Отсев моделей на основе данных Planck. Планк 2018 выделил совместные 68% и 95% областей CL (при условии, что d ns / d ln k = 0) для спектрального индекса ns и отношения тензора к скалярному r при k = 0,002 Пдк 1 только от Планка и в сочетании с данными BK15 или BK15-BAO, по сравнению с теоретическими прогнозами выбранные (замедленные) инфляционные модели. Фото предоставлено: Planck collaboration.

Модели инфляции slow-roll. Типы моделей инфляций

Медленное скатывание: $|\epsilon_n| \ll 1$ для всех $n > 1$.

Супермедленное скатывание: $f = 1$ в уравнении

$$f = -\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = 1 + \frac{1}{3H\dot{\phi}}V_\phi \;\; => \;\; \dot{\phi}_{USR} \propto e^{-3N} \;\; => \;\; \epsilon_V = \frac{9}{4}(1-f)^2$$

Инфляция Старобинского (кусочно-линейная):

$$V(\phi) = \begin{cases} V_0 + \alpha(\phi - \phi_0) & for\ \phi < \phi_0 \\ V_0 + \beta(\phi - \phi_0) & for\ \phi > \phi_0 \end{cases}, \qquad where\ \beta > \alpha > 0$$

Кубический потенциал:

$$V(\phi) = V_0\left[1 + \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^3\right] \quad => \quad \begin{aligned} \epsilon_V &= \frac{9}{2}\frac{M_{Pl}^2}{\phi_0^2}\frac{(\phi/\phi_0)^4}{[1 + (\phi/\phi_0)^3]^2} \\ \eta_V &= 6\frac{M_{Pl}^2}{\phi_0^2}\frac{\phi/\phi_0}{1 + (\phi/\phi_0)^3} \end{aligned}$$

Типы моделей инфляции (классификация Ш. Таякавы):

1. Модели с большим начальным значением поля, при котором идет спуск к минимуму. Пример: хаотическая инфляция
2. Модели, в которых поле растет

Хаотическая инфляция

Определяется потенциалом $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2,\ or\ \ V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\phi^4$. Хаотической называется, так как начальные данные распределены хаотически. При квадратичном потенциале:

$$\phi \simeq \phi_i - \frac{mm_{pl}}{2\sqrt{3\pi}}t,$$

$$a \simeq a_i \exp\left[2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{m}{m_{pl}}\left(\phi_i t - \frac{mm_{pl}}{4\sqrt{3\pi}}t^2\right)\right]$$

Расширение экспоненциально, при росте второго члена в скобке расширение замедляется.

$$N \simeq 2\pi\left(\frac{\phi_i}{m_{pl}}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

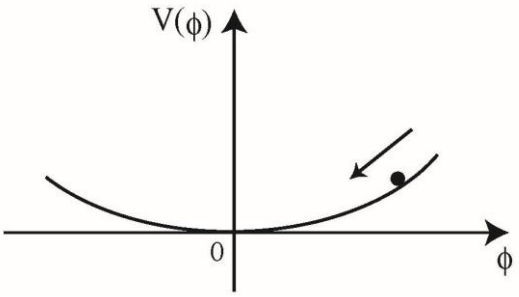


Рисунок 4.7 Схематическая иллюстрация потенциала модели хаотической инфляции. Это относится к классу модели "большого поля".

Натуральная инфляция

Определяется потенциалом $V(\phi) = m^4\left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right)\right]$

Параметры медленного скатывания имеют вид

$$\epsilon = \frac{m_{Pl}^2}{16\pi f^2}\left[\frac{\sin(\phi/f)}{1+\cos(\phi/f)}\right]^2$$

$$\eta = -\frac{m_{Pl}^2}{8\pi f^2}\frac{\cos(\phi/f)}{1+\cos(\phi/f)}$$

Длительность:

$$N = -\frac{16\pi f^2}{m_{Pl}^2}\ln\left[\frac{\sin(\phi_f/2f)}{\sin(\phi_i/2f)}\right]$$

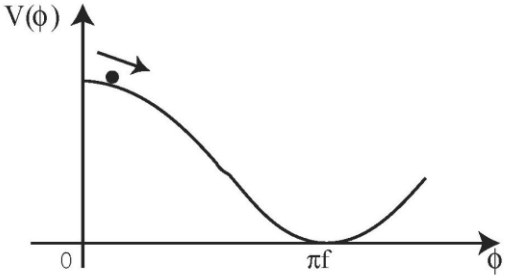


Рисунок 4.8 Схематическая иллюстрация потенциала модели естественной инфляции. Это относится к классу модели "малого поля".

Гибридная инфляция

Потенциал $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\chi^2 - \frac{M^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$

При большом значении поля:

$$V \simeq \frac{M^2}{4\lambda} + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Длительность

$$N \simeq \frac{2\pi M^2}{\lambda m^2 m_{Pl}^2}\ln\frac{\phi_i}{\phi_c}$$

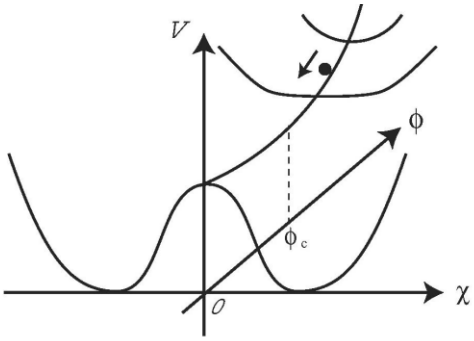


Рисунок 4.9 Схематическая иллюстрация потенциала гибридной (двойной) модели инфляции. Эта модель характеризуется множеством скалярных полей.

Пример применения: объяснение формирования чёрных дыр.

Вторичный разогрев

Стадия, которая наступает при достижении потенциалом минимума и когда начинается осцилляция

$$V(\phi) = \frac{1}{2n} m^2 m_{Pl}^2 \left(\frac{\phi}{m_{pl}}\right)^{2n}$$

Уравнение на поле: $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + [m^2 + \Pi(m)]\phi = 0$ – осциллятор с трением, что гарантирует выход из инфляции.

Проблемы теории инфляции. Её преимущества. Критика теории

Основные проблемы

- Происхождение инфлатона (теория инфляции не объясняет, откуда появилась гипотетическая элементарная частица, являющаяся квантом скалярного инфлятонного поля)
- Эволюция инфлатона (куда он пропал)
- Связь инфлатона с фундаментальной физикой (как получить из других частиц)
- Higgs inflation (механизм, с помощью которого получаются массивные поля при уменьшении масштаба энергии)
- String landscape (инфляционные поля из струн)
- Geometry (часть геометрии)
- Новая физика

«The main aim is to obtain modern cosmology as a solution of M-theory»

(S.W.Hawking, 2001)

Положительные моменты

1. Благодаря крайне высоким темпам расширения на инфляционной стадии разрешается проблема крупномасштабной однородности и изотропности Вселенной: весь наблюдаемый объём Вселенной оказывается результатом расширения единственной причинно-связанной области.
2. На инфляционной стадии радиус пространственной кривизны увеличивается настолько, что современное значение плотности автоматически оказывается весьма близким к критическому, то есть, разрешается проблема плоской Вселенной.
3. В ходе инфляционного расширения должны возникать флуктуации плотности с такой амплитудой и формой спектра (плоский спектр возмущений), что в результате возможно последующее развитие флуктуаций в наблюдаемую структуру Вселенной при сохранении крупномасштабной однородности и изотропности, то есть, разрешается проблема крупномасштабной структуры Вселенной.

Критика теории инфляции

1. Проблема начальных значений (1): Никаких фундаментальных обоснований того, что возмущения плотности на доинфляционной стадии должны быть именно такими малыми, чтобы после инфляции возникала наблюдаемая степень однородности, эта теория не предлагает.
2. Проблема начальных значений (2): Пространственная кривизна: очень сильно уменьшается при инфляции, но ничто не мешало ей до инфляции иметь настолько большое значение, чтобы всё-таки проявляться на современном этапе развития Вселенной.
3. Не обнаружены реликтовые гравитационные волны, предсказываемые теорией инфляции и служащие дополнительным источником горячих и холодных пятен реликтового излучения.

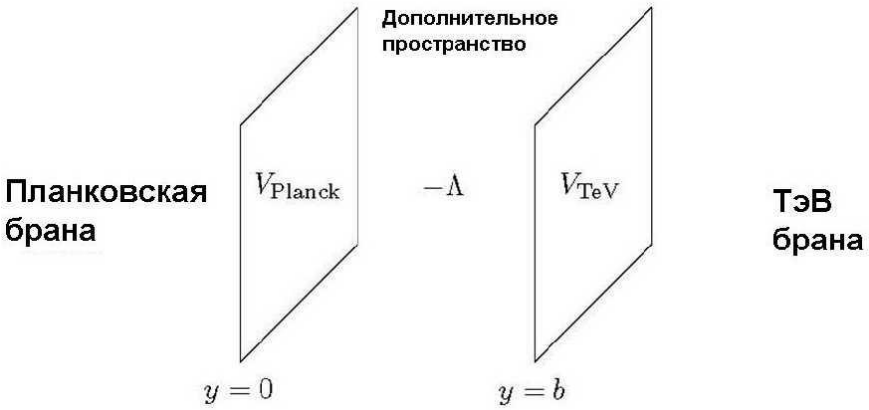


Рисунок 4.10 Критика теории инфляции. Ecpirotic Universe Роджер Пенроуз.

Лекция №5. Теория ранней Вселенной. Свойства и термодинамика черных дыр

Е-фолд. Образование крупномасштабной Вселенной

Инфляция – модель ускоренного расширения Вселенной на самых ранних этапах революции. Она началась при $t = 0$ и закончилась к t_e, то есть Вселенная увеличилась в $a(t_e)$ раз. К настоящему времени можно принять постоянную Хаббла как $H_{end} \sim \text{const} \sim 10^{13}$ GeV.

Масштабный фактор на инфляционной стадии можно записать как $a(t) \cong a(t_{in}) \exp[H_{end}(t_{end} - t_{in})]$. Введем величину е-фолд N:

$$N \equiv \ln\left[\frac{a(t)}{a(t_{in})}\right]$$

Если известно N, то это означает, что Вселенная расширилась в e^N раз.

Литература, рекомендуемая к теме:

1. Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, «Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва», 2006
2. В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева, А. М. Малиновский, “Образование крупномасштабной структуры Вселенной”, УФН, 181:10 (2011), 1017–1040; Phys. Usp., 54:10 (2011), 983–1005

Красное смещение по сути своей является значением масштабного фактора, но записано иначе. Современное значение масштабного фактора принято равным 1. Зная метрику

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2))$$

можем получить $a \equiv (1+z)^{-1}$, z – красное смещение.

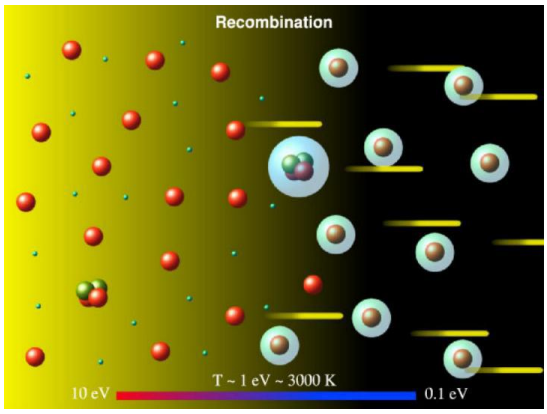


Рисунок 5.1 Процесс образования структур из частиц

Квазифридмановские уравнения

Если рассматривать обычные космологические уравнения (изотропные и однородные), то не получится решение. Необходимо задать отклонение от «идеализированной» системы и рассмотреть, что и как меняется. Одним из математических описаний зарождения структур является слабонеоднородная Вселенная, иначе говоря, обобщенные уравнения Фридмана:

$$H_\nu^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon - \frac{\varkappa}{b^2}, \qquad \text{где } H_\nu = H_\nu(t,\mathbf{x}) \equiv \frac{\dot{b}}{b} = \frac{1}{3}u_\mu^\mu$$

$b = b(x,t)$ – локальный масштабный фактор

ε – полная плотность энергии

u^μ – полная 4-скорость материи

$\varkappa = \varkappa(t,\mathbf{x}) \equiv \frac{2}{3}\Delta q$ внутренняя кривизна пространства

Если рассмотреть изменение плотности со временем, то оно подчинено закону сохранения энергии

$$\dot{\varepsilon} + 3H_\nu(\varepsilon + p_\nu) = 0$$

Найдём решение квазифридмановских уравнений. Предполагая, что q известно и мало, введём новые переменные

$$H_\nu = H_c + \frac{\Delta\Phi - \Delta q}{3aH}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_c + \frac{\Delta\Phi}{4\pi G a^2}, \qquad p_\nu = p_c + \frac{\Delta S}{12\pi G a^2}$$

Ф, S - произвольные малые функции координат, связанные соотношением

$$\Phi = \frac{H}{a}\int a(\gamma q - S)dt$$

Чтобы идейная поправка в квазифридмановском уравнении стала не только математически, но и физически обоснованной, необходимо найти связь с физическими процессами. Можно предположить, что физическая причина возникновения нелинейной структуры – гравитационная неустойчивость тёмной материи. Тогда наиболее интенсивное развитие есть <u>пострекомбинационный период</u>.

Модель поздней Вселенной: виды материи

- Нерелятивистская материя “m” с плотностью, обратно пропорциональной локальному объему.
- Тёмная энергия “E” неизменной плотности.

Если такие предположения верны, то средняя скорость звука равна нулю (эквивалентно отсутствию «течений» в пространстве, а q и χ не зависят от времени.

Умножаем уравнение Фридмана $H_\nu^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon - \frac{\varkappa}{b^2}$ на $\left(\frac{\dot{b}}{H_B}\right)^2$ и обезразмериваем:

$$\left(\frac{\dot{b}}{H_E}\right)^2 = f^2(b) - \hat{\varkappa}(\mathbf{x})$$

Здесь

$$H_E = H_0\sqrt{\Omega_E} \simeq (5\ \text{Гпк})^{-1}$$

$$f^2(b) \equiv \frac{8\pi G b^2}{3H_E^2}(\rho_m + \rho_E) = \left(\frac{c_m}{b} + b^2\right) \gtrsim 1$$

$$q = q_0(\mathbf{x}) \equiv \frac{3}{2}H_E^2\hat{q}, \qquad \hat{\varkappa} = \hat{\varkappa}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\varkappa}{H_E^2} = \Delta\hat{q}$$

$$f(b)|_{min} \approx 1 \text{ при } {b_{min}}^{-1} \approx 1.7$$

Нас интересуют области с локальной нормированной кривизной $\hat{\varkappa}(\mathbf{x}) < 1$.

В этих областях плотность материи монотонно убывает со временем, включая как сверхскопления $\chi > 0$, так и космологические пустоты $\chi < 0$. В точке $\chi = 0$ объемный и фоновый масштабные факторы совпадают (анизотропия расширения может быть большой). Зададим $a(t)$ через красное смещение:

$$b = a(t) \equiv (1+z)^{-1}, H \equiv H_E(f(a)/a)$$

где $f(a)$ – фактор роста Хаббловской компоненты скорости.

$V_H = f(H_E, x)$ - имеется нулевой порядок разложения.

В общем случае в линейном порядке

$$b = a\left(1 - \frac{1}{3}\hat{g}\hat{\varkappa}\right), \delta_m = \hat{g}\hat{\varkappa},$$

$$H_\nu = H\left(1 - \frac{1}{3}\hat{h}\hat{\varkappa}\right), \hat{h} \equiv \frac{\nu}{f} = \frac{\dot{\hat{g}}}{H}$$

Здесь $\delta_m = \delta$ – возмущение плотности, $\hat{g} = \hat{g}(a), \nu = \nu(a)$ – факторы роста возмущений скорости и пекулярной плотности.

$$\hat{g} \equiv \frac{\gamma H^2}{c_m}a = \frac{1}{c_m}(a - H\int_0^\infty \frac{da}{H})$$

$$\nu \equiv \frac{3}{2} H_E \nu = \frac{3H_E}{2a^2} \int_0^\infty \frac{da}{H}$$

$$\begin{cases} a \ll 1: \hat{g} \simeq \dfrac{3a}{2}, \nu \simeq \sqrt{a}, \\ a \gg 1: \hat{g} = \hat{g}_{max} \simeq 1{,}56, \nu \simeq \dfrac{3}{2a}, \\ a = 1: \hat{g} \simeq 1{,}13, \nu \simeq 0{,}67 \end{cases}$$

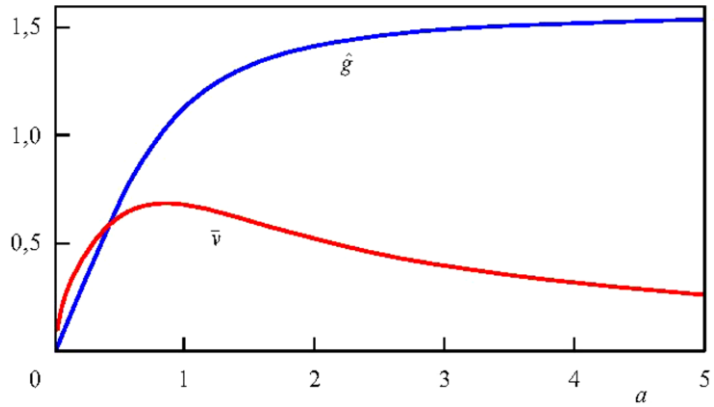


Рисунок 5.2 Факторы роста плотности $\hat{g}(a)$ и пекулярной скорости $\bar{v}(a)$

Полученные уравнения описывают квазихаббловские анизотропные течения. Максимум виден при z ≈ 0.2, причём современная эпоха – эпоха максимальных пекулярных скоростей. Функция $\check{h}(a)$ в данном случае определяет отклонение локального хаббловского фактора от его фонового значения.

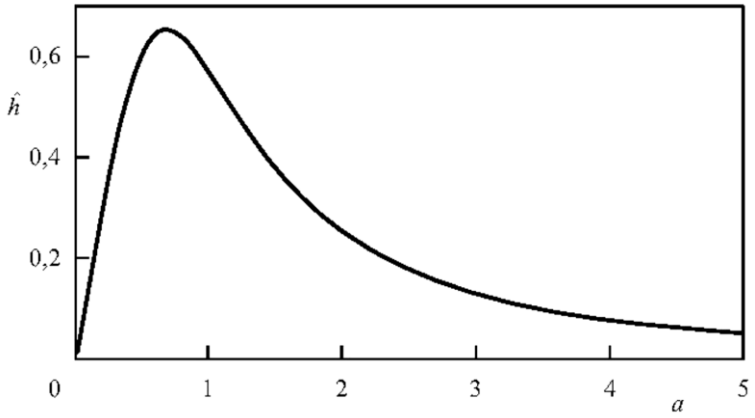


Рисунок 5.3 Функция $\hat{h}(a)$,задающая искажение хаббловского потока

В данной модели происходит формирование крупномасштабной структуры Вселенной в период от 1 до 22 млрд лет от Большого взрыва. Дальнейшее развитие модели влечёт за собой учёт других факторов, в частности, анизотропных холодных течений.

Свойства черных дыр. Эффект Пенроуза

Рассмотрим локальные решения, в частности чёрные дыры. Теорема Уиллера гласит: «Черная дыра не имеет волос», где волосы есть безмассовое скалярное поле, которое имеет вид:

$$S = const \int d^4x\sqrt{-g}\left[R + \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right]$$

Варьируем действие по скалярному полю:

$$\delta S/\delta\phi: \quad \phi'' = 0, \qquad \phi' = 0, \qquad \phi = const$$

Откуда получаем «no-hair theorem».

Стационарная черная дыра – черная дыра, постоянная во времени, иначе говоря, метрика не зависит от временной координаты.

Эффект Пенроуза

При вращении ЧД векторное поле ξ_μ становится пространственно-подобным во внешней области. Область $[\xi, \xi] > 0$ называется эргосферой. Стационарность ЧД означает, что работает теорема Неттер, откуда очевидно сохранение энергии ε: $\varepsilon = -p_\mu\xi_\mu$. Для частиц вне эргосферы $\varepsilon \geq 0$, внутри возможно $\varepsilon < 0$. Такая частица может уйти, только провалившись под горизонт.

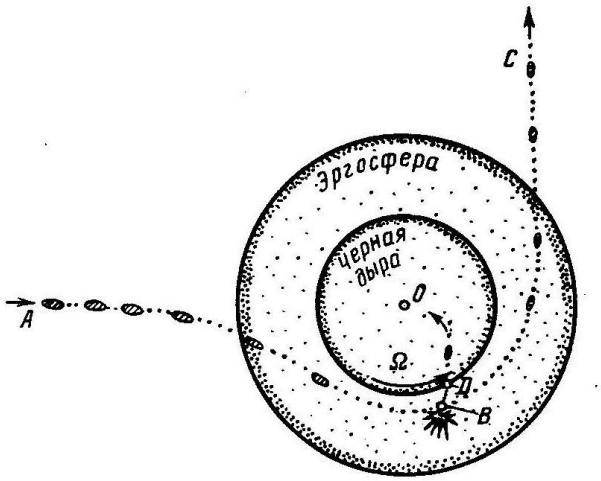


Рисунок 5.4 Эффект Пенроуза

Извлечение энергии из черной дыры

$$\left(\varepsilon_0 p_0^\mu\right) \to \left(\varepsilon_1 p_1^\mu\right) + \left(\varepsilon_2 p_2^\mu\right)$$

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$$

$$\varepsilon_0 = p_0^\mu \xi_\mu$$

$$\varepsilon_1 = p_1^\mu \xi_\mu = \varepsilon_0 - \varepsilon_2 > \varepsilon_0$$

Для частицы в поле черной дыры Керра

$$\varepsilon_i = -p_i^\mu \xi_{(t)\mu} - \text{энергия}$$

$$j_i = p_i^\mu \xi_{(\phi)\mu} - \text{ угловой момент}$$

На горизонте

$$I^\mu = \xi^\mu_{(t)} + \Omega^H \xi^\mu_{(\phi)} - \text{ световой, касательный;}$$

$$\Omega^H - \text{ угловой момент чёрной дыры.}$$

$$0 \geq I^\mu p_{2\mu} = -\varepsilon_2 + \Omega^H j_2$$

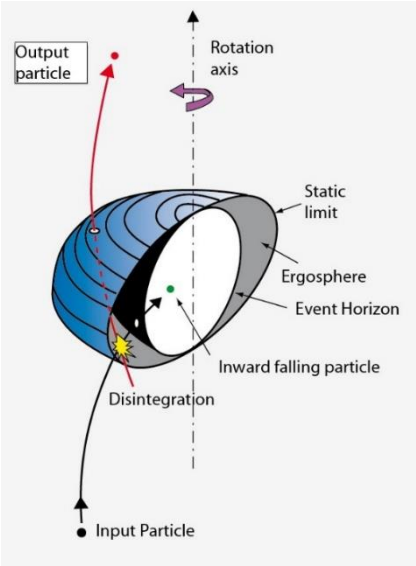


Рисунок 5.5 Извлечение энергии из ЧД

При падении внутрь чёрной дыры несёт отрицательный момент $j_2 \leq \varepsilon_2/\Omega^H$. Если $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = -\varepsilon_2 < 0, \rightarrow j_1 - j_0 = -j_2 \geq -\varepsilon_2/\Omega^H \geq 0$. При поглощении частицы меняются параметры чёрной дыры:

$$\delta M = \varepsilon_2, \qquad \delta J = j_2$$

$$\delta M \geq \Omega^H \delta J$$

В предельном случае $\delta M/\Omega^H - \delta J = 0$

$$\Omega^H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{J}{2(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}$$

Полный дифференциал

$$\tilde{A} = M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}$$

$$M_{ir} = \sqrt{\tilde{A}/2} - \text{ неприводимая масса, связана с размером}$$

$$M^2 = M_{ir}^2 + \frac{1}{4}\frac{J^2}{M_{ir}^2} \geq M_{ir}^2$$

$$\Delta M_{max} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) M_0 \approx 0.29 M_0$$

Частица со спином s, зарядом e, энергией ε падает на чёрную дыру по оси симметрии. При падении в ЧД $\delta Q = e, \delta J = \delta s, \delta M \leq \varepsilon$. Разложение по собственным функциям операторов

$$\xi^{\mu}_{(t)}\partial_{\mu} = \partial_t, \xi^{\mu}_{(\phi)}\partial_{\mu} = \partial_{\phi}$$

$$\phi_A \propto f_A(r,\theta)e^{-i\omega t + im\phi}$$

При взаимодействии волны ϕ_A с ЧД происходит изменение массы δM, углового момента δJ и заряда δQ

$$\delta J = \frac{m}{\omega}\delta M, \delta Q = \frac{e}{\hbar\omega}\delta M, \delta M = 1 - \frac{m\Omega^H}{\omega} - \frac{e\Phi^H}{\hbar\omega}$$

Для мод $\hbar\omega < \hbar\omega\Phi^H + e\Phi^H$, удовлетворяющих условию процесс рассеяния приводит к уменьшению массы черной дыры. При выполнении этого условия рассеянная волна обладает энергией, большей, чем падающая, т.е. происходит усиление падающей волны. Это явление получило название «суперрадиация». Реальные коэффициенты усиления данного явления:

- для электромагнитного поля максимальное усиление 4.4%
- для гравитационной волны максимальное усиление 138%

Термодинамика чёрных дыр

Литература: И. Д. Новиков, В. И. Фролов «Физика чёрных дыр».

Сферически-симметричные, асимптотически-плоские статические черные дыры:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Метрика Шварцшильда $\Delta = 1 - \frac{2M}{r}$ – все характеристики находятся, зная только массу. Метрика Рейсснера-Нордстрема $\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ – характеристики находятся, зная массу и заряд.

Метрика Керра (если известна масса и угловой момент) - вращающаяся незаряженная чёрная дыра:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right)dt^2 - \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\right)dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(\frac{\omega}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 + 2\left(\frac{r_g r a}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\, dt d\varphi$$

$$r_g = 2MG, \qquad J = Ma, \qquad \Delta = r^2 - 2r_g r + a^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \qquad \omega = (r^2 + a^2)\rho^2 + 2r_g r a^2 \sin^2\theta$$

Метрика Керра-Ньюмена (если известна масса, заряд и угловой момент) - вращающаяся заряженная чёрная дыра

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(\frac{\rho^2}{\Delta}\right) dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(\frac{\omega}{\rho^2}\right) \sin^2\theta \, d\varphi^2 + 2\left(\frac{r_g r a}{\rho^2}\right) \sin^2\theta \, dt d\varphi$$

$$r_g = 2MG, \qquad J = Ma, \qquad \Delta = r^2 - 2r_g r + a^2 + Q^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta\,, \qquad \omega = (r^2 + a^2 + Q^2)\rho^2 + 2r_g r a^2 \sin^2\theta$$

Характеристики чёрной дыры:

- Площадь горизонта A
- Поверхностная гравитация κ – ускорение свободного падения на поверхности тела. $\kappa = M/r^2$

Аналогиями могут послужить энтропия (вместо площади горизонта) и температура (поверхностная гравитация).

Начала термодинамики и законы физики чёрных дыр

0е начало

Для любой термодинамической системы существует состояние термодинамического равновесия, которого она (при фиксированных внешних условиях) с течением времени самопроизвольно достигает.

Для ЧД: В результате коллапса формируется стационарная черная дыра. Сформировавшуюся черную дыру характеризует ее поверхностная гравитация, постоянная по всему горизонту черной дыры.

1е начало

Бесконечно малое изменение внутренней энергии dE происходит за счет того, что система поглощает количество тепла δQ, совершает работу δW и, если число частиц в системе N не фиксировано, за счет изменения его на величину dN:

$$dE = \delta Q - \delta W + \mu dN = T\delta S - pdv + \mu dN$$

Для ЧД: Любые два соседние стационарные осесимметричные решения с материей в виде идеальной жидкости, с круговым током связаны следующим соотношением

$$\delta M = (\kappa/8\pi)\delta A + \Omega\delta J + \Phi\delta Q$$

2е начало

Для любой равновесной (квазиравновесной) термодинамической системы существует однозначная функция термодинамического состояния S = S (θ, x, N), называемая энтропией, такая, что ее полный дифференциал

$$dS = \delta Q/\theta$$

Для ЧД: Площадь горизонта каждой черной дыры в отдельности не уменьшается. Этот закон еще носит название теоремы площадей Хокинга

$$\delta A \geq 0, \qquad A_3 \geq A_1 + A_2$$

3е начало

Аналогично тепловой теореме Нернста (1906): всякий термодинамический процесс, протекающий при фиксированной температуре, сколь угодно близкой к нулю, не должен сопровождаться изменением энтропии S, то есть нулевая изотерма должна совпадать с предельной адиабатой. Следствием тепловой теоремы Нернста является факт недостижимости абсолютного нуля температур посредством конечного числа операций.

Для ЧД: Никаким способом, при любой степени идеализации, невозможно уменьшить поверхностную гравитацию до нуля посредством конечного числа операций. Не имеет строгого математического обоснования.

Соответствие величин термодинамики и физики черных дыр

Пусть температура T - поверхностная гравитация к, энтропия S - площадь горизонта черной дыры A, тогда $T = \epsilon\kappa, S = \eta A$.

Температура ЧД ≥ 0, то есть возможен поток энергии от чёрной дыры. Значит возможно и её испарение. Спектр излучения АЧТ – тепловой.

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \qquad \eta = ¼$$

Формула Бекенштейна-Хокинга

$$S_{bh} = S_{BH} = \frac{A}{4}$$

Для чёрной дыры Керра-Ньюмена

$$r_+ = M + (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2} = M\left[1 + \left(1 - a_\mp^2 - Q_\mp^2\right)^{1/2}\right]$$

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi M^2\left[2 - Q_\mp^2 + 2\left(1 - a_\mp^2 - Q_\mp^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\kappa = 4\pi\frac{r_+ - M}{A} = \frac{1}{2}M^{-1}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}Q_*^2\right)(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{-1/2}\right]^{-1}$$

$$\Omega = 4\pi\frac{a}{A} = a_* M^{-1}\left[2 - Q_\mp^2 + 2\left(1 - a_\mp^2 - Q_\mp^2\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\Phi = 4\pi\frac{Qr_+}{A} = \frac{Q_*\left(1 + (1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}\right)}{2 - Q_*^2 + 2(1 - a_*^2 - Q_*^2)^{1/2}}$$

Спектр излучения имеет вид («+» - фермионы, «-» – бозоны):

$$N_{jwlmp} = \Gamma_{jwlmp} \frac{1}{e^{2\pi\kappa^{-1}(\omega - m\Omega - q_i\Phi)} \pm 1}$$

После суммирования по типам частиц

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = -\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} \omega N_{jwlmp} d\omega,$$

$$\frac{dJ_{rad}}{dt} = -\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} m N_{jwlmp} d\omega,$$

$$\frac{dQ_{rad}}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} q_j N_{jwlmp} d\omega,$$

$$\frac{dS_{rad}}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,l,m,p} S_{jwlmp} d\omega$$

Скорость испарения чёрной дыры:

$$-\frac{dM}{dt} = 4 * 10^{-5} \left(\frac{m_{Pl}}{M}\right)^2 \frac{m_{Pl}}{t_{Pl}} f$$

$$f = 1.023 n_{1/2} + 0.420 n_1 + 0.048 n_2$$

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = 10^{-5} M^{-2} (8.1830 n_{1/2} + 3.3638 n_1 + 0.3836 n_2)$$

$$\frac{dS_{rad}}{dt} = 10^{-3} M^{-1} (3.3710 n_{1/2} + 1.2684 n_1 + 0.1300 n_2)$$

$$\frac{dS_{bh}}{dt} = -10^{-3} M^{-1} (2.0566 n_{1/2} + 0.8454 n_1 + 0.0964 n_2)$$

$$\frac{dM}{dt} = const_1 * M^{-2}, \qquad dJ/dt = const_2 * M^{-1}$$

Оценка скорости испарения реальных чёрных дыр:

$$-\frac{dM}{dt} = const * M^{-2}$$

После интегрирования $M = M(t)$ и после подстановки $t \approx 15 \cdot 10^9$ лет получим, что $M \approx 10^{15}$ грамм.

Обобщенное 2е начало

Испарение приводит к тому, что масса чёрной дыры уменьшается, следовательно, уменьшается площадь горизонта, что приводит к нарушению второго начала (площадь A не может уменьшаться). Тогда вводят обобщенное 2е начало: энтропия чёрной дыры и обобщенная величина $A(S_{bh} + S_{ext})$ никогда не уменьшаются.

Лекция №6. Чёрные дыры. Гравитационный коллапс. Кротовая нора.

Термодинамика черных дыр

Температура чёрной дыры больше нуля, значит к ней применима концепция абсолютно чёрного тела, будет идти излучение от более нагретого тела (чёрной дыры) к менее нагретому (окружающему пространству). Такое излучение может нести тепловой характер, откуда получается формула Хокинга, откуда возникает **идея испарения чёрных дыр**, которая имеет место быть для чёрных дыр малой массы.

Вспомним квантовую теорию, в частности, понятие унитарность: если на вход получаем волновую функцию, на выходе – так же волновую функцию. Переход из *чистого состояния* описываемой волновой функции в *смешанное состояние* матрицы плотности *нарушает унитарность* квантовой механики, в рамках которой такие процессы запрещены. Возникает **информационный парадокс**.

Из-за предположения об унитарности квантовой гравитации информация не должна исчезать при формировании и испарении черной дыры.

Каким образом информацию можно извлечь из черной дыры: как излучение может «туннелировать» из черной дыры во внешний мир. Предположение, что это излучение может "вынести" информацию наружу из черной дыры, необоснованно. Информация о предмете, упавшем в черную дыру, никуда не девается, но дешифровать ее нельзя. Из излучения, испущенного черной дырой, нельзя вновь собрать предмет, который был ею поглощен.

Сам факт, что информация сохраняется, важен при рассмотрении макроскопических процессов с участием виртуальных черных дыр.

Альтернативный способ вывода формулы скорости испарения чёрной дыры

- Maulik K. Parikh, Frank Wilczek «Hawking Radiation as Tunneling», 2000

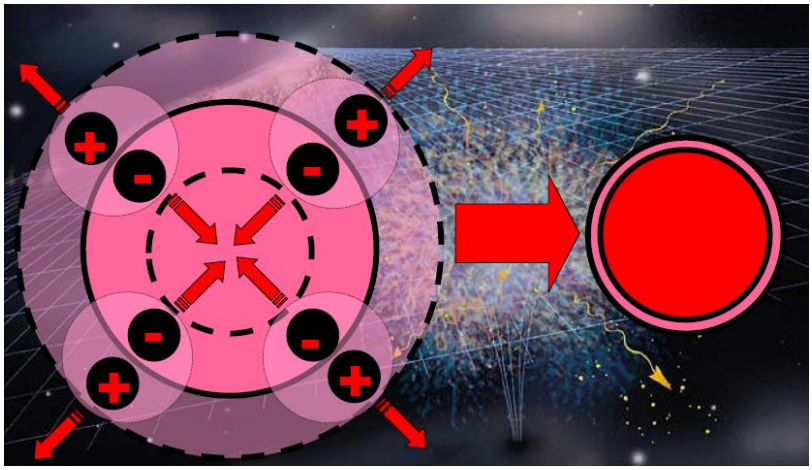


Рисунок 6.1 Испарение чёрной дыры

Используем координаты Пейнлеве (используются в модели с отсутствием сингулярности на горизонте). С помощью преобразования t осуществляется переход к координатам

$$t = t_s + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Заметим, что не существует сингулярность при $r = 2M$. Уравнение радиальных геодезических, согласно которому будут двигаться частицы в окрестности чёрной дыры, имеет вид

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}$$

При замене $M \to M - \omega$ метрика примет следующий вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2(M-\omega)}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2(M-\omega)}{r}} dtdr + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Вспомним, как описывается процесс испарения, иначе говоря, процесс туннелирования через потенциальный барьер. Мнимая часть действия:

$$Im\, S = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} p_r dr = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_0^{p_r} dp_r{}' dr$$

Используя уравнения Гамильтона, получим:

$$Im\, S = Im \int_M^{M-\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{\dot{r}} dH = Im \int_0^{+\omega} \int_{r_{in}}^{r_{out}} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}}} (-d\omega')$$

Затем используем технику вычетов, заменяем $\omega \to \omega - i\epsilon$:

$$Im\, S = +Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} \int_M^{M-\omega} \frac{dM'}{1 - \sqrt{\frac{2M'}{r}}} dr = Im \int_{r_{in}}^{r_{out}} -\pi r dr$$

$$r_{in} = 2M, \qquad r_{out} = 2(M - \omega)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Используем феймановскую деформацию контура $\omega' \to \omega' + i\epsilon$:

$$Im\, S = Im \int_0^{-\omega} \int_{r_{out}}^{r_{in}} \frac{dr}{-1 + \sqrt{\frac{2(M+\omega')}{r}}} d\omega' = +4\pi\omega \left(M - \frac{\omega}{2}\right)$$

Получим скорость испарения. Вероятность излучения при подстановке $Im\, S$

$$\Gamma \propto e^{-2ImS} = e^{-8\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right)}$$

Считая спектр излучения, получаем формулу Планка

$$\rho(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|T(\omega)|^2}{e^{+8\pi M\omega} - 1}$$

После интегрирования получим

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dt}(M)$$

Замечание

В статье T. Pilling, *Tunneling derived from Black Hole Thermodynamics*, Phys.Lett.B (2008) v. 660, p. 402 (QUARKS-2008) показано, что приведенный метод может давать ошибку в **2** раза в численном коэффициенте.

Кротовые норы

Кротовая нора — это неустойчивый случай черной дыры, у которой вместо начальной сингулярности какая-то горловина, вместо горизонта – горловина.

Литература: А.А. Шацкий, И.Д. Новиков, Н.С. Кардашев «Динамическая модель кротовой норы и модель Мультивселенной»

Метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Введём замену $u^2 = r^2 - 2m$ (мост Эйнштейна-Розена)

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 - 2m)^2 d\Omega^2$$

Если сделать еще одну замену переменных, то получим метрику проходимой кротовой норы (R – новая радиальная координата, НЕ скалярная кривизна):

$$ds^2 = dt^2 - dR^2 - (R^2 + q^2) d\Omega^2$$

Необходима экзотическая материя, где $G_{ij} = T_{ij}$.

Кротовая нора существует только при определенных условиях. Устойчивость кротовой норы достаточно условна, подобрав параметры, можно добиться того, чтобы время неустойчивости кротовой норы было **сравнимо с временем жизни Вселенной**, что указывает на возможность устойчивости.

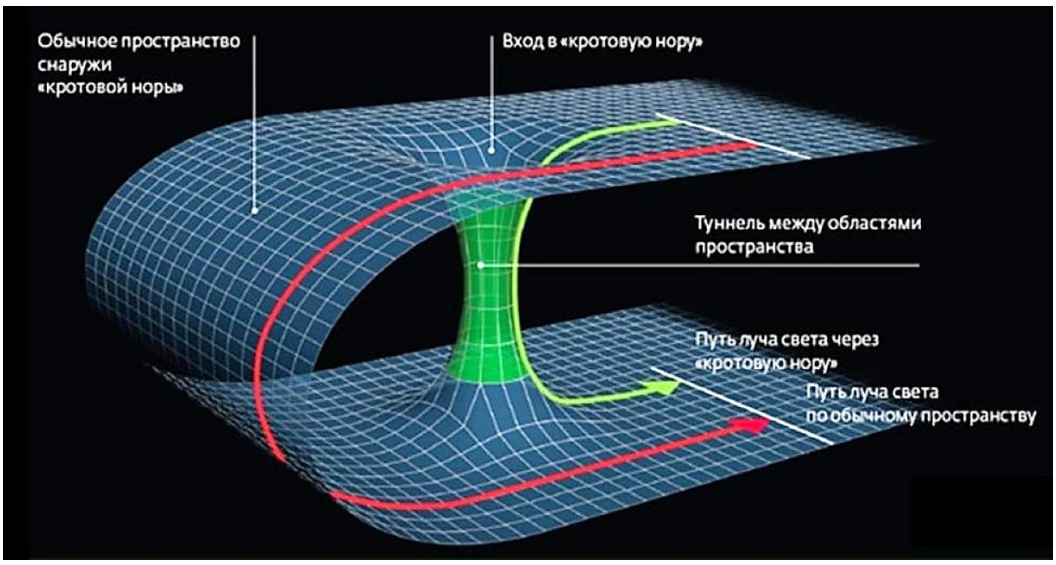


Рисунок 6.2 Двумерная модель кротовой норы

Как выглядит решение, если кротовая нора существует?
Анзац метрики

$$ds^2 = dt^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2 d\Omega^2$$

$$r = r(R,t), \lambda = \lambda(R,t) - \text{метрические функции}$$

Уравнения поля в присутствии Λ

$$8\pi T_t^t = 8\pi\varepsilon + \frac{q^2}{r^4} + \Lambda = -\exp(-\lambda)\frac{2rr_{RR} + r_R^2 - rr_R\lambda_R}{r^2} + \frac{rr_t\lambda_t + r_t^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}, \quad (1)$$

$$8\pi T_R^R = \frac{q^2}{r^4} + \Lambda = \frac{2rr_{tt} + r_t^2}{r^2} - \frac{\exp(-\lambda)\, r_R^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}, \quad (2)$$

$$8\pi T_t^R = 0 = \exp(-\lambda)\frac{2r_{Rt} - r_R\lambda_t}{r}, \quad (3)$$

$$8\pi T_\theta^\theta = 8\pi T_\varphi^\varphi = -\frac{q^2}{r^4} + \Lambda = -\frac{\exp(-\lambda)\,(2r_{RR} - r_R\lambda_R) - 2r_{tt} - r\lambda_{tt} - r\,\lambda_t^2/2 - r_t\lambda_t}{2r} \quad (4)$$

Интегрируем по времени (3):

$$e^{-\lambda} r_R^2 = F_1(R) \tag{5}$$

На горловине кротовой норы $r_R = 0, \quad F_1(R) = 0$. Подставляем (5) в (2):

$$\frac{q^2}{r^2} + \Lambda r^2 = \frac{(r r_t^2)_t}{r_t} - F_1 + 1$$

Интегрируем по времени

$$\frac{q^2}{r} + \frac{\Lambda r^3}{3} + r r_t^2 + (1 - F_1) r = F_2(R)$$

$F_1(r)$ и $F_2(R)$ определяют начальные данные. λ_t и λ_{tt} из (3) получаем (4)

$$\left[\frac{q^2}{r^2} + \Lambda r^2 + e^{-\lambda} r_R^2 - r_t^2 - 2 r r_{tt}\right]_R = 0$$

Умножаем (1) на $r^2 r_R$, выражаем λ_t из (3)

$$8\pi\varepsilon r^2 r_R + \left[\frac{\Lambda r^3}{3} - \frac{q^2}{r} - (1 - F_1) r - r r_t^2\right]_R = 0$$

Интегрируем от 0 до R, учтя, что $F_1(0) = 0$

$$\int_0^R 8\pi\varepsilon r^2 r_R dR + \frac{\Lambda r^3}{3} - \frac{q^2}{r} - r(1 - F_1) - r r_t^2 = -\frac{q^2}{r_0} + \frac{\Lambda {r_0}^3}{3} - r_0 - r_0 {r_0}_t^2$$

Подставляя $r r_t^2$

$$\int_0^R 8\pi\varepsilon r^2 r_R dR = F_2(R) - \frac{q^2}{r_0} + \frac{\Lambda {r_0}^3}{3} - r_0 - r_0 {r_0}_t^2$$

Производная по R дает интеграл движения

$$8\pi\varepsilon r^2 r_R = \frac{dF_2}{dR}$$

Начальное распределение скорости $r_t^2|_{t=0} = 0$. Вводим избыток потенциала

$$s(r_i) \equiv \frac{1}{r_i}\int_0^R 8\pi(\varepsilon_i - \varepsilon_{di}) {r_i}^2 {r_i}_R dR = \frac{1}{r_i}\int_q^{r_i} 8\pi\varepsilon_i {r_i}^2 dr_i + 2\frac{q}{r_i}\left(1 - \frac{q}{r_i}\right)$$

Тогда

$$F_1 = 1 - s - \frac{q^2}{{r_i}^2} - \frac{\Lambda}{3}\left({r_i}^2 - \frac{q^3}{r_i}\right)$$

$$F_2 = r_i\left(s + 2\frac{q^2}{{r_i}^2} - \frac{\Lambda q^3}{3r_i}\right)$$

В начальный момент (при $t = 0$)

$$r_{tt} = -\frac{s}{2r_i} + \frac{\Lambda r_i}{3} + \frac{\Lambda q^3}{6r_i}$$

Рассмотрим $\Lambda = 0$. Критерий отсутствия горизонта $V < 1$ для скорости пыли

$$V^2 \equiv \frac{r_t^2 \exp(\lambda)}{r_R^2} = \frac{r_t^2}{F_1} = \frac{(s + 2q^2/r_i^2)\, r_i/r - s - q^2/r_i^2 - q^2/r^2}{1 - s - q^2/r_i^2}$$

Образование горизонта произойдет, если

$$s > 2\frac{q}{r_i}\left(1 - \frac{q}{r_i}\right)$$

То есть **возможно создание горловины**.

Гравитационный коллапс

Гравитационный коллапс пылевидной сферы

Метрика сферически-симметричного пространства

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)}dR^2 - r^2(\tau,R)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

Уравнения Эйнштейна

$$-e^{-\lambda}r^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{r}(2r - r\lambda) + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + 2\frac{\ddot{r}}{r} = 0$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{r^2}(2r\dot{r} + r^2 - r\dot{r}\lambda) + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\lambda + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\varepsilon$$

$$2\dot{r} - \dot{\lambda}r = 0$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$e^{\lambda} = \frac{r^2}{1 + f(R)}$$

Подставим во второе уравнение

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0$$

Первый интеграл

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$$

$$\tau = \pm \frac{dr}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}}$$

$$r = \frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta - 1), \qquad \tau_0(R) - \tau = \frac{1}{2}\frac{F}{f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) \quad \text{при } f > 0$$

$$r = -\frac{F}{2f}(1 - \cos\eta), \qquad \tau_0(R) - \tau = \frac{1}{2}\frac{F}{(-f)^{3/2}}(\eta - \sin\eta) \quad \text{при } f < 0$$

При $f = 0$

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{4}F(\tau_0(R) - \tau)^{2/3}}$$

Критическая плотность материи

$$8\pi k\varepsilon = \frac{F'}{r'r^2}$$

Гравитационный коллапс в более общем случае

Метрика

$$ds^2 = -\alpha^2(r,t)dt^2 + a^2(r,t)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Уравнения поля

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{\alpha}{a}\Pi\right)', \dot{\Pi} = \left(\frac{\alpha}{a}\Phi\right)' + \frac{\alpha a}{r^2}W(1 - W^2)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{1}{r}\left(\Phi^2 + \Pi^2 + \frac{a^2}{2r^2}(1 - W^2)^2\right)$$

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{a^2 - 1}{2r} + \frac{1}{r}\left(\Phi^2 + \Pi^2 - \frac{a^2}{2r^2}(1 - W^2)^2\right)$$

$$W(r,t) \equiv \pm 1 + \int_0^r \Phi(\tilde{r}, t) d\tilde{r}$$

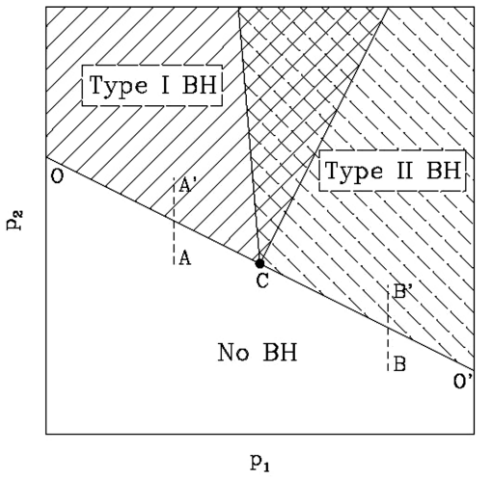


Рисунок 6.3 Схематическое изображение параметров гравитационного коллапса

M.V. Choptuik (масса пропорциональна давлению)

$$M_{bh} \propto (p - p^*)^\gamma, \gamma \approx 0.37$$

Возможно появление голых сингулярностей (в рамках ОТО)

Критическое поведение при гравитационном коллапсе

Модель	Публикации	β	Симметрия
Скалярные поля			
Безмассовое скалярное поле	[91, 96, 97]	0,37	ДАМ
	[106 – 108]	0,374	ДАМ
	[109 – 112]	1/2	НАМ
	[113 – 115]	1	НАМ
Комплексное скалярное поле	[99, 100]	0,387	НАМ
Заряженное скалярное поле	[116]	0,37	ДАМ
Другие модели материи			
Гравитационные волны	[98]	0,37	ДАМ
Излучающая жидкость	[101]	0,36	НАМ
	[117]	0,356	НАМ
Идеальная жидкость	[103, 118]	меняется	НАМ
Тонкая оболочка	[102]	меняется	—
Поле Янга – Миллса	[104]	0,20	ДАМ
Другие теории			
Аксион-дилатонное поле	[119, 120]	0,264	НАМ
Двумерная дилатонная гравитация	[121]	0,53	—
Нелинейная σ-модель	[122]	меняется	обе
Теория Бранса – Дикке	[123 – 125]	меняется	обе

Гипотеза космической цензуры (cosmic censorship hypothesis)

Слабая формулировка

Сингулярности пространства-времени, формирующиеся при гравитационном коллапсе при физически разумных (допустимых) начальных данных всегда закрыты горизонтом событий.

Сильная формулировка

Любое физически реалистичное пространство-время всегда глобально гиперболично (сингулярность может проявиться только локально).

Лекция №7. Механизм Хиггса

Калибровочный принцип в электродинамике, инвариантность

Рассмотрим **примитивное сравнение** для лучшего понимания темы:

Представим «пустое» пространство, заполненное полем Хиггса, похоже на пляж, полный детей, представляющих аналогию броуновского движения. Частица, пересекающая область пространства, похожа на продавца мороженого. Дети окружают тележку с мороженым и замедляют ее движение, в результате она приобретает "массу". В поле с безмассовыми частицами получили частицу с массой.

Механизм Хиггса представляет собой теорию, которая описывает, как частицы-переносчики слабого взаимодействия (W- и Z-бозоны) приобретают массу. Этот механизм может быть рассмотрен как элементарный случай тахионной конденсации (процесс, в котором скалярное поле чисто мнимой массы порождает конденсат и достигает минимума потенциальной энергии), где роль тахиона играет скалярное поле, названное полем Хиггса. Массивный квант этого поля был назван бозоном Хиггса.

Наиболее подробная и полная книга по теории поля: В. А. Рубаков «Классические калибровочные поля», 1999

Калибровочный принцип в электродинамике

Рассмотрим электромагнитное поле в пустоте, $E(x)$ и $H(x)$ – векторы электрического и магнитного полей (латинские 1..3, греческие 3):

$$F_{i0} = -F_{0i} = E_i, \qquad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} H_k$$

Действие электромагнитного поля в пустоте:

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Вектор-потенциал A_μ: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Он входит в потенциал под знаком производной, значит к нему можно добавлять константы, варьировать уравнение. Уравнения Максвелла: $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$ – определяет динамику. Инвариантность относительности, где $\alpha(x)$ – произвольная:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu\big(A_\mu + \partial_\mu \alpha\big) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Калибровочная инвариантность

Преобразования полей, зависящие от точки, называются калибровочными. Все физические величины должны быть инвариантны относительно калибровочных преобразований (физика не зависит от калибровки). Электродинамика калибровочно

инвариантна, то есть можно для упрощения уравнений задать различные калибровки в зависимости от задачи, которую необходимо решить.

Решение уравнений Максвелла. Спонтанное нарушение симметрии

Рассмотрим преобразование Фурье

$$A_\mu = \int\limits_{k^0 \geq 0} \left[e^{ikx} a_\mu(k) + \text{к. с.}\right] d^4k$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^\perp(x) + A_\mu^\parallel(x)$$

Общее решение представимо в виде

$$A_\mu^\perp = \int d^3k \left[e^{ikx} e_\mu^{(\alpha)} a_\mu(\mathbf{k}) b_\alpha(\mathbf{k}) + \text{к. с.}\right]_{k^0 = |\mathbf{k}|}$$

$$A_\mu^\parallel = \int d^4k \left[e^{ikx} k_\mu c(k) + \text{к. с.}\right]$$

Продольная компонента – чистая калибровка:

$$A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu \alpha(x)$$

$$\alpha(x) = \int d^4x \left[\frac{1}{i} e^{ikx} c(k) + \text{к. с.}\right]$$

Выбор калибровки

- Кулоновская: $div\, A = \partial_i A_i = 0$ - остаётся только поперечная компонента вектор-потенциала.
- Лоренцева: $\partial_\mu A_\mu = 0$ – фиксирует решение с точностью до суммы продольных волн, удобна при квантовании.
- $A_0 = 0$

Скалярное поле описывается действием

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2\right]$$

После варьирования получаем уравнение Клейна-Гордона-Фока, формулируется на поле и на сопряжённое поле:

$$\partial_\mu \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi = 0$$

Комплексное скалярное поле:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi = 0$$

Группа: множество, в котором определена операция умножения, при этом

- $(ab)c = a(bc)$
- существует единичный элемент
- существует обратный элемент

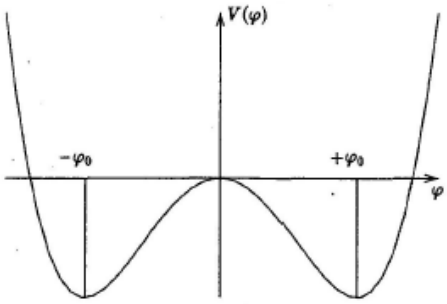
Если $ab = ba$, то группа абелева, иначе неабелева.

Спонтанное нарушение симметрии

Рассмотрим одно скалярное поле: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4$. Лагранжиан инвариантен относительно $\varphi(x) \to -\varphi(x)$. Ищем основное состояние: конфигурацию поля с минимальной энергией.

- При $m^2 > 0$ или $m^2 = 0$ это состояние $\varphi = 0$ – инвариантно относительно $\varphi(x) \to -\varphi(x)$.
- При $m^2 < 0$ это состояние $\varphi = 0$ – это локальный максимум, а минимумы $\pm\varphi_0$.

Рассмотрим возмущение $\varphi(x) = \varphi_0 + \chi(x)$.



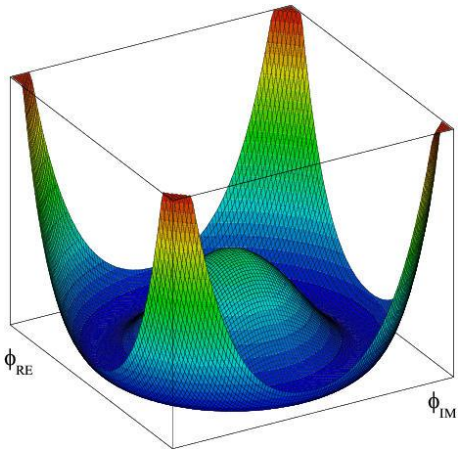
$$\mathcal{L}_\chi(\chi) = \mathcal{L}(\varphi_0 + \chi)$$

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \mu^2\chi^2 - \sqrt{\lambda}\mu\chi^3 - \frac{\lambda}{4}\chi^4$$

$\mathcal{L}_\chi$ неинвариантный относительно замены знака

Намбу-голдстоуновский бозон

Рассмотрим случай $U(1)$ симметрии комплексного скалярного поля $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$. Лагранжиан $\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \text{c}$. В терминах действительных полей $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i\partial_\mu\varphi_i - \frac{m^2}{2}\varphi_i\varphi_i - \frac{\lambda}{4}(\varphi_i\varphi_i)^2 - \text{c}$. Лагранжиан инвариантен относительно $U(1)$: $\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x)$. При $m^2 > 0$ или $m^2 = 0$ это состояние $\varphi = 0$ – <u>симметрия не нарушена</u>.



При $m^2 = -\mu^2 < 0$ потенциал – фигура вращения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Зависит $|\varphi| = \sqrt{\frac{\varphi_1^2+\varphi_2^2}{2}}$ и имеет непрерывный набор минимумов $\varphi = e^{i\alpha}\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}$. Условие на φ_0: $\left(\frac{\partial V}{\partial|\varphi|}\right)\left(\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}\right) = 0$, то есть $\varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$.

Рассмотрим возмущения $\varphi_1(x) = \varphi_0 + \chi(x)$, $\varphi_2(x) = \theta(x)$. Квадратичный лагранжиан представится в виде: $\mathcal{L}^{(2)}_{\chi,\theta} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta)^2 - \mu^2\chi^2$, $\chi -$ массивное состояние, $\theta -$ безмассовое состояние. Появляется массивное поле, которое называется Намбу-Голдстоуновский бозон. В общем случае это теорема Голдстоуна.

Механизм Хиггса

Для абелевого случая лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \left(D_\mu\varphi\right)^* D_\mu\varphi - [-\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2]$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$. Лагранжиан инвариантен относительно

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \qquad \varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x)$$

Функционал энергии представим в виде

$$E\left(A_\mu,\varphi\right) = \int d^3x\left[\frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}\left(F_{ij}\right)^2 + (D_0\varphi)^* D_0\varphi + (D_i\varphi)^* D_i\varphi + V(\varphi^*,\varphi)\right],$$

причём если $(A_\mu^{vac}, \varphi^{vac})$ основное состояние, то $(A_\mu^{vac} + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, e^{i\alpha}\varphi^{vac})$ тоже будет основным. Первые два слагаемых в выражении для функционала энергии равны нулю при $A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) -$ чистая калибровка. Третье и четвёртое слагаемое равны нулю при

$$D_\mu\varphi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\varphi = 0$$

$$\varphi(x) = e^{i\alpha(x)}\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0, \qquad \varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

Выберем одно состояние, например $\alpha = 0$: $A_\mu^{vac} = 0$, $\varphi^{vac} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_0$.

Рассмотрим возбуждённые состояния $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0 + \chi(x) + i\theta(x)\right)$. Подставляем в лагранжиан, считаем до второго порядка:

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\chi\right)^2 - \mu^2\chi^2 + \frac{e^2\varphi_0^2}{2}\left(A_\mu - \frac{1}{e\varphi_0}\partial_\mu\theta\right)^2$$

Для устранения перекрестного члена выполняется замена $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e\varphi_0}\partial_\mu\theta$. Лагранжиан представляется в виде

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2\varphi_0^2}{2}{B_\mu}^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\chi\right)^2 - \mu^2\chi^2$$

Поле $\boldsymbol{B}$ приобрело массу, а $\boldsymbol{\theta}$ ушло из лагранжиана. Поле $\boldsymbol{B}$ это и есть бозон Хиггса. В электрослабом взаимодействии - это W бозон (открыт в 1979 году). Сам бозон Хиггса открыт в 2012 году на LHC.

Лекция №8. Гравитационные волны

Теория Янга-Миллса. Уравнения Эйнштейна: гармоническая калибровка

Теория Янга-Миллса

Вид тензора поля

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

где f^{abc} – структурные константы группы, g – безразмерна, для групп $SU(N)$: $a \dots c = 1 \dots (N^2 - 1)$. Порождающие алгебры Ли калибровочной группы T^a удовлетворяют соотношению: $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$

Слабое гравитационное поле

Уравнения Эйнштейна в отсутствии источников ($T_{ik} = 0$): $R_{ik} = 0$. Разложение в окрестности метрики Минковского $\eta_{ik} = (1, -1, -1, -1)$: $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$. h_{ik} – малы вместе со своими первыми производными. После подстановки в тензор Риччи

$$\eta^{lm} \frac{\partial^2 h}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_{lm}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h^m_k}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^l \partial x^k} = 0, \qquad \text{где} \quad \begin{matrix} h = h^i_i = \eta^{ik} h_{ik} \\ h^m_k = \eta^{ml} h_{kl} \end{matrix}$$

Единственное ограничение на систему координат – требование малости h_{ik} и её производной, таким образом, допустимо преобразование $x_i \to x_i = x_i + \varsigma^i(x), \varsigma^i$ и ς'^i – малы.

Метрика преобразуется как

$$g'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} g^{lm} = \left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) g^{lm} \simeq g^{ik} + \eta^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} + \eta^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m},$$

Что для h^{ik} соответствует преобразованию

$$h'^{ik} = h^{ik} - \eta^{lk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} - \eta^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}$$

Отметим, что $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$, $g^{ik} = h^{ik} - \eta^{ik}$, потому что $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$:

$$g^{ik} g_{kl} = \left(\eta^{ik} - h^{ik}\right)(\eta_{kl} + h_{kl}) = \eta^{ik}\eta_{kl} - h^{ik}\eta_{kl} + \eta^{ik} h_{kl} - h^{ik} h_{kl}$$

$$g^{ik} g_{kl} = \eta^{ik}\eta_{kl} - h^{ik}\eta_{kl} \simeq \eta^{ik}\eta_{kl} = \delta^i_l$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Наличие условия $x^i \to x'^i = x^i + \xi^i(x)$, калибровочная свобода для x^k. Переписав уравнение Эйнштейна:

$$\eta^{lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial h_k^m}{\partial x^m} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial h_i^l}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i}\right) = 0$$

Наиболее эффективный выбор

$$\frac{\partial h_k^m}{\partial x^m} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(h_k^m - \frac{1}{2}h\delta_k^m\right) = 0$$

Волновое уравнение с учётом калибровки

$$\eta^{lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = 0 \;\; => \;\; \eta^{lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$$

$$\square h_{ik} = 0 - \text{получаем наличие гравитационных волн}$$

Плоские гравитационные волны, их поиск, характеристики

Решение волнового уравнения представимо в виде: $h_{ik} = a_{ik}\exp(ik_l x^l) + b_{ik}\exp(-ik_l x^l)$, a_{ik}, b_{ik} – тензоры поляризации. Получаем дисперсионное уравнение. $k_l x^l = 0$, $x^i = (ct, x^1, x^2, x^3) => k^i = (w/c, k^1, k^2, k^3), w = ck$, то есть (?) вывели линейный закон дисперсии. Скорость равна скорости света.

Поиск гравитационных волн

Прямое детектирование: LIGO (США), VIRG ((Пизанская долина, GEO600 (Ганновер), TAMA-300 (Токио), твердотельные криогенные детекторы, космический интерферометр LISA

Косвенное детектирование: двойные пульсары, вклад в процессы в астрофизике. Контр-пример: BICEP2

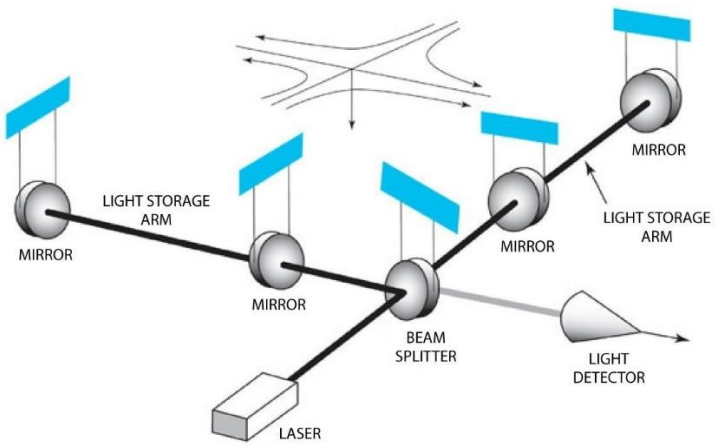


Рисунок 8.1 Схема LIGO

Характеристики гравитационных волн:

Длина волны 10^3 км, частота 150 Гц, смещение 10^{-22}

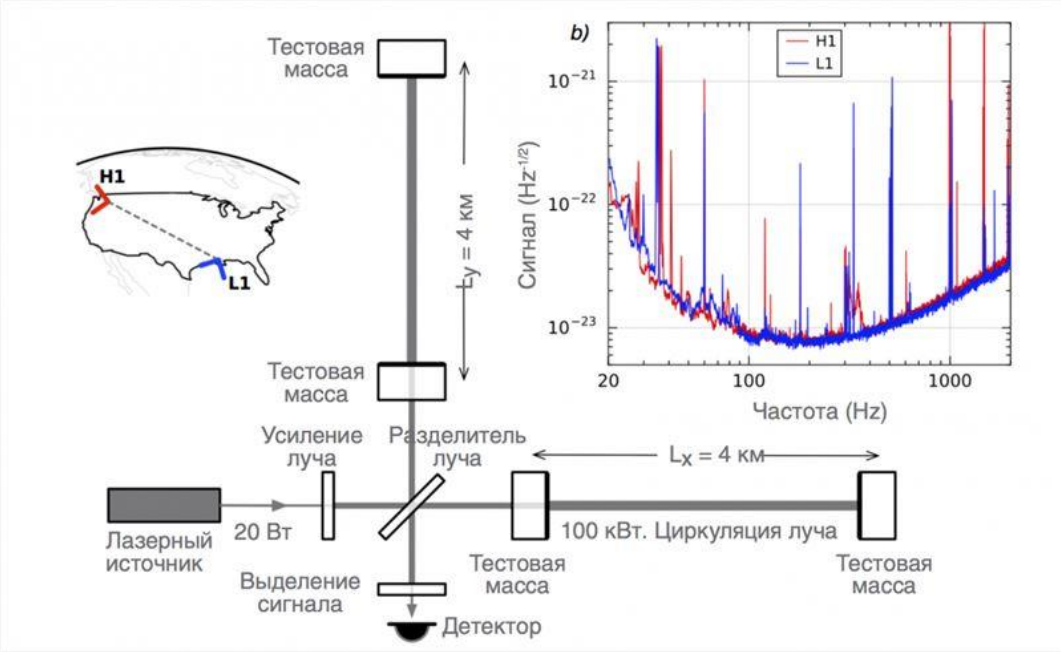


Рисунок 8.2 Схема работы установки LIGO

Поляризация гравитационных волн. Гравитационное излучение от двойной системы

Гравитационные волны реальны, значит они описываются вещественными функциями $h_{ik} = h_{ik}^*$, $a_{ik}^* = b_{ik}$ => $h_{ik} = a_{ik}\exp(ik_l x^l) + a_{ik}^*\exp(-ik_l x^l)$. Из симметричности h_{ik} следует симметричность a_{ik}, откуда получаем десять независимых компонент.

Четыре уравнения из условия калибровки записываются как ($l = 0\ldots3$):

$$k^m a_{lm} - \frac{1}{2}k_l \eta^{nm} a_{mn} = 0$$

Возможно преобразование координат $x^i \to x'^i = x^i + \xi^i(x)$, когда

$$\eta^{im}\frac{\partial^2 \tilde{\xi}_l}{\partial x^i \partial x^m} = 0,$$

еще четыре дополнительных условия на h_{ik}, значит остаются две независимые компоненты поляризации. Вид тензора поляризации:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{23} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

Источники гравитационных волн

1. Л.П. Грищук, В.М. Липунов, К.А. Постнов, М.Е. Прохоров, Б.С. Сатьяпракаш: «Гравитационно-волновая астрономия: в ожидании первого зарегистрированного источника», Успехи физических наук, Том 171, № 1, Январь 2001 г.
2. Д.Г. Райцентр «Первые детектирования гравитационных волн, излучаемых при слияниях двойных чёрных дыр», Успехи физических наук, том 187, № 8, август 2017 г.

Гравитационное излучение от двойной системы

В квадроупольном приближении

$$h_+ = \frac{G^{5/3}}{c^4}\frac{1}{r}2(1+\cos^2 i)(\pi f M)^{2/3}\mu\cos(2\pi f t)$$

$$h_\times = \pm\frac{G^{5/3}}{c^4}\frac{1}{r}4\cos i\,(\pi f M)^{2/3}\mu\sin(2\pi f t)$$

h – амплитуды двух поляризаций на расстоянии r, M – полная масса системы, μ – приведенная масса, f – частота гравитационной волны.

$$\mathcal{M} \equiv \mu^{3/5}M^{2/5}$$

После усреднения по орбитальному периоду

$$h(f,\mathcal{M},r) = (\langle h_+^2\rangle + \langle h_\times^2\rangle)^{1/2} = \left(\frac{32}{5}\right)^{1/2}\frac{G^{5/3}}{c^4}\frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r}(\pi f)^{2/3}$$

Источники гравитационных волн

1. Слияния черных дыр (BH+BH)
2. Слияния черных дыр и нейтронных звезд (BH+NS)
3. Слияния нейтронных звезд (NS+NS)
4. Реликтовые гравитационные волны

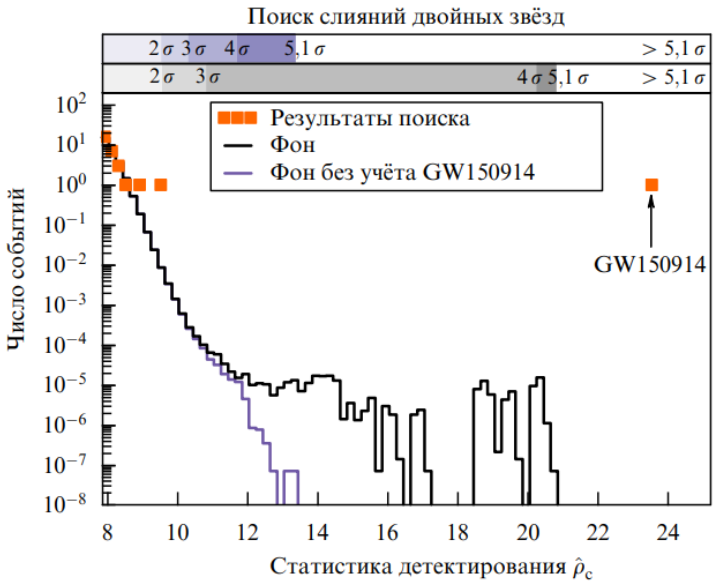


Рисунок 8.3 Результаты обработки данных алгоритмом pyCBC для поиска сигналов от сливающихся двойных систем. Показано число событий-кандидатов (оранжевые квадраты) и фоновых событий в зависимости от статистики детектирования. Фон рассчитан с включением источника GW150914 (чёрная кривая) в сдвинутые по времени данные и без него (пурпурная кривая).

Масса первой чёрной дыры, $m_1/M_\odot$	$36{,}2^{+5{,}2}_{-3{,}8}$
Масса второй чёрной дыры, $m_2/M_\odot$	$29{,}1^{+3{,}7}_{-4{,}4}$
Масса конечной чёрной дыры, $m_f/M_\odot$	$62{,}3^{+3{,}7}_{-3{,}1}$
Спин конечной чёрной дыры, a_f	$0{,}67^{+0{,}05}_{-0{,}06}$
Излучённая в ГВ энергия, $M_\odot c^2$	$3{,}0^{+0{,}5}_{-0{,}4}$
Пиковая светимость ГВ, эрг c^{-1}	$3{,}6^{+0{,}5}_{-0{,}4} \times 10^{56}$
Фотометрическое расстояние, D_L, Мпк	420^{+150}_{-180}
Красное смещение z	$0{,}09^{+0{,}03}_{-0{,}04}$

Таблица 8.1 Оценки физических параметров GW150914. Все значения даны в системе отсчёта источника. Спины чёрных дыр даны в единицах безразмерного кировского параметра $a = c|S|/(Gm^2)$

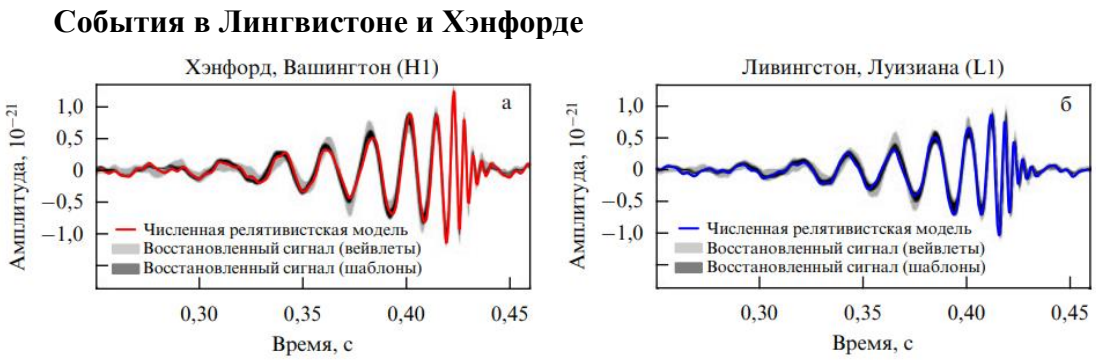


Рисунок 8.4 Сравнение формы ГВ-сигнала, реконструированного по данным детектора в Хэнфорде (а) и в Ливингстоне (б), с численной релятивистской моделью. Светло-серая (тёмно-серая) кривая показывает результат реконструкции методом вейвлетов (шаблонов от сливающихся двойных систем). Цветные кривые - численная релятивистская модель сигнала от источника с параметрами GW150914.

	GW151226	GW170104	LVT151012
Масса первой чёрной дыры, $m_1/M_\odot$	$14{,}2^{+8{,}3}_{-3{,}7}$	$31{,}2^{+8{,}4}_{-6{,}0}$	23^{+18}_{-6}
Масса второй чёрной дыры, $m_2/M_\odot$	$7{,}5^{+2{,}3}_{-2{,}3}$	$19{,}3^{+5{,}3}_{-5{,}9}$	13^{+4}_{-5}
Масса конечной чёрной дыры, $m_f/M_\odot$	$20{,}8^{+6{,}1}_{-1{,}7}$	$48{,}7^{+5{,}4}_{-4{,}6}$	35^{+14}_{-4}
Спин конечной чёрной дыры a_f	$0{,}74^{+0{,}06}_{-0{,}06}$	$0{,}64^{+0{,}09}_{-0{,}20}$	$0{,}66^{+0{,}09}_{-0{,}10}$
Излучённая энергия ГВ, $M_\odot c^2$	$1{,}0^{+0{,}1}_{-0{,}2}$	$2{,}0^{+0{,}6}_{-0{,}7}$	$1{,}5^{+0{,}3}_{-0{,}4}$
Пиковая светимость, эрг c^{-1}	$3{,}3^{+0{,}8}_{-1{,}6}\times 10^{56}$	$3{,}1^{+0{,}7}_{-1{,}3}\times 10^{56}$	$3{,}1^{+0{,}8}_{-1{,}8}\times 10^{56}$
Фотометрическое расстояние D_L, Мпк	440^{+180}_{-180}	880^{+450}_{-390}	1000^{+500}_{-500}
Красное смещение z	$0{,}09^{+0{,}03}_{-0{,}04}$	$0{,}18^{+0{,}08}_{-0{,}07}$	$0{,}20^{+0{,}09}_{-0{,}09}$

Таблица 8.2 Оценки параметров источников GW151226, GW170104 и LVT 151012. Все значения даны в собственной системе отсчёта источников.

Уравнения Эйнштейна в отсутствии источников ($T_{ik} = 0$): $R_{ik} = 0$, что приводит к изменению вида уравнений Эйнштейна, например, действие равно:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[m_{Pl}^2\left(-R + 2\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) + \lambda e^{-2\phi}S_{GB}\right]$$

$$\text{где } S_{GB} = R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T^m_{\mu\nu} + T^\Phi_{\mu\nu} + T^{GB}_{\mu\nu})$$

$$T^\phi_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\,\partial_\rho\phi)$$

$$T^{GB}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}[\left(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)\left(e^{-2\phi}R\right) + 2\left(\Box\delta^\sigma_\mu\delta^\sigma_\nu + g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla^\sigma - \nabla^\rho\nabla_{(\mu}\delta^\sigma_{\nu)}\right)\left(e^{-2\phi}R_{\rho\sigma}\right) - 2\nabla^\rho\nabla^\sigma\left(e^{-2\phi}R_{\mu\rho\nu\sigma}\right)$$

Способы проверки расширенной гравитации. Примеры

Во-первых, стоит отметить, что LIGO и Virgo, находящиеся на разных концах земного шара, синхронизировались и наблюдали один и тот же объект, то есть работал эффективный радиус Земли.

Во-вторых, они смогли указать направление, из которого был получен сигнал разных типов излучений. Благодаря этому удалось отождествить объект и измерить разницу во времени между приходом гравитационного сигнала.

Эти данные не зависят от модели, то есть это объективные данные. Вычисляем скорость распространения гравитационных волн:

$$m_{gravitation} < 7.7^*10^{-23}\ eV$$

$\left|\frac{c_g}{c} - 1\right| < 4.5^{*}10^{-16}$ - отличие скорости распространения электромагнитных волн от гравитационных меньше, чем 10^{-16}.

В некоторых моделях темная энергия может корректировать скорость распространения гравитационных волн. Измерение соотношения времен прихода гравитационных и электромагнитных волн исключает модели с различными временами прихода гравитационных и электромагнитных волн ($c_g \neq c$).

Событие 17 августа 2017 года - GW170817

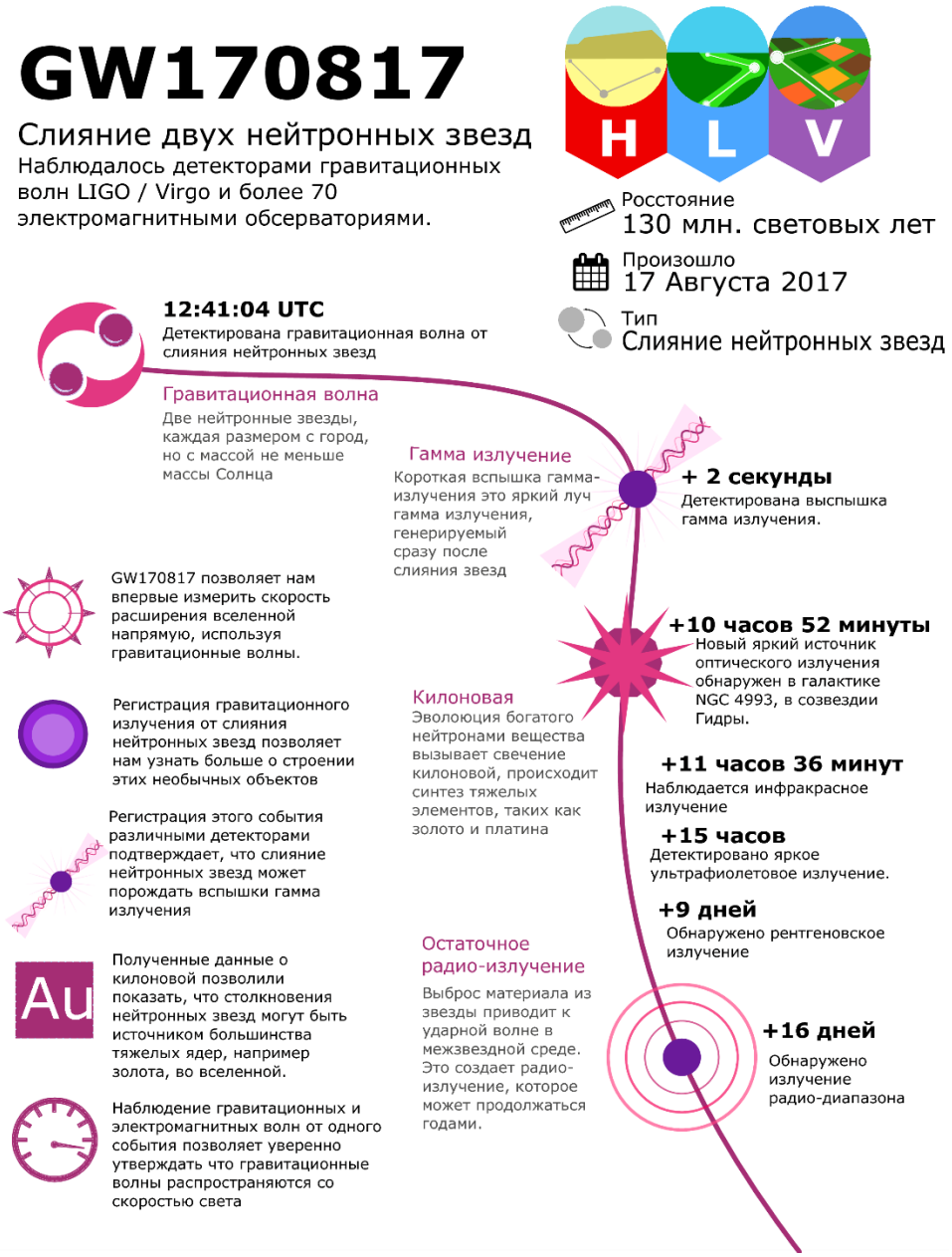


Рисунок 8.5 Слияние двух нейтронных звёзд

	$c_g = c$	$c_g \neq c$
Horndeski	General Relativity quintessence/k-essence [46] Brans-Dicke/$f(R)$ [47, 48] Kinetic Gravity Braiding [50]	quartic/quintic Galileons [13, 14] Fab Four [15] de Sitter Horndeski [49] $G_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ [51], $f(\phi)$·Gauss-Bonnet [52]
beyond H.	Derivative Conformal (19) [17] Disformal Tuning (21) quadratic DHOST with $A_1 = 0$	quartic/quintic GLPV [18] quadratic DHOST [20] with $A_1 \neq 0$ cubic DHOST [23]
	Viable after GW170817	Non-viable after GW170817

Рисунок 8.6 Разделение моделей после GW170817

Модели, в которых скорость распространения волн равна скорости света, выжили (Бранс-Дикке, Хорндески). Модели, в которых гравитон массивен изначально и нет безмассовой моды в ведущем порядке, не выживают. Таким образом, это событие стало своеобразным критерием отсева моделей.

Пример: EFT of DM

Действие (с учетом разложения вокруг FRW) имеет вид

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{M_*^2}{2}f^{(4)}R - \Lambda - cg^{00} + \frac{m_2^4}{2}(\delta g^{00})^2 - \frac{m_3^3}{2}\delta K\delta g^{00} - m_4^2\delta\mathcal{K}_2 + \frac{\widetilde{m}_4^2}{2}\delta g^{00}R - \frac{m_5^2}{2}\delta g^{00}\delta\mathcal{K}_2 - \frac{m_6}{3}\delta\mathcal{K}_3 - \widetilde{m}_6\delta g^{00}\delta\mathcal{J}_2 - \frac{m_7}{3}\delta g^{00}\delta\mathcal{K}_3\right]$$

С учетом данных GW170817 / GRB170817A

$$\widetilde{m}_4^2 = m_5^2 = m_6 = \widetilde{m}_6 = m_7 = 0$$

Пример: Horndesky

Действие имеет вид

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_I L_I$$

$$L_2 \equiv G_2(\phi, X), \quad L_3 \equiv G_3(\phi, X)\Box\phi$$

$$L_4 \equiv G_4(\phi, X)^{(4)}R - 2G_{4,X}(\phi, X)\left(\Box\phi^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right) + F_4(\phi, X)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}$$

$$L_5 \equiv G_5(\phi, X)^{(4)} G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \frac{1}{3} G_{5,X}(\phi, X)\left(\Box\phi^3 - 3\Box\phi\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + 2\Box\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}\phi^{\nu}_{\sigma}\right)$$
$$+ F_5(\phi, X)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}\phi_{\sigma\sigma'}$$

С учетом данных GW170817 / GRB170817A большая часть моделей исключена. Остаются только простые модели Horndeski с $G_{4,X} = 0$ и $G_5 = const$, а также класс моделей beyond Horndeski, связанных конформным преобразованием с моделью, где $c_g = c$. Точной настройки космологической эволюции остальных моделей Horndeski недостаточно!

Модели Fab Four

Модели Хорндески со свойством «самонастройки» (когда космологическую постоянную можно «запрятать» в скалярное поле): с решением в виде метрики Минковского с нетривиальным скалярным полем

$$\mathcal{L}_{john} = \sqrt{-g}V_J(\phi)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$$

$$\mathcal{L}_{paul} = \sqrt{-g}V_P(\phi)P^{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_\mu\phi\nabla_\alpha\phi\nabla_\nu\phi\nabla_\beta\phi$$

$$\mathcal{L}_{george} = \sqrt{-g}V_G(\phi)R$$

$$\mathcal{L}_{ringo} = \sqrt{-g}V_R(\phi)\hat{G}$$

Лекция №9. Квантовая и многомерная гравитация

Квантовая гравитация: ряд по кривизне

Шкала энергий

SU(2)xU(1)	SU(5)	E_8xE_8
Электрослабое	Великое	Планк
10^2 ГэВ	10^{16} ГэВ	10^{19} ГэВ

Квантование общей теории относительности

При увеличении энергии должна существовать квазиклассическая теория гравитации. Например, в областях, где $L \gg I_{Pl}$ можно использовать разложение по малому параметру $\varepsilon = (I_{Pl}/L)^2$ и ограничиться первыми членами разложения. Первый член порядка ε^0 совпадает с выражением для тензора энергии-импульса классического поля. Тогда член ε^1, содержащий множитель $\hbar$, дает основной вклад квантовых эффектов. Следующие члены описывают добавки, возникающие при учёте дополнительных взаимодействий виртуальных частиц и квантов поля.

Диаграммы Фейнмана (диаграммы взаимодействий)

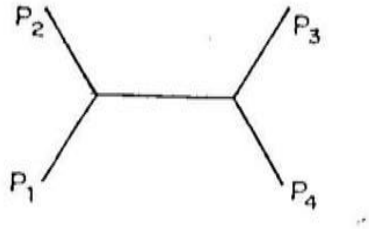


Рисунок 9.1 Древесные (~R)

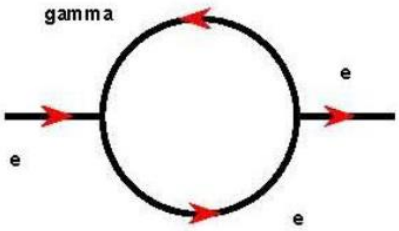


Рисунок 9.2 Однопетлевые (~R^2)

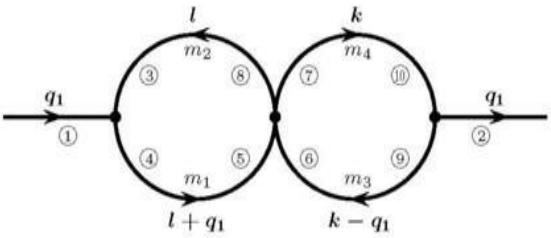


Рисунок 9.3 Многопетлевые (~R^n)

Гравитация с поправками высших порядков по кривизне, лагранжиан имеет вид:

$$\sqrt{-g}L \approx \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2\right) + \alpha_3 f_3(R^3) + \alpha_4 f_4(R^4) + \cdots$$

При более строгом рассмотрении, имеем дело с квазиклассическим приближением. Флуктуации гравитационного поля малы, вводим средние величины $g_{\mu\nu} =< g_{\mu\nu} >$. Модифицированные уравнения Эйнштейна приобретают вид

$$G_{\mu\nu} = 8\pi < T_{\mu\nu} >$$

Масштаб много больше планковского, то есть $L \gg l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$, возможно разложение по $\varepsilon = (I_{Pl}/L)^2$, $\varepsilon_0 - \text{ОТО}$, $\varepsilon_1 \sim \hbar$.

В линейном (однопетлевом) приближении виртуальные пары различных полей не взаимодействуют, их можно изучать независимо. При вычислении среднего от произведения двух и более операторов поля в одной точке приводят к бесконечностям $< T_{\mu\nu} >$ расходится необходима перенормировка.

$$< T_{\mu\nu} > \propto \sum R^2 + \sum R''$$

Для классического конформно-инвариантного поля след $T^{\mu}_{\mu} = 0$. Перенормированный след $< T_{\mu\nu} >^{ren}$ не равен нулю, который носит название «конформная аномалия». Для скалярного (s=0), спинорного (s=1/2) и электромагнитного (s=1) полей

$$< T^{\mu}_{\mu} >^{ren} = a_s\left(C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + (2/3)\Box R\right) + b_s S_{GB}$$

$$S_{GB} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2 \text{ (Гаусс} - \text{Боннэ)}$$

$$a_s = \bar{a}_s/(5760\pi^2)\,, b_s = \acute{c}_s/(5760\pi^2)$$

$$\bar{a}_0 = 3, \qquad \bar{a}_{1/2} = 9, \qquad \bar{a}_1 = 36$$

$$\acute{c}_0 = -1, \qquad \acute{c}_{1/2} = -11/2\,, \qquad \acute{c}_1 = -62$$

Границы применимости квантовой гравитации: $m \ll M$ первичное квантование

$$L \gg l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

Многомерная гравитация. Дополнительные измерения

Литература

1. В. А. Рубаков: «Большие и бесконечные дополнительные измерения», Успехи физических наук, Том 171, № 9, Сентябрь 2001 г.

2. А. О. Барвинский: «Космологические браны и макроскопические дополнительные измерения», Успехи физических наук, Том 175, № 6, Июнь 2005 г.
3. Э. Э. Боос, В. Е. Буничев, И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков: «Геометрия, физика и феноменология модели Рэндалл-Сундрума», Физика элементарных частиц и атомного ядра, Том 43, вып. 1, НИИЯФ, 2012 г.

Допустим, у нас есть пятимерная теория, которая описывается константой связи и лагранжианом. Мы живём в четырёхмерном пространстве-времени, значит нам нужно понимать, как будет выглядеть эта теория в нашем пространстве. Влияние дополнительных измерений корректируется за счёт добавки X.

$$S_5 = C_5 \int d^5x L_5 \gg S_4 = C_4 \int d^4x [L_4 + X]$$

Верно и обратное. Если есть четырёхмерная теория с длинным лагранжианом. Увеличивая размерность пространства-времени, часть добавок можно спрятать в дополнительных измерениях или же объяснить существование добавок наличием дополнительных измерений.

Обобщенная схема ухода в многомерие, чтобы получить многомерную теорию:

$$S_4 = C_4 \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} [R + L_{41} + L_{42} + \cdots] \to S_D = C_D \int d^D x \sqrt{-g^{(D)}} L_D$$

Компактификация дополнительных измерений

Современная квантовая теория поля – математическая теория взаимодействий материальных точек, в основе которой лежит теория физики высоких энергий. Материальная точка – базовый объект, который имеет одно измерение – временное (пространственных нет). Современная квантовая теория поля есть теория взаимодействия одномерных объектов в многомерном пространстве-времени. Для квантовой теории – четырёхмерие.

Можно увеличить размерность базового объекта, например, как в теории струн. Струна представляет собой объект, у которого одно пространственное и одно временное измерение. Если взаимодействие материальных точек есть столкновение, то взаимодействие струн не так тривиально: струны могут быть открытыми и закрытыми, взаимодействие приводит к топологическим конфигурациям. Это приводит к увеличению числа состояний, благодаря чему можно отождествить результат с реальными объектами.

Теория струн – взаимодействие двумерных объектов на фоне многомерного пространства-времени, она квантована, существует в 11-мерном пространстве. Возникает проблема, заключается она в том, что теория струн или М-теория

(взаимодействие многомерных объектов на фоне многомерного пространства), суть которых заключается в расширении размерности базового объекта. Получаем, что String/M Theory (11d) >> General Relativity (4d).

Типы дополнительных измерений

- Компактные дополнительные измерения (аналогия: представим пляж с мелким песком, если наступить на песок, то отдельные частички не ощущаются ступнёй, песчинки компактны, человек – макрообъект, человек не почувствует эти микроизмерения)
- Некомпактные дополнительные измерения
  - Решение проблемы иерархии
  - Возможность решения проблемы космологической постоянной
  - Возможная коррекция закона Ньютона

Ограничения на размер дополнительных измерений из проверки закона Ньютона (2013): **10^{-5} мм**. Ограничения на размер дополнительных измерений из астрофизики (по данным от SN1987A):

Число некомпактных дополнительных измерений	2	3	4
Размер некомпактных дополнительных измерений	10^{-4}	10^{-7}	10^{-8}

Ограничения на размер дополнительных измерений из космологии:

- Отсутствие противоречий с моделями инфляции
- Отсутствие противоречий с данными экспериментов по реликтовому излучению COBE, WMAP
- Отсутствие противоречий с результатами GW170817

Компактификация Калуцы-Кляйна – многомерная теория гравитации, позволяющая объединить два фундаментальных физических взаимодействия: гравитацию и электромагнетизм. Дополнительные измерения цилиндрические, то есть мир можно представить в виде цилиндра, где x_μ – наш мир, y – циклическая переменная. Полный набор координат:

$$X^A = (x_\mu, y), \qquad A = 0,1,2,3,5, \qquad \mu = 0,1,2,3, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad 0 < y < 2\pi L$$

Введём метрику

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1), ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

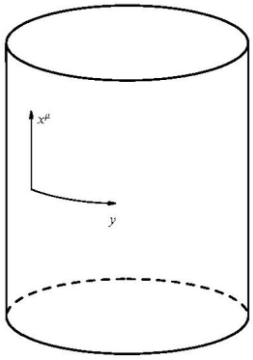


Рисунок 9.4 Схема теории компактификации Калуцы-Кляйна

Уравнение поля

$$\square_5\phi(x,y) = 0(\square_5 = \eta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + {\partial_y}^2)$$

Разложение в ряд Фурье

$$\Phi_P(x,y) = e^{ip_\mu x^\mu + i\frac{ny}{L}}, n = 0, \pm 1, \ldots$$

Уравнение дисперсии

$$p^2 + {m_n}^2 = 0, \qquad p^2 = p_\mu p^\mu, \qquad {m_n}^2 = n^2/L^2$$

Модель ADD. Смещение фундаментальных планковских величин

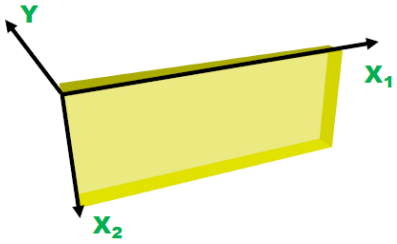


Рисунок 9.5 Схема модели ADD

ADD (Аркани-Хамеди – Димитрополус – Двали) предполагает, что мир представим параллелепипедом. Это модель многомерия для физики элементарных частиц и многомерия для нас.

$G_4 = 1/{M_P}^4 -$ не фундаментальна, она многомерна. Действие имеет вид:

$$S = \frac{1}{16\pi G_D}\int d^D X\sqrt{G}R(G_{AB}), D = 4 + N, G_D = 1/M^{D-2}$$

G_D - фундаментальная гравитационная постоянная. В низкоэнергетическом приближении (основной вклад от 4D, L – масштаб дополнительных измерений)

$$d^D X = d^N y\int d^4x = L^N\int d^4x$$

Эффективное действие для нулевой моды

$$S_{eff}[g_{\mu\nu}] = \frac{L^N M^{N+2}}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}R(g)$$

$$G_4 = G_D/L^N, M_P = M(ML)^{N/2}$$

Смещение фундаментальных планковских величин (в диапазон 1 ТэВ)

$$M_D = \left(\frac{M_{Pl}^2}{V_{D-4}}\right)^{1/(D-2)}$$

В стандартной версии планковская энергия в 4D пространстве 10^{19} ГэВ. В модели ADD фундаментальная планковская энергия ≈ 1 ТэВ. Тогда масштаб объединения взаимодействий – 1 ТэВ, это же значение есть масштаб квантовой гравитации – 1 ТэВ, откуда следует возможность рождения черных дыр в квантовых процессах и их получение на Большом адронном коллайдере. Как искать такие чёрные дыры: сечение рассеяния, поперечный импульс. В 2022 году no any black holes at LHC.

Лекция №10. Многомерная гравитация. Часть 2

Модели RS

С прошлой лекции узнали, что в низкоэнергетическом пределе М-теория даёт 11-мерную супергравитацию. Есть две браны (многомерных гиперповерхностей), расстояние между ними может быть любой величины вплоть до бесконечности. На бранах строим физику, попутно решая проблемы темных материй, перехода из многомерья в четырехмерье, инфляции и другие.

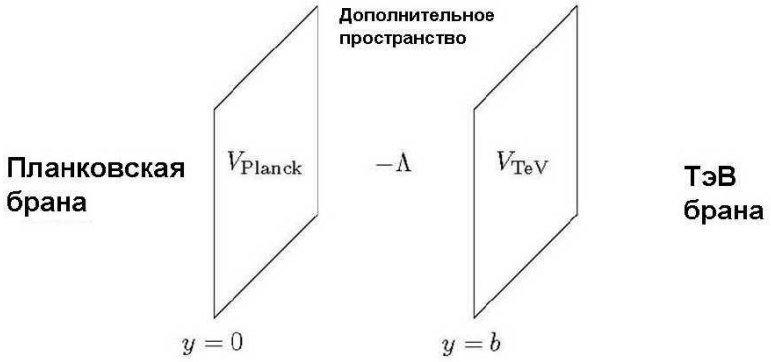


Рисунок 10.1 Схема модели RS

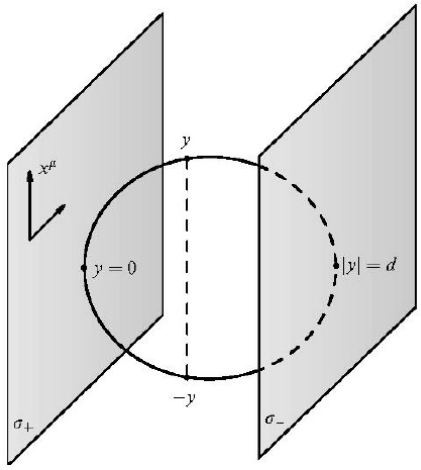


Рисунок 10.2 Модель RS I

Модель RS II

Отличие от первой модели: ТэВ брана уходит на бесконечность. Брана обладает натяжением σ и населена 4D материальным полем ψ с лагранжианом $L_m(g_{\alpha\beta}, \psi, \partial\psi)$ и индуцированной метрикой $g_{\mu\nu}(x)$ (у неё есть своё гравитационное поле).

Физические поля «живут» на бране, гравитация распространяется в балк (дополнительное пространство). В 2017 появилось ограничение от GW170817 – скорость распространения гравитации и гравитационного ЭМ сигнала сравнима, то есть возможна только плоская брана. Существует симметрия относительно плоскости браны. Вариация действия приводит к уравнениям поля.

Условия Израэля: сшивка браны и балка

$$[K^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}K] = 8\pi G_5 S^{\mu\nu}, \qquad S^{\mu\nu} = -\sigma g^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$$

$$S[G_{AB}(X), \Psi(x)] = \frac{1}{16\pi G_5} d^5X\sqrt{G}[R(G_{AB}) - 2\Lambda_5)] + d^4x\sqrt{-g}\frac{[K]}{8\pi G_5} + L_m(g_{\alpha\beta}, \Psi, \partial\Psi)$$

Проблема иерархии на бране

Проблема иерархии на бране – большое расстояние на энергетической шкале между взаимодействиями. Брана с отрицательным натяжением населена Хиггсовским полем H(x) с действием

$$S_{brane} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda\{H^2 - v^2\}^2\right)$$

где v – масштаб спонтанного нарушения симметрии.
Поле минимальным образом взаимодействует с индуцированной метрикой $g^{\mu\nu} = \exp(-2|y|/l)\,\eta^{\mu\nu}$, напоминает по виду метрику Фридмана. Введём масштабный фактор $a(y) = \exp(-2|y|/l)$. Исходное поле H не обладает канонической нормировкой: коэффициент кинетического члена не равен 1. Замена для появления канонической нормировки:

$$H \to \exp(-2|y|/l)\,H$$

$$S_{brane} = \int d^4x(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda\,\partial_\mu H\partial_\nu H - \lambda(H^2 - v^2)^2)$$

Тогда новый эффективный масштаб нарушения симметрии:

$$v \to \exp(-2|y|/l)v$$

Это означает, что вес величины можно изменять, допустима вариация расстояния между бранами. Масштаб экспоненциально мал, следовательно, малое изменение в положении браны вызывает экспоненциально сильное изменения энергетического масштаба теории с точки зрения наблюдателя на бране. Это и есть ключ к решению проблемы иерархии.

Локализация гравитона на бране

Все гравитоны могут влетать в брану и балк, в четырехмерье работает теория Ньютона, но для пятимерья нет. Разберемся, что происходит на бране. Построим линеаризованную теорию на фоне решения RS:

$$g_{\mu\nu} = \exp(-2|y|/l)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x,y)$$

$h_{\mu\nu}(x,y)$ - ненулевые компоненты возмущений метрики в калибровке RS:

$$h_{55} = h_{5\mu} = 0, \qquad \partial^\mu h_{\mu\nu} = h^\mu_\mu = 0$$

Далее можно записать вакуумное уравнение Эйнштейна и Израэля:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{4}{l^2} + \frac{\square}{a^2(y)}\right) h_{\mu\nu}(x,y) = 0, \qquad \square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$$

$$\left(\frac{d}{dy} + \frac{2}{l}\right) h_{\mu\nu}(x,y)\Big|_{y=0} = 0$$

Разделение переменных путем разложения метрических возмущений по плоским 4D волнам:

$$p^2 = -m^2, \qquad h_{\mu\nu}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{z}}\varphi_m(x)e^{ipx}$$

Новая переменная $|z| \geq I$, m - параметр разделения - масса КК мод

$$z = sign(y)\left|exp\left(\frac{|y|}{l}\right)\right|$$

В силу линеаризованных уравнений Эйнштейна

$$\frac{z^{3/2}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \square - \frac{15}{4z^2}\right)\varphi_m(z)\exp(ipx) = 0$$

m^2- собственное значение уравнения Шредингера

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + \frac{15}{4z^2}\right)\varphi_m(z) = m^2\varphi_m(z)$$

На полупрямой z ≥ I с потенциалом $V(z) = 15/4z^2$.

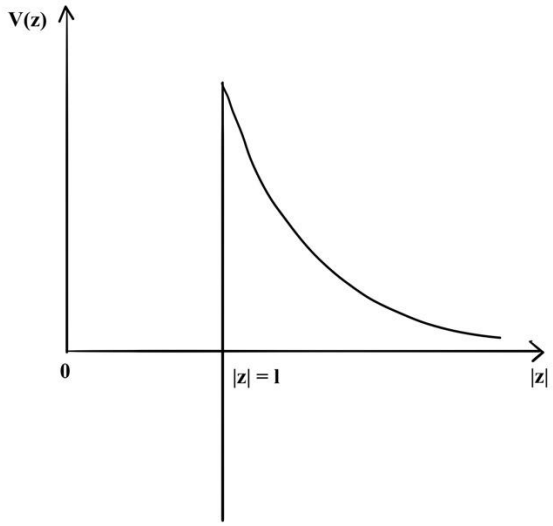


Рисунок 10.3 Потенциал $V(z) = 15/4z^2$

Далее используем краевое условие задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{3}{2l}\right)\varphi_m(z)\Big|_{z=0}=0$$

Спектр содержит нулевую моду $m=0$ и непрерывный спектр $m>0$. Нулевая мода $\varphi_0(z)=\left(\frac{1}{l}\right)^{1/2}\left(\frac{l}{z}\right)^{3/2}$ удовлетворяет уравнениям и нормируема:

$$2\int_l^\infty dz{\varphi_0}^2(z)=1$$

Массивные КК моды выражаются через функции Бесселя и Неймана второго порядка

$$\varphi_m(z)=\left(\frac{mz}{2}\right)^{1/2}\frac{Y_1(ml)J_2(mz)-J_1(ml)Y_2(mz)}{\left({J_1}^2(ml)+{Y_1}^2(ml)\right)^2}$$

И нормируемы на дельта-функцию в непрерывном спектре

$$2\int_l^\infty dz\varphi_m(z)\,\varphi_{m'}(z)=\delta(m-m')$$

Основная идея заключается в том, что есть нулевая мода и все остальные. И если нулевая мода локализуется на бране, то при уходе с браны она очень быстро гасится. Получается, что главная асимптотика - нулевая мода, которая живет на бране, а какие-то возмущения уходят. С такой точки зрения мы получаем эффекты балка в качестве всего лишь возмущения.

Это означает, что нулевая мода сконцентрирована на бране, а массивные моды уходят в бесконечность в виде стоячих волн. Это дает локализацию безмассового гравитрона на бране и восстановление 4D гравитации.

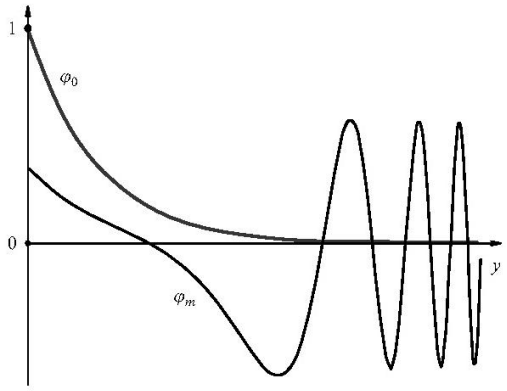


Рисунок 10.4 Локализация гравитона на бране

Закон Ньютона на бране

Рассмотрим Закон Ньютона на бране. Надо сделать так, чтобы нулевая мода была Ньютоновской, а дальше были поправки, которые можно было бы объяснить темной материей. Нерелятивистский закон притяжения на бране определяется функцией Грина 4D лапласиана:

$$\Delta^4 = \frac{z^{3/2}}{l^2}\left(\frac{d^2}{dz^2} + \Delta^3 - \frac{15}{4z^2}\right) z^{1/2}, \qquad \text{малые буквы на бране } \Delta^3 = \delta^{mn}\partial_m\partial_n$$

Искомый потенциал напряжения:

$$G_5 D(x, x') = G_5 \frac{1}{\Delta^4}\delta(\mathbf{X}, \mathbf{X}')\Big|_{y=y'=0}$$

На бране 4D функция → волны(x) + гармоники(z)

$$\delta(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \equiv \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\delta(y - y') = \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\delta(z - z')\frac{z}{l}$$

$$\delta(z - z') = \sum_m \varphi_m(z)\varphi_m(z') \equiv \varphi_0(z)\varphi_0(z') + \int_0^\infty dm\varphi_m(z)\varphi_m(z')$$

Подставляем в функцию Грина:

$$G_5 D(x, x') = \frac{G_5 l}{(2\pi)^3}\int d^3p \sum_m \frac{\exp(ip(x - x'))}{p^2 + m^2}\frac{\varphi_m(z)\varphi_m(z')}{\sqrt{zz'}}\Bigg|_{z=z'=l}$$
$$= -\frac{G_5}{4\pi r}\varphi_0^2(l) - \frac{G_5}{4\pi r}\int_0^\infty dm{\varphi_m}^2(l)\exp(-mr), \qquad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

При больших расстояниях:

$$G_5 D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{G_5}{4\pi r}\left(1 + \frac{l^2}{2r^2} + \cdots\right), \qquad r \gg l$$

В результате пятимерный закон Ньютона состоит из четырехмерного с поправками. Притяжение на бране при $r \gg l$ - 4D Ньютоновский закон.

Эффективная гравитационная постоянная определяется через комбинацию пятимерной (фундаментальной) и объема дополнительного пространства (аналогично ADD): $\boldsymbol{G_4 = G_5/I}$.

Роль радиона

Запишем релятивистский закон взаимодействия (аналог). Запаздывающий 5D пропагатор (запись гравитационного взаимодействия и его распространения):

$$D^{ret}(X,X')|_{y=y'=0} = \frac{1}{l}\frac{1}{\Box_4}\delta(x,x')\Big|^{ret}, \qquad (x-x')^2 \gg l^2$$

В релятивистской области важна тензорная структура гравитационного потенциала - сложнее ньютоновской 00 компоненты. Запаздывающий потенциал от материи на бране: действие 4D пропагатора на правую часть условий сшивания Израэля в присутствии материи

$$\left(\frac{d}{dy}+\frac{2}{l}\right)h_{\mu\nu}(x,y)\Big|_{y=0} = -8\pi G_5\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right)$$

В длинноволновом приближении

$$h_{\mu\nu}(x,y) \cong -16\pi G_4\frac{1}{\Box}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right)(x)$$

Что неверно, так как должно быть $\left(\boldsymbol{T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T}\right)$.

Противоречие исчезнет, если предположить, что данная метрика - не индуцированная метрика на бране. В левой части должна стоять метрика в *нормальной Гауссовой системе координат* ${h_{\mu\nu}}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\nu}(x,y)$ в калибровке RS, в которой брана не является плоскостью y=0, а погружение в пространство (x^μ,y) задается **дополнительными степенями свободы**.

Далее дополняем скалярное поле П(x): y = П(x), называемое радионом, и векторное поле $\xi^\mu(x)$, описывающее отличие 4D координатной сетки на бране от координат в объеме.

$$h_{\mu\nu}^{NG}(x,y) = h_{\mu\nu}(x,y)+\frac{2}{l}\eta_{\mu\nu}a^2(y)\Pi(x)+l\partial_\mu\partial_\nu\Pi(x)+a^2(y)\big(\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu\big)(x)$$

Подставляем $h_{\mu\nu}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\nu}(x,y)$. Поле радиона, отвечающее за погружение браны в объем, определяется следом тензора натяжений материи, которая прогибает брану:

$$\Box\Pi(x) = \frac{8\pi G_5}{6}T(x)$$

В силу замены $h_{\mu\nu}^{NG}(x,y)$ вместо $h_{\mu\nu}(x,y)$ индуцированная метрика на бране отличается конформным членом $\frac{2}{l}\eta_{\mu\nu}a^2(y)\Pi(x)$ и набором чисто калибровочных слагаемых $\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$.

Выбором системы 4D координат калибровочные члены можно убрать.

$$h_{\mu\nu}^{NG}(x,y) = h_{\mu\nu}(x,y) + \frac{8\pi G_5}{3l}a^2(y)\eta_{\mu\nu}\frac{1}{\Box}T(x)$$

В правой части уравнения для индуцированной метрики $h_{\mu\nu}^{ind}(x) = h_{\mu\nu}^{NG}(x, y=0)$ возникает общерелятивистская комбинация с **правильным** коэффициентом:

$$h_{\mu\nu}^{ind}(x) \cong -16\pi G_4\frac{1}{\Box}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right)(x)$$

Легко проверить, что калибровка метрики гармоническая:

$$\partial^\nu h_{\mu\nu}^{ind} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^{ind} = 0$$

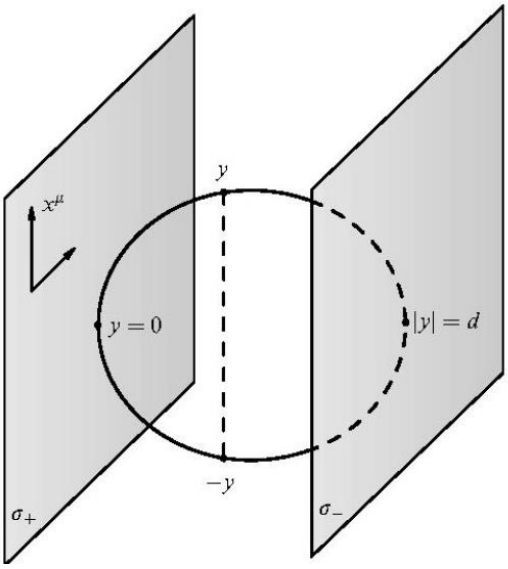


Рисунок 10.5 Модель с двумя бранами

Благодаря вкладу радиона восстанавливается **правильный** 4D закон распространения длинноволновых гравитационных волн от материи на бране.

Рассмотрим, что будет происходить в **модели с двумя бранами**.

Действие имеет вид:

$$S[G_{AB}(X)] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5X\sqrt{G}[{}^5R(G) - 2\Lambda_5] + \sum_I\int_{\Sigma_I} d^4x\sqrt{g}\left(\frac{1}{8\pi G_5}[K] - \sigma_I\right)$$

Браны локализованы на $y=0$ и $y=d$. Натяжения бран подобраны в соответствии с 5D космологической гравитационной константами. Метрика на бране с отрицательным натяжением содержит масштабный фактор $a^2(d) = \exp(-2d/I)$ для решения проблемы иерархии. Рассмотрим малые возмущения индуцированных метрик на бранах:

$$g_{\mu\nu}^{\pm}(x) = a^2{}_{\pm}\eta^{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\pm}(x), \qquad a_+ = 1, \qquad a_- = \exp\left(-\frac{2d}{I}\right) \equiv a$$

Возмущенное решение уравнений Эйнштейна во всем пространстве:

$$ds^2 = dy^2 + exp\left(-\frac{2|y|}{l}\right)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h_{AB}(x,y)dx^A dx^B$$

Вычислим эффективное действие на бранах в квадратичном по $h^{\pm}_{\mu\nu}(x)$ приближении. Результирующее действие инвариантно относительно $h^{\pm}_{\mu\nu} \to h^{\pm}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^{\pm}_\nu + \partial_\nu \xi^{\pm}_\mu$. В терминах тензорных инвариантов:

$$R^{\pm}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\Box h_{\mu\nu} + \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu + \partial_\lambda \partial_\nu h^\lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h\right)^{\pm}$$

С помощью такой процедуры или путем функционального интегрирования эффективных 4D уравнений можно вычислить:

$$S_{eff}[g^{\pm}_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_4}\int d^4x \left[\mathbf{R}^T_{\mu\nu}\frac{2\mathbf{F}(\Box)}{l^2\Box^2}\mathbf{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{6}\mathbf{R}^T\frac{2F_1(\Box)}{l^2\Box^2}\mathbf{R}\right]$$

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} R^+_{\mu\nu}(x) \\ R^-_{\mu\nu}(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R}^T_{\mu\nu} = [R^+_{\mu\nu}(x), R^-_{\mu\nu}(x)]$$

Это еще один путь смоделировать космологическую постоянную в четырехмерье. Нелокальные форм-факторы – 2x2 матричнозначные функции действующего на кривизну даламбертиана и выражаются как

$$\mathbf{F}(\Box) = -\frac{1}{J^+_2 Y^-_2 - J^-_2 Y^+_2} \times \begin{bmatrix} \sqrt{\Box} z_+ u_+(z_-) & -\frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} & \sqrt{\Box} z_- u_-(z_+) \end{bmatrix}$$

и строятся через (J – Бессели, Y - Нейманы)

$$u_\pm(z) = Y^\pm_1 J_2\left(z\sqrt{\Box}\right) - J^\pm_1 Y_2\left(z\sqrt{\Box}\right), \qquad J^\pm_\nu \equiv J_\nu\left(z_\pm\sqrt{\Box}\right), \qquad Y^\pm_\nu \equiv Y_\nu\left(z_\pm\sqrt{\Box}\right)$$

Второй форм-фактор

$$\mathbf{F}_{\mathrm{I}}(\Box) = 2\mathbf{F}(\Box) - l^2\Box diag\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2a^2}\right]$$

Нулевые моды (базисные функции) – распространяющиеся моды теории. В гравитонном секторе

$$\mathbf{v}_n(x) = \begin{bmatrix} v^+_n(x) \\ v^-_n(x) \end{bmatrix}$$

Они удовлетворяют уравнению $\mathbf{F}(\Box)\mathbf{v}_n = 0$. С учётом того, что распространяющиеся моды $(\Box - m_n^2)\mathbf{v}_n(x) = 0$, условие существования нуль-векторов $\operatorname{def}\mathbf{F}(\Box) = 0$ сводится к $\operatorname{def}\mathbf{F}(\Box) \sim \Box(Y_1^- J_1^+ - Y_1^+ J_1^-) = 0$. Из этого следует вывод, что **существует безмассовый гравитон на бране**.

Возможные пути решения космологической постоянной

Проблема космологической постоянной: разрыв между средней плотностью энергии.

$$\mathcal{E} \sim 10^{-29}\text{г/см}^3 \sim (10^{-5}\text{эВ})^4 \to {H_0}^2 \sim G\mathcal{E}$$

Масштаб вакуумных энергий фундаментальных взаимодействий:

$$\mathcal{E} \sim (1\ \text{ТэВ})^4 (EW) \to (10^{19}\text{ГэВ})^4 (QG)$$

Один из способов решения - замена космологической постоянной на нелокальный оператор:

$$G \to G(\Box) \to R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Box) T_{\mu\nu}$$

Космологические уравнения для модели RS:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R^{(5)} = -\Lambda_5 G_{AB}$$

$$K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu} = 4\pi G_5 S_{\mu\nu}$$

Проецируем уравнение 4D на брану. Используем уравнения Гаусса-Кодацци (разложение 5D тензора кривизны на сумму 4D и квадратичную комбинацию внешней кривизны с ковариантными производными). Получим:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}$$

Переход к тензору Вейля выглядит так:

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} S_{\mu\alpha} {S_\nu}^\alpha + \frac{1}{12} S S_{\mu\nu} + \frac{1}{8} ({S_{\alpha\beta}}^2 - \frac{1}{3} S^2) g_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = {}^5C_{A\mu B\nu} n^A n^B$$

Бесследовость и закон изменения:

$$\mathcal{E}^{\mu}_{\mu} = 0, \qquad \nabla^{\mu}\mathcal{E}_{\mu\nu} = (8\pi G_5)^2 \nabla^{\mu}\Pi_{\mu\nu}$$

Уравнение Кодацци:

$$\partial^{\upsilon} K_{\nu\mu} - \partial_{\mu} K = {}^{5}R_{5\mu} \quad \rightarrow \quad \partial^{\mu} S_{\mu\nu} = 0$$

В модели с натяжением

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2 \Pi_{\mu\nu} = -\Lambda_4^{eff} g_{\mu\nu} + \cdots,$$

$$\Lambda_4^{eff} = \frac{1}{2}\Lambda_5 + \frac{(8\pi G_5 \sigma)^2}{12}$$

Вейлевский член вносит свой вклад. Явное решение 5D уравнений Эйнштейна и Израэля:

$$ds^2 = -N^2(t,y)dt^2 + a^2(t,y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t,y)dy^2$$

Фиксируем вид тензора энергии импульса:

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(-p,p,p,p)$$

$$\frac{(a')^2}{a^2 b^2} - \frac{(\dot{a})^2}{a^2 N^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_5}{6} + \frac{C}{a^4} = 0$$

Штрих по пятой координате, условие сшивки: $\left.\frac{a\prime}{ab}\right|_{y=0} = -\frac{4\pi G_5}{3}\rho$

$$G_4^{eff}(\rho) = \frac{4\pi G_5^2 \sigma}{3}\left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right)$$

Видно, что четырехмерная гравитационная постоянная зависит от плотности.

Модель Двали-Габададзе-Порратти (DGP)

В **модели Двали-Габададзе-Поратти** действие не содержит космологической постоянной ни в 5D, ни в 4D. Вместо натяжения 4D эйнштейновский член с гравитационной постоянной G_4, существенно отличный от G_5.

$$S_{DGP} = [G_{AB}(X), \psi(x)] = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5X\sqrt{G}\, R_5(G_{AB}) + \int d^4x\sqrt{g}\left(\frac{[K]}{8\pi G_5} + \frac{R_4(g_{\mu\nu})}{16\pi G_4} + L_m(g_{\mu\nu}, \psi, \partial\psi)\right)$$

Эту модель назвали **моделью с индуцированной гравитацией**. Механизм космологического ускорения в модели DGP устроен следующим образом: натяжение DGP-браны:

$$S_{\mu\nu} = -(8\pi G_4)^{-1}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + T_{\mu\nu}$$

В отсутствии материи ($T_{\mu\upsilon} = 0$) уравнение динамики

$$R_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}R = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\upsilon}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2\Pi_{\mu\upsilon} - \mathcal{E}_{\mu\upsilon}$$

квадратично по тензору Эйнштейна. Следовательно, возможно самоускоряющееся движение, то есть мы можем получить космологическое решение без дополнительной материи. Таким образом, геометрия начинает играть роль материи.

Используем ДеСиттеровский анзац с постоянной Хаббла H: $R_{\mu\upsilon} = 3H^2\, g_{\mu\nu}$. Подставим $\Pi_{\mu\nu} = -3\left(\frac{H^2}{16\pi G_4}\right)^2\, g_{\mu\nu}$.

Для $\mathcal{E}_{\mu\upsilon} \ll (G_5/G_4)^2H^4\, g_{\mu\nu} \to H^2 - L^2H^4 = 0$ порождается ДеСиттеровская стадия с характерным масштабом H = L^{-1}. Отождествляя с современным масштабом $L{\sim}10^{28}$ см, получим космологическое расширение.

Инфракрасные модификации ОТО

Модель DGP – инфракрасная модификация ОТО на малых расстояниях. Инфракрасными модификациями называются те модификации, в которых мы меняем гравитацию на малых масштабах, где не проверен закон Ньютона. Соответственно, ультрафиолетовые модификации - модификации на больших расстояниях, где модифицируются космологические постоянные, чтобы включить ускоренное расширение Вселенной.

Характерные масштабы:

- Планковский $M_p{\sim}10^{19}$ ГэВ
- Космологический m $\sim 10^{-33}$ эВ

Переход между ними в процессе эволюции осуществляется в промежуточной субмиллиметровой области:

$$\sqrt{mM} \sim 10^{-3}\ \text{эВ} \sim (10^{-2}\ \text{см})^{-1}$$

Казалось бы, DGP не противоречит экспериментам Кавендиша, но существует проблема *сильной связи*: нелинейные поправки к ОТО проявляются на больших масштабах (работают в солнечной системе, но портятся на больших расстояниях).

Введём такое понятие как **радиус Вайнштейна**. Линеаризованная теория справедлива, когда вклад 3го члена меньше вклада 2го, то есть отношение 3я поправка/2ая поправка << 1, то есть радиус Вайнштейна есть новая фундаментальная характеристика теории.

Лекция №11. Многомерная гравитация. Часть 3. Конформная гравитация

Модель Паули-Фирца и проблема ВанДама-Вельтмана -Захарова

Модель Паули-Фирца свободного массивного тензора поля – простейшая инфракрасная модель ОТО. Описывается квадратичной частью действия ОТО с некоторым инвариантным массовым членом на плоском фоне.

$$S_{mass}[g_{\mu\nu}] = -\frac{M_p^2}{16\pi}\int d^4x\left(\frac{m^2}{4}{h_{\mu\nu}}^2 - \frac{m^2}{4}h^2\right)$$

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \qquad h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

Это единственная комбинация без проблемных членов. Уравнение движения модели Паули-Фирца задается таким образом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\left(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h\right) = 8\pi G_4 T_{\mu\nu}$$

Дифференцируя и используя тождество Бьянки, получим «калибровку»

$$\partial^\mu\left(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h\right) = 0$$

В этой калибровке $R = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \Box h = 0$. В результате гравитационное поле:

$$h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_4}{\Box - m^2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

Тензорная природа пропагатора гравитона отличается от случая ОТО коэффициентом в правой части: **1/3 вместо 1/2 в ОТО**. Это сохраняется и в пределе $M \to 0$, что называется *проблемой ВанДама-Вельтмана-Захарова*: безмассовый предел не соответствует ОТО. Причина кроется в дополнительной продольной степени свободы.

Модель DGP эффективно описывается в линейном приближении моделью Паулини-Фирцас нелокальным массовым членом. Гравитационный потенциал от массового источника:

$$h_{\mu\nu} = -16\pi G_4\frac{1}{\Box - m\Delta}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

Дальнодействие материи на бране определяется пропагатором, который в области малых интервалов ($|x| << L = 1/m, |\Box| >> m^2$) совпадает с четырёхмерным.

В области ультра-больших расстояний гравитационная утечка в объем:

$$\frac{1}{\Box - m\Delta}\delta(x) \cong -\frac{1}{(2\pi)^4 m}\int d^4p\frac{\exp(ipx)}{\sqrt{p^2}} = -\frac{2}{m}\frac{1}{(2\pi)^5}\int d^5p\frac{\exp(ipx)}{p^2+p_5^2} = \frac{2}{m}\frac{1}{\Box_5}\delta^{(5)},$$

$$y = 0, \qquad |x| \gg \frac{1}{m}$$

То есть на больших расстояниях гравитация может уходить в том числе в объем, то есть локализация четырехмерного гравитона на бране не абсолютна, следовательно, радион не полностью стабилизирован, следовательно, есть проблема ВанДама-Вельтмана-Захарова (безмассовый предел не соответствует ОТО).

Другая трудность DGP - наличие низкого энергетического масштаба сильной связи. Это означает, что возникает иерархия масштабов длин: масштаб горизонта, масштаб сильной связи, масштаб перехода к инфракрасным состояниям, планковский масштаб.

Приливной заряд

Вспомним, как описывалось динамика в модели RS:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\Lambda_5 + (8\pi G_5)^2\Pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}$$

Правую часть равенства можно трактовать как уравнение Эйнштейна с правой частью. Запишем асимптотически-плоское сферически-симметричное решение:

$$ds^2 = \Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

И разложим его в ряд Тейлора:

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} \pm \frac{Q^2}{r^2} + \frac{Q^3}{r^3} + \cdots$$

Q – электрический/*приливной* заряд.

Метрика с Q в отличие от метрики Шварцшильда уже <u>может быть решением уравнения</u>. Что касается идеи MOND, гравитационный потенциал $\varphi = \frac{m}{r}$ используется для учета темной материи в виде $\varphi = \frac{m}{r}(1+\mu r)$, k - малая величина.

Эти поправки в закон Ньютона обсуждались ранее, на рис. 11.1 представлено их изображение. μ настолько мало, что если r тоже мало, то $1+\mu r$ настолько мало, что мы его отбрасываем и получаем стандартный ньютоновский потенциал. Когда r принимает больше значения, мы получаем константу.

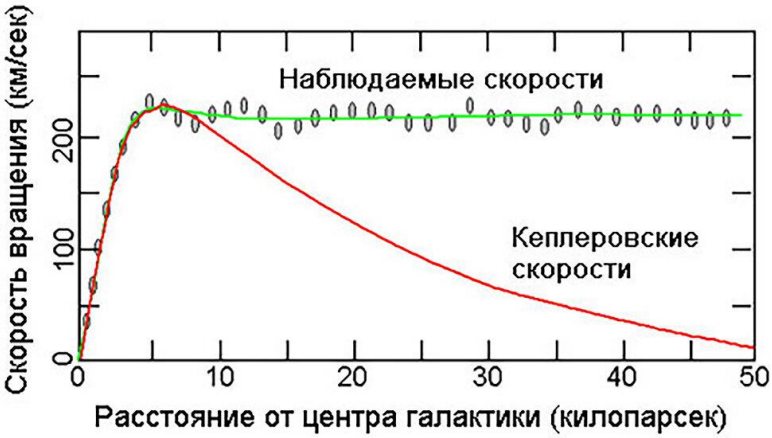


Рисунок 11.1 Поправки в закон Ньютона

Конформная гравитация

Конформная гравитация – это теория гравитации, альтернативная общей теории относительности (ОТО).

- Главное качество – перенормируема и унитарна т.е. в отличии от ОТО, которую нельзя проквантовать, в конформной гравитации эту проблему удаётся решить.
- Кандидат на роль квантовой теории гравитации
- Симметрия PT (parity time) заложена изначально
- Объяснение тёмной материи и тёмной энергии

Важными чертами ОТО являются наличие ньютоновского предела (теория должна воспроизводить наблюдательные данные). Способ описания, при котором наблюдатели могут двигаться с ускорением, при этом наблюдая одинаковую физику. Та физика, которую видят наблюдатели не зависит от того, в какой системе отчёта он находится. Центральную роль в описании играют символы Кристофеля

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}[\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\sigma}]$$

То есть, минимальный путь в пространстве с $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, описывается уравнением

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

Из символов Кристофеля строится тензор кривизны – тензор Римана. В плоском пространстве все его компоненты равны 0.

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}$$

При ненулевом тензоре кривизны разложение за метрику Шварцшильда даёт *Ньютоновский предел.*

Метрика Шварцшильда и её продолжение даёт решение для солнечной системы и других *наблюдаемых* ситуаций.

ОТО: что можно изменить

Уравнения Эйнштейна получаются из действия (минимальный выбор):

$$I_{UNIV} = I_{EH} + I_M = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R^{\alpha}_{\alpha} + I_M$$

Метрику Шварцшильда (как отражение реальной физики) можно получить и при более общем выборе действия. Рассмотрим конформно-инвариантное действие

$$I_{UNIV} = I_W + I_M = -\alpha_g\int d^4x\sqrt{-g}C_{\lambda\mu\nu\kappa}C^{\lambda\mu\nu\kappa} + I_M$$
$$\equiv -2\alpha_g\int d^4x\sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(R^{\alpha}_{\alpha})^2\right] + I_M$$

Здесь тензор Вейля:

$$C_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \frac{1}{6}R^{\alpha}_{\alpha}\left[g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}\right] - \frac{1}{2}\left[g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu}\right]$$

Уравнения поля:

$$-4\alpha_g W^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_M = 0$$

Здесь

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}_{\alpha})^{\beta}_{\beta} + R^{\mu\nu}{}^{\beta}_{\beta} - R^{\mu\beta}{}^{\nu}_{\beta} - R^{\nu\beta}{}^{\mu}_{\beta} - 2R^{\mu\beta}R^{\nu}_{\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{2}{3}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}_{\alpha})^{\beta}_{\beta}$$
$$+\frac{2}{3}(R^{\alpha}_{\alpha})^{\mu\nu} + \frac{2}{3}R^{\alpha}_{\alpha}R^{\mu\nu} - \frac{1}{6}g^{\mu\nu}(R^{\alpha}_{\alpha})^2$$

Закладывается конформная симметрия за счёт этого меняются действия и получается, что появляются дополнительные степени свободы, которые позволяют смоделировать космологическую постоянную и поэкспериментировать с Законом Ньютона. Это и есть объяснение тёмной материи и тёмной энергии.

В этой теории также есть вакуумное решение $R_{\mu\nu} = 0$. Значит, уравнения Эйнштейна – это **не** единственно возможный выбор уравнений гравитационного поля, отражающих реальность (метрику Шварцшильда). Возможен иной вариант уравнений поля для теории гравитации.

Конформная гравитация: Базовые положения

$$I_{\text{EFF}} = \int d^4x\sqrt{-g}C\left[\frac{1}{20}\left[R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(R^{\alpha}_{\alpha})^2\right] + \frac{1}{3}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$

Это не что иное, как

$$I_{\text{EFF}} = \alpha_g \int d^4x\sqrt{-g}C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Кроме прочего, инвариантно относительно

$$g_{\mu\nu}(x) \to e^{2\alpha(x)}g_{\mu\nu}(x)$$

Так как α_g – безразмерная константа, то это означает, что модель перенормируема! Уравнения поля 4-го порядка указывают на то, что модель неунитарна. В 2008м году нашли, что унитарности можно добиться.

Темная материя

Ввиду перенормируемости число квантов устремим к бесконечности, получим микроскопическое описание. Берем стандартную сферически симметричную метрику:

$$ds^2 = -B(r)dt62 + \frac{dr^2}{B(r)} + R^2 d\Omega_2$$

Уравнение поля четвертого порядка

$$\frac{3}{B(r)}(W_0^0 - W_r^r) = \nabla^4 B = B'''' + \frac{4B'''}{r} = \frac{(rB)''''}{r} = \frac{3}{4\alpha_g B(r)}(T_0^0 - T_r^r) \equiv f(r)$$

$$B(r > r_0) = 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r, \qquad 2\beta = \frac{1}{6}\int_0^{r_0} dr' r'^4 f(r'), \qquad \gamma = -\frac{1}{2}\int_0^{r_0} dr' r'^2 f(r')$$

так как метрика Шварцшильда экспериментально доказана. Тогда гравитационный потенциал

$$V^*(r) = -\frac{\beta^* c^2}{r} + \frac{\gamma^* c^2 r}{2}$$

В ОТО $\nabla^2\phi(r) = g(r)$, следовательно,

$$\phi(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r dr' r'^2 g(r') - \int_r^{\infty} dr' r' g(r'), \qquad \frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 g(r')$$

То есть у нас появилась добавка к гравитационному потенциалу, с помощью которой можно интерпретировать кривые вращения вдали от центра галактик, следовательно, мы можем выйти на плато. То есть **теория локальна**, что означает **локализацию темной материи**. В конформной гравитации, определив

$$f(r) = \nabla^4 B(r), \qquad h(r) = \frac{c^2 f(r)}{2}$$

Получим уравнение поля четвертого порядка:

$$\nabla^4 \phi(r) = h(r)$$

Общее решение:

$$\phi(r) = -\frac{r}{2}\int_0^r dr' r'^2 h(r') - \frac{1}{6r}\int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{1}{2}\int_r^\infty dr' r'^3 h(r') - \frac{r^2}{6}\int_r^\infty dr' r' h(r'),$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{1}{2}\int_0^r dr' r'^2 h(r') + \frac{1}{6r^2}\int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{r}{3}\int_r^\infty dr' r' h(r')$$

На потенциал влияет общее распределение материи во Вселенной, то есть естественным образом действует принцип Маха, что означает, что **конформная гравитация глобальна.**

Следовательно, фоновая метрика будет не плоская, как в стандартной версии, а FRW. В любой модели в качестве фона висит расширение Вселенной. Можно подобрать параметры фоновой FRW так, чтобы метрика описывала темную материю. Для этого сделаем преобразование

$$\rho = \frac{4r}{2(1+\gamma_0 r)^{1/2} + 2 + \gamma_0 r}, \qquad \tau = \int dt R(t)$$

И приведем метрику к виду:

$$-(1+\gamma_0 r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1+\gamma_0 r} + r^2 d\Omega_2$$
$$= \frac{1}{R^2(\tau)}\left(\frac{1+\frac{\gamma_0\rho}{4}}{1-\frac{\gamma_0\rho}{4}}\right)^2\left[-c^2 d\tau^2 + \frac{R^2(\tau)}{\left[1-\frac{\gamma_0^2\rho^2}{16}\right]}(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2)\right]$$

Метрика конформна открытой FRW с кривизной $K = -\frac{\gamma_0^2}{4}$. При этом $W^{\mu\nu} \to 0$ и в пределе слабого поля:

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} = \frac{v_{LOC}^2}{R} + \frac{\gamma_0 c^2}{2}$$

Используя астрономические данные

$$\gamma^* = 5.42 \times 10^{-41} cm^{-1}, \;\; \gamma_0 = 3.06 \times 10^{-30} cm^{-1}$$

Учитываем поправки от неоднородностей. На масштабах галактик добавляется еще один член:

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} = \frac{v_{LOC}^2}{R} + \frac{\gamma_0 c^2}{2} - \kappa c^2 R$$

С асимптотикой

$$\frac{v_{TOT}^2}{R} \to \frac{N^* \beta^* c^2}{R^2} + \frac{N^* \gamma^* c^2}{R^2} + \frac{\gamma_0 c^2}{2} - \kappa c^2 R, \qquad \kappa = \frac{1}{3c^2} \int_{r_{claus}}^{\infty} dr' r' h(r')$$

Из астрономии:

$$\kappa = 9.54 \times 10^{-54} cm^{-2} \approx (100 Mpc)^{-2}$$

Фактически мы получили еще одну версию MOND.

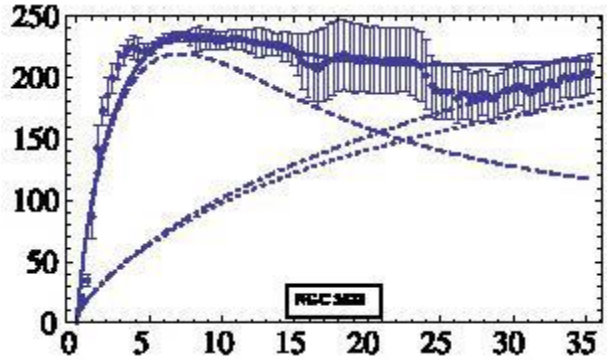


Рисунок 11.2 Фитирование кривых вращения

Связь ОТО с конформной гравитацией

Т'Хофт предложил в своей статье 2011 г. рассматривать конформный фактор как независимую степень свободы. Производится конформное преобразование $g_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x)\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. Действия Эйнштейна-Гильберта, не являющегося конформно-инвариантным, чтобы получить:

$$I_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\omega^2 \hat{R}_\alpha^\alpha - 6\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right)$$

где все определяется $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$. При переходе к интегралу по траекториям вместо меры $Dg_{\mu\nu}$ берется

$$D\omega D\left(\frac{g_{\mu\nu}}{\omega^2}\right) = D\omega D\hat{g}_{\mu\nu}$$

В результате получим действие конформной гравитации:

$$I_{EFF} = \frac{C}{120}\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left[\hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\hat{R}^{\alpha}_{\alpha}\right)^2\right]$$

Это означает, что работает принцип дополнительности. В нормальном состоянии мы работаем с ОТО, но, если нам нужно выйти на глобальные масштабы и объяснить космологические неоднородности, мы должны переходить к более сложным уравнениям поля.

Emergent gravity

Начнём с действия Эйнштейна-Гильберта:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(\mathrm{R} - 2\Lambda)$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}$$

Кручения нет

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} = 0 \;\rightarrow\; \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

Вводим $SO(3,1)$ связности ω^{ab}_{μ} и тетраду e^{a}_{μ}. Тогда действие перепишется как:

$$S_{EH} = \frac{1}{64\pi G}\int d^4x\epsilon_{abcd}\left(R^{ab}_{\mu\nu}e^{c}_{\rho}e^{d}_{\sigma} - \frac{\Lambda}{3}e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}e^{c}_{\rho}e^{d}_{\sigma}\right)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$R^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega^{ab}_{\nu} - \partial_\nu\omega^{ab}_{\mu} + \omega^{a}_{\mu c}\omega^{cb}_{\nu} - \omega^{a}_{\nu c}\omega^{cb}_{\mu}, \qquad T^{a}_{\mu\nu} = \mathcal{D}^{\omega}_{\mu}e^{a}_{\nu} - \mathcal{D}^{\omega}_{\nu}e^{a}_{\mu}$$

Теория Вильчека (1998):

$$\mathcal{L}_W = \kappa_3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{ABCDE}F^{AB}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi^C\nabla_\delta\phi^D\phi^E$$

$$\nabla_\gamma\phi^C = \partial_\gamma\phi^C + A^{C}_{\gamma F}\phi^F, \text{группа } SO(4,1)$$

Тензор поля

$$F^{AB}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A^{AB}_{\beta} - \partial_\beta A^{AB}_{\alpha} + f^{AB}_{CDEF}A^{CD}_{\alpha}A^{EF}_{\beta}$$

Структурные константы

$$f^{ABLMPQ} = \eta^{BL}\eta^{AP}\eta^{MQ} - \eta^{AL}\eta^{BP}\eta^{MQ} - \eta^{BM}\eta^{AP}\eta^{LQ} + \eta^{AM}\eta^{BP}\eta^{LQ}$$

Потенциал взаимодействия для ϕ^A имеет вид:

$$\mathcal{L}_1 = \kappa_1(\eta_{AB}\phi^A\phi^B - \nu^2)^2$$

Минимум потенциала при $\phi^A = 0 \; or \; when \; |\phi| = \nu. \; \phi^A = \delta_5^A \nu,$ откуда следует спонтанное нарушение симметрии, для которого

$$\mathcal{L}_2 = \kappa_2(J - \omega)^2, \qquad J = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{ABCDE}\phi^E\nabla_\alpha\phi^A\nabla_\beta\phi^B\nabla_\gamma\phi^C\nabla_\delta\phi^D$$

Получаем модель Вильчека

$$\mathcal{L}_W = \kappa_2(J - \omega)^2 + \kappa_1(\eta_{AB}\phi^A\phi^B - \nu^2)^2 + \kappa_3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{ABCDE}F^{AB}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi^C\nabla_\delta\phi^D\phi^E$$

Подставляя в лагранжиан Вильчека значения полей для спонтанно-нарушенного случая, их можно переписать как

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W &= \kappa_3\nu^3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{abcd}\left[\left(\partial_\alpha\omega^{ab}_\beta - \partial_\beta\omega^{ab}_\beta + f^{ab}_{cdef}\omega^{cd}_\alpha\omega^{ef}_\beta\right) - \Lambda e^a_\alpha e^b_\beta\right]e^c_\gamma e^d_\delta \\ &= \kappa_3\nu^3\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{abcd}\left[F^{ab}_{\alpha\beta} - \Lambda e^a_\alpha e^b_\beta\right]e^c_\gamma e^d_\delta\end{aligned}$$

Это соответствует лагранжиану Гильберта-Эйнштейна:

$$S_{EH} = \frac{1}{64\pi G}\int d^4x\epsilon_{abcd}\left(R^{ab}_{\mu\nu}e^c_\rho e^d_\sigma - \frac{\Lambda}{3}e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma\right)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Лекция №12. Петлевая квантовая гравитация

Основные идеи петлевой квантовой гравитации. Формализм Гамильтона

Литература

- Rakshit P. Vyas and Mihir J. Joshi «Loop Quantum Gravity: A Demystified View» Department of Physics, Saurashtra University, Rajkot, India.
- Wajiha Javed' - Mehak Antique' - Ali Övgün «Probing effective loop quantum gravity on weak gravitational lensing, Hawking radiation and bounding greybody factor by black holes»
- Misbah Afrin and Sushant G. Ghosh «Tests of Loop Quantum Gravity from the EHT Results of Sgr A»
- Carlo Rovelli and Francesca Vidotto «Philosophical Foundations of Loop Quantum Gravity»
- A Barrau, T Cailleteau, J Grain and J Mielczarek «Observational issues in loop quantum cosmology»

Петлевая квантовая гравитация (Loop quantum gravity (LQG)) не является основным направлением развития, но каждый месяц в мире на эту тему выходит 1-2 статьи на тему *петлевой квантовой гравитации*. Подход, который развивается в данном направлении, является перспективным.

Основные положения *петлевой квантовой гравитации* заключаются в том, чтобы, с одной стороны, сузить пространство решений, за счёт того, чтобы использовать разложение Арновита-Дезера-Мизнера изначально, а с другой стороны, функции – метрические функции, которые стоят с помощь преобразований привести к такому виду, чтобы они составляли замкнутую алгебру.

Считается, что теория предварительная (с 2014 года), непертурбативная и не зависит от фона. Её цель: квантование общей теории относительности.

Данная теория является альтернативным подходом к квантованию гравитации. Она не требует суперсимметрии или дополнительных измерений, но это не есть теория ВСЕГО. Другими словами, это квантовая геометрия на планковском масштабе.

Формализм Гамильтона (HF)

HF по-другому трактует пространство и время. Все теории квантуются через HF. Цель: корректная формулировка ОТО в HF. Разложение Арновита-Дезера-Мизнера

$$ds^2 = -(Ndt)^2 + q_{ab}(N^a dt + dx^a)(N^b dt + dx^b)$$

N – функция ошибок (lapse function), N^a – вектор сдвига (shift vector). Степени свободы: 10 компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, 1 значение для N, 3 значения для N^a, 6 значений q_{ab}.

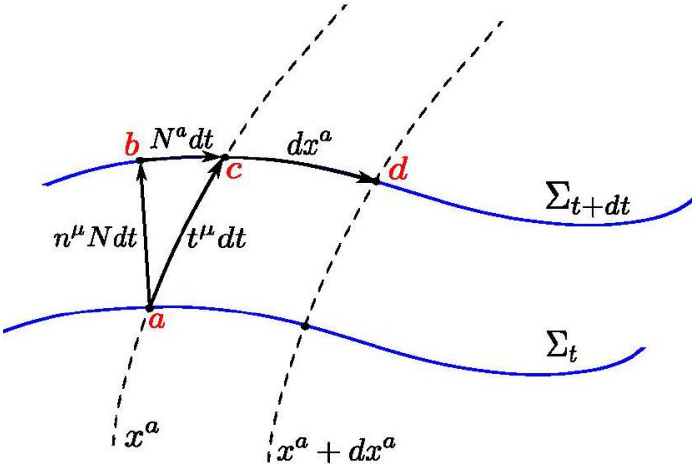


Рисунок 12.1 Функции сдвига и ошибок

Вводится понятие внешней кривизны K_{ab}. Лагранжиан зависит от следующих переменных $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$. Рассматриваются канонические моменты $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Гамильтониан представим в виде $H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$.

Фазовое пространство есть (p_i, q_i). Конфигурационное пространство $\dot{q}_i$. Уравнения Гамильтона $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. Скобка Пуассона $\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$. $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. В другой форме $\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \dot{p}_i = \{p_i, H\}$.

Понижение порядка уравнений: $f(q_i, p_i) = 0$, f - сохраняющаяся величина. Полный гамильтониан $H_{tot} = H_{init} + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i f_i$. Свойство скобки Пуассона: $\{A_i(x), E^j(y)\} = \delta_i^j \delta(x - y)$.

В общей теории относительности H = 0 формально нет временной эволюции. Динамические переменные сводятся к тождествам, канонические уравнения – калибровки, таким образом, все точки в фазовом пространстве физически эквивалентны. Кривизна добавляется к этим точкам, откуда получаем истинное положение в фазовом пространстве. **Главная идея**: использовать переменные как эффективное время с учетом того, какая калибровочная орбита описывается.

ОТО в переменных Аштекара

$$S = \frac{1}{2\varkappa}\int \sqrt{-g} R d^4x$$

$$g = g^{00} = 1/N^2, \qquad g^{0i} = N^i/N^2$$

Имеются 6 степеней свободы и 4 тождества => 2 степени свободы

Вводятся триады плотности (densitized triads)

$$E_i^a : \det(q)\, q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}$$

Вводятся SU(2) матрицы A_a^i, связанные со спиновыми коэффициентами Γ_a^i

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \ \ \gamma - \text{ свободный параметр}$$

Определив спиновые коэффициенты как

$$D_a V^i = \partial_a V^i + K_{aj}^i V^j$$

$$\Gamma_a^i = \Gamma_{aik} \epsilon^{jki}, K_a^i = K_{ab} E^{bi} (\det(q))^{-1/2}$$

$$\left\{A_a^i(x), E_j^b(y)\right\} = 8\pi G \gamma \delta_a^b \delta_j^i \delta(x-y)$$

Лагранжиан ОТО имеет вид:

$$L = \int_\Sigma d^3x \left(\frac{1}{8\pi G\gamma} E_i^a \dot{A}_a^j - NC - N^a C_a - N^i C_i \right)$$

$$C = \frac{1}{16\pi G} \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{|\det E|}} \left[\varepsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1+\gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right]$$

$$C_a = \frac{1}{8\pi G\gamma} (E_i^b F_{ab}^i - A_a^i C_i)$$

$$C_i = \frac{1}{8\pi G\gamma} \mathcal{D}_a E_i^a = \frac{1}{8\pi G\gamma} \left(\partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a \right)$$

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k - \text{кривизна Аштекара}$$

E_i^a, A_a^i – канонически сопряженные; N, N^a, N^i – лагранжевы множители

Комбинации от лагранжевых множителей:

- ⇨ (C) - констрейнт Гамильтона
- ⇨ (C_a) - констрейнт диффеоморфизмов
- ⇨ (C_i) - констрейнт Гаусса

Гамильтониан ОТО это комбинации этих констрейнтов $H_G = 0$. В переменных Аштекара ОТО встроена SU(2) калибровочная симметрия.

Смещенные (smeared) констрейнты

$$\mathcal{C}_1 = G[N^i] = \int_\Sigma d^3x N^i C_i\,, \qquad \mathcal{C}_2 = D[N^a] = \int_\Sigma d^3x N^a C_a\,, \qquad \mathcal{C}_3 = S[N] = \int_\Sigma d^3x NC$$

$$H_G[N, N^a, N^i] = G[N^i] + D[N^a] + S[N]$$

Так как гамильтониан стремится к 0, то

$$H_G[N, N^a, N^i] \approx 0, \qquad \partial_t H_G[N, N^a, N^i] \approx 0$$

Уравнение Гамильтона $\partial_t f = \{f, H_G[M^i, M^a, M]\}$ приводит к

$$\{H_G[N^i, N^a, N], H_G[M^i, M^a, M]\} \approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$\{G[N^i] + D[N^a] + S[N], G[M^i] + D[M^a] + S[M]\} \approx 0$$

Ввиду линейности скобок Пуассона условие выполняется для алгебры

$$\{C_I, C_J\} = f^K{}_{IJ}(A^j_b, E^a_i)C_K$$

Структурные константы $f^K{}_{IJ}(A^j_b, E^a_i)$ зависят от фазового пространства переменных Аштекара (A^j_b, E^a_i), то есть на поверхности $G[N^i] \approx 0$.

$$\{D[M^a], D[N^a]\} = D[M^b\partial_b N^a - N^b\partial_b M^a],$$

$$\{D[M^a], S[N]\} = S[M^a\partial_a N - N\partial_a M^a],$$

$$\{S[M], S[N]\} = sD[q^{ab}(M\partial_b N - N\partial_b M)]$$

Сигнатура метрики $s = 1$ – Лоренцева, $s = -1$ – Евклидова

Петлевая квантовая космология: основные идеи. Космологическая эволюция

Решение проблем темной материи и темной энергии отсутствует в петлевой квантовой космологии, так как нет никаких изменений в лагранжиане. За счет наличия квантового режима есть шанс найти решение проблемы начальной сингулярности.

Параметризация переменных Аштекара:

$$A^i_a = c\delta^i_a, \qquad E^a_i = p\delta^a_i$$

Где $p = a^2$ – масштабный фактор, c$\sim\partial_t a$ – параметр Хаббла =>

$$\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$$

Классический гамильтониан переходит в LQG гамильтониан с помощью замены c $\rightarrow \sin(\mu c)/\mu$:

$$\partial_t p = \{p, H_{eff}\}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$$

При $\rho = \rho_c$ вместо Большого взрыва возможен отскок.

Космологическая эволюция

Эффективный гамильтониан для N=1

$$\mathcal{C}_{eff} = \frac{3}{8\pi G\gamma^2}\frac{\sin 2(\lambda_b b)}{\lambda_b^2}V - \mathcal{C}_{matt}$$

получится модифицированное уравнение Фридмана. Плотность энергии равна

$$\rho = \frac{H_{matt}}{V} = \frac{3\sin 2(\lambda_b b)}{8\pi G\gamma^2\lambda_b^2}$$

Она достигает максимума когда $\sin 2(\lambda_b b) = 1$. Максимум плотности $\rho_c = 8(8\pi G\gamma^2\lambda_b^2)^{-1}$.

Уравнение движения для объема $\dot{V} = \frac{3}{\gamma\lambda_b}V\sin\lambda_b b\cos\lambda_b b$ дает модифицированное уравнение Фридмана

$$H^2 \coloneqq \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\dot{V}}{3V}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \qquad \rho_c = \frac{9}{2\alpha^2}\frac{1}{\lambda_b^2}$$

Для любой траектории есть квантовые точки поворота $b = \pm\pi/2\lambda$ (когда $\partial_t V = 0$) – отскок. Максимальная плотность

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2\gamma^3}m_{Pl}^4 \simeq 0.41 m_{Pl}^4$$

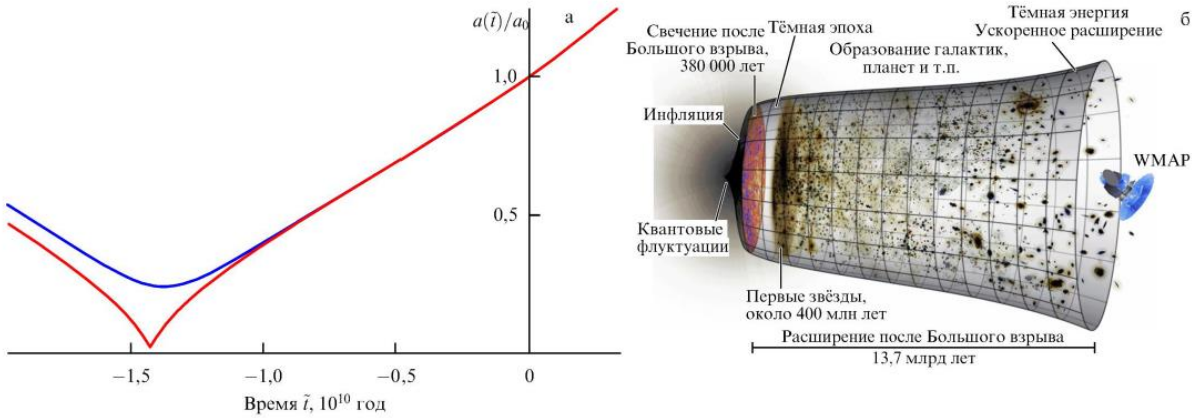


Рисунок 12.2 Отскок (bounce)

$$\frac{a}{a_0} = (c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0)^{1/3} \times \exp\left[\frac{-1}{3(4+3w)}\int_1^E \left(\frac{c^+E^2 + c_H E - c^-}{c^+E^2 - \tilde{p}_0 E + c^-}\right)\frac{dE}{E}\right]$$
$$= \left(c^+E + \frac{c^-}{E} - \tilde{p}_0\right)^{(1+w)/(4+3w)} \exp\frac{-2c_H(A - A_0)}{3(4+3w)\sqrt{\Delta}}$$

В стандартной версии космологического решения в момент времени t = 0 масштабный фактор тоже равен нулю, это означает знаменитую начальную сингулярность, с которой началась Вселенная (рис.6.1). В полученном нами решении есть второй член, за счет которого, не доходя до 0, масштабный фактор развернется. Этот разворот вместо сингулярности и называется *отскок (bounce).*

При H=0 |a|>0 Космологическая эволюция в LQG содержит отскок, решается проблема квантового режима при Большом взрыве.

Вселенная с отскоком и инфляцией

Задача состоит в том, что необходимо включить инфляцию в LQG. Для этого нужно скалярное поле, так как инфляция невозможна без материи, которая обеспечивает переход к экспоненциальному расширению. Поле Хиггса не может играть роль инфлатона, скалярного поля, которое отвечает за инфляцию, но других фундаментальных полей в LQG нет.

Чтобы запустить инфляцию, начальные данные не могут быть произвольными, значит необходим fine-tuning (точная подстройка). Чем меньше точной подстройки, тем более общая и точная получается модель.

Условие начала инфляции

$$\epsilon := \frac{(\dot{\varphi})^2}{(\dot{\varphi})^2 + 2V(\varphi)} \ll 1 \quad and \;\; \eta := -\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1$$

Первое условие позволит Вселенной войти в режим ускоренного расширения при инфляции. Чтобы достичь нужной величины инфляции, $N_{inf} > 60$ (функция ошибок для инфляционной стадии из переменных Аштекера).

$$N_{inf} \coloneqq \int_{t_i}^{t_f} H(t)dt \simeq -8\,\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \left(\frac{V}{V_{,\varphi}}\right) d\varphi$$

Беря slow-roll потенциал $V(\varphi) = \lambda\varphi^a$, можно выразить функцию ошибок через значение поля:

$$N_{inf} = 4\pi G(\varphi_i^2 - \varphi_f^2)/\alpha$$

Тогда начальное значение скалярного поля:

$$\varphi_i > 2.1\sqrt{\alpha}m_{Pl}$$

В петлевой квантовой гравитации отскок получается естественным образом. Более того отскок сосуществует с инфляцией. Это происходит за счет того, что мы сужаем пространство, введя метрики и ограничения. Отскок не обязательно установит скалярное поле в положение для инфляции. Нужен fine-tuning.

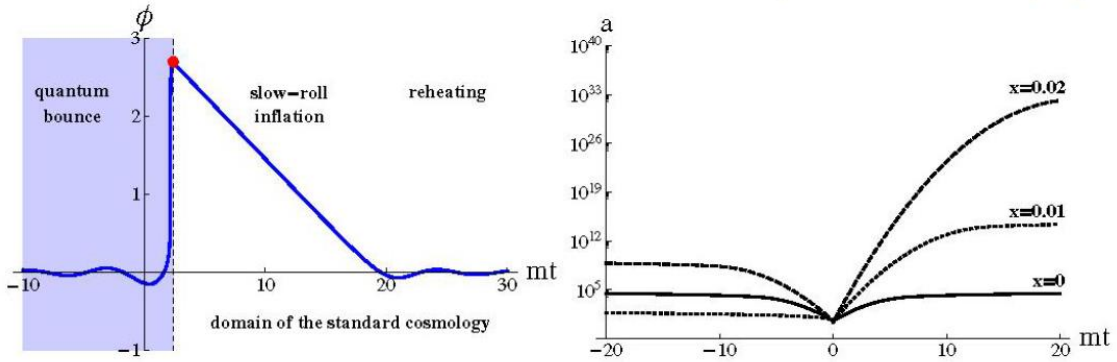


Рисунок 12.3 Левая панель: эволюция скалярного поля как функция космического времени в скачущей вселенной. Поле сначала испытывает колебания во время сжатия, затем увеличивает свой потенциал, чтобы, наконец, вступить в фазу линейного изменения со временем, соответствующую медленной инфляции. Правая панель: эволюция масштабного фактора как функции космического времени. Время t = 0 соответствует отскоку.

Петлевая квантовая космология: выводы. Локальные решения

Плюсы

- ⇨ Петлевая квантовая космология — это часть петлевой квантовой гравитации
- ⇨ Модель хорошо определена и самосогласована
- ⇨ Дает интересные сценарии космологической эволюции и возмущений
- ⇨ Разрешает космологические сингулярности, вычисляет пропагатор гравитрона
- ⇨ Не имеет противоречий с существующими астрономическими данными
- ⇨ Имеет предел в виде стандартной модели

Минусы

1) Не решает проблемы объединений взаимодействий
2) Масштаб квантовых явлений неясен
3) Не имеет критических предсказаний (2022)
4) Неясна ситуация с локальными решениями и их сингулярностями

Локальные решения. Решение вида «чёрная дыра»

Можно записать в следующем виде метрики сферической симметрии:

$$ds^2 = -\frac{1}{F(t)}dt^2 + \left(\frac{2b}{r_s}\right)^2 F(t)dr^2 + t^2 d\Omega^2$$

В качестве фона рассматриваем метрику Фридмана, где

$$F(t) = \frac{1}{4}\left[f' \circ f^{-1}\left(\frac{r_s}{t} - 1\right)\right]^2 = \left[2\frac{df^{-1}}{dx}\left(\frac{r_s}{t} - 1\right)\right]^{-2}$$

Стандартная метрика Шварцшильда используется для того, чтобы согласовать теорию с наблюдением. Если у модели нет асимптотики хотя бы в виде Шварцшильда, то эта она не работает. Соответственно, вне горизонта у нас будет метрика Шварцшильда

Вне горизонта $f(t) \approx x^2$, следовательно $F(t) \approx \left|\frac{r_s}{t} - 1\right|$ – Sw.

Внутри горизонта $F(t) = \left(\frac{r_s}{t} - 1\right)\left[1 + \rho^2 - \rho^2\frac{r_s}{t}\right]$

Следовательно, появляются внутренние горизонты, при этом инвариант кривизны $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ конечен. Если инвариант кривизны конечен, следовательно, это сингулярность, которую можно устранить с помощью преобразования координат. Если инвариант расходится, то это физическая сингулярность. Внутренние горизонты, которые появляются если мы рассмотрим поведение внутри функции инвариант кривизны конечен, то, когда мы подходим к началу координат, инвариант кривизны ведёт себя как:

При $r \to 0$ $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \sim t^{-2} \to \infty$ (Sw t^{-6}). Получаем аналог метрики Рейснера-Нордстрема.

Лекция №13. Телепараллельная гравитация

Основная идея телепараллельной гравитации. Основные величины

Литература

1) Sebastian Bahamonde and Jackson Levi Said «Teleparallel Gravity: Foundations and Observational Constraints-Editorial»
2) Sebastian Bahamonde, Konstantinos F. Dialektopoulos «Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology»

Основная идея телепараллельной гравитации

Замена кривизны кручением для реализации механизма, при котором геометрическая деформация создает гравитационное поле. Teleparallel equivalent of General Realativity – TEGR.

Основные величины (независимы)

- Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ – 10 компонент
- Афинная связность $\acute{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$ – 64 компоненты

Тензор кривизны

$$\hat{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho} + \hat{\Gamma}^{\mu}_{\tau\rho}\hat{\Gamma}^{\tau}_{\nu\sigma} - \hat{\Gamma}^{\mu}_{\tau\sigma}\hat{\Gamma}^{\tau}_{\nu\rho}$$

Тензор кручения

$$\hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} = \hat{\Gamma}^{\mu}_{\rho\nu} - \hat{\Gamma}^{\tau}_{\nu\rho}$$

Тензор неметричности

$$\hat{Q}_{\mu\nu\rho} = \hat{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} - \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\rho\mu} g_{\nu\sigma}$$

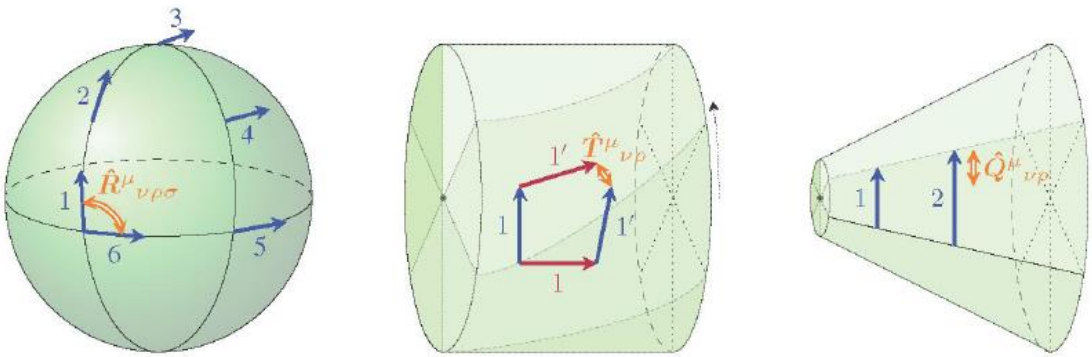


Рисунок 13.1 Схематическое геометрическое представление тензоров кривизны, кручения и неметричности по их влиянию на параллельный перенос векторов.

Введём такие понятия как: кривизна - изменение вектора при параллельном переносе; кручение - несимметричность при изменении порядка операций; неметричность - изменение длины вектора при переносе.

Соотношение между наборами величин. Частные случаи, их соотношения

Тождество Бьянки $\hat{R}^{\mu}_{[\nu\rho\sigma]} = \hat{\nabla}_{[\nu}\hat{T}^{\mu}_{\rho\sigma]} + \hat{T}^{\mu}_{\omega[\nu}\hat{T}^{\omega}_{\rho\sigma]}$, $\hat{\nabla}_{[\omega}\hat{R}^{\mu}_{|\nu|\rho\sigma]} = -\hat{R}^{\mu}_{\nu\tau[\omega}\hat{T}^{\tau}_{\rho\sigma]}$ проверяется прямым вычислением.

В случае $\hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} = 0$ реализуется обычный вид тождеств Бьянки

$$\hat{R}^{\mu}_{[\nu\rho\sigma]} = 0, \qquad \hat{\nabla}_{[\omega}\hat{R}^{\mu}_{|\nu|\rho\sigma]} = 0$$

Разложение афинной связи

$$\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \coloneqq \Gamma^{\circ\rho}_{\mu\nu} + \hat{K}^{\rho}_{\mu\nu} + \hat{L}^{\rho}_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\circ\rho}_{\mu\nu} \coloneqq \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}\right)$$

$$\hat{K}^{\rho}_{\mu\nu} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{T}^{\mu}{}_{\nu}{}_{\rho} + \hat{T}^{\mu}{}_{\rho}{}_{\nu} - \hat{T}^{\mu}{}_{\nu\rho}\right), \hat{L}^{\rho}_{\mu\nu} \coloneqq \frac{1}{2}\left(\hat{Q}^{\mu}{}_{\nu\rho} - \hat{Q}^{\mu}{}_{\nu}{}_{\rho} - \hat{Q}^{\mu}{}_{\rho}{}_{\nu}\right)$$

Независимость кручения от метрики (выписка из статьи)

1. $\hat{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0$: In the case of vanishing curvature, the connection is said to be flat. This case is also known as (general) teleparallel geometry, if both torsion and non-metricity are present.

2. $\hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} \equiv 0$: If the torsion vanishes, the connection is called symmetric, since the connection coefficients satisfy $\hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \equiv 0$. This case is considered, e.g., in Weyl gravity.

3. $\hat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: For vanishing non-metricity, the connection is called metric-compatible, and the corresponding geometry is known as Riemann-Cartan geometry. This choice of the connection is used in Poincaré gauge theory.

4. $\hat{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \hat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: If only torsion is nonvanishing, one obtains the case of metric (also called torsional) teleparallel geometry, which is the main topic of this Review. For the metric teleparallel connection and its related quantities, we will omit the hat, and simply write $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$.

5. $\hat{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} \equiv 0$: An alternative class of geometries is obtained by demanding that only non-metricity is nonvanishing. This class of geometries is known as symmetric teleparallelism. We will denote the symmetric teleparallel connection and its associated quantities with a diamond on top, i.e., $\Gamma^{\circ\rho}_{\mu\nu}$

6. $\hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} \equiv 0, \hat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0$: The most well known class of geometries, which is also most commonly used in the description of gravity theories, including GR and its extensions, is the symmetric and metric-compatible connection. In this case the connection is uniquely determined as the Levi-Civita connection, which we denote by a circle, i.e., $\Gamma^{\circ\rho}_{\mu\nu}$

7. $\hat{Q}_{\mu\nu\rho} \equiv 0, \hat{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv 0, \hat{T}^{\mu}_{\nu\rho} \equiv 0$: Finally, if all tensorial quantities vanish, also the metric is constrained, and one finds the case of Minkowski space. In this case the metric-affine geometry is fixed up to diffeomorphisms and does not carry any gravitational DoF.

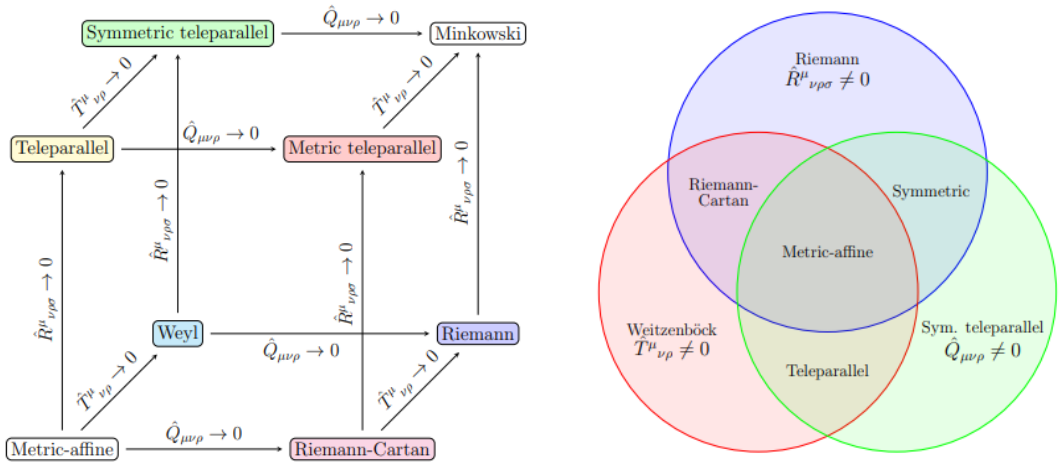


Рисунок 13.2 и 13.3 Соотношение частных случаев

Запись тензоров через тетрады. Преобразование тетрад

Кривизна

$$\hat{R}^{A}{}_{B\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu \hat{\omega}^{A}{}_{B\nu} - \partial_\nu \hat{\omega}^{A}{}_{B\mu} + \partial_\mu \hat{\omega}^{A}{}_{B\nu} + \hat{\omega}^{A}{}_{C\mu} \hat{\omega}^{C}{}_{B\nu} - \hat{\omega}^{A}{}_{C\nu} \hat{\omega}^{C}{}_{B\mu}$$

Кручение

$$\hat{T}^{A}{}_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu e^{A}{}_{\nu} - \partial_\nu e^{A}{}_{\mu} + \hat{\omega}^{A}{}_{B\mu} e^{B}{}_{\nu} - \hat{\omega}^{A}{}_{B\nu} e^{B}{}_{\mu}$$

Неметричность

$$\hat{Q}_{\mu AB} \coloneqq -\eta_{AC} \hat{\omega}^{C}{}_{B\mu} - \eta_{CB} \hat{\omega}^{C}{}_{A\mu}$$

Тогда

$$\hat{R}^A{}_{B\mu\nu} = e^A{}_\rho E_B{}^\sigma \hat{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu}, \qquad \hat{R}^\mu{}_{\nu\mu\sigma} = E_A{}^\mu e^B{}_\nu \hat{R}^A{}_{B\rho\sigma},$$

$$\hat{T}^A{}_{B\mu\nu} = e^A{}_\rho \hat{T}^\rho{}_{\mu\nu}, \qquad \hat{T}^\mu{}_{\nu\rho} = E_A{}^\mu \hat{T}^A{}_{\nu\rho},$$

$$\hat{Q}_{\mu AB} = E_A{}^\nu E_B{}^\rho \hat{Q}_{\mu\nu\rho}, \qquad \hat{Q}_{\mu\nu\rho} = e^A{}_\nu e^B{}_\rho \hat{Q}_{\mu AB},$$

Разложение спиновых связностей:

$$\hat{\omega}^A_{B\mu} \coloneqq \omega^{\circ A}_{B\mu} + \hat{K}^A_{B\mu} + \hat{L}^A_{B\mu}$$

Преобразования тетрад

Выбор тетрады и спиновых связностей не единственен. Замена $e^A{}_\mu \longmapsto e'^A{}_\mu = \Lambda^A{}_B e^B{}_\mu$, $\eta_{AB}\Lambda^A{}_C\Lambda^B{}_D = \eta_{CD}$ приводит к правилу для:

$$\hat{\omega}^A{}_{B\mu} \longmapsto \hat{\omega}'^A{}_{B\mu} = \Lambda^A{}_C(\Lambda^{-1})^D{}_B \hat{\omega}^C{}_{D\mu} + \Lambda^A{}_C \partial_\mu (\Lambda^{-1})^C{}_B$$

Выбор калибровки: $\omega^A{}_{B\mu} \equiv 0$ (калибровка Вейтзенбока), откуда $\omega'^A{}_{B\mu} = \Lambda^A{}_C \partial_\mu (\Lambda^{-1})^C{}_B$. Инфинитезимальные преобразования Лоренца:

$$\Lambda^A{}_B = \delta^A_B + \lambda^A{}_B$$

$$\eta_{CD} = \eta_{AB}(\delta^A_C + \lambda^A{}_C)(\delta^B_D + \lambda^B{}_D) = \eta_{CD} + 2\lambda_{(CD)} + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad => \qquad \lambda_{(AB)} = 0$$

Запись через внешнее произведение

Кривизна

$$\hat{\mathbf{R}}^A{}_B \coloneqq \frac{1}{2}\hat{R}^A{}_{B\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d\hat{\boldsymbol{\omega}}^A{}_B + \hat{\boldsymbol{\omega}}^A{}_C \wedge \hat{\boldsymbol{\omega}}^C{}_B$$

Кручение

$$\hat{\mathbf{T}}^A \coloneqq \frac{1}{2}\hat{T}^A{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = D\mathbf{e}^A = d\mathbf{e}^A + \hat{\boldsymbol{\omega}}^A{}_B \wedge \mathbf{e}^B$$

Неметричность

$$\hat{Q}_{AB} \coloneqq \hat{Q}_{\mu AB} dx^\mu = D\eta_{AB} = d\eta_{AB} - \hat{\boldsymbol{\omega}}^C{}_{A\mu} \wedge \eta_{CB} - \hat{\boldsymbol{\omega}}^C{}_B \wedge \eta_{AC}$$

Спиновая связность:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^A_{B\mu} \coloneqq \boldsymbol{\omega}^{\circ A}_{B\mu} + \hat{\mathbf{K}}^A_{B\mu} + \hat{\mathbf{L}}^A_{B\mu}$$

Тождества Бьянки

$$D\widehat{\mathbf{T}}^A = \widehat{\mathbf{R}}^A{}_B \wedge \mathbf{e}^B, \qquad D\widehat{\mathbf{R}}^A{}_B = 0$$

Гравитационное взаимодействие: формулировка

Скалярная кривизна

$$R^\circ = K^\mu{}_{\rho\nu}K^{\rho\nu}{}_\mu - K^\mu{}_{\rho\mu}K^{\rho\nu}{}_\nu - 2\nabla^\circ{}_\mu K^{\mu\nu}{}_\nu = -T + 2\nabla^\circ{}_\mu T_\nu{}^{\nu\mu}$$

В симметричном случае

$$R^\circ = L^{\circ\mu\nu\rho}L^\circ{}_{\rho\mu\nu} - L^{\circ\mu}{}_{\mu\rho}L^{\circ\rho\nu}{}_\nu + \nabla^\circ{}_\nu L^\circ{}_\mu{}^{\mu\nu} - \nabla^\circ{}_\mu L^{\circ\mu\nu}{}_\nu = -Q^\circ + \nabla^\circ{}_\nu Q^\circ{}_\mu{}^{\mu\nu} - \nabla^\circ{}_\mu Q^{\circ\mu\nu}{}_\nu$$

Действие

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2}\int dx^4\sqrt{-g}R^\circ, \qquad S_{TEGR} = -\frac{1}{2\kappa^2}\int dx^4\sqrt{-g}T^\circ,$$
$$S_{STEGR} = -\frac{1}{2\kappa^2}\int dx^4\sqrt{-g}Q^\circ$$

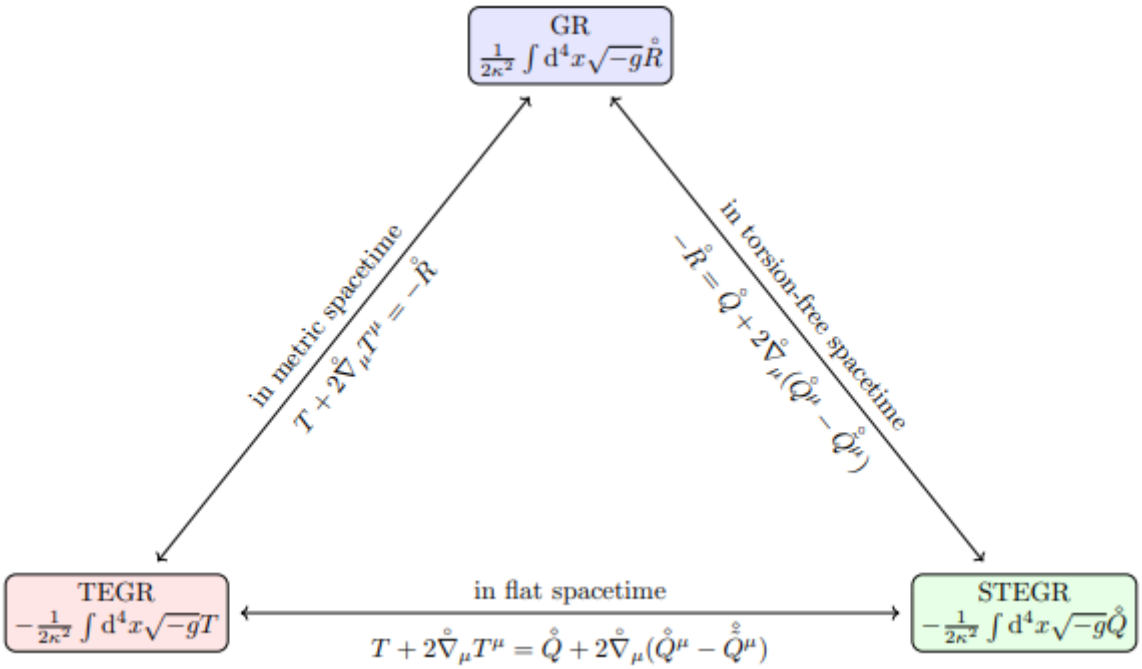


Рисунок 13.4 Тройка гравитации. Стрелками показаны соотношения, связывающие скаляр Риччи связности Леви-Чивиты со скалярами кручения и неметричности.

TEGR как калибровочная теория. Космология в TEGR, в f (T, B) гравитации

Преобразование координат $\tilde{x}^A \longmapsto x^A + \epsilon^A$, инфинитезимальное $\delta_\epsilon x^A = \epsilon^B \partial_B x^A$, для поля $\delta_\epsilon\ \Psi\big(\tilde{x}^A(x^\mu)\big) = \epsilon^A \partial_A \Psi\big(\tilde{x}^B(x^\mu)\big)$, откуда следует, что

$$\delta_\epsilon\ \big(\partial_\mu \Psi\big) = \epsilon^A \partial_A \big(\partial_\mu \Psi\big) + \big(\partial_\mu \epsilon^A\big)\partial_A \Psi$$

Введением калибровочного потенциала $B_\mu = B^A{}_\mu \partial_A$, второй член можно убрать. Вводя калибровочную производную $\mathbf{e}_\mu \Psi \coloneqq \partial_\mu \Psi + B^A{}_\mu \partial_A \Psi$, получим

$$\delta_\epsilon\ \big(\mathbf{e}_\mu \Psi\big) = \epsilon^A \partial_A \big(\partial_\mu \Psi\big) \quad => \quad \partial_\mu \Psi \to \mathbf{e}_\mu \Psi$$

$$e^A{}_\mu \partial_A \Psi = \mathbf{e}_\mu \Psi = (\partial_A \Psi)\big(\partial_\mu x^A\big) + B^A{}_\mu \partial_A \Psi, \qquad e^A{}_\mu = \partial_\mu x^A + B^A{}_\mu$$

Калибровочная теория трансляций

Преобразование координат $x^A \longmapsto \Lambda^A{}_B(x) x^B = x'^A$, калибровочный потенциал $B^A{}_\mu = \Lambda^A{}_B(x) B^B{}_\mu$. Поле

$$\mathbf{e}_\mu \Psi = e^A{}_\mu \partial_A \Psi = \partial_\mu \Psi + \omega^A{}_{B\mu} x^B \partial_A \Psi + B^A{}_\mu \partial_A \Psi, \qquad e^A{}_\mu = \partial_\mu x^A + B^A{}_\mu$$

Спиновая связь $\omega^A{}_{B\mu} = \Lambda^A{}_B(x) \partial_\mu \Lambda_A{}^B(x)$, тетрада разбивается на $h^A{}_\mu = \partial_\mu x^A + \omega^A{}_{B\mu} x^B = \mathcal{D}_\mu x^A$, причём $e^A{}_\mu = h^A{}_\mu + B^A{}_\mu$, откуда

$$\delta_\epsilon\ B^A{}_\mu = -\mathcal{D}_\mu \epsilon^A$$

Для описания гравитации $\partial_\mu \to \nabla^\circ{}_\mu$. Уравнение геодезических:

$$u^\mu \nabla^\circ{}_\mu u^\nu = \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^{\circ\nu}{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

По аналогии с электродинамикой определяем силу гравитационного поля:

$$T^A{}_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu B^A{}_\nu - \partial_\nu B^A{}_\mu + \omega^A{}_{B\mu} B^B{}_\nu - \omega^A{}_{B\nu} B^B{}_\mu$$

Используя $\big[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu\big] x^A \equiv \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu x^A) - \mathcal{D}_\nu\big(\mathcal{D}_\mu x^A\big) = 0$, переопределим силу гравитационного поля:

$$T^A{}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} e^A{}_{\nu]} + \omega^A{}_{B[\mu} e^B{}_{\nu]} = \partial_\mu e^A{}_\nu - \partial_\nu e^A{}_\mu + \omega^A{}_{B\mu} e^B{}_\nu - \omega^A{}_{B\nu} e^B{}_\mu$$

С учётом того, что $T'^A{}_{\mu\nu} = T^A{}_{\mu\nu}$, можно упростить

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = E_A{}^{\rho} T^A{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\rho}{}_{[\nu\mu]}$$

$$\text{где} \quad \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \coloneqq E_A{}^{\rho}\left(\partial_\mu e^A{}_\nu + \omega^A{}_{B\mu} e^B{}_\nu\right) \equiv E_A{}^{\rho} \mathcal{D}_\mu \epsilon^A{}_\nu$$

Если спиновые связности = 0, тогда $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} \coloneqq E_A{}^{\rho} \partial_\mu e^A{}_\nu$, откуда

$$T^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^A{}_\nu - \partial_\nu e^A{}_\mu$$

$$R^A{}_{B\nu\mu} \equiv \partial_\nu \omega^A{}_{B\mu} - \partial_\mu \omega^A{}_{B\nu} + \omega^A{}_{C\nu}\omega^C{}_{B\mu} - \omega^A{}_{C\mu}\omega^C{}_{B\nu} = 0$$

Скалярное поле

В отсутствии гравитации $F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$, с учётом $F_{\mu\nu} \to 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} + T^{\sigma}{}_{\mu\nu}A_\sigma$, скалярное поле без гравитации

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\nabla^{\circ}{}_\mu\phi\nabla^{\circ}{}_\nu\phi - \mu^2\phi^2\right)$$

Уравнение КГФ: $\Box^{\circ}\phi + \mu^2\phi = 0$, $\quad \Box^{\circ}\phi = e^{-1}\partial_\sigma(e\partial^\sigma\phi)$, $\quad e = \det(e^A{}_\mu) = \sqrt{-g}$, учитывая, что

$$\partial_\mu e = \partial_\mu\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_\mu g = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\Gamma^{\circ\sigma}{}_{\sigma\mu} = e\left(\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - K^\sigma{}_{\mu\sigma}\right)$$

Оператор Лапласа-Бельтрами

$$\begin{aligned}\nabla^{\circ}{}_\mu\nabla^{\circ\mu}\phi = \nabla^{\circ}{}_\mu\partial^\mu\phi = \Box^{\circ}\phi = e^{-1}\left[e\partial_\mu(\partial^\mu\phi) + (\partial^\mu\phi)\partial_\mu e\right]\\ = e^{-1}\left[e\partial_\mu(\partial^\mu\phi) + (\partial^\mu\phi)e\left(\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - K^\sigma{}_{\mu\sigma}\right)\right] = \left[\partial_\mu + \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - K^\sigma{}_{\mu\sigma}\right]\partial^\mu\phi\end{aligned}$$

Уравнение КГФ: $\left[\partial_\mu + \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} - K^\sigma{}_{\mu\sigma}\right]\partial^\mu\phi + \mu^2\phi = 0$

Фермионное поле

Без гравитации

$$\mathcal{L}_\psi \coloneqq \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar\psi\gamma^A H_A{}^\mu\partial_\mu\psi - H_A{}^\mu\partial_\mu\bar\psi\gamma^A\psi\right) - mc^2\bar\psi\psi$$

Уравнение Дирака

$$i\hbar\gamma^A H_A{}^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$$

Включая гравитацию

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar\psi\gamma^A H_A{}^\mu \partial_\mu\psi - H_A{}^\mu\partial_\mu\bar\psi\gamma^A\psi\right) - mc^2\bar\psi\psi$$
$$\to \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar\psi\gamma^A E_A{}^\mu \mathrm{D}_\mu\psi - E_A{}^\mu\mathrm{D}_\mu\bar\psi\gamma^A\psi\right) - mc^2\bar\psi\psi\,,$$

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar\psi\gamma^A E_A{}^\mu \mathring{\nabla}_\mu\psi - E_A{}^\mu\mathring{\nabla}_\mu\bar\psi\gamma^A\psi - e^a{}_{\bar\mu} g^{\bar\mu\mu} e^b{}_\lambda e^c{}_{\bar\rho} g^{\bar\rho\rho} K^\lambda{}_{\rho\mu}\{\gamma_a,[\gamma_c,\gamma_c]\}\psi\right) - mc^2\bar\psi\psi$$

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{ic\hbar}{2}\left(\bar\psi\gamma^A E_A{}^\mu \mathring{\nabla}_\mu\psi - E_A{}^\mu\mathring{\nabla}_\mu\bar\psi\gamma^A\psi - 2i\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}T_{\lambda\rho\mu}\bar\psi\gamma^5\gamma_\nu\psi\right) - mc^2\bar\psi\psi$$

Бозонное поле

Учёт гравитации

$$\partial_\sigma A^\mu \to \mathring{\nabla}_\sigma A^\mu = \partial_\sigma A^\mu + \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - K^\mu{}_{\nu\sigma}\right)A^\nu$$

$$\left[\mathring{\nabla}_\mu, \mathring{\nabla}_\nu\right]A^\mu = \mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu A^\mu - \mathring{\nabla}_\nu\mathring{\nabla}_\mu A^\mu = \mathring{R}_{\mu\nu}A^\mu = -P_{\mu\nu}A^\mu\,,$$

$$P^\sigma{}_{\mu\nu\rho} := \partial_\nu K^\sigma{}_{\mu\rho} - \partial_\rho K^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\theta\nu}K^\theta{}_{\mu\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\theta\rho}K^\theta{}_{\mu\nu}$$
$$- \Gamma^\theta{}_{\mu\nu}K^\sigma{}_{\theta\rho} + \Gamma^\theta{}_{\mu\rho}K^\sigma{}_{\theta\nu} + K^\sigma{}_{\theta\rho}K^\theta{}_{\mu\nu} - K^\sigma{}_{\theta\nu}K^\theta{}_{\mu\rho}\,.$$

Уравнение Максвелла $\mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}^\mu A^\nu + P^\nu{}_\mu A^\mu = 0$

Уравнение геодезических

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = K^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}$$

Конформная и дисформная симметрии

Преобразование метрики, зависящее только от поля - конформное:

$$\tilde g_{\mu\nu} = \mathfrak{A}(\phi)g_{\mu\nu}$$

Допуская зависимость от первых производных поля – дисформное

$$\tilde g_{\mu\nu} = \mathfrak{A}(\phi, X)g_{\mu\nu} + \mathfrak{B}(\phi, X)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

Здесь X - кинетический член: $X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$

Переходя к тетрадам

$$\tilde{e}^A{}_\mu = \mathfrak{C}(\phi, X) e^A{}_\mu + \mathfrak{D}(\phi, X) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\nu\rho} e^A{}_\rho$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^2 \,, \quad \mathfrak{B} = 2\mathfrak{D}(\mathfrak{C} - X\mathfrak{D})$$

Метрика

$$\tilde{g} = \mathfrak{A}^3(\mathfrak{A} - 2X\mathfrak{B}) g = \mathfrak{C}^6(\mathfrak{C} - 2X\mathfrak{D})^2 g$$

Кручение

$$\tilde{T}^A{}_{\mu\nu} = \mathfrak{C} T^A{}_{\mu\nu} + 2\partial_{[\mu} \mathfrak{C} e^A{}_{\nu]} + 2\eta^{AB} E_B{}^\rho \left(\partial_\rho \phi \partial_{[\mu} \mathfrak{D} \partial_{\nu]} \phi + \mathfrak{D} \partial_{[\nu} \phi \nabla_{\mu]} \partial_\rho \phi \right)$$

Телепараллельная формулировка теории гравитации

$$\mathcal{S}_{\mathrm{TG}} := \mathcal{S}_{\mathrm{g}}[e, \omega] + \mathcal{S}_{\mathrm{m}}[e, \chi]$$

S_g зависит от тетрады и спиновых связностей, S_m зависит от тетрады и полей материи, но не зависит от спиновых связностей. Вариация материальной части после удаления старших производных:

$$\delta \mathcal{S}_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}^4 x \, e \left(\Theta_A{}^\mu \delta e^A{}_\mu + \Omega_I \delta \chi^I \right),$$

Вариация гравитационной части:

$$\delta \mathcal{S}_{\mathrm{g}} = -\int \mathrm{d}^4 x \, e \left(W_A{}^\mu \delta e^A{}_\mu + Y_A{}^{B\mu} \delta \omega^A{}_{B\mu} \right)$$

Тензоры W и Y появляются после интегрирования по частям.
Уравнения

$$W_{\mu\nu} = e^A{}_\mu g_{\rho\nu} W_A{}^\rho \,, \quad \Theta_{\mu\nu} = e^A{}_\mu g_{\rho\nu} \Theta_A{}^\rho \,, \; W_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}$$

Действие

$$\mathcal{S}_{\mathrm{TEGR}} := -\frac{1}{2\kappa^2} \int \mathrm{d}^4 x e \, T + \int \mathrm{d}^4 x e \mathcal{L}_{\mathrm{m}}$$

Уравнения поля:

$$W^A{}_\mu = e^{-1}\partial_\sigma(eS_A{}^{\mu\sigma}) - T^\sigma{}_{\nu A}S_\sigma{}^{\nu\mu} + \frac{1}{2}E_A{}^\mu T + \omega^B{}_{A\nu}S_B{}^{\nu\mu} = \kappa^2\Theta_A{}^\mu$$

Тензор Эйнштейна:

$$\mathring{G}_{\alpha\beta} = -\left(T^B{}_{\nu\beta}S_B{}^\nu{}_\alpha - \omega^B{}_{\beta\nu}S_B{}^\nu{}_\alpha - \frac{1}{e}g_{\mu\alpha}e^A{}_\beta\partial_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) - \frac{T}{2}g_{\alpha\beta}\right)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$eW_A{}^\mu = \partial_\nu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu e^A{}_\mu)} - \frac{\partial L}{\partial e^A{}_\mu} = \frac{\delta L_{\mathrm{m}}}{\delta e^A{}_\mu} = e\Theta_A{}^\mu$$

В «потенциальной» форме:

$$\partial_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) - \kappa^2 eJ_A{}^\mu = \kappa^2 e\Theta_A{}^\mu$$

$$S_A{}^{\mu\nu} = \frac{1}{e}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu e^A{}_\mu)} = K^{\mu\nu}{}_A - E_A{}^\mu T_\rho{}^{\rho\nu} + E_A{}^\nu T_\rho{}^{\rho\mu}$$

$$J_A{}^\mu := \frac{1}{\kappa^2 e}\frac{\partial L}{\partial e^A{}_\mu} = \frac{1}{\kappa^2}\left(E_A{}^\lambda S_B{}^{\nu\mu}T^B{}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}E_A{}^\mu T + \omega^B{}_{A\nu}S_B{}^{\mu\nu}\right)$$

Проблема энергии

Последнее выражение - аналог тензора энергии-импульса. Величина $\Theta_A{}^\mu$ - тензор, удовлетворяющий

$$\mathring{\mathcal{D}}_\mu(e\Theta_A{}^\mu) = e(\partial_\mu\Theta_A{}^\mu - \mathring{\omega}^B{}_{A\mu}\Theta_B{}^\mu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\nu\mu}\Theta_A{}^\mu) = 0$$

Величина $J_A{}^\mu$ - не тензор. Используя производную Фока-Иваненко:

$$\partial_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) - \omega^B{}_{A\nu}eS_A{}^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\nu(eS_A{}^{\mu\nu})$$

Новая форма полевых уравнений

$$\mathcal{D}_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) - \kappa^2 e\, t_A{}^\mu = \kappa^2 e\Theta_A{}^\mu$$

Тензор энергии-импульса

$$t_A{}^\mu = \frac{1}{\kappa^2}\left(E_A{}^\lambda S_B{}^{\nu\mu} T^B{}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} E_A{}^\mu T\right)$$

Отвечает за эффекты инерции $i_A{}^\mu = J_A{}^\mu - t_A{}^\mu = \frac{1}{\kappa^2}\omega^B{}_{A\nu} S_B{}^{\mu\nu}$

Различные версии TEGR

New General Relativity (NGR)

Идея: разделение кручения на 3 части

$$T = \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{2}T_2 - T_3 = \frac{3}{2}T_{\text{axi}} + \frac{2}{3}T_{\text{ten}} - \frac{2}{3}T_{\text{vec}}$$

$$T_1 := T^{\mu\nu\rho}T_{\mu\nu\rho}\,, \quad T_2 := T^{\mu\nu\rho}T_{\rho\nu\mu}\,, \quad T_3 := T^\mu{}_{\mu\rho}T_\nu{}^{\nu\rho}$$

$$\overset{\text{axi}}{T}_{\mu\nu\rho} := \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}a^\sigma\,, \quad \overset{\text{vec}}{T}_{\mu\nu\rho} := \frac{1}{3}(g_{\mu\nu}v_\rho + g_{\mu\rho}v_\nu)\,, \quad \overset{\text{ten}}{T}_{\mu\nu\rho} := \frac{2}{3}(t_{\mu\nu\rho} - t_{\mu\rho\nu})$$

Скаляры

$$T_{\text{axi}} = -\frac{1}{6}\overset{\text{axi}}{T}{}^\mu{}_{\nu\rho}\overset{\text{axi}}{T}{}_\mu{}^{\nu\rho}\,, \quad T_{\text{ten}} = \frac{3}{4}\overset{\text{ten}}{T}{}^\mu{}_{\nu\rho}\overset{\text{ten}}{T}{}_\mu{}^{\nu\rho}\,, \quad T_{\text{vec}} = \frac{3}{2}\overset{\text{vec}}{T}{}^\mu{}_{\nu\rho}\overset{\text{vec}}{T}{}_\mu{}^{\nu\rho}$$

Уравнения поля

$$\begin{aligned}\kappa^2\Theta_{\mu\nu} = {}& \frac{1}{2}\left(c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3\right)g_{\mu\nu} + 2\mathring{\nabla}^\rho\left(c_1T_{\nu\mu\rho} + c_2T_{[\rho\mu]\nu} + c_3T^\sigma{}_{\sigma[\rho}g_{\mu]\nu}\right)\\ &+ c_1T^{\rho\sigma}{}_\mu\left(T_{\nu\rho\sigma} - 2T_{[\rho\sigma]\nu}\right) - \frac{1}{2}c_3T^\sigma{}_{\sigma\rho}\left(T^\rho{}_{\mu\nu} + 2T_{(\mu\nu)}{}^\rho\right)\\ &+ \frac{1}{2}c_2\left[T_\mu{}^{\rho\sigma}\left(2T_{\rho\sigma\nu} - T_{\nu\rho\sigma}\right) + T^{\rho\sigma}{}_\mu\left(2T_{[\rho\sigma]\nu} - T_{\nu\rho\sigma}\right)\right]\,,\end{aligned}$$

$$\kappa^2\Theta_{\mu\nu} = \mathring{G}_{\mu\nu} + \epsilon\left(\frac{1}{2}a^\rho a_{(\rho}g_{\mu\nu)} - \frac{4}{9}\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}a^\alpha t_\mu{}^{\beta\gamma} - \frac{2}{9}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}a^\rho v^\sigma - \frac{1}{3}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathring{\nabla}^\rho a^\sigma\right)$$

f(T) гравитация

Действие

$$\mathcal{S}_{f(T)} := \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\, e\, f(T) + \mathcal{S}_{\text{m}}$$

$$\mathring{R} = \mathring{G} + \mathring{\mathcal{B}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

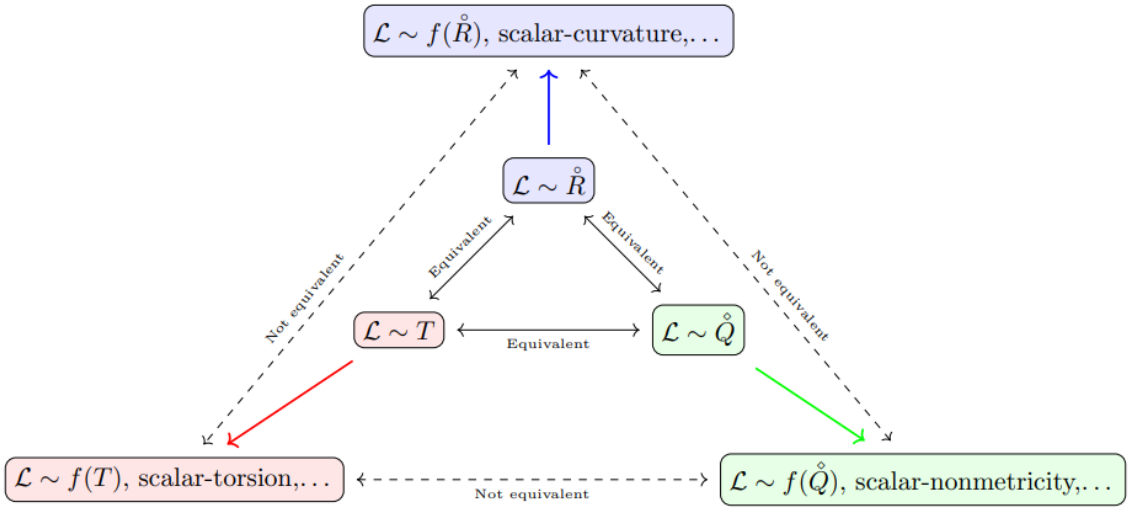


Рисунок 13.5 Эквивалентность между GR, TE GRand STAGE, но не эквивалентность между их модификациями.

$$\mathring{G} = g^{\mu\nu}\left(\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\nu} + \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\right) \text{ and } \mathring{\mathcal{B}} = \partial_\nu\left(\partial_\mu(gg^{\mu\nu})/\sqrt{-g}\right)/\sqrt{-g}$$

$$\delta_\omega \mathcal{S}_{f(T)} = S_{[AB]}{}^{\nu}\partial_\nu f_T = 0$$

Левая часть представима в виде

$$W_{AB} := -\eta_{BC}e^{C}{}_{\mu}\left(\frac{1}{e}f_T\partial_\nu\left(eS_A{}^{\mu\nu}\right) + S_A{}^{\mu\nu}\partial_\nu f_T - f_T T^{D}{}_{\nu A}S_D{}^{\nu\mu} + f_T\omega^{D}{}_{A\nu}S_D{}^{\nu\mu} + \frac{1}{2}fE_A{}^{\mu}\right)$$
$$= -S_{AB}{}^{\nu}\partial_\nu f_T - f_T\mathring{G}_{AB} - \frac{1}{2}\eta_{AB}(f - Tf_T)\,,$$

⇨ применение disformal transformation

<u>f(T,B) гравитация – f(T) с граничным членом B</u>

$$\mathcal{S}_{f(T,B)} := \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\, e\, f(T,B) + \mathcal{S}_{\mathrm{m}}$$

Уравнения поля

$$E_A{}^{\mu}\mathring{\Box}f_B - E_A{}^{\nu}\mathring{\nabla}^{\mu}\mathring{\nabla}_\nu f_B + \frac{1}{2}Bf_BE_A{}^{\mu} - \left(\partial_\nu f_B + \partial_\nu f_T\right)S_A{}^{\mu\nu}$$
$$-\frac{1}{e}f_T\partial_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) + f_T T^{B}{}_{\nu A}S_B{}^{\nu\mu} - f_T\omega^{B}{}_{A\nu}S_B{}^{\nu\mu} - \frac{1}{2}fE_A{}^{\mu} = \kappa^2\Theta_A{}^{\mu}$$

Модели с членом Гаусса-Боннэ

$$\mathring{\mathcal{G}} = \mathring{R}^2 - 4\mathring{R}_{\mu\nu}\mathring{R}^{\mu\nu} + \mathring{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\mathring{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Действие $\mathcal{S}_{f(T,T_G)} := \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\, e\, f(T,T_G) + \mathcal{S}_{\mathrm{m}}$

Уравнения поля

$$-\frac{1}{e}f_T\partial_\nu(eS_A{}^{\mu\nu}) - S_A{}^{\mu\nu}(\partial_\nu f_T) + f_T T^B{}_{\nu A}S_B{}^{\nu\mu} - \frac{1}{2}fE_A{}^\mu - \frac{1}{2e}T^I{}_{AB}E_C{}^\mu(Y^B{}_I{}^C - Y^C{}_I{}^B + Y_I{}^{[BC]})$$
$$-\frac{1}{2e}\partial_\nu\Big(E_C{}^\nu E_B{}^\mu(Y^B{}_A{}^C - Y^C{}_A{}^B + Y_A{}^{[BC]})\Big) + f_{T_G}\delta^{MBCD}_{IJKL}E_D{}^\mu K^J{}_M{}^I K_{FB}{}^K\partial_A(K^L{}_C{}^F) = \kappa^2\Theta_A{}^\mu\,,$$

Модели с высшими производными

$$\mathcal{S}_{\text{HOT}} := \frac{1}{2\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\, e\, f(T,(\mathring{\nabla}T)^2,\mathring{\Box}T) + \mathcal{S}_{\mathrm{m}}\,,$$

$$(\mathring{\nabla}T)^2 \equiv g^{\mu\nu}(\mathring{\nabla}_\mu T)(\mathring{\nabla}_\nu T) = \eta^{AB}E_A{}^\mu E_B{}^\nu(\mathring{\nabla}_\mu T)(\mathring{\nabla}_\nu T)\,,$$

$$\mathring{\Box}T \equiv g^{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu T = \eta^{AB}E_A{}^\mu E_B{}^\nu\mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu T\,,$$

Уравнения поля

$$-\frac{1}{e}f_T\partial_\nu\left(eS_A{}^{\mu\nu}\right) - S_A{}^{\mu\nu}(\partial_\nu f_T) + f_T T^B{}_{\nu A}S_B{}^{\nu\mu} - \frac{1}{2}E_A{}^\mu f$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\{f_{X_i}\frac{\partial X_i}{\partial e^A{}_\mu} - \frac{1}{e}\left[\partial_\alpha\left(ef_{X_i}\frac{\partial X_i}{\partial(\partial_\alpha e^A{}_\mu)}\right) - \partial_\alpha\partial_\nu\left(ef_{X_i}\frac{\partial X_i}{\partial(\partial_\alpha\partial_\nu e^A{}_\mu)}\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{2e}\partial_\sigma\partial_\alpha\partial_\nu\left(ef_{X_2}\frac{\partial X_2}{\partial(\partial_\sigma\partial_\alpha\partial_\nu e^A{}_\mu)}\right) - \frac{1}{2e}\partial_\beta\partial_\sigma\partial_\alpha\partial_\nu\left(ef_{X_2}\frac{\partial X_2}{\partial(\partial_\beta\partial_\sigma\partial_\alpha\partial_\nu e^A{}_\mu)}\right) = \kappa^2\Theta_A{}^\mu\,,$$

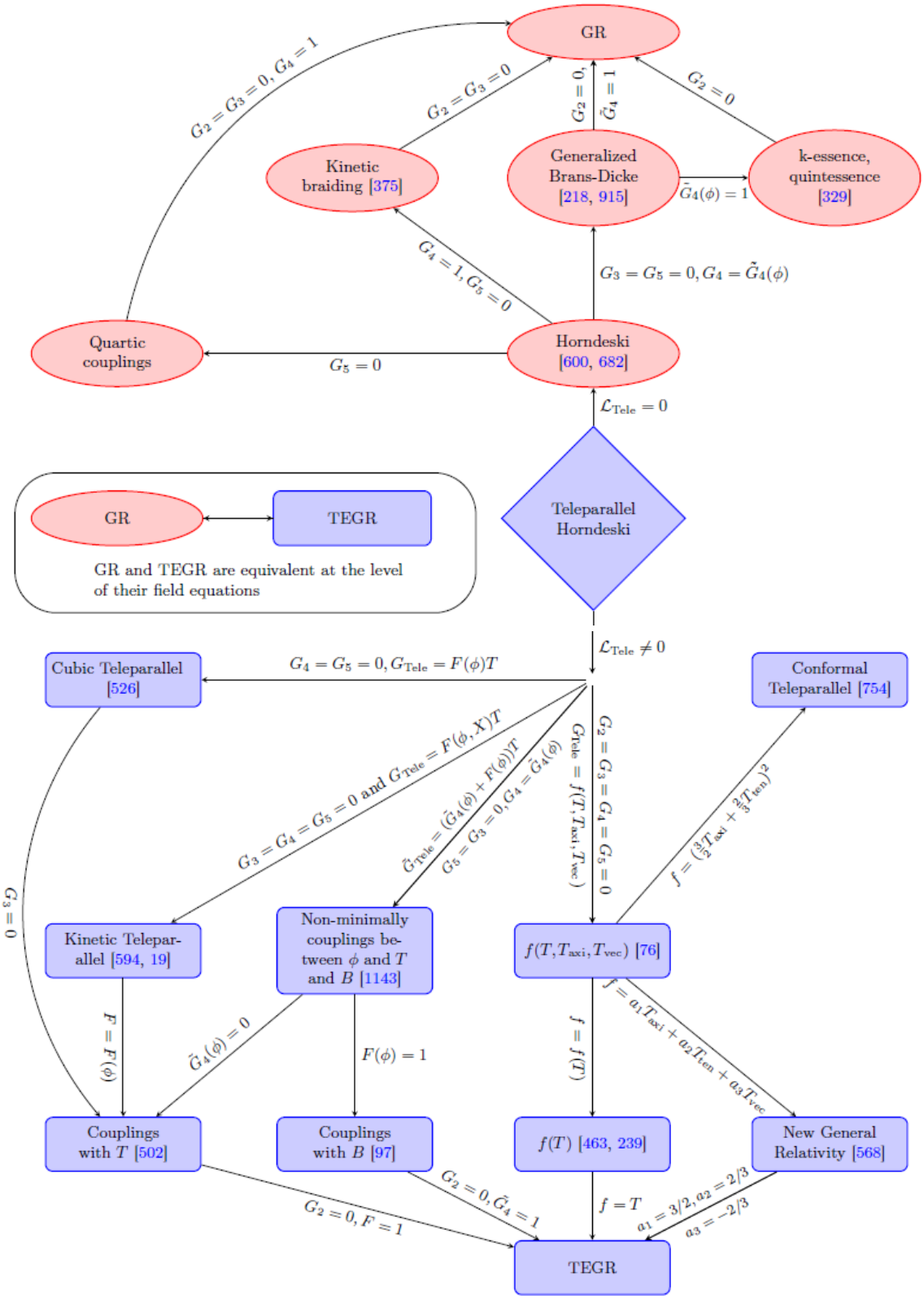


Рисунок 13.6 Взаимосвязь между телепараллельным аналогом Хорндески и различными теориями.

Космология в TEGR

Метрика Фридмана

$$\mathrm{d}s^2 = N(t)^2\mathrm{d}t^2 - a(t)^2\Big[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2)\Big]$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad \frac{\ddot a}{a} = -4\pi G(\rho + 3p)$$

Плоский случай:

$$\mathrm{d}s^2 = N(t)^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

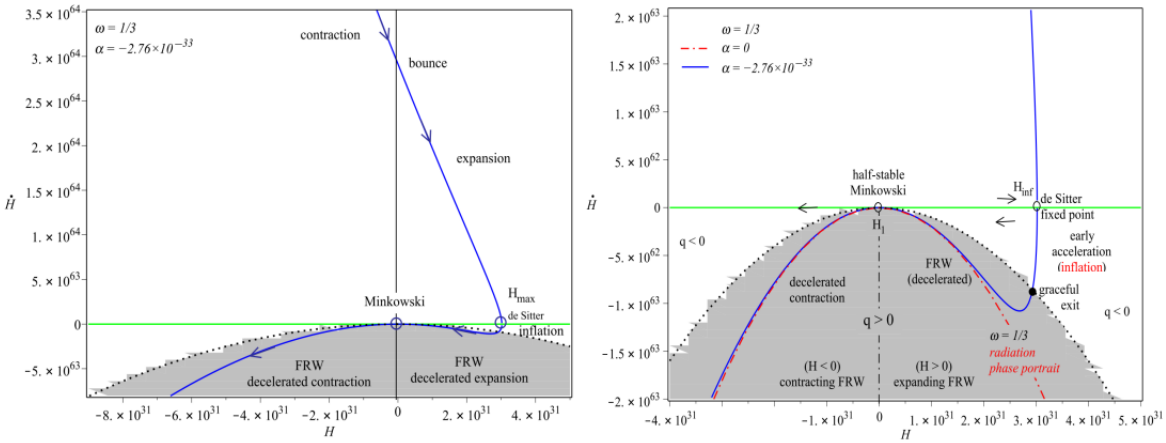
Тетрада

$$e^A{}_\mu = \mathrm{diag}\left(N(t),\, a(t),\, a(t),\, a(t)\right)$$

Для диагональной тетрады

$$T = -6H^2\,, \quad B = -18H^2 - \frac{6\dot H}{N}$$

Возможны решения вида «отскок» $a(t) \propto \left(1 + \frac{3}{2}\sigma t^2\right)^{\frac{1}{3}}$ переход «отскок» означает инфляцию и выход из инфляции.



(a) Bounce leading to inflation (b) Graceful inflation exit to Minkowski

Рисунок 13.7 Представление в фазовом пространстве скачущей космологии, приводящей к инфляции, за которой следует изящный выход из инфляции при α = 2,76 × 10^-33 < 0.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Космология в f(T,B) гравитации

Evolution	Reconstructed Lagrangian
de Sitter	Any solution of the equation $f - T(3f_B + 2f_T) = 0$ evaluated at the corresponding constant T and B values. Treating the equation as a partial differential equation leads to $f(T,B) = \sqrt{-T}g\left(\frac{3}{2}T - B\right)$ with $g(x)$ representing an arbitrary function. For the $f(T,B) = -T + f_2(B)$ ansatz, $f_2(B) = -\frac{B}{3}\ln B$.
Model I: $f(T,B) = f_1(T) + f_2(B)$	
Power-law	$f_1(T) = \frac{2\kappa^2\rho_0}{3h(1+w)-1}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}h(1+w)}$, $f_2(B) \propto B^{\frac{1-3h}{2}}$
ΛCDM	$f_1(T) = T_0\Omega_{w0}\left(-\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{m0}}\right)^{1+w}\left[{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},-w;\frac{1}{2};\frac{T}{T_0\Omega_\Lambda}\right) + \frac{T}{T_0\Omega_\Lambda}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-w;\frac{3}{2};\frac{T}{T_0\Omega_\Lambda}\right)\right]$, $f_2(B) \propto \sqrt{\left\lvert 1+\frac{B}{3\Lambda}\right\rvert} - \frac{B}{3\Lambda}\arctan\sqrt{\left\lvert 1+\frac{B}{3\Lambda}\right\rvert}$
Phantom Domination	$f_1(T) = -2b_0 - \frac{b_1 T}{3{h_0}^2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{2b_2(1+m)(-T)^{\frac{5}{2}}}{15{h_0}^2}$, $f_2(B) \propto B^{\frac{m+3}{2m}}$
Model II: $f(T,B) = -T + f_2(B)$	
Power-law	$d_1 B^{\frac{1-3h}{2}} + \frac{hB}{3h+1}\ln\left(\frac{B}{B_0}\right) + \frac{4\kappa^2\rho_0(3h-1)}{[3h(1+w)-2][3h(2+w)-1]}\left(\frac{B}{B_0}\right)^{\frac{3h(1+w)}{2}}$
ΛCDM	$2\Lambda + d_2\left[\sqrt{\left\lvert 1+\frac{B}{3\Lambda}\right\rvert} - \frac{B}{3\Lambda}\arctan\sqrt{\left\lvert 1+\frac{B}{3\Lambda}\right\rvert}\right]$ for dust matter
Phantom Domination	$2b_0 + \frac{B\ln B}{m-3}\left(1 - \frac{b_1}{3{h_0}^2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{16b_2(m+1)(-B)^{\frac{5}{2}}}{45{h_0}^5(m+3)^{\frac{3}{2}}(4m-3)} + d_3 B^{\frac{m+3}{2m}}$, solution not applicable for $m = -3, \frac{3}{4}$ and 3

Рисунок 13.8 Восстановленный лагранжиан f (T, B) для эволюционных моделей поведения

Теория космологических возмущений

Тензорные $\ddot{h}_{ij} + (3+\alpha_M)H\dot{h}_{ij} + \left((1+\alpha_T)\frac{k^2}{a^2} + m^2\right)h_{ij} = \Pi^T_{ij}$ согласуются в пределе с GR; устойчивость еще не доказана

Векторные $W_{ij}(i \neq j): \quad 0 = \dot{b}_j + b_j\left(2H + \frac{\dot{f}_T}{f_T}\right)$. Нет распространяющихся мод, как в обычной f(R).

Скалярные результат аналогичен f(R) и сильно зависит от конкретного типа модели.

Higgs inflation in TEGR

Действие:

$$\mathcal{S}_{\text{Higgs}} = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4e\left[F(\phi)T + 2G(\phi)\mathring{\nabla}_\alpha T^\alpha + K(\phi)g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi)\right] + \mathcal{S}_{\text{m}}\left(\phi, \Psi, e^A{}_\mu, \mathring{\omega}^A{}_{B\mu}\right)$$

$$V = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - v^2\right)^2 \quad K = K_0\,, \quad F = F_0\left(1 + \zeta\phi^2\right)\,, \quad G = G_1\phi^2\,;$$

На данный момент из модели следует очень высокое значение отношения тензорные/скалярные возмущения. Это значение противоречит наблюдательным данным.

Поляризация гравитационных волн. Сферически-симметричные локальные метрики. Кривые вращения

Conditions	Class
$2c_1 + c_2 = c_3 = 0$	II_6 (6 polarizations)
$2c_1(c_2 + c_3) + c_2^2 = 0$ and $2c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$	III_5 (5 polarizations)
$2c_1(c_2 + c_3) + c_2^2 \neq 0$ and $2c_1 + c_2 + c_3 \neq 0$	N_3 (3 polarizations)
$2c_1 + c_2 + c_3 = 0$ and $c_3 \neq 0$	N_2 (2 polarizations)

Сферически-симметричные локальные метрики в TEGR

Анзац: $\mathrm{d}s^2 = \mathcal{A}(r)\mathrm{d}t^2 - \mathcal{B}(r)\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi^2)$

Подставляя в действие, решая уравнения поля

$$T = -\frac{2\left(\sqrt{\mathcal{B}} - 1\right)\left(r\mathcal{A}' - \mathcal{A}\sqrt{\mathcal{B}} + \mathcal{A}\right)}{r^2\mathcal{A}\mathcal{B}},$$

$$B = \frac{-r^2\mathcal{B}\mathcal{A}'^2 + r\mathcal{A}\left(-r\mathcal{A}'\mathcal{B}' - 4\mathcal{B}^{3/2}\mathcal{A}' + 2\mathcal{B}\left(r\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'\right)\right) - 4\mathcal{A}^2\left(r\mathcal{B}' + 2\mathcal{B}^{3/2} - 2\mathcal{B}\right)}{2r^2\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2}$$

Вакуумное решение $A = B = 1$ – Минковский. Нетривиальные вакуумные решения

$$\mathcal{A}(r)^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{4n(n-1)(2n-3)}{4n^2-8n+5}}, \quad \mathcal{B}(r)^2 = \mathrm{const} = \frac{(2n-1)(4n-5)}{4n^2-8n+5}, \quad f(T,B) = f_0 T^n$$

Вообще метрик больше, а простейшая - Шваршильда-де-Ситтера

<u>Обобщение: рассмотрение возмущений</u>

$$\mathcal{A}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \epsilon\, a(r),$$

$$\mathcal{B}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \epsilon\, b(r)$$

После подстановки получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) = \mu^2 + \epsilon\Big[C_2 - \frac{1}{r^2(\mu^2-1)^2}\Big(&3\beta\mu^7 - \frac{1}{2}(\alpha + 13\beta)\mu^6 - 4\beta\mu^5 + \frac{1}{2}\mu^4(15\alpha + 43\beta + 2C_1 r)\\ &- \frac{2}{3}\mu^3(32\alpha + 35\beta) - \frac{1}{2}\mu^2(31\alpha + 51\beta + 4C_1 r) + 4\beta\mu + \frac{1}{2}(17\alpha + 21\beta + 2C_1 r)\\ &- \frac{\beta}{\mu} + 2(\alpha+\beta)\left(3\mu^2 - 1\right)\log\mu\Big)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(r) = \mu^{-2} + \epsilon\Big[\frac{C_1}{r\mu^4} + \frac{C_2\left(\mu^2-1\right)}{\mu^4} + \frac{1}{r^2(\mu^2-1)}\Big(&\frac{1}{2}(25\alpha + 37\beta) - 4(\alpha + 2\beta)\mu\\ &- \frac{2(16\alpha + 13\beta)}{3\mu} - \frac{2(\alpha + 3\beta)}{\mu^2} + \frac{4(\alpha+\beta)}{\mu^3} + \frac{-21\alpha - 25\beta}{2\mu^4} + \frac{2\beta}{\mu^5} + \frac{2(\alpha+\beta)}{\mu^4}\log\mu\Big)\Big]\end{aligned}$$

Theory	$\beta - 1$	$\gamma - 1$
$f(T)$/GR [1049]	0	0
$f(T_1, T_2, T_3)$ [1049]	$-\frac{2f_{,1}+f_{,2}+f_{,3}}{4(2f_{,1}+f_{,2}+2f_{,3})}$	$-2\frac{2f_{,1}+f_{,2}+f_{,3}}{2f_{,1}+f_{,2}+2f_{,3}}$
$f(T, \phi, X, Y)$ [479]	$\frac{f_Y}{8(4f_T f_X - 3f_Y^2)(f_Y^2 - f_T f_X)^2}\Big[f_T f_X f_Y^2 (16 f_{T\phi} - 7 f_Y) + 3 f_Y^4 (f_Y - 2 f_{T\phi}) - 8 f_T^2 f_X^2 f_{T\phi} + 2 f_T^2 f_Y (2 f_X^2 + f_Y f_{X\phi} - 2 f_X f_{Y\phi})\Big]$	$\frac{f_Y^2}{2 f_T f_X - 2 f_Y^2}$
Teleparallel Horndeski [86]	$-\frac{\tilde{\beta}}{8(\mathbf{H}_{,1}\mathbf{H}_{,5}+\mathbf{H}_{,3}^2)^2(3\mathbf{H}_{,3}^2-2\mathbf{H}_{,1}(\mathbf{H}_{,4}-2\mathbf{H}_{,5}))}$	$-\frac{2\mathbf{H}_{,1}\mathbf{H}_{,4}+\mathbf{H}_{,3}^2}{2(\mathbf{H}_{,1}\mathbf{H}_{,5}+\mathbf{H}_{,3}^2)}$

Рисунок 13.9 Краткое изложение параметров PPN для различных телепараллельных теорий, описанных в литературе. Во всех этих теориях все остальные параметры PPN равны нулю (такие же, как GR).

Черная дыра в TEGR

Условие существования ЧД:

$$\mathcal{A}(r_h) = \mathcal{B}^{-1}(r_h) = 0 \text{ and } \det g_{\mu\nu}|_{r=r_h} \neq 0$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{3\mu_h^2}\Big(-6 + 12\mu_h - 21\mu_h^2 - 108\mu_h^3 + 66\mu_h^4 + 20\mu_h^5 - 39\mu_h^6 + 12\mu_h^7 + 12\mu_h^2 \ln(\mu_h)\Big) + \zeta_1\,,$$

$$C_1 = 2MC_2 - \frac{32}{3}\alpha\,,$$

$$\zeta_1 = -\frac{\mu_h - 1}{3\mu_h^2}(6 - 6\mu_h - 49\mu_h^2 + 59\mu_h^3 - 7\mu_h^4 - 27\mu_h^5 + 12\mu_h^6) - 4\ln(\mu_h)\,,$$

$$\mu_h = (1 - 2M/r_h)^{1/2}$$

Радиус фотонной сферы $(1.5 + 0.282675\,\beta)\frac{2M}{r}$

Кривые вращения (темная материя):

$$\mathcal{A}(r) = 1 - \epsilon\left(\frac{2M}{r} + \alpha\frac{r^{2-2n}}{2n-3}2^{3n-1}\right),$$
$$\mathcal{B}(r) = 1 + \epsilon\left(\frac{2M}{r} + \alpha(1 - 3n + 2n^2)\frac{r^{2-2n}}{2n-3}2^{3n-1}\right)$$

Потенциал тяготения:

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} - \epsilon\left(\frac{M}{r} + \alpha\frac{r^{2-2n}}{2n-3}2^{3n-2}\right)$$

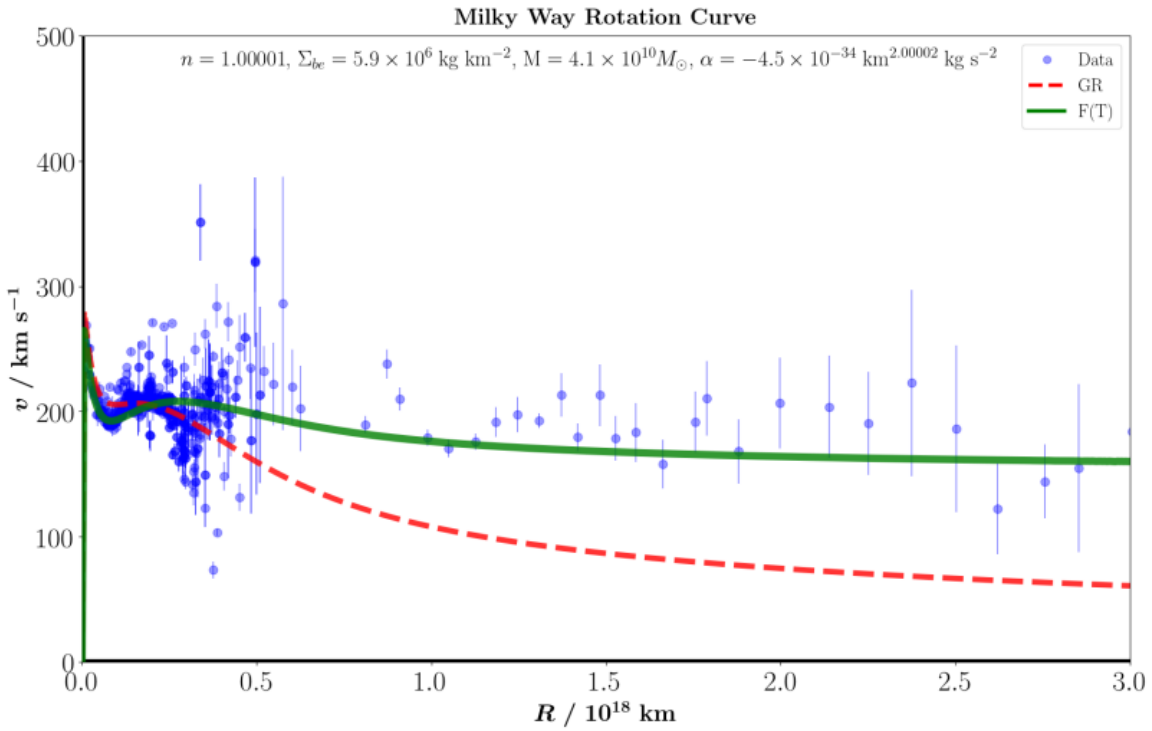


Рисунок 13.10 Наилучшее из полученных аппроксимирование для степенного закона $f(T) = -T - \alpha T^n$ при $n = 1.00001$ и $\alpha = -4.505\ 731\ 524\ 05 \times 10^{-34}$ км^{2n} кг$^{-1}$s^{-2}, плотность массы поверхности выпуклости 5.94×10^6 кг км$^{-2}$ и масса диска 4.08×10^{10} масс Солнца

Современный статус (выписка из статьи 2, указанной в литературе)

Существует много нерешенных и неизученных проблем в модифицированных телепараллельных теориях гравитации в контексте астрофизики. Ниже перечислены некоторые важные открытые проблемы:

1. Точные или численные решения для черных дыр – нет точных аналитических решений для черных дыр за пределами TEGR. Существуют только возмущенные решения или численные решения, но нет аналитических точных решений, описывающих черные дыры. Кроме того, численные решения для черных дыр еще не были подробно проанализированы для теорий, которые отличаются от силы тяжести f(T). Интересным вопросом было бы проанализировать скалярно-тензорные теории в TG, чтобы выяснить, существуют ли скаляризованные решения для черных дыр.

2. Квазинормальные режимы – Одной из интересных характеристик формы волны слияния черных дыр является ее заключительная стадия, известная как фаза закольцовки. На этой фазе система излучает ГВТ в виде квазинормального излучения. Несмотря на то, что точных решений не существует, можно использовать возмущенные решения и изучить квазинормальные режимы.

3. Зависящая от времени сферически симметричная хорошая пара тетрад-спиновых соединений – таким образом до сих пор было довольно сложно выполнить аналогичный подход, описанный в разделе 5.12, для общего зависящего от времени сферически симметричного пространства-времени за пределами ТЕГР. Этот результат может быть очень важен для описания коллапса звезд или если есть способ найти теории за пределами GR, удовлетворяющие теореме Биркгофа. Кроме того, можно было бы также изучать зависящие от времени пространства-времени, такие как космологические червоточины.

4. Наиболее общая осесимметричная хорошая пара тетрад-спиновых соединений были получены только некоторые конкретные случаи. Например, была найдена форма, похожая на Taub-NUT, или медленно вращающийся корпус Керра, но чего не хватает, так это общей осесимметричной хорошей пары тетрадных спиновых соединений, которая может включать в себя неспешно вращающийся корпус Керра в качестве частного случая. Если у кого-то это есть, можно было бы изучить осевую симметрию общим способом для любой астрофизической системы.

5. Кривые вращения галактик – как обсуждалось в предыдущем разделе, в ссылке, авторы исследовали, как кривые вращения галактики описываются в f (T) гравитации. Они рассмотрели две разные характеристики галактик: диск и выпуклость. Было бы интересно повторно проанализировать эту проблему, используя другие возмущенные решения для f (T, B) гравитации (и других теорий или моделей), а затем использовать данные Млечного пути, чтобы согласовать модель с наблюдениями.

6. Белые карлики и нейтронные звезды - есть некоторые исследования, касающиеся компактных звезд в TG, но большинство из них сосредоточены только на решении ТОВ уравнения численно, чтобы затем найти график массы-радиуса. Нет исследований, касающихся других аспектов компактных звезд, таких как их ранняя эволюция, которые могли бы дать нам информацию о других характеристиках звезд, таких как их эффективная температура, светимость, излучательное ядро или то, как звезды появляются на треках Хаяси. Кроме того, все работы в TG были сосредоточены только на обычных звездах, а затем необходимы дополнительные исследования, касающиеся нейтронных звезд или белых карликов.

7. Экзотические объекты и эхо–сигналы GW - существуют некоторые исследования о червоточинах в TG. Тем не менее, нет никаких исследований о других экзотических объектах, таких как кварковые звезды, гравастары или бозонные звезды. Кроме того, GW-эхо экзотических объектов являются важными наблюдательными характеристиками, которые не были вычислены в TG.

8. Особенности черной дыры – Как обсуждалось в разделе 9.4.2, уравнение Райчаудхури в TG может иметь поведение, отличное от стандартного. Это может

привести к другой интерпретации особенностей в TG. Кроме того, обычно понимаются особенности, подобные координатам путем построения нескольких скаляров, таких как скаляры Кречмана. В TG нужно было бы построить другие скаляры, чтобы понять эти типы особенностей.

9. Численное моделирование 3 + 1 для наблюдений GW – Формализм разделения 3 + 1 помогает нам записать уравнения поля Эйнштейна в определенной форме (уравнения, подобные Гауссу), что полезно для численных исследований. Мы знаем, что TEGR имеет те же уравнения поля, что и GR. Однако они выражены в терминах телепараллельных величин. Что может произойти, если использовать формализм 3 + 1 для уравнений поля ТЕГРА? может ли быть так, что этот формализм приводит к более простому численному описанию уравнений поля Эйнштейна?

10. Слабое линзирование для распределения галактик – нет исследований, проводящих анализ слабого линзирования для распределения галактик. Это может дать нам некоторые подсказки к более удовлетворительному пониманию темной материи и лучшему пониманию физики галактик.

Theory	Cosmological models constrained by observations
$f(T)$ [998, 968, 758, 720, 337] [336, 670, 419, 259] [267, 450, 289, 158]	1) Exponential Law: $-T+1-e^{-T}$ 2) Power Law T^{α} 3) Linear-Power: $-T+\beta T^{n}$ 4) Logarithmic: $-T+\gamma\log(\delta T)$ 5) Hybrid: $-T+e^{\epsilon T}T^{\alpha}$ 6) Linder: $1-e^{\sqrt{T/\zeta}}$ 7) Trigonometric: $-T+(-T)^{n}\tanh\left(\frac{T_0}{T}\right)$ 8) Model independent: $\eta T+(T-T_0)\cosh(T-T_0)+\sinh(T-T_0)$ 9) Specific w-EoS (Hypergeometric):$\alpha\times\left[\beta\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{-T}{6}\right)+\gamma\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{-T}{6}\right)\right]$
$f(T,B)$ [170, 265, 434]	1) Power Law: $-T+\alpha B^{n}+\beta T^{m}$ 2) Mixed Power Law: $-T+\alpha B^{n}T^{m}$ 3) Logarithmic: $-T+\alpha\log B$ 4) Taylor polynomial: $f(0)+f_T(0)T+f_B(0)B+f_{TB}(0)TB+f_{TT}(0)T^2+f_{BB}(0)B^2+\mathcal{O}(TB,T^2,B^2)$
$f(T,\phi)$ [524, 499, 535] [463, 501]	Mixed Power Law: $-T-G(T)G(\phi)-V(\phi)$, with $G(T)=T^{s}$, $F(\phi)=\xi\phi^{c}$ and $V(\phi)=\lambda\phi^{d}$
$f(T,\Theta)$ [551, 239]	1) Power Law: $-T+\alpha T^{n}\Theta+\Lambda$ 2) Power Law (second order): $-T+\alpha\Theta+\gamma T^2$
$f(T,(\mathring{\nabla}T)^2,\mathring{\Box}T)$ [883]	Model I: $T+\frac{\alpha_1(\mathring{\nabla}T)^2}{T^2}+\alpha_2 e^{\frac{\delta(\mathring{\nabla}T)^2}{T^4}}$ Model 2: $T+\frac{\beta_1\mathring{\Box}T}{T}+\frac{\beta_2(\mathring{\Box}T)^2}{T^3}+\beta_3 e^{\frac{\varepsilon\mathring{\Box}T}{T^3}}$
$Tf(\mathring{\Box}^{-1}T,\mathring{\Box}^{-1}B)$ [82, 110]	Model I: $f=-1-\mathring{\Box}^{-1}T$ Model II: $f=-1-\mathring{\Box}^{-1}T+\mathring{\Box}^{-1}B$

Рисунок 13.11 Компиляция космологических моделей из теорий TG. Космологические модели, обозначенные во втором столбце, соответствуют тем, которые обсуждаются в ссылках, указанных в первом столбце. Все эти модели включают статистические тесты и ограничивающий анализ космологических параметров с помощью наблюдений.

Theories	**Observables**						
	Late-time			**Early-time**			
	SN	BAO	$H(z)$	CMB	BBN	BAO	WL
$f(T)$	✓[Pantheon]	✓	✓[CC-2018]	✓*	✓	✓	✓
$f(T,B)$	✓[Pantheon]	✓	✓[CC-2018]	✓*	NAY	NAY	NAY
$f(T,\phi)$	✓[Union 2]	✓	NAY	✓*	NAY	NAY	NAY
$f(T,\Theta)$	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY
$f(T,\mathring{\nabla}T,\mathring{\Box}T)$	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY	NAY
$Tf(\mathring{\Box}^{-1}T)$	✓[JLA]	✓	✓[CC-2016]	NAY	NAY	NAY	NAY

Рисунок 13.12 Таблица физических мотиваций, жизнеспособности, зрелости и текущих результатов наблюдательных тестов для моделей. Здесь используются NAY - еще не проанализированные в литературе.

Лекция №14. Способы проверки расширенных моделей гравитации на различных пространственно-временных масштабах

Что и где нужно проверять? Масштабы скоплений: объяснение тёмной энергии

Статья: Stanislav Alexeyev and Vyacheslav Prokopov «Extended Gravity Constraints at Different Scales»

Что и где стоит проверять?

- ⇨ Масштабы скоплений: способы объяснения темной энергии, сравнение с ΛCDM.
- ⇨ Тени черных дыр: отклонения от ОТО
- ⇨ Гравитационно-волновая астрономия: отклонения от ОТО
- ⇨ Двойные пульсары: отклонения от ОТО
- ⇨ Солнечная система: ньютоновский предел и отклонения от него
- ⇨ Большой адронный коллайдер: поведение при энергиях в диапазоне ТэВ

Скопления: радиус разворота (turnaround radius)

Одним из способов проверки модели темной энергии на скоплениях является вычисление радиуса разворота (turnaround radius). У нас есть наблюдательные данные - сверхновые типа IA.

Соответственно $\Lambda - CDM$ и модели тёмной энергии — это не наблюдательные данные, а уже интерпретация. $\Lambda - CDM$ описывает Вселенную на больших космологических масштабах.

Модель Бранса-Дикке:

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{(-g)}\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi)\right] + S^{(m)}$$

$$S^{(m)} = \int d^4x\sqrt{(-g)}L^{(m)}$$

Здесь ω – безразмерный параметр Бранса-Дикке, φ – скалярное поле, делающее ω безразмерным. Модель была создана с целью объяснить гравитационную постоянную и реализовать принцип Маха.

Лагранжиан теории относительности в этом случае:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}(R + \Lambda)$$

При локальном рассмотрении Λ не влияет на старшие производные, поэтому ее можно игнорировать.

Для того, чтобы объяснить модели темной энергии строятся скалярно-тензорная гравитация, F(R) гравитация, то есть к основному лагранжиану добавляется хвост поправок (например, поправки по кривизне, модифицирующие поведение на бесконечности). Одним из примеров, который наиболее точно моделирует космологическую постоянную, является *модель А.А. Старобинского с исчезающей космологической постоянной.*

Это модель F(R) гравитации с несколькими параметрами, подбирая которые, можно моделировать поведение космологической постоянной.

$$f(R) = R + \lambda R_0 \left(\left[1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right]^{-n} - 1 \right)$$

Из скопления галактик выбираем те, которые имеют форму, близкую к сферической. Если есть масса, то есть и сила притяжения (обозначена F). Также ускоренное расширение Вселенной можно представить в качестве силы, действующей в обратном направлении - F как *гравитационное отталкивание*. Если в пространстве действует две силы, направленные в противоположных направлениях, то, следовательно, в самой простой модели должна существовать сфера, на которой эти силы уравновесят друг друга. Эта поверхность и получила название *радиус нулевой силы (радиус разворота)*.

Значение радиуса нулевой силы можно вычислить двумя различными независимыми способами:

⇨ пользуясь методами теории относительности (зная массу центральной части и при сферичности плоскости) или моделями гравитации, которые мы хотим проверить;

⇨ пользуясь астрономическими данными: данными гравитационного линзирования.

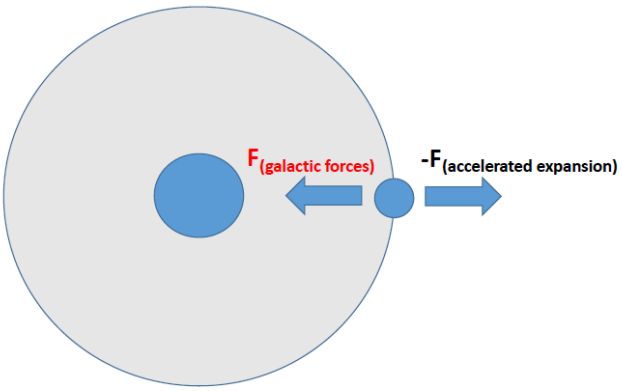


Рисунок 14.1 Радиус разворота

Диапазон масс, который стоит проверять в данной модели:

$$10^{11} M_{Sun}(Milky\ Way) \leq M \leq 10^{15} M_{sun}(Galaxy\ clusters)$$

Фактически наша задача близка к классической задаче гравитации. Разные модели расширенной гравитации будут различаться формами сферически симметричных метрик. Рассмотрим в качестве примера метрику типа Швацшильда:

$$ds^2 = e^A c^2 dy^2 - e^{-A} dr^2 - r^2 d\Omega$$

В качестве первого приближения возьмем $g_{00} = g_{11}^{-1}$. Выпишем в общем виде полевые уравнения для модели Старобинского:

$$f'(R)R_{ii} - f(R)\frac{g_{ii}}{2} - (\nabla_i^2 - g_{ii}\Box)f'(R) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dr} = a, \\ \dfrac{da}{dr} = e^{-A}\left(R + \dfrac{2}{r^2}\right) - a^2 - \dfrac{4a}{r} - \dfrac{2}{r^2} \\ \dfrac{dR}{dr} = \dfrac{f'(R)R_{00}/g_{00} - f(R)/2}{(e^A(a + 2/r) + a/2)f''(R)} \end{cases}$$

Далее можно подставить гравитационный потенциал в данную модель, которую мы хотим проверить, и вычислить радиус разворота. Производная гравитационного потенциала на радиусе разворота должна равняться 0:

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{oo} - 1), \qquad \frac{d\phi}{dr} = 0$$

Таким образом получаем ограничения на модель. Этот метод работает для любой модели расширенной гравитации.

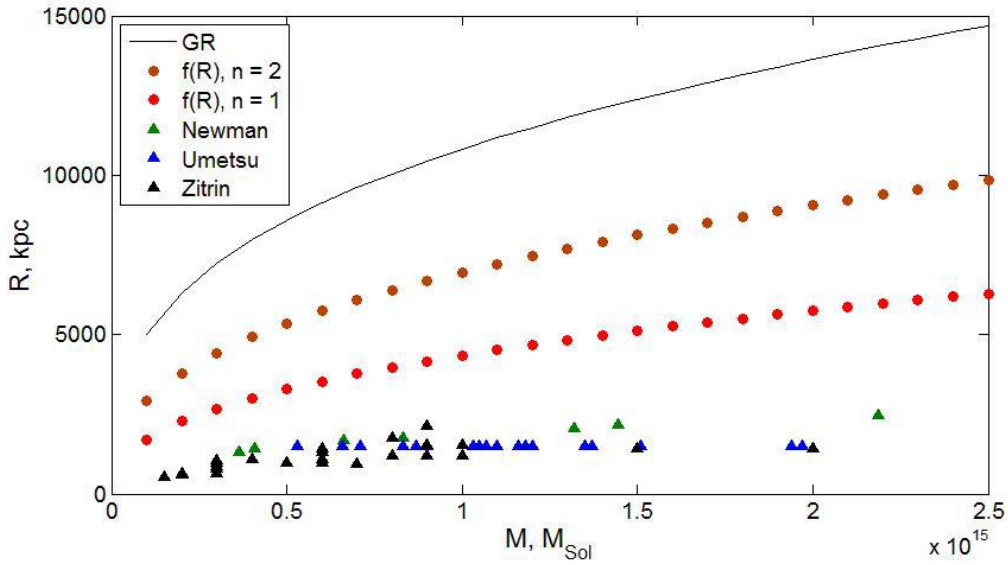


Рисунок 14.2 Радиус разворота: теория / наблюдательные данные

Тени чёрных дыр: отклонения от ОТО

Тени черной дыры — это то, что видит телескоп. Телескоп не может увидеть черную дыру в чистом виде, потому что всегда будет существовать темная область, из которой поглощаются фотоны. Вокруг этой области светится аккреционный диск, и темная область на этом диске, которую видит телескоп, и называется тенью черной дыры. Тень черной дыры не обязательно по размерам равняется самой черной дыре.

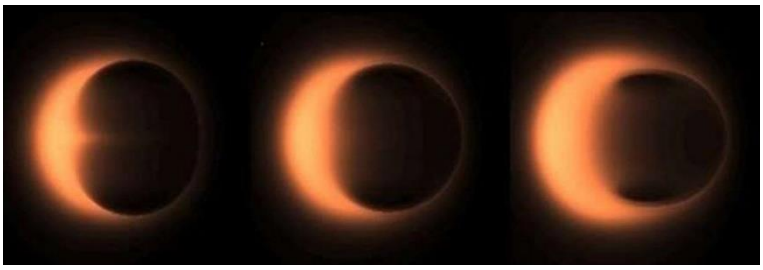


Рисунок 14.3 Снимок горизонта событий. Тени черной дыры. Моделирование

Размер тени черной дыры Рейсснера-Нордстрена можно вычислить

$$D = \sqrt{\frac{(8q^2 - 36q + 27) + \sqrt{(8q^2 - 36q + 27)^2 + 64q^2(1-q)}}{2(1-q)}}$$

Минимальный радиус тени будет при $q = 1$ (заряд) и будет равняться $D = 4$.

- При $q > 1$ у объекта нет горизонта событий (голая сингулярность).
- При $q > 9/8$ решения нет: «исчезновение тени».

Можно сделать следующий вывод: в формулу входит метрика, следовательно, возможна обратная задача: по форме тени восстановить метрику и получить тип теории гравитации.

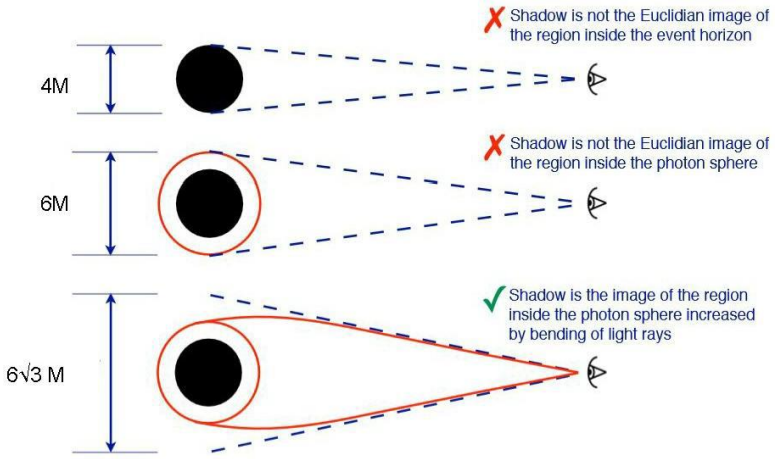


Рисунок 14.4 Тень чёрной дыры

На рисунке 14.5 изображены формы тени вращающейся черной дыры Керра, обозначение a есть момент вращения. При увеличении момента вращения изменяется форма. Соответственно, чем больше и ближе черная дыра, тем четче ее может увидеть телескоп.

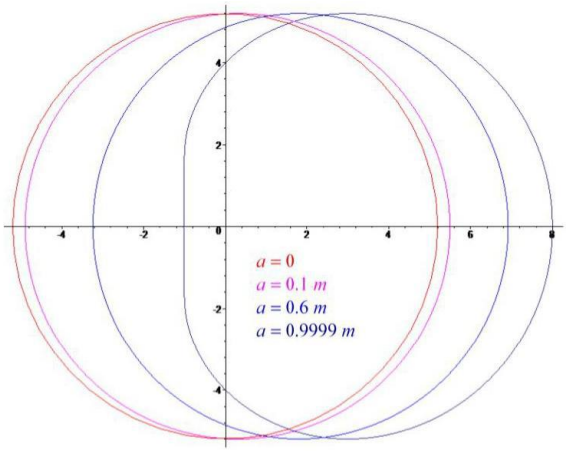


Рисунок 14.5 Форма тени вращающейся чёрной дыры Керра

Объект	Масса/$M_\odot$	Расстояние, кпк	Радиус Шварцшильда			Диаметр тени, мкс дуги
			(см)	(а.е.)	(мкс дуги)	
Звёздная чёрная дыра	10^1	1	$2{,}95 \times 10^6$	$1{,}97 \times 10^{-7}$	0,0002	0,001
SgrA*	$4{,}1 \times 10^6$	8	$1{,}09 \times 10^{12}$	$7{,}28 \times 10^{-2}$	9,10	45,48
M31	$3{,}5 \times 10^7$	800	$1{,}03 \times 10^{13}$	$6{,}88 \times 10^{-1}$	0,86	4,30
NGC 4258	$3{,}9 \times 10^7$	7200	$1{,}15 \times 10^{13}$	$7{,}76 \times 10^{-1}$	0,11	0,53
M87	$6{,}4 \times 10^9$	16100	$1{,}89 \times 10^{15}$	$1{,}26 \times 10^2$	7,82	39,08

Таблица 14.1 Массы черных дыр, расстояния, диаметры теней

Тени черных дыр ищут с помощью сетей телескопов, которые одновременно снимают один и тот же объект, за счёт синхронизации времени мы можем наблюдать за одним объектом с разных точек земного шара. Эффективным размером телескопа после обработки изображения будет являться расстояние между телескопами. Таким образом, используя данные из разных телескопов и обрабатывая их совместно, мы получаем телескоп размером с Землю.

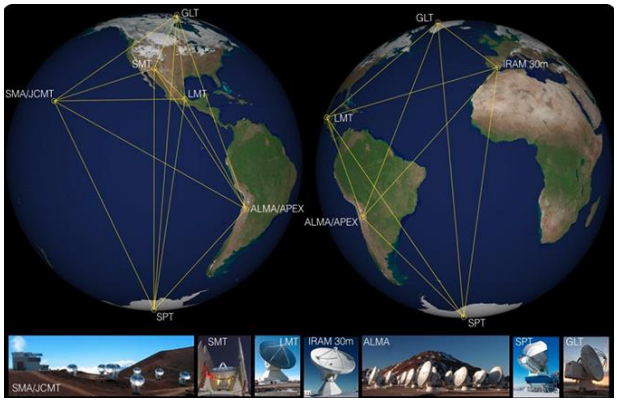


Рисунок 14.6 Сеть телескопов

Существует 2 основных проекта наблюдения теней черных дыр:

- Event Horizon Telescope
- Black Hole Cam

Они направлены на изучение сверхмассивной черной дыры в центре галактики - Sag A и в центре галактики M87.

Рассмотрим ограничения от теней черных дыр для моделей с учетом третьей поправки. Например, метрика Рейсснера-Нордстрена отождествляется с помощью ряда Тейлора:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}$$

Возможны ситуации, при которых форму тени от черных дыр нельзя объяснить только параметром M, для этого нужно привлекать параметр q. То есть возможны ситуации, в которых при анализе формы теней будет понятно, что необходимо привлечь приливной заряд для объяснения формы теней.

Для выхода за пределы ОТО требуется увеличение точности на 4 порядка. Тень с размером, меньшим 8M, невозможно описать точной метрикой Керра-Ньюмана, поэтому обнаружение тени такого размера покажет необходимость учета следующих членов разложения.

Гравитационно-волновая астрономия: отклонения от ОТО

Вспомним про знаменательное событие 17 августа 2017 года - GW170817.

Во-первых, стоит отметить, что LIGO и Virgo, находящиеся на разных концах земного шара, синхронизировались и наблюдали один и тот же объект, то есть работал эффективный радиус Земли.

Во-вторых, они смогли указать направление, из которого был получен сигнал разных типов излучений. Благодаря этому удалось отождествить объект и измерить разницу во времени между приходом гравитационного сигнала.

Эти данные не зависят от модели, то есть это объективные данные. Вычисляем скорость распространения гравитационных волн:

$$m_{gravitation} < 7.7^{*}10^{-23}\ eV$$

$\left|\frac{c_g}{c} - 1\right| < 4.5^{*}10^{-16}$ - отличие скорости распространения электромагнитных волн от гравитационных меньше, чем 10^{-16}.

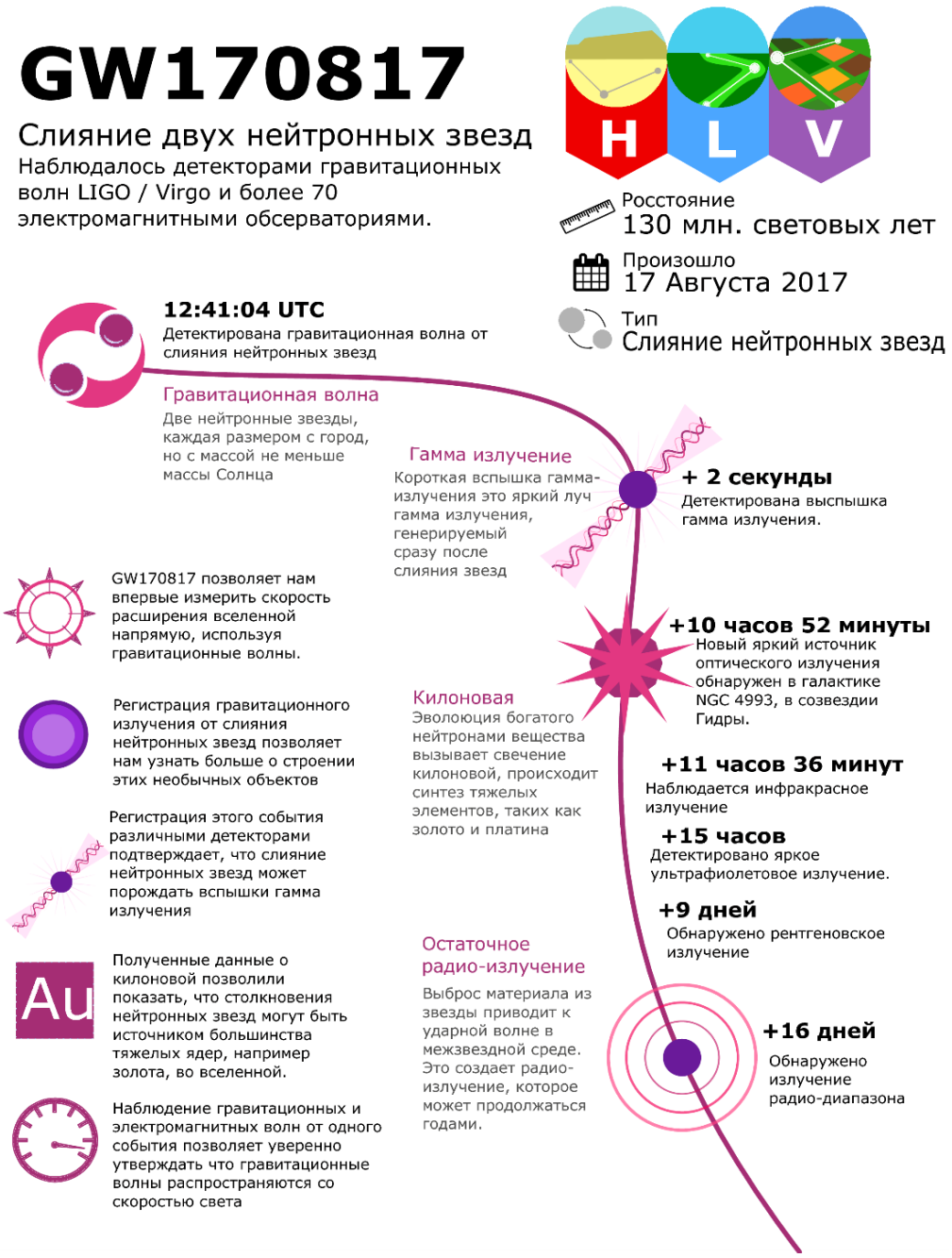


Рисунок 14.7 Слияние двух нейтронных звёзд

В некоторых моделях темная энергия может корректировать скорость распространения гравитационных волн. Измерение соотношения времен прихода гравитационных и электромагнитных волн исключает модели с различными временами прихода гравитационных и электромагнитных волн ($c_g \neq c$). Тогда появилось разделение моделей на жизнеспособные и нежизнеспособные после GW170817.

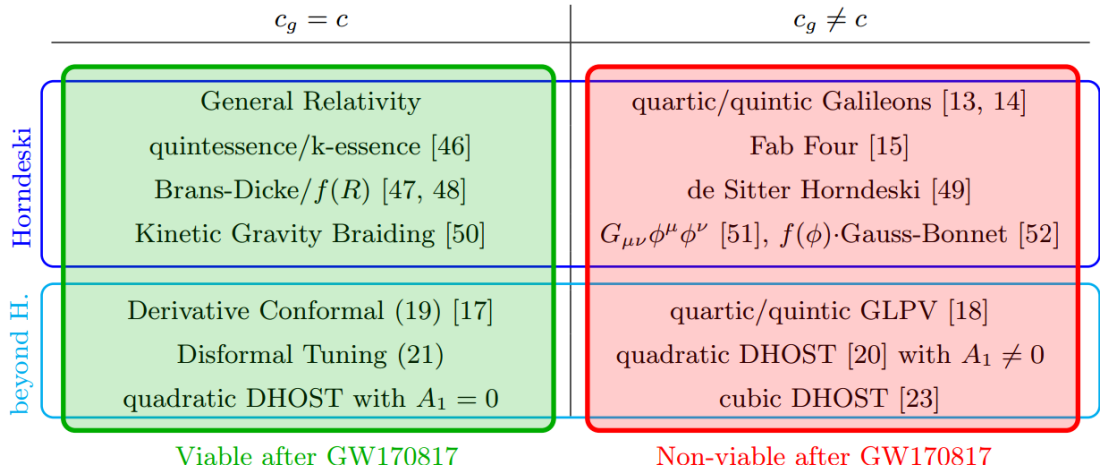


Рисунок 14.8 Краткое изложение жизнеспособных (слева) и нежизнеспособных (справа) скалярных тензорных теорий после GW170817

Модели, в которых скорость распространения волн равна скорости света, выжили (Бранс-Дикке, Хорндески). Модели, в которых гравитон массивен изначально и нет безмассовой моды в ведущем порядке, не выживают. Таким образом, это событие стало своеобразным критерием отсева моделей.

Двойные пульсары: отклонения от ОТО

По двойным пульсарам можно искать ограничения на модели расширенной гравитации, потому что ОТО в двойных пульсарах подтверждается с очень высокой точностью.

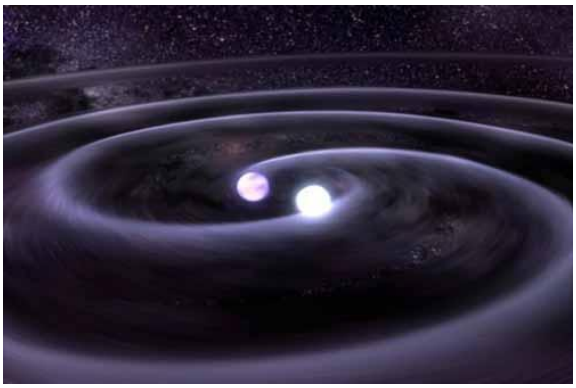


Рисунок 14.9 PSR B1913+16

PSR B1913+16 (также обозначается как J1915+1606) - пульсар, представляющий собой двойную звездную систему, состоящую из звезд примерно одинаковых по массе, около 1,4$M_\odot$. Обнаружен Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в 1974 году при проведении наблюдений на радиотелескопе обсерватории Аресибо. Они были удостоены Нобелевской премии по физике в 1993 году с формулировкой «за открытие нового типа пульсаров, давшее новые возможности в изучении гравитации».

На текущий момент этот пульсар является наиболее точной лаборатории для проверки гравитации.

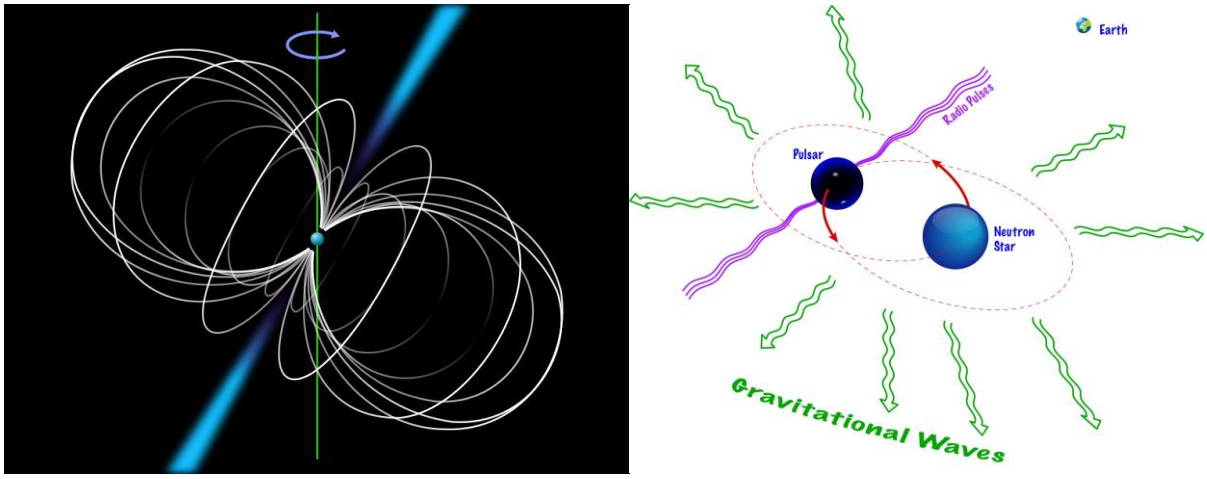


Рисунок 14.10 Вращение пульсара

Периодический сигнал при вращении пульсара возникает за счет сложения вращения самого объекта. Наиболее точно пульсарный тайминг описывала теория, в которой учитывалось рассеивание гравитационных волн. Для анализа излучения пульсаров был создан **посткеплеровский формализм**:

$$t_b - t_0 = D^{-1}\left[T + \Delta_R\left(T, \dot{\omega}, \dot{P}_b, \delta_r, \delta_\theta\right) + \Delta_E(T, \gamma) + \Delta_S(T, r, s) + \Delta_A(T, A, B)\right]$$

- t_b - время прихода импульса в барицентр Солнечной системы,
- t_0 - наблюдаемое время прихода импульса,
- T - собственное время испускания импульса пульсара,
- D - доплеровский фактор

$\Delta_R = x \sin\omega\,[\cos u - e(1+\delta_r)] + x[1 - e^2(1+\delta_\theta)^2]^{\frac{1}{2}} \cos\omega \sin u$ - *задержка Ремера*

$\Delta_E = \gamma \sin u$ - *задержка Эйнштейна*

$\Delta_S = -2r \ln\left\{1 - e\cos u - s\left[\sin\omega\,(\cos u - e) + (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \cos\omega \sin u\right]\right\}$ – *задержка Шапиро*

$\Delta_A = A\{\sin[\omega + A_e(u)] + e\sin\omega\} + B\{\cos[\omega + A_e(u)] + e\cos\omega\}$ – *задержка аберрационная*

Можно вычислить кеплеровские и посткеплеровские параметры:

$\{p^K\} = \{P_b, T_0, e_0, \omega_0, x_0\}$

$\{p^{PK}\} = \{k, \gamma, \dot{P}_b, r, s, \delta_\theta, \dot{e}, \dot{x}\}$

P_b- орбитальный период пульсара
e_0 - эксцентриситет
ω_0 -долгота периастра

$\{q^{PK}\} = \{\delta_r, A, B, D\}$

$$A_e(u) = 2\arctan\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\frac{u}{2}\right]$$

$$u - e\sin u = 2\pi\left[\left(\frac{T-T_0}{P_b}\right) - \frac{1}{2}\dot{P}_b\left(\frac{T-T_0}{P_b}\right)^2\right]$$

x_0 - проекция большой полуоси орбиты пульсара на луч зрения

$k \equiv \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{P_b}{2\pi}$

γ - параметр задержки Эйнштейна

r - параметр задержки Шапиро

$s = \sin i$

i – угол наклонения орбиты к лучу зрения

δ_θ, δ_r - параметры деформации орбиты

A, B - параметры аберрации

$$\dot{\omega} = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{5/3}\frac{G_{AB}^{2/3}(m_1+m_2)^{2/3}}{c^2(1-e^2)} \times\left((2\gamma^{PPN}+1) - \frac{1}{2}\frac{m_1(2\beta^{PPN}-1)G^2 + m_2(2\beta^{PPN}-1)G^2}{G_{AB}^2(m_1+m_2)} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = e\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-1/3}\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(G_{02} + \frac{G_{AB}m_2}{m_1+m_2}\kappa\eta^*\right)\frac{G_{AB}^{-1/3}(m_1+m_2)^{2/3}}{c^2}$$

$$r = \frac{G_{02}}{4c^3}(1+\varepsilon_{02})m_2$$

$$s = \frac{\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-2/3} cx(m_1+m_2)^{2/3}}{G_{AB}^{1/3}m_2}$$

Возможный дополнительный вклад орбитальной модуляции момента инерции пульсара, а η^* отражает влияние компаньона на значение гравитационной постоянной вблизи пульсара. На выходе получаем:

$$\delta_r^{intrinsic} = \left(2\gamma + 2 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{2/3} - \frac{2\pi\gamma}{P_b e}$$

$$\delta_\theta^{intrinsic} = \left(2\gamma + 2 - \frac{m_1(m_2+m_1/2)}{(m_1+m_2)^2}\right)\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{2/3} - \frac{2\pi\gamma}{P_b e}$$

$$A = -\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{1/3}\frac{m_2 P_p}{2\pi(m_1+m_2)(1-e^2)^{1/2}}\frac{\sin\eta}{\sin\lambda}$$

$$B = -\left(\frac{2\pi G_{AB}(m_1+m_2)}{P_b c^3}\right)^{1/3} \frac{m_2 P_p}{2\pi(m_1+m_2)(1-e^2)^{1/2}} \frac{\cos i \cos\eta}{\sin\lambda}$$

λ - угол между осью вращения и лучом зрения,
η - долгота оси вращения пульсара, измеряемая от восходящего узла.

Первая производная орбитального периода описывает все, что необходимо сделать. Для вычисления:

- определяем псевдотензор теории $t_{\mu\nu}$
- подставляем метрику в виде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- решаем уравнения поля относительно $h_{\mu\nu}$ и представляем решение в виде запаздывающих потенциалов
- выражаем тензор энергии-импульса через монопольный, дипольный и квадрупольный моменты
- находим поток энергии системы
- используем формулы небесной механики для расчета орбиты и формулу для тензора квадрупольных моментов.

В ОТО все параметры уже известны:

$$\dot{\omega} = 3\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} \left(T_\odot M\right)^{2/3} (1-e^2)^{-1}$$

$$\gamma = e\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{1/3} T_\odot^{2/3} M^{-4/3} m_2 (m_1 + 2m_2)$$

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5}\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \times (1-e^2)^{-7/2} T_\odot^{5/3} m_1 m_2 M^{-1/3}$$

$$r = T_\odot m_2$$

$$s = \left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-2/3} T_\odot^{-1/3} m_2^{-1}$$

Параметры PSR J0737-3039		
ППК параметр	Физический смысл	Экспериментальное значение
$P_b(day)$	орбитальный период	0.10225156248(5)
e	эксцентриситет	0.0877775(9)
$x(s)$	проеция большой полуоси	1.415032(1)
$\dot{\omega}(deg/yr)$	скорость движения периастра орбиты	16.89947(68)
$\gamma(ms)$	параметр Эйнштейна	0.3856
$\dot{P}_b$	изменение орбитального периода	$-1.252(17) \times 10^{-12}$
s	параметр задержки Шапиро	$0.99974(-39, +16)$
$r(\mu s)$	параметр задержки Шапиро	6.21(33)
R	отношение масс	1.0714(11)

Таблица 14.2 Параметры пульсара PSR J0737-3039

Далее по формулам ОТО и найденным параметром «рисуется» график, в котором все должно сойтись в одной точке при правильных m_1 и m_2. Для теории относительности именно таким образом и были получены значения m_1 и m_2.

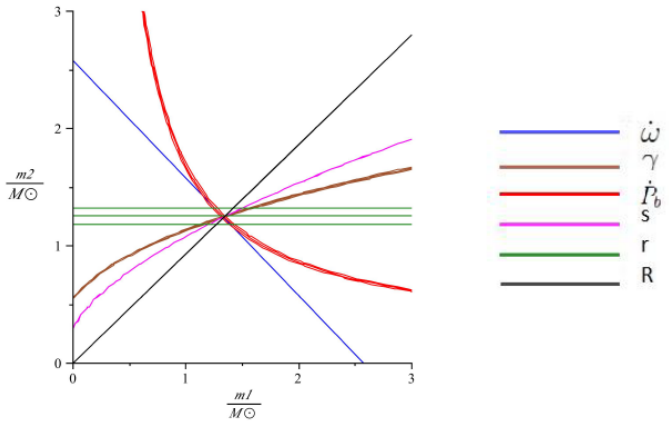


Рисунок 14.11 Графики для параметров

Рассмотрим f(R)-гравитацию:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) + \kappa L_m]$$

L_m- лагранжиан материи, g - определитель метрического тензора, $\kappa = 16\pi G/c^2$, G - гравитационная постоянная, c - скорость света, R - скаляр Риччи, $f(R)$ - аналитическая функция

<u>Посткеплеровские параметры f(R)-гравитации</u>

$$\dot{\omega} = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{5/3} \frac{G^{2/3}M_\odot^{2/3}(m_1+m_2)^{2/3}}{c^2(1-e^2)} \left(\frac{((2(f_0')+4(f_0'')^2)}{(2(f_0')+3(f_0'')^2))}\right)^{2/3} \times$$
$$\times \left(\frac{24(f_0')^3+130(f_0')^2(f_0'')^2-(f_0')(f_0'')^3+232(f_0')(f_0'')^4+136(f_0'')^6}{8(f_0')^3+48(f_0')^2(f_0'')^2+96(f_0')(f_0'')^4+64(f_0'')^6}\right),$$

$$r = \frac{1}{4c^3}GM_\odot m_2,$$

$$\tilde{\gamma} = e\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-1/3} \frac{G^{2/3}M_\odot^{2/3}m_2}{c^2(m_1+m_2)^{4/3}}\left(m1+m2\left[2+\frac{(f_0'')^2}{2f_0'+3(f_0'')^2}\right]\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{(f_0'')^2}{2f_0'+3(f_0'')^2}\right)^{2/3},$$

$$s = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-2/3} \frac{cx(m_1+m_2)^{2/3}}{(GM_\odot)^{1/3}m_2}\left(1+\frac{(f_0'')^2}{2f_0'+3(f_0'')^2}\right)^{-1/3}.$$

$$\dot{P}_b = -\frac{6\pi}{20}\left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{-5/3}\frac{(GM_\odot)^{5/3}}{c^5(1-e^2)^{7/2}}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{1/3}}\times$$
$$\times\left((f_0'(37e^4+292e^2+96)-\frac{f_0''\pi^2}{2P_b(1+e^2)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\left(891e^8+28016e^6+82736e^4+43520e^2+3072\right)\right)$$

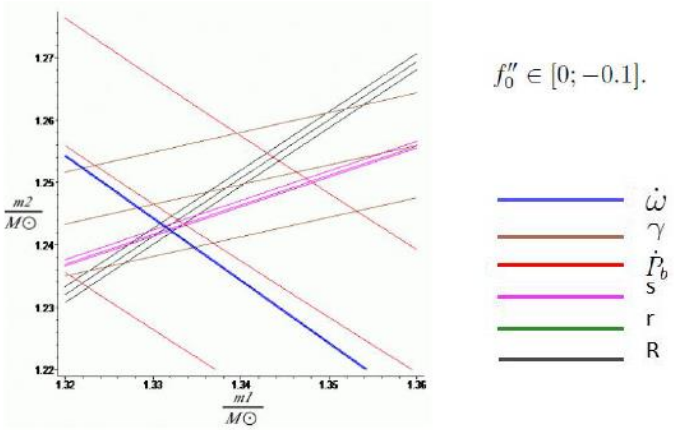


Рисунок 14.12 Ограничения на f(R)-гравитацию

Для f(R)-гравитации можно локализовать значения $f_0'' \in [0; -0.1]$.

Вычисляя все величины через формулы ОТО, мы можем проверять модель, используя данные пульсарного тайминга как наиболее точные.

Parameter	Physical meaning	Experimental value
P_b	orbital period	0.3547907398724(13) day
e	eccentricity	$0.34(11)\times10^{-6}$
$\dot{P}_b^{obs}$	observational secular change of P_b	$-0.170(31)\times10^{-13}$
$\dot{P}_b^{intr}$	intrinsic secular change of P_b	$-0.259(32)\times10^{-13}$
$\dot{P}_b^{intr}/\dot{P}_b^{GR}$	relation between $\dot{P}_b^{intr}$ and $\dot{P}_b^{GR}$	0.93(13)
m_1	mass of the pulsar	$1.46^{+0.06}_{-0.05}\ M_\odot$
m_2	mass of the white dwarf	$0.181^{+0.007}_{-0.005}\ M_\odot$
m	total system mass	$1.65^{+0.07}_{-0.06}\ M_\odot$

Таблица 14.3 Параметры PSR J1738+0333

Солнечная система: ньютоновский предел

Один из наиболее интересных и популярных инструментов - пост-ньютоновский формализм. Аналогией пост-ньютоновского формализма может служить ряд Тейлора, в котором степени фиксированы, а функции отличаются значениями коэффициентов:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \cdots$$

В пост-ньютоновском формализме теория гравитации может быть разложена на теорию ньютона и 10 поправок, производных для M_2, M_3 и т.д.

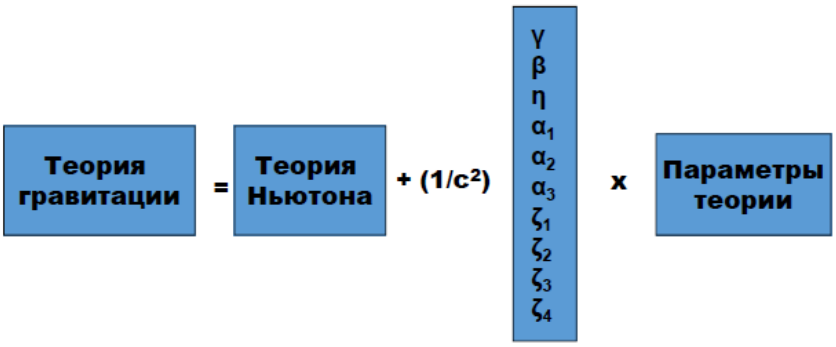


Рисунок 14.13 Пост-ньютоновский формализм

Первая версия параметризованного постньютоновского формализма (ППН) формализма была предложена в 1922 году Артуром Стэнли Эддингстоном:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - 2\beta\left(\frac{M}{r^2}\right), \qquad g_{0j} = 0, \qquad g_{jk} = \left(1 + \frac{2\gamma M}{r}\right)\delta_{jk}$$

Обратим внимание на 10 параметров пост-ньютоновского формализма. Каждая группа параметров имеет свое значение и экспериментальные значения. Таким образом, представив теории в виде метрики приближений, мы можем вычислить для нее все пост-ньютоновские параметры. И так как параметры вычислены экспериментально, они служат способом проверки.

Для параметризованного пост-ньютоновского формализма есть требования:

1. Слабое поле
2. Асимптотически плоское пространство (не выходим за пределы небольших временных масштабов, чтобы иметь возможность пренебречь расширением)
3. Малые скорости

ППН метрика в приближении материальной точки подводит все коэффициенты так, чтобы их можно было измерить экспериментально.

Point-Mass Metric

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2\sum_k \frac{m_k}{r_k} + 2\beta\left(\sum_k \frac{m_k}{r_k}\right)^2 - 2(1 - 2\beta + \zeta_2)\sum_k \frac{m_k}{r_k}\sum_{j\neq k}\frac{m_j}{r_{jk}} \\
&\quad - (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1)\sum_k \frac{m_k {v_k}^2}{r_k} + \zeta_1 \sum_k \frac{m_k}{{r_k}^3}(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{r}_k)^2 \\
&\quad + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2 \sum_k \frac{m_k}{{r_k}^3} + \alpha_2 \sum_k \frac{m_k}{r_k}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_k)^2 - (2\alpha_3 - \alpha_1)\sum_k \frac{m_k \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}_k}{r_k}, \\
g_{0\alpha} &= \tfrac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)\sum_k \frac{m_k {v_k}^\alpha}{r_k} + \tfrac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1)\sum_k \frac{m_k}{{r_k}^3}(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{r}_k){r_k}^\alpha \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^\alpha \sum_k \frac{m_k}{r_k} + \alpha_2 \sum_k \frac{m_k}{{r_k}^3}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}_k){r_k}^\alpha, \\
g_{\alpha\beta} &= -\left(1 + 2\gamma \sum_k \frac{m_k}{r_k}\right)\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Рисунок 14.14 ППН метрика в приближении материальной точки

Perfect-Fluid Metric

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2U + 2\beta U^2 - (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1)\Phi_1 + \zeta_1 \mathscr{A} \\
&\quad - 2[(3\gamma + 1 - 2\beta + \zeta_2)\Phi_2 + (1 + \zeta_3)\Phi_3 + 3(\gamma + \zeta_4)\Phi_4] \\
&\quad + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w^2 U + \alpha_2 w^\alpha w^\beta U_{\alpha\beta} - (2\alpha_3 - \alpha_1)w^\alpha V_\alpha, \\
g_{0\alpha} &= \tfrac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)V_\alpha + \tfrac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1)W_\alpha \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^\alpha U + \alpha_2 w^\beta U_{\alpha\beta}, \\
g_{\alpha\beta} &= -(1 + 2\gamma U)\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Рисунок 14.15 ППН метрика в приближении идеальной жидкости

ППН параметр	Что он характеризует	ОТО	Экспериментальные значения
γ	Кривизну пространства, создаваемую единицей массы покоя	1	$1 \pm 2.3 \cdot 10^{-5}$
β	Степень нелинейности закона суперпозиции для гравитации	1	$1 \pm 8 \cdot 10^{-5}$
ξ	Наличие эффектов привилегированного положения	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-9}$
α_1	Наличие эффектов	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-5}$
α_2	привилегированной	0	$0 \pm 2 \cdot 10^{-9}$
α_3	системы отсчета	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-20}$
ζ_1		0	0 ± 0.02
ζ_2	Нарушение закона сохранения	0	$0 \pm 4 \cdot 10^{-5}$
ζ_3	полного импульса	0	0 ± 10^{-8}
ζ_4		0	$0 \pm 0.006^\star$

*не является независимым, так как $6\zeta_4 = 3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3$.

Таблица 14.4 ППН параметры

Значения ППН параметров		Характер теории	Сохраняющаяся величина*
ζ_{1-4}, α_3	α_1, α_2		
Все равны нулю	Все равны нулю	Полностью консервативная	p^μ, $J^{\mu\nu}$
То же	Могут быть не равны нулю	Полуконсервативная	p^μ
Могут быть не равные нулю	Любые	Неконсервативная	p_0

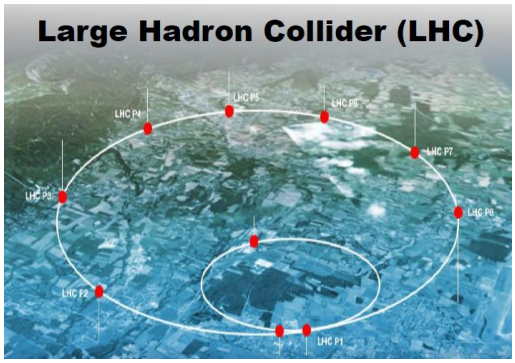
Таблица 14.5 ППН законы сохранения

Метод расчета параметров:

- вводим переменные: метрика, скалярное поле, векторное поле и т.д.
- устанавливаем космологические граничные условия
- раскладываем в пост-ньютоновский ряд вокруг асимптотических значений интересующие нас величины (метрику, скалярное поле и т.д.)
- подставляем разложенные до необходимого порядка выражения в уравнения поля
- решаем полученную систему уравнений, выражая каждый порядок отдельно
- сравниваем метрику теории с общей ППН метрикой, находим выражения для ППН параметров
- найденные выражения ППН параметров сравниваем с экспериментальными значениями и накладываем ограничения на исследуемую теорию

Одним из способов измерения значений этих параметров является лазерная локация луны. Таким образом можно получить более точные значения параметров.

БАК: поведение при энергиях в диапазоне ТэВ



Можно искать поправки в модель гравитации в режиме высоких энергий (квантовые поправки). Рассчитаны идущие из эффекта нелокальности в квантовой гравитации поправки по взаимодействию элементарных частиц на Большом адронном коллайдере. На основе последних данных ускорителя были представлены ограничения на масштаб возможных нелокальностей пространства-времени:

$$M^* > 3 \times 10^{-11} GeV$$

Лекция №15. Bi-Gravity

Уравнения поля. Тензор энергии импульса. Разложение полей

Статья: Giulia Cusin, Nima Khosravi and Johannes Noller "On scale-free extensions of massive (bi-)gravity"

Действие имеет вид

$$\mathcal{S}_{metric} = \frac{M_{Pl}^2}{2}\int d^D x\sqrt{-g_{(1)}}R\left[g_{(1)}\right] + \frac{M_{Pl}^2}{2}\int d^D x\sqrt{-g_{(2)}}R\left[g_{(2)}\right]$$
$$- \frac{M_{Pl}^2}{2}\sum_{n=0}^{D}\beta_n\int d^D x\sqrt{-g_{(1)}}\Phi^2 e_n\left(\sqrt{g_{(1)}^{-1}g_{(2)}}\right)$$
$$+ \int d^D x\sqrt{-g_{(1)}}\left(-\frac{1}{2}\nabla_\mu^{(1)}\Phi\nabla_{(1)}^\mu\Phi - W(\Phi)\right) + \int d^D x\sqrt{-g_{(1)}}\mathcal{L}_m[g_{(1)},\Psi]$$

$$W(\Phi) = \lambda\Phi^4 \text{ или } W(\Phi) = 0 \text{ в пределе } D = 4$$

Уравнения поля ($g_{(1)} = g, g_{(2)} = f$)

$$R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R(g) - \Phi^2\mathcal{M}_{\mu\nu}^g = \frac{1}{M_{Pl}^2}T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{1}{M_{Pl}^2}T_{\mu\nu}^\Phi$$

$$R_{\mu\nu}(f) - \frac{1}{2}f_{\mu\nu}R(f) - \Phi^2\mathcal{M}_{\mu\nu}^f = 0$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^g \equiv \frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}(-)^{n+1}\beta_n\left[g_{\mu\nu}Y_{(n)\nu}^\lambda\left(\sqrt{g^{-1}f}\right) + g_{\nu\mu}Y_{(n)\mu}^\lambda\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)\right]$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^f \equiv \frac{\delta V}{\delta f^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}f_{\mu\nu}V = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}(-)^{n+1}\beta_{4-n}\left[f_{\mu\nu}Y_{(n)\nu}^\lambda\left(\sqrt{f^{-1}g}\right) + f_{\nu\mu}Y_{(n)\mu}^\lambda\left(\sqrt{f^{-1}g}\right)\right]$$

$$T_{\mu\nu}^\Phi \equiv \nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\Phi\nabla_\beta\Phi + W(\Phi)\right)$$

Уравнение на поле

$$\Box\Phi - W_{,\Phi}(\Phi) - M_{Pl}^2\Phi V(g,f) = 0$$

Тензор энергии импульса

$$T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^\Phi + T_{\mu\nu}^{(m)}$$

Лагранжиан скалярного поля:

$$\mathcal{L}^{\Phi} = -\frac{1}{2}\left(\nabla_{\mu}\Phi\right)^{2} - W(\Phi) - \frac{M_{Pl}^{2}}{2}\Phi^{2}V(g,f)$$

$$T_{\mu\nu}^{\Phi} = -2\frac{\delta\mathcal{L}^{\Phi}}{\delta g^{\mu\nu}} + g^{\mu\nu}\mathcal{L}^{\Phi},$$

$$= \nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi + M_{Pl}^{2}\Phi^{2}\frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\Phi\nabla_{\beta}\Phi + W(\Phi) + \frac{M_{Pl}^{2}}{2}\Phi^{2}V\right)$$
$$= \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\Phi} + M_{Pl}^{2}\Phi^{2}\mathcal{M}_{\mu\nu}^{g}$$

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{\Phi} + \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{(m)} = \nabla^{\mu}\left(\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\Phi} + M_{Pl}^{2}\Phi^{2}\mathcal{M}_{\mu\nu}^{g}\right) + \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$$

Разложение полей

$$\Phi = \phi_0 + \delta\phi, \qquad \delta\phi \ll \phi_0$$

Члены, линейные по полю

$$\text{tadpole terms} = M_{Pl}^{2}(\beta_0 + 4\beta_1 + 6\beta_2 + 4\beta_3 + \beta_4)\phi_0\delta\phi$$
$$+ \frac{M_{Pl}}{2}(\beta_0 + 3\beta_1 + 3\beta_2 + \beta_3)\phi_0^{2}h^{\mu}{}_{\mu} + \frac{M_{Pl}}{2}(\beta_1 + 3\beta_2 + 3\beta_3 + \beta_4)\phi_0^{2}l^{\mu}{}_{\mu}$$

$$h \equiv h_{(1)}, \qquad l \equiv h_{(2)}$$

Условия на коэффициенты

$$\beta_0 = -3\beta_1 - 3\beta_2 - \beta_3$$

$$\beta_4 = -\beta_1 - 3\beta_2 - 3\beta_3$$

Квадратичное действие, в частности на космологическом фоне

$$\mathcal{S}_2^{kin} = \mathcal{S}_{scalar}^{kin} + \mathcal{S}_{tensor}^{kin} + \mathcal{S}_{scalar-tensor}^{kin}$$

$$\mathcal{S}_{scalar}^{kin} = \int d^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\delta\phi\partial^{\mu}\delta\phi + M_{Pl}^{2}(\beta_1 + 3\beta_2 + 3\beta_3 + \beta_4)\phi_0\delta\phi\pi_{\mu}^{\mu}\right]$$

Используя tadpole terms, можно упростить

$$\mathcal{S}_{scalar}^{kin} = \int d^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\delta\phi\partial^{\mu}\delta\phi\right]$$

$$\mathcal{S}_{tensor}^{kin} = \int d^4x \left[\frac{1}{8} h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h^\rho{}_\rho - \frac{1}{4} h^{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\nu h_\mu{}^\rho + \frac{1}{8} h^\rho{}_\rho\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{8} h^{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{8} h^\mu{}_\mu \Box h^\nu{}_\nu\right] \equiv \int d^4x \mathcal{L}_2^{EH}(h)$$

$$\mathcal{S}_{scalar-tensor}^{kin} = \frac{M_{Pl}}{2}\phi_0^2(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3)\int d^4x\left[h^\mu{}_\mu\Box\pi - h^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}\right]$$

Действие 2-го порядка после преобразований

$$\mathcal{S}_2^{pot} = \int d^4x \left[\phi_0^2(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3)\left(\frac{1}{4} h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{4} h^\mu{}_\mu h^\nu{}_\nu + \frac{1}{4} l_{\mu\nu}l^{\mu\nu} - \frac{1}{4} l^\mu{}_\mu l^\nu{}_\nu - \frac{1}{2} h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + h^\mu{}_\mu l^\nu{}_\nu - \sqrt{3}h^\mu{}_\mu\pi + \sqrt{3}l^\mu{}_\mu\pi - 4\pi^2\right) - W_2(\delta\phi)\right]$$

Квадратичное действие на произвольном фоне возмущения метрики:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \mathbb{h}_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + \frac{h_{\mu\nu}}{M_{Pl}}$$

$$f_{\mu\nu} = \bar{f}_{\mu\nu} + \mathbb{l}_{\mu\nu} \equiv \bar{f}_{\mu\nu} + \frac{l_{\mu\nu}}{M_{Pl}}$$

Возмущения скалярного поля: $\Phi = \phi + \delta\phi$

Действие примет вид: $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2^{kin} + \mathcal{S}_2^m$

$$\mathcal{S}_2^{kin} = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{g}}\,\left(h_{\mu\nu}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{g})h_{\alpha\beta} - (\nabla_\mu\delta\phi)^2\right) + \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{f}}\,\ell_{\mu\nu}\mathcal{E}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{f})\ell_{\alpha\beta}\,, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2^m = &-\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{g}}\,\phi^2\left[\mathcal{M}_{gg}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{f},\bar{g})h_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{gf}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{f},\bar{g})h_{\mu\nu}\ell_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_{ff}^{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{f},\bar{g})\ell_{\mu\nu}\ell_{\alpha\beta}\right] - \\ &-\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{g}}\,\phi\left[2\mathcal{M}_g^{\mu\nu}(\bar{f},\bar{g})h_{\mu\nu}\,\delta\phi + 2\mathcal{M}_f^{\mu\nu}(\bar{f},\bar{g})\ell_{\mu\nu}\,\delta\phi\right] - \\ &-\frac{M_g^2}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{g}}\,V(\bar{g},\bar{f})\,\delta\phi^2 - \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-\bar{g}}\,\frac{\partial^{(2)}W}{\partial\Phi\partial\Phi}\bigg|_{g=\bar{g}\,,f=\bar{f}}\,\delta\phi^2\,,\end{aligned} \tag{4.6}$$

Квадратичное действие на космологическом фоне

Космологический анзац

$$\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau)\left(-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right)$$

$$\bar{f}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = b^2(\tau)\left(-c^2(\tau)d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\right)$$

Вводим параметры Хаббла и отношение масштабных факторов:

$$H = \frac{\mathcal{H}}{a} = \frac{a'}{a^2}, \qquad H_f = \frac{\mathcal{H}_f}{b} = \frac{b'}{b^2 c}, \qquad r = \frac{b}{a}$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (p+\rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

$$\rho' = -3(p+\rho)\mathcal{H}$$

$$p = \omega\rho$$

Уравнение на скалярное поле

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 W_{,\phi} + a^2 M_{Pl}^2 V(r,c)\phi = 0$$

$$V(r,c) \equiv \bar{V}\left(\bar{g},\bar{f}\right) = \beta_0 + \beta_1(c+3)r + 3\beta_2(c+1)^2 r^2 + \beta_3(1+3c)r^3 + \beta_4 c r^4$$

Вводим эффективный потенциал

$$\mathcal{W}(\phi,r,c) \equiv W(\phi) + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 V(r,c)\phi^2$$

После преобразований

$$2\phi'(\beta_1 + 3\beta_2 r + 3\beta_3 r^2 + \beta_4 r^3) + 3\phi\left(\mathcal{H} - \mathcal{H}_f\right)(\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2) = 0$$

Возможны 2 решения

$$First\ Branch\text{:}\ \ (\beta_1 + 3\beta_2 r + 3\beta_3 r^2 + \beta_4 r^3) = 0, \qquad (\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2) = 0$$

$$Second\ Branch\text{:}\ \ (1-c)\mathcal{H}_f = -\frac{r'}{r} + \frac{2\phi'}{3\phi}\frac{\beta_1 + 3\beta_2 r + 3\beta_3 r^2 + \beta_4 r^3}{\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2}$$

Первая - стандартная для bi-gravity, вторая – динамическая.

Уравнения Фридмана и Райчадхури для метрики g

$$3H^2 = 8\pi G(\rho + \rho_\phi)$$

$$3H^2 + \frac{2H'}{a} = -8\pi G(p + p_\phi)$$

Уравнения Фридмана и Райчадхури для метрики f

$$3H_f^2 = \frac{\phi^2}{2}\left(\frac{\beta_1}{r^3} + \frac{3\beta_2}{r^2} + \frac{3\beta_3}{r} + \beta_4\right)$$

$$\frac{2H_f'}{b} = \frac{\phi^2}{2}\frac{(1-c)}{r^3}(\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2)$$

Ветвь 1: $r = const,\ \ (\beta_1 + 3\beta_2\bar{r} + 3\beta_3\bar{r}^2 + \beta_4\bar{r}^3) = 0,\ \ (\beta_1 + 2\beta_2\bar{r} + \beta_3\bar{r}^2) = 0$

Решения: $H_f = 0,\ \ H_f' = 0\ \ => \ \ a = 0,\ \ H = 0$ решение тривиально.

Ветвь 2: используя тождество Бьянки, фиксируем значение функции задержки (lapse function) c

$$c = \frac{1}{r}\cdot\frac{3\phi(r' + r\mathcal{H})(\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2)}{2\phi'(\beta_1 + 3\beta_2 r + 3\beta_3 r^2 + \beta_4 r^3) + 3\phi\mathcal{H}(\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2)}$$

Уравнения Фридмана:

$$\rho_\phi = \frac{\phi'^2}{2a^2} + W(\phi) + \frac{\phi^2}{16\pi G}(\beta_0 + 3\beta_1 r + 3\beta_2 r^2 + \beta_3 r^3)$$

$$p_\phi = \frac{\phi'^2}{2a^2} - W(\phi) - \frac{\phi^2}{16\pi G}(\beta_0 + 3\beta_1(c+2)r + 3\beta_2(2c+1)r^2 + \beta_3 c r^3)$$

$$\omega_\phi \equiv p_\phi/\rho_\phi = -1 + \frac{\frac{\phi'^2}{a^2} + (1-c)r\frac{\phi^2}{16\pi G}(\beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2)}{\frac{\phi'^2}{2a^2} + W(\phi) + \frac{\phi^2}{16\pi G}(\beta_0 + 3\beta_1 r + 3\beta_2 r^2 + \beta_3 r^3)}$$

Массовые члены для gg и ff членов

$$\mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{0000}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\alpha_\bullet(\tau)\,,$$
$$\mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{ij00}(\bar{f},\bar{g}) = \mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{00ij}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\gamma_\bullet(\tau)\delta^{ij}\,,$$
$$\mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{i0j0}(\bar{f},\bar{g}) = \mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{0i0j}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\epsilon_\bullet(\tau)\delta^{ij}\,,$$
$$\mathcal{M}_{\bullet\bullet}^{ijkl}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\left\{\eta_\bullet(\tau)\delta^{ij}\delta^{kl} + \frac{\sigma_\bullet(\tau)}{2}\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right)\right\}$$

Массовые члены для gf

$$\mathcal{M}_{gf}^{0000}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\alpha_{gf}(\tau)\,,$$
$$\mathcal{M}_{gf}^{ij00}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\gamma_{gf}(\tau)\delta^{ij}\,,$$
$$\mathcal{M}_{gf}^{00ij}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\gamma_{fg}(\tau)\delta^{ij}\,,$$
$$\mathcal{M}_{gf}^{i0j0}(\bar{f},\bar{g}) = \mathcal{M}_{gf}^{0i0j}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\epsilon_{gf}(\tau)\delta^{ij}\,,$$
$$\mathcal{M}_{gf}^{ijkl}(\bar{f},\bar{g}) = a^{-4}\left\{\eta_{gf}(\tau)\delta^{ij}\delta^{kl} + \frac{\sigma_{gf}(\tau)}{2}\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right)\right\}$$

Подставив массовые члены:

$$\mathcal{S}_2^m = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\left[\mathcal{L}_{gg}^{(2)} + \mathcal{L}_{ff}^{(2)} + \mathcal{L}_{gf}^{(2)} + \mathcal{L}_{g\phi}^{(2)} + \mathcal{L}_{f\phi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\phi\phi}^{(2)}\right]$$

$$\mathcal{L}_{gg}^{(2)} = \phi^2\left[\alpha_g h_{00}^2 + \gamma_g h_{00}h_{ij}\delta^{ij} + 2\epsilon_g h_{0i}h_{0j}\delta^{ij} + \eta_g h_{ij}h_{kl}\delta^{ij}\delta^{kl} + \frac{\sigma_g}{2}h_{ij}h_{kl}\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right)\right]$$

$$\mathcal{L}_{ff}^{(2)} = \phi^2\left[\alpha_f \ell_{00}^2 + \gamma_f \ell_{00}\ell_{ij}\delta^{ij} + 2\epsilon_f \ell_{0i}\ell_{0j}\delta^{ij} + \eta_f \ell_{ij}\ell_{kl}\delta^{ij}\delta^{kl} + \frac{\sigma_f}{2}\ell_{ij}\ell_{kl}\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right)\right]$$

$$\mathcal{L}_{gf}^{(2)} = \phi^2\left[\alpha_{gf} h_{00}\ell_{00} + \gamma_{fg} h_{00}\ell_{ij}\delta^{ij} + \gamma_{gf}\ell_{00}h_{ij}\delta^{ij} + 2\epsilon_{gf}h_{0i}\delta^{ij}\ell_{0j} + \eta_{gf}h_{ij}\ell_{kl}\delta^{ij}\delta^{kl}\right.$$
$$\left. + \frac{\sigma_{gf}}{2}h_{ij}\ell_{kl}\left(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right)\right]$$

$$\mathcal{L}_{g\phi}^{(2)} = a^2\,\phi\,M_{\rm Pl}\,\delta\phi\left[\zeta_g\,h_{00} + \xi_g\,h_{ij}\delta^{ij}\right]$$

$$\mathcal{L}_{f\phi}^{(2)} = a^2\,\phi\,M_{\rm Pl}\,\delta\phi\left[\zeta_f\,\ell_{00} + \xi_f\,\ell_{ij}\delta^{ij}\right]$$

$$\mathcal{L}_{\phi\phi}^{(2)} = a^4\left[M_{\rm Pl}^2\,\bar{V} + \left.\frac{\partial^{(2)}W}{\partial\Phi\partial\Phi}\right|_{\bar{g},\bar{f}}\right]\delta\phi^2$$

Применение к темной энергии, к инфляции

Тёмная энергия

Источник ускоренного расширения – массовые члены. Используя условие

$$\left|\dot{\phi}(t_f)\right| \ll \phi(t_f)H(t_f)$$

$$\dot{\phi}(t_f)^2 \ll M_{Pl}^2 H^2(t_f) \simeq |\mathcal{W}(\phi)|_{t_f}$$

$$3H^2 = \frac{\phi^2}{2}\left(\frac{\beta_1}{r^3} + \frac{3\beta_2}{r^2} + \frac{3\beta_3}{r} + \beta_4\right)$$

В пределе $\rho \to 0$:

$$\frac{1}{M_{Pl}^2}W(\phi) + \frac{\phi^2}{2}\left(\beta_3 r^3 + 3\beta_2 r^2 + 3\beta_1 r + \beta_0 - \frac{\beta_1}{r} - 3\beta_2 - 3\beta_3 r - \beta_4 r^2\right) = 0$$

$$\frac{\dot{\phi}(t_f)}{\phi(t_f)H(t_f)} \simeq \frac{M_{Pl}^2}{H^2(t_f)}V(r,c)|_{t_f} - \text{является условием slow} - \text{roll}$$

При $V(r,c) \sim H^2(t_f)/M_{Pl}^2$ получаем ускоренное расширение

Инфляция

Введем эффективный потенциал:

$$\mathcal{W}(\phi) = \frac{1}{2} m_\phi^2(\tau)\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4, \qquad m_\phi^2(\tau) \equiv M_{Pl}^2 V(r,c)$$

На ранних стадиях $\phi'^2(\tau_i) \ll a^2(\tau_i)\mathcal{W}(\phi)$. В пределе $\rho \to 0$ уравнение Фридмана имеет вид $3H^2 \simeq 8\pi G\mathcal{W}(\phi)$. Используя условие slow-roll

$$|\phi'(\tau_i)| \ll M_{Pl}\mathcal{H}(\tau_i) \lesssim \phi(\tau_i)\mathcal{H}(\tau_i) \implies r \simeq const \to c \simeq 1 \to H \simeq const$$

откуда следует, что инфляция запускается. Описание инфляции осуществляется без дополнительных полей.

ИТОГИ

Шкалы сильной связи: Пертурбативно исследуя структуру взаимодействия теории вокруг Минковского, мы находим шкалу сильной связи по аналогии со стандартной би- и массивной гравитацией. Здесь мы использовали возмущающее разложение Φ = φ0 + δφ вокруг фиксированного и нединамического опорного значения φ0. В отличие от стандартных случаев массивной (би-) гравитации, соблюдение условий отмены имеет решающее значение для того, чтобы эта шкала сильной связи была явной.

Модифицированная физика низких энергий: Дополнительные взаимодействия, отсутствующие в стандартных массивных и бигравитационных пределах развязки, могут быть обнаружены в нашей модели благодаря новой динамической скалярной степени свободы Φ. Они в целом влияют на пределы масштабирования и физику модели с низкими энергиями. Мы фиксируем эти новые взаимодействия в пределе масштабирования, отличном от стандартного предела развязки, который ясно иллюстрирует режимы, в которых наше возмущающее расширение допустимо, и условия, необходимые для его удовлетворения.

Космологическая структура: Используя метод, мы вывели квадратичное действие нашей теории как вокруг общих, так и явно фоновых конфигураций FLRW. Мы находим точную форму новых взаимодействий благодаря дополнительному скаляру Φ, дополняющему стандартные бигравитационные взаимодействия. Это также позволит детально изучить космологические возмущения в будущей работе. Кроме того, мы вывели фоновую динамику и установили природу двух различных ветвей решений в нашей модели.

Темная энергия и инфляция: Наконец, мы подробно изучили, как периоды раннего и позднего ускорения времени, т.е. инфляционная фаза и фаза темной энергии, могут быть реализованы на фоновом уровне в нашей модели. Инфляция может быть успешно реализована (без точной настройки параметров), при этом скалярное поле Φ действует как медленно накатывающий инфлатон и приводит к ранней стадии квазиинфляции де Ситтера. Удивительно, но генерировать период ускорения с

запозданием значительно сложнее и требует либо чрезвычайно точной настройки параметров, либо (повторного) введения явной дополнительной шкалы (массы) в потенциале для Φ. Это ограничение также будет применяться к нашему ограничению массивной гравитации и общим моделям с изменением массы.

Дополнительная активность. Причины расширения ОТО

Готовые массовые члены для инфляции

- Получение bi-gravity из new massive gravity
- Преобразования bi-gravity в Horndesky model
- Локальные решения

Причины расширения ОТО

- Темная материя
- Темная энергия
- Квантовая теория гравитации
- Ранняя Вселенная (инфляция, отскок)
- Сингулярности ОТО
- Увеличение точности наблюдений

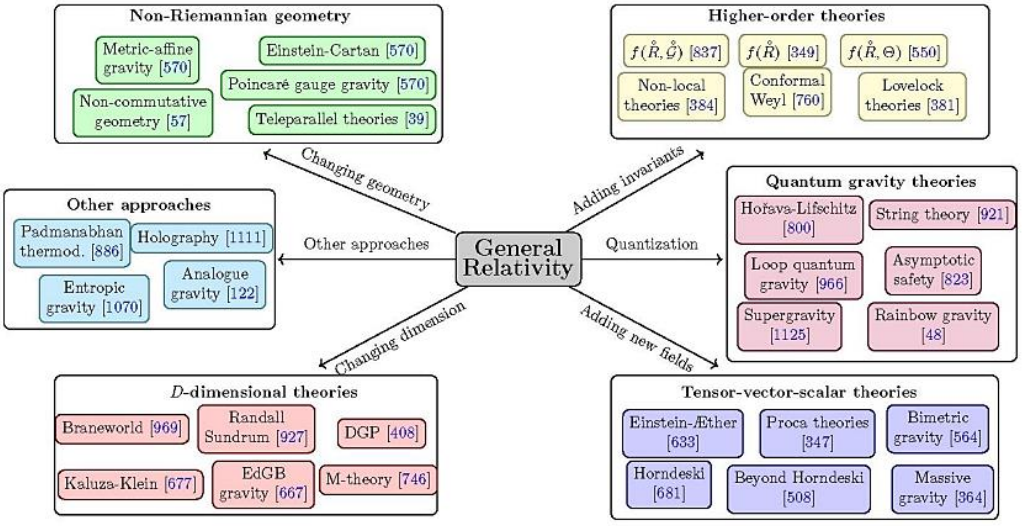


Рисунок 15.1 Способы расширения гравитации

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ