ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА. СЕМИНАРЫ

ЯКУТА
АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

1 Лекция 1. Введение в кинематику 9

1.1 Кинематика . . . 9
1.2 Задача. Траектория движения точки . . . 12
1.3 Задача. Радиус кривизны параболы . . . 14
1.4 Задача. Качение без проскальзывания . . . 15

2 Лекция 3. Выбор системы отсчета. Кинематические связи 18

2.1 Задача. Поворот космического корабля . . . 18
3.1 Задача. Встреча колонны спортсменов и тренера . . . 18
3.2 Задача. Минимальная скорость броска камня . . . 19
3.3 Задача. Волк преследует зайца . . . 20
3.4 Уравнения кинематической связи . . . 23
3.5 Задача. Движение стержня . . . 23
3.6 Задача. Лодка и веревка . . . 24

4 Лекция 4. Кинематические связи в системах блоков 27

4.1 Задача. Ящик и веревки . . . 27
4.2 Кинематические связи в системах блоков . . . 28
4.3 Обобщение "золотого правила"механики . . . 32
4.4 Энергетический метод вывода связей . . . 34

5 Лекция 5. Движение центра масс 38

5.1 Теорема о движении центра масс . . . 38
5.2 Задача. Осколки снаряда . . . 38
5.3 Задача. Шарик и чашка . . . 38
5.4 Задача. Жучок на обруче . . . 39
5.5 Задача. Смещение лодки . . . 40
5.6 Задача. Лестница и машина Атвуда . . . 41
5.7 Задача. Ускорение центра масс системы грузов . . . 42
5.8 Задача. Отделение вагона от поезда . . . 43
5.9 Задача. Центр масс проволоки . . . 44
5.10 Задача. Вращение кольца . . . 45
5.11 Задача. Давление жучка на обруч . . . 46

6 Лекция 6. Реактивное движение 48

6.1 Задача. Натяжение нити в системе двух тел . . . 48
6.2 Задача. Натяжение нитей в системе трех тел . . . 48
6.3 Реактивное движение . . . 49
6.4 Задача. Падение цепочки . . . 50
6.5 Задача. Максимальный импульс ракеты . . . 51
6.6 Задача. Ракета в поле силы тяжести . . . 52
6.7 Задача. Равноускоренная ракета . . . 53
6.8 Задача. Неподвижная ракета . . . 53
6.9 Задача. Разворот ракеты . . . 54
6.10 Задача. Корабль на водометном двигателе . . . 55
6.11 Кембриджская задача . . . 56

7 Лекция 7. Закон сохранения энергии 57

7.1 Кембриджская задача . . . 57
7.2 Задача. Максимальная длина пружины . . . 59
7.3 Задача. Смещение соединенных пружиной грузов . . . 60
7.4 Задача. Система грузов . . . 61
7.5 Задача. Пролет через статическое равновесие . . . 63

8 Лекция 8. Столкновения 65

8.1 Задача. Энергия при переходе в другую систему отсчета . . . 65
8.2 Столкновения, классификация столкновений . . . 65
8.3 Задача. Лобовое упругое соударение . . . 66
8.4 Задача. Последовательность соударений . . . 66
8.5 Задача. Скользящая горка . . . 67
8.6 Задача. Нелобовое столкновение . . . 68
8.7 Задача. Угол рассеяния . . . 69
8.8 Задача. Отскок от наклонной поверхности . . . 70

9 Лекция 9. Силы инерции 72

9.1 Задача. Маятник в лифте . . . 72
9.2 Задача. Грузы и тележка . . . 72
9.3 Задача. Шайба на полу цилиндре . . . 73
9.4 Задача. Маятник на катящейся вниз тележке . . . 75

9.5 Задача. Эффективное ускорение свободного падения 75
9.6 Задача. Несферичность Земли 77
9.7 Задача. Движение Солнца по небу 78
9.8 Задача. Течение реки по поверхности Земли 78

10 Лекция 10. Сила Кориолиса 80
10.1 Задача. Шайба на вращающемся диске 80
10.2 Задача. Отклонение при падении 81

11 Лекция 11. Кинематика твердого тела 85
11.1 Кинематика твердого тела 85
11.2 Задача. Вращение колеса 85
11.3 Задача. Цилиндр между плоскостями 87
11.4 Задача: Качение катушки 88
11.5 Задача: Катушка и нить под углом к горизонту 89
11.6 Задача: Вращение стерженя 89
11.7 Задача: Скольжение пластинки 90
11.8 Задача: Кривошипный механизм 91
11.9 Задача: Мгновенная ось вращения диска 92

12 Лекция 12. Момент инерции 94
12.1 Задача: Мгновенная ось вращения диска 94
12.2 Задача: Качение конуса 95
12.3 Осевой момент инерции 96
12.4 Задача. Момент инерции однородного стержня 98
12.5 Задача. Момент инерции однородного диска 98
12.6 Задача. Момент инерции квадрата 99
12.7 Задача. Момент инерции стержня 100

13 Лекция 13. Динамика твердого тела 102
13.1 Задача. Вектор момента импульса 102
13.2 Задача. Машина Атвуда с тяжелым блоком 104
13.3 Задача. Вращающаяся монета 106
13.4 Задача. Цилиндр на наклонной плоскости 107

14 Лекция 14. Динамика твердого тела 110

14.1 Задача. Проскальзывание однородного цилиндра . . . 110
14.2 Задача. Скорость цилиндра . . . 111
14.3 Задача. Ускорение центра обруча . . . 114
14.4 Задача. Скорость оси цилиндра . . . 115

15 Лекция 15. Закон сохранения момента импульса 118
15.1 Динамика твердого тела.Теорема Кёнига . . . 118
15.2 Закон сохранения момента импульса . . . 119
15.3 Задача. Однородный диск и человек . . . 120
15.4 Задача. Человек в центре однородного диска . . . 122
15.5 Задача. Однородный диск и монета . . . 124

16 Лекция 16. Закон сохранения момента инерции 125
16.1 Задача. Вращение дисков . . . 125
16.2 Задача. Соприкосновение двух дисков . . . 126
16.3 Задача. Соударение твердого тела и пули . . . 128
16.4 Задача. Соударение доски и пули . . . 129
16.5 Задача. Соударение стержня и шарика . . . 130
16.6 Задача. Соударение шайбы и палки . . . 132

17 Лекция 17. Колебания 134
17.1 Гармонические колебания . . . 134
17.2 Задача. Пружинный маятник . . . 135
17.3 Задача. Математический маятник . . . 136
17.4 Малые колебания . . . 137
17.5 Задача. U - образный манометр . . . 140
17.6 Задача. Астатический маятник . . . 141
17.7 Блок с грузом и с пружиной . . . 142

18 Лекция 18. Колебания 144
18.1 Задача. Не растяжимая нить и бусинка . . . 144
18.2 Задача. Перекинутая нить с грузом через отверстие . . . 145
18.3 Задача. Шахтер в центре Земли . . . 147
18.4 Задача. Взаимодействие мяча со стеной . . . 148
18.5 Задача. Труба и веревка . . . 149

18.6 Гармонические колебания . . . 150

19 Лекция 19. Затухающие и вынужденные колебания 152

19.1 Затухающие колебания . . . 152
19.2 Задача. Амплитуда колебательного маятника . . . 153
19.3 Задача. Добротность колебательного маятника . . . 154
19.4 Задача. Груз на пружине . . . 154
19.5 Задача. Средняя мощность . . . 155
19.6 Вынужденные колебания . . . 156
19.7 Задача. Маятник с вынужденными колебаниями . . . 159

20 Лекция 20. Волны 160

20.1 Задача. Вынужденные колебания . . . 160
20.2 Волны . . . 161
20.3 Задача. Бегущие волны . . . 163
20.4 Задача. Отношение амплитуды колебаний скорости частиц к скорости волны . . . 164
20.5 Задача. Две плоские бегущие волны . . . 164

21 Лекция 21. Волны 167

21.1 Задача. Энергия волны . . . 167
21.2 Задача. Изотопный источник энергии в центре цилиндра . . . 169
21.3 Эффект Доплера . . . 170
21.4 Задача. Источник звука, приемник и неподвижная стена . . . 170
21.5 Вывод биения . . . 172
21.6 Задача. Неподвижный источник . . . 173

22 Лекция 22. Стоячие волны 175

22.1 Стоячие волны . . . 175
22.2 Задача. Длина струны . . . 178
22.3 Задача. Сила натяжения струны . . . 179
22.4 Задача. Способ измерения звука . . . 180
22.5 Задача. Полный запас энергии . . . 180
22.6 Задача. Нормальные частоты системы . . . 182

23 Лекция 23. Поведение волны при падении на границу раздела двух сред 184

23.1 Задача. Поведение волны при падении на границу раздела двух сред . 184
23.2 Основы теории упругости 188
23.3 Задача. Растяжение стержня 189
23.4 Задача. Растяжение стержня под действием собственного веса 191

24 Лекция 24. Деформации тел 192

24.1 Задача. Упругая деформация бруска 192
24.2 Изгибная деформация балок 193
24.3 Задача. Деформация балки 195
24.4 Задача. Деформация балки со свободными концами 197

Лекция 1. Введение в кинематику

Кинематика

Кинематика занимается изучением механического движения, но не интересуется вопросом о причинах возникновения этого движения. Чтобы решать кинематические задачи, необходимо обзавестись системой отсчета. В систему отсчета входят система координат, тело отсчета и часы. С точки зрения кинематики все системы отсчета равноправны. Необходимо выбирать такую систему отсчета, чтобы решать задачу было проще всего. Система отсчета часто выбирается естественным образом: земная или лабораторная система отсчета. Чтобы решить кинематическую задачу, используется координатный метод описания движения. При этом методе выбирается какая-то система координат, если известна зависимость этих координат от времени, то задача кинематики полностью решена.

В кинематике можно выделить 2 разных типа задач: прямая и обратная. При прямой задаче по известной зависимости координат от времени необходимо найти остальные координаты. При обратной задаче необходимо найти зависимости координат от времени.

Пусть есть материальная точка и заданы зависимости декартовых координат от времени:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Материальная точка движется относительно прямоугольной декартовой системы координат. Необходимо найти уравнение траектории, зависимость скорости от времени и ускорение от времени.

Уравнение траектории задано в параметрическом виде. В качестве параметра выступает время. Скорость — это производная. Если положение точки задано в векторном виде, то есть задан радиус вектор $\vec{r}(t)$, то по определению средняя скорость записывается следующим образом:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

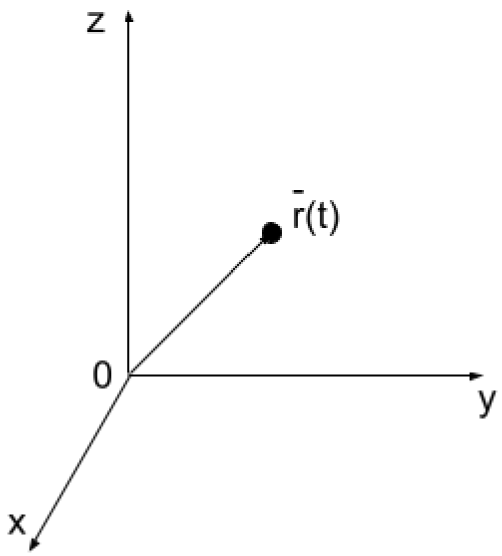

Рис. 1.1. Система в декартовых координатах

Скорость, определенная этим способом, зависит от выбора промежутка времени Δt.

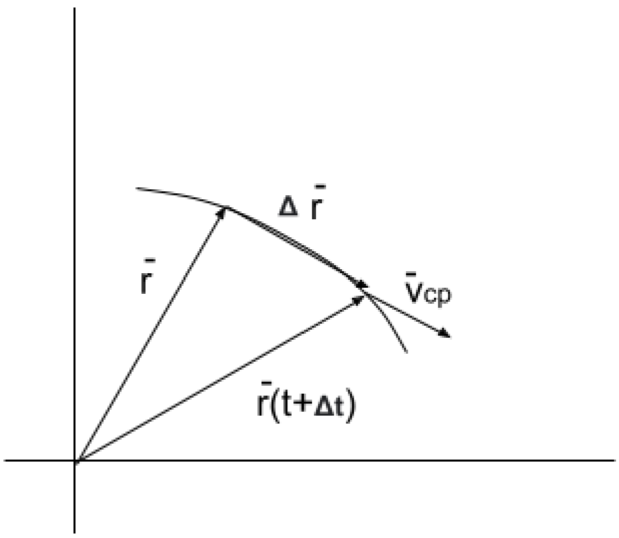

Рис. 1.2. Определение средней скорости

Предельное отношение называют мгновенной скоростью. С точки зрения математики поиск мгновенной скорости сводится к процедуре дифференцирования.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

$d\vec{r}$ — бесконечно малое изменение радиус вектора. dt — бесконечно малый промежуток времени. Радиус вектор можно записать через координаты:

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\cdot\vec{i} + \dot{y}(t)\cdot\vec{j} + \dot{z}(t)\cdot\vec{k}$$

Продифференцировав каждую из этих зависимостей, можно получить проекции скорости материальной точки на координатные оси:

$$v_x = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

Таким образом, можно найти модуль скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Аналогичным способом можно найти ускорение по отношению к скорости. Вводится мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Таким образом, можно найти вектор ускорения на координатные оси и модуль ускорения:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории. Вектор ускорения всегда направлен в сторону центра кривизны траектории. Это связано с тем, что вектор ускорения имеет две составляющие:

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}$$

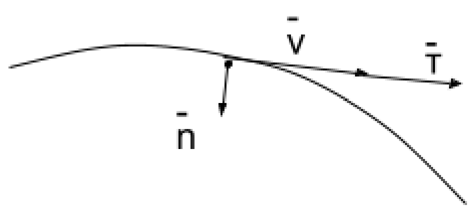

Рис. 1.3. Направление скорости и ускорения

$\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной. $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали. $\boldsymbol{R}$ — радиус кривизны.

Полное ускорение можно записать следующим образом:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{v^2}{R}$$

Таким образом, если задана зависимость координат от времени, то можно найти все, включая радиус кривизны траектории. Задача имеет однозначное решение.

Задача. Траектория движения точки

Пусть на плоскости есть прямоугольная декартова система координат. В этой системе координат есть прямая (OA), которая в начальный момент времени совпадает с осью y. Пусть есть точка M с координатами (x_0, y_0). В некоторый начальный момент времени прямая OA начинает равномерно вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а точка M начинает двигается со скоростью v.

$$v = const$$

$$\vec{v} \perp OA$$

Требуется найти уравнение траектории, по которой будет двигаться точка.

Необходимо найти координаты точки в произвольный момент времени t. Рассматривается положение точки в произвольный момент времени и к этому произвольному моменту времени применять заданное условие.

Известно, что за время t прямая повернулась на угол ωt. Скорость делится на 2 проекции: v_x и v_y.

$$v_x = v\cos\omega t = \frac{dx}{dt}$$

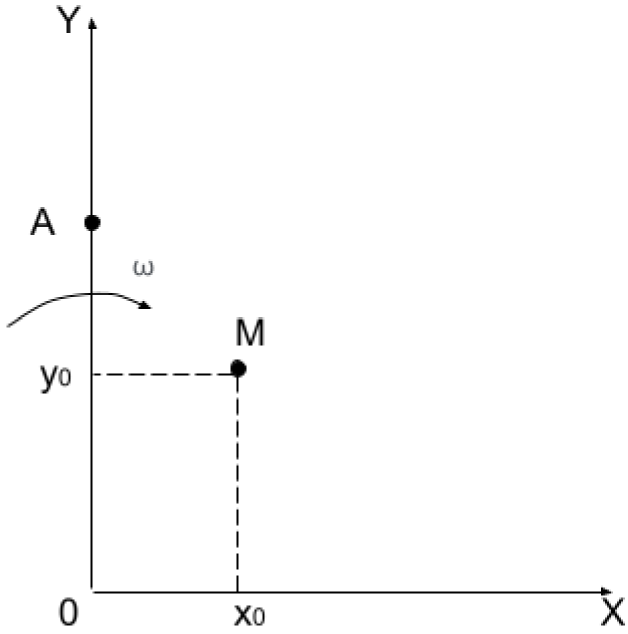

Рис. 1.4. Траектория движения точки

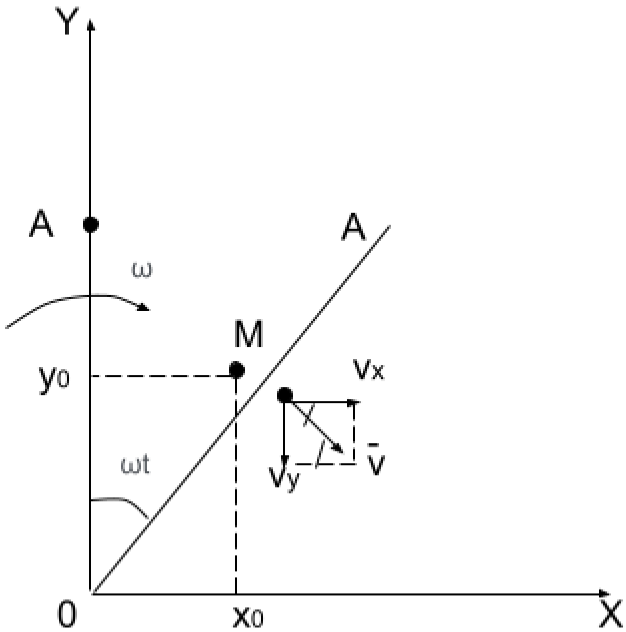

Рис. 1.5. Точка в произвольный момент времени

$$v_y = -v \sin \omega t = \frac{dy}{dt}$$

Происходит интегрирование:

$$x(t) = \frac{v}{\omega} \in \omega t + C_1$$

$$y(t) = \frac{v}{\omega} \cos \omega t + C_2$$

$$x_0 = C_1 \quad t = 0$$

$$y_0 = \frac{v}{\omega} + C_2 \quad t = 0$$

$$x - x_0 = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$$

$$y - (y_0 - \frac{v}{\omega}) = \frac{v}{\omega} \cos \omega t$$

$$(x - x_0)^2 + \left(y - \left(y_0 - \frac{v}{\omega}\right)\right)^2 = \frac{v^2}{\omega^2}$$

Задача. Радиус кривизны параболы

Пусть камень бросили горизонтально с высокой башни с начальной скоростью v_0 в однородном поле силы тяжести. Камень будет падать по параболе. Необходимо найти радиус кривизны этой параболы в произвольной точке. Необходимо ввести систему координат.

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}$$

$$\dot{x} = v_0$$

$$\dot{y} = gt$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$a = g$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{v^2}{R}$$

Таким образом, радиус кривизны записывается следующим образом:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g}$$

$$R(t=0)=\frac{v_0^2}{R}$$

$$\frac{mv_0^2}{R}=mg$$

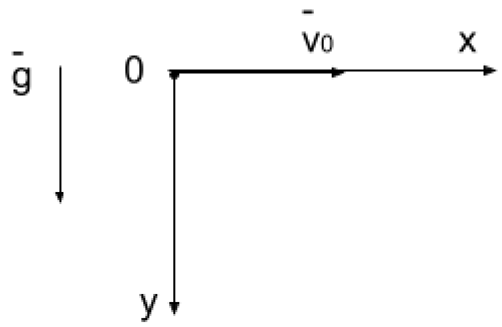

Рис. 1.6. Радиус кривизны параболы

Задача. Качение без проскальзывания

Пусть по горизонтальной поверхности катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 колесо с радиусом R. Требуется ответить на следующие вопросы:

- Найти в произвольный момент времени модуль скорости точки на ободе колеса.
- Найти в произвольный момент времени модуль ускорения.
- Найти радиус кривизны траектории точки на ободе колеса в наивысшем положении.
- Найти путь, который проходит точка на ободе колеса за время между двумя последовательными касаниями поверхности.

Рассматривается точка на ободе колеса. Во всех инерциальных системах отсчета ускорение должно быть одинаковое. Относительно системы отсчета центр колеса покоится, а поверхность движется в обратную сторону со скоростью v_0. В этой системе отсчета движение колеса представляет собой чисто вращение. Ускорение направлено к центру колеса и записывается следующим образом:

$$a=\frac{v_0^2}{R}$$

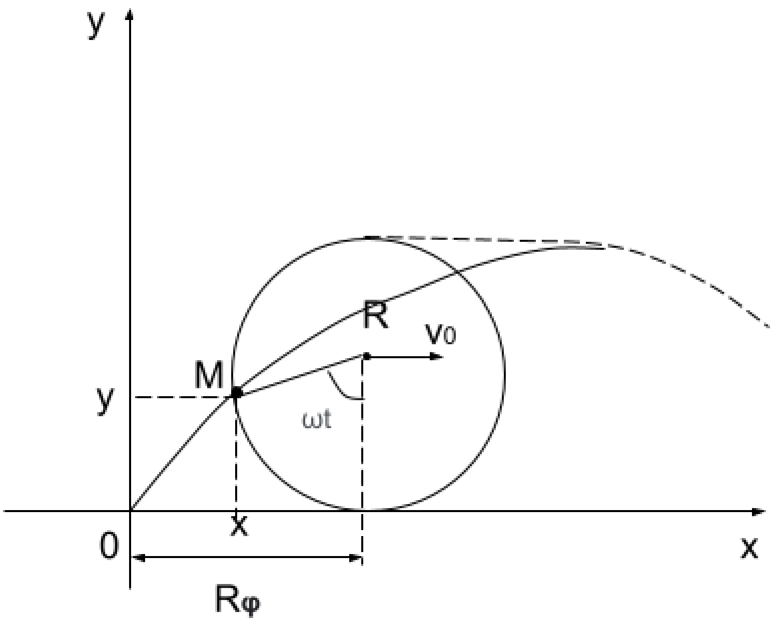

Рис. 1.7. Качение без проскальзывания

Чтобы найти радиус кривизны, необходимо получить зависимости координат от времени. Вводится система координат с траекторией циклоида. Рассматривается точка M на ободе колеса. Необходимо найти координаты точки $M(x,y)$. Угловая скорость выражается следующим образом:

$$v_0 = \omega R$$

$$\varphi = \omega t$$

$$x = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = R(1-\cos\varphi) = R(1-\cos\omega t)$$

$$\dot{x} = \omega R\,(1-\cos\omega t)$$

$$\dot{y} = \omega R\sin\omega t$$

$$v = \sqrt{(\omega R)^2(1-\cos\omega t)^2 + (\omega R^2)\sin^2\omega t} = \omega R\sqrt{1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t} =$$

$$= \omega R\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = \omega R\sqrt{4\sin^2\frac{\omega t}{2}} = 2\omega R\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| = 2\omega R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

$$\ddot{x} = \omega^2 R\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = \omega^2 R \cos \omega t$$

$$a = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}$$

Дальше необходимо определить радиус кривизны в наивысшей точке траектории. В верхней точке траектории полное ускорение совпадает с нормальным ускорением:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2\omega R \cdot \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega t}{2} = \omega^2 R \cos \frac{\varphi}{2} \quad \varphi = \pi$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R_{\text{кр}}} = \frac{v_0^2}{R}$$

$$R_{\text{кр}} = 4R$$

Необходимо найти путь, который проходит произвольная точка на ободе колеса между двумя последовательными касаниями поверхности. Скорость интегрируется:

$$dS = vdt = 2\omega R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| dt = 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi$$

$$\omega dt = d\varphi$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} 2R \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2R \cdot 2 \left(-\cos \frac{\varphi}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 8R$$

Таким образом, точка, которая находится на ободе колеса, пройдет расстояние $8R$ вдоль своей траектории. Качение колеса модно рассматривать как сумму поступательного движения с постоянной скоростью v_0 и вращательного движения вокруг оси. Если рассматривать тело, как вращающееся вокруг мгновенной оси, то тогда скорость в произвольной точке определяется следующим образом:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\int \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \int 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения.

Лекция 3. Выбор системы отсчета. Кинематические связи

Задача. Поворот космического корабля

Пусть в глубинах космоса летит космический корабль с постоянной скоростью v. Командир космического корабля задумал повернуть на 90°. Корабль полетел с такой же по модулю скоростью, но направленной под углом 90° к исходному направлению. Корабль с помощью своих двигателей может развивать ускорение, не превышающее a. Необходимо найти минимальное время, за которое корабль может совершить такой маневр.

Необходимо задать систему отсчета, которая движется со скоростью v. К скорости корабля в конечный момент необходимо прибавить $-\vec{v}$. Таким образом получается относительная скорость $v_{\text{отн}}$. В начальный момент времени корабль покоится, а в конечный момент времени корабль движется со скоростью $v\sqrt{2}$. Если корабль в новой системе отсчета приобретет скорость $v\sqrt{2}$ оптимальным образом, то это будет решением задачи. Корабль должен лететь по прямой с ускорением a. Тогда время маневра записывается следующим образом:

$$t = \frac{v\sqrt{2}}{a}$$

Корабль будет двигаться по траектории параболы. Ускорение будет направлено под углом 45°, но назад. У вектора ускорения есть 2 составляющие: одна составляющая должна тормозить корабль в исходном направлении, а вторая должна разгонять корабль вправо.

Задача. Встреча колонны спортсменов и тренера

Пусть есть колонна спортсменов длиной L со скоростью v. На встречу колонне со скоростью u бежит тренер. Каждый спортсмен, добежав до тренера, разворачивается и бежит в противоположном направлении с прежней скоростью. Необходимо найти длину колонны после того, как все спортсмены развернутся. Система отсчета связана с тренером. Спортсмены, которые бегут навстречу, будут бежать со скоростью $v + u$, а спортсмены, которые бегут в противоположном направлении, будут бежать со

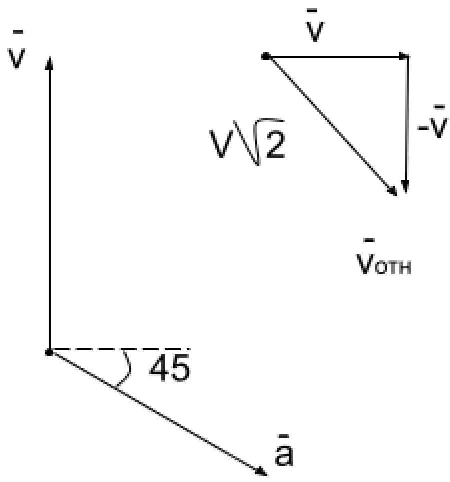

Рис. 3.1. Поворот космического корабля

скоростью $u-v$. Соответствующее время, когда последний спортсмен встретится с тренером, записывается следующим образом:

$$t = \frac{L}{u+v}$$

Таким образом, длина колонны равна:

$$L' = \frac{u-v}{u+v}L$$

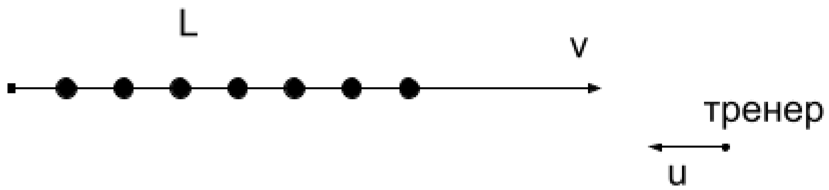

Рис. 3.2. Встреча колонны спортсменов и тренера

Задача. Минимальная скорость броска камня

Пусть на земле стоит столб высотой H и на расстоянии L от основания этого столба стоит школьник. Школьник взял камень и хочет бросить его так, чтобы камень попал в верхушку столба. Необходимо найти минимальную скорость, с которой нужно бросить камень, чтобы попасть в верхушку столба. Школьник бросает камень с уровня земли. Если школьник располагает неограниченными возможностями, то способов попасть в верхушку столба бесконечно много.

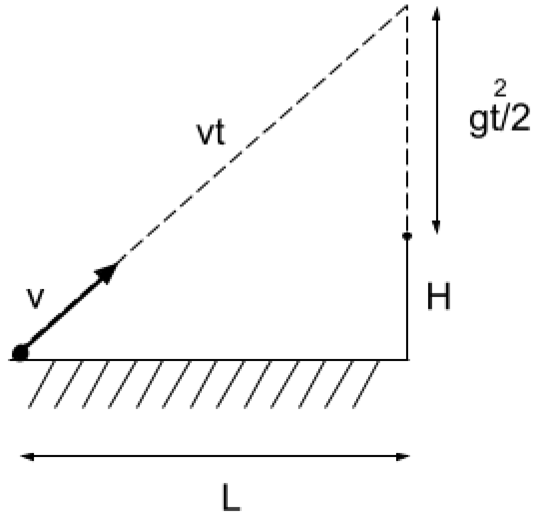

Рис. 3.3. Минимальная скорость броска камня

Необходимо перейти в систему отсчета, которая свободно падает с ускорением g. В этой системе отсчета тело, брошенное под углом горизонту, движется равномерно и прямолинейно со своей начальной скоростью. Верхушка столба движется вверх с постоянным ускорением g. За время t верхушка столба упадет вверх на расстояние $\frac{gt^2}{2}$.

$$(vt)^2 = L^2 + \left(H + \frac{gt^2}{2}\right)^2$$

$$v_{min} = \sqrt{g + (H + \sqrt{L^2 + H^2})}$$

Задача. Волк преследует зайца

Пусть есть дорога. По этой дороже бежит заяц с постоянной скоростью u, а перпендикулярно дороге сидит волк. В тот момент, когда линия заяц-волк оказался перпендикулярной дороге, волк начинает бежать со скоростью v и начинает догонять зайца. При этом известно, что $v = const$ и скорость волка направлена строго на зайца. Необходимо найти траекторию, по которой движется волк (найти уравнение траектории).

Необходимо ввести систему координат. Используется прямоугольная декартова система. Рассматривается произвольное положение зайца.

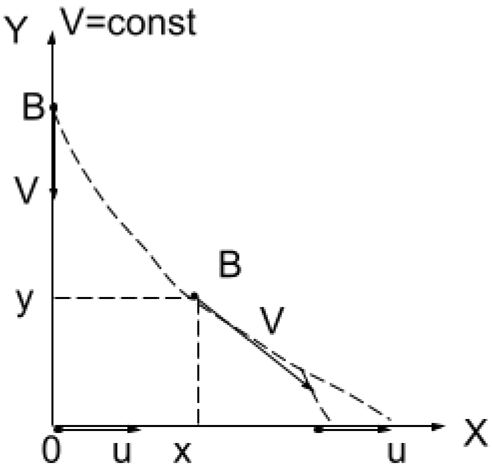

Рис. 3.4. Волк преследует зайца

Первое условие: скорость по отношению к траектории направлена по касательной. Угол наклона касательной равен:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{ut-x}$$

Второе условие:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = v$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{ut-x} \rightarrow ut - x = -y\frac{dx}{dy}$$

$$udt - dx = -dy \cdot \frac{dx}{dy} - yd\left(\frac{dx}{dy}\right) = -yd\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

Происходит замена переменных:

$$z = \frac{dx}{dy}$$

$$\sqrt{(dy)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = vdt$$

$$-dy\sqrt{1+z^2} = vdt$$

Таким образом, получается следующее уравнение:

$$udt = -ydz$$

$$dt = -\frac{\sqrt{1+z^2}}{v}dy$$

$$-\frac{u}{v}\sqrt{1+z^2}dy = -ydz$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{v}{u}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

Если это уравнение проинтегрировать, то получится уравнение траектории.

$$\ln y = \frac{v}{u}\ln(z+\sqrt{1+z^2}) + C$$

Начальное условие записывается следующим образом:

$$z = \frac{dx}{dy} = 0 \quad y = h \to C = \ln h$$

$$\ln\frac{y}{h} = \frac{v}{u}\ln(z+\sqrt{1+z^2})$$

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{u}{v}} = z+\sqrt{1+z^2} = k$$

$$\sqrt{1+z^2} = k - z$$

$$1 + z^2 = k^2 - 2kz + z^2$$

$$z = \frac{k^2-1}{2k} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^{-\frac{u}{v}} = \frac{dx}{dy}$$

Это дифференциальное уравнение можно интегрировать во второй раз. Таким образом получится уравнение траектории.

$$x = \frac{1}{2}\frac{h}{1+\frac{u}{v}}\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{u}{v}+1} - \frac{1}{2}\frac{h}{1-\frac{u}{v}}\left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{u}{v}} + C_1 \quad u \neq v$$

$$x = 0 \quad y = h$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{h}{1-\frac{u}{v}} - \frac{1}{2}\frac{h}{1+\frac{u}{v}}$$

Все константы интегрирования всегда получаются из начальных условий. При равных скоростях уравнение траектории принципиально имеет другой вид со степенными функциями. Волк догонит зайца, когда $y = 0$. В этот момент координата x даст точку, в которой завершится погоня, волк и заяц встретятся.

$$x_0 = u\tau = C_1$$

$$u\tau = \frac{h}{2}\frac{1+\frac{u}{v}-1+\frac{u}{v}}{1-\frac{u^2}{v^2}} = \frac{2uv}{v^2-u^2}\frac{h}{2}$$

$$\tau = \frac{hv}{v^2-u^2}$$

Уравнения кинематической связи

Уравнением кинематической связи называется любое соотношение, которые связывает друг с другом кинематические характеристики тел системы. Кинематическими характеристиками являются координаты, скорости, ускорения. Уравнения кинематической связи носят чисто геометрический характер. Их называют уравнениями связи, потому что связи возникают, когда есть какие-то реальные физические связи, которые присутствуют в системе и ограничивают возможные движения тел. Если 2 точки соединить стержнем, то эти точки не смогут двигаться независимо друг от друга. Точки могут двигаться по поверхностям.

Задача. Движение стержня

Пусть есть угол комнаты, в которой стоит стержень, которая соединяет точки A и B. Известно, что стержень жесткий и точка B может двигаться вдоль пола с постоянной скоростью v. Необходимо найти скорость v_A точки A в тот момент, когда угол равен α. Необходимо найти проекции двух векторов на направление стержня. Утверждается, что проекции равны. Это связано с тем, что стержень является нерастяжимым. Предполагается, что какая-нибудь из скоростей больше. Тогда за бесконечное малое время dt точка B пройдет в направлении вдоль стержня расстояние больше, чем точка A. Тогда стержень должен растянуться, но стержень является нерастяжимым.

$$v_A \cdot \sin\alpha = v\cos\alpha$$

$$v_A = v \operatorname{ctg}\alpha$$

Вводятся оси X и Y и записывается теорема Пифагора:

$$X_B^2 + Y_A^2 = l^2$$

$$2X_B \cdot \dot{X}_B + 2Y_A \cdot \dot{Y}_A = 0$$

$$v_A = -v \cdot \frac{X_B}{Y_A} = -v \operatorname{ctg}\alpha$$

Сначала стержень находился вертикально.

$$X_B = vt$$

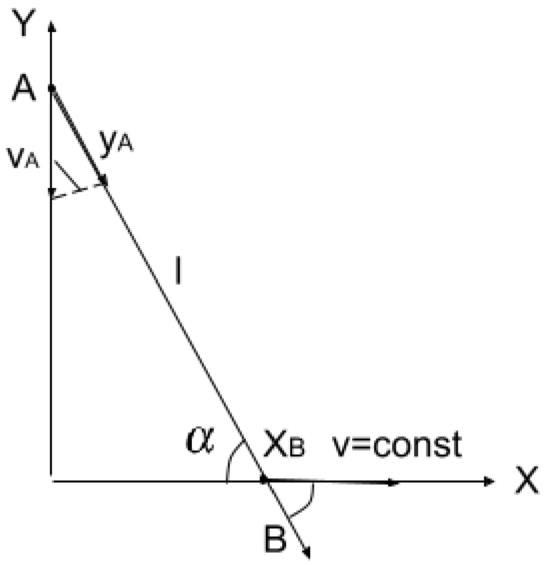

Рис. 3.5. Движение стержня

$$Y_A = \sqrt{l^2 - v^2t^2}$$
$$v_A = -\frac{v^2t}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}}$$

Необходимо найти ускорение точки A.

$$a_A = \dot{v}_A = -v^2 \left(\frac{\sqrt{l^2 - v^2t^2} - t\frac{v^2}{\sqrt{l^2-v^2t^2}}}{l^2 - v^2t^2} \right) = -v^2 \frac{l^2 - v^2t^2 + v^2t^2}{(l^2 - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{v^2l^2}{(l^2 - v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$t = \frac{l}{v} \quad a \to \infty$$

Должно соблюдаться уравнение кинематической связи. Дальнейшее движение без отрыва обеих точек от стены будет невозможным.

Задача. Лодка и веревка

Пусть на поверхности озера плавает лодка. У озера обрывистый берег, через клочок перекинута веревка и эта веревка привязана к лодке. Высота берега h. Веревку начинают тянуть с постоянной скоростью v. Требуется найти скорость лодки в тот момент, когда веревка составляет с поверхности воды известный угол α. Точка, где привязана веревка к лодке, движется вдоль веревки со скоростью v. Скорость лодки u. Проекция скорости точки веревки должна быть равна v.

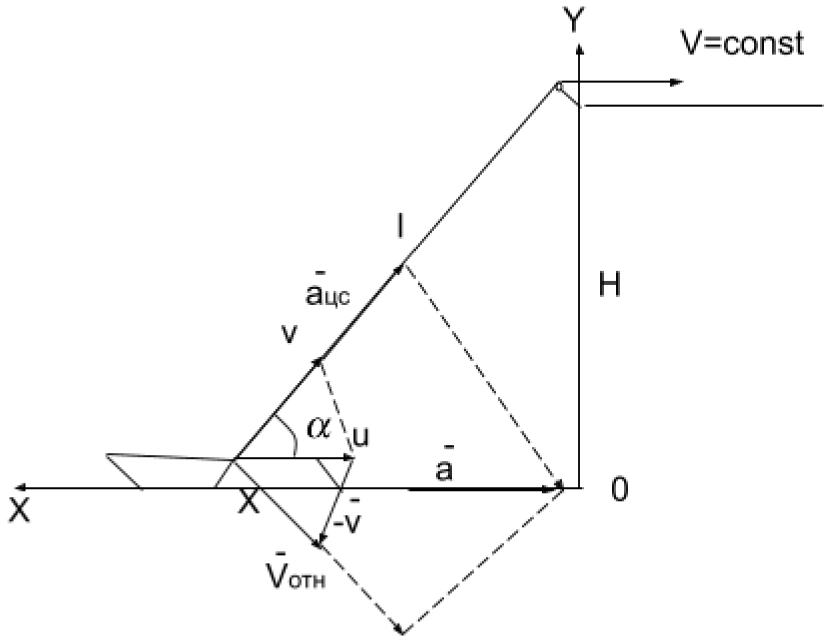

Рис. 3.6. Лодка и веревка

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}$$

Ускорение лодки в данный момент времени находится следующим образом. Вводится координатные оси X и Y, и записывается теорема Пифагора.

$$H^2 + X^2 = (l_0 - vt)^2$$

l_0 — начальная длина веревки. Необходимо перейти в систему отсчета, в которой в данный момент времени наклонный участок веревки покоится. Относительно этой системы отсчета скорость ложки будет равна $-\vec{v}_{\text{отн}}$. Необходимо найти направление этой скорости по отношению к веревке. Таким образом, этот вектор скорости перпендикулярен веревке. В данной системе отсчета лодка движется по окружности, что означает у лодки есть центростремительное ускорение:

$$v_{\text{отн}} = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$a_{\text{ц.с}} = \frac{v_{\text{отн}}^2}{l} = \frac{v^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \sin\alpha}{H}$$

$$H = l\sin\alpha$$

Ускорение лодки направлено вдоль оси X. Это ускорение можно разложить на две составляющие. Полное ускорение записывается следующим образом:

$$a = \frac{a_{\text{ц.с}}}{\cos\alpha} = \frac{v^2}{H}\operatorname{tg}^3\alpha$$

Рассматривается малое смещение лодки. скорость лодки была равна u.

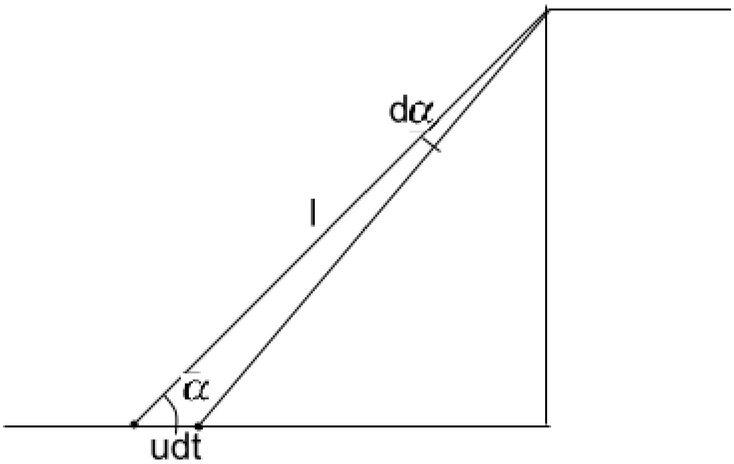

Рис. 3.7. Малое смещение лодки

$$udt\sin\alpha = ld\alpha$$

$$u = \frac{v}{\cos\alpha} \to u\cos\alpha = v = const$$
$$du\cos\alpha - u\sin\alpha d\alpha = 0$$
$$du\cos\alpha = u\sin\alpha\cdot\frac{udt}{l}$$

Таким образом, ускорение записывается следующим образом:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}$$

Лекция 4. Кинематические связи в системах блоков

Задача. Ящик и веревки

Пусть на горизонтальной поверхности лежит ящик. Было решено стронуть ящик с места волоком. К нему привязаны 2 веревки. Веревки намотаны на лебедке. В некоторый момент времени оказалось, что обе веревки натянуты и первая веревка движется вдоль самой себя со скоростью v, а вторая со скоростью u, а угол между веревками α. Необходимо найти скорость ящика в данный момент времени.

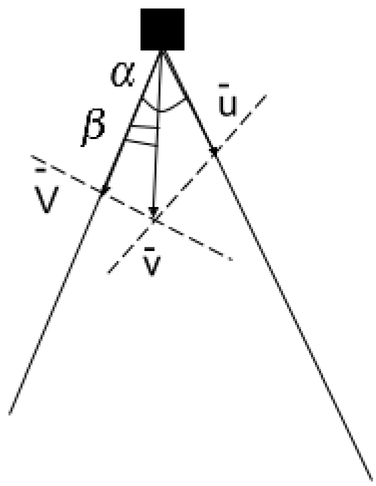

Рис. 4.1. Ящик и веревки

Пусть ящик имеет некоторую скорость, тогда проекция этой неизвестной скорости ящика на левую веревку должна быть равна V, а проекция этой неизвестной скорости на правую веревку должна быть равна u. Таким образом, заданы проекции, по которым можно восстановить вектор. К каждому из этих векторов надо восстановить перпендикуляр. Скорость v ящика направлена в точку пересечения этих ящиков.

$$V = v\cos\beta$$

$$u = v\cos(\alpha - \beta)$$

$$v = \frac{\sqrt{u^2 + V^2 - 2uV\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

Кинематические связи в системах блоков

Пример 4.1. *Задача. Машина Атвуда.*

Пусть есть неподвижный блок, через которого перекинута нитка и на концах нитки висят грузы. Пусть масса левого груза — m_1*, а правого —* m_2*. Изображения модели следующие:*

1) *нить невесома*
2) *нить не растяжима*
3) *блок невесом*
4) *трения в оси блока нет*
5) *сопротивления воздуха нет*

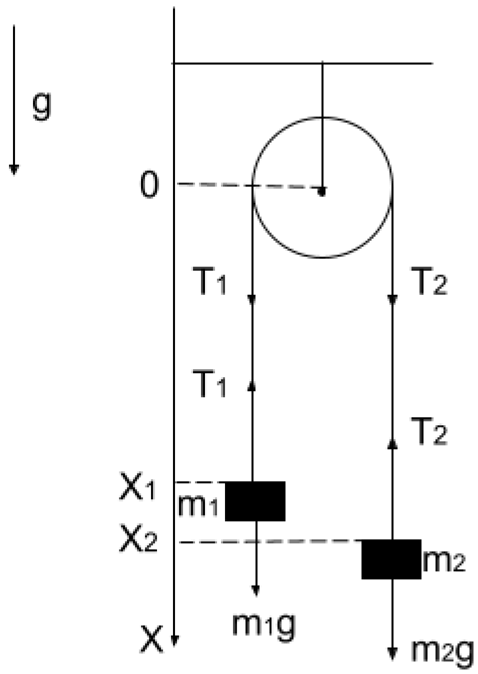

Рис. 4.2. Машина Атвуда

Необходимо выбрать подходящую систему координат. Дальше необходимо расставить силы. Записывается второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2a_2 - m_2g - T_2$$

$$T_1 = T_2$$

Записывается уравнение кинематической связи:

$$a_1 + a_2 = 0$$

Для записи первого и второго уравнения был использован пункт 5 из изображения модели. Чтобы доказать третье уравнение, были использованы пункты 1,3,4,5 из изображения модели. Доказательство проводится в два этапа.

Доказательство.

Рассматривается малый элемент нити массой Δm.

$$\Delta m \cdot a = \Delta m g + T' - T'' \pm F_{сопр}$$

$$T' = T''$$

Было доказано, что вдоль всего свободного вертикального участка нити сила натяжения постоянна. Необходимо записать уравнение вращательного движения блока:

$$J\varepsilon = T_1R - T_2R \pm M_{тр}$$

$$T_1 = T_2$$

■

Уравнение кинематической связи получается с введением координат тел и ниток (пункт 2).

$$x_1 + \pi R + x_2 = L = const$$

$$v_1 + v_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 0$$

R — радиус блока. С помощью метода виртуальных перемещений можно получить уравнения кинематической связи. Пусть первое тело сместилось на расстояние Δx_1 в положительном направлении оси x, тогда второе тело сместилось на расстояние Δx_2 против оси x.

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2$$

$$v_1 = -v_2$$

$$a_1 = -a_2 = a$$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ -m_2 a = m_2 g - T \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \to a = a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Пример 4.2. *Задача. Система трех блоков.*

Пусть есть система трех блоков с телами m_1, m_2 и m_3. Необходимо написать уравнение, которое описывает движение системы. Вводится ось x. Сила вдоль одной и той же нитки должна быть постоянной.

$$m_1 a_1 = m_1 g - T$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - 2T$$

$$m_3 a_3 = m_3 g - T$$

Записывается уравнение кинематической связи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_Б + x_3 = L_1 \\ x_2 - x_Б = L_2 \end{cases}$$

$$a_1 + 2a_Б + a_3 = 0$$

$$a_2 - a_Б = 0$$

Таким образом, уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

Пример 4.3. *Задача. Ступенчатый блок.*

Пусть есть система, которая состоит из двух блоков, один из них подвижный, а второй неподвижный, но ступенчатый. Необходимо записать уравнение кинематической связи с использованием метода виртуальных смещений. Вводится ось x. пусть первое тело сместилось на расстояние Δx_1. Тогда блок повернется на угол

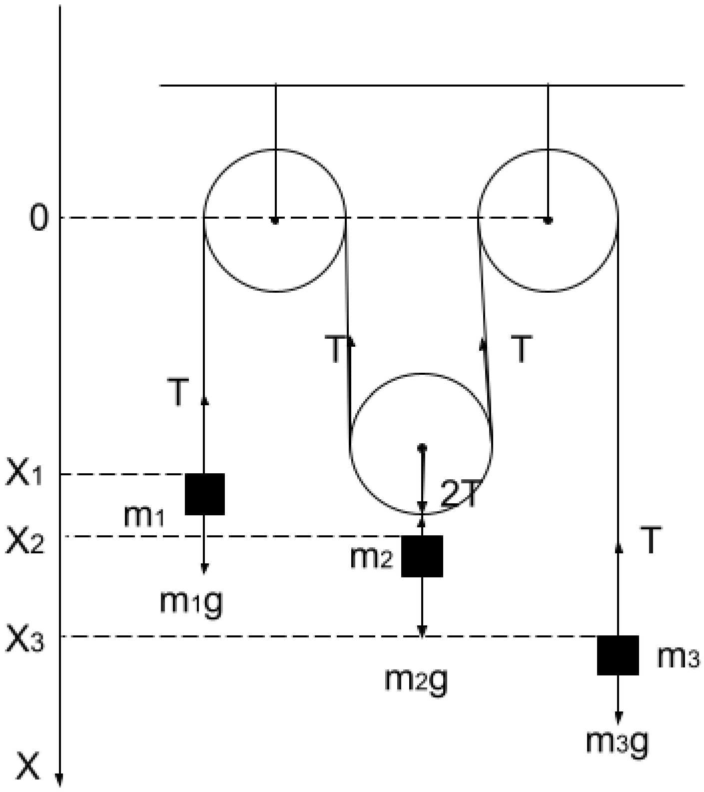

Рис. 4.3. Система трех блоков

$\Delta\varphi$. Длина нитки укоротится на величину Δl. Необходимо найти величину и сторону, на которую сместится второй груз.

$$\Delta x_1 > 0$$

$$\Delta x_1 = e \cdot \Delta\varphi$$

$$\Delta l = R \cdot \Delta\varphi$$

$$\Delta x_2 = -\frac{\Delta l}{2} = -\frac{R\Delta\varphi}{2} = -\frac{R}{2r}\Delta x_1$$

Таким образом, уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$a_2 = \frac{-R}{2r}a_1$$

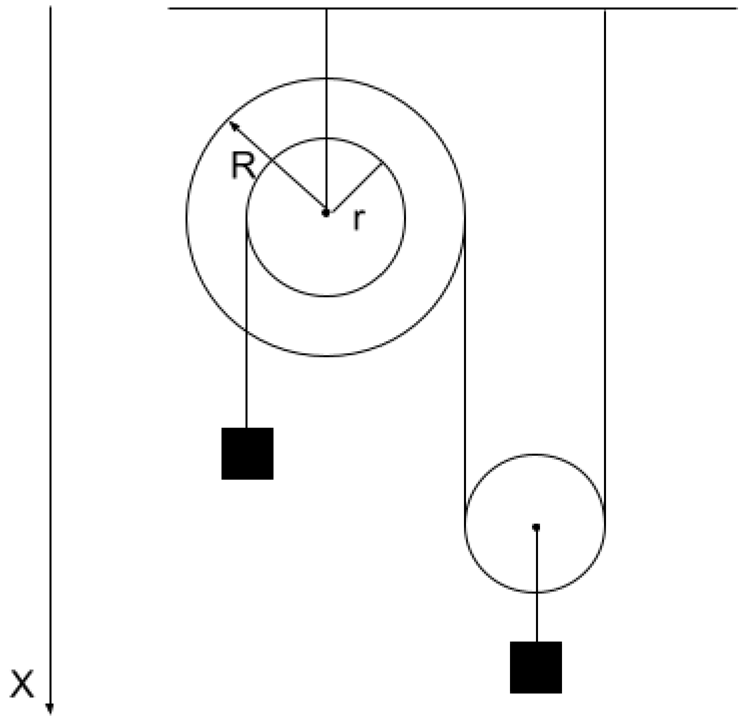

Рис. 4.4. Ступенчатый блок

Обобщение "золотого правила"механики

Пример 4.4. *Пусть есть система с большим количеством блоков и ниток. Записывается второй закон Ньютона:*

$$m_i\frac{dv_i}{dt} = T_i - m_i g$$

$$m_i v_i dv_i = T_i v_i dt - m_i g v_i dt$$

$$v_i dt = dX_i$$

$$m_i v_i dv_i = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)$$

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = T_i dX_i - m_i g dX_i$$

$$d\left(\frac{m_i v_i^2}{2} + m_i g X_i\right) = T_i dX_i$$

Такое уравнение можно записать для любого тела этой системы.

$$d\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i v_i^2}{2} + m_i g X_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} T_i dX_i = 0$$

Таким образом, получается полная механическая энергия системы (сумма кинетических и потенциальных энергий всех тел системы). Суммарная работа всех сил натяжения действующих в системе есть 0.

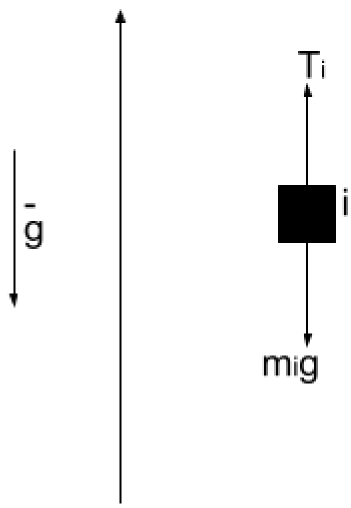

Рис. 4.5. Система с большим количеством блоков

$$\sum_{i=1}^{n} T_i v_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i a_i = 0$$

Предполагается, что система устроена так, что все силы натяжения всех ниток однозначно выражаются друг через друга путем умножения на коэффициент пропорциональности.

$$T_i = k_i T_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i T_0 \cdot a_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 0$$

Пример 4.5. *Задача. Простая система блоков.*

Необходимо установить силы натяжения нити. Уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

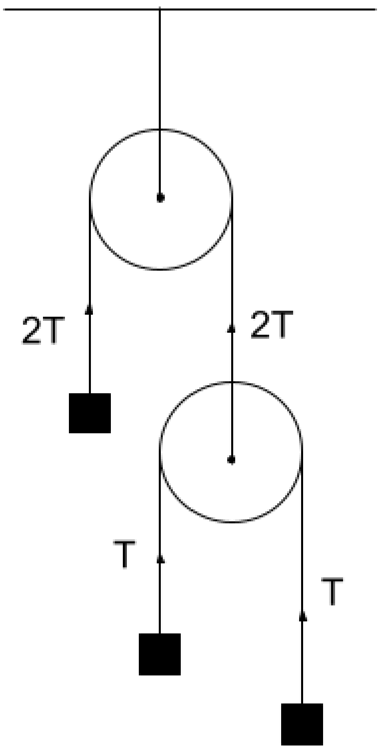

Рис. 4.6. Простая система блоков

Пример 4.6. *Задача. Случайная система блоков.*

Уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$4a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

Пример 4.7. *Задача. Сложная система блоков*

Уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$2a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_5 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{1}{2}a_7 + 2a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 0$$

Энергетический метод вывода связей

В некоторых случаях можно упростить решение задачи, используя энергетический метод вывода связей. Все силы натяжения должны выражаться только через одну путем умножения на коэффициент.

Пример 4.8. *Задача. Энергетический метод в системе двух блоков.*

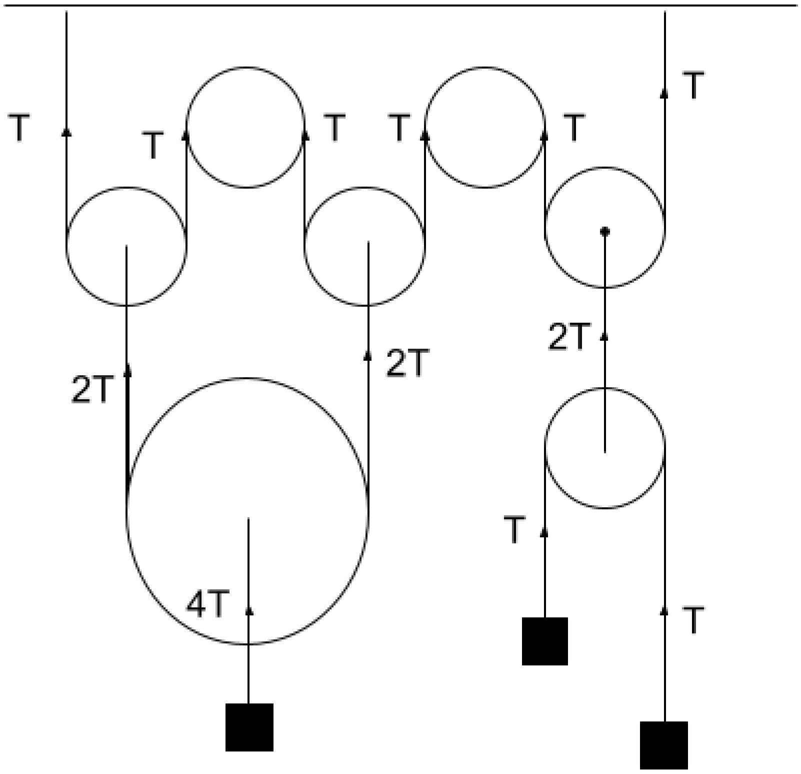

Рис. 4.7. Случайная система блоков

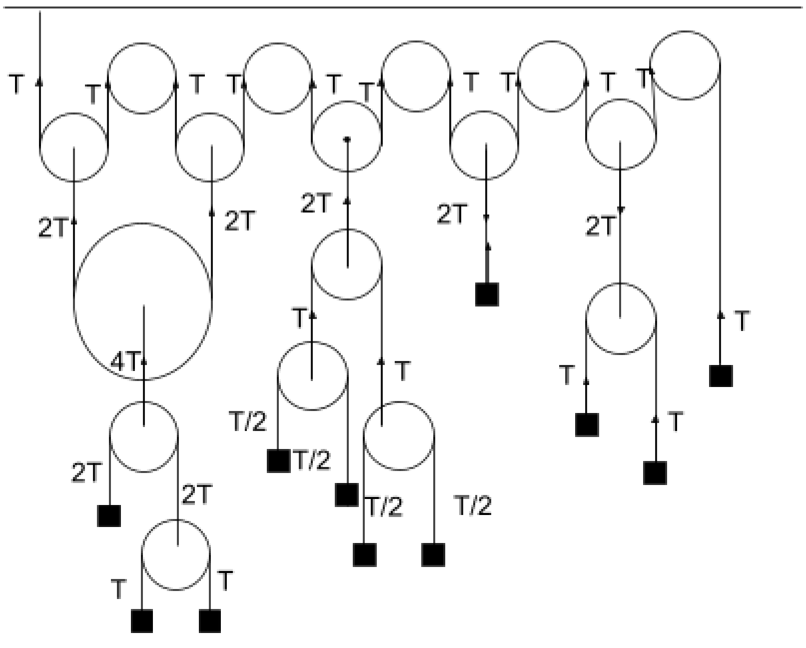

Рис. 4.8. Сложная система блоков

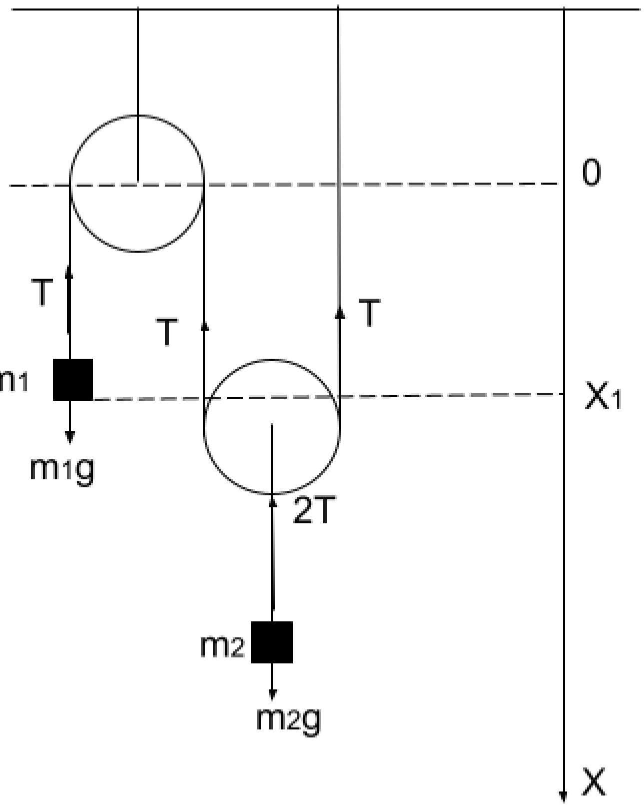

Рис. 4.9. Энергетический метод в системе двух блоков

Требуется найти ускорение всех тел. Эту задачу можно решать через второй закон Ньютона.

$$\begin{cases} m_1a_1 = m_1g - T \\ m_2a_2 = m_2g - 2T \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

$$E_{K_1} = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

$$E_{P_1} = -m_1gx_1$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial X}$$

$$\Delta E_{K_1} = m_1v_1 \cdot \Delta v_1$$

$$\Delta E_{P_1} = -m_1g\Delta x_1$$

$$-m_1g\Delta x_1 - m_2g\Delta x_2 + m_1v_1\Delta v_1 + m_2v_2\Delta v_2 = 0$$

$$-m_1 g v_1 - m_2 g v_2 + m_1 v_1 a_1 + m_2 v_2 a_2 = 0$$

$$a_1 = -2a_2$$

$$v_1 = -2v_2$$

$$2m_1 g v_2 - m_2 g v_2 + 4m_1 v_2 a_2 + m_2 v_2 a_2 = 0$$

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{m_2 + 4m_1} g = -\frac{a_1}{2}$$

Лекция 5. Движение центра масс

Теорема о движении центра масс

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{цм}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0 \to \vec{v}_{\text{цм}} = const$$
$$M = \sum m:$$

Центр масс системы материальных точек движется так, как двигалась бы материальная точка масса, которой равна полной массе всех тел точек системы под действием суммы всех внешних сил, приложенных к разным телам системы.

Задача. Осколки снаряда

Пусть есть горизонтальная поверхность, с которой из пушки выпускают снаряд с начальной скоростью под углом горизонта. Сопротивления воздуха нет. Снаряд массой m летит и в верхней точке траектории разрывается на два одинаковых осколка. Один из этих осколков летит обратно по той же траектории, попадает в пушку и взрывает ее. Известно, что разрыв произошел на расстоянии L от пушки по горизонтали. Необходимо найти расстояние от пушки, на котором упадет второй осколок. Центр масс системы будет продолжать двигаться по той же самой параболе. Таким образом, второй осколок упадет на расстояние $4L$ от пушки.

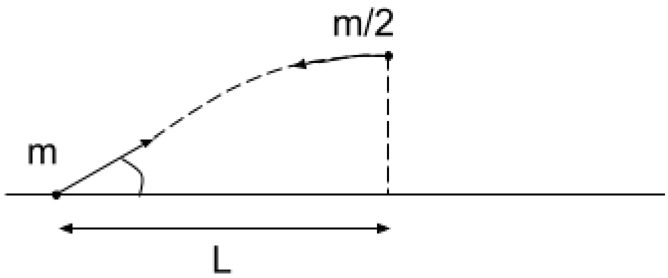

Рис. 5.1. Осколки снаряда

Задача. Шарик и чашка

Пусть на горизонтальном столе стоит брусок массы M, в котором вырезана цилиндрическая полость (чашка) с радиусом R. На краю находится шарик массой m

и радиусом r. Поверхность гладкая, трения нет. Предполагается, что шарик отпустили без начальной скорости и в тот же момент отпустили чашку. Требуется найти расстояние, на которое сместиться чашка относительно стола к тому моменту, когда шарик окажется в нижней точке полости.

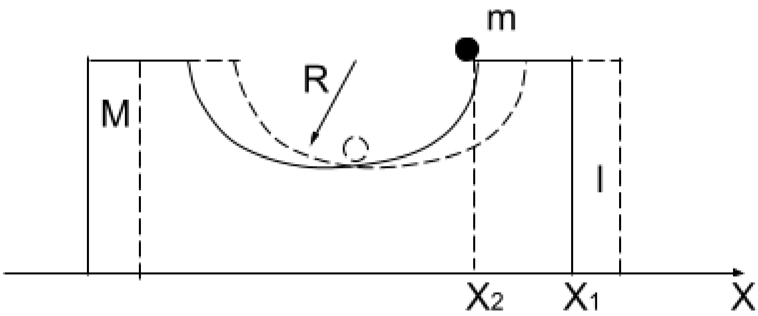

Рис. 5.2. Шарик и чашка

Вводится координатная ось x. Координата центра масс записывается следующим образом:

$$X_{\text{цм}} = \frac{MX_1 + mX_2}{M+m}$$

$$\Delta X_{\text{цм}} = \frac{M\Delta X_1 + m\Delta X_2}{M+m} = 0$$

$$\Delta X_1 = l$$

$$\Delta X_2 = l - (R - r)$$

$$Ml + ml - m(R-r) = 0$$

$$l = \frac{m(R-r)}{m+M}$$

Задача. Жучок на обруче

Пусть на гладкой горизонтальной поверхности покоится тонкий обруч массой M и радиусом R. На обруче сидит маленький жучок массой m. Известно, что стол гладкий, но между обручем и жучком есть трение. В некоторый момент времени жучок начинает ползти по обручу. Требуется найти траекторию, по которой будет двигаться жучок относительно стола. Центр масс этой системы не смещается. Координаты центра масс записываются следующим образом:

$$X_{\text{цм}} = \frac{M \cdot 0 + mR}{m+M} = \frac{mR}{m+M}$$

Таким образом, жучок двигается по окружности и центр обруча будет вращаться по окружности.

$$r = R - X_{\text{цм}} = \frac{MR}{m+M}$$

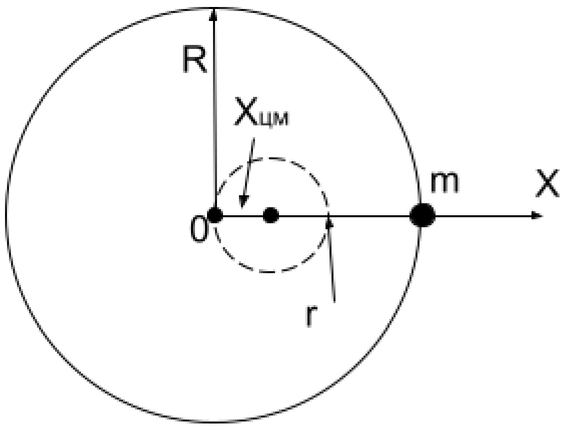

Рис. 5.3. Жучок на обруче

Задача. Смещение лодки

Пусть на поверхности стоящего озера плавает лодка длины L и массы M. На носу лодки сидит человек массы m. Пусть сопротивление воды отсутствует. При движении лодки трения со стороны воды нет. Человек переходит с носа лодки на корму. Требуется найти расстояние, на которое сместится лодка относительно воды. Центр масс системы относительно воды не смещается.

$$X_{\text{цм}} = \frac{\frac{mL}{2}}{m+M}$$

смещение корпуса лодки:

$$\Delta X_{\text{л}} = 2X_{\text{цм}} = \frac{mL}{m+M}$$

Пусть есть та же самая лодка, но на лодку действует сила сопротивления прямо пропорциональная скорости лодки относительно воды. Требуется найти расстояние, на которое сместится корпус лодки относительно воды.

$$F_c = -\alpha v_{\text{л}}$$

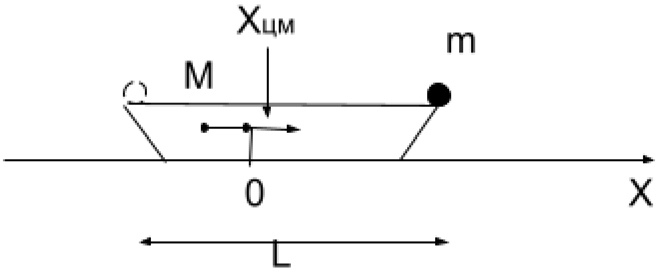

Рис. 5.4. Смещение лодки

$$(m+M)\frac{dV_{\text{цм}}}{dt} = -\alpha v_{\text{л}}$$

$$(m+M)dV_{\text{цм}} = -\alpha v_{\text{л}}dt = -\alpha dx_{\text{л}}$$

$$(m+M)\Delta V_{\text{цм}} = \alpha \Delta X_{\text{л}} = 0$$

Суммарное смещение корпуса лодки равно 0, а смещение центра масс не равно 0.

Задача. Лестница и машина Атвуда

Пусть есть неподвижный блок, через которого перекинута веревка. С левой стороны веревки висит груз массы M, а на другом конце веревки подвешена лестница. На нижней ступеньке лестницы сидит человек массы m. Длина лестницы L. В начале система уравновешена, а потом человек поднимается с нижней ступеньки на верхнюю. Необходимо ответить на вопрос: сместиться ли центр масс этой системы, если да, то на сколько и в какую сторону. Масса лестницы — $M-m$. Центр масс этой системы сместиться вверх. Вводится координатная ось X.

$$X_{\text{цм}} = \frac{MX_1 + (M-m)X_2 + mX_3}{2M}$$

$$\Delta X_{\text{цм}} = \frac{M\Delta X_1 + (M-m)\Delta X_2 + m\Delta X_3}{2M}$$

$$\Delta X_1 = -\Delta X_2$$

$$\Delta X_3 = \Delta X_2 + \Delta X_{\text{отн}}$$

ΔX_3 — смещение человека относительно земли. Это смещение складывается из смещения лестницы относительно земли и человека относительно лестницы.

$$\Delta X_{\text{цм}} = \frac{M\Delta X_1 + (M-m)\Delta X_2 + m\Delta X_3}{2M} = \frac{M\Delta X_1 - M\Delta X_1 - m\Delta X_2 + m\Delta X_2 - m\Delta X_{\text{отн}}}{2M} =$$

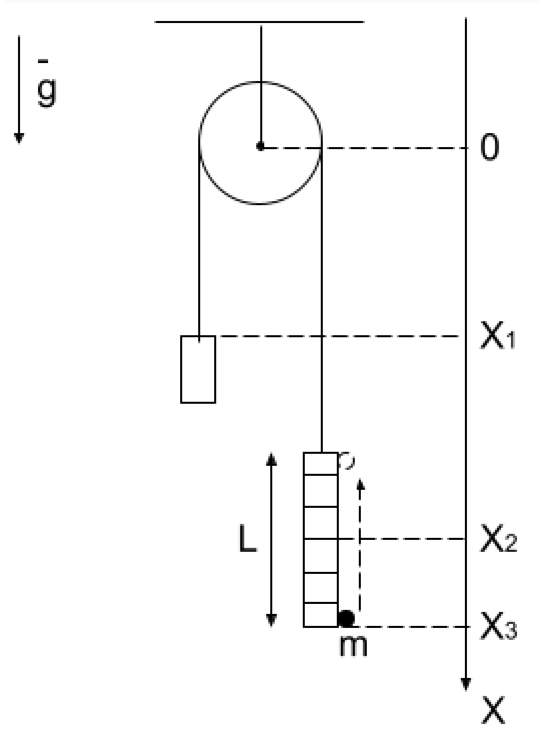

Рис. 5.5. Лестница и машина Атвуда

$$= \frac{m\Delta X_{\text{отн}}}{2M}$$

$$\Delta X_{\text{отн}} = -L$$

$$\Delta X_{\text{цм}} = -\frac{mL}{2M}$$

Только внешние силы могут смещать центр масс. В данном случае это сила натяжение той нити, которая действует на систему со стороны потолка.

Задача. Ускорение центра масс системы грузов

Пусть есть машина Атвуда. Через блок перекинута нить, на концах которой висят грузы в поле силы тяжести. Систему отпускают и груз начинает двигаться Требуется найти ускорение центра масс системы груза. Вводится ось X. Центр масс этой системы будет опускаться. Используется теорема движения центра масс.

$$(m_1 + m_2)a_{\text{цм}} = m_1 g + m_2 g - 2T$$

$$a_{\text{цм}} = g - \frac{2T}{m_1 + m_2}$$

Выражение для силы натяжения нити записывается следующим образом:

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$$

$$a_{\text{цм}} = g - \frac{2T}{m_1+m_2} = g - \frac{4m_1m_2g}{(m_1+m_2)^2} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot g$$

Центр масс движется вниз равноускоренно.

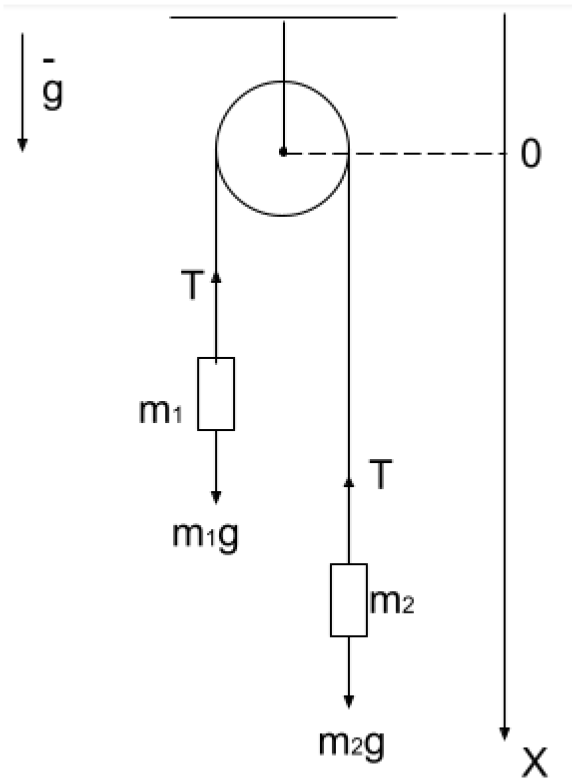

Рис. 5.6. Ускорение центра масс системы грузов

Задача. Отделение вагона от поезда

Пусть есть поезд, который ездит по железной дороге и состоит из большого количества вагонов. Локомотив спереди развивает некоторую силу тяги, но инженер построил поезд так, что при его движении сила трения, которая действует на каждый элемент поезда, прямо пропорциональна его массе. Действует сила скольжения. Пуст поезд ехал с постоянной скоростью и имел массу M. В один момент от него оторвался вагон массой m. Вагон прошел до остановки от место отрыва расстояние L

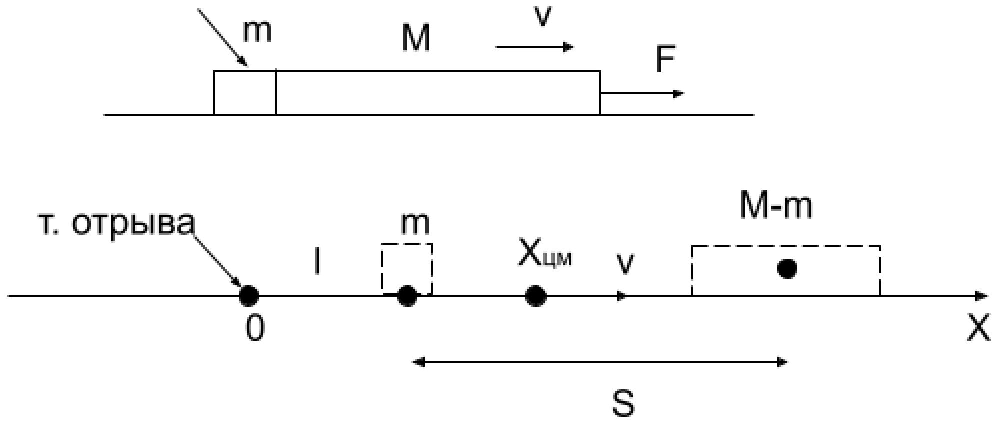

Рис. 5.7. Отделение вагона от поезда

и остановился. Требуется найти расстояние от вагона, на котором окажется середина передней части поезда.

В начале центр масс двигался равномерно и прямолинейно. Суммарная сила трения после отрывания вагона не меняется. Таким образом, центр масс двигается с постоянной скоростью.

$$X_{\text{цм}} = vt = \frac{ml + (M-m)(S+l)}{M} = 2l$$

$$l = \frac{v}{2} \cdot t$$

$$ml + mS + ml - mS - ml = 2Ml$$

$$S = \frac{Ml}{M-m}$$

Задача. Центр масс проволоки

Пусть есть кусочек однородной проволоки. Проволока была согнута наполовину с радиусом R и массой m. Требуется найти расположение центр масс такой дуги окружности. Центр масс должен находится на оси симметрии.

Пусть есть элемент dm, который сидит прямо на самом краю дуги. Элемент dm двигается со скоростью v. Необходимо найти импульс этой системы.

$$dm \cdot v = mv_{\text{цм}}$$

Проволока повернулась на бесконечно малый угол $d\alpha$.

$$dm2R = m\Delta l_{\text{цм}} = mXd\alpha$$

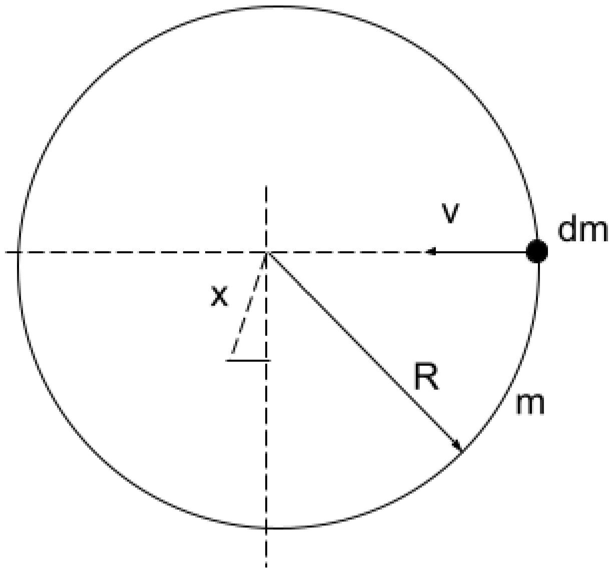

Рис. 5.8. Центр масс проволоки

$$X = \frac{2R}{m}\frac{dm}{d\alpha} = \frac{2R}{m}\cdot\frac{m}{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

Пусть дуга расположена вертикально в поле силы тяжести. Дуга повернута на бесконечно малый угол. Потенциальная энергия этой системы увеличится:

$$dm\cdot g\cdot 2R = mg\cdot Xd\alpha$$

Задача. Вращение кольца

Пусть есть кольцо, подвешенное на нитке. Конец нитки прикреплен к крючку центробежной машины. Конструкция вращается с угловой скоростью ω. Тогда кольцо будет находиться в горизонтальной плоскости и будет крутиться вокруг вертикали. Нитка будет составлять некоторый угол с вертикалью. Кольцо будет лежать в горизонтальной плоскости. Требуется определить траекторию, по которой движется центр кольца. Центр масс кольца двигается по окружности радиусом r.

$$T\cos\alpha = mg$$

$$m\omega^2 r = T\sin\alpha$$

$$m\omega^2 r = mg\operatorname{tg}\alpha$$

$$r = \frac{g\operatorname{tg}\alpha}{\omega^2}$$

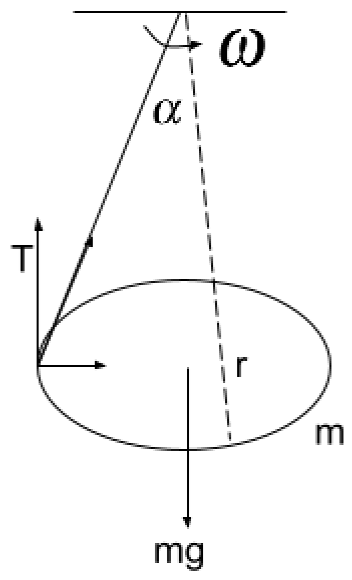

Рис. 5.9. Вращение кольца

Сила, которая обеспечивает центростремительное ускорение, приложена к краю системы. Уравнение записывается на основании теоремы движения центра масс.

Задача. Давление жучка на обруч

Пусть жук, который ползет по обручу радиусом R будет двигаться по окружности. Пусть эта система движется так, что центр кольца совершает по окружности один оборот за некоторое время t и движется равномерно. Пусть задан период обращения T. Требуется найти силу, которую жучок дает на кольцо в процессе такого движения в горизонтальном направлении. Центр масс покоится. Центр кольца движется вокруг центра масс по окружности.

$$Mv = mu$$

$$T = \frac{2\pi X}{v} \to v = \frac{2\pi X}{T}$$

$$N = \frac{Mv^2}{X} = \frac{M(m+M)\cdot 4\pi^2 \cdot m^2R^2}{mRT^2(m+M)^2} = \frac{4\pi^2 mMR}{T^2(m+M)}$$

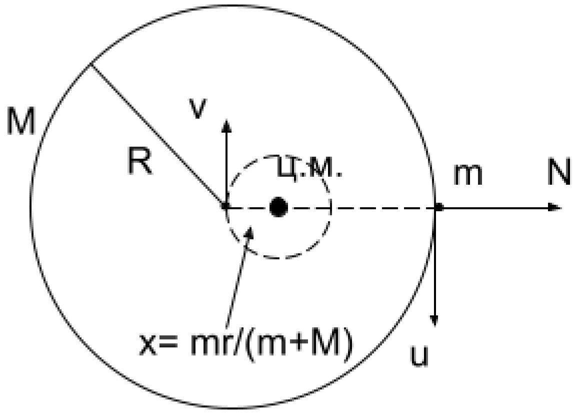

Рис. 5.10. Давление жучка на обруч

Лекция 6. Реактивное движение

Задача. Натяжение нити в системе двух тел

Пусть есть две материальные точки m_1 и m_2, которые скользят по горизонтальному гладкому столу и связаны нитью. В некоторый момент времени нить затянута и скорость шарика массы m_2 равна v и направлена перпендикулярно к нити. Нить имеет длину L. Требуется найти силу натяжения нити в этот момент. Если перейти в систему отсчета центра масс, то эта система будет являться инерциальной системой отсчета. Центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно. Тела вращаются по окружности.

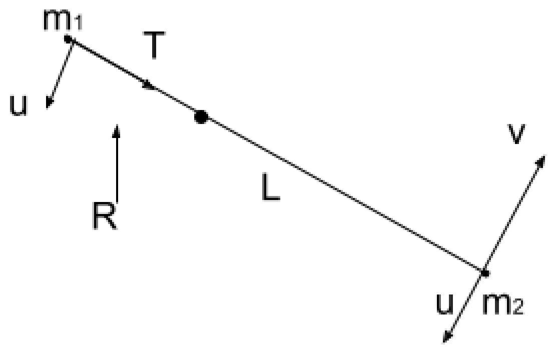

Рис. 6.1. Натяжение нити в системе двух тел

$$u = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$

$$R = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{m_1 u^2}{R} = \frac{m_1 m_2^2 v^2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2 \cdot m_2 L} = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2) L}$$

Задача. Натяжение нитей в системе трех тел

Пусть в вершинах равностороннего треугольника находятся 3 материальные точки m_1, m_2, m_3. Сторона треугольника равна l. Определяется центр масс системы и начинается вращение конструкции вокруг оси перпендикулярной плоскости прямоугольника, проходящую через центр масс. Требуется найти силу натяжения всех нитей.

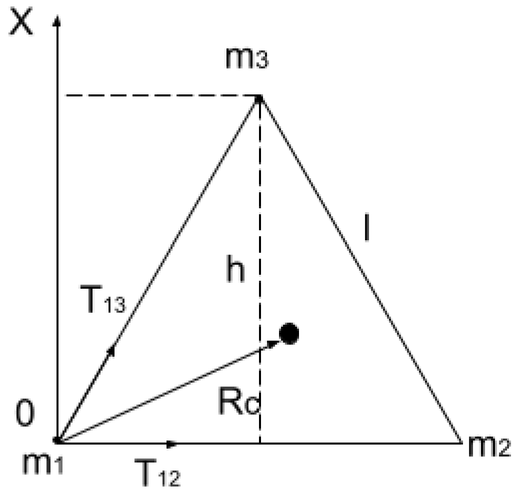

Рис. 6.2. Натяжение нити в системе трех тел

Координатная ось X направлена перпендикулярно нитки, которая соединяет m_1 и m_2. Записывается второй закон Ньютона для m_1:

$$m_1\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{T}_{13} + \vec{T}_{12}$$

$$\vec{a}_{\text{цс}} = \omega^2 R_c$$

$$m_1\omega^2 R_x = T_{13}\cos 30^\circ$$

$$R_x = \frac{m_3 h}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m_3 l\cos 30^\circ}{m_1+m_2+m_3}$$

$$\frac{m_1\omega^2 m_3 l\cos 30^\circ}{m_1+m_2+m_3} = T_{13}\cos 30^\circ$$

$$T_{12} = \frac{m_1 m_2\omega^2 l}{m_1+m_2+m_3}$$

Реактивное движение

Реактивное движение — это движение под действием реактивной силы. Реактивная сила возникает когда тело взаимодействует с веществом, которое либо выбрасывает из себя, либо присоединяет к себе. Основное уравнение, которое используется для описания реактивного движения — уравнение Мещерского:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_p = \vec{F} - \mu\vec{u}$$

u — скорость истечения газов относительно ракеты. μ — расход топлива.

$$\mu = -\frac{dM}{dt}$$

Задача. Падение цепочки

Пусть есть стол, над которым удерживают цепочку длины l, массы m. Нижний конец цепочки едва касается стола. Затем цепочку отпускают. Требуется найти зависимость силы $F(t)$, с которой цепочка давит на стол, от времени. Пусть за время t на стол упала какая-то часть цепочки массы Δm и длины Δl.

$$F = \Delta m g + \mu v$$

$$\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right|$$

$$\Delta m = \frac{m}{l}\Delta l = \frac{m}{l}\frac{gt^2}{2}$$

$$\mu v = \left|\frac{dm}{dt}\right| v = \frac{m}{l}\frac{dl}{dt} v = \frac{m}{l}v^2 = \frac{m}{l}g^2t^2$$

$$F = \frac{m}{l}\frac{g^2t^2}{2} + \frac{m}{l}g^2t^2 = \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2t^2$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$F_{max} = \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2\frac{2l}{g} = 3mg$$

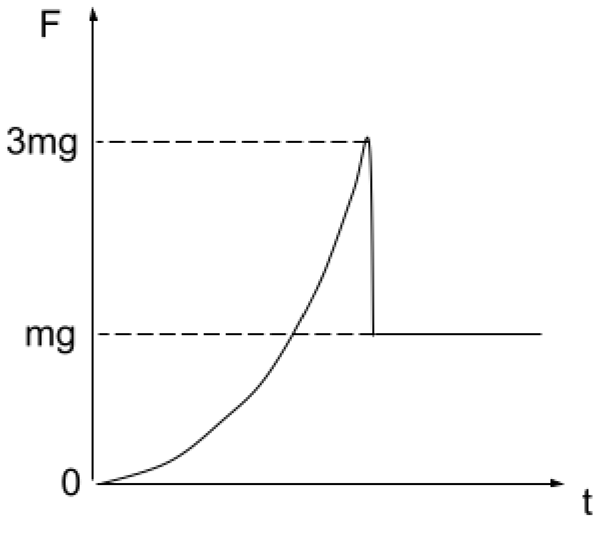

Рис. 6.3. Падение цепочки

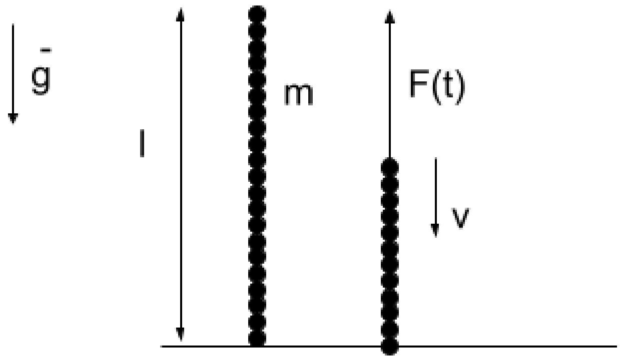

Рис. 6.4. График зависимости

$$\Delta P = \int_0^\tau F(t)dt = \int_0^\tau \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2t^2dt = \frac{1}{2}\frac{m}{l}g^2\tau^3 = \frac{1}{2}\frac{m}{l}g^2\frac{2l}{g}\tau = mg\tau$$

$$\frac{\Delta P}{\tau} = mg$$

ΔP — средняя сила давления.

Задача. Максимальный импульс ракеты

Пусть есть ракета массой m, которая движется в отсутствии силы тяжести, сопротивления воздуха и выбрасывает топливо со скоростью u. Требуется найти максимальное значение модуля импульса этой ракеты.

$$P = mv$$

$$\frac{dP}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} - \mu v = 0$$

$$m\frac{dv}{dt} = \mu u$$

$$v = u$$

Таким образом, скорость ракеты станет равна скорости истечения газов относительно ракеты. Выражение для кинетической энергии ракеты записывается следующим образом:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Начиная с некоторого времени газы, которые выбрасывает ракета, полетят вслед за ракетой. Поэтому скорость ракеты может превысить скорость истечения газов.

Задача. Ракета в поле силы тяжести

Пусть есть ракета, которая стартует в поле силы тяжести с Земли в отсутствии силы сопротивления. Известно, что скорость истечения газов относительно ракеты равна u. Требуется найти зависимость скорости ракеты от времени.

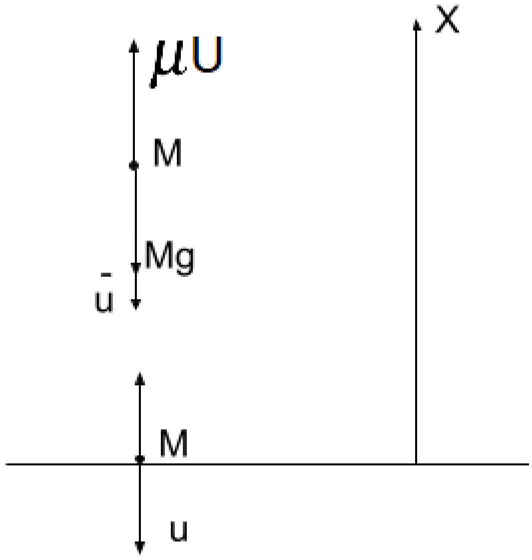

Рис. 6.5. Ракета в поле силы тяжести

$$\mu = const$$

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg + \mu u$$

$$M = M_0 - \mu t$$

$$(M_0 - \mu t)\left(\frac{dv}{dt} + g\right) = \mu u$$

$$(M_0 - \mu t)\frac{d}{dt}(v + gt) = \mu u$$

$$d(v + gt) = \frac{\mu u dt}{M_0 - \mu t} = -u\frac{d(M_0 - \mu t)}{M_0 - \mu t}$$

$$\int_0^t d(v + gt) = \frac{\mu u dt}{M_0 - \mu t} = -u\int_0^t \frac{d(M_0 - \mu t)}{M_0 - \mu t}$$

$$v + gt = -u \ln\left(\frac{M_0 - \mu t}{M_0}\right)$$

$$v(t) = u \ln\left(\frac{M_0}{M_0 \mu t}\right) - gt$$

$$g = 0$$

$$\frac{v}{u} = -\ln\frac{M}{M_0}$$

Таким образом, получается формула Циолковского:

$$M = M_0 e^{-\frac{\pi}{4}}$$

Задача. Равноускоренная ракета

Пусть $g = 0$ и ракета летит с постоянным по модулю ускорением a. Требуется найти скорость ракеты в произвольный момент времени $M(t)$.

$$Ma = \mu u = -\frac{dM}{dt}u$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{a}{u}dt$$

$$M = M_0 e^{-\frac{at}{u}} = M_0 e^{-\frac{v}{u}}$$

Задача. Неподвижная ракета

Пусть ракета зависла над Землей и висит неподвижно. Есть ускорение свободного падения $g = const$. Необходимо найти зависимость расхода топлива $\mu(t)$ от времени.

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$Mg = \mu u$$

По мере выгорания топлива M уменьшается, что означает реактивная сила тоже уменьшается.

$$g\frac{dM}{dt} = u\frac{d\mu}{dt} = -\mu g$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{g}{u}dt$$

$$\mu = \mu_0 e^{-\frac{gt}{u}} = \frac{M_0 g}{u} e^{-\frac{gt}{u}}$$

μ_0 — расход топлива в момент старта ракеты. Пусть есть высокий стартовый стол и ракета стартует. Газы, которые она выбрасывает, летят вниз. Центр масс системы ракеты и газа падает вниз с ускорением g. Это следует из теоремы движения центра масс.

Задача. Разворот ракеты

Пусть в глубинах космоса летит ракета массой m и летит со скоростью v_0. Командир космического корабля решил повернуть вбок. Для этого он включил реактивный двигатель и начал выбрасывать топливо в направлении перпендикулярно скорости ракеты. Пусть ракета повернула на некоторый угол α_0. Требуется найти массу ракеты после разворота. Записывается уравнение Мещерского:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{u}$$

$$M\frac{dv}{dt} = M\frac{v_0 d\alpha}{dt} = \mu u = -\frac{dM}{dt}u$$

$$dv = v_0 d\alpha$$

$$\frac{dM}{M} = -\frac{v_0}{u}d\alpha$$

$$M = M_0 e^{-\frac{v_0\alpha}{u}}$$

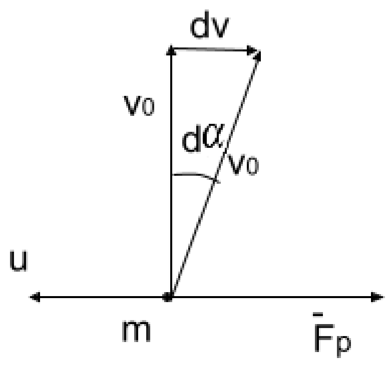

Рис. 6.6. Разворот ракеты

$$v_0 = 8\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

$$u = 3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

$$\frac{M}{M_0} = 0.8 \quad \alpha = ?$$

$$\alpha = \frac{u}{v_0} \ln \frac{M_0}{M} \sim 5^\circ$$

Таким образом, корабль потерял 20% полезной массы, при этом ему удалось развернуться на 5°.

Задача. Корабль на водометном двигателе

Пусть есть корабль на водометном двигателе. У этого корабля ниже уровня воды имеется входное отверстие, через которое в корабль поступает вода. На корме корабля стоит водяная пушка, которая выбрасывает воду со скоростью u. Масса корабля M. Каждую секунду выбрасывается μ кг воды. В начальный момент времени кораблю сообщили скорость v_0, чтобы запустить водометный двигатель. Требуется найти как скорость корабль зависит от времени $v(t)$.

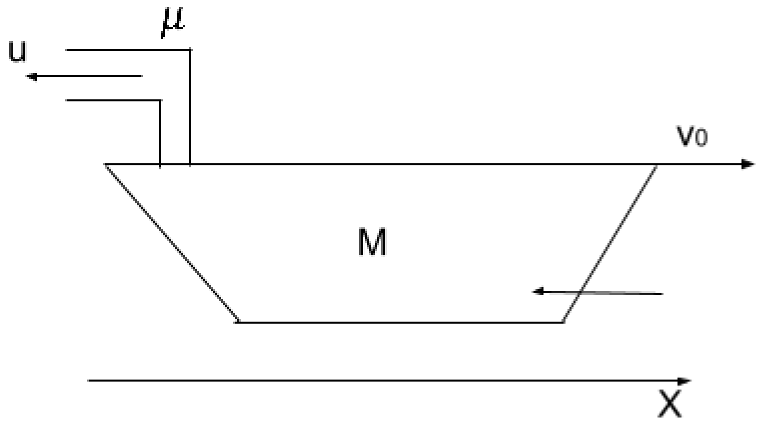

Рис. 6.7. Корабль на водометном двигателе

$$M\frac{dv}{dt} = \mu(u - v)$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{u - v} = \int_{0}^{t} \frac{\mu}{M} dt$$

$$-\ln(u - v)\Big|_{v_0}^{v} = \frac{\mu}{M} t$$

$$\ln\frac{u-v_0}{u-v}=\frac{\mu}{M}t$$

$$u-v=(u-v_0)e^{-\frac{\mu t}{M}}$$

$$v(t)=u-(u-v_0)e^{-\frac{\mu t}{M}}$$

Кембриджская задача

Пусть есть стол, на краю которого лежит тяжелая однородная цепочка массой m. В некоторой момент времени конец цепочки без начальной скорости начал соскальзывать вниз двигаясь по вертикали. Требуется найти скорость, которую приобретет нижняя точка цепочки через время t. Эта задача про реактивное движение.

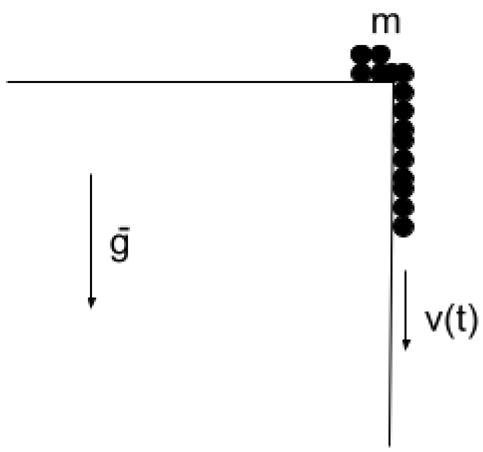

Рис. 6.8. Кембриджская задача

Лекция 7. Закон сохранения энергии

Кембриджская задача

Пусть есть стол, на краю которого лежит тяжелая однородная цепочка массой m. В некоторой момент времени конец цепочки без начальной скорости начал соскальзывать вниз двигаясь по вертикали. Требуется найти скорость, которую приобретет нижняя точка цепочки через время t. Эта задача про реактивное движение.

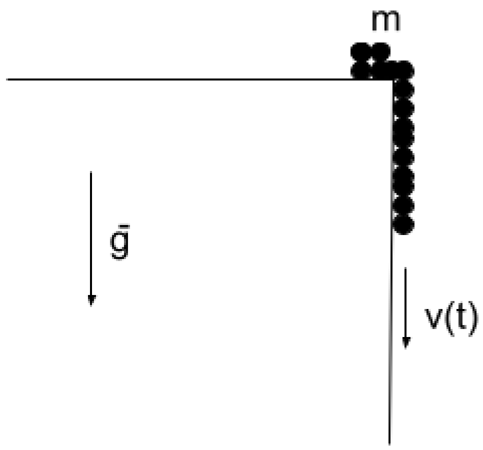

Рис. 7.1. Кембриджская задача

Ось x направлена вниз. Второй закон Ньютона записывается следующим образом:

$$m\frac{dv}{dt} = mg + \mu v \quad \mu < 0$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{dm}{dt}v$$

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = mg$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg$$

Скорость изменения импульса цепочки равна силе тяжести, которая действует на нее. Цепочка однородная, поэтому можно ввести линейную плотность:

$$\lambda = \frac{dm}{dX}$$

$$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = gX$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d(x^2)}{dt}\right) = gX$$

$$\frac{d^2(x^2)}{dt^2} = 2gX$$

$$X^2 = z$$

Таким образом, получается следующее уравнение:

$$\ddot{z} = 2g\sqrt{z}$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо его интегрировать. Необходимо получить степенную функцию, которая при двойном дифференцировании и при извлечении корня дает функцию одного и того же типа.

$$z = Ct^n$$

$$Cn(n-1)t^{n-2} = 2g\sqrt{c}t^{\frac{n}{2}}$$

$$n-2 = \frac{n}{2} \to n = 4$$

$$4C\cdot 3 = 2g\sqrt{C} \to C = \frac{g^2}{36}$$

$$z = \frac{g^2t^4}{36} = X^2$$

$$X = \frac{gt^2}{6}$$

Таким образом, конец цепочки движется с постоянным ускорением:

$$a = \frac{g}{3}$$

Альтернативный метод решения записывается следующим образом:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = 2g\sqrt{z}$$

$$\frac{d\dot{z}}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = 2g\sqrt{z}$$

$$\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dz} = 2g\sqrt{z}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}(\dot{z}^2) = 2g\sqrt{z}$$

$$d(\dot{z}^2) = 4g\sqrt{z}dz$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{x}) = -\omega^2 x$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\omega^2 x$$
$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega^2 x$$
$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = -\omega^2 x$$
$$d(\dot{x}^2) = -2\omega^2 x dx$$

Таким образом, получается выражение для закона сохранения энергии:

$$\dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 + const$$
$$\dot{x}^2 + \frac{k}{m}x^2 = const$$
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

Задача. Максимальная длина пружины

Работа силы — это скалярное произведение силы на перемещение точки приложения силы.

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Пусть на горизонтальном столе лежат 2 шарика одинаковой массы m, соединенные пружиной некоторой жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l. К одному из шариков прикладывается постоянная сила F. Система начинает разгоняться. Требуется найти максимальную длину, которую будет иметь пружина в процессе движения этой системы. Скорости v шариков будут одинаковы. Новая длина пружины L. Записывается закон изменения механической энергии этой системы:

$$2\frac{mv^2}{2} + \frac{k(l-L)^2}{2} = F(X_2' = X_{20})$$

$$a_{\text{цм}} = \frac{F}{2m}$$

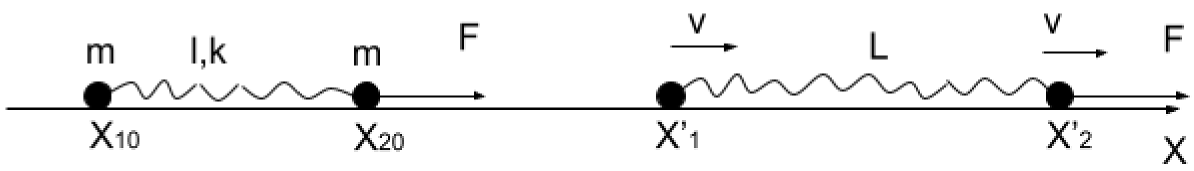

Рис. 7.2. Максимальная длина пружины

Смещение центра масс:

$$\frac{X_1'+X_2}{2}-\frac{X_{10}+X_{20}}{2}=\frac{v^2}{2a_{\text{цм}}}=\frac{v^2 m}{F}$$

Записываются соотношения:

$$\frac{F}{2}\left(X_1'+X_2-X_{10}-X_{20}\right)+\frac{k(l-L)}{2}=F(X_2'-X_{20})$$

$$k(l-L)^2=F(2X_2'-2X_{20}-X_1'-X_2'+X_{10}+X_{20})=F(X_2'-X_1'-(X_{20}-X_{10}))=F(L-l)$$

$$k(L-l)-F$$

$$L=l+\frac{F}{k}$$

Альтернативный метод решения записывается следующим образом:

$$\vec{F}_{\text{ин}}=\vec{a}$$

$$a=\frac{F}{2m}$$

Центр масс покоится.

$$\frac{F}{2}=2l\cdot\Delta x\to\Delta x=\frac{F}{4k}$$

$$\frac{F}{2}\cdot\Delta x=\frac{2k\Delta x^2}{2}\to\Delta x=\frac{F}{2k}=\frac{L-l}{2}$$

Задача. Смещение соединенных пружиной грузов

Пусть есть горизонтальная поверхность, на которой лежат два бруска, соединенные пружиной. В исходном состоянии пружина не растянута. Между поверхностью стола и брусками есть трение. Коэффициент трения μ. Требуется найти минимальную постоянную силу, которую надо приложить бруску m_1 в направлении вдоль стола, чтобы сдвинулся с места брусок m_2. Брусок m_2 будет двигаться когда:

$$kx = \mu m_2 g$$

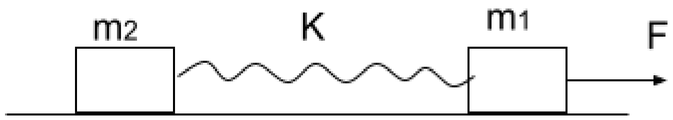

Рис. 7.3. Смещение соединенных пружиной грузов

Записывается закон сохранения энергии:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu m_1 g x$$

$$F = \frac{kx}{2} + \mu m_1 g = \frac{\mu m_2 g}{2} + \mu m_1 g$$

$$F = \mu g \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right)$$

При $k \to \infty$ пружина превратиться в нерастяжимый стержень.

Задача. Система грузов

Пусть есть два маленьких гладких гвоздика, через которые перекидывается нитка. На концах нитки висят одинаковые грузы массы m. В середине нитки цепляют груз массы M. Расстояние между гвоздями $2a$. В один момент грузы отпускают. Требуется найти максимальное расстояние, на которое опустится груз посередине в процессе движения.

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$2mgh = MgH$$

Записывается кинематическая связь:

$$a^2 + H^2 = (h + a)^2$$

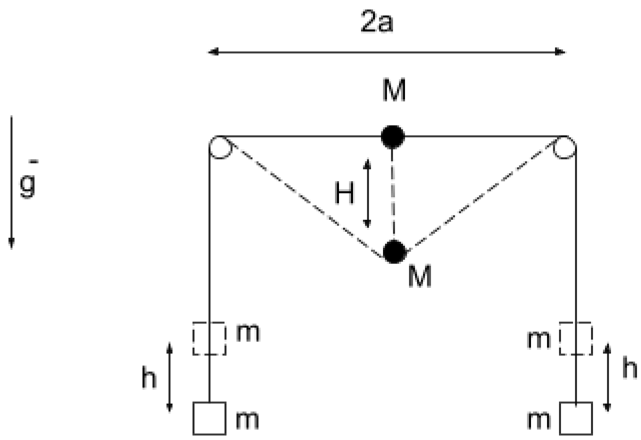

Рис. 7.4. Система грузов

$$a^2 + H^2 = h^2 + 2ha + a^2$$

$$h = \frac{MH}{2m}$$

$$H^2 = \frac{M^2H^2}{4m^2} + \frac{2MHa}{2m}$$

$$H\left(1 - \frac{M^2}{4m^2}\right) = \frac{Ma}{m}$$

$$H = \frac{4mMa}{4m^2 - M^2}$$

Этот ответ справедлив когда $2m > M$.

Пусть гвоздики расположены достаточно близко друг от друга, через которые перекинута нитки большей длины и с грузами m. Груз посередине имеет массу $2m$.

Эта система будет двигаться с постоянной скоростью. Кинетическая и потенциальная энергии не меняются. Требуется найти скорость установившегося движения. Рассматривается произвольное состояние системы. Система переводится из начального состояния в конечное состояние. Чтобы не нарушить закон сохранения энергии, необходимо уменьшить энергию и скомпенсировать это уменьшение подталкиванием одного груза вверх, а другого вниз.

$$mga = 2\frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{ga}$$

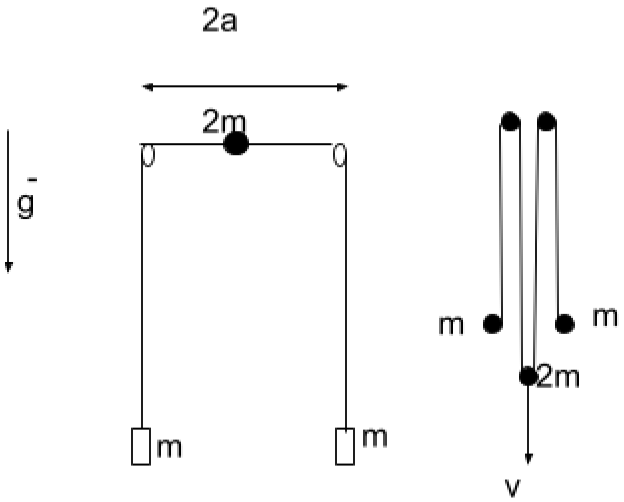

Рис. 7.5. Случай равных весов

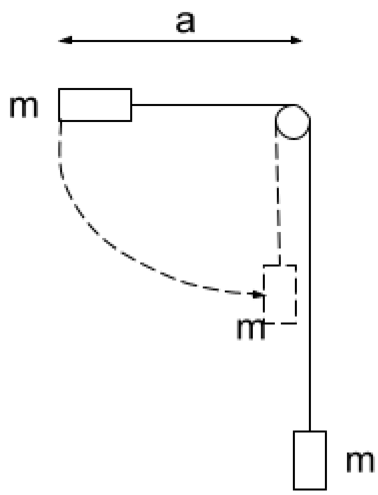

Рис. 7.6. Перевод из начального в конечное состояние

Задача. Пролет через статическое равновесие

Пусть есть гвоздь, к которому привязана нить, которая перекинута через гладкий гвоздь. К концу нитки подвешен груз массы m. К середине нитки на колечко подвешен второй груз массы m. Колечко может без трения скользить по нитке. груз на колечко медленно опускается вниз, а груз на конце нитки медленно поднимается вверх. Система достигнет равновесия. Система возвращается в исходное состояние, и одновременно опускаются грузы без начальной скорости. Требуется найти ускорение, которым будет обладать груз на колечко в тот момент, когда будет проходить мимо точки положения равновесия.

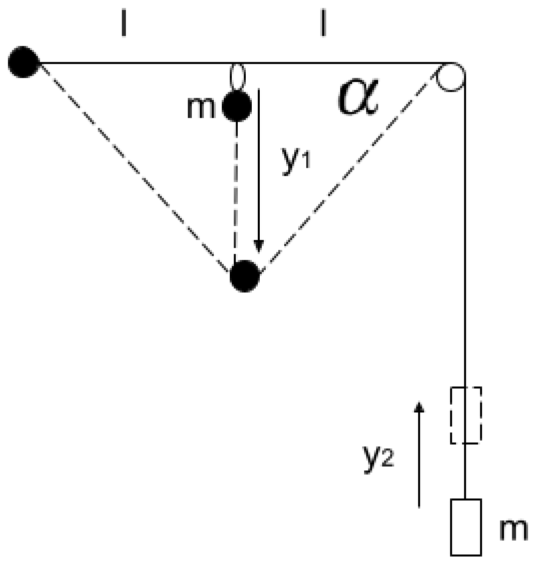

Рис. 7.7. Пролет через статическое равновесие

$$y_1 = l \operatorname{tg} \alpha$$

$$y_2 = 2\left(\frac{l}{\cos\alpha} - l\right)$$

$$v_1 = \dot{y}_1 = \frac{l}{\cos^2\alpha} \cdot \dot{\alpha}$$

$$v_2 = \dot{y}_2 = -\frac{2l}{\cos^2\alpha} \cdot (-\sin\alpha) \cdot \dot{\alpha} = 2v_1 \sin\alpha$$

Уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$a_2 = \dot{v}_2 = 2a_1 \sin\alpha + 2v_1 \cos\alpha \cdot \dot{\alpha} = 2a_1 \sin\alpha + 2v_1^2 \cos^3\alpha \cdot \frac{1}{l}$$

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + mgy_2 = mgy_1$$

$$v_1 a_1 + v_2 a_2 + g v_2 = g v_1$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = v_2$$

$$a_1 = -a_2$$

Лекция 8. Столкновения

Задача. Энергия при переходе в другую систему отсчета

Пусть есть автомобиль массы m — 2000 кг, который едет со скоростью v — 5 м/с. Водитель нажал на газ и автомобиль разогнался до скорости 10 м/с. Требуется найти работу, которую совершает двигатель:

$$A = \frac{m}{2}\left(10^2 - 5^2\right) = 75 \text{ кДж}$$

Необходимо перейти в систему отсчета K', которая двигается поступательно со скоростью 5 м/с.

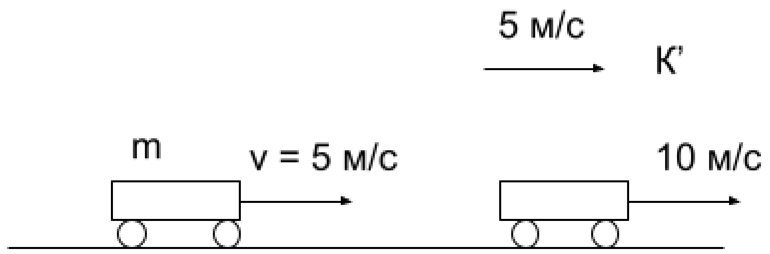

Рис. 8.1. Энергия при переходе в другую систему отсчета

Столкновения, классификация столкновений

Классификация столкновений возможна по геометрическому принципу и по энергетическому принципу. С точки зрения геометрического принципа столкновения бывают лобовыми и центральными. Если сталкиваются 2 однородных шара, то такое столкновение является центральным. С точки зрения энергетического принципа удары бывают абсолютно упругими, абсолютно не упругими и частично упругими. При абсолютно упругом ударе сохраняется механическая энергия, при абсолютно не упругом ударе тела слипаются, при частично не упругом ударе тела не слипаются, энергия не сохраняется. Но при всех случаях выполняется закон сохранения энергии. Законы действия сил не известны.

Задача. Лобовое упругое соударение

Пусть есть 2 тела: первое тело массы m_1 движется со скоростью $\vec{v}_1$, а второе тело массы m_2 движется со скоростью $\vec{v}_2$. Между ними происходит лобовое соударение. Требуется найти скорости шариков после соударения. Необходимо записать закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Необходимо перейти в систему отсчета, которая связана с центром масс.

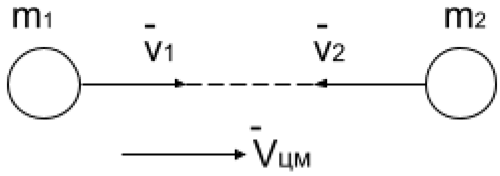

Рис. 8.2. Лобовое упругое соударение

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{\text{цм}}$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_{\text{цм}}$$

$$\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{V}_{\text{цм}} = -\vec{v}_1 + 2\vec{V}_{\text{цм}}$$
$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2' + \vec{V}_{\text{цм}} = -\vec{v}_2 + 2\vec{V}_{\text{цм}}$$
$$\vec{V}_{\text{цм}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Задача. Последовательность соударений

Пусть есть длинная труба, в которой имеются шарики, имеющие скользить. Известно расстояние между центрами шаров. В некоторый момент времени всем шарам сообщают скорость, которая направлена в одну сторону. Все соударения в этой системе абсолютно упругие. Требуется найти расстояние после того, как закончатся соударения. Предполагается, что при движении эти шары проходят друг сквозь друга, потому что шары обмениваются скоростями при соударении. В итоге, порядок расположения шаров физически не изменится, но зеркально отразиться расстояние между ними. таким методом можно решать задачи на упругое отражение тела от стенки.

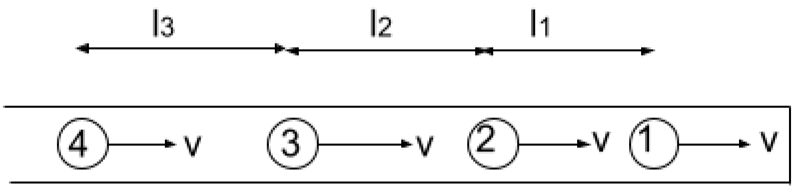

Рис. 8.3. Последовательность соударений

Задача. Скользящая горка

Пусть есть горизонтальная гладкая поверхность, на которой находятся небольшое тело массы m и горка массы M и высоты H. Горка может без трения скользить по поверхности. Телу сообщают скорость v, направленную вдоль поверхности. Тело догоняет горку. Требуется найти скорость тела и горки после того, как взаимодействие между ними закончится. В этой системе сохраняются энергия и импульс проекции на горизонталь.

$$mv = mv_1 + Mv_2$$

v_1 — скорость тела после взаимодействия. v_2 — скорость горки после взаимодействия.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}$$

$$v_1 = v = \frac{M}{m}v_2$$

$$mv^2 = m\left(v - \frac{M}{m}v_2\right)^2 + Mv_2^2$$

$$mv^2 = mv^2 - 2Mvv_2 + \frac{M^2v_2^2}{m} + Mv_2^2$$

$$\frac{Mv_2^2}{m} + v_2^2 = 2vv_2$$

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)v_2^2 = 2vv_2$$

Рассматриваются 2 случая:

1)

$$v_2 = 0, \quad v_1 = v$$

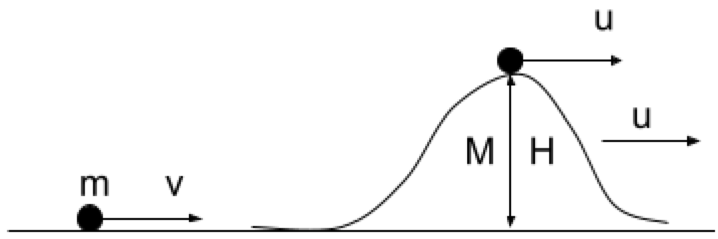

Рис. 8.4. Скользящая горка

2)

$$v_2 \neq 0, \quad v_2 = \frac{2vm}{m+M}$$

$$v_1 = v - \frac{2vM}{m+M} = \frac{mv + Mv - 2Mv}{m+M} = \frac{m-M}{m+M}v$$
$$mv = (m+M)u$$

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + mgH$$

Задача. Нелобовое столкновение

пусть есть 2 одинаковые частицы, которые так летят, что угол между их скоростями равен θ. Потом частицы столкнулись и разлетелись. Требуется найти угол разлета θ' между скоростями частиц после столкновения. Известно, что у первой частицы скорость изменилась в α раз, а у второй частицы — в β раз. Произошло абсолютно упругое не лобовое столкновение одинаковых частиц. Записывается закон сохранения импульса:

$$\vec{P} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2'$$

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta = {v_1'}^2 + {v_2'}^2 + 2v_1'v_2'\cos\theta'$$

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m{v_1'}^2}{2} + \frac{m{v_2'}^2}{2}$$

$$\cos\theta' = \frac{v_1v_2}{v_1'v_2'}\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\alpha\beta}$$

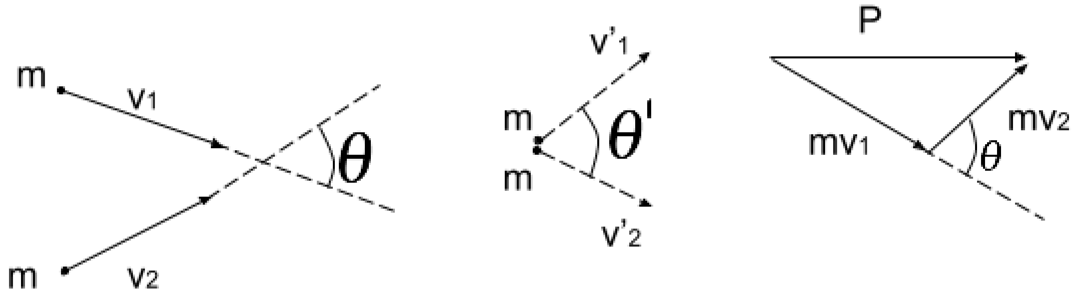

Рис. 8.5. Нелобовое столкновение

Задача. Угол рассеяния

Пусть некоторая частица массы m_1 двигалась со скоростью v_1 и налетела на частица, которая покоилась и имела массу меньше m_2. Известно, что удар абсолютно упругий, но не лобовой. Требуется найти максимальный угол рассеяния отклонения направления движения налетающей частицы. Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Закон сохранения импульса записывается следующим образом:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

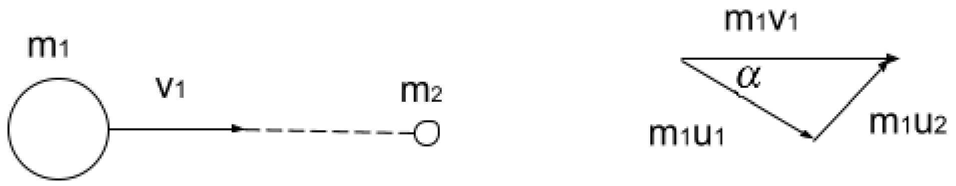

Рис. 8.6. Угол рассеяния

Записывается теорема косинусов:

$$m_2^2 u_2^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 u_1^2 - 2m_1^2 v_1 u_1 \cos\alpha$$

$$m_2^2 u_2^2 = m_1 m_2 u_1^2 - m_1 m_2 u_1^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 u_1^2 - 2m_1^2 v_1 u_1 \cos\alpha$$

$$2m_1v_1u_1\cos\alpha = v_1^2(m_1-m_2)+u_1^2(m_1+m_2)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1}\frac{v_1}{u_1}+\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1}x+\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{1}{x}$$

$$\frac{d(\cos\alpha)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1}-\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1}\frac{1}{x^2} = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}}$$

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{m_1-m_2}{m_1}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}}+\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}} = \frac{1}{2m_1}\cdot 2\sqrt{m_1^2-m_2^2}$$

$$\sin\alpha_0 = \sqrt{1-\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2}} = \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Эта задача также решается геометрически.

Задача. Отскок от наклонной поверхности

Пусть на гладком столе покоится гладкий клин массы M. В горизонтальном направлении летит шарик массы m. Известно, что когда шар ударяется об клин, он отскакивает и после соударения начинает лететь вертикально вверх. Трения нет. Удар абсолютно упругий. Требуется найти угол α.

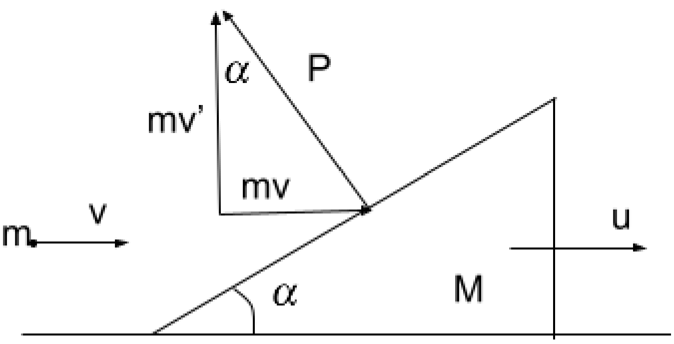

Рис. 8.7. Отскок от наклонной поверхности

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Mu^2}{2}+\frac{mv'^2}{2}$$

Записывается сохранение импульса на горизонтальную ось:

$$mv = Mu$$

Сила взаимодействия между шариком и клином направлена перпендикулярно плоскости.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{v'}$$

Таким образом, решением задачи является следующее выражение:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1 - \frac{m}{M}} \quad m < M$$

пусть есть два шара, которые испытывают нелобовое столкновение. Прицельный параметр равен радиусу. Требуется найти угол, на который вектор скорости каждого шара повернется после соударения. Пусть у них скорости одинаковые. Модуль скорости не изменится, изменится только направление. Таким образом, вектор скорости шарика повернется на 120°.

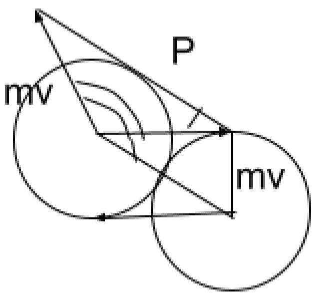

Рис. 8.8. Нелобовое столкновение

Лекция 9. Силы инерции

Задача. Маятник в лифте

Силы инерции бывают только в не инерциальных системах отсчета. Принцип эквивалентности гласит о том, что однородное гравитационное поле не отличимо от однородного поля сил инерции.

Пусть есть лифт, в котором висит математический маятник. Лифт опускается вниз равномерно с постоянным ускорением. Требуется найти период колебаний математического маятника. Необходимо перейти в систему отсчета относительно лифта.

$$g_{\text{эф}} = g - a$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

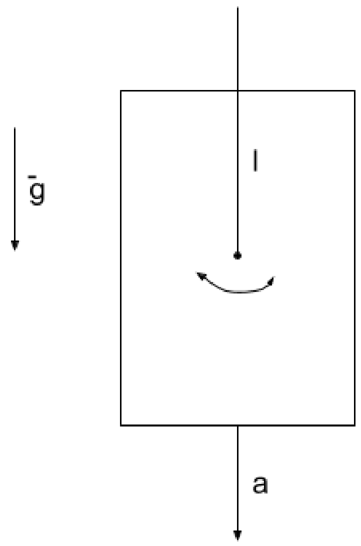

Рис. 9.1. Маятник в лифте

Задача. Грузы и тележка

Пусть есть тележка, на поверхности которой лежит груз. К грузу привязана нитка, которая перекинута через блок, закрепленный к углу тележки. К концу нитки подвешен груз. Тележку двигают с постоянным ускорением вправо. Требуется найти силу натяжения нити.

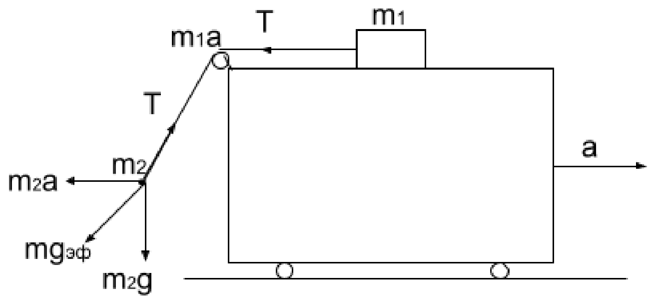

Рис. 9.2. Грузы и тележка

Необходимо перейти в систему отсчета, которая связана с тележкой.

$$g_{\text{эф}} = \sqrt{a^2+g^2}$$

Записывается второй закон Ньютона относительно неинерциальной системы отсчета:

$$m_1 a' = T + m_1 a$$

$$m_2 a' = m_2\sqrt{a^2+g^2} - T$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$$

$$a' = \frac{T}{m_1} + a = \sqrt{a^2+g^2} - \frac{T}{m_2}$$

$$T\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \sqrt{a^2+g^2} - a$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\sqrt{a^2+g^2} - a)$$

Задача. Шайба на полу цилиндре

Пусть есть полуцилиндр радиусом R на горизонтальном столе. На верхушке этого полуцилиндра находится тело. Полуцилиндр начинают двигать по столу с постоянным ускорением. Трения нет. Требуется найти высоту, на которой произойдет отрыв. Необходимо перейти в систему отсчета, которая связана с полуцилиндром. В этой системе отсчета на тело действует дополнительная сила инерции, которая совершает работу. Сперва надо найти критический угол α, при котором произойдет отрыв. Записывается второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha - N$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha) + maR\sin\alpha$$

$R\sin\alpha$ — смещение груза по горизонтали. N — сила реакции.

$$N = 0$$

$$v^2 = R(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$$

$$\frac{v^2}{2} = gR - r(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$$

$$\frac{3}{2}v^2 = gR$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$$

$$\frac{2g}{3} = g\cos\alpha - a\sin\alpha$$

$$g\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right) = a\sin\alpha$$

$$\cos\alpha > \frac{2}{3} \quad g^2\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right)^2 = a^2(1-\cos^2\alpha)$$

$$g^2\cos^2\alpha - \frac{4}{3}g^2\cos\alpha + \frac{4}{9}g^2 = a^2 - a^2\cos^2\alpha$$

$$(g^2+a^2)\cos^2\alpha - \frac{4}{3}g^2\cos\alpha + \frac{4}{9}g^2 - a^2 = 0$$

$$D = \frac{16}{9}g^4 - 4(g^2+a^2)\cdot\left(\frac{4}{9}g^2 - a^2\right) = \frac{16}{9}g^2_{\frac{16}{9}}g^4 + 4g^2a^2 - \frac{16}{9}g^2a^2 + 4a^4 =$$

$$= \frac{20}{9}g^2a^2 + 4a^4 = \frac{4a^2}{9}\left(5g^2+9a^2\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{4}{3}g^2 \pm \frac{2a}{3}\sqrt{5g^2+9a^2}}{2(g^2+a^2)} = \frac{2g^2 + a\sqrt{5g^2+9a^2}}{3(g^2+a^2)}$$

Таким образом, высоту можно найти, используя следующее выражение:

$$H = R\cos\alpha$$

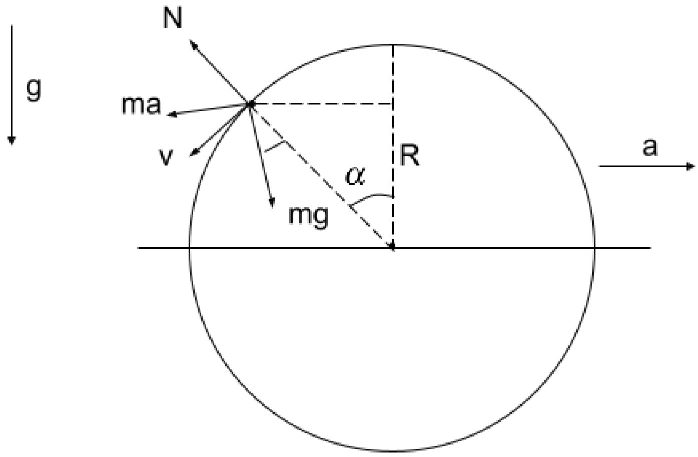

Рис. 9.3. Шайба на полу цилиндре

Задача. Маятник на катящейся вниз тележке

Пусть есть горизонтальная плоскость, на которой стоит клин. На клине установлена тележка, на которой стоит штатив. На штативе висит математический маятник. Трения нет. Тележка свободно скатывается с клина. Колебания маятника нет. Требуется найти угол с нормалью к наклонной поверхности, который составляет нить маятника. Таким образом, угол равен 0.

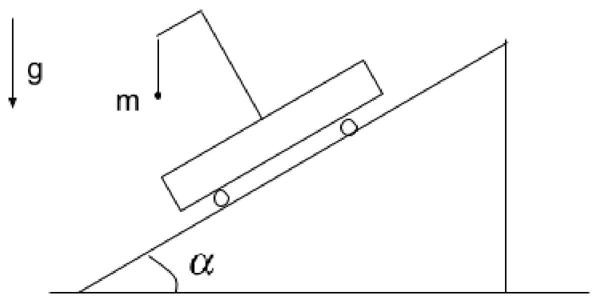

Рис. 9.4. Маятник на катящейся вниз тележке

Задача. Эффективное ускорение свободного падения

Центробежная сила инерции действует в системах отсчетах, которые вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и направлена от оси вращения.

$$F_{\text{ц.б}} = m\omega^2 r$$

На поверхности Земли направление отвеса не совпадает с направлением на центр Земли. Рассматривается груз, который подвешен на нитке вблизи поверхности Земли на некоторой широте φ. Необходимо найти эффективное ускорение свободного падения на этой широте и насколько отвес отклоняется от нормали.

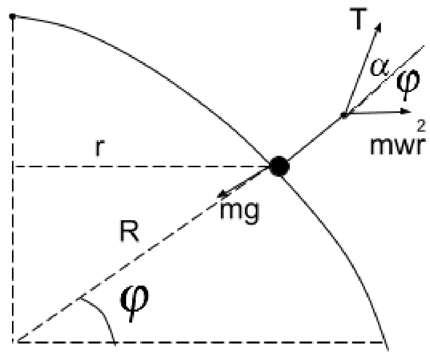

Рис. 9.5. Эффективное ускорение свободного падения

На этот груз действует гравитационная сила со стороны Земли, центробежная сила инерции вправо и сила натяжения нити. Если отвес покоится, то сумма этих трех сил равна 0. Необходимо найти угол α.

$$T\cos\alpha + m\omega^2 r\cos\varphi = mg$$

$$T\sin\alpha = m\omega^2 r\sin\alpha$$

$$r = R\cos\varphi$$

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1$$

$$T = mg - m\omega^2 R\cos^2\varphi = mg_{\text{эф}}$$

$$T\alpha = m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$g_{\text{эф}} = g - \omega^2 R\cos^2\varphi$$

Ускорения свободного падения зависит от широты и достигает максимума на полюсах, а минимальное ускорение на экваторе. На экваторе тела весят меньше.

$$\alpha = \frac{m\omega^2 R\sin 2\varphi}{2T} = \frac{\omega^2 R\sin 2\varphi}{2g_{\text{эф}}} \approx \frac{\omega^2 R\sin 2\varphi}{2g}$$

Вертикаль — это линия, вдоль которой висит отвес.

Задача. Несферичность Земли

Необходимо оценить несферичность Земли:

$$\delta = \frac{\Delta R}{R}$$

ΔR — разность экваториального и полярного радиуса. R — средний радиус Земли. Центробежная сила является консервативной. Таким образом, можно ввести потенциальную энергию:

$$U_{\text{цб}} = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$
$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{r}$$

Пусть есть жидкая планета, которая крутится. Если предположить, что в разных точках планеты потенциальная энергия разная, то элементы жидкости на поверхности стремились бы занять более энергетически выгодные положения.

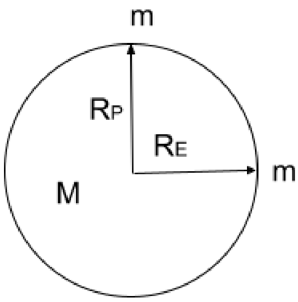

Рис. 9.6. Несферичность Земли

$$-\frac{G\Delta mM}{R_P} = -\frac{G\Delta mM}{R_E} - \frac{\Delta m\omega^2 R_E^2}{2}$$
$$\frac{\omega^2 R_E^2}{2} = GM\left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_E}\right) = \frac{R_E - R_P}{R_E R_P}GM$$
$$\Delta R = R_E - R_P$$

$$R_{cp} \approx P_E \approx R_P$$
$$\frac{\omega^2 R_E^2}{2} = \frac{GM}{R_E R_P}\cdot\Delta R$$
$$\delta = \frac{\Delta R}{R_{cp}} = \frac{\omega^2 R^3}{2gm} = \frac{U_{\text{цб}}}{U_{\text{гр}}}$$
$$\delta_{\text{теорет}} \approx \frac{1}{580}$$
$$\delta_{\text{ист}} \approx \frac{1}{297}$$

Задача. Движение Солнца по небу

Кориолисова сила инерции действует на массивные тела, имеющие скорость относительно вращающейся системы отсчета.

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}]$$

С точки зрения находящегося на Земле наблюдателя Солнце движется по небесному своду по кривой траектории. Есть силы, которые сообщают солнцу центростремительное ускорение. Необходимо найти силы, под действием которых движется Солнце с точки зрения наблюдателя. Центробежная сила направлена от центра. На Солнце также действует Кориолисова сила.

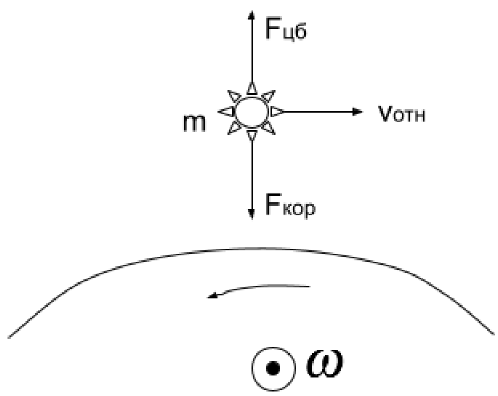

Рис. 9.7. Движение Солнца по небу

$$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R$$

$$F_{\text{кор}} = 2mv_{\text{отн}} \cdot \omega = 2m\omega^2 R$$

$$v_{\text{отн}} = \omega R$$

$$F_{\text{кор}} - F_{\text{цб}} = m\omega^2 R$$

$$m \cdot a_{\text{цб}} = F_{\text{кор}} - F_{\text{цб}}$$

Задача. Течение реки по поверхности Земли

Пусть на поверхности Земли в северном полушарии есть река, которая течет с юга на север. Необходимо найти направление силы инерции Кориолисова, которая действует на воду в реке.

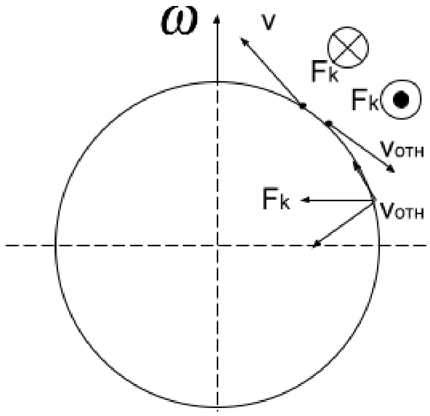

Рис. 9.8. Течение реки по поверхности Земли

Лекция 10. Сила Кориолиса

Задача. Шайба на вращающемся диске

Кориолисова сила действует только на те тела, которые движутся относительно вращающихся систем отсчета и направлена перпендикулярно вектору относительной скорости.

Пусть есть совершенно гладкий горизонтальный диск, который вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. В центре диска покоится шайба массы m, которая сообщает скорость v_0, которая направлена вдоль радиуса диска. Необходимо перейти в систему отсчета, связанную с диском. Требуется найти направление и величину Кориолисовой силы через время t после начала движения шайбы. Кориолисова сила действует только в неинерциальной системе отсчета.

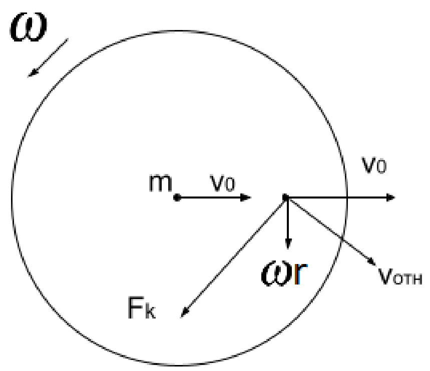

Рис. 10.1. Диск и шайба

Так как диск гладкий шайба двигается равномерно и прямолинейно. С точки зрения наблюдателя шайба будет двигаться по кривой. Относительная скорость определяет Кориолисову силу.

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_0^2 + (\omega r)^2} = \sqrt{v_0^2 + (\omega v_0 t)^2} = v_0\sqrt{1 + (\omega t)^2}$$

$$F_K = 2mv_{\text{отн}} \cdot \omega = 2mv_0\omega\sqrt{1 + (\omega t)^2}$$

Кориолисова сила направлена вниз перпендикулярно скорости. Под действием этой силы траектория шайбы будет искривляться. С точки зрения наблюдателя, который сидит на диске, будет казаться, что шайба движется по дуге, то есть траектория будет изгибаться.

Задача. Отклонение при падении

Тела, брошенные в поле силы тяжести Земли, отклоняются при падении от линии отвеса к Востоку. Пусть бросание тела происходит на Экваторе. Вводится прямоугольная декартова система координат. Предполагается, что на экваторе выстроена башня высоты h. С этой башни бросили камушек с начальной скоростью. Требуется найти расстояние и направление отклонения от линии отвеса.

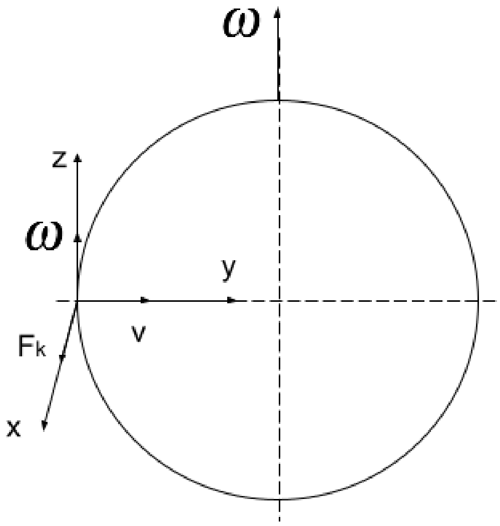

Рис. 10.2. Бросание тела на Экваторе

Записывается второй закон Ньютона для камушки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

Рассматривается приближенное решение этой задачи. При свободном падении отсутствует Кориолисова сила по направлению вдоль оси y.

$$v = gt$$

Сила Кориолисова направлена вдоль оси x, но определяется силой тяжести, которая направлена вдоль оси y.

$$m\ddot{x} = 2mv\omega = 2m\omega gt$$

$$\dot{x} = \omega gt^2$$

$$x = \frac{\omega g t^3}{3}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x = \frac{1}{3}\omega g \cdot \frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} \sim h^{\frac{3}{2}}$$

Пусть на поверхности Земли стоит башня высотой h. Тело массы m помещено на башне. Пусть поверхность Земли движется на Восток. Требуется найти скорость движения определенной точки на Земле.

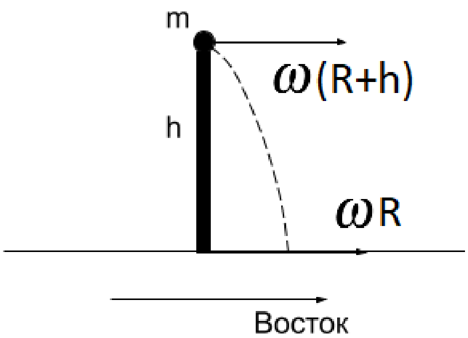

Рис. 10.3. Бросание тела с башни

С точки зрения наблюдателя брошенное тело будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $\omega(R+h)$. Тело упадет к Востоку от основания башни. Это отклонение можно оценить следующим образом:

$$\Delta X_{\text{Вост}} \approx \Delta v \cdot t_{\text{пад}} = \omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

Это уравнение решается методом последовательных приближений. Рассматривается нулевое приближение:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Необходимо найти первое приближение:

$$\vec{a} = \vec{g} + [2(\vec{v}_0 + \vec{g}t) \times \vec{\omega}] = \vec{g} + 2[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] + 2[\vec{g} \times \vec{\omega}]t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t + 2[\vec{v}_0 \times \omega t] + [\vec{g} \times \vec{\omega}]t^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + [\vec{v}_0 \times \vec{\omega}]t^2 + \frac{1}{3}[\vec{g} \times \vec{\omega}]t^3$$

Необходимо найти второе приближение:

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[(\vec{v}_0 + \vec{g}t_2[\vec{v}_0] \times \vec{\omega}t^2]) \times \vec{\omega}^2]$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t + 2[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}]t + [\vec{g} \times \vec{\omega}]t^2 + 2[[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^2 + \frac{2}{3}[[\vec{g} \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^3$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + [\vec{v}_0 \times \vec{\omega}]t^2 + \frac{1}{3}[\vec{g} \times \vec{\omega}]t^3 + \frac{2}{3}[[\vec{v}_0 \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^3 + \frac{1}{6}[[\vec{g} \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^4$$

Пусть $v_0 = 0$:

$$\Delta\vec{r} = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{1}{3}[\vec{g} \times \vec{\omega}]t^3 + \frac{1}{6}[[\vec{g} \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^4$$

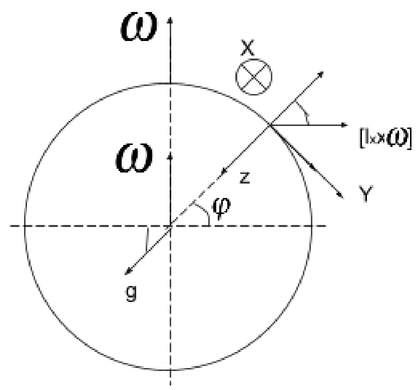

Рис. 10.4. Смещение тела на восток

$$[\vec{g} \times \vec{\omega}] = g\omega\cos\varphi\vec{e}_x$$

$$[[\vec{g} \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}] = g\omega\cos\varphi \cdot [\vec{e}_x \times \vec{\omega}] =$$

$$= \vec{g}\omega^2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_y - g\omega^2\cos\varphi \cdot \vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{r} = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{1}{3}[\vec{g} \times \vec{\omega}]t^3 + \frac{1}{6}[[\vec{g} \times \vec{\omega}] \times \vec{\omega}]t^4 =$$

$$= \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{1}{3}g\omega\cos\varphi t^3\vec{e}_x + \frac{1}{6}g\omega^2\cos\varphi\sin\varphi t^4 e^y_{\frac{1}{6}} g\omega^2\cos^2\varphi \cdot t^4\vec{e}_z$$

$$\Delta x = \frac{1}{3} g\omega \cos\varphi \cdot t^3$$

$$\Delta y = \frac{1}{6} g\omega^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot t^4 = \Delta S_{\text{экв}}$$

$$\Delta z = \frac{gt^2}{2} - \frac{1}{6} g\omega^2 \cos^2\varphi \cdot t^4$$

По вертикали тело летит дольше. Это связано с тем, что тело движется не по прямой, а по участку эллипса. Как только появляется скорость, направленная вниз, тут же возникает Кориолисова сила инерции, направленная на восток, и тело под действием этой силы двигается на восток. Так как тело смещается на восток, то тут же появляется скорость, направленная на восток, а значит составляющая сила Кориолисова, направленная к экватору.

Лекция 11. Кинематика твердого тела

Кинематика твердого тела

Кинематика твердого тела и механическое движение. Требуется найти либо распределение скоростей скоростей и ускорения по всему телу, либо определить скорость и ускорение конкретной точки на теле. Первый подход основан на принципе суперпозиции движения и представляет из себя закон сложения скоростей. Если есть твердое тело, то скорость любой точки можно выразить как:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Можно рассматривать произвольное движение твердого тела как суперпозицию движения некоторой точки O и вращательного движения. Вектор угловой скорости не зависит от выбора точки O.

Второй подход основан на понятии мгновенной оси вращения. Утверждается, что если есть твердое тело, которое совершает плоское движение, то в любой момент времени движение этого тела можно представить как чистое вращение вокруг мгновенной оси вращения. Эта ось постоянно перемещается либо в пространстве, либо относительно твердого тела и может менять положение в пространстве.

Пусть есть твердое тело, на которое нанесены белые точки. Пусть это тело сфотографировали. Невозможно установить если твердое тело вращается вокруг настоящей или мгновенной оси по одной фотографии. Таким образом, необходимо сделать 2 фотографии через короткий промежуток времени или одну с большой выдержкой.

Если провести из оси радиус вектор в любую точку твердого тела, то скорость любой точки твердого тела будет направлена перпендикулярно по отношению к этому вектору. Чтобы найти мгновенную ось вращения, необходимо построить перпендикуляры к векторам скоростей, которые пересекаются в точке, лежащей на мгновенной оси.

Задача. Вращение колеса

Пусть есть колесо, насаженное на ось, которая проходит через центр этого колеса. Рассматривается диаметр колеса. Известно, что колесо вращается. Точка A имеет скорость v_A, а точка B имеет скорость v_B. Расстояние AB равен l. Требуется найти радиус колеса и угловую скорость его вращения.

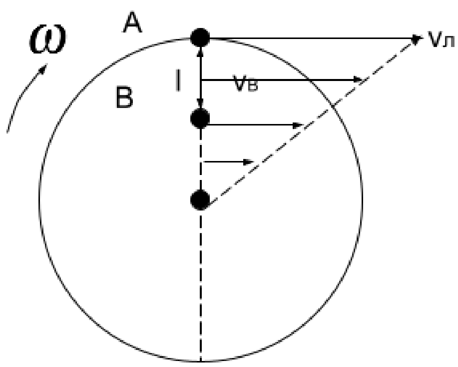

Рис. 11.1. Колесо, насаженное на ось

$$v_A = \omega R$$

$$v_B = \omega(R - l)$$

$$v_B = v_A - \omega l$$

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{l}$$

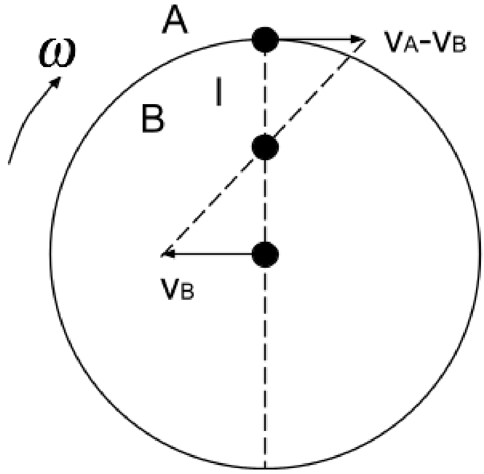

Рис. 11.2. Колесо, насаженное на ось

$$v_A - v_B = \omega l$$

$$v_B = \omega(R - l)$$

Задача. Цилиндр между плоскостями

Пусть между двумя параллельными плоскостями зажат цилиндр радиуса R. Известно, что верхняя плоскость движется со скоростью v_1, а нижняя движется со скоростью v_2. Требуется найти скорость точки O, угловую скорость вращения и положение мгновенной оси вращения.

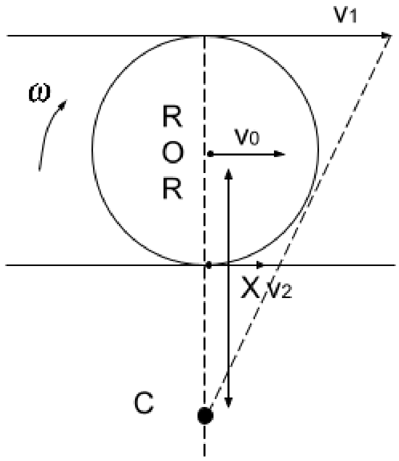

Рис. 11.3. Цилиндр между плоскостями

Эту задачу можно решить тремя способами. рассматривается первый подход, где пользуются законом сложения скоростей. Скорость любой точки цилиндра может быть представлена как сумма скорости поступательного движения оси цилиндра и вращательного движения относительно оси цилиндра.

$$v_1 = v_O + \omega R$$

$$v_2 = v_O - \omega R$$

$$v_O = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$\omega = \frac{v_1 - v_2}{2R}$$

Положение мгновенной оси необходимо найти следующим образом:

$$v_C = v_O - \omega x = 0$$

x — расстояние от точки O до мгновенной оси вращения.

$$x = \frac{v_O}{\omega} = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{2R}{v_1 - v_2} = R\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}$$

Рассматривается второй подход решения задачи, где сначала необходимо построить мгновенную ось.

$$v_O = \omega x$$

$$v_2 = \omega(x - R)$$

$$v_1 = \omega(x + R)$$

Задача: Качение катушки

Пусть есть катушка, которая состоит из двух частей: внешняя часть катушки имеет радиус R, а внутренняя часть — радиус r. На внутреннюю часть катушки намотана нить, которая натянута в горизонтальном направлении со скоростью u. Требуется найти скорость оси катушки.

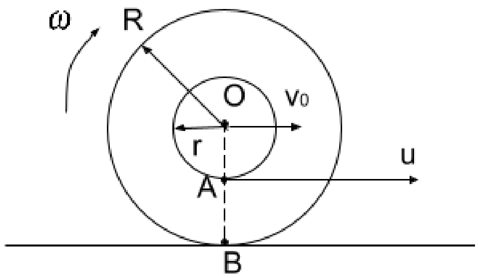

Рис. 11.4. Катушка

Рассматривается первый подход решения задачи, где скорость любой точки катушки можно представить как суперпозицию поступательного движения оси катушки с искомой скоростью v_O и вращательного движения катушки вокруг оси, которая проходит через точку O. Скорость точки B равна 0, потому что цилиндр катится без проскальзывания.

$$v_B = v_O - \omega R = 0$$

$$v_A = v_O - \omega r = u$$

$$v_O - \frac{v_O}{R} r = u$$

$$v_O = \frac{uR}{R - r} > 0$$

Таким образом, катушка катится вправо. Рассматривается второй подход решения задачи с точки зрения мгновенной оси вращения. Точка B — мгновенная ось вращения.

$$v_O = \omega R$$

$$u = \omega(R - r)$$

Задача: Катушка и нить под углом к горизонту

Пусть есть катушка, на которую намотана нить в центральной части. Нить направлена под углом α к горизонту. Задано отношение радиусов:

$$\frac{R}{r} = n$$

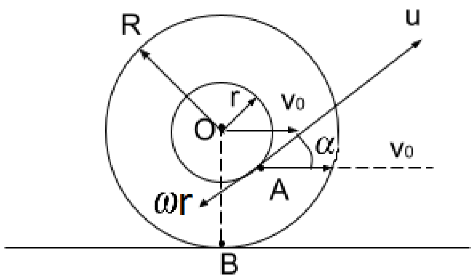

Рис. 11.5. Катушка с ниткой под углом α

Требуется найти скорость оси катушки:

$$v_O = \omega R$$

$$u = v_O \cos\alpha - \omega r$$

$$u = v_O \cos\alpha - v_O \frac{r}{R} = v_O \left(\cos\alpha - \frac{1}{n}\right) = \frac{v_O(n\cos\alpha - 1)}{n}$$

$$v_O = \frac{nu}{n\cos\alpha - 1}$$

$$v_0 > 0, \quad n\cos\alpha > 1, \quad \cos\alpha > \frac{r}{R}$$

Задача: Вращение стерженя

Пусть по гладкому горизонтальному столу скользит жесткий стержень длины L. Известно, что скорость одного конца этого стержня равна v_1 и направлена под углом α, а второй конец стержня имеет скорость v_2. Требуется найти угловую скорость вращения стержня в данный момент времени. Рассматривается первый подход. Предполагается, что движение каждой точки равна сумме поступательного движения центра стержня и вращательного движения вокруг оси, которое проходит через ось. В этой задаче используется второй подход. Необходимо построить мгновенную ось вращения.

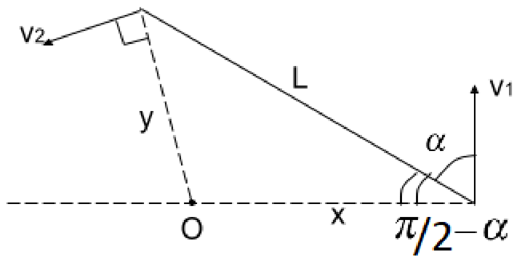

Рис. 11.6. Стержень

$$v_1 = \omega x$$

$$v_2 = \omega y$$

$$y^2 = x^2 + L_2^2 Lx \sin\alpha$$

$$\frac{v_2^2}{\omega^2} = \frac{v_2^2}{\omega^2} + L^2 - 2L\frac{v_1}{\omega}\sin\alpha$$

$$L^2\omega^2 - 2Lv_1\sin\alpha\cdot\omega v_1^2 - v_2^2 = 0$$

$$D = 4L^2v_1^2\sin^2\alpha - 4L^2(v_1^2 - v_2^2) = 4L^2(v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{2Lv_1\sin\alpha \pm 2L\sqrt{v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha}}{2L^2} = \frac{1}{L}\left(v_1\sin\alpha \pm \sqrt{v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha}\right)$$

Задача: Скольжение пластинки

Пусть по столу скользит квадратная пластинка, у которой есть 4 угла. Известно, что точка C имеет в некоторый момент времени скорость v и угол α. Требуется найти скорость точки M, которая находится в середине AB.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\vec{v}_A \perp \vec{v}_B$$

Эта задача решается вторым подходом так как неизвестны направления скоростей. Поэтому необходимо построить мгновенную ось вращения.

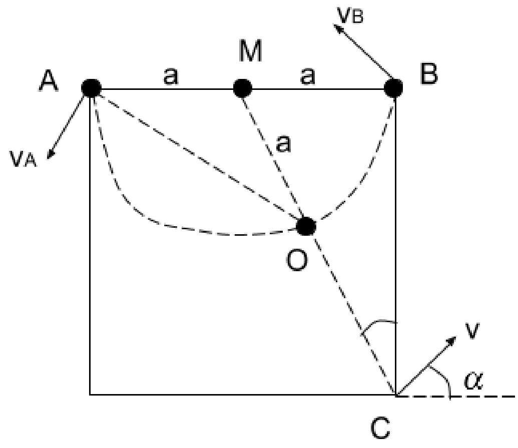

Рис. 11.7. Квадратная пластинка

Точки A и B лежат на окружности. Треугольник, построенный на окружности и опирающийся на диаметр, является прямоугольным. Построив мгновенную ось вращения можно выбрать направление скоростей.

$$v = \omega \cdot OC = \omega \cdot (\sqrt{5} - 1)a$$

$$v_m = \omega \cdot a = \frac{v}{\sqrt{5}-1} = v\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$v_m = \frac{v}{\sqrt{5}+1} = v\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Задача: Кривошипный механизм

Пусть есть неподвижно закрепленная большая шестеренка. По внутренней поверхности может кататься маленькая шестеренка. Центры этих шестеренок соединены жестким стрежнем. Известны радиусы R и r, стержень вращают с угловой скоростью Ω. Требуется найти абсолютную угловую скорость внутреннего колеса и угловую скорость относительно стержня. Стержень называется кривошипом.

$$v_A = \Omega R + \omega r = 0$$

$$\omega_{\text{отн}} = -\frac{R}{r}\Omega$$

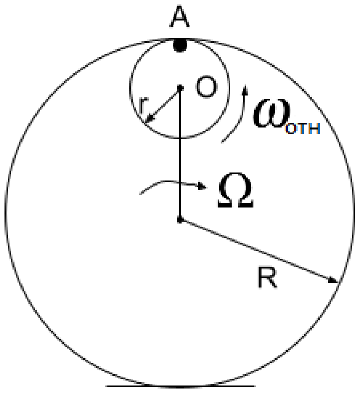

Рис. 11.8. Кривошипный механизм

$$\omega_{\text{абс}} = \Omega + \omega_{\text{отн}} = \Omega - \frac{R}{r}\Omega = \Omega\frac{R-r}{r}$$

$$R \approx r \quad \omega_{\text{абс}} \to 0$$

Такой механизм можно использовать в качестве редуктора. Эту задачу можно решить другим способом:

$$v_A = v_O + \omega r = \Omega(R-r) + \omega r = 0$$

$$\omega_{\text{абс}} = -\Omega\frac{R-r}{r}$$

Задача: Мгновенная ось вращения диска

Пусть есть диск, который вращается с угловой скоростью ω_1. На этом диске закреплен маленький диск, который вращается в ту же сторону с угловой скоростью ω_2. Известно расстояние между центрами дисков. Требуется найти расположение мгновенной оси вращения маленького диска и угловую скорость вокруг этой мгновенной оси вращения.

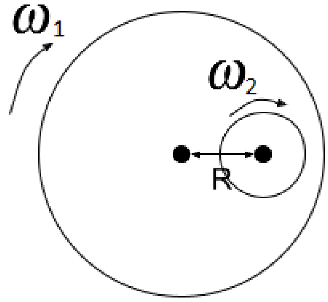

Рис. 11.9. Мгновенная ось вращения диска

Лекция 12. Момент инерции

Задача: Мгновенная ось вращения диска

Пусть есть диск, который вращается с угловой скоростью ω_1. На этом диске закреплен маленький диск, который вращается в ту же сторону с угловой скоростью ω_2. Известно расстояние между центрами дисков. Требуется найти расположение мгновенной оси вращения маленького диска и угловую скорость вокруг этой мгновенной оси вращения.

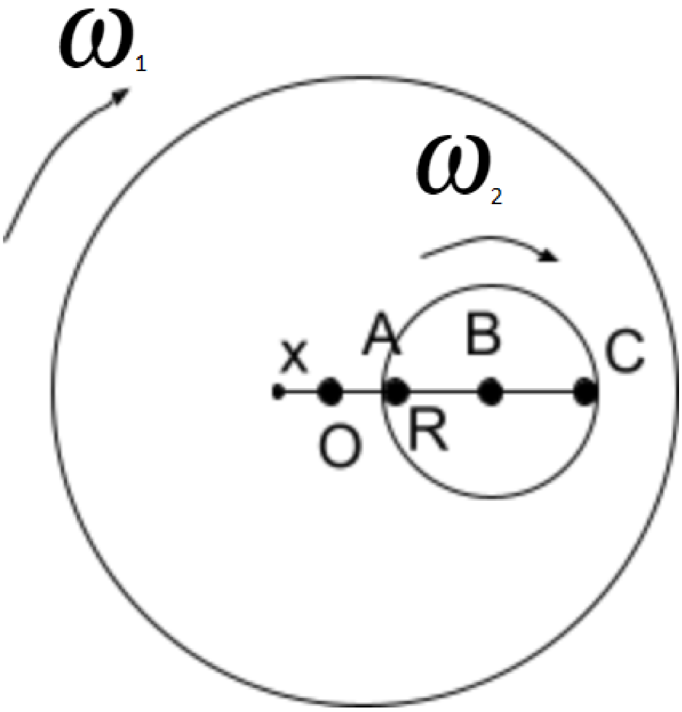

Рис. 12.1. Мгновенная ось вращения диска

Движение плоское, поэтому мгновенная ось должна находится перпендикулярно плоскости. Пусть X —мгновенная ось.

$$v_B = \omega_1 R = \omega(R - X)$$

$$v_C = \omega_1(R + r) + \omega_2 r = \omega(R + r - X)$$

$$v_A = \omega_1(R - r - \omega_2 r) = \omega(R - r - X)$$

$$v_C = \omega_1 R + \omega_1 r + \omega_2 r = \omega + \omega(R - X)$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_1 R = (\omega_1 + \omega_2)(R - X) = \omega_1 R - \omega_1 X + \omega_2 R - \omega_2 X$$

$$X = \frac{\omega_2 R}{\omega_1 + \omega_2}$$

Задача: Качение конуса

Пусть по поверхности горизонтального стола катается прямой круговой конус высоты h и радиусом основания r. Конус катается по столу так, что его вершина все время находится в одной точке. Катится он без проскальзывания. Центр основания конуса двигается со скоростью v_C. Требуется найти угловую скорость и угловое ускорение конуса.

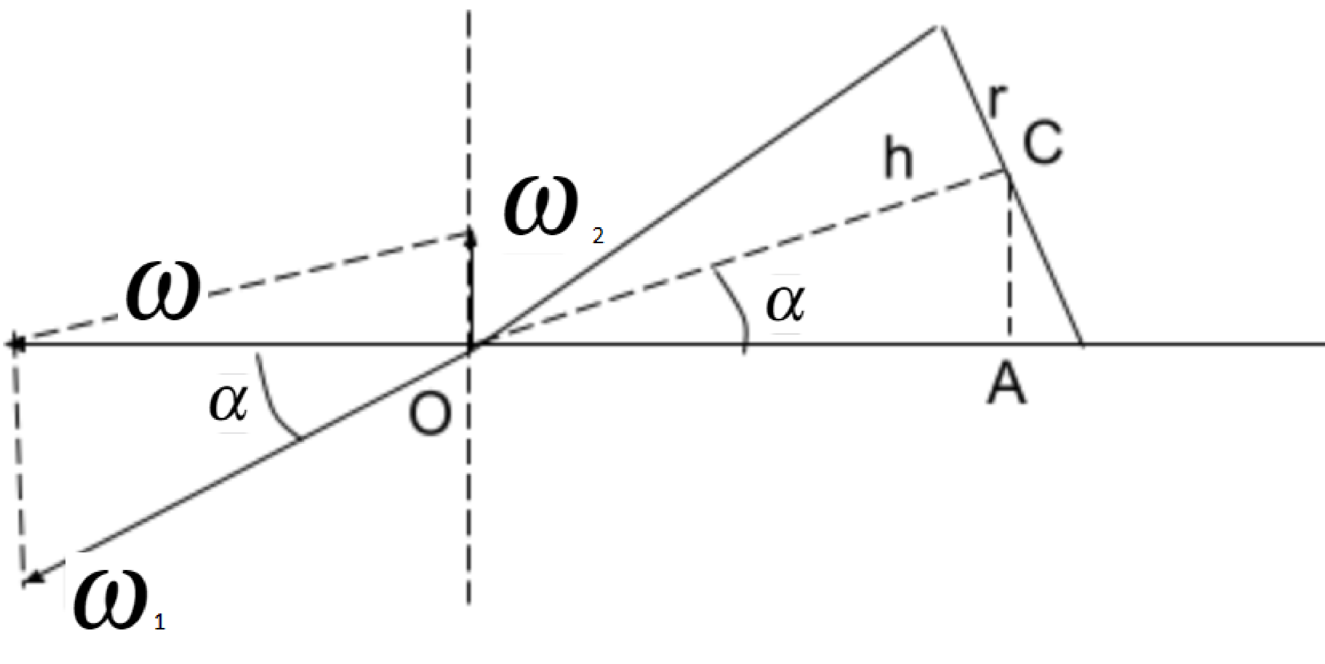

Рис. 12.2. Движение твердого тела в пространстве

Конус участвует одновременно в двух вращательных движениях: вокруг вертикальной оси и вокруг оси, которая совпадает с осью конуса. Соответственно, можно добавить 2 угловые скорости: одна направленная вдоль вертикали, а другая вдоль оси конуса. Суммарная угловая скорость направлена вдоль мгновенной оси вращения.

$$v_C = \omega_2 \cdot OA = \omega_2 \cdot h\cos\alpha = \omega_2 \cdot h \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$\omega_2 = \frac{v_C\sqrt{r^2+h^2}}{h^2}$$

$$\omega = \omega_2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{v_C\sqrt{v^2+h^2}}{h^2} \cdot \frac{h}{2}$$

Угловое ускорение связано с направлением угловой скорости.

$$d\omega = \omega d\varphi = \omega\omega_2 dt$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega\omega_2$$

Осевой момент инерции

Чтобы найти осевой момент инерции, необходимо разбить тело на маленькие элементы массы dm, найти расстояние $r_\perp$.

$$dJ = r_\perp^2 dm$$

$$J = \int r_\perp^2 dm = \int r^2 dm$$

Если тело состоит из отдельных материальных точек, то интегрирование превращается в суммирование:

$$J = \sum m_i r_i^2$$

Если тело объемное:

$$J = \int r^2 \rho dV$$

Если тело плоское:

$$J = \int r^2 \sigma dS$$

Если тело протяженное:

$$J = \int r^2 \lambda dX$$

С помощью интегрирования можно вычислить осевой момент инерции любого тела. Свойства осевой инерции следующие:

1) Осевой момент инерции имеет размерность:

$$J = kmL^2$$

2) Если есть 3 оси, которые взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке, то можно ввести понятие момент инерции относительно точки пересечения этих осей:

$$\theta = \sum m_i R_i^2$$

$$J_x + J_y + J_z = 2\theta$$

3) Пусть есть плоская пластинка и оси координат расположены так, что оси x и y лежат в плоскости пластинки, а ось z перпендикулярна пластинке.

$$J_z = \theta \to J_z = J_x + J_y$$

Если тело имеет произвольную форму:

$$\theta \geqslant J_z$$

$$2\theta \geqslant 2J_z$$

$$J_x + J_y + J_z \geqslant 2J_z$$

$$J_x + J_y \geqslant J_z$$

Теорема 12.1. *Теорема Гюйгенса - Штейнера. Рассматривается произвольное тело, которое проткнуто насквозь двумя осями, которые параллельны друг другу: одна ось проходит через центр масс, а вторая проходит сбоку. Теорема Гюйгенса — Штейнера гласит о том, что если масса этого тела* m*б а расстояние между осями равно* a*, то:*

$$J_O = J_C + ma^2$$

Таким образом, осевой момент инерции можно вычислить без интегрирования.

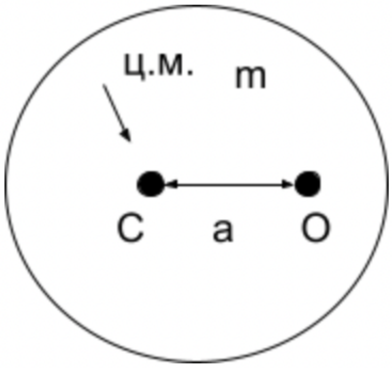

Рис. 12.3. Теорема Гюйгенса — Штейнера

Задача. Момент инерции однородного стержня

Пусть есть тонкая однородная палка массы m и длины L. Необходимо найти осевой момент инерции относительно оси, которая проходит через центр этой палки. Можно воспользоваться первым свойством:

$$J = kmL^2 = 2\left(k\frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)$$

$$k = \frac{k}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{3k}{4} = \frac{1}{16} \quad k = \frac{1}{12}$$

$$J = \frac{1}{12}mL^2$$

Задача. Момент инерции однородного диска

Пусть есть диск массы m и радиусом r. По нему масса распределена равномерно. Требуется найти момент инерции относительно оси, которая перпендикулярна плоскости диска. Необходимо разбить диск на бесконечно тонкие кольца. Вводится поверхностная плоскость:

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

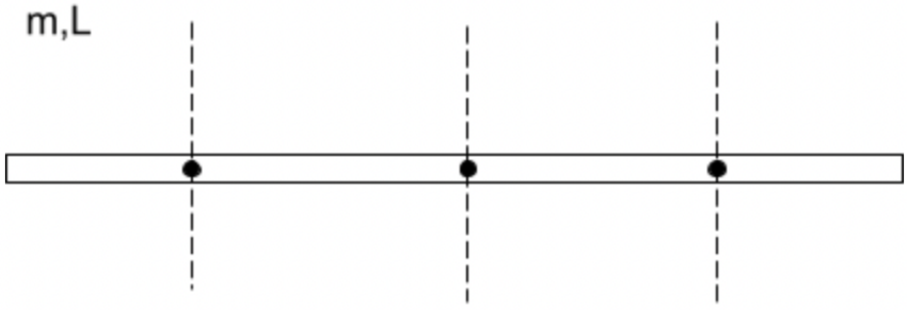

Рис. 12.4. Момент инерции тонкой однородной палки

$$dJ = r^2 dm = r^2 \sigma dS = r^2 \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr$$

$$J = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\pi R^4 \frac{m}{\pi R^2} = \frac{mR^2}{2}$$

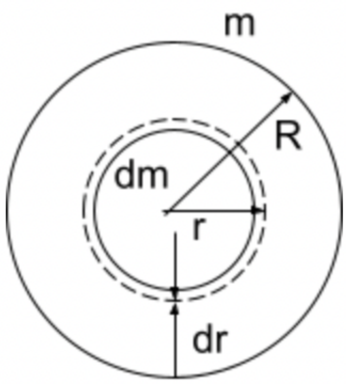

Рис. 12.5. Момент инерции однородного диска

Задача. Момент инерции квадрата

Пусть есть квадрат со стороной a. Требуется найти момент инерции относительно оси, которая проходит через середину квадрата перпендикулярно ее плоскости.

$$J_0 = \frac{ma^2}{6}$$

Рассматривается момент инерции прямоугольника относительно оси, проходящей через центр прямоугольника:

$$J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

Пусть есть однородный шар с радиусом R, тогда момент инерции однородного шара записывается следующим образом:

$$J = \frac{2}{5}mR^2$$

Пусть есть симметричный эллипсоид с полуосями A, B, C. Для начала необходимо сжать шар в направлении вдоль оси. Тогда шар превратится в диск радиусом a и момент инерции будет таким же:

$$J = \frac{2}{5}ma^2$$

Рассматривается диск сверху, тогда момент инерции записывается следующим образом:

$$J = \frac{1}{5}ma^2$$

Диск сжимается еще раз и превращается в эллипс, и момент инерции эллипса относительно вертикальной оси записывается следующим образом:

$$J = \frac{1}{5}ma^2$$

Момент инерции относительно горизонтальной оси:

$$J = \frac{1}{5}mb^2$$

Одна ось получается из другой путем переобозначения.

$$J = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$$

Если растянуть эллипс, то получится эллипсоид.

Задача. Момент инерции стержня

Пусть есть ось, вокруг которой вращается однородный стержень массы m и длины l. Ось составляет угол α со стержнем. Требуется найти момент инерции относительно этой оси. Выбирается элемент массы dm.

$$dJ = r^2 dm = X^2 \sin^2\alpha \cdot \lambda dx$$

$$J = \lambda \sin^2\alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} X^2 dX = \lambda \sin 62\alpha \cdot \frac{X^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{l} \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} m l^2 \sin^2\alpha$$

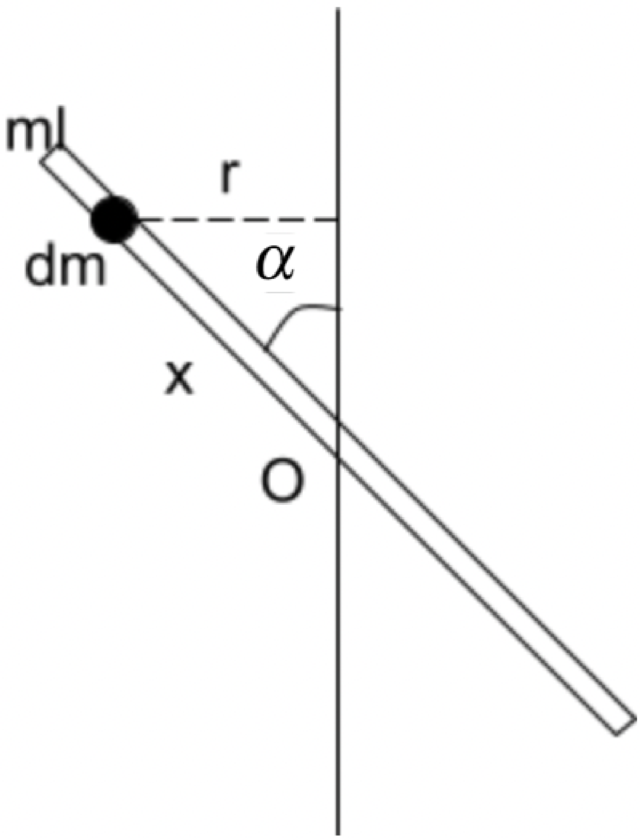

Рис. 12.6. Момент инерции стержня

Необходимо найти величину и направление вектора момента импульса стрежня, если вращение происходит с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

$$\vec{L} \stackrel{?}{=} J\vec{\omega}$$

Лекция 13. Динамика твердого тела

Задача. Вектор момента импульса

Пусть есть ось, вокруг которой вращается однородный стержень массы m и длины l. Ось составляет угол α со стержнем. Требуется найти момент инерции относительно этой оси. Выбирается элемент массы dm.

$$dJ = r^2 dm = X^2 \sin^2\alpha \cdot \lambda dx$$

$$J = \lambda \sin^2\alpha \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} X^2 dX = \lambda \sin^2\alpha \cdot \frac{X^3}{3}\Bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{l} \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2\alpha$$

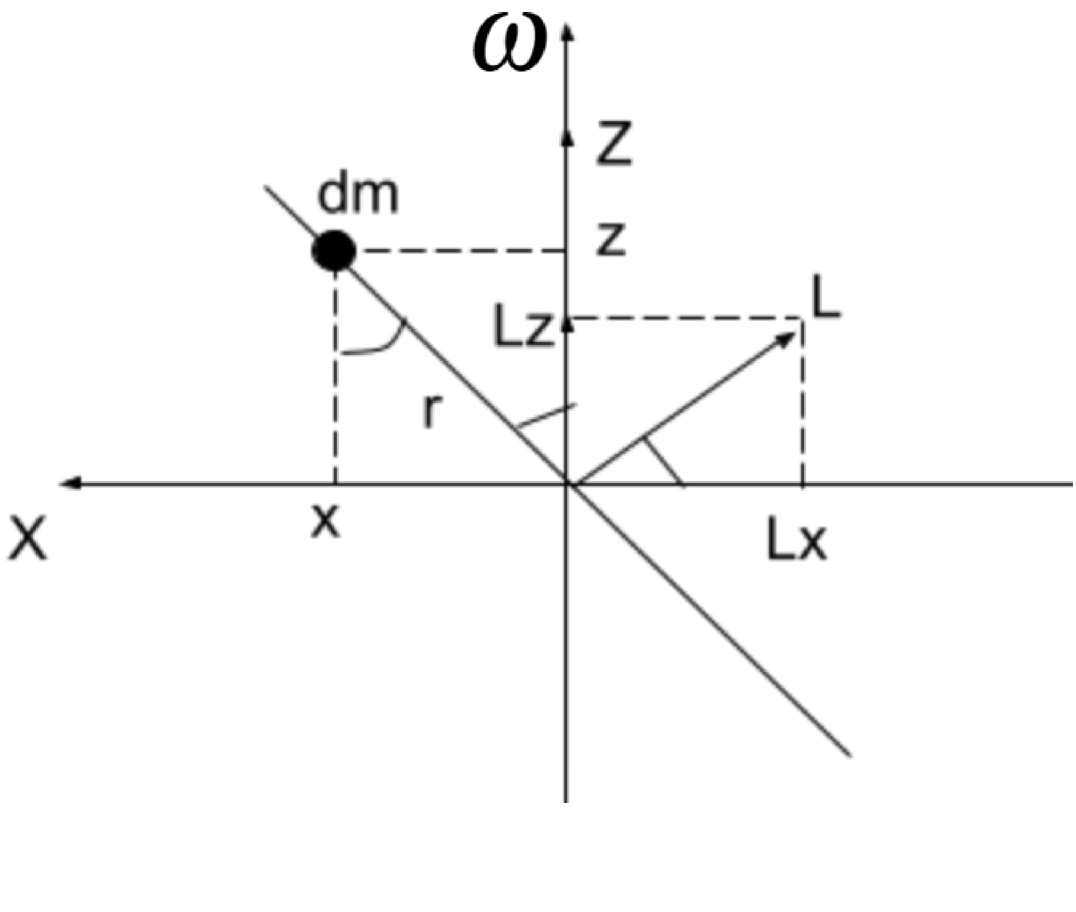

Рис. 13.1. Момент инерции стержня

Необходимо найти величину и направление вектора момента импульса стрежня, если вращение происходит с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

$$\vec{L} \stackrel{?}{=} J\vec{\omega}$$

$$x = 2\sin\alpha$$

$$z = \cos\alpha$$

$$y = 0$$

$$\vec{\omega} = \{0,;0;\omega\}$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z = J_{xz}\omega = -\int xzdm\cdot\omega = -\omega\lambda\int(r\sin\alpha)(r\cos\alpha)dr =$$

$$= -\omega\lambda\sin\alpha\cos\alpha\frac{r^3}{3}\bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = -\omega\frac{m}{l}\cdot\sin\alpha\cos\alpha\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{l^3}{8} = -\frac{1}{12}ml^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\omega$$

$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z = J_{yz}\omega = -\int yzdm\cdot\omega = 0$$

$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z = J_{zz}\omega = \int(x^2+y^2)dm\cdot\omega = \int x^2dm\cdot\omega = \frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha\cdot\omega$$

$$L = \sqrt{L_x^2+L_y^2+L_z^2} = \frac{1}{12}ml^2\sin\alpha\cdot\omega$$

$$L_x = -L\cdot\cos\alpha$$

$$L_z = L\sin\alpha$$

$$dL = L_x\cdot\omega dt$$

$$\frac{dL}{dt} = M = L_x\cdot\omega = J_{xz}\cdot\omega^2$$

Чтобы ось вращения была свободной, необходимо, чтобы ось была направлена так, что соответствующие центробежные моменты обращались в 0. Уравнение моментов записывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Пусть: $y = 0$, $z = 0$. Тогда:

$$\vec{\omega} = \{\omega\cos\alpha; 0; \omega\sin\alpha\}$$

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z = J_{xx}\omega_x = \int (y^2+z^2)dm \cdot \omega_x = 0$$

$$J_{xy} = J_{yx} = 0$$

$$J_{xz} = J_{zx} = 0$$

$$J_{yz} = J_{zy} = 0$$

$$L_y = J_{yy}\omega_y = 0$$

$$L_z = J_{zz}\omega_z = \int (x^2+y^2)dm \cdot \omega \sin\alpha = \int x^2 dm \cdot \omega \sin\alpha = \frac{1}{12} ml^2 \omega \sin\alpha$$

$$L = |L_z|$$

Рассматривается следующее соотношение:

$$L_z = J_{zz} \cdot \omega$$

$$L_z = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2\alpha \cdot \omega$$

Если есть ось, вокруг которой вращается твердое тело, то проекция вектора момента импульса на эту ось равна произведению осевого момента инерции относительно оси на угловую скорость.

Задача. Машина Атвуда с тяжелым блоком

Пусть есть машина Атвуда и ступенчатый блок. На внутреннюю и на внешнюю части цилиндра намотаны нити с грузами. Трения нет. Требуется найти ускорения грузов.

Решение такой задачи начинается с выбора оси и положительного направления вращения. Дальше необходимо определить действующие силы. Вдоль одной нити сила натяжения не меняется. Записывается уравнение движения:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$$

Записывается уравнение моментов грузов:

$$J\varepsilon = T_2 R - T_1 r$$

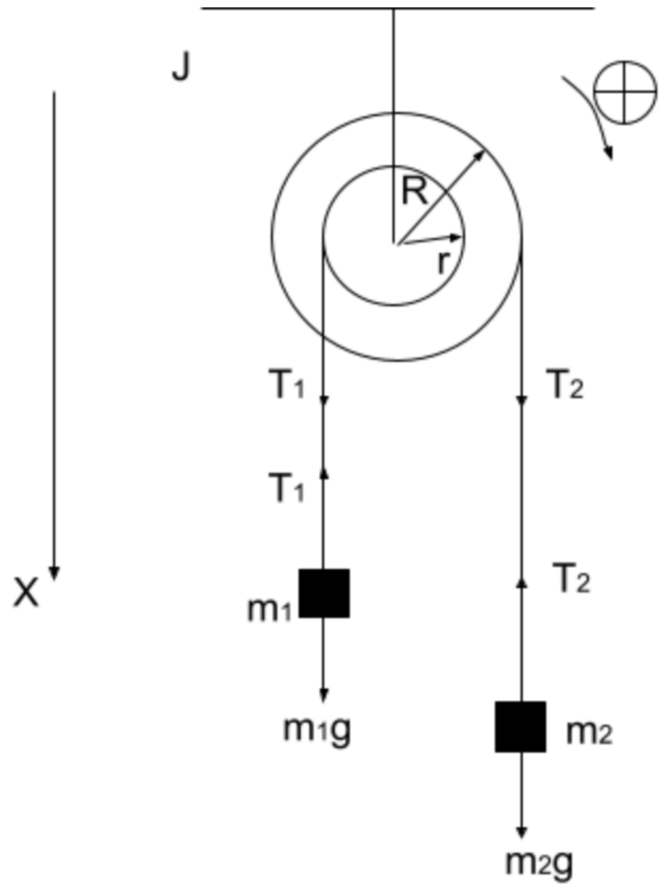

Рис. 13.2. Вращение вокруг фиксированной оси

Записывается уравнение кинематической связи, когда блок повернулся в положительном направлении на угол $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x_2}{R} = -\frac{\Delta x_1}{r}$$

$$a_1 = -\varepsilon r$$

$$a_2 = \varepsilon R$$

$$T_1 = m_1 g + m_1 \varepsilon r$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 \varepsilon R$$

$$J\varepsilon = m_2 g R - m_2 \varepsilon R - m_1 g r - m_1 \varepsilon r^2$$

Таким образом, угловое ускорение записывается следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{(m_2R - m_1r)g}{J + m_1r^2 + m_2R^2}$$

$$a_2 = \frac{(m_2R - m_1r)gR}{J + m_1r^2 + m_2R^2}$$

Пусть $r = R$. Тогда ускорение записывается следующим образом:

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1)gR^2}{J + (m_1 + m_2)R^2} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{J}{R^2}} \cdot g$$

Условие невесомости блока выглядит следующим образом:

$$\frac{J}{R^2} << m_1 + m_2$$

$$\frac{0,3MR^2}{R^2} << 2m \to M << 7m$$

Задача. Вращающаяся монета

Пусть есть шероховатый стол, над которым раскрутили монету вокруг оси и потом бросили на стол. Требуется найти время, через которое вращение монеты закончится, если коэффициент трения между столом и монетой равен μ.

Необходимо найти суммарный момент сил трения. Рассматривается маленький элемент монеты в виде тонкого кольца.

$$dM_{\text{тр}} = \mu dmg \cdot r = \mu gr \cdot \sigma \cdot 2\pi rdr$$

$$M_{\text{тр}} = 2\pi\sigma\mu\int_0^R r^2dr = 2\pi\sigma\mu g \cdot \frac{R^3}{3} = 2\pi\sigma\frac{m}{\pi R^2}\mu g\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\mu mgR$$

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \varepsilon = M_{\text{тр}}$$

$$\omega_k = \omega_O - \varepsilon\Delta t = 0$$

$$\frac{mR^2}{2}\varepsilon = -M_{\text{тр}}$$

$$\omega_k = \omega_O + \varepsilon\Delta t = 0$$

$$\frac{mR^2}{2}\varepsilon = \frac{2}{3}\mu mgR \to \varepsilon = \frac{4}{3}\frac{\mu g}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta t}$$

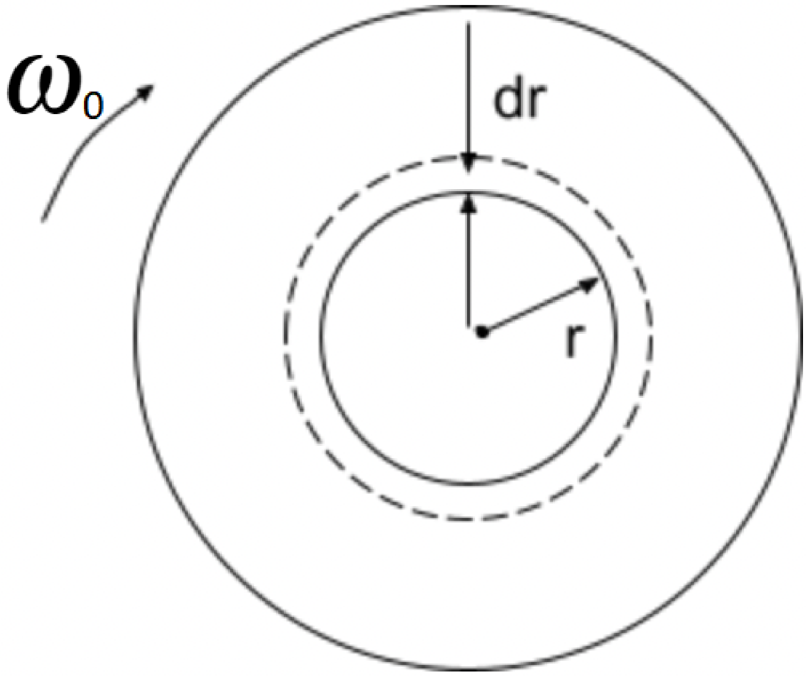

Рис. 13.3. Вращение монеты

Задача. Цилиндр на наклонной плоскости

Пусть есть наклонная плоскость с углом α, с которой скатывается цилиндр. Цилиндр скатывается без проскальзывания, движение плоское. Требуется найти ускорение оси цилиндра. Необходимо выбрать положительное направление оси вращения. Определяются действующие силы.

$$ma = mg\sin\alpha - F$$

$$\frac{mR^2}{2}\varepsilon = FR$$

$$a = \varepsilon R$$

$$\frac{mR}{2} \cdot \frac{a}{R} = F$$

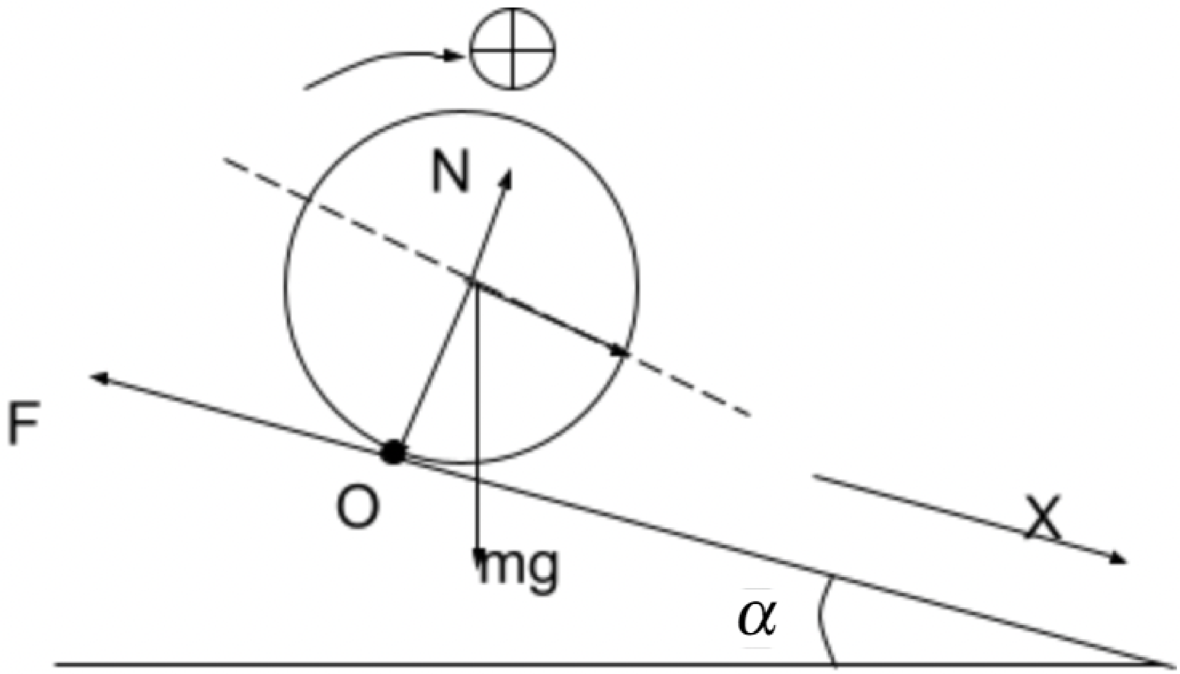

Рис. 13.4. Цилиндр на наклонной плоскости

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{ma}{2}$$
$$\frac{3}{2}a = g\sin\alpha$$
$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$F = \frac{ma}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{2}{3}g\sin\alpha \leqslant \mu mg\cos\alpha$$
$$\mu \geqslant \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$$

Эту задачу можно решить рассуждая о мгновенной оси вращения. Рассматривается запись уравнений моментов относительно мгновенной оси:

$$J_O\cdot\varepsilon = M_O$$

$$\frac{3}{2}mR^2 \cdot \varepsilon = mg\sin\alpha \cdot R$$

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Лекция 14. Динамика твердого тела

Задача. Проскальзывание однородного цилиндра

Пусть есть горизонтальный стол, по которому катится без проскальзывания однородный цилиндр. Чтобы он катился сверху на цилиндр намотана нить, которая перекинута через блок и на конце нити висит груз. Требуется найти ускорение груза и ускорение оси цилиндра. Отсутствует трение в оси блока и сопротивление воздуха. Блок весомый.

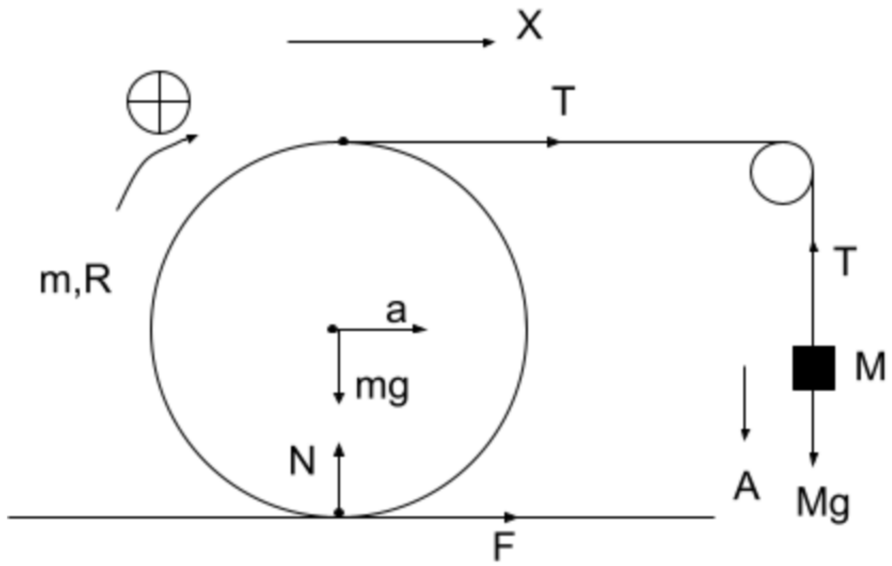

Рис. 14.1. Проскальзывание однородного цилиндра

Выбирается направление оси и положительное направление вращения и определяются действующие силы. Суммарный момент сил должен быть таким, чтобы раскручивать цилиндр. Пусть F направлена вправо. Тогда уравнение движения записывается следующим образом:

$$MA = Mg - T$$

$$ma = T + F$$

Записывается уравнение моментов:

$$\frac{mR^2}{2}\varepsilon - TR - FR$$

Уравнение кинематической связи записывается следующим образом:

$$A = 2a = 2\varepsilon R$$

$$2M\varepsilon R = mg - T$$

$$m\varepsilon R = T + F$$

$$\frac{m\varepsilon R}{2} = T - F$$

Если сложить три уравнения, получится:

$$\frac{3}{2}m\varepsilon R = 2T$$

$$T = \frac{3}{4}m\varepsilon R = \frac{3}{4}ma$$

$$2Ma = Mg - \frac{3}{4}ma$$

$$a = \frac{Mg}{2m + \frac{3}{4}m} = \frac{4Mg}{8M + 3m}$$

Направление F можно найти следующим способом:

$$F = T - \frac{ma}{2} = \frac{3}{4}ma - \frac{1}{2}ma = \frac{1}{4}ma = \frac{mMg}{8M + 3m} > 0$$

Если заранее неизвестны направления сил, можно писать предположения. Необходимо найти коэффициент трения, при котором не будет проскальзывания.

$$\frac{mMg}{8M + 3m} \leqslant \mu mg$$

Эту задачу можно решить в общем виде. Требуется найти соотношение параметров, при котором сила трения сцепления будет направлена вправо, влево или равенство сил обратиться в ноль. При этом необходимо помнить, что $r > R$ или $r < R$.

Задача. Скорость цилиндра

Пусть есть однородный цилиндр, который скользит по абсолютно гладкой поверхности, двигаясь поступательно без вращения. Потом попадает на участок поверхности, на котором есть трение. Под действием силы трения цилиндр раскручивается. Требуется найти скорость цилиндра после раскручивания.

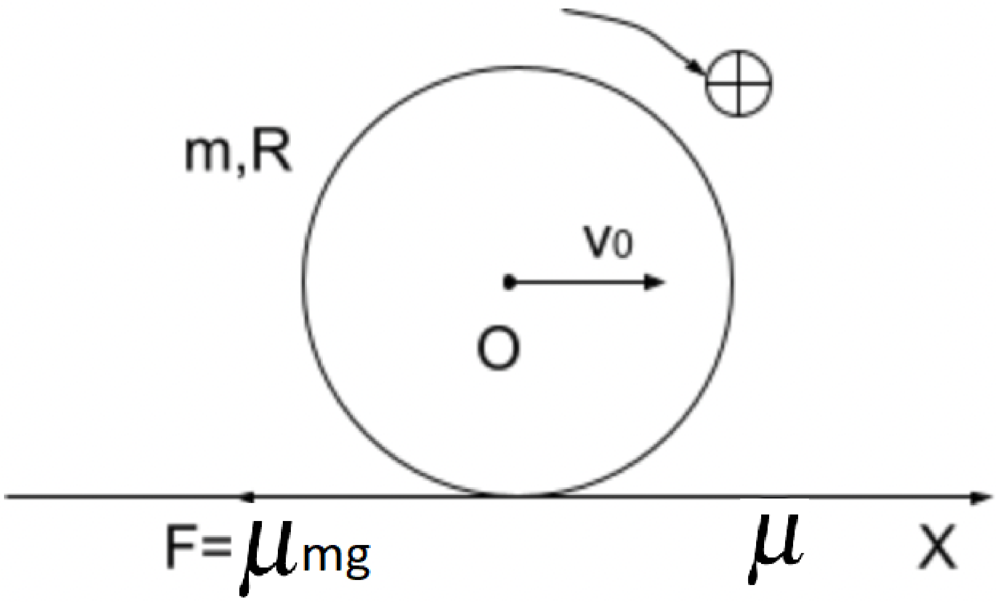

Рис. 14.2. Скорость цилиндра

Выбирается направление оси и положительное направление вращения. Определяются действующие силы.

$$F = \mu mg$$

Записывается уравнение движения:

$$m\frac{dv}{dt} = -F = -\mu mg$$

$$\frac{mR^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = FR = \mu mgr$$

$$v = v_0 - \mu gt$$

$$\omega = \frac{2\mu g}{R}t$$

Сначала необходимо найти, когда прекратится проскальзывание.

$$v = \omega R$$

$$v_0 - \mu g t_0 = 2\mu g t_0$$

$$t_0 = \frac{v_0}{3\mu g}$$

$$v = v_0 - \mu g t_0 = \frac{2}{3}v_0$$

В данном случае можно усмотреть:

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = FR$$

$$mR\frac{dv}{dt} + J\frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$mvR + J\omega = const$$

Записывается интеграл движения:

$$mv_0R = mv_kR + J\omega_k$$

$$v_k = \omega_k R$$

$$mv_0R = mv_kR + \frac{mR^2}{2}\frac{v_k}{R}$$

$$v_0 = \frac{3}{2}v_k \to v_k = \frac{2}{3}v_0$$

Такой способ решения имеет характерный недостаток: состояние системы находится только в самом конце. Если надо узнать про эволюцию систему, то необходимо интегрировать уравнение движения. Используя закон изменения механической энергии, можно вычислить теплоту, которая выделяется этой системой.

Теорема 14.1.

$$v_k = \frac{2}{3}v_0$$

$$\omega_k = \frac{v_k}{R}$$

Закон изменения механической энергии записывается следующим образом:

$$\Delta E = \frac{mv_k^2}{2} + \frac{J\omega^k}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{4}{9}v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{4v_0^2}{9R^2} - \frac{mv_0^2}{2} =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9} - 1\right) = -\frac{1}{3}\frac{mv_0^2}{2}$$

Таким образом, количество теплоты, которые выделится, будет составлять $\frac{1}{3}$ часть от начальной кинетической энергии системы.

$$\Delta E = A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{V}_{\text{ск}} \cdot dt = -\mu mg \int\limits_0^{t_0} (v_0 - 3\mu gt)\, dt = -\mu mg \left(v_0 t_0 - \frac{3}{2}\mu g t_0^2 \right) =$$

$$= -\mu mg \left(v_0 \frac{v_0}{3\mu g} - \frac{3}{2}\mu g \cdot \frac{v_0^2}{9\mu^2 g^2} \right) = -\frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}\frac{mv_0^2}{2}$$

$$V_{\text{ск}} = v(t) - \omega(t)R = v_0 - 3\mu gt$$

$$\Delta E = -\mu mg \cdot \frac{1}{2} v_0 \cdot t_0 = -\mu mg \cdot \frac{1}{2} v_0 \cdot \frac{v_0}{3\mu g} = -\frac{mv_0^2}{6}$$

Задача. Ускорение центра обруча

Пусть есть наклонная плоскость, с которой скатывается тонкостенный обруч. В верхней точке этого обруча сидит собака. Чтобы не упасть, она бежит по обручу так, что она всегда находится на высшей точке. Момент инерции обруча записывается следующим образом:

$$J_0 = mR^2$$

Требуется найти ускорение центра обруча a_0, если угол наклон составляет α.

$$L_{O'} = J_{O'}\omega + m_1 vR(1+\cos\alpha) = 2mR^2 \cdot \omega + m_1 vR(1+\cos\alpha) = vR\,(2m + m_1(1+\cos\alpha))$$

Уравнение моментов записывается следующим образом:

$$\frac{dL_{O'}}{dt} = M_{O'}$$

$$M_{O'} = (m+m_1)gR\sin\alpha$$

$$\frac{dv}{dt} \cdot R(2m + m_1(1+\cos\alpha)) = (m+m_1)gR\sin\alpha$$

$$a = \frac{(m+m_1)g\sin\alpha}{2m + m_1(1+\cos\alpha)}$$

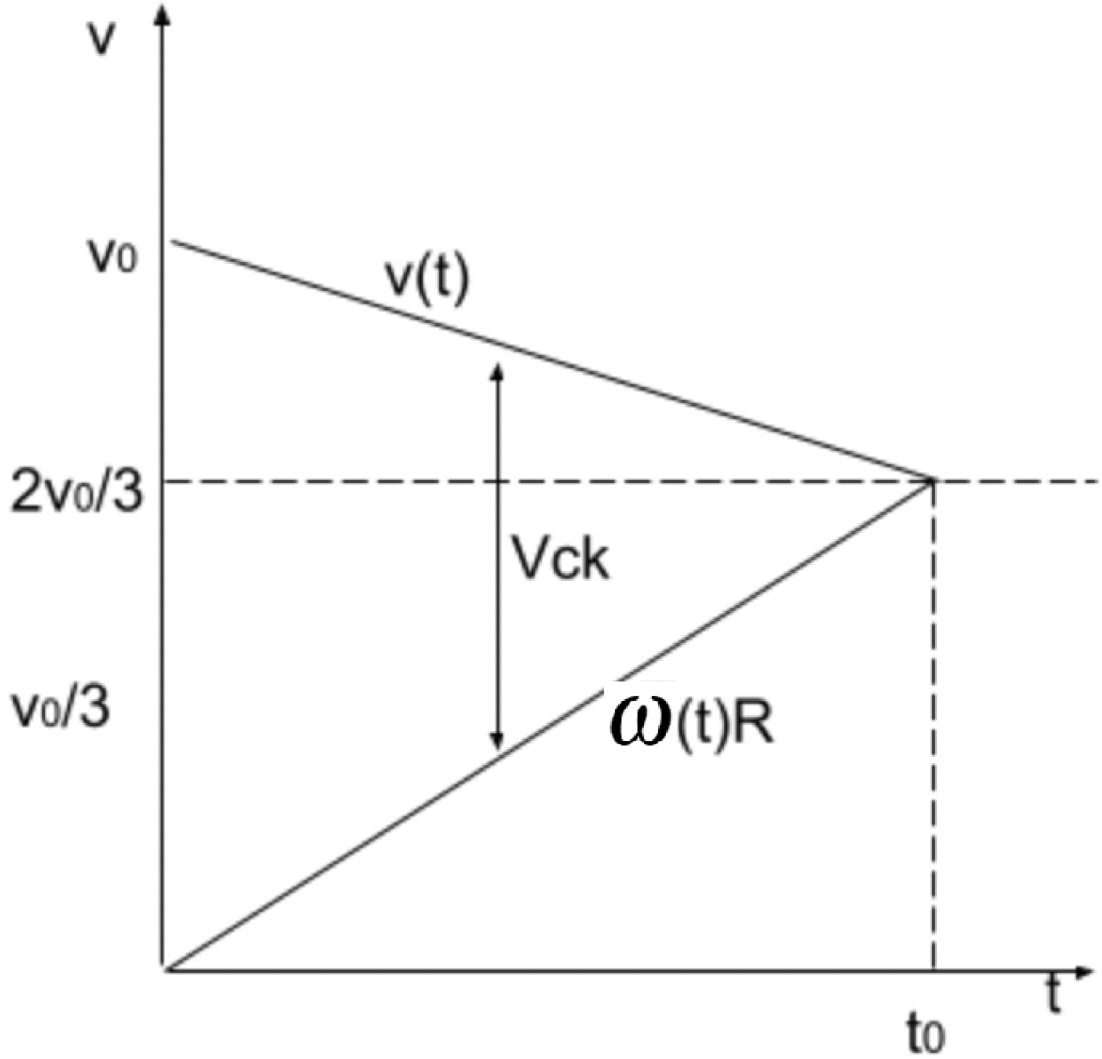

Рис. 14.3. График зависимости $v - t$

Задача. Скорость оси цилиндра

Пусть по горизонтальной поверхности катится без проскальзывания сплошной однородный цилиндр. В некотором месте плоскость становится наклонной. Известно, что эта горка наклонена к горизонту под углом α. Требуется найти скорость оси цилиндра, при которой цилиндр перекатится через угол без отрыва (не подпрыгнув).

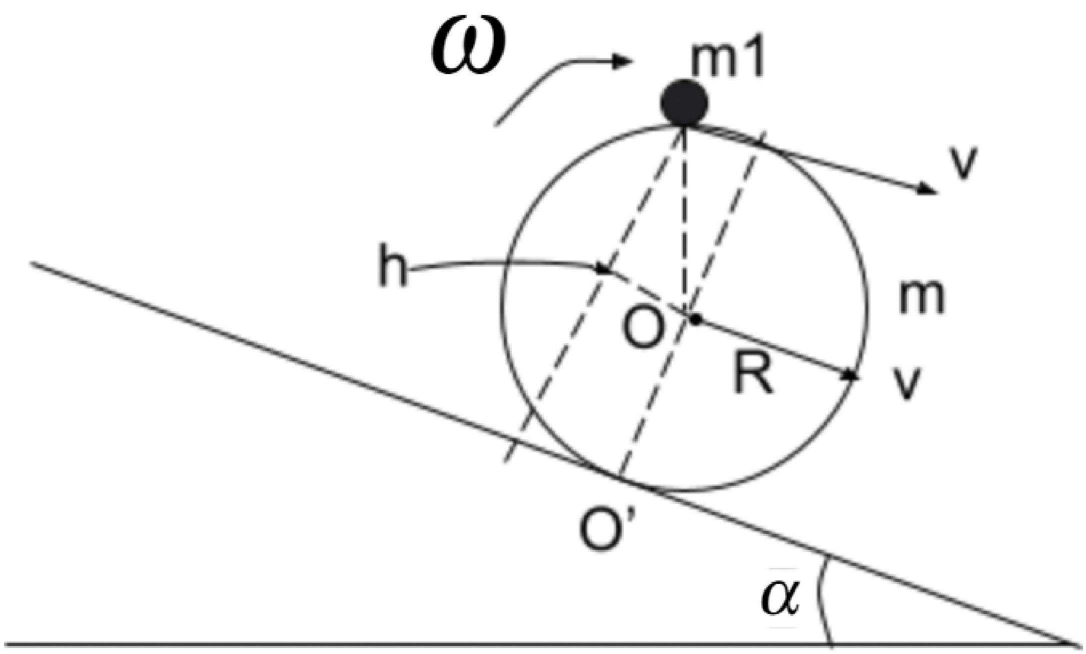

Рис. 14.4. Ускорение центра обруча

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N$$

Пусть $N = 0$. Записывается закон сохранения энергии:

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} = mgR\cos\alpha + \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$v = \omega R$$

$$v_0 = \omega_0 R$$

$$mgr + \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{v_0^2}{R^2} = mgR\cos\alpha + \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{v^2}{R^2}$$

$$gR + \frac{3v_0^2}{4} = gR\cos\alpha + \frac{3v^2}{4} = gR\cos\alpha + \frac{3}{4}gR\cos\alpha = \frac{7}{4}gR\cos\alpha$$

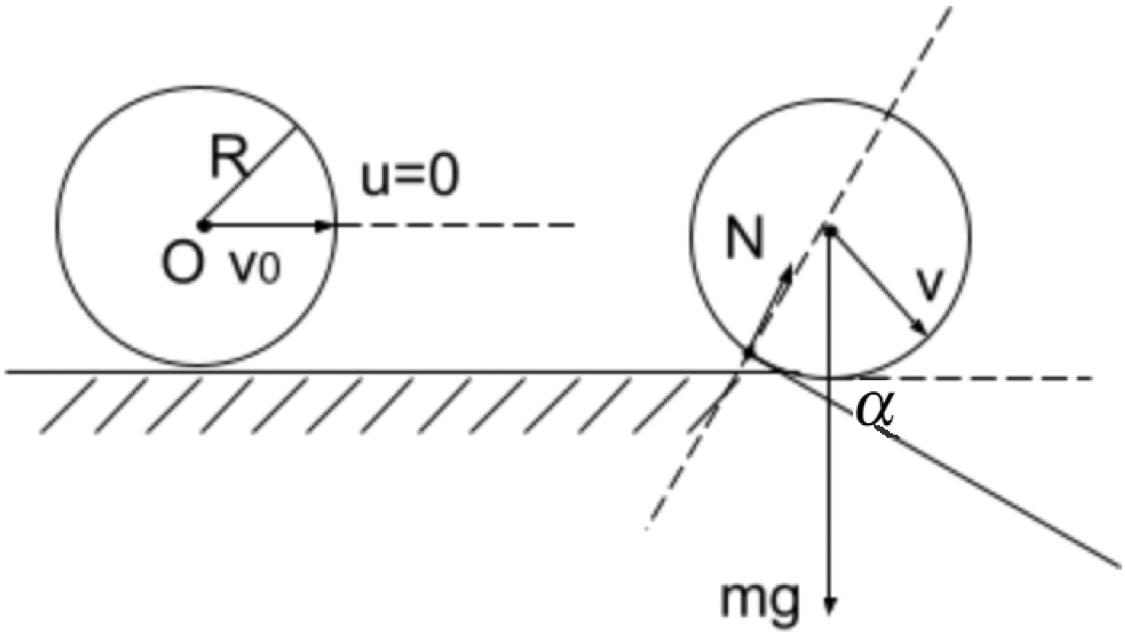

Рис. 14.5. Скорость оси цилиндра

$$\frac{3v_0^2}{4} = \frac{7}{4}gR\cos\alpha - gR$$

$$v_0^2 = \left(\frac{7}{3}\cos\alpha - \frac{4}{3}\right)gR = \frac{7gR}{3}\left(\cos\alpha - \frac{4}{7}\right)$$

Таким образом, была найдена критическая скорость.

$$v_{\text{ц}} \leqslant \sqrt{\frac{7gR}{3}\left(\cos\alpha\frac{4}{7}\right)}$$

$$\cos\alpha \geqslant \frac{4}{7}$$

Чтобы не было отрыва, угол наклона должен иметь следующую величину:

$$\alpha \lesssim 55^\circ$$

В итоге, при любой скорости будет отрыв. Пусть $\alpha = 0$.

$$v_0 = \sqrt{gR}$$

Лекция 15. Закон сохранения момента импульса

Динамика твердого тела.Теорема Кёнига

Пусть есть горизонтальный пол, на котором вертикально стоит однородная палка. Пол совершенно гладкий, поэтому нет трения и сопротивления воздуха. в результате легкого толчка палка начинает падать так, что нижний конец все-равно касается пола. Требуется найти скорость, которую будет иметь верхняя точка палки в момент удара об поверхность. В этой системе сохраняется механическая энергия и записывается это следующим образом:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_A\omega^2}{2}$$

$$J_A = \frac{mL^2}{12}$$

$$v = \omega\frac{L}{2}$$

$$mgL = mv^2 + \frac{mL^2}{12}\cdot\frac{4v^2}{L^2}$$

$$gL = \frac{4}{3}v^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{3gl}{2}}$$

$$v_B = 2v_A = \sqrt{3gL}$$

Движение стержня можно рассматривать как чистое вращение вокруг оси, которая проходит чрез точку O. Тогда кинетическая энергия находится следующим образом:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{J_0\omega^2}{2}$$

$$J_0 = \frac{mL^2}{3}$$

$$v_B = \omega L$$

$$mgL = \frac{mL^2}{3}\cdot\frac{v_B^2}{L^2}$$

$$v_B = \sqrt{3gL}$$

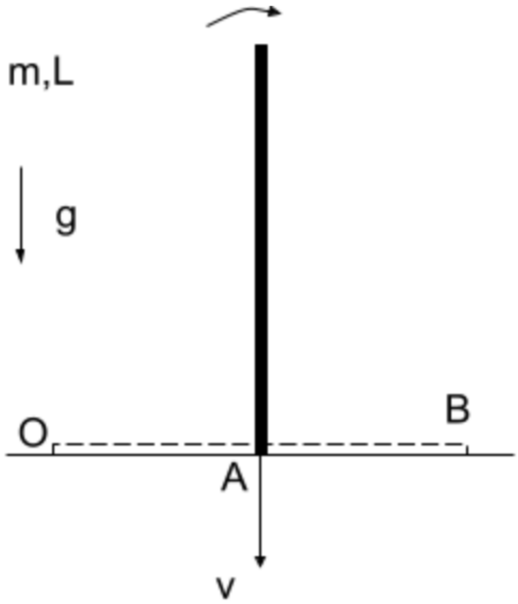

Рис. 15.1. Однородная палка на горизонтальном поле

Закон сохранения момента импульса

Уравнение момента имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} = 0 \to \vec{L} = const$$

M — сумма моментов внешних сил. $\vec{L}$ — вектор момента импульса.

$$\frac{dL_x}{dt} = \vec{M}_x^{\text{внеш}} = 0 \to \vec{L}_x = const$$

Пусть есть вертикальная ось, вокруг которой может без трения вращаться полая трубка. Внутри этой трубки потянута нить, которая вдвое короче нитки, и к нитке прикреплен шарик. Вся эта конструкция вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В какой-то момент нитка обрывается, шарик соударяется неупруго со стенкой и прилипает. Требуется найти количество теплоты, которое выделится в этой системе. В этой системе сохраняется момент импульса относительно оси вращения.

Записывается выражение для момента импульса относительно оси:

$$L_x = J_x \cdot \omega$$

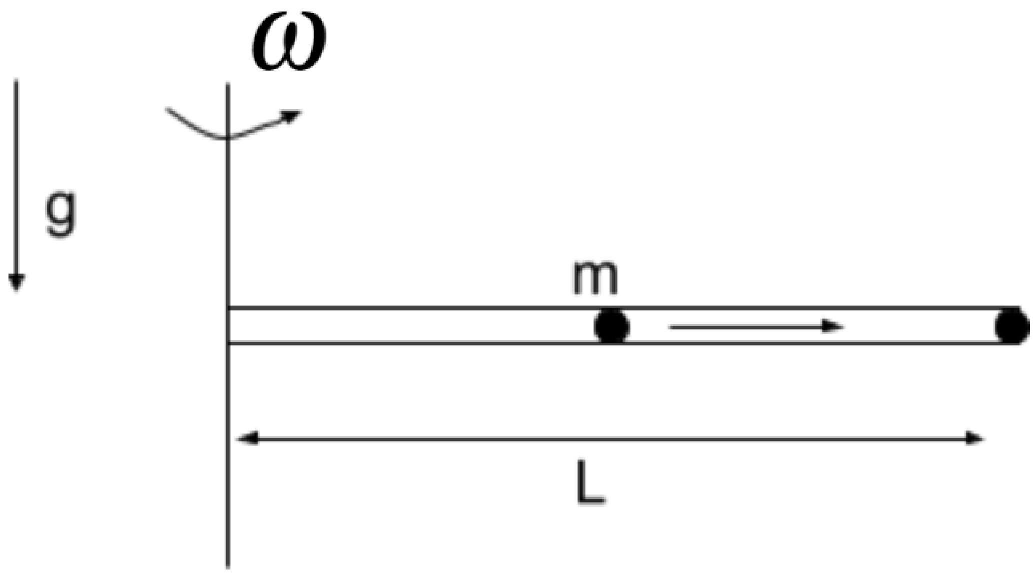

Рис. 15.2. Закон сохранения момента импульса

Момент инерции в начале и в конце:

$$\left(J + \frac{mL^2}{4}\right)\omega = \left(J + mL^2\right)\omega'$$

Конечная угловая скорость:

$$\omega' = \frac{J + \frac{mL^2}{4}}{J + mL^2}\omega$$

Количество теплоты вычисляется следующим образом:

$$\Delta Q = \frac{1}{2}\left(J + \frac{mL^2}{4}\right)\omega^2 - \frac{1}{2}(J + mL^2)\omega'^2 = \frac{3}{8}m\omega^2 L^2 \frac{J + \frac{mL^2}{4}}{J + mL^2}$$

Пусть внутренняя поверхность трубки шероховата. Конечная угловая скорость и количество теплоты не изменятся.

Задача. Однородный диск и человек

Пусть есть однородный диск M, на котором стоит человек массой m. Пусть человек нарисовал на диске метку и пошел по диску вдоль его края, и шел до той поры пока не дошел до метки. Таким образом, он сделал полный оборот относительно диска. Требуется найти угол, на который повернется диск. Трения нет. Момент импульса относительно диска не будет меняться.

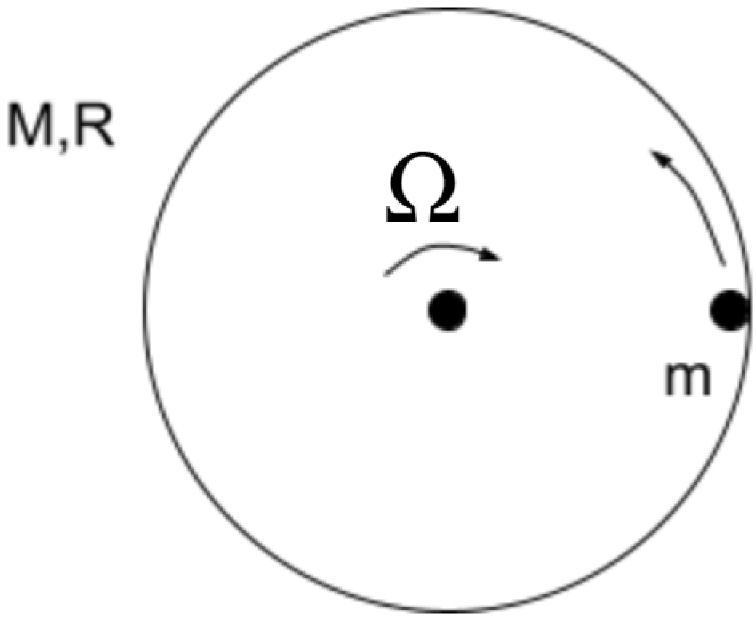

Рис. 15.3. Однородный диск и человек

Закон сохранения момента импульса записывается следующим образом:

$$\frac{MR^2}{2}\Omega + mR^2\omega = 0$$

Угловая скорость относительно Земли:

$$\omega = -\frac{M}{2m}\Omega$$

Угловая скорость относительно диска:

$$\omega_{\text{отн}} = \omega - \Omega = -\frac{M}{2m}\Omega - \Omega = -\Omega \cdot \frac{M+2m}{2m}$$

$$\omega_{\text{отн}} \cdot \Delta t = -\frac{M+2m}{2m} \cdot \Omega \cdot \Delta t$$

$$|\Delta\varphi| = \frac{4\pi m}{M+2m}$$

Задача. Человек в центре однородного диска

Пусть есть однородный диск, который насажен на вертикальную ось. На поверхности этого диска мелом нарисована окружность, которая проходит через центр и край диска. В центре диска стоит человек. В начале все покоится, а потом человек начинает идти по окружности и делает полный поворот. Требуется найти угол, на который повернется диск. Вводится полярная система координат для человека.

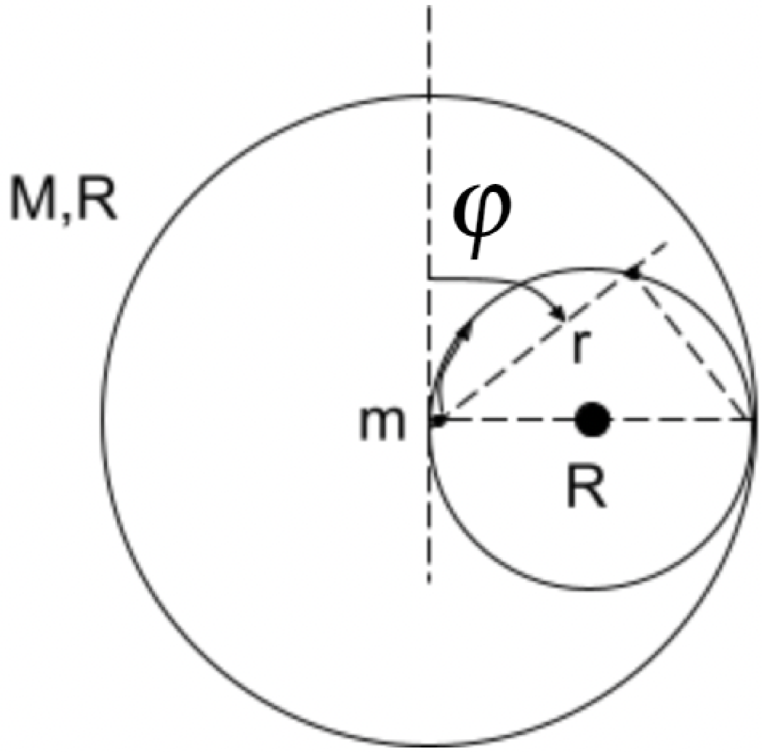

Рис. 15.4. Человек в центре однородного диска

$$r = R\sin\varphi$$

Записывается закон сохранения момента импульса:

$$\frac{MR^2}{2}\frac{d\theta}{dt} + m(R\sin\varphi)^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{M}{2} + m\sin^{\varphi}\right)d\theta + m\sin^2\varphi\cdot d\varphi = 0$$

$$d\theta = -\frac{m\sin^2\varphi d\varphi}{\frac{M}{2} + m\sin^2\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\alpha + \sin^2\varphi}$$

Происходит замена переменных:

$$t = \operatorname{tg}\varphi$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = (1+t^2)d\varphi$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$d\theta = -\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{\alpha\frac{t^2}{1+t^2}} = -\frac{t^2dt}{(1+t^2)(t^2+\alpha(1+t^2))} = -\frac{t^2dt}{(1+t^2)(\alpha(1+\alpha)t^2)}$$

Это соотношение можно представить в следующем виде:

$$d\theta = -\frac{Adt}{1+t^2} - \frac{Bdt}{\alpha+(1+\alpha)t^2} = -\frac{A\alpha + A(1+\alpha)t^2 + B + Bt^2}{(1+t)^2(\alpha(1+\alpha)t^2)}dt$$

$$\begin{cases} A(1+\alpha) + B = 1 \\ A\alpha + B = 0 \end{cases}$$

$$B = -\alpha A, \quad A = 1, \quad B = -\alpha$$

$$d\theta = -\frac{dt}{1+t^2} + \frac{\alpha dt}{\alpha + (1+\alpha)t^2} = -\frac{dt}{1+t^2} + \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}t\right)^2}$$

Это соотношение можно интегрировать следующим образом:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

$$t = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\theta = -2\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} + 2\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\right)\cdot t}^2 =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}t\right)\Bigg|_0^{\infty} = -2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + 2\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) =$$

$$= -\pi\left(1-\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right) = -\pi\left(1-\sqrt{\frac{M}{2m\left(1+\frac{M}{2m}\right)}}\right) = -\pi\left(1-\sqrt{\frac{M}{M+2m}}\right)$$

Задача. Однородный диск и монета

Пусть есть однородный диск, который покоится. Монету раскручивают с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Монета вертикально падает на диск. Требуется найти угловую скорость, которую приобретет диск.

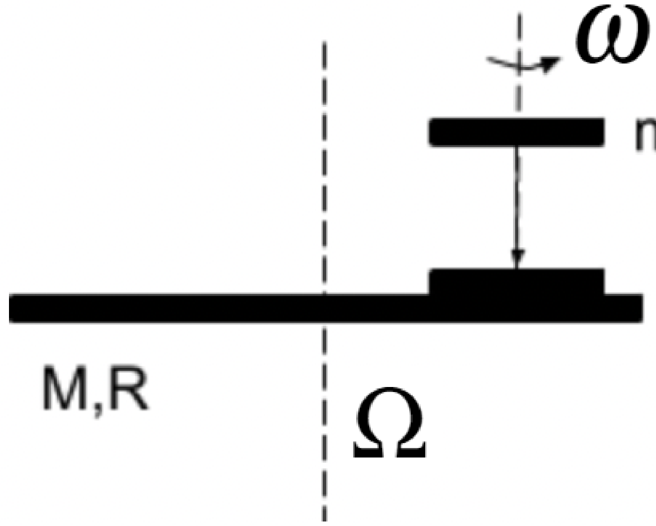

Рис. 15.5. Однородный диск и монета

$$\vec{L}_O = \sum[\vec{r}_i\times\vec{P}_i] = \sum[(\vec{R}+\vec{r}_i')\times\vec{P}_i] = \sum[\vec{R}\times\vec{P}_i] + \sum[\vec{r}_i'\times\vec{P}_i] = [\vec{R}\times\vec{P}] + \vec{L}_{O'}$$

Суммарный импульс оси, который проходит через центр, равен 0. Начальный и конечный моменты импульса:

$$\frac{mr^2}{2}\omega = \left(\frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + md^2\right)\Omega$$

Лекция 16. Закон сохранения момента инерции

Задача. Вращение дисков

Если имеется твердое тело, которое вращается вокруг оси, то момент импульса можно найти как произведение осевого момента инерции на угловую скорость вращение. Это будет относительно самой оси и относительно любой параллельной оси.

Пусть есть вертикальная ось, вокруг которой вращается однородный диск с моментом инерции J_1 и угловой скоростью ω_1. Сверху над этим диском вращается второй диск с моментом инерции J_2 и угловой скоростью ω_2. Верхний диск падает на нижний диск, прилипает к нему и они вращаются вместе. Требуется найти количество теплоты после того, как диски слипнутся.

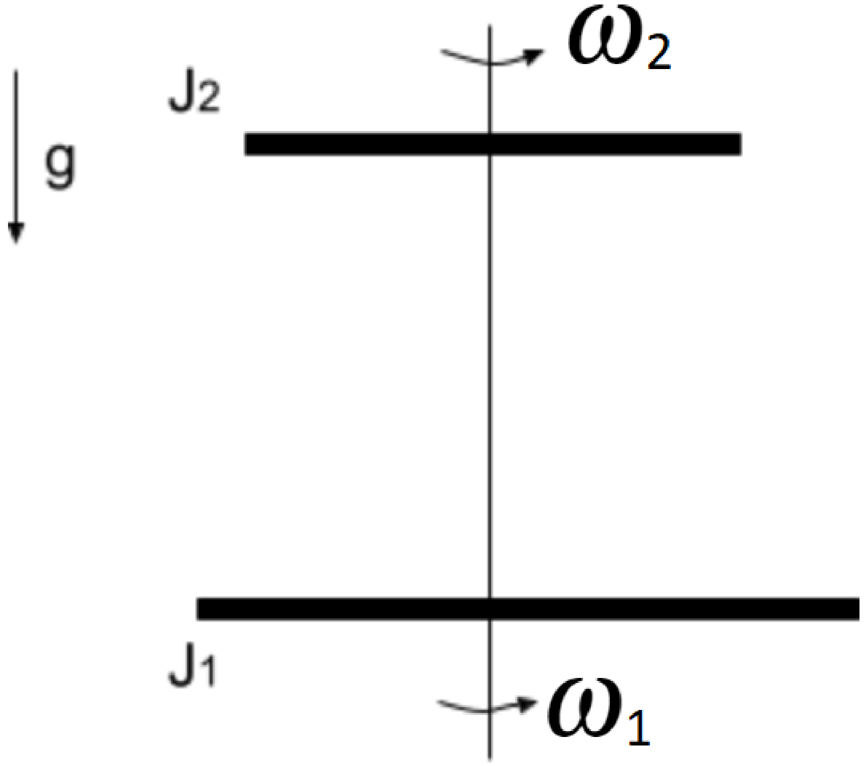

Рис. 16.1. Вращение дисков

Закон сохранения момента импульса записывается следующим образом:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$$

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$$

$$\Delta Q = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{(J_1+J_2)\omega^2}{2} = \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{(J_1\omega_1 + J_2\omega_2)^2}{2(J_1+J_2)} =$$

$$= \frac{1}{2(J_1+J_2)}\left(J_1^2\omega_1^2 + J_1J_2\omega_1^2 + J_1J_2\omega_2^2 + J_2^2\omega_2^2 - J_1^2\omega_1^2 - J_2^2\omega_2^2 - (2J_1J_2\omega_1\omega_2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{J_1J_2}{J_1+J_2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2) = \frac{1}{2}\frac{J_1J_2(\omega_1-\omega_2)^2}{J_1+J_2}$$

Количество теплоты равно 0, когда проскальзывания не будет. максимальное количество теплоты будет выделяться, когда диски будут крутиться в разные стороны.

Задача. Соприкосновение двух дисков

Пусть диски, которые имеют одинаковые радиусы, но разные осевые моменты инерции, насажены на ось. Два этих диска раскрутили до одинаковой угловой скорости, а потом соприкоснулись торцами. Между ними есть трение. Через некоторое время проскальзывание прекращается и угловые скорости их вращения устанавливаются и больше не меняются. Требуется найти количество теплоты, которое выделится в процессе установления вращения дисков после их соприкосновения.

Чтобы момент импульса сохранялся, необходимо, чтобы сумма моментов всех внешних сил была равна 0. Определяются действующие силы. Момент импульса такой системы сохраняться не будет, потому что сумма внешних сил не равна 0. Таким образом, записываются уравнения моментов:

$$J_1\frac{d\omega_1}{dt} = -FR$$

$$J_2\frac{d\omega_2}{dt} = -FR$$

$$J_1\frac{d\omega_1}{dt} - J_2\frac{d\omega_2}{dt} = 0$$

$$J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = const$$

Эта система имеет характерный интеграл движения. После того как движение установится угловые скорости будут равны, но противоположны в направлении:

$$\omega_{1k} = -\omega_{2k}$$

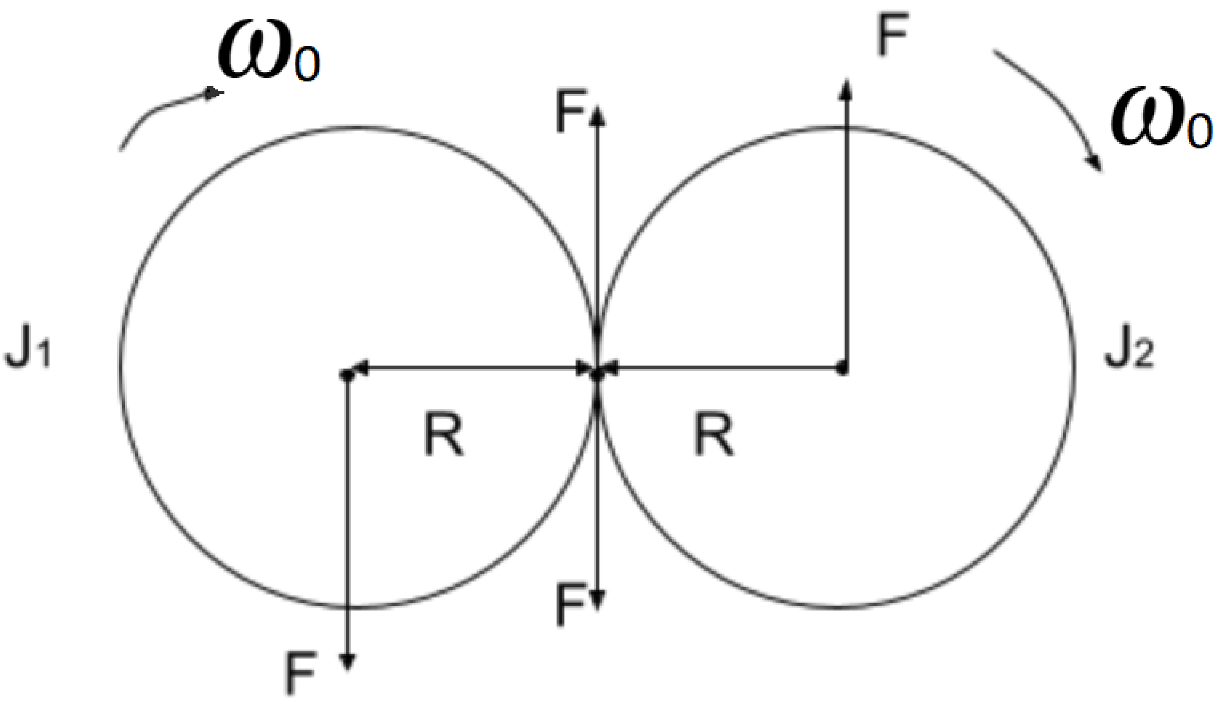

Рис. 16.2. Соприкосновение дисков

$$J_1\omega + 0 - J_2\omega_0 = J_1\omega_{1k} - J_2\omega_{2k}$$

$$\omega_{1k} = -\omega_{2k} = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}\omega_0$$

$$\Delta Q = \frac{J_1\omega_0^2}{2} + \frac{J_2\omega_0^2}{2} - \frac{J_1\omega_{1k}^2}{2} - \frac{J_2\omega_{2k}^2}{2} = \frac{(J_1+J_2)\omega_0^2}{2}\left(1 - \left(\frac{\omega_{1k}}{\omega_0}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{(J_1+J_2)\omega_0^2}{2}\cdot\left(1 - \frac{(J_1-J_2)^2}{(J_1+J_2)^2}\right) = \frac{(J_1+J_2)\omega_0^2}{2}\cdot\frac{4J_1J_2}{(J_1+J_2)^2} = \frac{2J_1J_2\omega_0^2}{J_1+J_2}$$

Решение можно записать также следующим образом:

$$\frac{dL_1}{dt} = -FR$$

$$\frac{dL_2}{dt} = -FR$$

$$\frac{d}{dt}(L_1 + L_2) = -2FR$$

$$\frac{dL_{\text{полн}}}{dt} = -2FR$$

$$\Delta L = L_{\text{кон}} - L_{\text{нач}} = (J_1\omega_{1k} + J_2\omega_{2k}) - (J_1 + J_2)\omega_0 = (J_1 - J_2)\omega_{1k} - (J_1 + J_2)\omega_0 =$$
$$= (J_1 - J_2)^2\frac{\omega_0}{J_1 + J_2} - (J_1 + J_2)\omega_0 = \frac{\omega_0}{J_1 + J_2}((J_1 - J_2)^2 - (J_1 + J_2)^2) = -\frac{4J_1J_2\omega_0}{J_1 + J_2} < 0$$

Таким образом, момент импульса в этой системе уменьшается.

Задача. Соударение твердого тела и пули

Пусть есть твердое тело массы M, которое висит на горизонтальном оси O. Пуст в направлении к этому телу летит пуля массы m и со скоростью v. Пуля застревает в теле под центром масс. Требуется найти угловую скорость маятника сразу после застревания пули. Закон сохранения импульса несправедлив для этой системы. Чтобы сохранялся импульса, сумма внешних сил должна быть равна 0. Между телом и пулей есть сила взаимодействия. Эта сила уменьшает скорость пули. Тело пытается двигаться влево, но со стороны оси действует сила реакции, которая направлена вправо. Силы реакции является внешней, а силы взаимодействия внутренней. Поэтому импульс не сохраняется. В такой системе сохраняется только момент импульса:

$$mvl - (J_m l^2)\omega$$
$$\omega = \frac{mvl}{J + ml^2}$$

Можно поменять l таким образом, чтобы при застревании пули сохранялся не только момент импульса, но и импульс.

$$mv = m \cdot \omega l + M \cdot V_c$$

V_c — скорость центра масс.

$$mv = m\omega l + M\omega a$$
$$mv = (ml + Ma) \cdot \frac{mvl}{J + ml^2}$$
$$J + ml^2 = ml^2 + Mal$$
$$l = \frac{J}{ma}$$

Закон сохранения энергии можно применять, если соударение абсолютно упругое. Закон сохранения импульса сохраняется, если тело подвешено на оси. Если оси нет, то импульс сохраняется. Если тело висит на оси, то импульс не сохраняется.

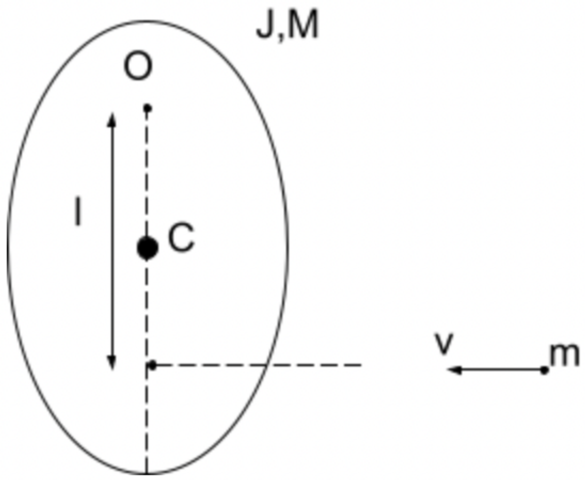

Рис. 16.3. Соударение твердого тела и пули

Задача. Соударение доски и пули

Пусть есть вертикальная тонкая узкая доска массы M, длины L, которая подвешена на горизонтальной оси. В нижний конец доски попадает пуля массы m и со скоростью v. Пуля пробила доску и вылетела со скоростью $u < v$. Требуется найти угол от вертикали, на который отклонится доска. Момент импульса в этой системе сохраняется. Закон сохранения импульса записывается следующим образом:

$$mvl = muL + J\omega$$

Закон сохранения импульса несправедлив в этой системе. Закон сохранения механической системы тоже несправедлив, потому что удар частично упругий. Энергия будет сохраняться только для доски после удара.

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{MgL}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$J = \frac{ML^2}{3}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{J\omega^2}{MgL} = 1 - \frac{J}{MgL}\cdot\frac{m^2L^2(v-u)^2}{J^2} = 1 - \frac{m^2L(v-u)^2\cdot 3}{M^2gL^2}$$

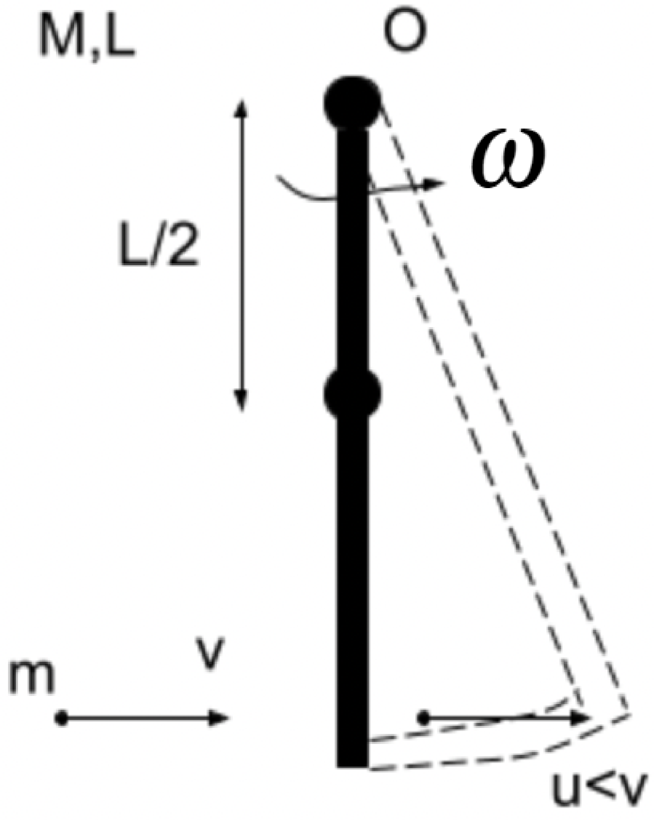

Рис. 16.4. Соударение доски и пули

Задача. Соударение стержня и шарика

Пусть к одной точке подвесили однородный стержень массы M и длины L и шарик массы m на короткой нитке длины l. Стержень отклонили на какой-то угол в сторону и отпустили. Когда стержень пришел в вертикальное положение, между стержнем и шариком произошел абсолютно упругий удар. Требуется найти соотношение длин, при котором шарик и точка стержня сразу после удара будут двигаться в противоположных направлениях с противоположными скоростями. В этой системе энергия и момент импульса сохраняются, но импульс не сохраняется.

Закон сохранения момента импульса записывается следующим образом:

$$J\omega = mvl - J\omega'$$

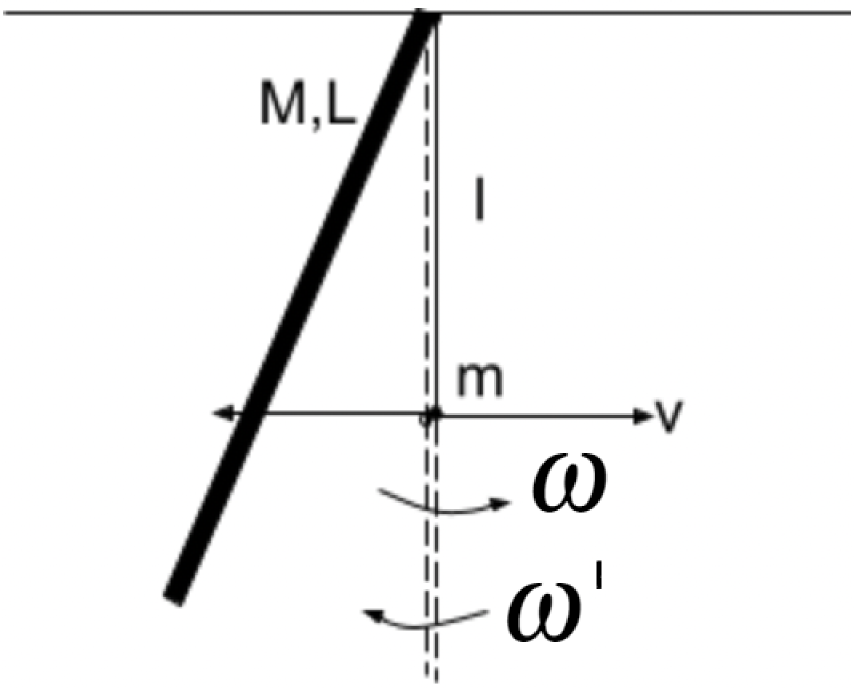

Рис. 16.5. Соударение стержня и шарика

ω' — угловая скорость после удара.

$$v = \omega' l$$

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega'^2}{2}$$

$$J\omega = mvl - J\frac{v}{l}$$

$$\omega^2 = \frac{mv^2}{J} + \frac{v^2}{l^2}$$

$$\omega = \frac{mvl}{J} - \frac{v}{l}$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{m}{J} + \frac{1}{l^2} = \left(\frac{ml}{J} - \frac{1}{l}\right)^2 = \frac{m^2 l^2}{J^2} - \frac{2m}{J} + \frac{1}{l^2}$$

$$\frac{ml^2}{J} = 3$$

$$\frac{ml^2}{ML^2} \cdot 3 = 3$$

$$\frac{l}{L} = \sqrt{\frac{M}{m}}$$

Задача. Соударение шайбы и палки

Пусть на горизонтальной поверхности лежит тонкая однородная палка массы nm и длины L. По этой же поверхности перпендикулярно скользит шайба массы m. Между шайбой и палкой происходит абсолютно упругий удар. Требуется найти значение n, при котором шайба после абсолютного упругого удара остановится. Импульс, энергия и момент импульса относительно любой оси сохраняются. Закон сохранения импульса записывается следующим образом:

$$mv = nmV$$

Закон сохранения энергии записывается следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{nmV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$J = \frac{nmL^2}{12}$$

Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси записывается следующим образом:

$$mv\frac{L}{2} = J\omega$$

Таким образом, значение n:

$$n = 4$$

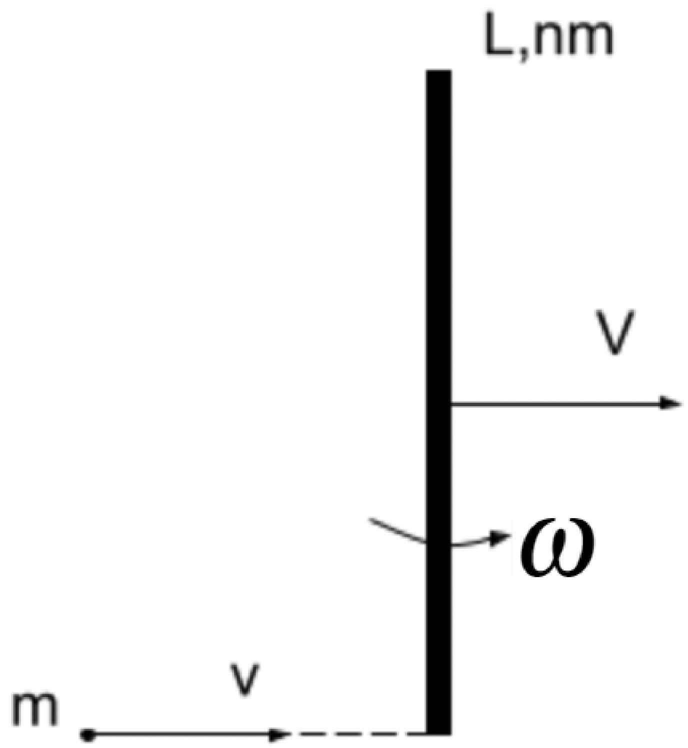

Рис. 16.6. Соударение шайбы и палки

Лекция 17. Колебания

Гармонические колебания

Рассматривается механическая система, которая устроена следующим образом: у нее есть массивный элемент, при перемещении которого от равновесия возникает сила. Сила устроена так, что она возвращает элемент в положение равновесия. В таких системах возможны механические колебания. Такие колебания описываются следующим выражением:

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Таким образом, можно получить уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \rightarrow \frac{x}{A} = \cos\varphi$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \quad [\omega_0] = \frac{\text{Рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad [\nu] = \text{Гц}$$

x — смещение, A — амплитуда (модуль максимального смещения), ω_0 — круговая или угловая частота показывает скорость изменения фазы. φ — фаза, которая характеризует текущее состояние колебательной системы. ν — циклическая частота.

$$\omega = 2\pi\nu$$

Существует также энергетический подход решения этого уравнения.

Теорема 17.1. *Пусть есть одномерная консервативная система, тогда потенциальная энергия и кинетическая энергия описываются следующим образом:*

$$U = \alpha x^2$$

$$T = \beta \dot{x}^2 \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Тогда система совершает колебания, частота которых описывается следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Так как система консервативная, сумма кинетической и потенциальной энергии равна 0.

$$\alpha x^2 + \beta \dot{x}^2 = E = const$$

$$2\alpha x\dot{x} + 2\beta \dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{\beta}x = 0$$

Закон сохранения энергии — это первый интеграл движения.

Задача. Пружинный маятник

Пусть есть груз, которых может двигаться по горизонтальной поверхности. Трения нет. Груз имеет массу m, а пружина имеет жесткость k. Требуется найти частоту колебаний. Пусть груз сместили из положения равновесия в положительном направлении на расстоянии x. Уравнение колебаний записывается следующим образом:

$$F_{\text{у}} = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Эту задачу можно решить и энергетическим подходом:

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

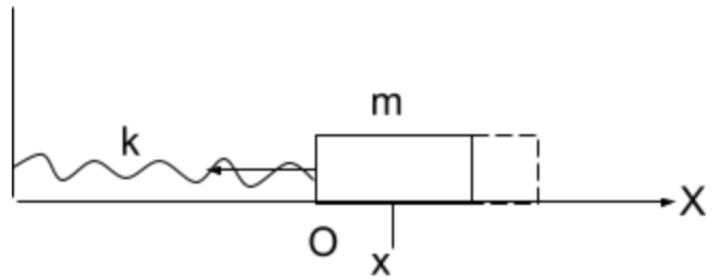

Рис. 17.1. Пружинный маятник

Задача. Математический маятник

Пусть есть математический маятник. Нить длины l невесома и нерастяжима, на конец которой подвешен груз массы m. Маятник сместился в положительном направлении на величину α. Записывается уравнение моментов:

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0$$

$$\alpha << 1 \quad \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Энергетическим подходом задача решается следующим образом:

$$T = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2}$$

$$U = mgh = mgl(1-\cos\alpha) \approx mgl\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) = \frac{mgl}{2}\alpha^2$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}$$

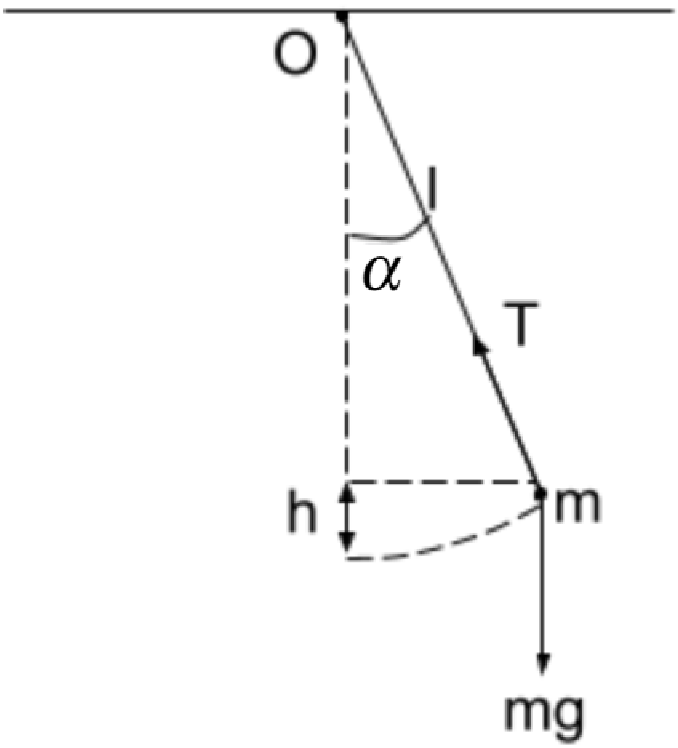

Рис. 17.2. Математический маятник

Малые колебания

Записывается второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = F(x)$$

Пусть есть гладкий горизонтальный стержень, на которого надета бусинка массы m. К бусинке прикреплена пружина. Пружина имеет жесткость k, и длину в не растянутом состоянии L. В положении равновесия пружина не растянута. Требуется найти период колебаний такой бусинки при малых смещениях с положения равновесия. При смещении на расстояние x пружина растягивается. Проекция силы на ось X записывается следующим образом:

$$F_x = -F\cos\alpha = -k(\sqrt{L^2+x^2}-L)\cdot\frac{x}{\sqrt{L^2+x^2}} = -kx\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\right) =$$

$$= -kx\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{L}\right)^2}}\right) \approx -kx\left(1-\left(\frac{x^2}{2L^2}\right)\right) = -\frac{kx^3}{2L^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U(x) = \frac{kx^4}{8L^2}$$

В этой системе гармонических колебаний не будет, так как отсутствует разложение. Эту задачу можно решать также энергетически.

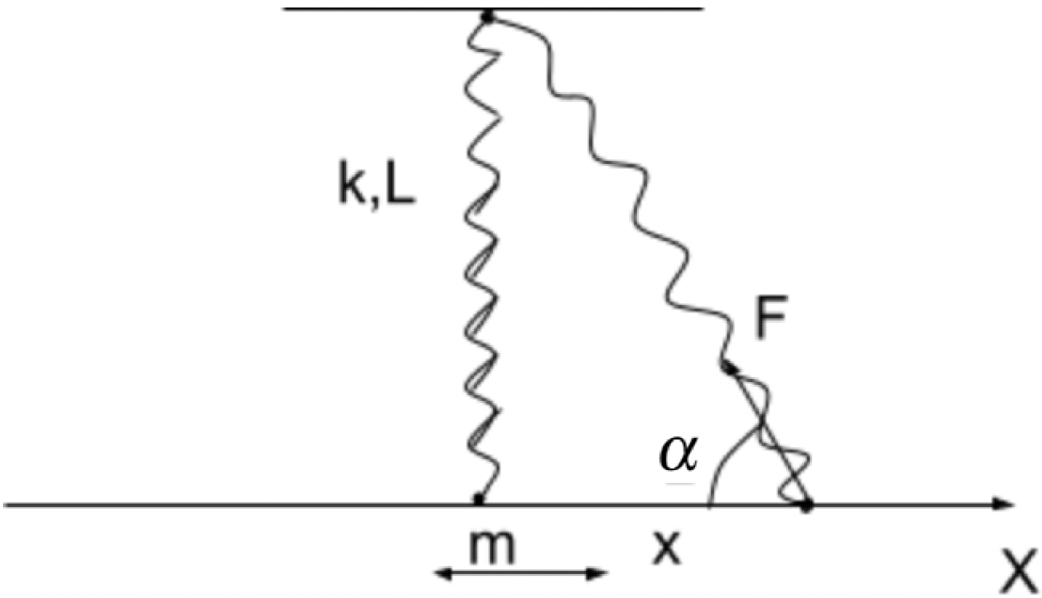

Рис. 17.3. Малые колебания

Период можно найти следующим образом. Записывается закон сохранения энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{8L^2} = E_0 = const$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(E_0 - \frac{kx^4}{8L^2}\right) = \frac{2E_0}{m}\left(1 - \frac{kx^4}{8E_0L^2}\right)$$

Амплитуда записывается следующим образом:

$$x_0^4 = \frac{8E_0L^2}{k}$$

Тогда уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\dot{x}^2 = \frac{2E_0}{m}\left(1 - \frac{x^4}{x_0^4}\right)$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E_0}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^4}{x_0^4}}} = \sqrt{\frac{m}{2E_0}}\frac{x_0 dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

$$z = \frac{x}{x_0} \to \ dx = x_0 dz$$

Таким образом, период колебаний:

$$T = 4\cdot\sqrt{\frac{m}{2E_0}}\int\limits_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^4}} = 4\sqrt{\frac{m}{2E_0}}x_0\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

$$\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = I$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_0}} = \frac{2\sqrt{2}L}{\sqrt{k}x_0^2}$$

$$T = 4x_0 I\sqrt{\frac{m}{2E_0}} = 4x_0 I\sqrt{\frac{m}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}L}{\sqrt{k}x_0^2}} = 8I\frac{L}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Можно сразу оценить значение периода. Записывается уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} + \frac{kx^3}{2L^2} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{kx^2}{2mL^2}x = 0$$

$$x \approx x_0 \quad \omega^2 = \frac{kx_0^2}{2mL^2}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x_0}{L}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi\frac{L}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Уравнение для не гармонических колебаний записывается следующим образом:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\sin\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right) = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{6}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right)$$

Задача. U - образный манометр

Пусть есть U - образный манометр, в который налита жидкость. Известно, что общая длина столба жидкости равна L. Жидкость начала колебаться после того, как подули в одну из трубок манометра. Требуется найти частоту колебаний. трения нет. Предполагается, что жидкость в правой части сместилась вниз на x, а в левой — наверх на x. Возникла сила гидростатического давления:

$$F = \rho g \cdot 2x \cdot S$$

$$m\ddot{x} = -F = -2\rho g S x$$

$$\rho l S \ddot{x} + 2\rho g S x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

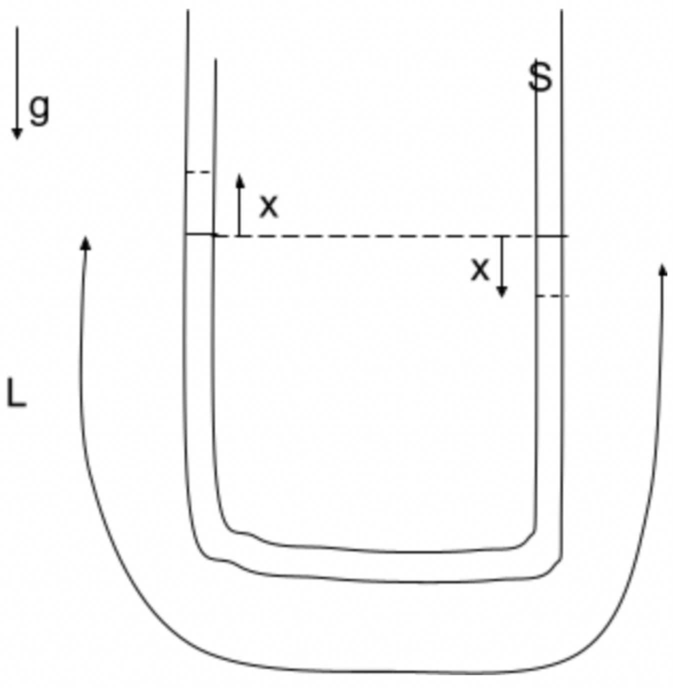

Рис. 17.4. U - образный манометр

Эту задачу можно решить энергетически:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{\rho l S \dot{x}^2}{2}$$

$$U = \Delta m g x = \rho S x g x = \rho S g x^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\rho S g}{\rho l S}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

Задача. Астатический маятник

Пусть есть астатический маятник, к которому слева и справа прикреплены пружины жесткости k. Шарик массы m прикреплен к верхнему концу маятника. Длина стержня — L. Требуется найти частоту колебаний этой системы. Рассматривается смещение стержня на угол α. Уравнение движения записывается следующим образом:

$$ml^2\ddot{\alpha} = mgl\sin\alpha - 2kx \cdot a\cos\alpha$$

$$x = a\alpha \quad \sin\alpha \approx \alpha \quad \cos\alpha \approx 1$$

$$ml^2\ddot{\alpha} = mgl\alpha - 2ka^2\alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{2ka^2 - mgl}{ml^2}\alpha = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2ka^2 - mgl}{ml^2}} \quad (2ka^2 > mgl)$$

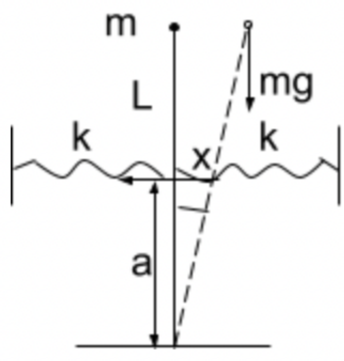

Рис. 17.5. Астатический маятник

Энергетически задача решается следующим образом:

$$T = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2}$$

$$U = 2\cdot\frac{kx^2}{2} - mgl(1-\cos\alpha) \approx k\cdot a^2\alpha^2 - mgl\left(1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right) =$$

$$= ka^2\alpha^2 - \frac{mgl\alpha^2}{2} = \frac{2ka^2-mgl}{2}\alpha^2$$

$$\omega^2 = \frac{2ka^2-mgl}{ml^2}$$

Блок с грузом и с пружиной

Пусть есть блок радиуса R, через которого перекинута нитка. К одному концу привязана пружина жесткости k, а к другому концу привязан груз массы m. Нитки невесомы и нерастяжимы. требуется найти частоту колебаний такой системы. Пусть груз смешается на x в положительном направлении. Выбирается положительное направление вращения блока. Определяются действующие на систему силы. Записывается уравнение движения для груза:

$$m\ddot{x} = mg - T_1$$

Записывается уравнение моментов для блока:

$$J\varepsilon = T_1R - T_2R$$

Записывается уравнение кинематической связи:

$$\ddot{x} = \varepsilon R$$

Растяжение пружины:

$$k\Delta x_0 = mg$$

$$T_2 = k(x+\Delta x_0) = kx + mg$$

$$T_1 = \frac{J\ddot{x}}{R^2} + T_2 = \frac{J\ddot{x}}{R^2} + kx + mg$$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{J\ddot{x}}{R^2} - kx - mg$$

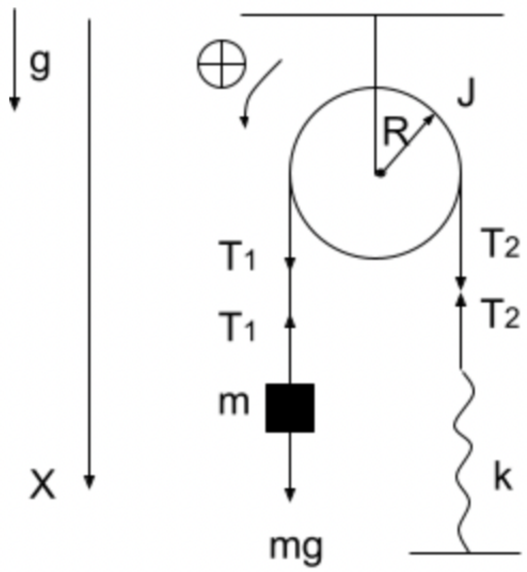

Рис. 17.6. Блок с грузом и с пружиной

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}+kx=0$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m+\left(\frac{J}{R^2}\right)}x=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\left(\frac{J}{R^2}\right)}}$$

Энергетически задача решается следующим образом:

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{J}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2}$$

$$U=\frac{k(x+\Delta x_0)^2}{2}-\frac{k\Delta x_0^2}{2}-mgx=\frac{kx^2}{2}+k\Delta x_0 x+\frac{k\Delta x_0^2}{2}-\frac{k\Delta x_0^2}{2}-mgx=\frac{kx^2}{2}$$

Наличие постоянной внешней силы не влияет на частоту колебаний.

$$m\ddot{x}=-kx+F_0$$

Замена переменной эквивалентна смещению положения равновесия.

Лекция 18. Колебания

Задача. Не растяжимая нить и бусинка

Пусть есть гладкая невесомая нерастяжимая нить длины l, на которую надели бусинку массы m, и конец нити прикрепили к потолку. Бусинку толкнули так, что она начала колебаться в плоскости перпендикулярной плоскости доски. Требуется найти период колебаний.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$b = h$$

$$a = \frac{l}{2}$$

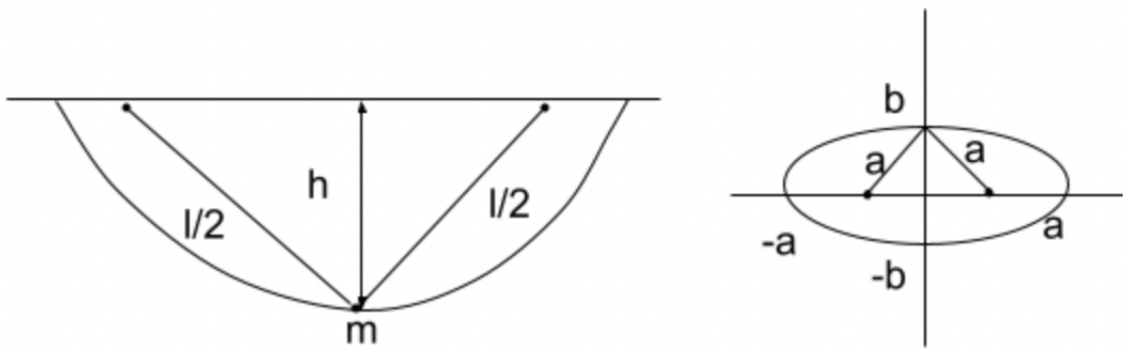

Рис. 18.1. Не растяжимая нить и бусинка

Радиус кривизны:

$$R = \frac{a^2}{b}$$

Период относительно плоскости доски

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{bg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{4hg}} = \frac{\pi l}{\sqrt{gh}}$$

Эту задачу можно решить записав уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \approx b\left(1-\frac{x^2}{2a^2}\right) = h - \frac{hx^2}{2a^2} \quad x << a$$

$$\dot{y} = -\frac{hx\dot{x}}{a^2}$$

Таким образом, кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{h^2}{a^4}x^2\dot{x}^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2}\left(1+\frac{h^2}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \approx \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Потенциальная энергия записывается следующим образом:

$$U = mg(h-y) = mg\cdot\frac{h}{2a^2}x^2$$

Следовательно, частота колебаний записывается следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{mgh2}{2a^2\cdot m} = \frac{gh}{a^2} = \frac{gh\cdot 4}{l^2}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{4gh}}$$

Задача. Перекинутая нить с грузом через отверстие

Пусть есть горизонтальная плоскость, поверхность которой просверлили. Через отверстие перекинута нить, к концу которой прикреплен груз массы m. Если систему отпустить, нижний груз пойдет вниз, а верхний груз будет на плоскости. Чтобы система не падала, верхний груз вращается по окружности с угловой скоростью Ω. Трения нет. Нижний груз толкнули и он начал колебаться. Требуется найти период таких колебаний. Определяются действующие силы. Записывается второй закон Ньютона:

$$mg = T = m\Omega^2 R$$

Закон сохранения момента импульса записывается следующим образом:

$$mR^2\cdot\Omega = m(R-x)^2\cdot\omega$$

Скорость нижнего груза:

$$V = \dot{x}$$

Радиальная скорость:

$$-\dot{r} = V = \dot{x}$$

Скорость верхнего груза:

$$r \cdot \dot{\varphi} = (R - x) \cdot \omega$$

Полный запас энергии этой системы записывается следующим образом:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + (R-x)^2\omega^2\right) - mgx = E_0$$

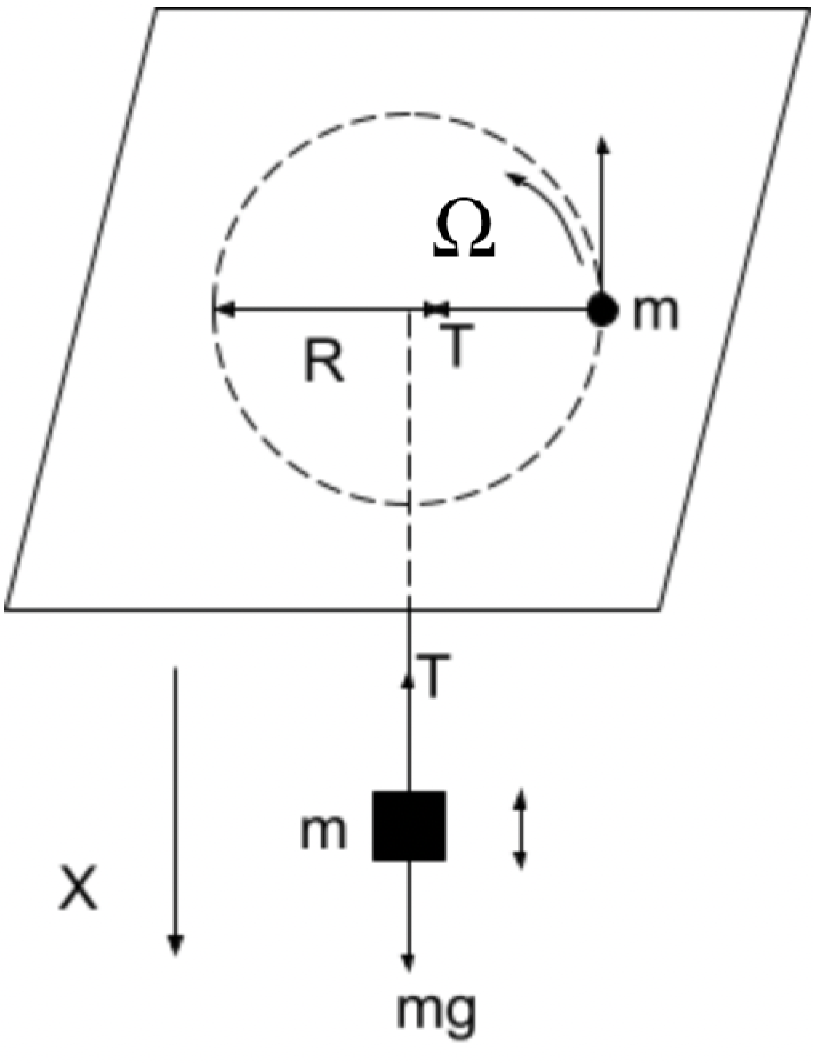

Рис. 18.2. Перекинутая нить с грузом через отверстие

$$m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(R - x^2) \cdot \frac{\Omega^2 R^4}{(R-x)^4} - mgx = E_0$$

$$m\dot{x}^2 + \frac{m\Omega^2R^4}{2(R-x)^2} - mgx = E_0 = const$$

Уравнение движения получается следующим образом:

$$2m\dot{x}\ddot{x} + \frac{m\Omega^2R^4}{(R-x)^3}\dot{x} - mg\dot{x} = 0$$

$$\frac{R^3}{(R-x)^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{R}\right)^3} \approx 1 + \frac{3x}{R}$$

$$2\ddot{x} + \Omega^2R\left(1+\frac{3x}{R}\right) - g = 0$$

$$2\ddot{x} + \Omega^2R + 3\Omega^2x - g = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\Omega^2x = 0$$

$$\omega_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\Omega$$

Задача. Шахтер в центре Земли

Пусть шахтеры прокопали шахту вдоль диаметра Земли. Шахтер падает вниз, на него действует сила тяжести mg'. Рассматривается внутренняя сфера радиусом x. Уравнение движения записывается следующим образом:

$$m\ddot{x} = -mg' = -m\frac{GM(x)}{x^2} = -\frac{mG}{x^2}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi x^3$$

$$\ddot{x} + \frac{4\pi\rho G}{3}x = 0$$

Частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}$$

Время, через которое необходимо ловить шахтера на противоположной стороне:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}}$$

Максимальная скорость шахтера в центре Земли:

$$V = \omega R = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho GR^2} = \sqrt{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\frac{G}{R}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

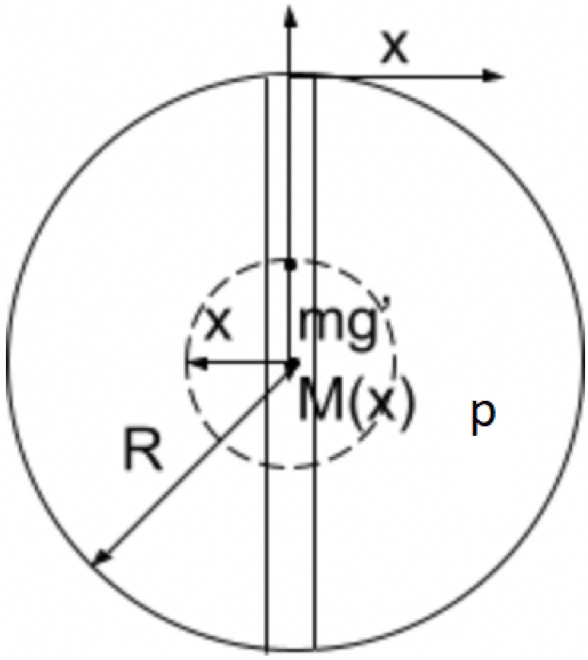

Рис. 18.3. Шахтер в центре Земли

Таким образом, получается первая космическая скорость.

Пусть есть следующая сила:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$$

Чтобы траектория была замкнутой, нужно получить 1 колебание.

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

$$F_x = -kx \quad m\ddot{x} = -kx$$

$$F_y = -ky \quad m\ddot{y} = -ky$$

Задача. Взаимодействие мяча со стеной

Пусть есть мяч радиусом R и давлением P. При ударе об стену мяч деформируется мало и деформация мяча настолько маленькая x, что давление внутри практически не меняется. Требуется найти время, в течение которого мяч будет взаимодействовать со стеной. Необходимо выбрать координатную ось.

$$F = PS = P \cdot \pi r^2$$

$$F = P\pi r^2 = P\pi(R^2 - (R-x)^2) = P\pi(R^2 - R^2 + 2Rx - x^2) \approx 2\pi RP \cdot x$$

$$m\ddot{x} = -2\pi RPx$$

$$\ddot{x} + \frac{2\pi RP}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi RP}{m}}$$

$$t = \frac{\pi}{\omega}$$

Рис. 18.4. Взаимодействие мяча со стеной

Задача. Труба и веревка

Пусть есть труба, изогнутая под прямым углом. Она закреплена и внутрь трубы вставлена однородная гибкая веревка массы m и длины L. Веревку отпускают и она пролезает в горизонтальную часть трубы. Требуется найти время, через которое вся веревка окажется в горизонтальной части трубы. Уравнение движения записывается следующим образом:

$$m\ddot{x} = \Delta mg$$

$$\ddot{x} = \frac{\Delta m}{m}g = \frac{L-x}{L}g$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

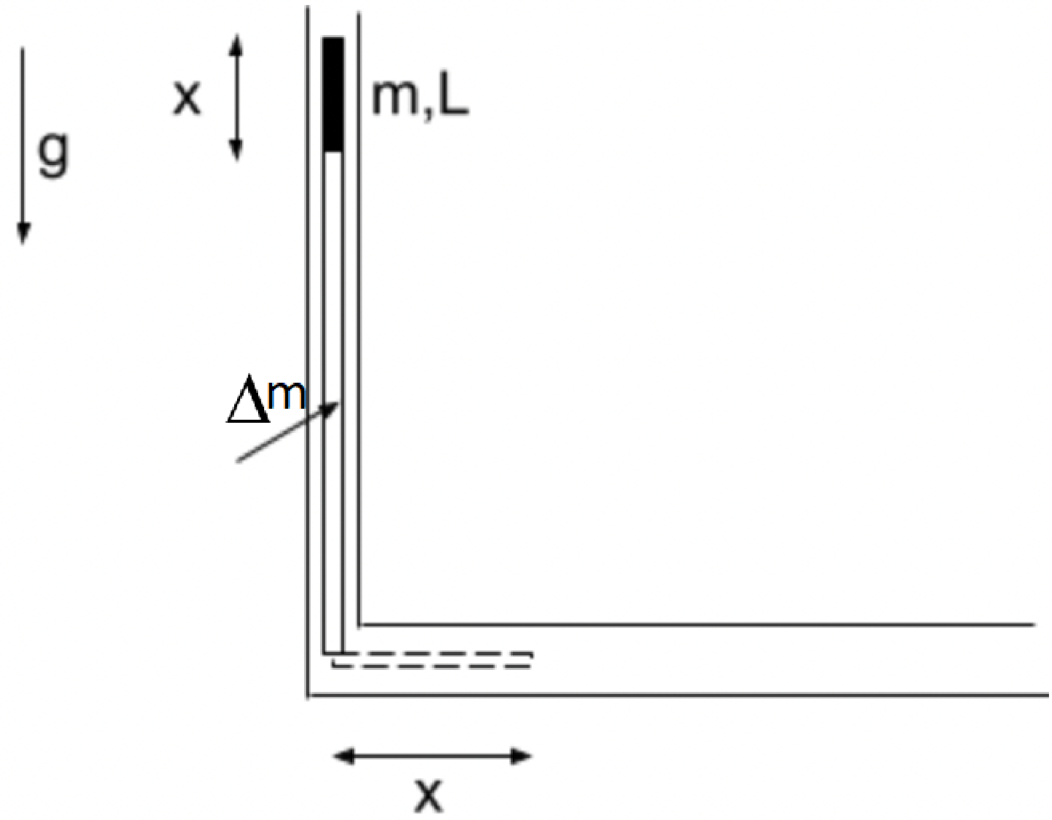

Рис. 18.5. Труба и веревка

Гармонические колебания

Пусть есть уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Необходимо найти решение этого уравнения:

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 A e^{\lambda t} = 0$$

$$A(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_1 = i\omega_0$$

$$\lambda_2 = -i\omega_0$$

Таким образом, решение записывается следующим образом:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Пусть:

$$x(0) = A_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

$$\dot{x}(t) = A_1 i\omega_0 e^{i\omega_0 t} - A_2 i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(0) = A_1 + A_2 = A_0$$

$$\dot{x}(0) = A_1 i\omega_0 - A_2 i\omega_0 = 0$$

$$A_1 = A_2 = \frac{A_0}{2}$$

Решение уравнения приобретает следующий вид:

$$x(t) = \frac{A_0}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = A_0 \cos\omega_0 t$$

Лекция 19. Затухающие и вынужденные колебания

Затухающие колебания

Затухающие колебания описываются следующими уравнением:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\delta = \frac{\alpha}{m}$$

$$F_{\text{тр}} = -\alpha\dot{x}$$

Решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_{з} t + \varphi + 0)$$

$$\omega_{з} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Решение таких уравнений необходимо найти в следующем виде:

$$x = Ae^{xt}$$

Затухающие колебания реализуются когда:

$$\omega_0 > \delta$$

Для характеристики затухающих колебаний вводятся некоторые параметры:

- Время релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

$$A(t) = A_o e^{-\delta t}$$

- Время полного затухания:

$$\tau_{\text{зат}} \sim 3\tau = \frac{3}{\delta}$$

- Логарифмический декремент затухания:

$$\theta = \delta T = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\frac{T}{\tau}} = \frac{1}{N_e}$$

- Добротность показывает как быстро колебательная система теряет энергию:

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E_{\text{т}}} \approx \frac{\pi}{\theta} = \pi \cdot N_e \approx 3N_e$$

  E — полный запас энергии системы. $\Delta E_{\text{т}}$ — изменение энергии системы за один период колебаний

Требуется, чтобы затухание не было медленным:

$$\delta << \omega_0 \quad \omega_{\text{з}} \approx \omega_0$$

$$\omega_{\text{з}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$\frac{|\omega_{\text{з}} - \omega_0|}{\omega_0} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2$$

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{1}{3}$$

Задача. Амплитуда колебательного маятника

Пусть есть колебательный маятник, который совершает затухающие колебания. Известны частота и логарифмический декремент затухания. Требуется найти время после колебаний, через которое амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза.

$$A_2 = A_1 e^{-\delta t}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{2} = e^{-\delta t}$$

$$\delta t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{T}{\theta}\ln 2$$

Период колебаний записывается следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{з}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\theta}{T}\right)^2}}$$

$$\omega_0^2 - \frac{\theta^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{T^2}(\theta^2 + 4\pi^2)$$

$$T = \frac{\sqrt{\theta^2 + 4\pi^2}}{\omega_0}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\theta} \cdot \frac{\sqrt{\theta^2 + 4\pi^2}}{\omega_0}$$

Задача. Добротность колебательного маятника

Пусть есть колебательный маятник, который совершает затухающие колебания. Заданы ω_0 и τ. Требуется найти добротность системы.

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi\omega_з}{\delta \cdot 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\delta} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_0\tau)^2 - 1}$$

Задача. Груз на пружине

Пусть есть груз на пружине, который был выведен из положения равновесия. Начальное отклонение:

$$S_0 = 1\ mm$$

$$\theta = 0{,}002$$

Требуется найти путь, который пройдет груз маятника до полной остановки. Сначала необходимо найти время, через которое произойдет полная остановка. Полная остановка произойдет через бесконечно большое.

$$S(t) = S?_0 e^{-\delta t}\cos\omega_з t$$

$$L = S_0 + 2S_0 e^{-\frac{\delta t}{2}} + 2S_0 e^{-\delta\cdot 2\frac{T}{2}} + 2\dot{S}_0 e^{-\delta\cdot 3\frac{T}{2}} + \dots =$$

$$= S_0\left(1 + 2\left(e^{-\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{2\theta}{2}} + e^{-\frac{3\theta}{2}} + \dots\right)\right) = S_0\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\theta}{2}}\right) =$$

$$= S_0\left(1 + 2\frac{e^{-\frac{\theta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\theta}{2}}}\right) = S_0\frac{1 + e^{\frac{-\theta}{2}}}{1 - e^{-\frac{\theta}{2}}} \approx S_0\left(1 + 2\frac{1 - \frac{\theta}{2}}{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)}\right) =$$

$$= S_0\left(1 + 2\frac{1 - \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right) = S_0\left(1 + \frac{4}{\theta} - 2\right) = S_0\left(\frac{4}{\theta} - 1\right) \approx \frac{4S_0}{\theta} \approx 2\ m$$

$$q = e^{-\frac{\theta}{2}}$$

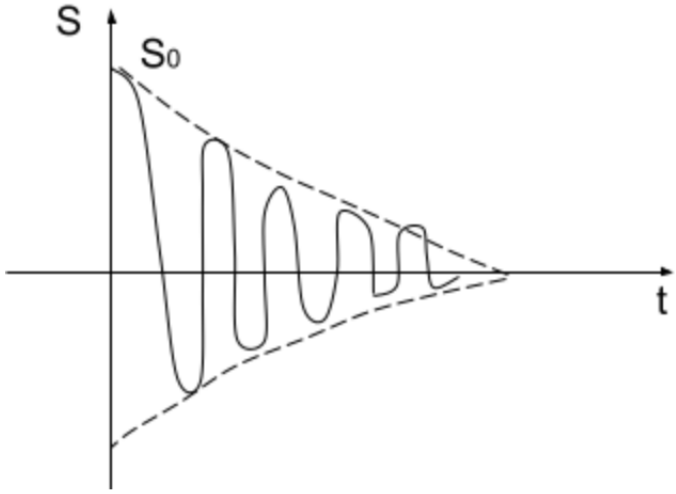

Рис. 19.1. График зависимости

Задача. Средняя мощность

Пусть есть колебательная система с коэффициентом затухания δ. Необходимо сделать так, чтобы колебания были незатухающими. Требуется найти среднюю мощность за период, которую надо сообщать системе, чтобы система совершала незатухающие колебания. Записывается формула добротности двумя способами:

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E_{\text{т}}}$$

Таким образом, средняя мощность имеет следующее значение:

$$N_{\text{т}} = \frac{\Delta E_{\text{т}}}{T} = 2\delta E_0$$

Эту задачу можно также решить через интегрирование.

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{з}} = \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = A(-\delta e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{з}} t + \varphi_0)) - \omega_{\text{з}} e^{-\delta t}\sin(\omega_{\text{з}} t + \varphi_0) =$$
$$= -A\omega_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega_0}\cos(\omega_{\text{з}} t + \varphi_0) + \frac{\omega_{\text{з}}}{\omega_0}\sin(\omega_{\text{з}} t + \varphi)\right) =$$
$$= -A\omega_0 e^{-\delta t}\sin\left(\omega_{\text{з}} t + \varphi_0 + \psi\right)$$

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \sin\psi$$

$$\frac{\omega_з}{\omega_0} = \cos\psi$$

$$< E_{кин} >_т = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}$$

Полная энергия записывается следующим образом:

$$E(t) = E_0 e^{-2\delta t}$$

Вынужденные колебания

Задачи по вынужденным колебаниям делятся на 2 класса:

1) задачи на применения формул (задачи про установившие вынужденные колебания);

2) задачи на рассмотрение установления вынужденных колебаний.

Записывается уравнение, которое описывает вынужденные колебания:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = f_0\cos\omega t$$

Решение этого уравнения состоит из двух частей. Установившиеся вынужденные колебания происходят по гармоническому закону.

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Пусть построена амплитудно-частотная характеристика. Можно найти резонансную частоту. Если выбрать любую амплитуду и провести горизонталь, выбрать 2 частоты (ω_1, ω_2), то резонансная частота выражается через них.

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\delta^2\omega_2^2$$

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 - (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 = 4\delta^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_0^2 + \omega_2^2)(\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_0^2 - \omega_2^2) = 4\delta^2(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

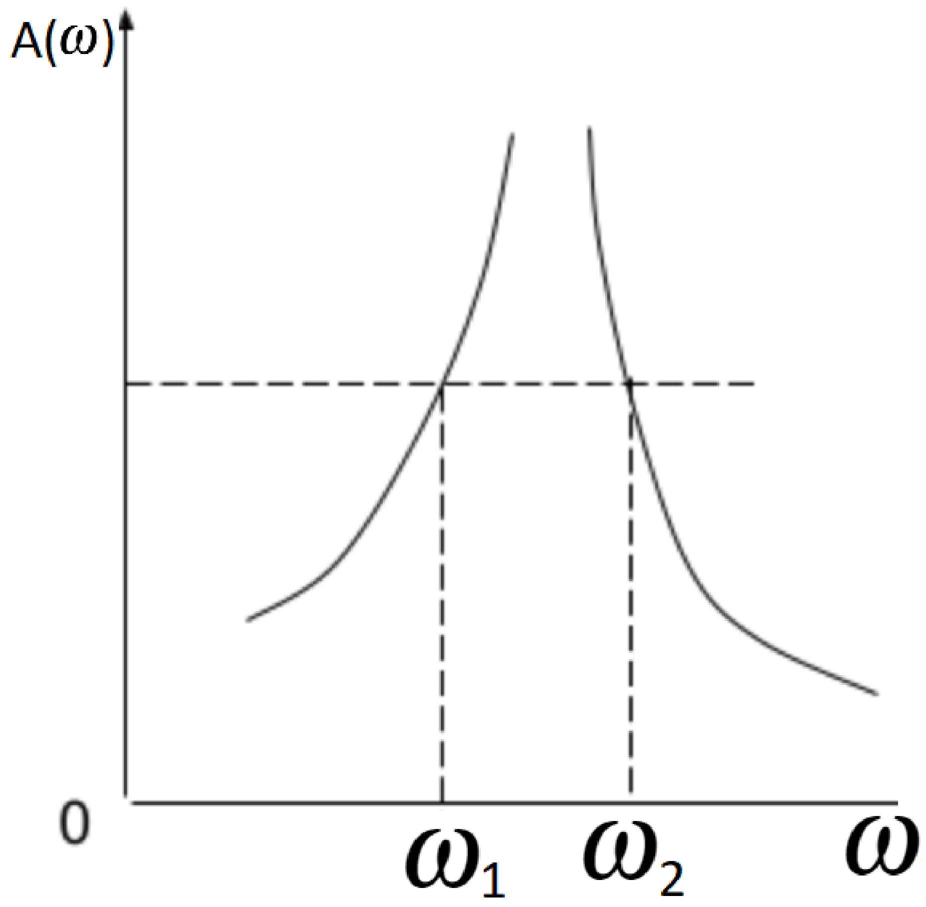

Рис. 19.2. Амплитудно-частотная характеристика

$$2\omega_0^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)=4\delta^2=2\omega_0^2-2\omega_p^2$$

Резонансная частота записывается следующим образом:

$$\omega_p^2=\omega_0^2-2\delta^2$$

$$2\delta^2=\omega_0^2-\omega_p^2$$

$$\omega_p=\sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}$$

Формула для амплитуды скорости записывается следующим образом:

$$V_0(\omega)=\frac{F_0}{m}\frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_2^2)+4\delta^2\omega^2}}=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega}\right)^2+4\delta^2}}$$

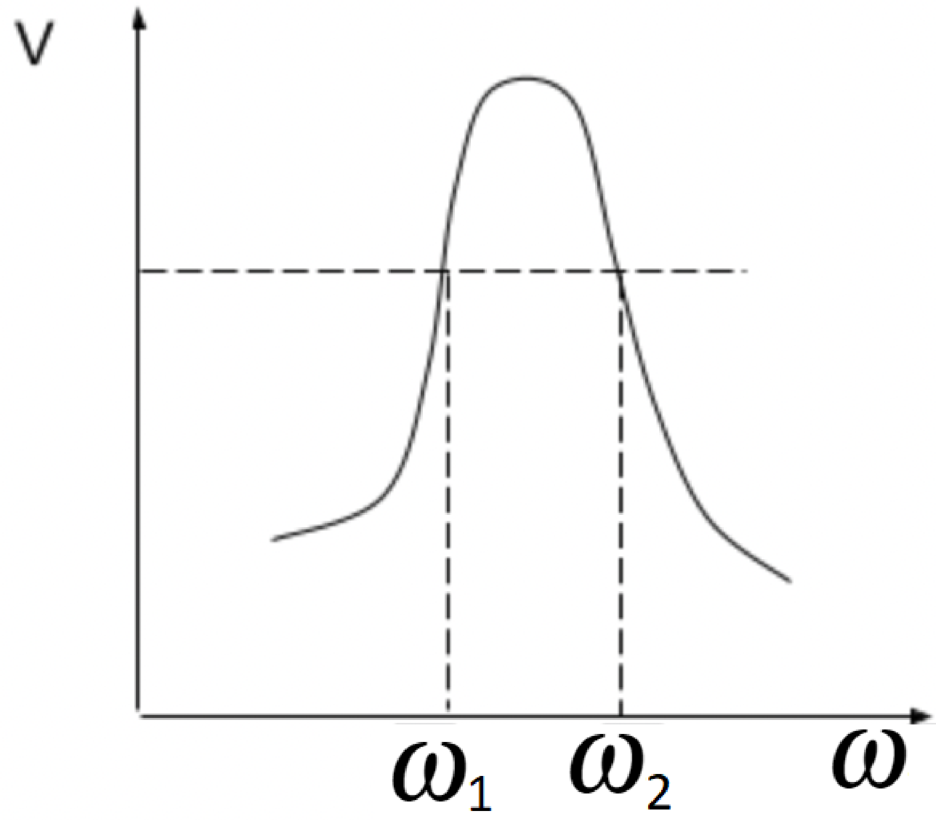

Рис. 19.3. Резонанс скорости

Резонансная частота находится следующим образом:

$$\left(\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1}\right)^2=\left(\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_2}\right)^2$$

$$\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1}=-\frac{\omega_0^2-\omega_2^2}{\omega_2}$$

$$\omega_0^2\omega_2-\omega_1^2\omega_2=\omega_2^2\omega_1-\omega_0^2\omega_1$$

$$\omega_0^2(\omega_1+\omega_2)=\omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2)$$

Таким образом, резонансная частота равна:

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}$$

Резонансная частота для резонансного ускорения ω_a необходимо находить следующим образом:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\omega_V = \omega_0$$

$$\omega_A \cdot \omega_a = \omega_V^2 = \omega_0^2$$

$$\omega_a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

Задача. Маятник с вынужденными колебаниями

Пусть есть маятник, который совершает установившиеся вынужденные колебания под действием гармонических вынуждающих сил.

$$F(t) = F_0 \cos\omega t$$

$$x(t) = a\cos(\omega t - \alpha)$$

Требуется определить работу, которую совершает внешняя сила за один период колебаний.

$$A_F = \int\limits_0^T \vec{F}\vec{v}dt = \int\limits_0^T F_0\cos\omega t \cdot (-a)\omega\sin(\omega t - \alpha)dt =$$

$$= -a\omega F_0 \int\limits_0^T \cos\omega t(\sin\omega t\cos\alpha - \cos\omega t\sin\alpha)dt =$$

$$= a\omega F_0\sin\alpha \int\limits_0^T \cos^2\omega t dt - a\omega F_0\cos\alpha \int\limits_0^T \sin\omega t\cos\omega t dt =$$

$$= a\omega F_0\sin\alpha \cdot \frac{T}{2} = \pi F_0 a(\omega)\sin[\alpha(\omega)]$$

Рассматривается мощность этой силы за период. Необходимо найти частоту, при которой мощность системы достигает максимума. Средняя мощность записывается следующим образом:

$$N_{\text{т}} = \frac{A_F}{T} = \frac{\pi F_0 a(\omega)\cdot\sin\alpha(\omega)\cdot\omega}{2\pi} = \frac{F_0}{2}V(\omega)\cdot\sin\alpha(\omega)$$

Лекция 20. Волны

Задача. Вынужденные колебания

Вынужденные колебаний с периодической силой рассматриваются по той причине, что любую силу можно представить в виде суммы гармонических функций. Такое представление также называют разложением в ряд Фурье. Пусть есть груз массы m с пружиной жесткости k. Трения нет. в момент времени $t = 0$ к грузу прикладывают постоянную силу:

$$\vec{F} = \vec{F}_0 = const$$

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

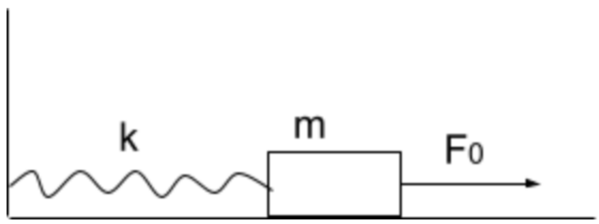

Рис. 20.1. Груз, прикрепленный к пружине

Требуется найти амплитуду установившихся колебаний. Записываются уравнения движения:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \;\to\; x_1(t) = x_0 + A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$m\ddot{x} = -kx \;\to\; x_2(t) = \alpha\sin(\omega_0 t + \psi_0) \quad \alpha - ?$$

$$x_1(\tau) = x_2(\tau)$$

$$\dot{x}_1(\tau) = \dot{x}_2(\tau)$$

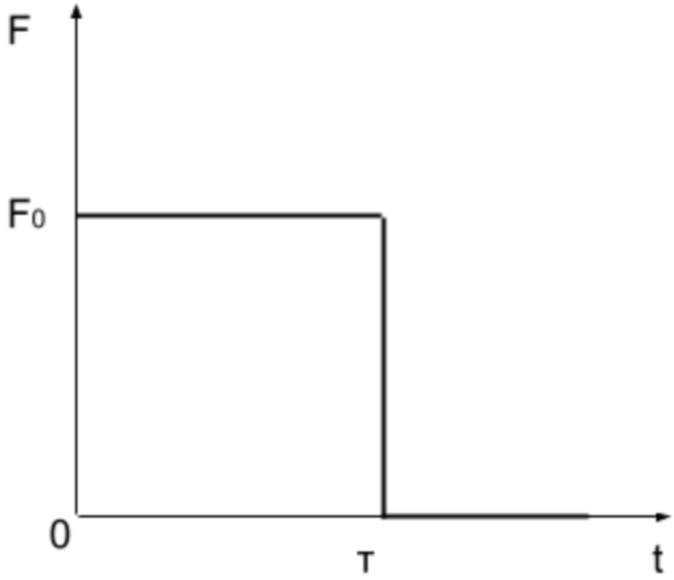

Рис. 20.2. График зависимости

Так-как силы разные, ускорения не совпадают.

Волны

Волна описывается функцией $S(x,t)$. Когда среда деформируется, возникают напряжения: нормальные и касательные. Если волна нормальная, то волна получается продольной. Если волна касательная, то волна получается поперечной. Волновое уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Решением такого уравнения является следующая функция:

$$S(x,t) = S\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

c — скорость распространения волнового возмущения. Плоская бегущая гармоническая волна:

$$S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

k — волновое число.

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Амплитуда колебаний скорости:

$$v_0 = \omega S_0$$

Амплитуда ускорения:

$$a = \omega^2 S_0$$

Амплитуда относительно деформаций:

$$\varepsilon_0 = kS_0$$

Амплитуда волны механического напряжения:

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0$$

Модуль Юнга:

$$E = \rho C^2$$

Формула скорости волны в натянутой струне:

$$C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Первое соотношение — акустический закон Ома:

$$v_0 = \frac{\sigma_0}{\rho C} = \frac{\Delta P_0}{\rho C}$$

Рассматриваются энергетические характеристики волны. Волна может переносить энергию. Этот перенос энергии характеризуется вектором Умова. Энергия, которая перенесется на площади:

$$W = w \cdot c\Delta t \cdot \Sigma$$

Мощность волны записывается следующим образом:

$$\frac{W}{\Delta t} = w \cdot c \cdot \Sigma = P$$

Плотность потока энергии записывается следующим образом:

$$\frac{P}{\Sigma} = \frac{W}{\Delta t \Sigma} = wc$$

Эти величины зависят от времени о координат. Объемная плотность кинетической энергии записывается как:

$$w_{\text{кин}} = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$$

Объемная плотность потенциальной энергии записывается как:

$$w_{\text{пот}} = w_{\text{упр}} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2$$

$$w = w_{\text{кин}} + w_{\text{пот}}$$

Вектор Умова выводится следующим образом:

$$\vec{J} = w\vec{c}$$

Среднее значение вектора Умова называется интенсивность волны:

$$I =< J >= \frac{1}{2}\rho S_0^2\omega^2 c = \frac{1}{2}\rho c \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}\rho c \cdot \frac{(\Delta\rho)^2}{\rho c} = I$$

Задача. Бегущие волны

В среде распространяется плоская бегущая гармоническая волна. Известно, что волна бежит в положительном направлении оси x. Известно, что в некоторой точке среды относительная деформация равна ε. Требуется найти проекцию скорости (v_x) частиц на ось x в данный момент в этой же точке среды.

$$S(x,t) = S_0\cos(\omega t - kx)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x} = S_0 k \sin(\omega t - kx)$$

$$v_x = \frac{\partial S}{\partial t} = -S_0\omega\sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{v_x}{\varepsilon} = -\frac{\omega}{k} = -c = -\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$v_x = -\varepsilon\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\varepsilon = \pm\frac{v}{c}$$

Задача. Отношение амплитуды колебаний скорости частиц к скорости волны

Уравнение плоской звуковой волны имеет следующий вид:

$$S(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$$

Требуется найти отношение амплитуды колебаний скорости частиц к скорости волны ($\frac{v_0}{c}$).

$$\frac{v_0}{c} = \frac{\omega S_0}{c} = \frac{\omega S_0 k}{\omega} = S_0 k = ak$$

Задача. Две плоские бегущие волны

Пусть есть упругая однородная среда, в которой распространяются 2 плоские бегущие волны. У этих волн одинаковые амплитуды, частоты. Эти волны продольные, но первая волна бежит вдоль оси x, а вторая — вдоль оси y. Начальные фазы обеих волны нулевые. Требуется найти среднее значение плотности потока энергии, распространяющегося вдоль кривой $y = x$. Необходимо найти интенсивность на прямой $x = y$.

$$\vec{S}_1(x,t) = a\vec{e}_x\cos(\omega t - kx)$$

$$\vec{S}_2(y,t) = a\vec{e}_y\cos(\omega t - ky)$$

$$y = x$$

Суммарная волна записывается следующим образом:

$$S = S_1(x,t) + S_2(y,t) = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos(\omega t - kx) =$$

$$= a\sqrt{2}\vec{e}_z\cos\left(\omega t - \frac{kz}{\sqrt{2}}\right) = a\sqrt{2}\vec{e}_z\cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega\sqrt{2}}z\right)\right) =$$

$$= a\sqrt{2}\vec{e}_z\cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c_1}\right)\right)$$

Таким образом, интенсивность записывается следующим образом:

$$I = \frac{1}{2}\rho S_0^2\omega^2 c_1 = \frac{1}{2}\rho\left(a\sqrt{2}\right)^2\cdot\omega^2\cdot c\sqrt{2} = \sqrt{2}\rho a^2 c\omega^2$$

Необходимо найти точки, в которых амплитуда максимальна и минимальна. Рассматривается суммарная волна:

$$S = S_1 + S_2$$

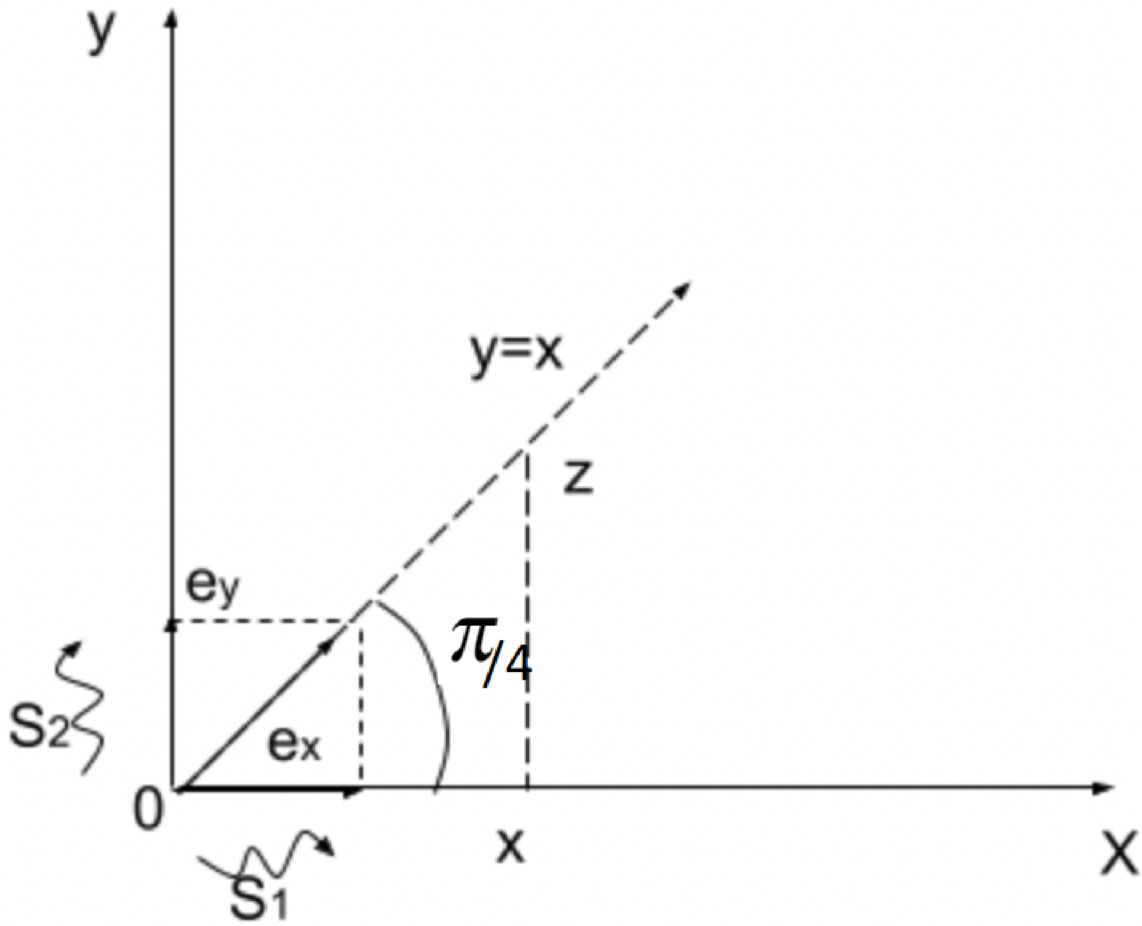

Рис. 20.3. Две плоские бегущие волны

$$
\begin{aligned}
S^2 = S_1^2 + S_2^2 = a^2\cos^2(\omega t - kx) + a^2\cos^2(\omega t - ky) = \\
= \frac{a^2}{2}(1+\cos 2(\omega t - kx) + 1 + \cos 2(\omega t - ky)) = \\
= \frac{a^2}{2}(2 + 2\cos(2\omega t - k(x+y)) \cdot \cos(k(y-x))) = \\
= a^2(1+\cos(2\omega t - k(x+y))\cos(k(y-x)))
\end{aligned}
$$

Таким образом, точка, где амплитуда минимальная получается следующим образом:

$$
k(y-x) = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1,2,3,\ldots
$$

$$
y = x + \frac{\lambda}{2\pi}(2n-1)\frac{\pi}{2} = x + \frac{\lambda}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)
$$

Таким образом, точка, где амплитуда максимальная получается следующим образом:

$$\cos k(y-x) = \pm 1$$

$$k(y-x) = \pm \pi n$$

$$y = x \pm \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \pi n = x \pm \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

Лекция 21. Волны

Задача. Энергия волны

Пусть есть точечный изотопный источник, который излучает гармонические волны. Мощность этого источника постоянна. Источник находится на оси на расстоянии L от центра. Известно, что интенсивность волны центра диска равна I_0. Требуется вычислить средний поток энергии волны через поверхность диска.

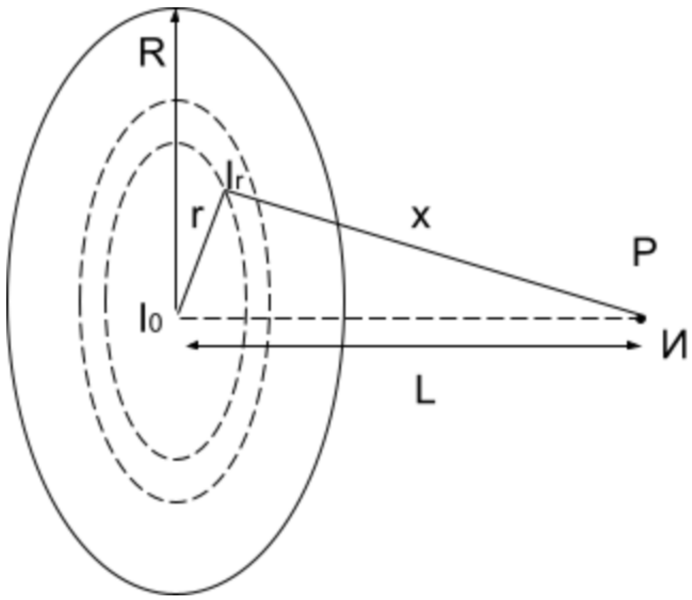

Рис. 21.1. Энергия волны

Мощность, испускаемая источником, обозначается через P. Интенсивность I_0 и P связаны следующим образом:

$$I_0 = \frac{P}{4\pi L^2}$$

Средний поток энергии волны находится следующим образом:

$$I_r = \frac{P}{4\pi x^2} = \frac{I_0 L^2}{x^2} = \frac{I_0 L^2}{L^2 + r^2}$$

Поток записывается следующим образом:

$$dJ = I_r \cdot dS \cos\alpha = \frac{I_0 L^2}{L^2 + r^2} \cdot 2\pi r dr \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{2\pi I_0 L^3 r dr}{(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi I_o L^3 d(L^2 + r^2)}{(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$J = \pi I_0 L^3 = \int\limits_0^R \frac{d(L^2+r^2)}{(L^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi I_0 L^3 \cdot (-2)\frac{1}{(L^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^R = 2\pi I_0 L^3 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right) =$$

$$= 2\pi I_0 L^2 \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\right) = \frac{P}{4\pi}\cdot 2\pi(1-\cos\theta) = \frac{\Omega}{4\pi}\cdot P$$

Телесный угол Ω определяется с помощью поверхности конуса:

$$\Omega = \frac{\Delta S}{R^2}$$

Необходимо найти телесный угол диска.

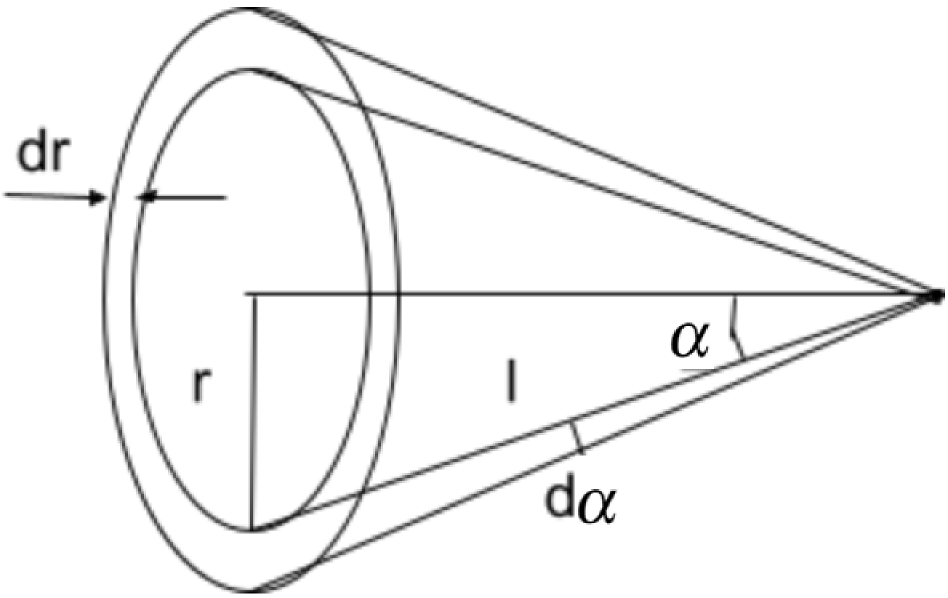

Рис. 21.2. Телесный угол диска

$$dS = 2\pi r dr = 2\pi l \sin\alpha \cdot l d\alpha$$

$$d\omega = \frac{dS}{L^2} = 2\pi \sin\alpha d\alpha$$

$$\Omega = 2\pi \int\limits_0^\theta \sin\alpha d\alpha = 2\pi(1-\cos\theta)$$

Задача. Изотопный источник энергии в центре цилиндра

Пусть есть цилиндр с радиусом R и высотой H. В центре цилиндра на его оси находится изотропный источник волн. Требуется найти средний поток энергии, который падает на боковую поверхность цилиндра.

$$P_{\text{торец}} = \frac{P}{4\pi} \cdot 2\pi(1-\cos\theta) = \frac{P}{2}(1-\cos\theta)$$

$$P_{\text{бок}} = P - 2P_{\text{торец}} = P - P(1-\cos\theta) = P\cos\theta = P \cdot \frac{\frac{H}{2}}{\sqrt{\frac{H^2}{4}+R^2}} = \frac{PH}{\sqrt{H^2+4R^2}}$$

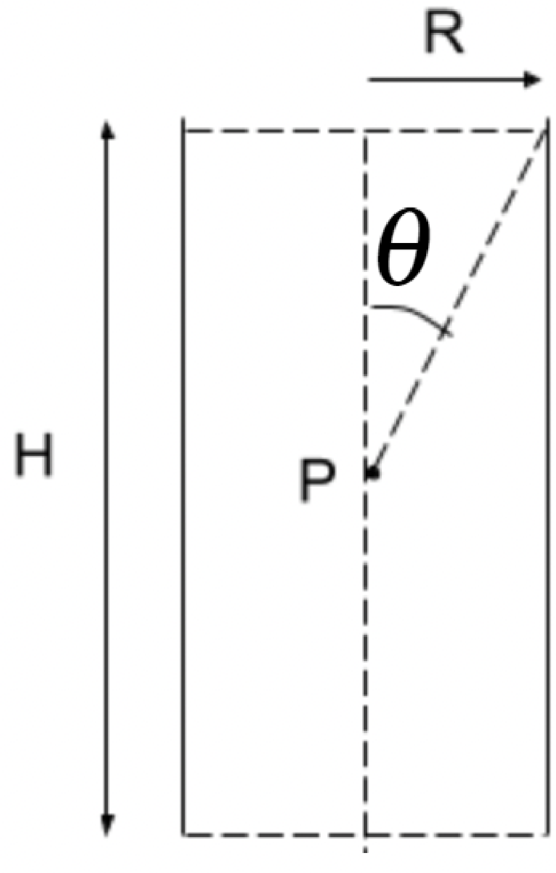

Рис. 21.3. Изотопный источник энергии в центре цилиндра

Эффект Доплера

Эффект Доплера — это эффект изменения частоты волны. Наблюдается при движении либо источника, либо приемника, либо и того, и другого. Движение должно быть в в продольном направлении. Эффект Доплера отсутствует при поперечном движении.

Пусть есть источник, который движется со скоростью u и испускает звуковую волну со скоростью c. Приемник покоится. Частота звука равна ν_0.

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u}{c}}$$

Пусть источник покоится и испускает звуковую волну со скоростью c, а приемник движется со скоростью v.

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

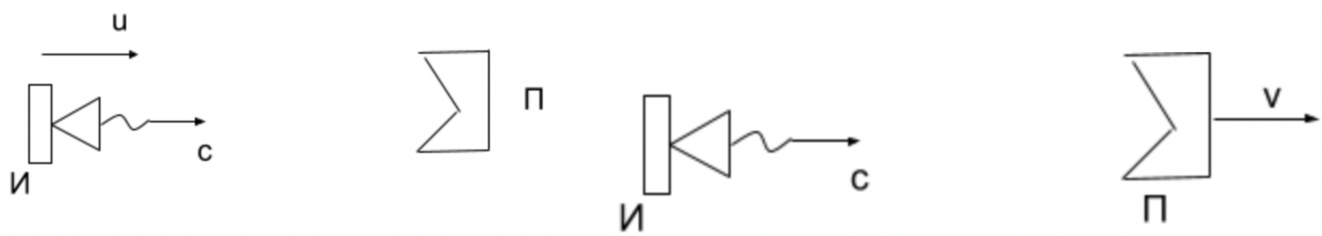

Рис. 21.4. Эффект Доплера

Когда движутся и источник и приемник, получается следующее:

$$\nu' = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c}}$$

$$\nu' = \nu_0 \frac{1 - \frac{\vec{v}\vec{c}}{c^2}}{1 - \frac{\vec{u}\vec{c}}{c^2}}$$

Задача. Источник звука, приемник и неподвижная стена

Пусть есть неподвижная стена, по направлению к которой движется источник звука со скоростью v. Известно, что приемник регистрирует биение на частоте $\nu_Б$, а частота неподвижного источника ν_0. Известно также, что скорость звука c. Требуется найти скорость источника. Биение является результатом сложений сигналов.

$$\nu_1 = \frac{\nu_1}{1+\frac{v}{c}}$$

$$\nu_2 = \frac{\nu_0}{1-\frac{v}{c}}$$

$$\nu_Б = \nu_2 - \nu_1 = \nu_0\left(\frac{1}{1-\frac{v}{c}} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}}\right) = \nu_0\frac{2\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\nu_Б \approx \nu_0\frac{2v}{c} \ \rightarrow \ v = \frac{c}{2}\cdot\frac{\nu_Б}{\nu_0}$$

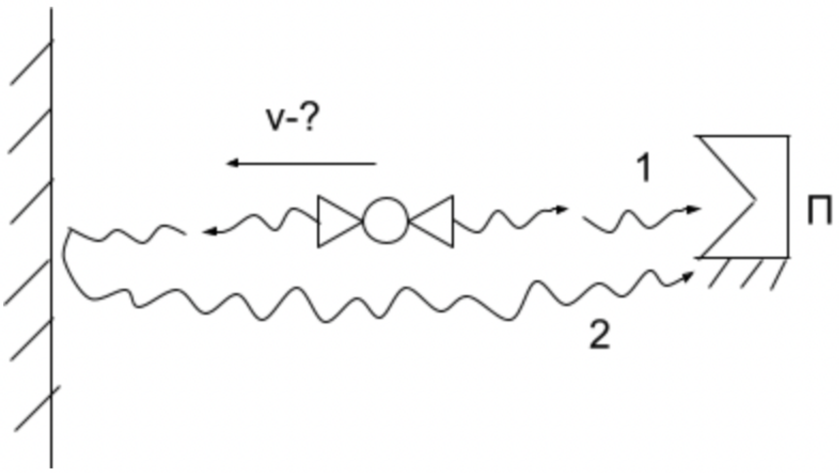

Рис. 21.5. Источник звука, приемник и неподвижная стена

Пусть:

$$\nu_Б = 4 \text{ Гц}$$

$$\nu_0 = 400 \text{ Гц}$$

$$c = 340 \ \frac{m}{s}$$

Тогда:

$$v = 170\cdot\frac{1}{100} = 1,7 \ \frac{m}{s}$$

$$\nu_Б - x^2\nu_Б = 2\nu_0 x$$

$$x^2 + \frac{2\nu_0}{\nu_Б}x - 1 = 0$$

Вывод биения

Пусть складываются 2 колебания с близкими частотами.

$$x_1(t) = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2(t) = A\cos\omega_2 t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

Пусть:

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

Тогда:

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega_{\text{ср}} \approx \omega_1 \approx \omega_2 = \omega$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$$

$$x(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cdot\cos\omega t$$

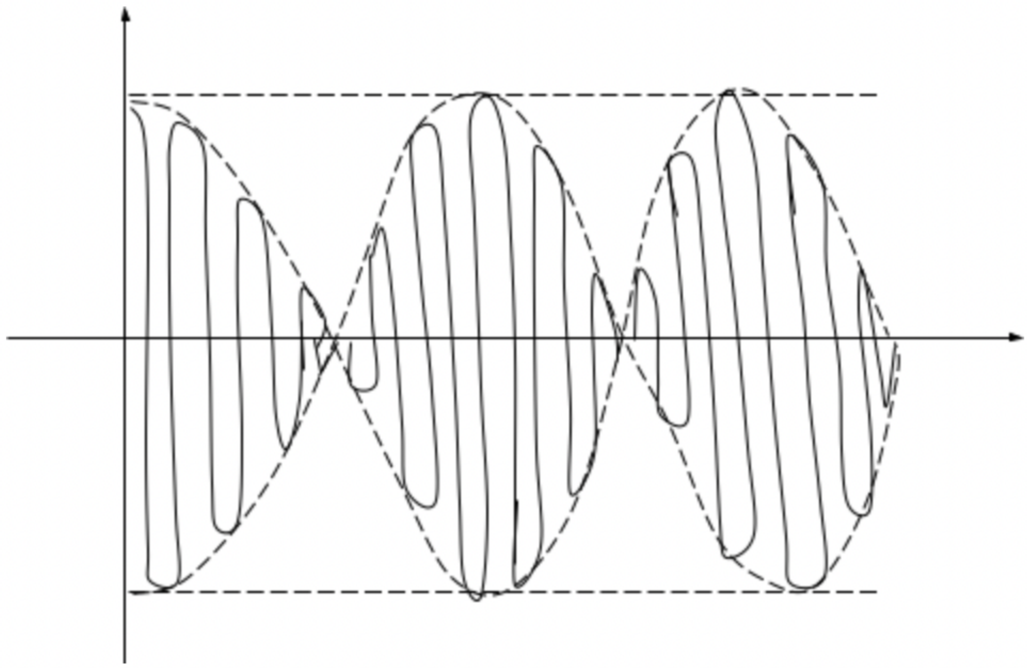

Рис. 21.6. График биения

Период биения записывается следующим образом:

$$T_Б = \frac{T_{ог}}{2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_Б}$$

Частота биения записывается в виде:

$$\omega_Б = \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$$

Период огибающей записывается следующим образом:

$$T_{ог} = \frac{2\pi \cdot 2}{\Delta\omega} = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$$

Пусть:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c}$$

Тогда:

$$\left|\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right| = \frac{v}{c}$$

Задача. Неподвижный источник

Пусть есть неподвижный источник, который имеет частоту ν_0. На встречу источнику движется стенка со скоростью v. Требуется найти относительное изменение частоты звука, отраженного от стенки по сравнению с частотой, которую испускает источник. Сначала волна поглощается стеной, а потом пере-испускается.

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_0 = \nu_0 \frac{1 + \frac{v}{c} - 1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \frac{2\frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx \frac{2v}{c} \ (v << c)$$

$$\Delta\nu = \frac{2v}{c} \cdot \nu_0$$

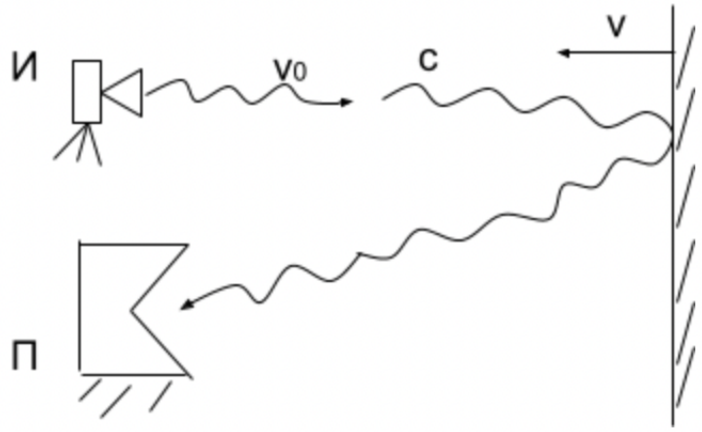

Рис. 21.7. Неподвижный источник

Лекция 22. Стоячие волны

Стоячие волны

Стоячие волны можно получить с помощью сложения бегущих на встречу волн. Пусть есть плоская бегущая гармоническая волна. Эта волна является решением волнового уравнения. Волна, которая бежит в противоположном направлении, тоже удовлетворяет решению волнового уравнения. Стоячая волна — это сумма двух этих волн. Эта сумма тоже будет удовлетворять волновому уравнению. Стоячую волну можно получить из волнового уравнения. Волновое уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Решение волнового уравнения записывается с помощью метода разделения переменных:

$$S(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X \cdot T'' = c^2 X'' T$$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -k^2$$

Необходимо, чтобы для любого момента времени и для любой координаты это соотношение тождественно удовлетворялось. Это соотношение можно разделить на два уравнения:

$$X'' + k^2 X = 0$$

$$T'' + k^2 c^2 T = 0$$

Решения уравнений записываются следующим образом:

$$X(x) = \tilde{A} \cos kx + \tilde{B} \sin kx$$

$$T(t) = \tilde{C} \cdot \cos(ckt + \varphi_0)$$

Полное решение уравнения:

$$S(x,t) = (A \cos kx + B \sin kx) \cdot \cos(ckt + \varphi_0)$$

Чтобы стоячая волна существовала, среда должна быть ограничена. Пусть есть струна, у которой есть две границы (левый и правый конец). Требуется, чтобы концы были закреплены. Если оба конца закреплены, то смещение в обоих концах равно 0:

$$S(0,t) = S(l,t) = 0$$

$$S(0,t) = A\cos kx \cdot \cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ A = 0$$

$$S(l,t) = B\sin kl \cdot \cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ \sin kl = 0$$

$$k_n \cdot l = \pi n \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$l = \frac{\pi n}{k_n} = \frac{\pi n}{2\pi}\lambda = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}$$

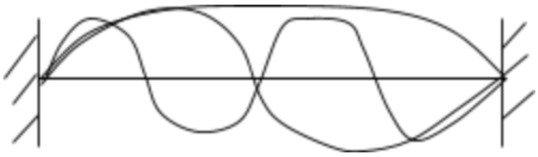

Рис. 22.1. Первый случай

Рассматривается случай, когда оба конца свободны. На концах струны относительная деформация равна 0:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=l} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial X} = (-Ak\sin kx + Bk\cos kx)\cos(ckt + \varphi_0)$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=0} = Bk\cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ B = 0$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=l} = -Ak\sin kl \cdot \cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow Z\sin kl = 0$$

Длина струны:

$$l = n\frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2}\frac{c}{\nu}$$

Рис. 22.2. Второй случай

Волны со следующими частотами могут получаться на струне:

$$\nu_n = \frac{c}{2l}n$$

Соответствующие волны называются модами. Нормальные колебания — это такие колебания, при которых все части системы совершают гармонические колебания с одинаковой частотой.

Рассматривается струна, у которой один конец закреплен, а второй конец свободный.

$$S(0,t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=l} = 0$$

$$A\cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ A = 0$$

$$Bk\cos kl \cdot \cos(ckt + \varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ \cos kl = 0$$

$$k_n \cdot l = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Длина волны:

$$l = (2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{2\pi} = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = \frac{2n-1}{4}\frac{c}{\nu_n}$$

Частота волны:

$$\nu_n = (2n-1)\frac{c}{4l}$$

Решение волнового уравнения записывается следующим образом:

$$S(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos k_n x + B_n \sin k_n x)\cos(ck_n t + \varphi_{0n})$$

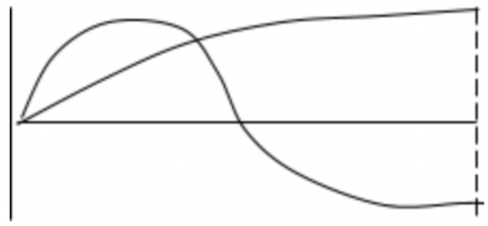

Рис. 22.3. Третий случай

В этом решении бесконечное число констант. Используются начальные условия, чтобы найти константы. Первое начальное условие смещения:

$$S(x,0) = f(x)$$

Второе начальное условие скорости:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

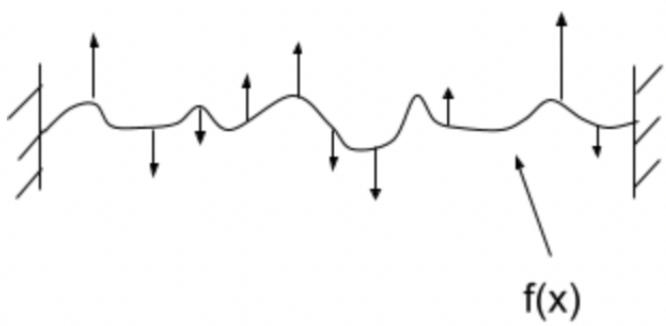

Рис. 22.4. Начальное условие

$$S(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x) \cos \varphi_{0n} = f(x)$$

Задача. Длина струны

Пусть есть струна с закрепленными концами. Известно, что при укорочении струны на 10 см частота основного тона струны изменилась в 1,5 раза. Требуется найти длину L струны до укорочения.

$$\Delta l = 10 \text{ см}$$

$$\nu_1 = \frac{c}{2L}$$

$$\nu_2 = \frac{c}{2(L-\Delta l)} = k\nu_1 = \frac{kc}{2L}$$

$$L = kL - k\Delta l$$

$$L = \frac{k\Delta l}{k-1} = 30 \text{ см}$$

Задача. Сила натяжения струны

Струна длины l и диаметра d изготовлена из материала плотности ρ. Оба конца струны закреплены. известно, что эта струна дает частоту основного тона ν. Требуется найти силу натяжения струны.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_л}}$$

$$\nu = \frac{c}{2L}$$

$$\rho_л = \frac{m}{L} = \frac{\rho\left(\frac{\pi d^2}{4}\cdot L\right)}{L} = \frac{\rho\pi d^2}{4}$$

$$T = c^2\cdot\rho_л = 4L^2\nu^2\cdot\frac{\rho\pi d^2}{4} = \pi\rho(\nu L d)^2$$

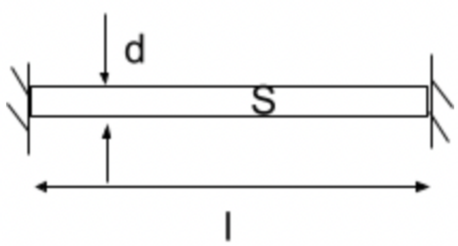

Рис. 22.5. Сила натяжения струны

Задача. Способ измерения звука

Пусть есть на практике используемый способ измерения звука в воздухе. Берется труба, внутри которой воздух. Один из торцов трубы закрыт упругой мембраной. В этой трубе возбуждают стоячие волны. Пусть поймали резонанс на частоте ν. Потом поршень внутри трубы двигают. Это приводит к тому, что труба не звучит. Если передвинуть поршень в другое нудное положение на расстояние L, то труба начнет звучать снова. Требуется найти скорость звука c.

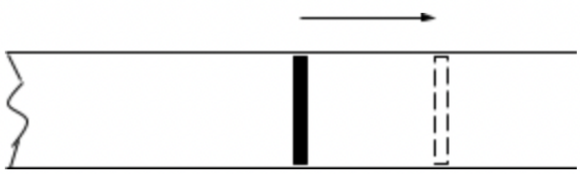

Рис. 22.6. Способ измерения звука

$$l = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\Delta l - L = 2\Delta n \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}$$

$$c = 2\nu\Delta l = 2\nu L$$

На практике скорость определяется следующим образом:

$$\Delta l(n) = \frac{\lambda}{2} \cdot \Delta n$$

Задача. Полный запас энергии

Пусть на струне установилась стоячая волна. Требуется найти полный запас энергии между двумя соседними узлами. Волна распространяется в неограниченной среде.

$$S(x,t) = A\cos\omega t\cos kx$$

Узлам соответствуют следующие координаты:

$$\cos kx = 0 \;\rightarrow\; k_n x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

Кинетическая энергия струны записывается следующим образом:

$$w_{\text{кин}} = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2\omega t\cos^2 kx$$

$$w_{\text{кин}} = \frac{W_{\text{кин}}}{l}$$

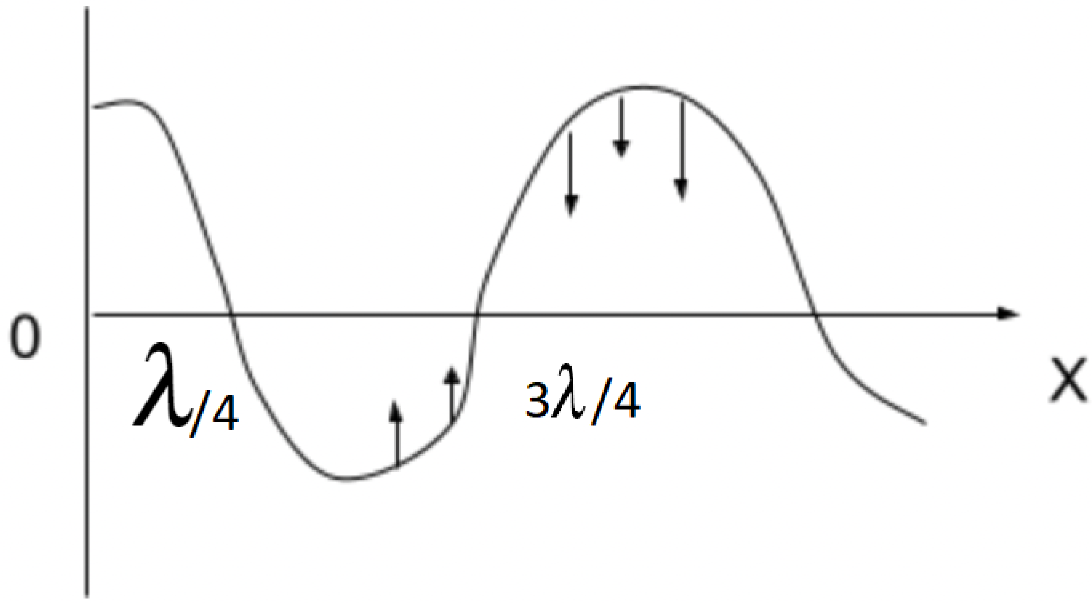

Рис. 22.7. График зависимости

Таким образом, полная энергия системы записывается следующим образом:

$$W = \int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}} w_{\text{кин}}\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right)\cdot dx = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}}\cos^2 kx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}}(1+\cos 2kx)dx = \frac{\rho A^2\omega^2}{4}\left(X\Big|_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}} + \frac{1}{2k}\sin 2kx\Big|_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\rho A^2\omega^2\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4}\rho\frac{\lambda}{2}(A\omega)^2 = \frac{mv_0^2}{4} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{mv_{\text{эфф}}^2}{2}$$

Задача. Нормальные частоты системы

Пусть есть упругий стержень длины L, который жестко закреплен по середине. В этом стержне возбудили поперечные стоячие волны. Скорость этих волн равна c. Требуется найти нормальные частоты этой системы.

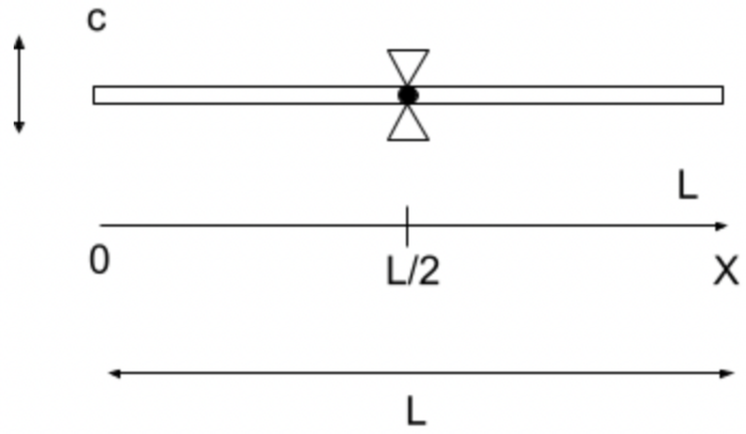

Рис. 22.8. Нормальные частоты системы

$$S(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos(ckt + \varphi_0)$$

Граничные условия системы:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=L} = 0$$

$$S\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial X} = (-Ak\sin kx + Bk\cos kx)\cos(ckt + \varphi_0)$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=0} = Bk\cos(ckt + \varphi_0) = 0 \;\rightarrow\; B = 0$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial X}\right|_{x=L} = -Ak\sin kL\cdot\cos(ckt + \varphi_0) = 0 \;\rightarrow\; \sin kL = 0$$

$$S\left(\frac{L}{2}, t\right) = A\cos k\frac{L}{2}\cos(ckt + \varphi_0) = 0 \;\rightarrow\; \cos\frac{kL}{2} = 0$$

Решения уравнений:

$$k_n L = \pi n$$

$$k_n \frac{L}{2} (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{L}$$

$$L = \frac{(2n-1)\pi\lambda}{2\pi} = \frac{2n-1}{2} \frac{c}{\nu_n}$$

$$\nu_n = (2n-1) \frac{c}{2L}$$

Лекция 23. Поведение волны при падении на границу раздела двух сред

Задача. Поведение волны при падении на границу раздела двух сред

Условие задачи: почему рыбы слышат людей, а люди их нет? Когда волна падает на границу раздела двух сред, она может отразиться или пройти в среду.

Пусть есть граница раздела двух сред. Первая среда плотности ρ_1, в ней волна распространяется со скоростью c_1. Вторая среда плотности ρ_2, в ней волна распространяется со скоростью c_2. Пусть на границу вдоль оси x падает плоская бегущая гармоническая волна $S_1(x,t)$. Упав на границу раздела, она отражается ($S_2(x,t)$) и проходит во вторую среду $S_3(x,t)$. У падающей волны частота ω. Частоты отраженной и проходящей волн такие же. Волновое число в первой среде:

$$k = \frac{\omega}{c_1}$$

Волновое число во второй среде:

$$k_{\text{п}} = \frac{\omega}{c_2}$$

Записывается выражение для смещений:

$$S_1(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$$

$$S_2(x,t) = S_0\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

$$S_3(x,t) = S_{\text{п}}\cos(\omega t - k_{\text{п}}x + \varphi_{\text{п}})$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$S_1(0,t) + S_2(0,t) = S_3(0,t)$$

$$\sigma_1(0,t) + \sigma_2(0,t) = \sigma_3(0,t)$$

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$a\cos\omega t + S_0\cos(\omega t + \varphi_0) = S_{\text{п}}\cos(\omega t + \varphi_{\text{п}})$$

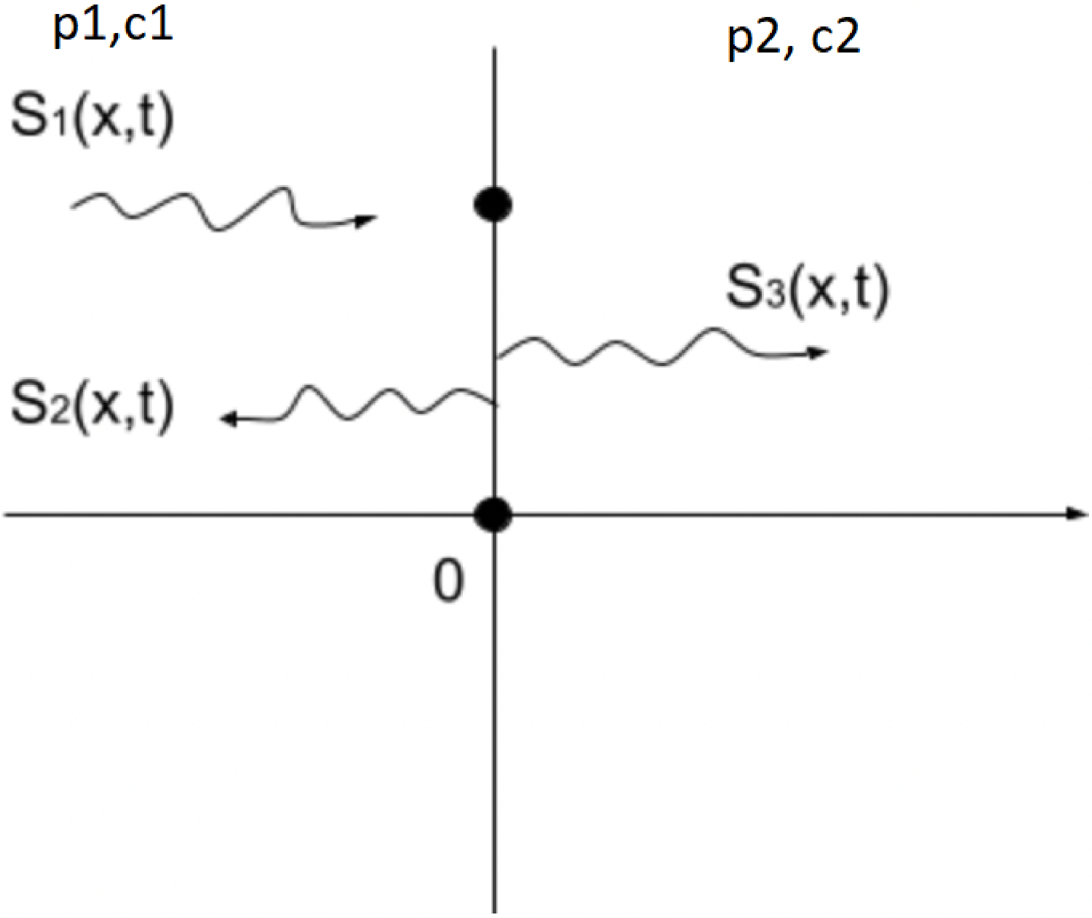

Рис. 23.1. Поведение волны при падении на границу раздела двух сред

$$E_1 ak \sin \omega t - E_1 S_0 k \sin(\omega t + \varphi_0) = E_2 S_п k_п \sin(\omega t + \varphi_п)$$

$$a \cos \omega t + S_0 \cos \omega t \cos \varphi_0 = S_0 \sin \omega t \sin \varphi_0 = S_п \cos \omega t \cos \varphi_п - Sv \sin \omega t \sin \varphi_п$$

$$E_1 ak \sin \omega t - E_1 S_0 k \sin \omega t \cos \varphi_0 - E_1 S_0 k \cos \omega t \sin \varphi_0 =$$

$$= E_2 S_п k_п \sin \omega t \cos \varphi_п + E_2 S_п k_п \cos \omega t \sin \varphi_п$$

Таким образом, получаются следующие соотношения:

$$a + S_0 \cos \varphi_0 = S_п \cos \varphi_п \qquad (23.1)$$

$$-S_0 \sin\varphi_0 = -S_\text{п} \sin\varphi_\text{п} \tag{23.2}$$

$$E_1 ak - E_1 S_0 k \cos\varphi_0 = E_2 S_\text{п} k_\text{п} \cos\varphi_\text{п} \tag{23.3}$$

$$-E_1 S_0 k \sin\varphi_0 = E_2 S_\text{п} k_\text{п} \sin\varphi_\text{п} \tag{23.4}$$

Из формул (23.2) и (23.4) следует следующее:

$$\sin\varphi_0 = 0$$

$$\sin\varphi_\text{п} = 0$$

Уравнение (23.3) записывается в следующем виде:

$$a - S_0 \cos\varphi_0 = \frac{E_2 S_\text{п} k_\text{п}}{E_1 k} \cos\varphi_\text{п}$$

$$2a = S_\text{п} \cos\varphi_\text{п} \left(1 + \frac{E_2 k_\text{п}}{E_1 k}\right)$$

$$\frac{E_2 k_\text{п}}{E_1 k} = \frac{\rho_2 c_2^2 \omega c_1}{c_2 \rho_1 c_1^2 \omega} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$$

$$\frac{S_\text{п}}{a} \cos\varphi_\text{п} = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}$$

$$\frac{\rho_\text{п}}{a} > 0 \;\rightarrow\; \cos\varphi_\text{п} = +1$$

$$\varphi_\text{п} = 0$$

В окончательном виде получается следующее выражение:

$$\frac{S_\text{п}}{a} = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}$$

Рассматривается отраженная волна:

$$1 + \frac{S_0}{a} \cos\varphi_0 = \frac{S_\text{п}}{a}$$

$$\frac{S_0 \cos\varphi_0}{a} = \frac{S_\text{п}}{a} - 1 = \frac{2}{1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}} - 1 =$$

$$= \frac{2 - 1 - \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}{1 + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2 \quad \varphi_0 = 0$$

$$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2 \quad \varphi_0 = \pi$$

В отраженной волне фаза не меняется, если волна падает из среды с большим акустическим сопротивлением. Если отражение падает из среди с меньшим акустическим сопротивлением, то фаза волны равна π. Если акустические сопротивления совпадают, то отраженной волны не будет.

Необходимо найти амплитуды волны напряжения:

$$\sigma_0 = Sc\omega S_0$$

$$S_{\text{п}} = \frac{2}{1+\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}} \cdot a$$

$$\frac{\sigma_{\text{про}}}{\rho_2 c_2 \omega} = \frac{2}{1+\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}} \cdot \frac{\sigma_{\text{пад}}}{\rho_1 c_1 \omega}$$

$$\frac{\sigma_{\text{про}}}{\sigma_{\text{пад}}} = \frac{2 \cdot \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}}{1+\frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}} = \frac{2}{1+\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}$$

Пусть первая среда — воздух, а вторая — вода. Тогда:

$$\rho_1 = 1,3\ \frac{kg}{m^3}$$

$$c_1 = 340\ \frac{m}{s}$$

$$\rho_2 = 10^3\ \frac{kg}{m^3}$$

$$c_2 = 1,4 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

$$\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \sim 10^{-4}$$

Если волна идет из воздуха в воду, то амплитуда напряжения в прошедшей волне будет в 2 раза больше, чем амплитуда напряжения в падающей волне. Таким образом, рыбы слышат людей. Пусть первая среда — вода, а вторая среда — воздух. Тогда амплитуда напряжения будет в 10^4 раз меньше. Таким образом, люди рыб не слышат.

Основы теории упругости

Пусть длина стержня l и поперечная площадь S. Один конец стержня закреплен, а ко второму концу прикладывается сила F. Механическое напряжение записывается следующим образом:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Для малых деформаций справедлив закон Гука.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l$$

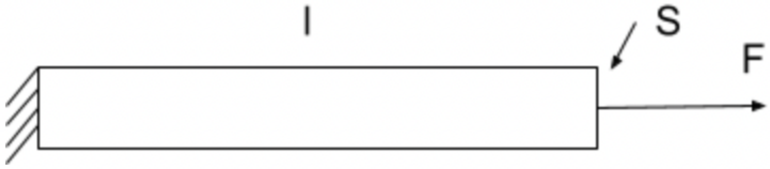

Рис. 23.2. Малые деформации

Второй тип деформаций — сдвиг. Пусть есть куб. Нижняя грань куба закреплена. Ребро куба равна l. Параллельно верхней грани куба приложена сила F. Тогда получится деформация в виде сдвига и деформация описывается как Δl. Угол сдвига:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \gamma$$

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} = \tau$$

$$\tau = \sigma_\tau = G\gamma$$

Все упругие константы связаны друг с другом.

$$\Delta l > 0 \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} > 0$$

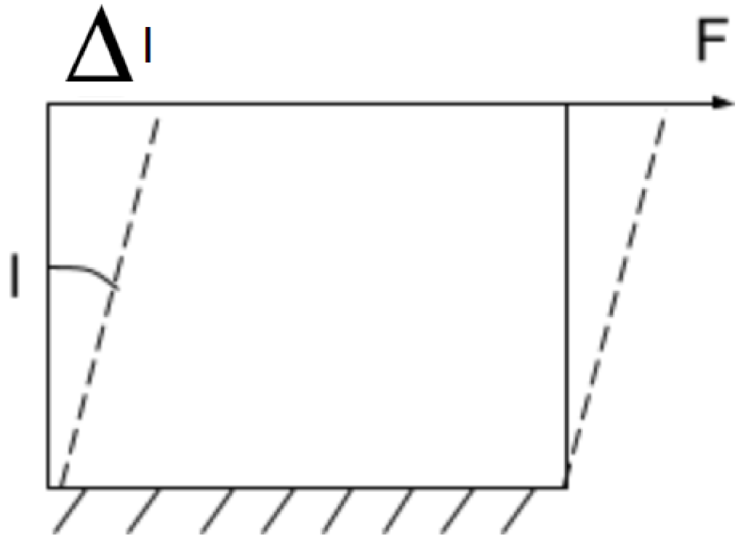

Рис. 23.3. Сдвиг

$$\Delta d < 0$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d} < 0$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} > 0$$

Пусть есть стержень, который подвергается деформации растяжение. Требуется найти относительное изменение его объема.

$$V = ld^2$$

$$\Delta V = \Delta l d^2 + l \cdot 2d\Delta d$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l d^2 + 2ld\Delta d}{ld^2} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon - 2\varepsilon\mu = \varepsilon(1-2\mu) = \frac{1-2\mu}{E} \cdot \sigma = \frac{\sigma}{k}$$

$$k = \frac{E}{1-2\mu}$$

$$0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{2} \quad \frac{\Delta V}{V} \geqslant 0$$

Задача. Растяжение стержня

Пусть имеется стержень с площадью поперечного сечения S. К торцу стержня прикладывается сила F. Происходит деформация растяжение. Требуется найти угол

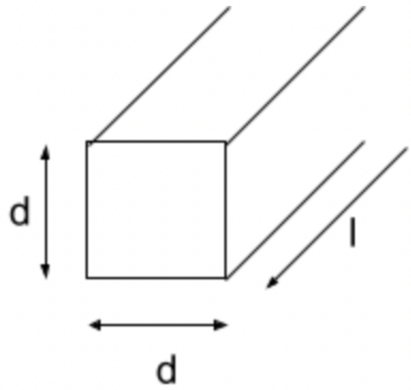

Рис. 23.4. Растяжение

к оси стержня, под которым наклонено сечение этого стержня, в котором касательное напряжение максимальное.

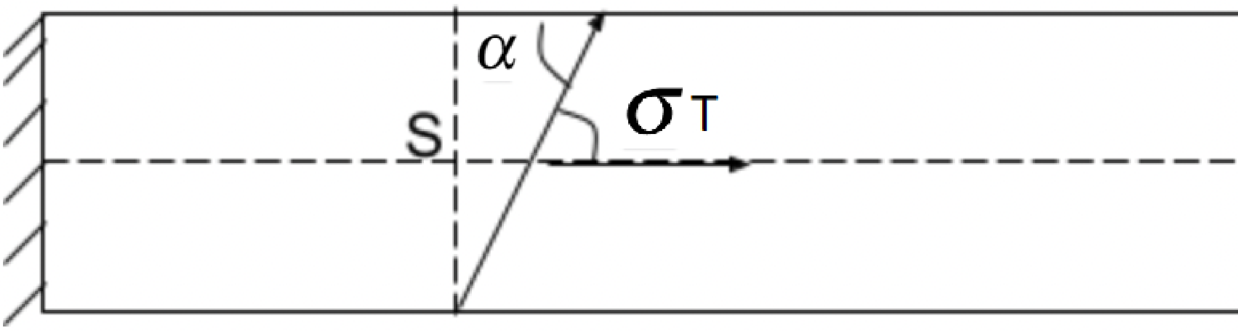

Рис. 23.5. Растяжение стержня

$$\sigma' = \frac{F}{S'} = \frac{F}{\frac{S}{\sin\alpha}} = \frac{F\sin\alpha}{S}$$

$$\sigma_\tau = \sigma' \cdot \cos\alpha = \frac{F\sin\alpha\cos\alpha}{S} = \frac{F}{2S}\sin 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$(\sigma_\tau)^{max} = \frac{F}{2S}$$

Задача. Растяжение стержня под действием собственного веса

Пусть есть однородный стержень массы m длины l и площадь поперечного сечения S. Стержень подвешен. Под действием собственного веса стержень растягивается. Требуется найти длину, на которую стержень растянется под действием собственного веса.

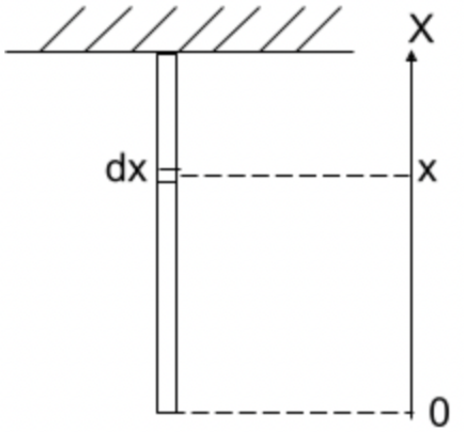

Рис. 23.6. Растяжение стержня под действием собственного веса

$$F(x) = \frac{mg}{l} \cdot x$$

Рассматриваются малый элемент длины dx и малая деформация бесконечно малого элемента dx.

$$d(\Delta x) = \varepsilon \cdot dx = \frac{\sigma}{E}dx = \frac{F}{SE}dx = \frac{mg}{SEl}xdx$$

$$\Delta x = \int_0^l \frac{mg}{SEl} \cdot xdx = \frac{mg}{SEl} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{mgl}{2ES}$$

Полное относительное удлинение записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{полн}} = \frac{\Delta x}{l} = \frac{mg}{2ES} = \frac{1}{2}\frac{\frac{mg}{S}}{E}$$

Лекция 24. Деформации тел

Задача. Упругая деформация бруска

Пусть на горизонтальной поверхности стоит брусок. Площадь основания S. Высота бруска l. Известны вес и модуль Юнга E:

$$P = mg$$

Брусок деформировался под действием своего веса. Требуется найти запас полной энергии упругой деформации. Вводится ось X. Пусть есть диск толщины dx. Рассматривается энергия в этом диске.

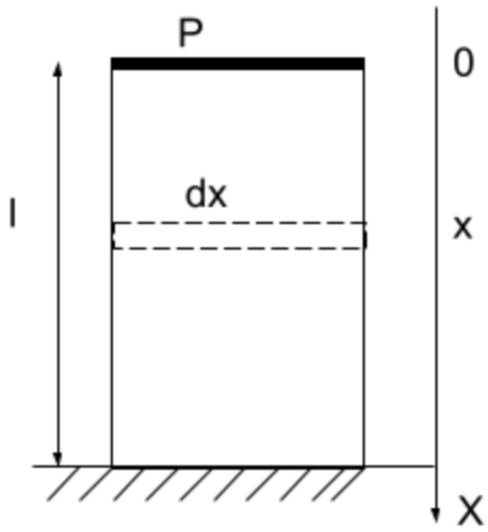

Рис. 24.1. Упругая деформация бруска

Объемная плотность энергии записывается следующим образом:

$$w = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2E} \cdot \frac{P^2 x^2}{S^2 l^2}$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$F = \frac{mg}{l} x = \frac{Px}{l}$$

Энергия записывается следующим образом:

$$W = \int w \cdot dV = \int\limits_0^l \frac{P^2x^2}{2ES^2l^2} \cdot Sdx = \frac{P^2}{2Esl^2} \cdot \frac{l^2}{3} = \frac{P^2l}{6ES}$$

Пусть сверху положили стальную пластинку веса P. Требуется найти запас полной энергии.

$$F(x) = P + \frac{Px}{l} = P\left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

$$W = \int\limits_0^l \frac{F^2}{2ES}dx = \frac{P^2}{2ES}\int\limits_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{P^2l}{2ES}\int\limits_0^l \left(1 + \frac{x}{l}\right)^2 d\left(1 + \frac{x}{l}\right) =$$

$$= \frac{P^2l}{2ES}\int\limits_1^2 z^2dz = \frac{P^2l}{6ES}z^3\Big|_1^2 = \frac{7P^2l}{6ES}$$

Таким образом, энергия возрастает в 7 раз, если на брусок положить стальную пластинку.

Изгибная деформация балок

Изгиб деформацией не является. Изгиб — это неоднородная деформация растяжения - сжимания. Пусть есть стержень, который изогнулся. У стержня есть средняя (нейтральная) линия, у которой длина неизменна. Радиус кривизны изгиба стержня — R. Длина нейтральной линии l_0:

$$l_0 = R\alpha$$

$$l = (R + x)\alpha$$

Абсолютное удлинение записывается следующим образом:

$$\Delta l = l - l_0 = x\alpha$$

Относительное удлинение записывается:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{x\alpha}{R\alpha} = \frac{x}{R}$$

Механическое напряжение записывается следующим образом:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{Ex}{R} = \sigma(x)$$

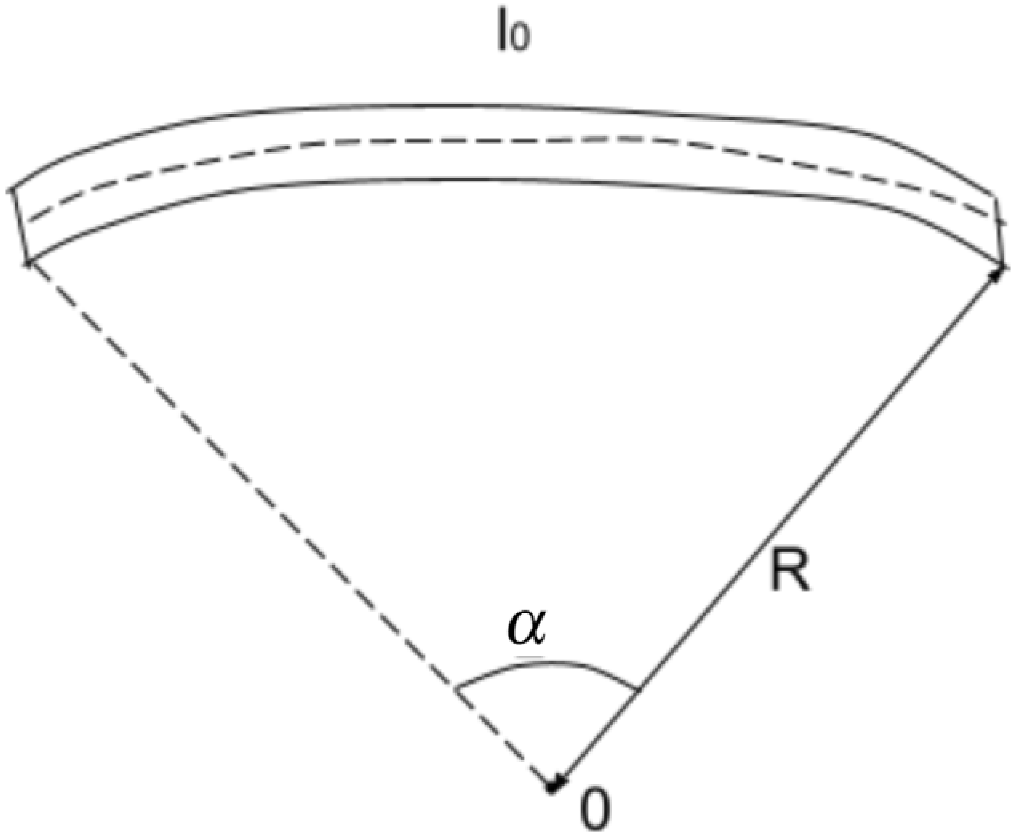

Рис. 24.2. Изгибная деформация стержня

Пусть торцы стержня свободны. Суммарная система упругости равна 0:

$$F_{\text{y}} = \int \sigma dS = \frac{E}{R} \int x dS = 0$$

$$\int x dS = \int x \cdot dm \cdot \frac{\sigma}{m} = 0$$

Нейтральная линия проходит через центр масс сечения. Суммарный момент сил не равен 0:

$$M = \int x \cdot \sigma \cdot dS = \frac{E}{R} \int x^2 dS$$

$$I = \int x^2 dS = \frac{\Sigma}{m} \int x^2 dm = J \cdot \frac{\Sigma}{m}$$

I — геометрический момент инерции сечения.

Момент силы упругости выражается следующим образом:

$$M = \frac{EI}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y_{12})^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

$$M_{\text{упр}} = EIy''$$

Задача. Деформация балки

Пусть есть балка, которая имеет консольное закрепление на одном из концов. К концу балки приложили силу F, что приводит к ее деформации. Длина балки L. Деформация маленькая. Рассматривается точка A с координатой x. В балке развиваются сдвиговые деформации.

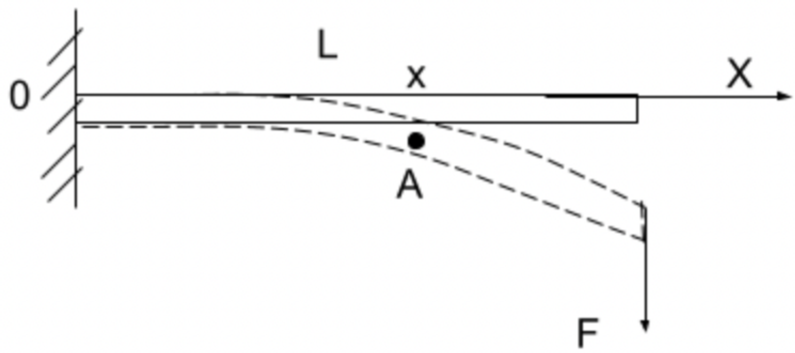

Рис. 24.3. Деформация балки

$$F(L-x) = EIy'' = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L-x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

$$y(x) = \frac{Fx^2}{2EI}\left(L - \frac{x}{3}\right)$$

Стрела прогиба — максимальное отклонение балки от положения равновесия:

$$\lambda = y(L) = \frac{FL^2}{2EI}\left(L - \frac{L}{3}\right) = \frac{FL^3}{3EI} = \lambda$$

Пусть балка имеет прямоугольное сечение. Требуется найти λ.

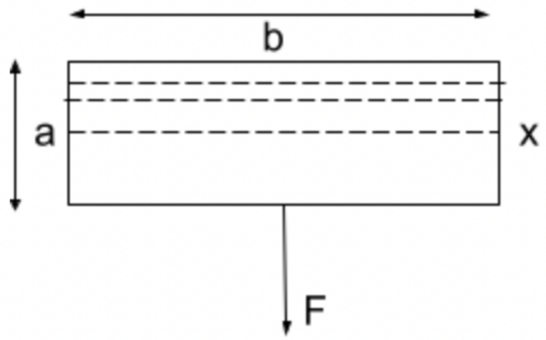

Рис. 24.4. Балка прямоугольного сечения

$$I = \int x^2 dS = \int\limits_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 b dx = \frac{b}{3}x^3\Big|_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}b\frac{a^3}{8} = \frac{ba^3}{12}$$

$$J = \frac{ma^2}{12}$$

$$I = \frac{J \cdot S}{m} = \frac{a^2}{12} \cdot ab = \frac{a^3 b}{12}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{Fl^2}{E \cdot ba^3} = \frac{4FL^3}{Eba^3}$$

$$\lambda' = \frac{4FL^2}{Eab^3}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{ba^3}{ab^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Выгоднее та балка, у которой геометрический момент инерции больше.

$$I_{\text{кв}} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{\text{кр}} = \frac{mR^2}{4} \cdot \frac{\pi R^2}{m} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{a^4}{4}$$

Задача. Деформация балки со свободными концами

Пусть есть балка, под концами которой есть подставки. По середине приложена сила. Концы балки не закреплены. Таким образом, балка деформируется.

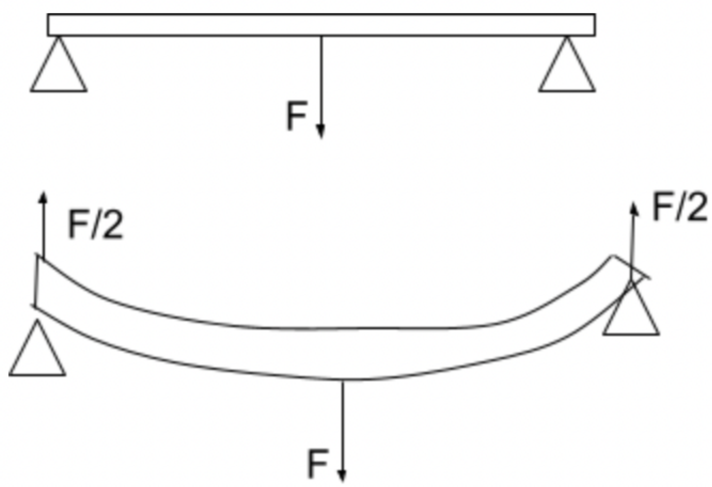

Рис. 24.5. Деформация балки со свободными концами

Стрела прогиба записывается следующим образом:

$$\lambda = \frac{FL^3}{3EI} \cdot \frac{1}{16}$$

Стрела прогиба балки с закрепленными концами:

$$\lambda'' = 2\frac{F}{2} \cdot \frac{1}{3EI} \cdot \frac{L^3}{4^3} = \frac{FL^3}{3EI} \cdot \frac{1}{64}$$

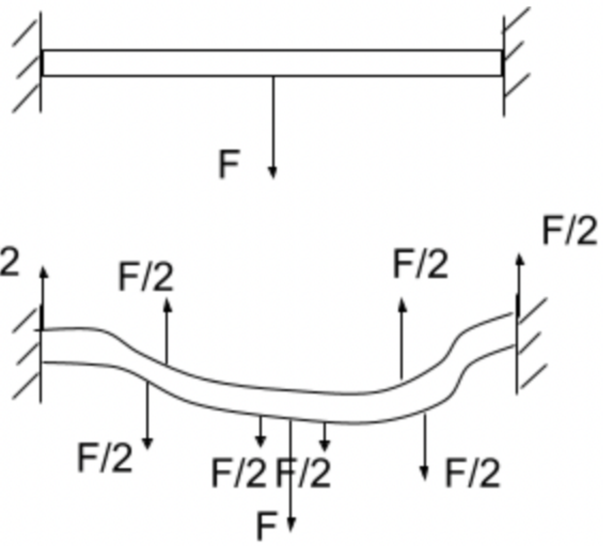

Рис. 24.6. Деформация балки с закрепленными концами

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ