ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКА. СЕМИНАРЫ

ЯКУТА
АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

Лекция 1. Введение в кинематику

Кинематика

Кинематика занимается изучением механического движения, но не интересуется вопросом о причинах возникновения этого движения.Чтобы решать кинематические задачи, необходимо обзавестись системой отсчета. В систему отсчета входят система координат, тело отсчета и часы. С точки зрения кинематика все системы отсчета равноправны. Необходимо выбирать такую систему отсчета, чтобы решать задачу было проще всего. Система отсчета часто выбирается естественным образом: земная или лабораторная система отсчета. Чтобы решить кинематическую задачу, используется координатный метод описания движения. При этом методе выбирается какая-то система координат, если известна зависимость этих координат от времени, то задача кинематики полностью решена.

В кинематике можно выделить 2 разных типа задач: прямая и обратная. При прямой задаче по известной зависимости координат от времени необходимо найти остальные координаты. При обратной задаче необходимо найти зависимости координат от времени.

Пусть есть материальная точка и заданы зависимости декартовых координат от времени:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

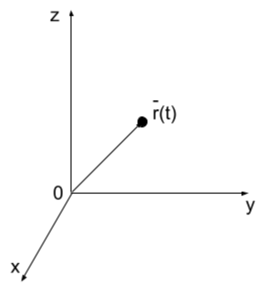

Рис. 1.1. Система в декартовых координатах

Материальная точка движется относительно прямоугольной декартовой системы координат. Необходимо найти уравнение траектории, зависимость скорости от времени и ускорение от времени.

Уравнение траектории задано в параметрическом виде. В качестве параметра выступает время. Скорость — это производная. Если положение точки задано в векторном виде, то есть задан радиус вектор $\vec{r}(t)$, то по определению средняя скорость записывается следующим образом:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Скорость, определенная этим способом, зависит от выбора промежутка времени Δt.

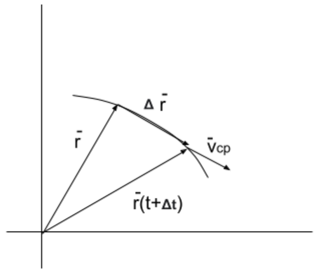

Рис. 1.2. Определение средней скорости

Предельное отношение называют мгновенной скоростью. С точки зрения математики отыскание мгновенной скорости сводится к процедуре дифференцирования.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

$d\vec{r}$ — бесконечно малое изменение радиус вектора. dt — бесконечно малый промежуток времени. Радиус вектор можно записать через координаты:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

Продифференцировав каждую из этих зависимостей, можно получить проекции скорости материальной точки на координатные оси:

$$v_x = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

Таким образом, можно найти модуль скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Аналогичным способ можно найти ускорение по отношению к скорости. Вводится мгновенное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Таким образом, можно найти вектор ускорения на координатные оси и модуль ускорения:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории. Вектор ускорения всегда направлен в сторону центра кривизны траектории. Это связано с тем, что вектор ускорения имеет две составляющие:

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}$$

τ — единичный вектор касательной. n — единичный вектор нормали. R — радиус кривизны.

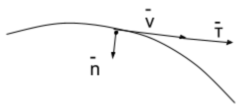

Рис. 1.3. Направление скорости и ускорения

Полное ускорение можно записать следующим образом:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{v^2}{R}$$

Таким образом, если задана зависимость координат от времени, то можно найти все, включая радиус кривизны траектории. Задача имеет однозначное решение.

Задача. Траектория движения точки

Пусть на плоскости есть прямоугольная декартова система координат. В этой системе координат есть прямая (OA), которая в начальный момент времени совпадает с осью y. Пусть есть точка M с координатами (x_0, y_0). В некоторый начальный момент времени прямая OA начинает равномерно вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью ω, а точка M начинает двигается со скоростью v.

$$v = const$$

$$\vec{v} \perp OA$$

Требуется найти уравнение траектории, по которой будет двигаться точка.

Необходимо найти координаты точки в произвольный момент времени t. Рассматривается положение точки в произвольный момент времени и к этому произвольному моменту времени применять заданное условие.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

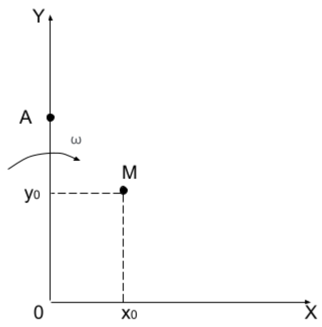

Рис. 1.4. Траектория движения точки

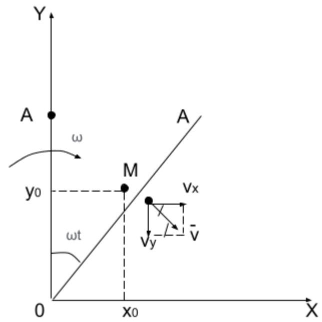

Рис. 1.5. Точка в произвольный момент времени

Известно, что за время t прямая повернулась на угол ωt. Скорость делится на 2 проекции: v_x и v_y.

$$v_x = v\cos\omega t = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = -v\sin\omega t = \frac{dy}{dt}$$

Происходит интегрирование:

$$x(t) = \frac{v}{\omega} \in \omega t + C_1$$

$$y(t) = \frac{v}{\omega}\cos\omega t + C_2$$

$$x_0 = C_1 \quad t = 0$$

$$y_0 = \frac{v}{\omega} + C_2 \quad t = 0$$

$$x - x_0 = \frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

$$y - (y_0 - \frac{v}{\omega}) = \frac{v}{\omega}\cos\omega t$$

$$(x - x_0)^2 + \left(y - \left(y_0 - \frac{v}{\omega}\right)\right)^2 = \frac{v^2}{\omega^2}$$

Задача. Радиус кривизны параболы

Пусть камушек бросили горизонтально с высокой башни с начальной скоростью v_0 в однородном поле силы тяжести. Камень будет падать по параболе. Необходимо найти радиус кривизны этой параболы в произвольной точке. Необходимо ввести систему координат.

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}$$

$$\dot{x} = v_0$$

$$\dot{y} = gt$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$$

$$a = g$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^4t^2}{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{v^2}{R}$$

Таким образом, радиус кривизны записывается следующим образом:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g}$$

$$R(t=0) = \frac{v_0^2}{R}$$

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg$$

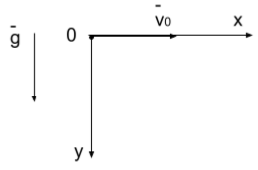

Рис. 1.6. Радиус кривизны параболы

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача. Качение без проскальзывания

Пусть по горизонтальной поверхности катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 колесо с радиусом R. Требуется ответить на следующие вопросы:

- Найти в произвольный момент времени модуль скорости точки на ободе колеса.
- Найти в произвольный момент времени модуль ускорения.
- Найти радиус кривизны траектории точки на ободе колеса в наивысшем положении.
- Найти путь, который проходит точка на ободе колеса за время между двумя последовательными касаниями поверхности.

Рассматривается точка на ободе колеса. Во всех инерциальных системах отсчета ускорение должно быть одинаковое. Относительно системы отсчета центр колеса покоится, а поверхность движется в обратную сторону со скоростью v_0. В этой системе отсчета движение колеса представляет собой чисто вращение. Ускорение направлено к центру колеса и записывается следующим образом:

$$a = \frac{v_0^2}{R}$$

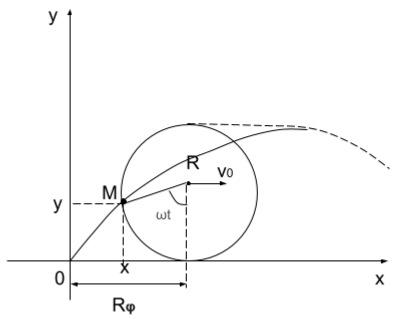

Рис. 1.7. Качение без проскальзывания

Чтобы найти радиус кривизны, необходимо получить зависимости координат от времени. Вводится система координат с траекторией циклоида. Рассматривается точка M на ободе колеса. Необходимо найти координаты точки $M(x, y)$. Угловая скорость выражается следующим образом:

$$v_0 = \omega R$$

$$\varphi = \omega t$$

$$x = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi) = R(\omega t - \sin\omega t)$$

$$y = R(1-\cos\varphi) = R(1-\cos\omega t)$$

$$\dot{x} = \omega R\,(1-\cos\omega t)$$

$$\dot{y} = \omega R \sin \omega t$$

$$v = \sqrt{(\omega R)^2(1-\cos\omega t)^2 + (\omega R^2)\sin^2\omega t} = \omega R\sqrt{1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t} =$$

$$= \omega R\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = \omega R\sqrt{4\sin^2\frac{\omega t}{2}} = 2\omega R\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| = 2\omega R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

$$\ddot{x} = \omega^2 R\sin\omega t$$

$$\ddot{y} = \omega^2 R\cos\omega t$$

$$a = \omega^2 R = \frac{v_0^2}{R}$$

Дальше необходимо определить радиус кривизны в наивысшей точке траектории. В верхней точке траектории полное ускорение совпадает с нормальным ускорением:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2\omega R\cdot\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2} = \omega^2 R\cos\frac{\varphi}{2} \quad \varphi = \pi$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{R_{\text{кр}}} = \frac{v_0^2}{R}$$

$$R_{\text{кр}} = 4R$$

Необходимо найти путь, который проходит произвольная точка на ободе колеса между двумя последовательными касаниями поверхности. Скорость интегрируется:

$$dS = vdt = 2\omega R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|dt = 2R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$$

$$\omega dt = d\varphi$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = 2R\cdot 2\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8R$$

Таким образом, точка, которая находится на ободе колеса, пройдет расстояние $8R$ вдоль своей траектории. Качение колеса модно рассматривать как сумму поступательного движения с постоянной скоростью v_0 и вращательного движения вокруг оси. Если рассматривать тело, как вращение вокруг мгновенной оси, то тогда скорость в произвольной точке определяется следующим образом:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$

$$\int\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \int 2\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ