



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТИХОНОВ  
НИКОЛАЙ АНДРЕЕВИЧ

---

ФИЗФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1. Специальные функции</b>	<b>9</b>
1.1	Специальные функции . . . . .	9
1.2	Определение специальных функций . . . . .	13
1.3	Цилиндрические функции . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Лекция 2. Функция Бесселя</b>	<b>19</b>
2.1	Функция Бесселя целого и полуцелого порядков . . . . .	19
2.2	Рекуррентные соотношения для цилиндрических функций . . . . .	22
2.3	Контурные интегралы . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Лекция 3. Контурные интегралы</b>	<b>30</b>
3.1	Контурные интегралы . . . . .	30
3.2	Доказательство рекуррентных соотношений для цилиндрических функций . . . . .	31
3.3	Функция Ханкеля . . . . .	33
3.4	Связь между функциями Ханкеля и Бесселя . . . . .	34
3.5	Линейная независимость функций Ханкеля, Неймана и Бесселя . . . . .	36
3.6	Асимптотика при больших значениях $x$ . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Лекция 4. Функция Ханкеля</b>	<b>43</b>
4.1	Задача Штурма - Лиувилля в круге . . . . .	46
4.2	Теорема Стеклова. Норма функции Бесселя . . . . .	50
4.3	Модифицированное уравнение Бесселя (функции Инфельда и Макдональда) . . . . .	52
4.4	Функция Инфельда . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Лекция 5. Модифицированное уравнение Бесселя</b>	<b>54</b>
5.1	Модифицированное уравнение Бесселя (продолжение) . . . . .	54
5.2	Функция Макдональда . . . . .	54
5.3	Классические линейные ортогональные полиномы (КЛОП) . . . . .	55
5.3.1	Определение КОП и основные свойства . . . . .	55
5.3.2	Утверждения для полиномов . . . . .	56
5.3.3	Задача Штурма-Лиувилля для КОП . . . . .	58
5.3.4	Формула Родрига . . . . .	59
5.3.5	Квадрат нормы КОП . . . . .	60
5.3.6	Производящая функция . . . . .	60

<b>6</b>	<b>Лекция 6. Теорема о нулях полиномов</b>	<b>62</b>
6.1	Определение КОП и основные свойства (продолжение) . . . . .	62
6.2	Теорема о нулях полиномов . . . . .	63
6.3	Бесконечный участок: полином Эрмита . . . . .	64
6.4	Полубесконечный участок: полином Лаггера . . . . .	65
6.5	Конечный участок: полином Якоби . . . . .	67
6.6	Частные случаи: полином Чебышева . . . . .	67
6.7	Полином Лежандра . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Лекция 7. Присоединенные функции Лежандра</b>	<b>70</b>
7.1	Полином Лежандра . . . . .	70
7.1.1	Рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра. $P_0$ и $P_1$ . .	70
7.2	Квадрат нормы полиномов Лежандра . . . . .	71
7.3	Полиномы Лежандра образуют полную и замкнутую систему функций. Теорема Стеклова . . . . .	72
7.4	Присоединенные функции Лежандра . . . . .	73
7.5	Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля для $m$ -й производной	73
7.6	Какому уравнению удовлетворяют присоединенные функции Лежандра? Задача Штурма-Лиувилля . . . . .	74
7.7	Квадрат нормы присоединенных функций . . . . .	75
7.7.1	Доказательство полноты системы присоединенных функций Лежандра. Теорема Стеклова . . . . .	76
<b>8</b>	<b>Лекция 8. Задача Штурма-Лиувилля в шаре</b>	<b>80</b>
8.1	Задача Штурма-Лиувилля в шаре (сферические функции) . . . . .	80
8.2	Задача для оператора Лапласа в шаре. Шаровые функции . . . . .	84
8.3	Некоторые задачи квантовой механики . . . . .	85
8.3.1	Задача о гармонических колебаниях частицы . . . . .	86
<b>9</b>	<b>Лекция 9. Задачи квантовой механики</b>	<b>89</b>
9.1	Задача о ротаторе . . . . .	89
9.2	Движение электрона в поле протона (в кулоновском поле, атом водорода)	90
<b>10</b>	<b>Лекция 10. Классификация уравнений</b>	<b>96</b>
10.1	Классификация уравнений в случае двух независимых переменных . .	96
10.2	Гиперболическое уравнение (характеристики, канонический вид) . . . .	97
10.3	Эллиптическое уравнение (канонический вид) . . . . .	99
10.4	Параболическое уравнение (канонический вид) . . . . .	100

10.5	Классификация уравнений в случае многих независимых переменных . . . . .	101
10.6	Примеры постановок физических задач . . . . .	102
10.6.1	Задача продольных колебаний стержня . . . . .	102
10.6.2	Электромагнитные колебания . . . . .	104
10.7	Процессы расплывания тепла, диффузия . . . . .	104
<b>11</b>	<b>Лекция 11. Уравнения эллиптического типа</b>	<b>106</b>
11.1	Примеры постановок физических задач (продолжение) . . . . .	106
11.1.1	Стационарные процессы . . . . .	106
11.1.2	Уравнение для амплитуды установившихся гармонических колебаний . . . . .	106
11.2	Уравнения эллиптического типа . . . . .	107
11.3	Формулы Грина . . . . .	107
11.3.1	Фундаментальное решение уравнения Лапласа . . . . .	107
11.3.2	1-я формула Грина . . . . .	108
11.3.3	2-я формула Грина . . . . .	109
11.3.4	3-я формула Грина . . . . .	109
11.4	Свойства гармонических функций . . . . .	111
11.4.1	Теорема Гаусса . . . . .	111
11.4.2	Формула среднего значения . . . . .	111
11.4.3	Функция, гармоническая внутри области, имеет бесконечное число производных . . . . .	112
11.4.4	Принцип максимума . . . . .	112
11.4.5	Принцип сравнения . . . . .	112
11.5	Постановка внутренних краевых задач с уравнением Лапласа . . . . .	113
11.6	Задача Дирихле (доказательство единственности решения) . . . . .	113
11.7	Задача Неймана (решение не единственно) . . . . .	114
11.8	3-я краевая задача (доказательство единственности решения 3-й и неединственность решения 2-й задач) . . . . .	114
11.9	Пример 3-й краевой задачи с $h < 0$ (решение не единственно) . . . . .	114
11.10	Пример задачи Дирихле с разрывом граничной функции . . . . .	115
11.11	Постановка внешних краевых задач для уравнения Лапласа . . . . .	116
<b>12</b>	<b>Лекция 12. Определение регулярной функции</b>	<b>118</b>
12.1	Постановка внешних краевых задач для уравнения Лапласа (продолжение) . . . . .	118
12.2	Определение регулярной функции . . . . .	118

12.3	Условие регулярности для решений уравнения Лапласа (доказательство)	119
12.4	Постановки внешних краевых задач . . . . .	121
12.5	Доказательство единственности решения внешней задачи Дирихле в $R^3$	121
12.6	2-я и 3-я внешние краевые задачи (доказательство единственности решения) . . . . .	122
12.7	Внешняя задача Дирихле в двухмерном случае . . . . .	123
<b>13</b>	<b>Лекция 13. Функция Грина. Обобщенные функции</b>	<b>125</b>
13.1	Обобщенные функции . . . . .	125
13.1.1	Определение линейного функционала . . . . .	125
13.1.2	Определение регулярного функционала . . . . .	126
13.1.3	Сходимость в пространстве обобщенных функций . . . . .	126
13.2	$\delta$ -функция Дирака . . . . .	126
13.3	Дифференцирование обобщенных функций . . . . .	127
13.3.1	Обобщенное решение дифференциального уравнения . . . . .	128
13.3.2	Фундаментальное решение оператора Лапласа (функция Грина)	128
13.4	Задача Дирихле (пример построения фундаментального решения) . . .	129
13.5	Свойства функции Грина . . . . .	130
<b>14</b>	<b>Лекция 14. Теория потенциалов</b>	<b>133</b>
14.1	Построение функции Грина по известному решению задачи Штурма - Лиувилля . . . . .	133
14.2	Теория потенциалов . . . . .	134
14.2.1	Определение объемного потенциала . . . . .	134
14.2.2	Достаточное условие существования несобственного интеграла .	134
14.2.3	Свойства объемных потенциалов . . . . .	134
14.2.4	Сведение неоднородной задачи к однородной (на примере внутренней задачи Дирихле) . . . . .	135
14.2.5	Определение потенциалов простого и двойного слоя . . . . .	135
14.2.6	Равномерная сходимость потенциалов простого слоя (непрерывность при переходе через поверхность) . . . . .	136
14.3	Существование потенциалов двойного слоя . . . . .	138
14.3.1	Поверхность Ляпунова . . . . .	138
14.4	Разрыв потенциала двойного слоя при переходе через поверхность в $R^3$	140
<b>15</b>	<b>Лекция 15. Уравнение Гельмгольца</b>	<b>142</b>

15.1	Разрыв потенциала двойного слоя при переходе через поверхность в $R^3$ и $R^2$ (продолжение) . . . . .	142
15.2	Разрыв производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность в $R^3$ . . . . .	142
15.3	Метод интегральных уравнений для решения задач с оператором Лапласа . . . . .	144
15.3.1	Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана (доказательство существования решения) . . . . .	144
15.3.2	Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле (доказательство существования решения) . . . . .	147
15.4	Уравнение Гельмгольца . . . . .	151
15.4.1	Случай $k = \kappa^2$ , доказательство единственности решения краевых задач . . . . .	151
<b>16</b>	<b>Лекция 16. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности</b>	<b>153</b>
16.1	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности . . . . .	153
16.2	Задача теплопроводности на неограниченной прямой . . . . .	160
<b>17</b>	<b>Лекция 17. Задача теплопроводности на полупрямой с граничными условиями. Уравнения колебаний. Уравнения гиперболического типа</b>	<b>163</b>
17.1	Задача теплопроводности на полупрямой с граничными условиями . . . . .	163
17.2	Задача теплопроводности на бесконечном участке. Уравнения колебаний. Уравнения гиперболического типа . . . . .	168
17.3	Начально-краевая задача для уравнения колебаний . . . . .	168
<b>18</b>	<b>Лекция 18. Задача Коши для уравнения колебаний (продолжение). Построение решения с помощью формулы Даламбера</b>	<b>175</b>
18.1	Задача Коши для уравнения колебаний (продолжение) . . . . .	175
18.2	Уравнение колебаний на неограниченной прямой . . . . .	177
18.3	Построение решения с помощью формулы Даламбера . . . . .	177
18.4	Решение неоднородной задачи . . . . .	180
<b>19</b>	<b>Лекция 19. Полубесконечный участок</b>	<b>184</b>
19.1	Уравнение теплопроводности на бесконечном участке в $R^2$ . . . . .	184
19.2	Полубесконечный участок. Однородные задачи в одномерном случае $R^1$	185
19.2.1	1-я краевая задача . . . . .	185

19.2.2	2-я краевая задача . . . . .	186
19.2.3	3-я краевая задача . . . . .	188
19.3	Неоднородные задачи в одномерном случае. Принцип Дюамеля . . . . .	189
19.3.1	1-я краевая задача . . . . .	189
19.3.2	2-я краевая задача . . . . .	192
<b>20</b>	<b>Лекция 20. Задача колебаний на бесконечной прямой</b>	<b>194</b>
20.1	Задача колебаний на бесконечной прямой с начальными условиями $u(x, 0) = \phi(x)$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$ . . . . .	194
20.2	Задача с начальными условиями $u(x, 0) = 0$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$ . . . . .	196
20.3	Функция точечного источника (единичного импульса) для уравнения колебаний . . . . .	197
20.4	Эквивалентность формулы Даламбера и решения с функцией точеч- ного источника на примере однородной и неоднородной задач колебаний	198
20.5	Задача колебаний на полубесконечном участке (с однородными гра- ничными условиями) . . . . .	200
20.6	Задача с неоднородными граничными условиями . . . . .	202
20.7	Задача колебаний в бесконечной области (радиально-симметричный случай) . . . . .	203
<b>21</b>	<b>Лекция 21. Формула Пуассона</b>	<b>205</b>
21.1	Формула Кирхгофа (общий случай задачи колебаний в бесконечной области) . . . . .	205
21.2	Формула Пуассона . . . . .	207
21.3	Метод спуска. Формула Пуассона в случае $R^2$ . . . . .	209
21.4	Случай $R^1$ - формула Даламбера . . . . .	209
21.5	Случай финитного начального условия . . . . .	210

## Лекция 1. Специальные функции

Процессы с сосредоточенными параметрами описываются уравнениями в обыкновенных производных. К примеру, колебания маятника: из переменных – время является обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же процесс с распределенными параметрами, то возникает уравнение в частных производных. К примеру, распространение колебаний, тепла в пространстве. Здесь уже несколько пространственных переменных и время.

Курс состоит из двух частей: методы математической физики и специальные функции (эта часть нужна для решения задач в областях различной формы, к примеру, шар или круг).

### Специальные функции

Допустим, имеется круг радиусом  $A$  с координатами  $r, \phi$ . Возьмем уравнение колебаний, где  $U$  – отклонение мембраны от положения равновесия.

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dt^2} = b\Delta U \\ U(a, \phi, t) = 0 \\ U(r, \phi, 0) = \mu(r, \phi) \\ \frac{dU}{dt} = v(r, \phi) \end{cases}$$

Данная задача решается методом разделения переменных. Необходимо  $U(r, \phi, t)$  в виде суммы ряда:

$$U(r, \phi, t) = \sum_n U_n$$

Считается, что  $U_n$  имеет следующий вид:

$$U_n(r, \phi, t) = T_n(t)Y_n(r, \phi)$$

$U_n$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = b\Delta U,$$



и нулевым граничным условиям:

$$U_n(a, \phi, t) = 0$$

Если подставить значения, то получается следующий результат:

$$T_n'' Y_n = b T_n \Delta Y_n$$

$$T_n Y_n(a, \phi) = 0$$

$$\frac{T_n''}{b T_n} = \frac{\Delta Y_n}{Y_n}$$

Согласно идеологии разделения переменных имеется следующее: левая часть уравнения зависит только от времени, правая только от координат. Координаты и время меняются, но равенство сохраняется. Это возможно только в случае, если обе части равны константе, которая обозначается ее  $-\lambda_n$ . Получается следующее выражение:

$$\begin{cases} \Delta Y_n + \lambda_n Y_n = 0 \\ Y_n|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

Это задача *Штурма - Лиувилля*. Тождественный ноль всегда является ее решением, те значения  $\lambda$ , при которых имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями*, а  $Y_n$  называются *собственными функциями*. У этой задачи имеется бесконечно много решений. Здесь имеет смысл упомянуть *теорему Стеклова*.

**Теорема 1.1** (Теорема Стеклова). *Любую гладкую дважды дифференцированную функцию, удовлетворяющую тем же условиям, которые стоят в задаче Штурма - Лиувилля, можно разложить в ряд по собственным функциям.*

Получается следующее значение:

$$T_n'' + \lambda_n b T_n = 0$$

$$T_n = A_n \sin \sqrt{\lambda b t} + B_n \cos \sqrt{\lambda b t}$$

Это общее решение задачи для  $T$ . Таким образом находится форма ответа.

$$U = \sum_n Y_n(r, \phi) \left\{ A_n \sin \sqrt{\lambda b t} + B_n \cos \sqrt{\lambda b t} \right\}$$

Для решения данного уравнения неизвестно  $A$  и  $B$ , но есть два дополнительных условия: при  $t = 0$   $U = \mu$ .

$$\frac{dU}{dt} = v$$

Берется  $U$ , полученное в виде ряда. Допустим, что  $t = 0$ , тогда  $\sin$  обращается в ноль и получается следующее:

$$\mu(r, \phi) = \sum_n Y_n(r, \phi) B_n$$

Отсюда видно, что  $B_n$  – это коэффициенты разложений функций  $\mu$  в ряд по  $Y_n$ .

$$B_n = \frac{1}{\|Y_n\|} \int_D \mu(r, \phi) Y_n(r, \phi) dS$$

$$v(r, \phi) = \sum_n Y_n \sqrt{\lambda b} A_n$$

$$A_n \sqrt{\lambda b} = \frac{1}{\|Y_n\|} \int_D v Y_n dS$$

Таким образом,  $A$  и  $B$  найдены и ответ получен. Теперь необходимо рассмотреть задачу Штурма - Лиувилля в круге.

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY_n}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 Y_n}{d\phi^2} + \lambda_n Y_n = 0 \\ Y_n|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получена задача Штурма - Лиувилля. Решать ее можно снова разделением переменных.

$$Y_n(r, \phi) = R_n(r) \Phi_n(\phi)$$

В итоге получаем следующее выражение:

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_n}{dr} \right)}{R_n} + \frac{d^2 \Phi_n}{\Phi_n} + \lambda_n r^2 = 0$$

Здесь снова  $R$  зависит только от  $r$ ,  $\Phi$  от  $\phi$ . Равенство должно выполняться, поэтому части, зависящие от  $\phi$  и от  $r$  по отдельности, должны быть равны константе. Пусть:

$$\frac{d^2\Phi_n}{d\phi^2} = -\lambda_n$$

Тогда:

$$\begin{cases} \Phi_n'' + \lambda_n \Phi_n = 0 \\ \Phi_n(\phi) = \Phi_n(\phi + 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi_n = \alpha_n \sin \sqrt{\lambda_n} \phi + \beta_n \cos \sqrt{\lambda_n} \phi$$

По условию периодичности  $\sqrt{\lambda_n} = n$ , т.е.  $\lambda_n = n^2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( s \frac{dR_n}{dr} \right) + \left( \lambda_n - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0$$

Получается уравнение Бесселя:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( s \frac{dR_n}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0$$

Это уравнение часто возникает во многих задачах, в которых рассматривается задача в круге. Если рассматривать такую же задачу, но в шаре, то необходимо искать решение задач Штурма - Лиувилля. Тогда получается следующее выражение:

$$Y_n = R_n(r) \Phi_n(\phi) \Theta_n(\theta)$$

В случае, когда  $\cos \Theta = x$ :

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) &= f(x) \\ \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) f &= 0 \end{aligned}$$

При  $m = 0$  полученное уравнение называется уравнением Лежандра.

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{df}{dx} \right] + \lambda f = 0$$

Уравнение Лежандра и Уравнение Бесселя – это примеры специальных функций.

## Определение специальных функций

Нижеприведенное уравнение необходимо рассмотреть на некотором конечном или бесконечном участке  $[a, b]$ .

$$\frac{d}{dx} \left( K(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = 0$$

Если на этом участке  $K$  обращается в ноль, то это уравнение называется *специальной функцией*. Обратимся к уравнению Бесселя. Умножим это уравнение на  $r$  (радиус).

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + r \left( 1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0$$

Здесь  $r \geq 0$ . Теперь стоит рассмотреть уравнение Лежандра. Здесь  $\Theta$  – это угол широты места  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ . Значит  $\cos \Theta$  меняется от 1 до -1.

Линейное уравнение второго порядка относительно  $y$  имеет фундаментальную систему, состоящую из двух линейно независимых решений. Имеет место следующая лемма для специальных функций.

**Лемма 1.1.** Пусть  $y_1, y_2$  – два линейно независимых решения уравнения специальных функций. Пусть  $K(x)$  обращается в 0 в точке  $a$ . Если  $y_1$  ограничена в точке  $a$ , то  $y_2$  неограниченно возрастает при стремлении  $x$  к  $a$ . Т.е. только одно решение будет ограничено. Точнее, если  $y_1(a) \neq 0$ , то  $y_2$  имеет логарифмические особенности при  $k(x) = (x - a)\phi(x)$ :

$$y_2(x) = O(\ln(x - a))$$

Если  $y_1(x) = (x - a)^k \phi(x)$ , то  $y_2(x) = O(x - a)^{-k}$ .

Доказать эту лемму можно так:

$$\begin{aligned} y_1 \frac{d}{dx} \left( K \frac{dy_2}{dx} \right) - q y_1 y_2 &= 0 \\ y_2 \frac{d}{dx} \left( K \frac{dy_1}{dx} \right) - q y_2 y_1 &= 0 \end{aligned}$$

При вычитании получается следующее:

$$y_1(Ky_2') - y_2(Ky_1') = 0$$

Левую часть уравнения можно переписать иначе.

$$[K(y_1y_2' - y_2y_1')] = y_1(Ky_2') + y_1'Ky_2' - y_2(Ky_1') - y_2'Ky_1' = 0$$

В скобках уравнения  $y_1(Ky_2') - y_2(Ky_1') = 0$  стоит *определитель Вронского*:

$$[KW[y_1, y_2]] = 0$$

Отсюда  $KW = C_1$ , где  $C_1$  – константа. Берется точка, в которой  $K$  отличен от нуля. Поскольку функции линейно независимы, то  $W$  отличен от нуля, значит  $C_1$  отличен от нуля.

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{C_1}{Ky_1^2}$$
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{Ky_1^2}$$

Интегрируется по  $x$  от точки  $x_0$  до  $x$ .

$$\frac{y_2}{y_1} = \int_{x_0}^x \frac{C_1 d\xi}{Ky_1^2} + C_2$$

Отсюда получается:

$$y_2(x) = y_1(x) \left[ \int_{x_0}^x \frac{C_1 d\xi}{K(\xi)y_1^2(\xi)} + C_2 \right]$$

Допустим  $y_1(a) \neq 0$ , тогда имеется следующее выражение:

$$y_2(x) = y_1(x) \left[ \int_{x_0}^x \frac{C_1 d\xi}{(\xi - a)\phi(\xi)y_1^2(\xi)} + C_2 \right]$$

Ответ выглядит так:

$$y_1(x) \left[ \frac{C_1}{\phi(x^*)y_1^2(x^*)} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{(\xi - a)} + C_2 \right]$$

Если посчитать этот интеграл, то получается:

$$y_1(x) \left[ \frac{C_1}{\phi(x^*)y_1^2(x^*)} \ln(\xi - a) \Big|_{\xi=x_0}^{\xi=x} + C_2 \right] = O(\ln(x - a))$$

Выше был описан случай, когда  $y_1(a) \neq 0$ . Необходимо рассмотреть случай, когда

$$y_1(x) = (x - a)^K \Phi(x), \quad \Phi \neq 0$$

Тогда получается следующее выражение:

$$y_2(x) = (x - a)^K \Phi(x) \left[ \int_{x_0}^x \frac{C_1 d\xi}{(\xi - a)\Phi(\xi)(\xi - a)^{2K}\Phi^2(\xi)} + C_2 \right]$$

Теперь выносятся  $\Phi$ . Так как они ограничены, то остается следующее:

$$y_2(x) = \Phi(x)(x - a)^K \left[ \frac{C_1}{\phi(x^*)\Phi^2(x^*)} \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{(\xi - a)^{2K+1}} + C_2 \right]$$

После вычисления интеграла получается следующее выражение:

$$y_2(x) = \Phi(x)(x - a)^K \left[ \frac{C_1}{\phi(x^*)\Phi^2(x^*)} \frac{(-1)}{2K} \frac{1}{(\xi - a)^{2K}} \Big|_{x_0}^x + C_2 \right]$$

$$y_2(x) = O\left(\frac{1}{(x - a)^{2K}}\right)$$

Итак, была рассмотрена лемма, в которой говорится, что только одно из двух линейно независимых решений уравнения специальных функций может быть ограничено в той точке, где коэффициент  $K$  обращается в ноль, а также было выяснено поведение второго решения. Теперь необходимо перейти конкретно к изучению уравнения Бесселя.

## Цилиндрические функции

Цилиндрические функции – это решение уравнения Бесселя.

### Функции Бесселя

Рассмотрим уравнение Бесселя, по которому далее будет строиться решение.

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0$$

Это уравнение можно записать иначе, раскрыв производную:

$$x^2 + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

Получилось то же самое, но записанное иначе. Чаще удобнее искать решения уравнение Бесселя во втором виде. Далее поиск решения будет проводиться в виде обобщенного степенного ряда.  $v$  - заданный параметр.

$$y = x^\sigma (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$$

Подставим решение уравнения, записанное во втором виде, и будем приравнять слагаемые при одинаковых степенях. Приравняем при степени  $\sigma$ .

$$\sigma(\sigma - 1)a_0 + \sigma a_0 - v^2 a_0 = 0$$

Предполагается, что  $a_0$  отличен от нуля. Тогда остается следующее:

$$[\sigma^2 - v^2]a_0 = 0$$

Отсюда находится:

$$\sigma^2 = v^2$$

Теперь приравнивается при  $x^{\sigma+1}$ .

$$a_1 [(\sigma+1)\sigma + (\sigma+1) - v^2] = 0$$

$$a_1 [2\sigma + 1] = 0$$

Считается, что  $\sigma = -\frac{K}{2}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , тогда  $a_1 = 0$ .

$$(\sigma + m)(\sigma + m - 1)a_m + (\sigma + m)a_m + a_{m-2} - v^2 a_m = 0$$

Можно записать это выражение иначе:

$$\begin{aligned}(\sigma + m)^2 a_m + a_{m-2} - v^2 a_m &= 0 \\ a_m(2\sigma m + m^2) + a_{m-2} &\end{aligned}$$

Иначе это можно записать так:

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{2\sigma m + m^2}$$

Коэффициенты  $a_m$  и  $a_{m-2}$  – это коэффициенты одинаковой четности индекса. Т.к.  $a_1 = 0$ , то все нечетные индексы  $a$  будут равны нулю. Поэтому остаются только четные индексы. Тогда удобно записать  $m$  как  $2n$ .

$$a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{2^2 n(\sigma + n)}$$

В этом шаге индекс понизился на единицу. Теперь можно делать последующие шаги, понижая индекс на единицу каждый раз в правой части. На каждом шаге появляется минус и, в итоге,  $(n - 1)$  будет равно 0.

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n! (\sigma + n)(\sigma + n - 1) \dots (\sigma + 1)}$$

Существует гамма-функция:

$$\Gamma(x) = \int_0^x e^{-t} t^{x-1} dt$$

Эта гамма-функция имеет следующие свойства:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

Если ее использовать, то получается следующее выражение:



$$\Gamma(\sigma + n + 1) = (\sigma + n)(\sigma + n - 1)\dots(\sigma + 1)\Gamma(\sigma + 1)$$

Тем самым получается:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0 \Gamma(\sigma + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\sigma + n + 1)}$$

Выбирается  $a_0$  таким, чтобы  $a_0 \Gamma(\sigma + 1) 2^\sigma = 1$ . Найденный коэффициент  $a$  подставляется в сумму ряда:

$$y = x^2(a_0 + a_1 x + \dots)$$
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} \frac{1}{n! \Gamma(\sigma + n + 1)}$$

Этот ряд называется *функцией Бесселя порядка сигма*. Обозначается как  $J_\sigma(x)$ . По построению эта функция является решением уравнения Бесселя.

Известно, что  $\sigma = \pm \nu$ . При этом  $\sigma \neq -n$ , где  $n$  - целое число.

## Лекция 2. Функция Бесселя

### Функция Бесселя целого и полуцелого порядков

Ранее уравнение Бесселя было представлено в следующей форме (при  $x \geq 0$ ):

$$x^2 y'' + xy' + (v^2 - x^2)y = 0$$

Решение уравнения находилось в виде степенного ряда, получилась сумма ряда следующего вида:

$$\Gamma_{\sigma}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\sigma} \frac{1}{m! + \Gamma(\sigma + m + 1)}$$

При  $v \neq n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , функции Бесселя  $\Gamma_v(x)$  и  $\Gamma_{-v}(x)$  являются решением данного уравнения. При  $v = n$   $\Gamma_n(x)$  также является решением уравнения.

Ряды хорошо сходятся, т.к. гамма-функция – это факториал. Изображение  $\Gamma_n(x)$ , где  $v > 0$  (Рис. 2.1) .



Рис. 2.1. Гамма-функция, где  $v > 0$

Гамма-функция вводилась в анализе как вещественная функция вещественного аргумента.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Выделяют следующие свойства:

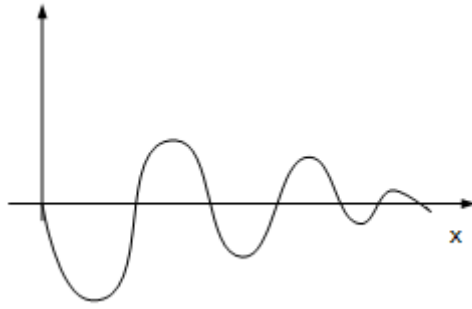


Рис. 2.2. Гамма-функция, где  $\nu < 0$

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(x+1) &= \Gamma(x)x \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}\end{aligned}$$

Вдоль отрицательной полуоси в отрицательных целых точках имеются полюса функций  $\Gamma$ . Это можно проверить так:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+z+1) &= (n+z)\Gamma(n+z) = (n+z)(n-1+z)\dots\Gamma(z)z \\ \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(n+1+z)}{(n+z)\dots z}\end{aligned}$$

При  $z \rightarrow -n$ :

$$\Gamma(z) = O\left(\frac{1}{z-n}\right)$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$\Gamma_{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \frac{1}{m!\Gamma(m-n+1)}$$

Если  $m < n$ , то в знаменателе стоит бесконечность и выпадает слагаемое. Поэтому берется  $m' = m - n$ , и получается:

$$\Gamma_{-n} = \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^{m'+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m'+n)-n} \frac{1}{(m'+n)\Gamma(m'+n-n+1)}$$

$$\Gamma_{-n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m'} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+n} \frac{1}{\Gamma(m'+n+1)m'!}$$

$$\Gamma_{-n}(x) = (-1)^n \Gamma_n(x)$$

Значит, функции Бесселя порядка  $n$  и  $-n$  линейно зависимы. Получается следующее: при нецелых  $\nu$  есть две линейно независимых функции, одна в нуле стремится к нулю, а другая к бесконечности. При  $\nu \neq n$  есть два решения:  $\Gamma_{-\nu}(x)$  и  $\Gamma_{\nu}(x)$ . А при  $\nu = n$  есть только одно решение  $\Gamma_n(x)$ .

Пусть  $\nu = \frac{n}{2}$ , тогда:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}} \frac{1}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right)}$$

Теперь следует преобразовать написанное в правой части и гамма-функцию.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \left(\frac{1}{2} + m\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right) = \left(\frac{1}{2} + m\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + 1\right) = (2m + 1) \dots 1 \sqrt{\pi} \frac{1}{2^{m+1}}$$

Теперь то же самое необходимо сделать с факториалом.

$$J_{\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1} \sqrt{2}}{2^{2m+1} \sqrt{\pi} \sqrt{x} m! (2m+1) \dots 1}$$

В результате получается следующее:

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Получается ряд синуса:

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Аналогично, если взять порядок  $-\frac{1}{2}$ , то получается  $\cos$ .

$$J_{-\frac{1}{2}} = \cos x \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

## Рекуррентные соотношения для цилиндрических функций

Рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \\ \frac{d}{dx} (J_\nu(x)x^\nu) = J_{\nu-1}(x)x^\nu \end{cases}$$

Раскроем производные:

$$\begin{cases} \nu' - \frac{\nu}{x} J_\nu = -J_{\nu+1} \\ \nu' + \frac{\nu}{x} J_\nu = J_{\nu+1} \end{cases}$$

Теперь из нижнего выражения вычитается верхнее:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$$

Последовательно используя это рекуррентное соотношение, выходит, что для полных индексов функция Бесселя представляет собой комбинацию тригонометрических функций и степеней  $x$ . В общем случае корни функции Бесселя идут неперiodически. Т.е. расстояние между двумя корнями различаются. А для случая, когда  $J_{\frac{1}{2}}$  это будет просто  $\sin x \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ .

## Контурные интегралы

Теперь задача сводится к тому, чтобы доказать, что функция Бесселя может быть представлена в виде контурного интеграла. Начать следует с гамма-функции.

Пусть  $z$  - вещественное,  $> 0$  и нецелое. Рассматривается интеграл по контуру, обходящему ноль и уходящему на бесконечность (Рис. 2.3). Это контур  $c$ .

$$\int_c e^{-t} t^{z-1} dt$$

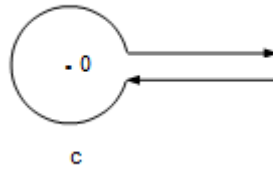


Рис. 2.3. Контур  $c$

При нецелых  $z$  в нуле будет точка ветвления, поэтому горизонтальные отрезки будут лежать на разных листах Римана. Выбирается лист, где  $t$  вещественно ( $t = x$ ). Тогда на нижнем листе  $t = xe^{i2\pi}$ .

Записывается интеграл по каждому из участков, далее осуществляется переход к пределу, когда радиус  $\epsilon \rightarrow 0$ . Учитываются следующие данные для дальнейших вычислений (Рис. 2.4).

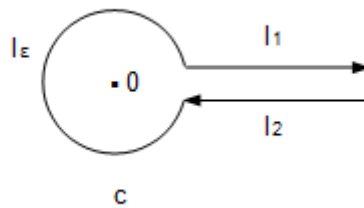


Рис. 2.4. Контур  $c$

$$I_1 = \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \rightarrow \Gamma(z),$$

при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\epsilon} e^{-xe^{i2\pi}} (xe^{i2\pi})^{z-1} dx e^{i2\pi}$$

Меняется порядок интегрирования и получается:

$$I_2 = -e^{i2\pi z} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx = -e^{i2\pi} \Gamma(z)$$

Теперь записывается интеграл по маленькому контуру:

$$t = \varepsilon e^{i\phi}$$

$$I_\varepsilon = \int_{2\pi}^0 e^{-\varepsilon e^{i\phi}} \left( \varepsilon e^{i\phi} \right)^{z-1} \varepsilon e^{i\phi} i d\phi$$

$$I_\varepsilon = O(\varepsilon^z) \rightarrow 0$$

Считается интеграл по контуру:

$$I_c = \Gamma(z)(1 - e^{i2\pi})$$

Или, иными словами, гамма-функция от  $z$ :

$$\Gamma(z) = \frac{I_\varepsilon}{1 - e^{i2\pi z}}$$

Эти действия были необходимы для того, чтобы гамма-функцию поставить в ряд функции Бесселя.

$$\Gamma(z+1)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi(z+1)} = -\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{-\Gamma(-z) \sin \pi z}{\pi}$$

Такая конструкция подставляется в ряд Бесселя.

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \frac{1}{m!} \frac{-\int_c^{e^{-t-z-1}} dt}{\pi(1 - e^{-2\pi z})} \frac{e^{-i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

Теперь умножается числитель и знаменатель на  $e^{i\pi\nu}$ .

$$J_\nu(x) = -\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_c e^{-t} t^{-z} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m}} \frac{e^{i\pi m}}{m!} \right\} \frac{dt}{t}$$

Внутри фигурных скобок стоит экспонента.

$$J_\nu(x) = -\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_c e^{-t} t^{-\nu} e^{\frac{x^2}{2t}} \frac{dt}{t} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$J_\nu(x) = -\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int e^{-t} + \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2t}\right) \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{dt}{t}$$

Теперь осуществляется замена переменных.

$$\frac{t}{2x} = e^{i(\pi-p)}$$

$$\frac{x}{2t} = e^{i(p-\pi)}$$

$$dt = \frac{x}{2} e^{i(\pi-p)} (-i) dp$$

$$\frac{dt}{p} = (-i) dp$$

Подставляются переменные:

$$J_\nu = -\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_c e^{\frac{x}{2} \left(\frac{x}{2t} - \frac{2t}{x}\right)} \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{dt}{t}$$

$$\frac{x}{2t} - \frac{2t}{x} = e^{i(p-\pi)} - e^{-i(p-\pi)} = 2i \sin(p-\pi) - 2i \sin p$$

$$J_\nu = -\frac{1}{2\pi} \int_{c_p} e^{-ix \sin p} e^{i\nu p} dp$$

Получается окончательное выражение:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{c_p} e^{i\nu p - ix \sin p} dp$$

Это и есть контурное представление функции Бесселя. Осталось разобраться с контуром. Был контур  $c$ . Функция, стоящая под контуром – аналитическая, поэтому контур можно деформировать. Деформация происходит так, чтобы его обход был радиусом  $\frac{x}{2}$ .



На рисунке (Рис. 2.5) обозначены  $t$  и  $p$  - это плоскости, где:

$$t = \frac{x}{2} e^{i(\pi-p)}$$

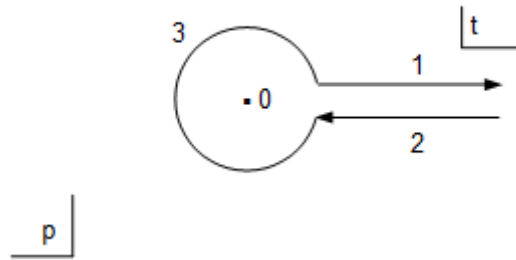


Рис. 2.5. Контур  $c$

Пусть  $p = p_1 + ip_2$ . Тогда:

$$t = \frac{x}{2} e^{p^2} e^{i(\pi-p)}$$

Берется участок 1. На нем  $t$  меняется от  $\frac{x}{2}$  до  $\infty$ , а  $p_1 = \pi$ , чтобы  $t$  было вещественно. Т.е.  $p_2 = [0, \infty)$ .

На втором участке  $p_1 = -\pi$  и  $p_2 = (\infty, 0]$ .

На третьем участке радиус закреплен, т.е.  $p_2 = 0$ , а  $p_1 = [-\pi, \pi]$ .

Строится контур для  $p$  (Рис. 2.6).

Получается, что функция Бесселя, которая была введена в виде ряда, может быть представлена в виде контурного интеграла (Рис. 2.7).

$$J_\nu = -\frac{1}{2\pi} \int_{c_p} e^{-ix \sin p} e^{i\nu p} dp \frac{1}{2\pi}$$

Это справедливо для случая, когда  $\nu$  нецелое. Если  $\nu$  целое, то выпадают интегралы по вертикальным осям.

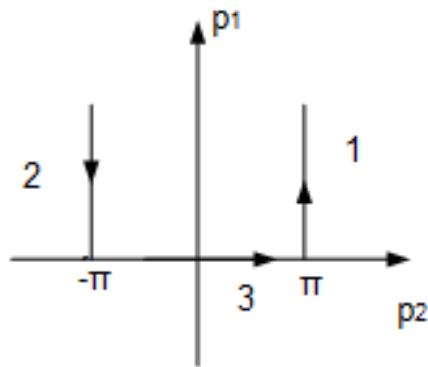


Рис. 2.6. Контур для  $p$

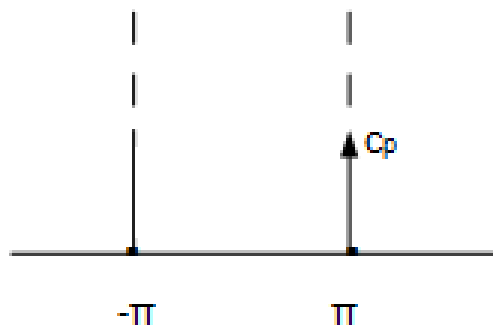


Рис. 2.7. Контур для  $p$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipn - ix \sin p} dp$$

Написанное похоже на ряд Фурье.

$$e^{-ix \sin p} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) e^{-ipn}$$

Теперь необходимо рассмотреть, в каких случаях этот интеграл сходится.

$$\int_c e^{ipv - ix \sin p} dp$$

Если  $Re(ix \sin p) > 0$ , то интеграл сходится.

$$p = p_1 + ip_2$$

$$\sin(p_1 + ip_2) = \sin p_1 \operatorname{ch} p_2 + i \cos p_1 \operatorname{sh} p_2$$

Поэтому

$$Re(ix \sin p) = x \cos p_1 \operatorname{sh} p_2$$

И это должно быть больше нуля.

$$Re(ix \sin p) = x \cos p_1 \operatorname{sh} p_2 > 0$$

Если концы контура лежат в области, где это выполнено, то тогда интеграл сходится. На рисунке показано, где это будет на плоскости (Рис. 2.8).

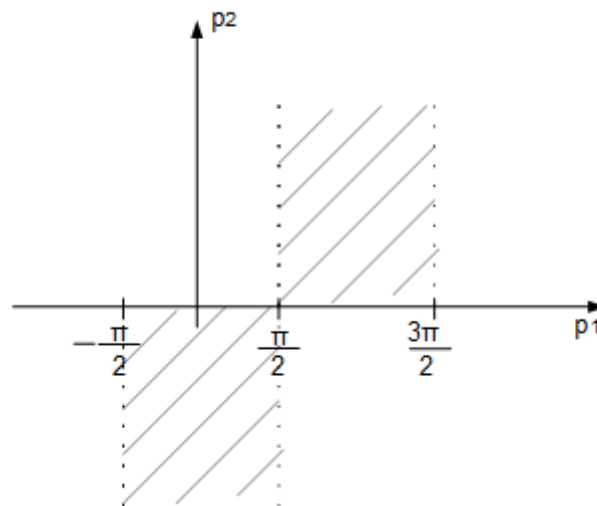


Рис. 2.8. Контур для  $p$

Если концы контура лежат в заштрихованных областях и уходят на бесконечность, то интеграл сходится. Когда косинус отрицательный, гиперболический синус должен быть положительным.

Теперь задача состоит в том, чтобы показать, что как бы ни был взят контур, если его концы лежат в заштрихованных областях, то получается решение уравнения Бесселя.

Итак, есть интеграл:

$$\int_c e^{ipv - ix \sin p} dp$$

Выбирается решение  $y(x)$  в виде этого интеграла и подставляется в уравнение Бесселя.

$$x^2 y'' + xy' + (v^2 - x^2)y = 0$$

Необходимо доказать, что это выражение равно нулю.

$$\int_c [-x^2 \sin^2 p - ix \sin p + x^2 - v^2] e^{ipv} dp = \int_c [x^2 \cos^2 p - ix \sin p - v^2] e^{ipv} dp$$

$$\frac{d^2}{dp^2} (e^{-ix \sin p}) = \frac{d}{dp} (-ix \cos p e^{-ix \cos p})$$

Так была взята первая производная, необходимо взять вторую производную.

$$\frac{d^2}{dp^2} (e^{-ix \sin p}) = (-x^2 \cos^2 p + ix \sin p) e^{-ix \sin p}$$

Видно, что в квадратных скобках два первых слагаемых и часть экспоненты совпадают с последним выражением, но с другим знаком. Данное действие было вспомогательным.

$$\int_c [-x^2 \sin^2 p - ix \sin p + x^2 - v^2] e^{ipv} dp = \int_c \left[ -\frac{d^2}{dp^2} (e^{-ip \sin p}) - v^2 e^{-ip \sin p} \right] e^{ipv} dp$$

Второе слагаемое остается без изменений, а вторая производная действует на экспоненту вне скобки, получается  $v^2$ , и тогда выражение приравнивается к нулю.

## Лекция 3. Контурные интегралы

### Контурные интегралы

На прошлой лекции было доказано, что сумма ряда равна контуру интеграла

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{ip\nu - ix \sin p} dp,$$

где контур  $C$  - контур на плоскости комплексной переменной  $p$  (Рис. 3.1).

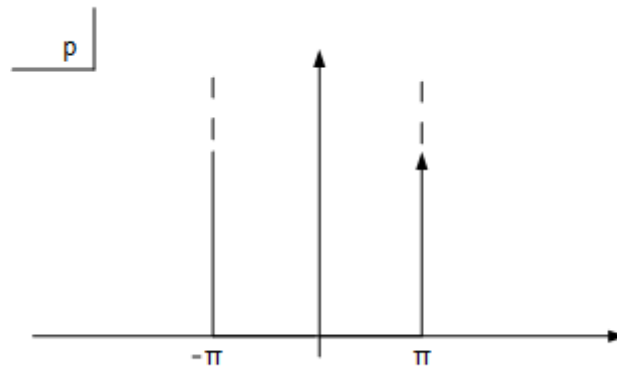


Рис. 3.1. Контур  $C$  - контур на плоскости комплексной переменной  $p$

Далее рассмотрим возможность реформирования контура  $C$  для того, чтобы интеграл сходился. Интеграл сходится, если концы контура лежат в заштрихованной области  $p$  (Рис. 3.1).

Если концы интеграла, уходящие в бесконечность вдоль мнимой оси  $p$ , лежат в заштрихованной области, то интеграл сходится. Любой интеграл, концы которого лежат в заштрихованной области, удовлетворяет условию Бесселя. Итак, рассмотрим:

$$Y(x) = \int_C e^{ip\nu - ix \sin p} dp$$

где  $C$  – произвольный интеграл, концы которого находятся в зоне сходимости.

Уравнение Бесселя запишем в виде:

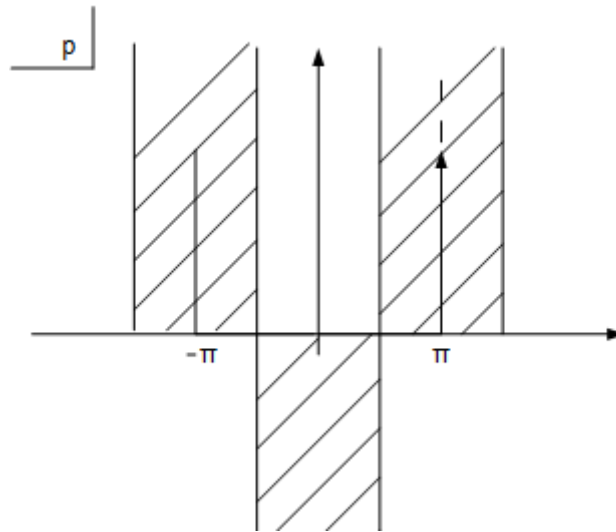


Рис. 3.2. Зоны сходимости интеграла контура  $C$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Подставляем  $Y$  в уравнение:

$$\int_c [-x^2 \sin p - ix \sin p + x^2 - \nu^2] + e^{ip\nu - ix \sin p} dp$$

Приводим подобные:

$$\frac{d^2}{dp^2} e^{-ix \sin p} = -x^2 \cos p + ix \sin p$$

Представим в виде:

$$-\int_c \frac{d^2}{dp^2} (e^{-ixp}) e^{ip\nu} dp - \int_c e^{ip\nu - ix \sin p} dp = 0$$

Таким образом, интеграл вида  $Y(x)$  удовлетворяет уравнению Бесселя.

## Доказательство рекуррентных соотношений для цилиндрических функций

Рассмотрим, что для интеграла вида  $Y$  рекуррентные соотношения выполняются:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{I_\nu(x)}{x^\nu} \right) = \frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

Второе рекуррентное соотношение:

$$\frac{d}{dx} (I_\nu x^\nu) = I_{\nu-1} x^\nu$$

Докажем, например, последнее:

$$I'_\nu + \frac{\nu}{x} I_\nu = I_{\nu-1}$$

Берем интеграл в виде  $u$  и дифференцируем:

$$\int_c \left( -i \sin p + \frac{\nu}{x} \right) e^{ip\nu - i \sin p} dp$$

Напишем вспомогательное соотношение:

$$\frac{d}{dp} e^{-ix \sin p} = -ix \cos p e^{ix \sin p}$$

$$\frac{d}{dp} e^{-ix \sin p} = -ix(e^{ip} + \sin p) e^{ix \sin p}$$

Теперь считаем:

$$\int_c \left( -i \sin p + \frac{\nu}{x} \right) e^{ip\nu - i \sin p} dp = \int_c \left( e^{ip} + \cos p + \frac{\nu}{x} \right) e^{i\nu p} dp$$

$$\int_c \left( -i \sin p + \frac{\nu}{x} \right) e^{ip\nu - i \sin p} dp = \int_c \left( -e^{-ip} e^{-ip\nu} - \frac{1}{ix} \frac{d}{dp} (e^{-ix \sin p}) e^{i\nu p} + \frac{\nu}{x} e^{ip\nu - i \sin p} \right) dp$$

$$\int_c \left( -e^{-ip} e^{-ip\nu} - \frac{1}{ix} \frac{d}{dp} (e^{-ix \sin p}) e^{i\nu p} + \frac{\nu}{x} e^{ip\nu - i \sin p} \right) dp = I_{\nu-1} + \int_c \left( -\frac{\nu}{x} + \frac{\nu}{x} \right) e^{i\nu p - i \sin p} dp$$

$$I_{\nu-1} + \int_c \left( -\frac{\nu}{x} + \frac{\nu}{x} \right) e^{i\nu p - i \sin p} dp = I_{\nu-1}(x)$$

## Функция Ханкеля

Функция Ханкеля первого рода:

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{(1)}} e^{ivp - ix \sin p} p dp,$$

где  $c^{(1)}$  – это следующий контур (рис.3.3).

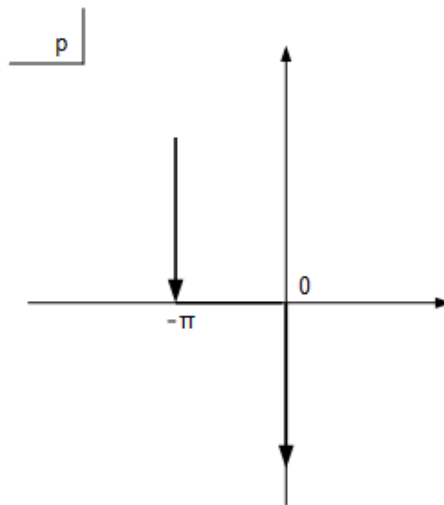


Рис. 3.3. Функция Ханкеля первого рода

Функция Ханкеля второго рода:

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{(2)}} e^{ivp - ix \sin p} p dp,$$

где  $c^{(2)}$  – это контур такого вида - рис.3.4.

Если мы сложим функции Ханкеля первого и второго рода, то интегралы по нижней части мнимой оси от 0 до  $\infty$  сократятся, и у нас получится следующая функция Бесселя:

$$\frac{1}{2} \left( -J_v(x) + H_v^{(2)}(x) \right) = I_v$$

Теперь найдем связь между функциями Ханкеля и Бесселя.



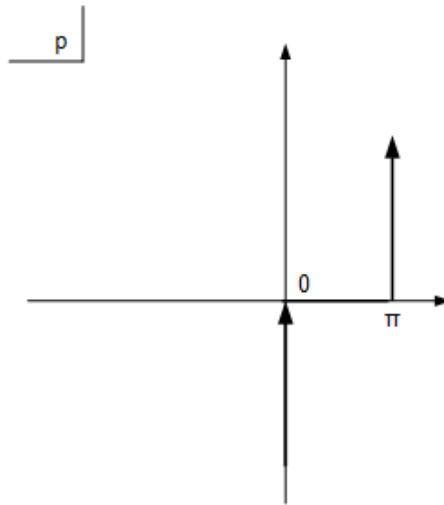


Рис. 3.4. Функция Ханкеля второго рода

## Связь между функциями Ханкеля и Бесселя

Чтобы найти эту связь, построим вспомогательное соотношение. А именно, докажем, что функция Ханкеля первого рода порядка  $-\nu$  есть следующее:

$$H_{-\nu}^{(1)} = e^{i\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}$$

А функция Ханкеля второго рода это:

$$H_{-\nu}^{(2)} = e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}$$

Докажем, например, второе соотношение.

$$H_{-\nu}^{(2)} = \int_{c^{(2)}} e^{-i\nu p - ix \sin p} dw$$

Сделаем замену переменных  $w = -p$ .

$$H_{-\nu}^{(2)} = \int_{c^{(2)}} e^{i\nu w + ix \sin w} dw$$

Следующий шаг: берем  $z = w + p$ , значит  $w = z - p$ . Контур сдвигается вправо.

$$H_{-v}^{(2)} = e^{-iv\pi} \int_{c^{(2)}} e^{izw-ix} \sin z dz$$

$$H_{-v}^{(2)} = e^{-iv\pi} H_v^{(2)} \pi$$

Таким образом, мы доказали нижнее рекуррентное соотношение. Верхнее доказывается аналогично. Теперь мы можем установить связь между функциями Ханкеля и Бесселя. Учитываем, что обе функции – это функции  $x$ .

$$I_v = \frac{1}{2} (H_v^{(1)} + H_v^{(2)}) \quad (3.1)$$

$$I_{-v} = \frac{1}{2} (e^{i\pi v} H_v^{(1)} + e^{-i\pi v} H_v^{(2)}) \quad (3.2)$$

$$e^{i\pi v} H_v^{(1)} = H_{-v}^{(1)}$$

$$e^{-i\pi v} H_v^{(2)} = H_{-v}^{(2)}$$

Мы получили два уравнения, которые позволяют нам выразить функцию  $H$  через функцию  $I$ . Уравнение (3.1) умножаем на  $e^{-i\pi v}$  и вычитаем из выражения (3.2).

$$H_v^{(1)} = \frac{I_{-v} - I_v e^{-i\pi v}}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}} 2$$

$$H_v^{(1)} = \frac{I_v e^{-i\pi v} - I_{-v}}{\sin \pi v} i$$

Раскладываем первую экспоненту на косинус и синус:

$$H_v^{(1)} = \frac{I_v (\cos \pi v - i \sin \pi v) - I_{-v} i}{\sin \pi v}$$

Далее синусы сокращаются и  $i, -i$  дает единицу.

$$H_v^{(1)} = I_v + \frac{I_v \cos \pi v - I_{-v} i}{\sin \pi v} i$$

$$\frac{I_v \cos \pi v - I_{-v}}{\sin \pi v}$$

– функция Неймана -  $N_v(x)$ .

Таким образом, мы получили, что функция Ханкеля первого рода – это функция Бесселя и  $iN_v$ :

$$H_{\nu}^{(1)} = I_{\nu} + iN_{\nu}$$

То же самое для функции Ханкеля второго порядка:

$$H_{\nu}^{(2)} = I_{\nu} - iN_{\nu}$$

Это справедливо для нецелого  $\nu$ . Если  $\nu$  целое, то и числитель, и знаменатель стремятся к нулю, и тогда получаем следующее:

$$N_n(x) = \frac{\frac{dI_{\nu}}{d\nu}(x)(-1)^n - \frac{dI_{-\nu}}{d\nu}(x)}{(-1)^n \pi}$$

Итак, мы представили функцию Ханкеля как функции Неймана и Бесселя. Теперь рассмотрим вопрос линейной независимости.

## Линейная независимость функций Ханкеля, Неймана и Бесселя

Здесь необходимо воспользоваться следующим соотношением:

$$\begin{vmatrix} a + b e \\ c + d f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a e \\ c f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b e \\ d f \end{vmatrix}$$

Рассматривается следующее выражение:

$$\begin{aligned} W[H_{\nu}^{(1)}, H_{\nu}^{(2)}] &= \begin{vmatrix} I_{\nu} + iN_{\nu} & I_{\nu} - iN_{\nu} \\ I'_{\nu} + iN'_{\nu} & I'_{\nu} - iN'_{\nu} \end{vmatrix} \\ W[H_{\nu}^{(1)}, H_{\nu}^{(2)}] &= \begin{vmatrix} I_{\nu} & N_{\nu} \\ I'_{\nu} & N'_{\nu} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} I_{\nu} & N_{\nu} \\ I'_{\nu} & N'_{\nu} \end{vmatrix} &= -2iw[I_{\nu}, N_{\nu}] \end{aligned}$$

Таким образом видно, что линейная независимость функции Ханкеля упирается в линейную независимость функций Бесселя и Неймана. Дальнейшая цель - подсчитать определитель Вронского функций Бесселя и Неймана и убедиться, что он отличен от нуля, т.е. эти функции линейно независимы. Берется выражение для функции Неймана и подставляется в правый столбец:

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} I_\nu & N_\nu \\ I'_\nu & N'_\nu \end{matrix} \right| &= \left| \begin{matrix} I_\nu & I_\nu \\ I'_\nu & I'_\nu \end{matrix} \right| \operatorname{ctg} \pi \nu + \left| \begin{matrix} I_\nu & -I_{-\nu} \\ I'_\nu & -I'_{-\nu} \end{matrix} \right| \frac{1}{\sin \pi \nu} \\ \left| \begin{matrix} I_\nu & N_\nu \\ I'_\nu & N'_\nu \end{matrix} \right| &= -\frac{1}{\sin \pi \nu} W[I_\nu, I_{-\nu}] \end{aligned}$$

$I_\nu$  в виде ряда это:

$$I_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)}$$

Для того, чтобы выяснить линейную независимость, необходимо определить равен ли нулю  $W[I_\nu, I_{-\nu}]$ . Это делается при  $x \rightarrow 0$ . Рассматривая выражение выше, становится ясно, что низшая степень  $x$  это  $x^\nu$ .

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (1 + O(x^2)) \\ I'_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\nu}{2} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (1 + O(x^2)) \\ I_{-\nu} &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (1 + O(x^2)) \\ I'_\nu(x) &= -\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{\nu}{2} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (1 + O(x^2)) \end{aligned}$$

Подставляются асимптотики.

$$\left| \begin{matrix} I_\nu & I_{-\nu} \\ I'_\nu & I'_{-\nu} \end{matrix} \right| = -\frac{\nu}{x} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)}$$

Тот же самый эффект будет, если  $I_{-\nu}$  умножить на  $I'_\nu$ , но появляется двойка, так как появляется другая диагональ.

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} I_\nu & I_{-\nu} \\ I'_\nu & I'_{-\nu} \end{matrix} \right| &= -\frac{\nu}{x} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)} 2(1 + o(x)) \\ -\frac{\nu}{x} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(1+\nu)} 2(1 + o(x)) &= \Gamma(1+\nu) = \nu\Gamma(\nu) \end{aligned}$$

$$\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\sin \pi v}$$

В результате получается следующее:

$$W[I_v, I_{-v}] = \frac{2 \sin \pi v}{x\pi} (1 + o(x))$$

$$W[I_v, N_v] = -\frac{1}{\sin \pi v} W[I_v, I_{-v}]$$

$\sin \pi v$  сокращается, остается следующее:

$$W[I_v, N_v] = \frac{2}{\pi x} (1 + o(x))$$

Таким образом, при малых  $x$ , т.к. эта величина отлична от нуля, функция линейно независимая. Более того, данный определитель можно уточнить:

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dy}{dx} \right) - qy = 0$$
$$W[y_1 y_2] = \frac{c}{K}$$

Т.к. функции линейно независимы, то  $C \neq 0$ . Теперь запишем уравнение Бесселя в виде специальных функций:

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + x \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0$$
$$x \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) = q$$
$$x = K(x)$$

Поэтому определитель Вронского двух линейно независимых решений:

$$W[I_v, N_v] = \frac{c}{x}$$

Окончательно это выражение будет таким:

$$W[I_v, N_v] = \frac{2}{\pi x}$$

Так получается второе решение функции Неймана. Уравнение Бесселя (для него можно строить разные пары линейно независимых решений) – это уравнение второго порядка, и оно имеет два линейно независимых решения. Обычно в качестве этих решений рассматривают либо вещественную пару  $I_\nu, N_\nu$ , либо пару  $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ . Пара  $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$  является комплексно сопряженной:

$$(H_\nu^{(2)})^* = H_\nu^{(1)}$$

Необходимо построить графический вид функции Неймана (Рис. 3.5). Здесь  $N_0(x)$  ведет себя как логарифм:

$$N_0(x) = O(\ln x)$$

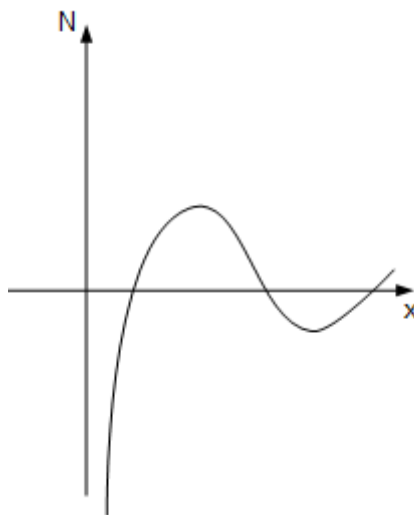


Рис. 3.5. Графический вид функции Неймана

Но если взять порядок отличный от нуля (Рис. 3.6), то функция Бесселя имеет  $\nu$ -ый ноль, а функция Неймана имеет  $\nu$ -ый полюс.

$$N_\nu = O\left(\frac{1}{x^\nu}\right)$$

Теперь задача сводится к тому, чтобы построить асимптотику при больших значениях  $x$ .

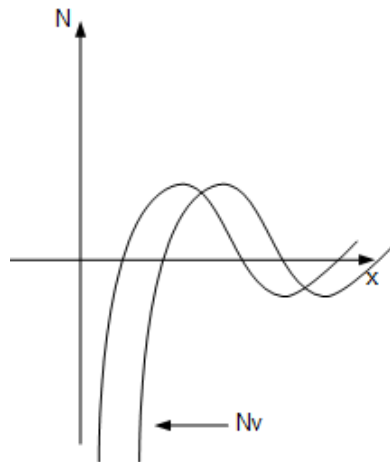


Рис. 3.6. Графический вид функции Неймана

### Асимптотика при больших значениях $x$

Асимптотика при больших значениях  $x$  строится методом перевала. Он служит для асимптотической оценки контурного интеграла:

$$\int_c \phi(p) e^{xf(p)} dp$$

Рассмотрим асимптотическую оценку для функции Ханкеля второго рода:

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{(2)}} e^{ip\nu - ix \sin p} dp,$$

$$e^{ip\nu} = \phi(p), -ix \sin p = e^{xf(p)}$$

Известно, что контур  $C$  можно деформировать, но необходимо, чтобы он лежал в заштрихованной области. Под интегралом стоит аналитическая функция, значит функция Ханкеля была определена так, как показано на (Рис. 3.7).

Можно деформировать контур, результат от этого не изменится. Но изменится сложность асимптотической оценки, т.к. если реальная часть  $f$  отрицательная, а  $x \rightarrow \infty$ , то  $e^{xf(p)}$  уменьшает подынтегральную функцию. Значит, выгодно контур провести так, чтобы реальная часть  $f$  была на большей части контура отрицательна, тогда эта поправка будет мала.

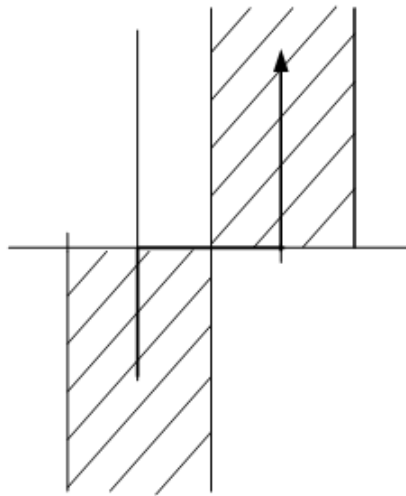


Рис. 3.7. Функция Ханкеля второго рода

$$f(p) = -xi \sin p$$

Невозможно провести контур так, чтобы он всегда был в заштрихованной области, он должен пройти минимум через одну точку. Поэтому этот метод называется *методом перевала*. Необходимо провести контур через точку перевала в направлении наискорейшего спуска.

Контур рассматривается так, чтобы он проходил через точку перевала, тогда при  $x \rightarrow \infty$  основной вклад дает малый участок вокруг точки перевала.  $p$  ищется следующим образом:

$$p = \frac{\pi}{2} + re^{i\psi},$$

где  $\xi$  – это угол, под которым контур проходит точку перевала.

Задача: найти направление наискорейшего спуска  $\xi$  и основной вклад, который вносится вокруг точки перевала. Рассматривается следующий интеграл:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iv\left(\frac{\pi}{2} + re^{i\psi}\right) - ix \sin\left(\frac{\pi}{2} + re^{i\psi}\right)} e^{i\psi} dr$$



Это участок интеграла, который будет вносить основной вклад. Эта величина оценивается так.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\nu\left(\frac{\pi}{2} + re^{i\nu}\right) - ix \sin\left(\frac{\pi}{2} + re^{i\nu}\right)} e^{i\nu} dr \approx \frac{1}{\pi} e^{i\nu\frac{\pi}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ix \cos(re^{i\nu})} e^{i\nu} dr$$

Косинус раскладывается вокруг 0.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ix \cos(re^{i\nu})} e^{i\nu} dr = \frac{1}{\pi} e^{i\left(\nu\frac{\pi}{2} + \nu\right)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ix\left(1 - \frac{r^2 e^{2i\nu}}{2}\right)} dr$$

## Лекция 4. Функция Ханкеля

Ранее были введены как контурные интегралы функции Ханкеля первого и второго рода, связанные с функциями Бесселя. В качестве фундаментальной системы решений уравнения Бесселя можно брать функции Бесселя и Неймана, а в качестве комплексной пары – функции Ханкеля первого и второго рода. Необходимо учитывать линейную независимость этих функций. Асимптотики этих функций при малых  $x$  получаются из разложения в ряды функций Бесселя, а при больших  $x$  необходимо рассматривать метод перевала.

$$\int_c \phi(p) e^{xf(p)} dp$$

где  $\phi$  и  $f$  – аналитические функции, асимптотика рассматривается при больших  $x$ . Если участок интегрирования лежит там, где реальная часть  $f(p)$  отрицательная, то при больших  $x$  вклад интеграла по этому участку стремится к нулю.

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{(2)}} e^{ip\nu - iv \sin p} dp$$
$$f(p) = -i \sin p$$

Если контур лежит в заштрихованных областях, то реальная часть  $f$  отрицательна (Рис. 4.1).

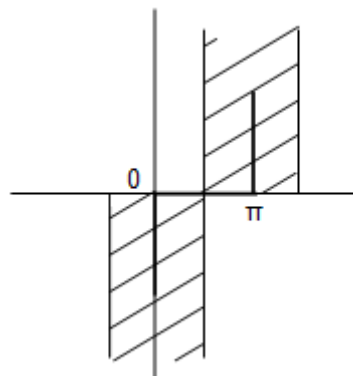


Рис. 4.1. Контур  $c^{(2)}$

Можно деформировать контур, чтобы удачнее получить асимптотику. Лучше всего, чтобы реальная часть была отрицательная, чтобы контур лежал в заштрихованной области. Это невозможно, но его можно провести через точку перевала. Затемненная область там, где реальная часть  $f$  отрицательна, а светлая там, где реальная часть  $f$  положительна. Контур необходимо провести так, чтобы он проходил через точку перевала в направлении наискорейшего спуска (Рис. 4.2).

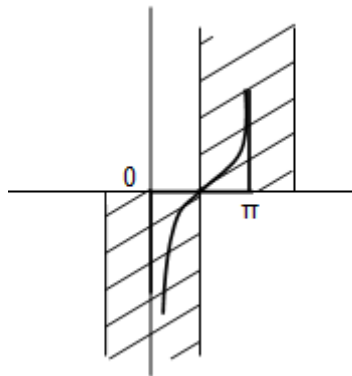


Рис. 4.2. Контур  $c^{(2)}$

Точка перевала будет  $p_0 = \frac{\pi}{2}$ .

$$p = \frac{\pi}{2} + re^{i\psi}$$

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iv(\frac{\pi}{2} + re^{i\psi}) - ix \sin(\frac{\pi}{2} + re^{i\psi})} e^{i\psi} dr$$

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{iv\frac{\pi}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ix(1 - \frac{r^2 e^{2i\psi}}{2})} e^{i\psi} dr$$

Отделяем мнимую вещественную часть:

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{i(v\frac{\pi}{2} + \psi)} e^{ix(1 - \frac{r^2}{2} \cos 2\psi)} e^{-ix(-\frac{r^2}{2} i \sin 2\psi)} dr$$

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{i(v\frac{\pi}{2} + \psi)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{2} x \sin 2\psi} e^{-ix(1 - \frac{r^2}{2} \cos 2\psi)} dr$$

Теперь необходимо выбрать направление наискорейшего спуска:

$$\sin 2\psi = 1$$

$\psi$  – это угол между направлением контура и горизонтальной осью:

$$\psi = \frac{\pi}{4}$$

Выбрав таким образом  $\psi$ , можно продолжить равенство:

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} e^{-i(1-v\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{r^2}{2}x} dr$$

Обозначим  $\frac{r^2}{2}x = \alpha^2$ , а  $\alpha = r\sqrt{\frac{x}{2}}$ .

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{r^2}{2}x} dr = I$$

$I$  при  $x \rightarrow \infty$  считается так:

$$I = \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \sqrt{\frac{2}{x}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

Это дает интеграл в пределе.

$$H_v^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-i(x-\frac{\pi}{2}v-\frac{\pi}{4})} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Это главное слагаемое интеграла. Получили асимптотику для функции  $H_v^{(2)}(x)$ .

$$H_v^{(1)}(x) = (H_v^{(2)}(x))^* = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\frac{\pi}{2}v-\frac{\pi}{4})} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Зная асимптотику  $H_v^{(1)}$  и  $H_v^{(2)}$  можно найти асимптотику функции Неймана и Бесселя.

$$I_v = \frac{1}{2} (H_v^{(1)} + H_v^{(2)})$$

Ассимптотика функции Бесселя будет выглядеть так:

$$I_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + o \left( \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Соответственно, функция Неймана будет выглядеть так:

$$N_\nu = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + o \left( \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Получили асимптотики решений уравнений Бесселя при больших  $x$ .

## Задача Штурма - Лиувилля в круге

Задача Штурма - Лиувилля:

$$\Delta U + \lambda U = 0$$

Пусть есть круг радиусом  $a$ . Вводится система координат  $r, \phi$ . Тогда  $U = 0$  при  $r = a$ . Необходимо найти отличное от нуля решение данной задачи Штурма - Лиувилля. Оно ищется в виде произведения. Задача Штурма - Лиувилля в полярной системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U}{d\phi^2} + \lambda U = 0$$
$$U(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

После подстановки в уравнение получается такое выражение:

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \lambda r^2 + \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}{\Phi} = 0$$

Необходимо, чтобы оно выполнялось при любых малых  $r$  и  $\phi$ . Они меняются, равенство сохраняется.

$$\frac{\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}{\Phi} = -\mu$$
$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \mu \Phi = 0$$

На  $\Phi$  наложено следующее условие:

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$$

Если  $\mu$  отрицательное, то общее решение будет экспонентой, но такая комбинация не может быть периодической. Поэтому  $\mu \geq 0$ :

$$\Phi = A \sin \sqrt{\mu}\phi + B \cos \sqrt{\mu}\phi$$

Обозначим  $\omega = \sqrt{\mu}$ . Подставим в условие периодичности:

$$A \sin \omega\phi + B \cos \omega\phi = A \sin \sqrt{\mu}(\phi + 2\pi) + B \cos \sqrt{\mu}(\phi + 2\pi)$$

Так как это равенство должно выполняться при любом  $\phi$ , то можно отделить части, содержащие синус и косинус. При  $\sin \omega\phi$ :

$$A = A \cos 2\pi\omega - B \sin 2\pi\omega$$

При  $\cos \omega\phi$ :

$$B = A \sin 2\pi\omega + B \cos 2\pi\omega$$

Эта система может выглядеть иначе:

$$\begin{cases} A(1 - \cos 2\pi\omega) + B \sin 2\pi\omega = 0 \\ A \sin 2\pi\omega - B(1 - \cos 2\pi\omega) = 0 \end{cases}$$

Интересует нетривиальное решение. Имеется система однородных линейных уравнений. Нетривиальные решения существуют, когда главный определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos 2\pi\omega & \sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & -(1 - \cos 2\pi\omega) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывается определитель:

$$-(1 - \cos 2\pi\omega)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0$$

$$2 - 2 \cos 2\pi\omega = 0$$

Иначе можно записать так:

$$\cos 2\pi\omega = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi\omega = 2\pi$$

Значит  $\omega$  - целое, а  $\mu = \omega^2$ .

$$\Phi = \begin{cases} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{cases}$$

$$\mu = n^2$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Если обратиться к задаче для  $R$ :

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = R$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0$$

Кроме того, имеется граничное условие:

$$R(a) = 0$$

Речь идет о специальной функции, у которой в нуле могут быть особенности, поэтому ищется ограниченное решение.

$$|R| = < \infty$$

Вот те условия, которые получаются для  $R$ . Если  $\sqrt{\lambda}r = x$ , а  $R(r) = y(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \\ y(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad |y| < \infty \end{cases}$$

Общим решением будет сумма Бесселя и Неймана.

$$y(x) = D_n I_n(x) + E_n N_n(x)$$

Функция Бесселя в нуле ограничена, а функция Неймана в нуле стремится к бесконечности. Поэтому  $E_n = 0$ . Решение задачи Штурма - Лиувилля ищется с точностью до множителя. Приравняем  $D_n$  к единице:

$$y(x) = I_n(x) \\ R(r) = I_n(\sqrt{\lambda} r)$$

Неизвестной величиной является  $\lambda$ , но существует еще одно граничное условие  $R(a) = 0$ :

$$I_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

Здесь  $\sqrt{\lambda} a = \xi_n^{(k)}$ . Отсюда находится  $\lambda$ :

$$\lambda_{n,k} = \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} \right)^2$$

Получается следующее:

$$R_{n,k}(r) = I_n \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} r \right)$$

Если рассматривать вторую краевую задачу при  $r = a \frac{dU}{dr} = 0$ , то общий вид решения не изменится.

$$\frac{dR}{dr}(a) = 0 \rightarrow I_n'(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

Значит  $\sqrt{\lambda} a = v_n^{(k)}$ , где  $v_n^{(k)}$  – это корень производной.

$$\lambda_{n,k} = \left( \frac{v_n^{(k)}}{a} \right)^2 \\ R_{n,k}(r) = I_n \left( \frac{v_n^{(k)}}{a} r \right)$$



Находим  $U$ :

$$U = U_{n,k} = I_n \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} r \right) \begin{Bmatrix} \sin n\phi \\ \cos n\phi \end{Bmatrix}$$

### Теорема Стеклова. Норма функции Бесселя

Пользуясь теоремой Стеклова, любую функцию можно разложить в ряд.

$$F(\phi, r) = \sum_{n,k} U_{n,k}(r, \phi) f(n, k)$$

По теореме Стеклова такой ряд сходится, и функция может быть разложена:

$$f_{n,k} = \frac{1}{\|U_{n,k}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a F(\phi, r) U_{n,k}(r\phi)$$

Квадрат нормы будет иметь следующий вид:

$$\|U_{n,k}\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a I_n^2 \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} r \right) \begin{Bmatrix} \sin^2 n\phi \\ \cos^2 n\phi \end{Bmatrix}$$

Двойной интеграл распадается на два.

$$\|U_{n,k}\|^2 = \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \sin^2 n\phi \\ \cos^2 n\phi \end{Bmatrix} d\phi \int_0^a I_n^2 \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} r \right) r dr$$

$$\|U_{n,k}\|^2 = 2\pi \varepsilon_n \|I_n\|^2,$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}$$

Осталось посчитать квадрат нормы  $I_n$ .

$$\|I_n\|^2 = \int_0^a I_n^2 \left( \frac{\xi_n^{(k)}}{a} r \right) r dr = \frac{a^2}{(\xi_n^{(k)})^2} \int_0^{\xi_n^{(k)}} I_n^2(x) x dx$$

Теперь посчитаем последний интеграл.

$$\int I_n^2(x) x dx = \frac{1}{2} \int I_n^2 \frac{dx^2}{dx} dx$$

$$\int I_n^2(x) x dx = \frac{I^2 x^2}{2} - \int II' x^2 dx$$

Необходимо вспомнить уравнения Бесселя.

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Здесь вводится вспомогательное соотношение, с помощью которого можно сделать дальнейшие вычисления:

$$Ix^2 = -\nu^2 I - x(xI)'$$

$$\frac{I^2 x^2}{2} - \int II' x^2 dx = \frac{I^2 x^2}{2} - \int \nu^2 II' dx + \int xI'(xI) dx = \frac{I^2 x^2}{2} - \frac{\nu^2 I^2}{2} + \frac{(xI)^2}{2}$$

Теперь рассчитывается квадрат нормы функции Бесселя в случае граничного условия первого рода:

$$\|I_n\|^2 = \frac{a^2}{(\xi_n^{(k)})} \left[ \frac{I_n}{2} (x^2 - \nu^2) + \frac{x^2}{2} I_n' \right] \Big|_0^{\xi_n^{(k)}} = \frac{a^2}{2} (I_n'(\xi_n^{(k)}))^2$$

В случае граничного условия второго рода выражение было бы таким:

$$\|I_n\|^2 = \frac{a^2}{(\nu_n^{(k)})} \left[ \frac{I_n}{2} (x^2 - \nu^2) + \frac{x^2}{2} I_n' \right] \Big|_0^{\nu_n^{(k)}} = \frac{a^2}{2} I_n'^2(\nu_n^{(k)}) \left[ 1 - \frac{n^2}{(\nu_n^{(k)})^2} \right]$$

Таким образом, было найдено решение задачи Штурма - Лиувилля, посчитан квадрат нормы. Различия первой и второй задачи заключаются в значениях  $\lambda$  и в квадрате нормы.

## Модифицированное уравнение Бесселя (функции Инфельда и Макдональда)

Это уравнение для задач в цилиндре, в нем знак перед единицей изменен.

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

Т.к. изменился знак, необходимо свести задачу к предыдущей. Здесь  $-1 = i^2$ . Пусть  $z = ix$ , а  $y(x) = Z(z)$ . Получается уравнение Бесселя:

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left( z \frac{dZ}{dz} \right) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) Z = 0$$

Теперь можно построить вещественное решение.

$$I_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{ix}{2} \right)^{2m+\nu} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$
$$I_\nu(x) = i^{-\nu} I_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m+\nu} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

Полученное выражение называется *функцией Инфельда*.

### Функция Инфельда

В предыдущем выражении все слагаемые положительные, с ростом  $x$  каждое слагаемое растет, значит функция будет монотонно возрастающей (Рис. 4.3).

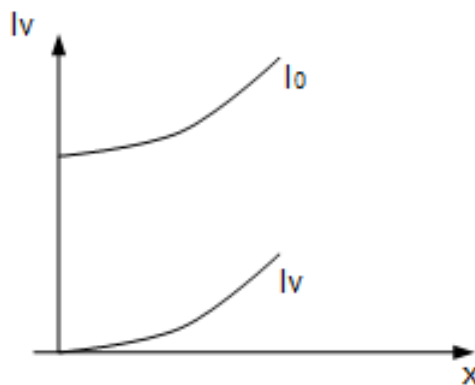


Рис. 4.3. Функция Инфельда

Представление о том, как график ведет себя на бесконечности, легко получить из асимптотики для функции Бесселя.

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} I_\nu(ix) = i^{-\nu} \frac{H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)}{2} =$$

$$= i^{-\nu} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi ix}} e^{i(ix - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + \sqrt{\frac{2}{\pi ix}} e^{-i(ix - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})}}{2}$$

$$I_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{\sqrt{2\pi xi}} e^{x + i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}}$$

Если учесть, что  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  - мнимая единица, то получается следующий ответ:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

Так как в ответе не фигурирует  $\nu$ , то все кривые на бесконечности возрастают примерно одинаково (Рис. 4.4).

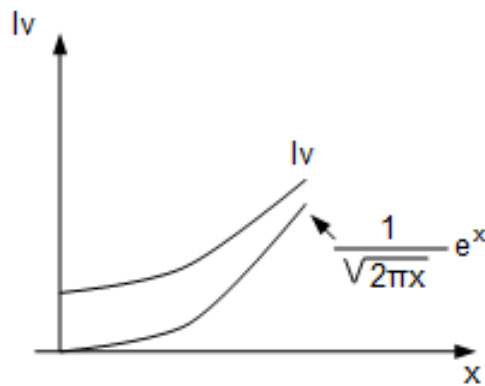


Рис. 4.4. Асимптотика для функции Бесселя

## Лекция 5. Модифицированное уравнение Бесселя

### Модифицированное уравнение Бесселя (продолжение)

Модифицированное уравнение Бесселя:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) - \left( 1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

Его решение необходимо искать как решение уравнения Бесселя от мнимого аргумента. Первое решение – это функция Инфельда. Второе линейно независимое решение – это функция Макдональда.

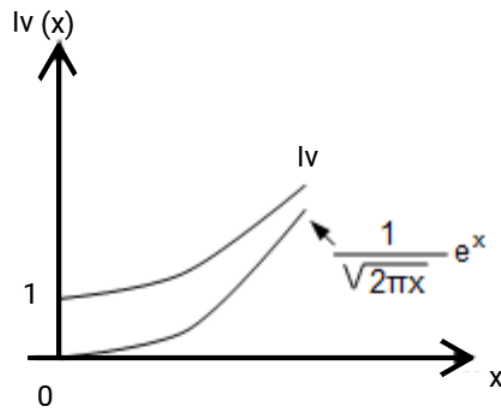


Рис. 5.1. Функция Бесселя

### Функция Макдональда

$$K_\nu(x) = i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

Данная функция является вещественной (графически изображалась как возрастающая). Это доказывается следующим образом:

$$H_\nu^{(1)} = i \frac{i^{-\nu} - e^{-i\pi\nu} I_\nu}{\sin \pi\nu}$$

$$K_\nu(x) = \frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}$$

При малых  $x$  функция растет (так как стоит  $I_{-\nu}$ ). Чтобы выяснить, как ведет себя функция при больших  $x$ , необходимо рассмотреть асимптотику  $K_\nu$  при  $K \rightarrow \infty$ .

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \dots$$

Графически функция является убывающей (Рис. 5.2).

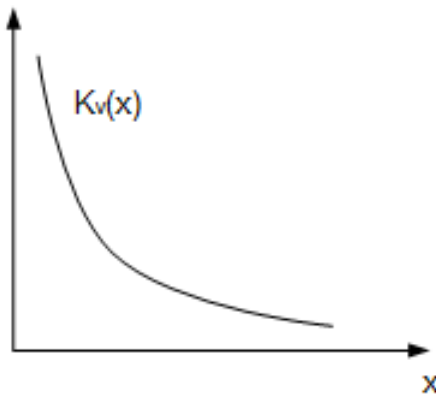


Рис. 5.2. Функция Макдональда

В силу своего поведения в нуле и на бесконечности, функции Макдональда и Инфельда линейно независимы. Они были бы линейно зависимы, если бы при некоторых коэффициентах, отличных от нуля, было выполнено следующее соотношение:

$$C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x) = 0$$

## Классические линейные ортогональные полиномы (КЛОП)

Для ряда случаев технически удобно сначала рассмотреть некоторый класс полиномов, изучить их свойства. В итоге оказывается, что КЛОП – это именно те функции, которые нужны для решения задач.

### Определение КОП и основные свойства

*Классические ортогональные полиномы* - полиномы, которые ортогональны с весом на рассматриваемом участке:

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) \rho(x) dx = 0$$

$$n \neq m$$

Вес  $\rho$  удовлетворяет некоторым требованиям. Вводится функция  $\sigma(x)$ , которая зависит от участка, на котором рассматриваются полиномы.

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & x \in [z, b] \\ x-a & x \in [a, \infty] \\ 1 & -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

Вводится функция  $\tau(x)$  – полином первого порядка.

$$\tau(x) = Ax + B$$

Тогда  $\rho(x)$  вводится как положительное решение уравнения Пирсона.

$$\frac{d}{dx}(\rho(x)\sigma(x)) = \tau(x)\rho(x)$$

Кроме того:

$$\rho\sigma x^K \Big|_a^b = 0$$

где  $K$  - любое положительное число.

### Утверждения для полиномов

Необходимо построить последовательность утверждений для введенных полиномов:

1) Полином  $n$ -ой степени ортогонален любому полиному меньшей степени ( $m < n$ ).

$$\int_a^b P_n Q_m \rho dx = 0$$

где  $Q_m$  - произвольный полином.

$$Q_m = P_m \alpha_m + \tilde{Q}_{m-1}$$

$$Q_m = \sum_{K=0}^m P_K \alpha_K$$

Получается следующее выражение:

$$\sum_{K=0}^m d_K \int_a^b P_n P_m \rho dx = 0$$

2) Если некоторый полином  $T_n$  ортогонален любому полиному низшего порядка, где  $m < n$ , то  $T_n$  может отличаться от входящего в систему  $P_n$  только множителем.

$$\int_a^b T_n Q_m \rho dx = 0 \quad \forall Q_m$$

$$T_n = P_n \alpha_n$$

Выбирается такой коэффициент  $\alpha$ , при котором старшие степени одинаковы.

$$T_n - \alpha_n P_n = \tilde{Q}_{n-1}$$

$$\int_a^b T_n (T_n - \alpha_n P_n) \rho dx = 0$$

Окончательное выражение выглядит следующим образом:

$$\int_a^b (T_n - \rho P_n)^2 \rho dx = 0$$

3) Если взять систему полиномов  $\{P_n\}$  и продифференцировать их, то полученная система  $\{P'_n\}$  снова является системой ортогональных классических полиномов с весом  $\rho_1 = \rho \sigma$ . Для доказательства необходимо показать, что  $P'_n$  ортогональны всем полиномам более низкого порядка ( $m < n - 1$ ).

$$\int_a^b P'_n Q_m \rho \sigma dx = - \int_a^b P_n Q_m \tau \rho dx = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\rho_1 \sigma) = \tau_1 \rho$$



$$(\rho\sigma)'\sigma + \rho\sigma\sigma' = \tau\rho\sigma + \rho\sigma\sigma' = \rho_1(\sigma' + \tau)$$

$$\sigma\rho_1 x^K \Big|_a^b = \sigma\rho(\sigma x^K) \Big|_a^b = 0$$

Таким образом, дифференцированием системы полиномов было доказано третье утверждение. Можно дифференцировать еще некоторое количество раз, не превосходящее  $n$ . В итоге получится:

$$\begin{aligned} \rho_K &= \rho\sigma^K \\ \tau_K &= \tau + K\sigma' \end{aligned}$$

### Задача Штурма-Лиувилля для КОП

4) Решением задачи будет классический ортогональный полином ( $m < n$ ):

$$\int_a^b Q_m \frac{d}{dx} \left( \sigma\rho \frac{dP_n}{dx} \right) dx = \int_a^b Q_m [\tau P_n' + \sigma P_n''] \rho dx = 0$$

$$\sigma P_n'' + \tau P_n' = -\lambda P_n$$

$$\frac{d}{dx} \left( \sigma\rho \frac{dP_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho P_n = 0$$

5)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \sigma\rho \frac{dP_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho P_n = 0 \\ |P_n(a)| < \infty, \quad |P_n(b)| < \infty \end{cases}$$

Считается, что  $[a, b]$  – конечный участок, а полиномы на нем ограничены. Таким образом, была получена задача типа Штурма-Лиувилля. Теперь необходимо убедиться, что никаких решений, кроме полиномов, у этой задачи нет.

Допустим, что при некотором  $\lambda$  существует линейно независимая от  $P$  функция  $y(x)$ , которая удовлетворяет задаче Штурма-Лиувилля.

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0$$

$$|y(a)| < \infty, \quad |y(b)| < \infty$$

Следует рассмотреть два случая. Первый случай:  $\lambda = \lambda_{n_0}$ . Тогда получается противоречие с основной леммой для специальных функций.

Второй случай:  $\lambda$  отлична от любых  $\lambda_n$ . Тогда получается соотношение:

$$\int_a^b [y(\sigma \rho P_n') - P_n(\sigma \rho y)'] + (\lambda - \lambda_n) \int_a^b y P_n \rho dx = 0$$

$$(\sigma \rho P_n' y - \sigma \rho y' P_n) \Big|_a^b - \int_a^b [y' \sigma \rho P_n' - P_n' \sigma \rho y'] dx$$

$$\int_a^b y P_n \rho dx = 0 \quad \forall n \Rightarrow y \equiv 0$$

Если функция  $y$  ортогональна всем полиномам, образующим замкнутую систему, то  $y$  не может быть отличным от нуля. Таким образом, было доказано, что полиномы являются решением задачи Штурма-Лиувилля и других решений быть не может.

6) Необходимо найти  $\lambda_n$ .

$$\sigma P_n'' + \tau P_n' = -\lambda_n P_n$$

$$P_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2$$

$$\sigma_2 n(n-1) + A n a_0 = -\lambda_n a_0$$

$$\lambda_n = -n[A + \sigma_2(n-1)] \quad (6)$$

### Формула Родрига

7) Явное представление для полиномов при известных  $\sigma$  и  $\rho$  (вычисляется с точностью до множителя).

$$\rho P_n = -\frac{1}{\lambda_n} \frac{d}{dx} \left( \rho \sigma \frac{dP_n}{dx} \right) = -\frac{1}{\lambda_n} \frac{d}{dx} \left( \rho_1 P_n^{(1)} \right)$$

$$-\frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 P_n^{(1)}) = \dots = (-1)^n \frac{1}{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \underbrace{\rho \sigma^n}_{\rho_n} P_n^{(n)} \right)$$

$$P_n = \frac{C_n}{\rho} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho \sigma^n) - \text{Формула Родрига}$$

### Квадрат нормы КОП

8) Квадрат нормы полинома в общем виде:

$$\|P_n\|^2 = \int_a^b P_n^2 \rho dx = \int_a^b P_n C_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho \sigma^n) dx = \dots = C_n (-1)^n a_0 n! \int_a^b \rho \sigma^n dx$$

$$\|P_n\|^2 = C_n (-1)^n a_0 n! \int_a^b \rho \sigma^4 dx$$

$$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

### Производящая функция

9) Производящая функция системы полиномов называется функцией  $Y(xz)$  вида:

$$Y(xz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n z^n}{C_n n!}$$

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\rho(x) \sigma(x)^n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho(x)} \int_C \frac{\rho(t) \sigma^n(t) dt}{(t-x)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(t)}{(t-x)\rho(x)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \sigma^n(t)}{(t-x)^n} \right] dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(t)}{(t-x)\rho(x)} \left( 1 - \frac{z\sigma(t)}{t-x} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i \rho(x)} \int_C \frac{\rho(t)}{t-x-z\sigma(t)} dt = \text{Res} \left[ \frac{\rho(t)}{t-x-z\sigma(t)}, x \right] \frac{1}{\rho(x)} = \end{aligned}$$

$$f^{(K)}(z_0) = \frac{K!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{K+1}} dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

Выражение для производящей функции:

$$Y(xz) = \frac{\rho(t^*)}{\rho(x)(1-z\sigma'(t^*))}$$

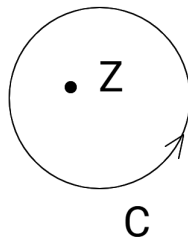


Рис. 5.3. Обход  $Z$  контуром  $C$  по комплексной плоскости

где  $t^*$  – это корень знаменателя:

$$t^* - x - z\sigma(t^*) = 0$$

И если  $\sigma$  – квадратичная функция с двумя корнями, то выбирается тот корень, который стремится к  $x$  при  $z \rightarrow 0$ :

$$t^* \rightarrow x \quad z \rightarrow 0$$

## Лекция 6. Теорема о нулях полиномов

### Определение КОП и основные свойства (продолжение)

$$\{P_n\}$$

$$\int_a^b P_n P_m \rho dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in (i, \infty) \\ (x-a)(b-x), & x \in [a, b] \\ x-a, & x \in [a, \infty) \end{cases}$$

$$\tau(x) = Ax + B$$

$$\frac{d}{dx}(\rho(x)\sigma(x)) = \tau(x)\rho(x), \quad \rho > 0$$

где  $\rho(x)$  – это положительное решение уравнения Пирсона.

$$\rho \sigma x^k \Big|_a^b = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_a^b P_n Q_m \rho dx = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( \sigma \rho \frac{dP_n}{dx} \right) + \lambda_n \rho P_n = 0$$

$$|P_n(a)| < \infty, \quad |P_n(b)| < \infty$$

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2$$

$$\lambda_n = -n[A + \sigma_2(n-1)]$$

$$P_n = \frac{C_n}{\rho} \frac{d^n}{dx^n} (\rho \sigma^n)$$

$$\|P_n\|^2 = \int_a^b P_n^2 \rho dx = C_n (-1)^n a_0 n! \int_a^b \rho \sigma^n dx$$

$$\|P_n\|^2 = (-1)^n a_n c_n n! \int_a^b \rho \sigma^4 dx$$

$$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$Y(xz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n z^n}{C_n n!}$$

$$Y(xz) = \frac{\rho(t^*)}{\rho(x)(1 - z\sigma'(t^*))},$$

$$t^* - x - z\sigma(t^*) = 0$$

## Теорема о нулях полиномов

Необходимо доказать последнее свойство полиномов, а именно: полином  $n$ -го порядка имеет ровно  $n$  простых корней на участке  $a, b$ .  $x_K$  - точки, в которых полином меняет знак (Рис. 6.1). Следует учитывать, что  $K < n$ .

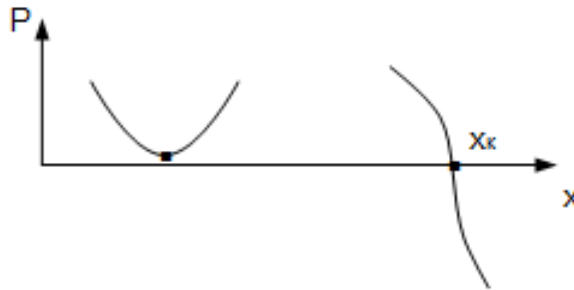


Рис. 6.1. Точки, в которых полином меняет или не меняет знак

Теперь можно представить полином следующим образом:

$$P_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_K) \phi(x)$$

где  $\phi$  - функция постоянного знака.

$$R_K = (x - x_1) \dots (x - x_K)$$

$R_K$  - полином порядка  $K$ .

$$\int_a^b P_n R_K \rho dx = \int_a^b R_K^2 \phi \rho dx = 0$$

Из получившегося противоречия  $K$  не может быть меньше  $n$ . Таким образом было доказано, что полином имеет ровно  $n$  корней на участке  $a, b$ .

## Бесконечный участок: полином Эрмита

В первом случае:  $-\infty < x < \infty$ , а  $\sigma = 1$ .

**Определение 6.1.** Полиномы Эрмита это полиномы  $(H_n(x))$  с весом  $\rho(x) = e^{-x^2}$

Формула, связывающая  $\tau$  и  $\rho$ :

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2} = \tau\rho$$
$$\tau = -2x$$

Так как  $\tau = Ax + B$ , то  $A = -2$ .

Задача, решение которой - полиномы Эрмита (учитывается, что участок бесконечный):

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx} \right) + \lambda_n e^{-x^2} H_n = 0 \\ \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx \right| < \infty \\ \lambda = -n(A + \sigma_2(n+1)) = 2n \\ C_n = (-1)^n \end{cases}$$

Формула Родрига:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Чтобы вычислить квадрат нормы, необходимо посчитать коэффициент  $a_n$ :

$$H_n(x) = a_n x^n + \dots$$
$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Таким образом, квадрат нормы:

$$\|H_n\|^2 = (-1)^n C_n a_n n! \int_a^b \rho \sigma^n dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Производящая функция:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n z^n}{C_n n!} = \frac{\rho(t^*)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - \sigma'(t^*)z}$$

$$t^* = x + z$$

$$Y = \frac{e^{-(x+z)^2}}{e^{-x^2}} = e^{-2xz - z^2}$$

Получается:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n z^n}{C_n n!} = \sum \frac{H_n(x) z^n}{n!} = e^{2xz - z^2}$$

### Полубесконечный участок: полином Лаггера

Во втором случае:  $0 < x < \infty$ .

$$\sigma(x) = x$$

**Определение 6.2.** Полиномы Лаггера  $L_n^{(s)}(x)$  – это полиномы весом  $\rho = x^s e^{-x}$

Необходимо построить цепочку для полиномов Лаггера. В первую очередь следует написать уравнение Пирсона и найти  $\tau$  и  $A$ :

$$\frac{d}{dx} (x^{s+1} e^{-x}) = (Ax + B) x^s e^{-x}$$

$$Ax + B = s + 1 - x$$

$$A = -1$$

Задача, решение которой - полиномы Лаггера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (x^{s+1} e^{-x} \frac{dL_n^{(s)}}{dx}) + \lambda_n x^s e^{-x} L_n^{(s)} = 0 \\ \left| \int_0^{\infty} (L_n^{(s)})^2 \rho dx \right| < \infty \end{array} \right.$$

$$\lambda_n = -n(A) = n$$



Формула Родрига:

$$C_n = \frac{1}{n!}$$
$$L_n^{(s)}(x) = \frac{x^{-s} e^x}{n!} \frac{d}{dx^n} (x^{s+n} e^{-x})$$

Далее необходимо найти коэффициент при старшей степени:

$$L_n^{(s)} = a_n x^n + \dots$$
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Квадрат нормы:

$$\|L_n^{(s)}\|^2 = (-1)^n C_n a_n n! \int_a^b \rho \sigma^n dx = \frac{\Gamma(s+n+1)}{n!}$$

При  $s = 0$  получается так:

$$\|L_n^{(0)}\|^2 = 1$$

Иногда полиномом Лаггера называют  $L$  нулевое:  $L_n = L_n^{(0)}$ .

Производящая функция:

$$Y = \sum \frac{L_n^{(s)} z^n}{n! C_n} = \frac{\rho(t^*)}{\rho(x)} \frac{1}{1 - z\sigma'(t^*)}$$
$$t^* - x - z\sigma(t^*) = 0$$
$$t^* = \frac{x}{1-z}$$

Получается:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n z^n}{C_n n!} = \frac{e^{-\frac{zx}{1-z}}}{(1-z)^{s+1}}$$

## Конечный участок: полином Якоби

Рассматриваемый участок:  $x \in [-1, 1]$ ,  $\sigma(x) = 1 - x^2$ .

Полиномы Якоби - это полиномы  $(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))$  с весом

$$\rho = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta$$

$$\frac{d}{dx}((1+x)^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}) = (Ax+B)(x+1)^\alpha(1-x)^\beta$$

$$A = -(\alpha+1) - (\beta+1) = -(\alpha+\beta+2) = -1$$

Задача, решение которой - полиномы Якоби:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( (1+x)^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1} \frac{dP_n^{(\alpha, \beta)}}{dx} \right) + \lambda_n (1+x)^\alpha (1-x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)} = 0 \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(\pm 1) < \infty \end{cases}$$

$$\lambda_n = -n(A + \sigma_2(n+1)) = (\alpha + \beta + n + 1)n$$

Полиномы Якоби тяжеловесны, поэтому следует рассмотреть частные случаи.

## Частные случаи: полином Чебышева

Первый частный случай - *полиномы Чебышева*, которые используются в численных методах. Полином Чебышева первого рода:

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

Полином Чебышева второго рода:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

## Полином Лежандра

Полином Лежандра ( $P_n(x)$ ) - полином Якоби, при  $\alpha = \beta = 0$ . Участок будет

$$x \in [-1, 1], \quad \sigma(x) = 1 - x^2$$

$$A = -2$$

Уравнение Лежандра:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + \lambda_n P_n = 0 \\ \left| P_n(\pm 1) \right| < \infty \end{cases}$$

$$\lambda_n = n(n+1)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!2^n}$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n} \frac{d}{dx^n} ((1-x^2)^n)$$

Производящая функция:

$$Y = \sum \frac{P_n z^n}{C_n n!} = \frac{1}{1 - z\sigma'(t^*)}$$

$$t^* - x - z\sigma(t^*) = 0$$

$$t^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4z(z+x)}}{2z}$$

$$Y = \sum P_n(x) (-1)^n 2^n z^n = \frac{1}{\sqrt{1 + 4zx + 4z^2}}$$

Берется  $-2z$  как новое  $z$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}$$

Чаще всего именно данную функцию называют *производящей*.

Квадратное соотношение, которое часто используется при решении задач дифракции:

$$\frac{R}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n$$

## Лекция 7. Присоединенные функции Лежандра

### Полином Лежандра

Необходимо построить последовательность рекуррентных соотношений для определения  $P$ .

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k = \frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}$$

Рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра.  $P_0$  и  $P_1$

Для этого продифференцируем данное соотношение по  $z$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} k P_k z^{k-1} &= \frac{z-x}{\sqrt{1-2zx+z^2}(1-2zx+z^2)} \\ (1-2zx+z^2) \sum_{k=0}^{\infty} k P_k z^{k-1} &= (-z+x) \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \end{aligned}$$

Далее следует приравнять при  $z^n$ .

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1} &= P_{n-1} + xP_n \\ (n+1)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Получили рекуррентное соотношение. Воспользовавшись формулой Родрига можно построить  $P_0$  и  $P_1$ .

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

Благодаря такому рекуррентному соотношению можно строить все следующие  $P$ .

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Можно построить график этой функции (Рис. 7.1).

Это полиномы, количество корней которых равно индексу  $P$ . Рекуррентное соотношение позволяет строить последующие полиномы. Если  $x = 1$ , то получается следующее равенство:

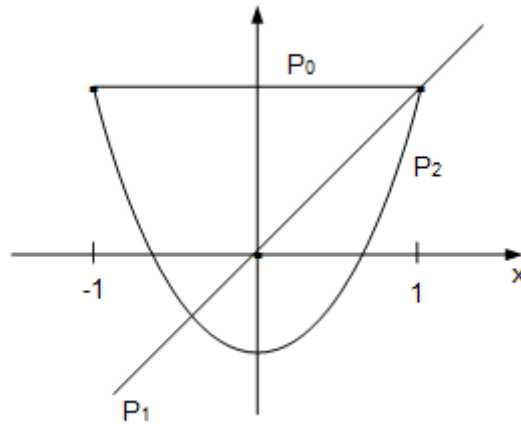


Рис. 7.1. График для  $P_0, P_1, P_2$

$$\sum P_n(1)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$P_n(1) = 1$$

Если  $x = -1$ , то получается следующее равенство:

$$\sum P_n(-1)z^n = \frac{1}{\sqrt{1+2z+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (-1)^n$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

## Квадрат нормы полиномов Лежандра

Квадрат нормы полиномов Лежандра вычисляется с помощью рекуррентного соотношения.

$$nP_n - x(2n-1)P_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$$

Необходимо посчитать следующее:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n P_n dx = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 P_n (x(2n-1)P_{n-1} - (n-1)P_{n-2}) dx$$

$$\int_{-1}^1 P_n P_{n-1} dx = 0$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 P_n x P_{n-1} dx$$

$P_n$  необходимо взять из вспомогательного соотношения:

$$(n+1)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 P_{n-1} \frac{(n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}}{2n+1} dx$$

$$\int_{-1}^1 P_{n-1} P_{n+1} dx = 0$$

$$\|P_n\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2$$

Таким образом, индекс был понижен на единицу. В итоге так можно дойти до  $P_0$ .

$$\frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} \dots \frac{1}{3} \|P_0\|^2 = \frac{\|P_0\|^2}{2n+1}$$

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^1 P_0^2 dx = 2$$

Окончательное выражение квадрата нормы полинома Лежандра:

$$\|P_0\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

## Полиномы Лежандра образуют полную и замкнутую систему функций. Теорема Стеклова

Полиномы Лежандра образуют полную замкнутую систему. Этими полиномами можно приблизить любые другие полиномы. Известно, что любая функция может быть приближена полиномами, значит полиномами Лежандра может быть приближена любая непрерывная функция. Отсюда следует замкнутость системы полиномов, а из замкнутости следует полнота.

Любую ограниченную и дважды дифференцируемую функцию  $f(x)$  в силу теоремы Стеклова можно разложить в ряд по полиномам:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$$
$$f_n = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

## Присоединенные функции Лежандра

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = P_n^{(m)}(x)$$

$$P_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}$$

Здесь  $P_n^m$  - присоединенная функция Лежандра. Целью является получение уравнения, которому удовлетворяет присоединенная функция Лежандра.

## Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля для $m$ -й производной

Известно, что для  $\{P_n\}$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \sigma = 1 - x^2 \end{cases}$$

Тогда для  $\{P_n^{(m)}\}$

$$\rho_m = \rho \sigma^m = (1-x^2)^m$$

Теперь можно написать дифференциальную задачу для производных:

$$\frac{d}{dx} \left( \rho_m \sigma \frac{dP_n^{(m)}}{dx} \right) + \lambda_{m,n} \rho_m P_n^{(m)} = 0$$

$$\frac{d}{dx} ((1-x^2)^{m+1} P_n^{m+1}) + \lambda_{m,n} (1-x^2) P_n^{(m)} = 0$$

$$P_n^{m+2} (1-x^2)^{m+1} - 2(m+1)x P_n^{m+1} (1-x^2)^m + \lambda_{m,n} (1-x^2)^m P_n^{(m)}$$



$$P_n^{m+2}(1-x^2)^{m+1} - 2(m+1)xP_n^{m+1} + \lambda_{m,n}P_n^{(m)}$$

Из этого соотношения можно посчитать  $\lambda$  при производной  $x^{n-m}$ .

$$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$P_n^{(m)} = a_n x^n [n(n-1)\dots(n-m+1)] + \dots$$

$$xP_n^{(m+1)} = a_n x^{n-m} [n\dots(n-m+1)(n-m)] + \dots$$

$$x^2 P_n^{(m+2)} = a_n x^{n-m} [n\dots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)] + \dots$$

Теперь делается подстановка в основное уравнение:

$$-(n-m)(n-m-1) - 2(m+1)(n-m) + \lambda = 0$$

$$\lambda_{n,m} = (n-m)(n+m+1)$$

## Какому уравнению удовлетворяют присоединенные функции Лежандра? Задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} P_n^{(m+2)}(1-x^2) - 2(m+1)xP_n^{(m+1)} + \lambda_{m,n}P_n^{(m)} = 0 \\ \lambda_{n,m} = (n-m)(n+m+1) \end{cases}$$

Далее необходимо рассмотреть, какому уравнению удовлетворяет присоединенная функция Лежандра.

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \left( (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m+1)} - xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} P_n^{(m)} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} P_n^{(m+1)} - xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)} \right]$$

Полученное выражение дифференцируется:

$$P_n^{(m+2)}(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} - x(m+2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m+1)} - \\ -m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)} + x^2m^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}P_n^{(m)} - xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m+1)}$$

Получается следующее:

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ P_n^{(m+2)}(1-x^2) - P_n^{(m+1)}(m+1)x^2 + \left( \frac{x^2m^2}{1-x^2} - m \right) P_n^{(m)} \right\} = \\ = P_n^m \left\{ \frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1) \right\}$$

Таким образом, было получено следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_n^m = 0,$$

$$\lambda = n(n+1), \quad |P_n^m(\pm 1)| < \infty$$

Теперь можно посчитать квадрат нормы присоединенных функций.

## Квадрат нормы присоединенных функций

$$\|P_n^m\|^2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m P_n^{(m)} P_n^{(m)} dx$$

Необходимо интегрировать данное выражение:

$$- \int_{-1}^1 P_n^{(m-1)} \frac{d}{dx} [(1-x^2)^m P_n^{(m)}] dx$$

## Доказательство полноты системы присоединенных функций Лежандра. Теорема Стеклова

Вспомогательное выражение:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n^{(m-1)}}{dx} \right] + \lambda_{m-1,n} (1-x^2)^{m-1} P_n^{(m-1)} = 0,$$

$$\lambda_{m-1,n} = (n-m+1)(n+m)$$

После подстановки получается следующее:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{m-1} (P_n^{(m-1)})^2 dx (n-m+1)(n+m)$$

$$\|P_n^m\|^2 = (n+m)(n-m+1) \|P_n^{m-1}\|^2$$

Далее необходимо понижать индекс до нуля:

$$\|P_n^m\|^2 = (n+m)(n+m-1)\dots(n-m+2)(n-m+1) \|P_n^0\|^2$$

Если рассмотреть это выражение на числовой оси, то получится следующее расположение точек (Рис. 7.2).



Рис. 7.2. Расположение точек на числовой оси по ”шагам”

Такое движение будет продолжаться, пока точки не встретятся. Значит, произведение всех этих множителей можно написать так:

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

В результате получается следующее:

$$\|P_n^m\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$$

Далее следует выяснить, можно ли по присоединенным функциям раскладывать в ряд. Задача состоит в том, чтобы доказать полноту присоединенных функций Лежандра. Здесь  $m$  будет фиксированная, а  $n$  будет меняться.

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}$$

Следует взять любую функцию  $f(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  (Рис. 7.3).

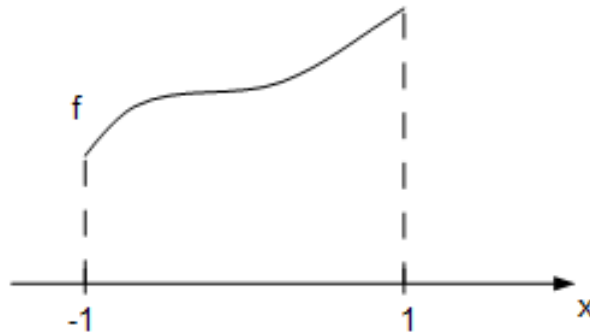


Рис. 7.3. Функция  $f(x)$

Здесь  $\varepsilon < 0$ ,  $f(\delta - 1) = A_1$ ,  $f(1 - \delta) = A_2$ .

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-1 + \delta, 1 - \delta] \\ \frac{A_1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{[\delta(2-\delta)]^{\frac{m}{2}}} & x \in [-1, -1 + \delta] \\ \frac{A_2(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{[\delta(2-\delta)]^{\frac{m}{2}}} & x \in [1 - \delta, 1] \end{cases}$$

$$\|f - f_1\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (f - f_1)^2 dx} \leq \sqrt{f^2 2\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$$

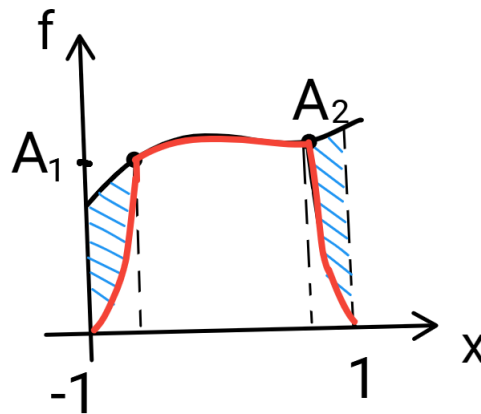


Рис. 7.4. Функция  $f_1(x)$  (обведена красным) отличается от  $f(x)$  на заштрихованной синим цветом области

Теперь необходимо построить функцию  $\phi(x)$  (Рис. 7.5).

$$\phi(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

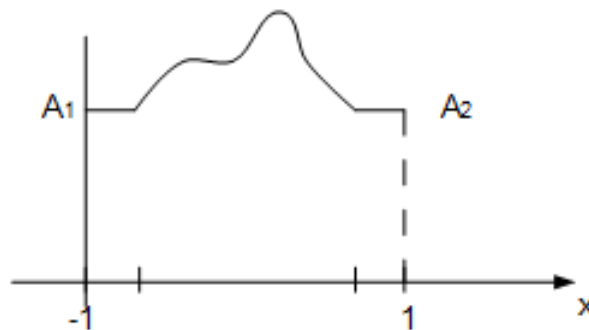


Рис. 7.5. Функция  $\phi(x)$

Данная функция непрерывная и ограниченная, значит ее можно приблизить системой полиномов.

$$\left\| \phi(x) - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left\| f_1(x) - \sum_{n=0}^N C_n (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)} \right\| = \left\| f_1 - \sum_{n=0}^N C_n P_n^{(m)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f - \sum_{n=1}^N C_n P_n^m\| \leq \|f - f_1\| + \|f_1 - \sum_{n=1}^N C_n P_n^m\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Получили, что система присоединенных функций полна, замкнута, и любую непрерывную функцию можно разложить в ряд по присоединенным функциям.

## Лекция 8. Задача Штурма-Лиувилля в шаре

### Задача Штурма-Лиувилля в шаре (сферические функции)

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 \\ U|_{r=0} = 0 \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

Здесь  $\theta$  - угол широты места, а  $\phi$  - угол долготы в сферической системе координат.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 U}{d\phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dU}{d\theta} \right) + \lambda U = 0$$

Необходимо найти собственную функцию в виде разделенных переменных.

$$\begin{aligned} U &= R(r)Y(\theta, \phi) \\ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \lambda U r^2 + \frac{\Delta_{\theta, \phi} Y}{Y} &= 0 \\ \Delta_{\theta, \phi} Y &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 Y}{d\phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) \\ \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 Y}{d\phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) + \mu &= 0 \\ |Y|_{\theta=0, \pi} < \infty \\ Y(\theta, \phi) &= Y(\theta, \phi + 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

Эту задачу также необходимо решать в виде разделенных переменных.

$$\begin{aligned} Y(\theta, \phi) &= \Theta(\theta)\Phi(\phi) \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}{\Theta} + \mu \sin^2 \theta &= 0 \\ \begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu \Phi &= 0 \\ \Phi(\phi) &= \Phi(\phi + 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

здесь  $\nu = m^2$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , а  $\Phi$ :

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

Далее следует обратиться к задаче по  $\Theta$ .

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \mu - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

Условия ограниченности:

$$|\Theta|_{\theta=0,\pi} < \infty$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= x \frac{d}{dx} = -\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \\ \Theta(\theta) &= y(x) \\ \begin{cases} \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \left( \mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Решением данной задачи будут также присоединенные функции Лежандра. Решение существует, когда  $\mu = n(n+1)$ , тогда.

$$\begin{aligned} y(x) &= P_n^m(x) \\ Y(\theta, \phi) &= Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases} \end{aligned}$$

Такие функции  $Y_n^m$  называются *сферическими функциями*. Рассмотрим, как меняются  $n$  и  $m$ :

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$m = 0, \dots, n$$

$$\sin m\phi \leftrightarrow m \geq 0$$

$$\cos m\phi \leftrightarrow m < 0$$



Получаются однозначные сферические функции. Сферические функции ортогональны между собой по верхнему и нижнему индексам.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{n_1}^{m_1} Y_{n_2}^{m_2} \sin \theta d\phi d\theta = 0$$

Присоединенная функция – это решение задачи Штурма-Лиувилля.

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right) + \left( \lambda_n - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_n^m = 0$$

Полиномы будут ортогональны между собой при различных  $n$ . Таким образом, сферические функции образуют полную ортогональную систему на сфере.

Перейдем к рассмотрению радиальной части.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0$$

$$\frac{\Delta_{\theta, \phi} Y}{Y} = -n(n+1)$$

Замена переменных:

$$R(r) = \frac{V(r)}{\sqrt{r}}$$

Подставим в уравнение новые переменные:

$$R' = \frac{V'}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2} \frac{V}{r^{\frac{3}{2}}}$$

$$r^2 R' = V' r^{\frac{3}{2}} - \frac{V r^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Это выражение дифференцируется по  $r$ .

$$(r^2 R')' = V'' r^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} V' r^{\frac{1}{2}} - \frac{V' r^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{4 r^{\frac{1}{2}}}$$

$$(r^2 R')' = V'' r^{\frac{3}{2}} + V' r^{\frac{1}{2}} - \frac{V}{4 r^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} (r^2 R')' = V'' + \frac{1}{2} V' - \frac{V}{4 r^2}$$

$$\frac{1}{r}(rV') + \left( \lambda - \frac{n(n+1) - \frac{1}{4}}{r^2} \right) V = 0$$

$$n(n+1) + \frac{1}{4} = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2$$

Окончательно получается так:

$$\frac{1}{r}(rV') + \left( \lambda - \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right)^2}{r^2} \right) V = 0$$

$$V(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r) + BN_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)$$

Теперь можно вернуться к  $R$ .

$$R(r) = \frac{V(r)}{\sqrt{r}} = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$$

До сих пор граничное условие нигде не было использовано, и было неважно какого рода задача (первого или второго). Далее следует использовать граничные условия. Если рассматривать граничные условия первого рода:

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0 \\ U|_a = 0 \end{cases} \Rightarrow R(a) = 0$$

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{a}} = 0$$

$$\sqrt{\lambda}a = \xi_{n+\frac{1}{2}}^{(K)}$$

$$\lambda = \left[ \frac{\xi_{n+\frac{1}{2}}^{(K)}}{a} \right]^2$$

В случае второй краевой задачи:

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\frac{\sqrt{\lambda} J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a)}{a^{\frac{3}{2}}} = 0$$

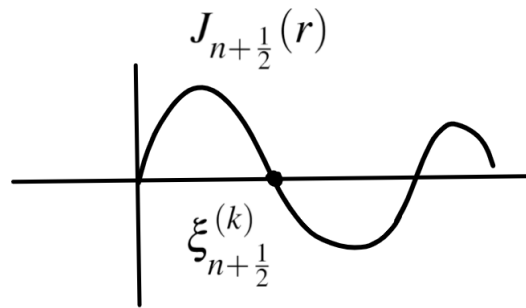


Рис. 8.1.  $J_{n+\frac{1}{2}}(r)$  и  $\xi_{n+\frac{1}{2}}^{(k)}$

$$U_{m,n,K}(r, \theta\phi) = \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_{n+\frac{1}{2}}^{(K)}}{a}r\right)}{\sqrt{r}} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

Квадрат нормы:

$$\|U_{m,n,K}(r, \theta\phi)\|^2 = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{J'^2_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_{n+\frac{1}{2}}^{(K)}}{a}r\right)}{r} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases} \sin \theta r^2 d\phi d\theta dr$$

$$\|U_{m,n,K}(r, \theta\phi)\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \varepsilon_m \pi \int_0^a J_{n+\frac{1}{2}}^2\left(\frac{\xi_{n+\frac{1}{2}}^{(K)}}{a}r\right) r dr$$

## Задача для оператора Лапласа в шаре. Шаровые функции

Шаровые функции - это частное решение задачи Лапласа в шаре в виде разделенных переменных.

$$\Delta U = 0$$

$$U = R(r)Y(\theta, \phi)$$

Получается следующее:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_{\theta,\phi} Y}{Y} = 0$$

$$Y_n^m = P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$
$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0$$
$$R'' r^2 + 2R' r - n(n+1)R = 0$$
$$R = r^\sigma$$
$$[\sigma(\sigma - 1) + 2\sigma - n(n+1)]r^2 = 0$$

Иначе это выражение можно записать так:

$$\sigma(\sigma + 1) = n(n + 1)$$

Если рассматривать внутреннюю задачу и искать ограниченное решение, то получается:

$$\sigma = n$$

Второй корень будет:

$$\sigma = -(n + 1)$$

Итак, для внутренней задачи получается шаровая функция вида:

$$U = r^n P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

## Некоторые задачи квантовой механики

В квантовой механике положение частицы определяется статистически. Вводится функция  $\psi$ , и квадрат модуля определяет вероятность нахождения частицы в рассматриваемой функции в рассматриваемой точке. Плотность вероятности определяется уравнением Шредингера.

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где  $\mu$  - масса частицы.

$$\int_{R_3} |\psi|^2 dV = 1$$

Это своего рода задача Штурма-Лиувилля. Далее будет рассмотрена задача о гармонических колебаниях частицы.

### Задача о гармонических колебаниях частицы

Уравнение гармонических колебаний:

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + kx &= 0 \\ U &= \frac{kx^2}{2} \\ \omega^2 &= \frac{k}{\mu}\end{aligned}$$

Тогда  $U$  будет таким:

$$U = \frac{\omega^2 \mu}{2} x^2$$

Таким образом, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{h^2} \left( E - \frac{\omega^2 \mu}{2} x^2 \right) \psi = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \end{cases}$$

Прежде всего следует упростить запись.

$$\begin{aligned}x &= x_0 \xi \\ \frac{\omega^2 \mu^2}{h^2} x_0^4 &= 1 \\ x_0 &= \sqrt{\frac{h}{\omega \mu}} \\ x_0^2 \frac{2\mu}{h^2} E &= \lambda \\ E &= \lambda \frac{h\omega}{2}\end{aligned}$$

После замены переменных получается такое уравнение:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \psi = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{x_0} \end{cases}$$

$$\psi = ye^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\frac{d}{d\xi} \psi = (y' - \xi y) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \psi = [(y'' - y - \xi y') - \xi (y' - \xi y)]$$

$$y'' - 2\xi y' - y + \xi^2 y + \lambda y - \xi^2 y = 0$$

$$y'' - 2\xi y' + (\lambda - 1)y = 0$$

Теперь необходимо вспомнить полиномы Эрмита:

$$\frac{d}{d\xi} \left( e^{-\xi^2} \frac{dH_n}{d\xi} \right) + \lambda e^{-\xi^2} H_n = 0$$

$$H_n'' - 2\xi H_n' + n H_n = 0$$

Получается, что  $y$  - это полином Эрмита.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{x_0} = C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{x_0}} d\xi$$

Окончательно получается:

$$\psi(x) = \frac{H_n \left( \frac{x}{x_0} \right) e^{\frac{1}{2} \left( \frac{x}{x_0} \right)^2}}{\sqrt{x_0 n! 2^n \sqrt{\pi}}}$$

На рисунке (Рис. 8.2) изображена вероятность нахождения частицы при разных энергиях.

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

$$H_0(x) = 1$$

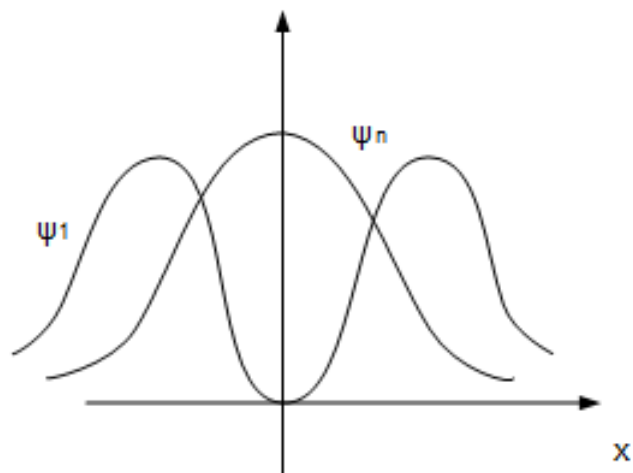


Рис. 8.2. Вероятность нахождения частицы при разных энергиях

$$H_1(x) = 2x$$

$$E_n = \frac{2n+1}{2} \omega h$$

$$E_0 = \frac{\omega h}{2}$$

$$E_1 = \frac{3}{2} \omega h_1$$

$$|\psi_0|^2 \approx e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

$$|\psi_1|^2 \approx x^2 e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

## Лекция 9. Задачи квантовой механики

### Задача о ротаторе

*Ротатор* - частица, которая находится на некотором фиксированном расстоянии от центра. Далее будет рассмотрено уравнение Шредингера для такой частицы при отсутствии потенциала.

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U(\mu))\psi = 0,$$
$$U = 0$$

Если потенциал равен нулю, радиус не меняется, тогда получается уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E \psi = 0$$
$$\psi = \psi(\theta, \phi)$$

Условие нормировки:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |\psi(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta = 1$$

Вводится момент инерции частицы:

$$I = \mu r^2$$
$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2\psi}{d\phi^2} + \lambda \psi = 0,$$
$$\lambda = \frac{2I}{\hbar^2} E$$

Решение выглядит так:

$$\Delta_{\theta\phi} Y + \lambda Y = 0$$

Условие ограниченности:

$$|Y(\theta, \phi)| < +\infty$$

$$|Y(\pi, \phi)| < +\infty$$



Условие периодичности:

$$Y(\theta, \phi) \equiv Y(\theta, \phi + 2\pi)$$

Решение – присоединенные функции Лежандра, умноженные на синусы и косинусы.

$$Y_l^{(m)}(\theta, \phi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

В качестве решения задачи можно выписать следующую функцию:

$$\psi_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{(1+\delta_{l0})\pi}} P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

$$\frac{2l}{\hbar^2} E = l(l+1) \Leftarrow E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

### Движение электрона в поле протона (в кулоновском поле, атом водорода)

С физической стороны, движение в кулоновском поле соответствует атому водорода (электрон, находящийся в поле протона). В этом случае в уравнении Шредингера в качестве потенциала берется кулоновский потенциал.

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U(\mu))\psi = 0,$$

$$U(\mu) = -\frac{q^2}{r}$$

Уравнение Шредингера принимает такой вид:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E - \frac{q^2}{r} \right) \psi = 0,$$

Далее необходимо расписать оператора Лапласа.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E + \frac{q^2}{r} \right) \psi = 0$$

Искать решение такой задачи необходимо с помощью метода разделения переменных.

$$\begin{aligned} \psi &= R(r)V(\theta, \phi) \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) V(\theta, \phi) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) R(r) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 V}{d\phi^2} R(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E + \frac{q^2}{r} \right) R(r)V(\theta, \phi) &= 0 \\ \frac{(r^2 R'(r))' + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} \left( E + \frac{q^2}{r} \right) R(r)}{R(r)} + \frac{\Delta_{\theta, \phi} V(\theta, \phi)}{V(\theta, \phi)} &= 0 \end{aligned}$$

Данное равенство может быть выполнено только в том случае, если каждое слагаемое равно некоторой константе с противоположным знаком. Для угловой части получается задача Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} \Delta_{\theta, \phi} V(\theta, \phi) + \nu V(\theta, \phi) = 0 \\ |V(\theta, \phi)| < +\infty, |V(\pi, \phi)| < +\infty \\ V(\theta, \phi) \equiv V(\theta, \phi + 2\pi) \end{cases}$$

$$V(\theta, \phi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{cases}$$

$$\nu = l(l+1)$$

$$(r^2 R'(r))' + \left( \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} E + 2\mu q^2 r - l(l+1)r^2 \right) R(r) = 0$$

Далее можно преобразовать уравнение:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 R'(r))' + \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu q^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0$$

Преобразование уравнения при замене переменных:

$$R(r) = \frac{V(r)}{\sqrt{r}}$$

$$R'(r) = \frac{V'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2} \frac{V(r)}{r^{\frac{3}{2}}}$$

Тогда получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left( r^{\frac{3}{2}} V'(r) - \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} V(r) \right)' + \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu q^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \frac{V(r)}{r^{\frac{1}{2}}} &= 0 \\ \frac{1}{r^2} \left( \frac{3}{2} r^{\frac{1}{2}} V'(r) + r^{\frac{3}{2}} V''(r) - \frac{1}{4} r^{\frac{1}{2}} V(r) - \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} V'(r) \right) + \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu q^2}{\hbar r - \frac{l(l+1)}{r^2}} \frac{V(r)}{\sqrt{r}} \right) &= 0 \\ \frac{1}{r^2} (r^2 V'(r) + r V''(r)) + \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu q^2}{\hbar} \frac{1}{r} - \frac{l^2 + l + \frac{1}{4}}{r^2} \right) V(r) &= 0 \\ \frac{1}{r} (r V'(r))' + \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{2\mu q^2}{\hbar} \frac{1}{r} - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right) V(r) &= 0 \end{aligned}$$

Далее следует ввести новые обозначения и сделать замену переменных:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\hbar^2}{2\mu q^2} \\ \rho &= \frac{r}{r_0} \\ r &= \rho r_0 \end{aligned}$$

Тогда выражение приобретает такой вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) + \left( \frac{2\mu r_0^2}{\hbar^2} E + \frac{1}{\rho} - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{\rho^2} \right) V(\rho) = 0$$

Теперь вводится переменная  $S = 2l + 1$  и производится следующая замена:

$$\frac{2\mu r_0^2}{\hbar^2} E = -\frac{\lambda}{4}$$

Здесь подразумевается  $\lambda > 0$ . Тогда уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{\rho} (\rho V'(\rho))' + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\sigma^2}{4\rho^2} \right) V(\rho) = 0$$

Водится переменная  $x = \sqrt{\lambda} \rho$ .

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dV}{dx} \right) + \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{x} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda S^2}{4x^2} \right) V(x) &= 0 \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

После умножения уравнения на  $x$  и подстановки переменной получается:

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dV}{dx} \right) + \left( E - \frac{x}{4} - \frac{S^2}{4x} \right) V(x) = 0$$

Далее необходимо рассмотреть функцию  $V(x)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(x) &= U(x) e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{S}{2}}} \\ V'(x) &= U'(x) e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{S}{2}}} - \frac{1}{2} U(x) e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{S}{2}}} + \frac{S}{2} U(x) e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{S}{2}-1}} \\ V''(x) &= \left[ U''(x) + U'(x) \left( \frac{S}{x} - 1 \right) + U(x) \left( \frac{1}{4} - \frac{S}{2x} + \frac{S(S-2)}{4x^2} \right) \right] x e^{-\frac{x}{2} x^{\frac{S}{2}}} \end{aligned}$$

Получается такое уравнение:

$$\begin{aligned} xU''(x) + xU'(x) \left( \frac{S}{x} - 1 \right) + xU(x) \left( \frac{1}{4} - \frac{S}{2x} + \frac{S^2}{4x^2} - \frac{S}{2x^2} \right) + \\ + U'(x) - \frac{1}{2} U(x) + U(x) \frac{S}{2x} + \left( E - \frac{x}{4} - \frac{S^2}{4x^2} \right) U(x) = 0 \\ xU''(x) + U'(x)(S+1-x) + U(x) \left[ \varepsilon - \frac{S+1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Теперь следует вспомнить уравнение для полиномов Лагерра и сравнить его с полученным уравнением после всех преобразований.

$$\left( x^{S+1} e^{-x} L_k^{(S)} \right)' + k x^S e^{-x} L_k^{(S)} = 0$$

Если раскрыть производную, то уравнение для полинома  $L$  примет вид:

$$L'' + L'(S+1-x) + kL = 0$$

Слагаемые совпадают. Таким образом, получается:

$$\begin{aligned} \varepsilon - \frac{S+1}{2} = k, S = 2l + 1 \\ \varepsilon - \frac{2l+2}{2} = k \Rightarrow \varepsilon - l - 1 = k \Rightarrow \varepsilon = k + l + 1 = n \end{aligned}$$

Так появляется соответствующее квантовое число. Теперь необходимо выписать следующее решение для функции  $V(x)$ :

$$V(x) = Ce^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{s}{2}} L_k^{(s)}(x) \Leftarrow$$

$$V(r) = Ce^{-\frac{r}{2r_0n}} \left(\frac{r}{r_0n}\right)^{\frac{2l+1}{2}} L_k^{(s)} \left(\frac{r}{r_0n}\right)$$

$$R(r) = \frac{V(r)}{\sqrt{r}}$$

$$R(r) = C \left(\frac{r}{r_n}\right) L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{r}{r_0n}\right) e^{-\frac{r}{2r_0n}}$$

Таким образом, выписано решение для радиальной части, для угловой части было получено решение в виде присоединенных функций Лежандра, значит можно выписать полное решение задачи для волновой функции электрона в поле протона.

$$\psi(r, \theta, \phi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{r}{r_0n}\right) e^{-\frac{r}{2r_0n}} \frac{r}{r_0n} \frac{1}{\sqrt{C}}$$

$$C = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \pi (1 + \sigma_m 0) \int_0^{\infty} |L_k^{2l+1}(x)|^2 e^{-x} x^{2l+2} dx (r_0n)^3 = 0$$

Теперь необходимо записать выражение для энергии:

$$\frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} r_0^2 = -\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\lambda \hbar^2}{q_0^2} = -\frac{\lambda \hbar^2 4\mu^2 q^4}{q\mu \hbar^4} = -\frac{\lambda \mu q^4}{2\hbar^2} = -\frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Наблюдаемая величина – спектры атомов. Если выяснить величину энергии, то можно узнать, каким будет спектр.

$$\Delta\varepsilon = \hbar\omega = h\nu$$

$$h = 2\pi\hbar$$

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon}{h} = \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi\hbar} = -\frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$$\frac{\mu q^4}{2\hbar^2}$$

- *постоянная Ридберга*. Эта формула описывает спектр атома водорода. Если рассмотреть переходы на различные состояния, то при  $n_1 = 1$  соответствующая серия частот описывается следующей формулой:

$$v_{n_1} = R \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Это *серия Лаймана*. Она лежит в ультрафиолетовой части спектра. При  $n_1 = 2$  будет так:

$$v_{n_2} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Это *серия Балмера*. Она частично лежит в видимой части спектра. При  $n_1 = 3$  получается следующее выражение:

$$v_{n_3} = R \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Это *серия Пашена*. Она целиком лежит в инфракрасной части спектра.

## Лекция 10. Классификация уравнений

### Классификация уравнений в случае двух независимых переменных

Многие задачи в физике сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка. Необходимо разобраться в классификации уравнений. Рассмотрим линейные уравнения в частных производных второго порядка.

Классификация для случая двух независимых переменных  $x$  и  $y$ :

$$a_{11} \frac{d^2 U}{dx^2} + 2a_{12} \frac{d^2 U}{dxdy} + a_{22} \frac{d^2 U}{dy^2} = F \left( U, x, y, \frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy} \right)$$

Это линейное уравнение относительно старших производных. Классификация производится по членам, стоящим при вторых производных.

Вводятся  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ .

$$\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right| \neq 0$$

Чтобы перейти к новым переменным, необходимо выразить производные через производные по  $\xi, \eta$ . Далее  $U_x = \frac{dU}{dx}$ .

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta_x^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}$$

Если все объединить, то получится следующее выражение:

$$A_{11} U_{\xi\xi} + 2A_{12} U_{\xi\eta} + A_{22} U_{\eta\eta} = F$$

Теперь необходимо собрать все слагаемые:

$$A_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2$$

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$
$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{22}\xi_y\eta_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)$$

Далее необходимо вычислить следующее выражение:

$$(A_{12}^2 - A_{11}A_{22}) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|^2$$

Отсюда следует, что знак комбинации  $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$  не меняется от перехода к новым переменным. Это позволяет провести классификацию. Все уравнения второго порядка принадлежат к одному из трех видов:

- 1) если выражение  $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) > 0$ , то уравнение *гиперболическое*;
- 2) если  $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0$ , то уравнение *параболическое*;
- 3) если  $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) < 0$ , то это *эллиптическое* уравнение.

Рассмотрим, можно ли выбрать переменные так, чтобы упростить уравнение (чтобы величина  $A_{11}$  обратилась в ноль). Необходимо получить такое выражение:

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$

Получается так:

$$a_{11} \left( \frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$$

## Гиперболическое уравнение (характеристики, канонический вид)

Рассматривается случай гиперболического уравнения:

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Корни этого уравнения:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Выбрав один из корней, получим:

$$\xi_y\lambda_1 - \xi_x = 0$$



Чтобы построить решение, необходимо рассмотреть уравнение характеристик:

$$\frac{dy}{\lambda_1} = -\frac{dx}{1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\lambda_1$$

Это уравнение характеристики уравнения первого порядка. На этой характеристике  $\xi$  сохраняет постоянное значение. В качестве  $\xi = y + \lambda_1 x$ . Таким образом, получается система линий, на каждой из которых  $\xi$  постоянна. (Рис. 10.1).

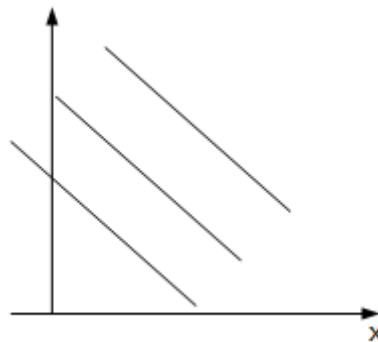


Рис. 10.1. Система для  $\xi$

Для  $A_{22}$  получится такое же выражение, но с другим знаком:

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} = \lambda_2$$

Снова получится квадратное уравнение, уже с  $\lambda_2$ .

$$\lambda_2 \eta_y - \eta_x = 0$$

$$y + \lambda_2 x = \eta$$

В итоге получатся другие линии, это зависит от знака  $\lambda_2$  (Рис. 10.2).

При переходе к интегралам уравнения характеристик получается, что коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{22}$  обращаются в ноль. Переменные, при которых  $A_{11}$  и  $A_{22}$  называются *характеристиками* гиперболического уравнения второго порядка. Итак, получается выражение:

$$2A_{12}U_{\xi\eta} = F$$

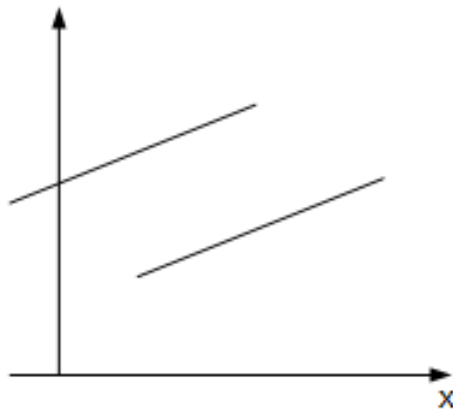


Рис. 10.2. Система для  $\eta$

Получается одно из канонических представлений гиперболического уравнения:

$$U_{\xi\eta} = F$$

$$\xi + \eta = \alpha$$

$$\xi - \eta = \beta$$

$$U_{\xi} = U_{\alpha} + U_{\beta}$$

$$U_{\xi\eta} = U_{\alpha\alpha} - U_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta} - U_{\beta\beta}$$

Второй канонический вид:  $U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = F$ .

### Эллиптическое уравнение (канонический вид)

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

Здесь необходимо повторить те же действия:

$$A_{11} = 0 \rightarrow a_{11} \frac{\xi_x^2}{\xi_y^2} + 2a_{12} \frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$$

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Отличие состоит в том, что выражение под корнем отрицательное. Выражение также имеет два корня:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , но они будут комплексно сопряженные.

$$\begin{aligned}\xi_y \lambda_1 - \xi_x &= 0 \\ A_{22} = 0 &\rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \\ \eta_y \lambda_1 - \eta_x &= 0\end{aligned}$$

Удобнее работать с вещественными переменными:

$$\begin{aligned}\alpha &= \xi + \eta \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{i}\end{aligned}$$

Таким образом, канонический вид будет такой:

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = F$$

## Параболическое уравнение (канонический вид)

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = 0$$

Необходимо, чтобы  $A_{11} = 0$ . Так как выражение под корнем равно нулю, то в этом случае остается только один корень.  $A_{12}$  тоже обратится в ноль.

$$A_{12}^2 = A_{11}A_{22} = 0$$

Канонический вид будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}A_{22}U_{\eta\eta} &= F \\ U_{\eta\eta} &= F(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta)\end{aligned}$$

## Классификация уравнений в случае многих независимых переменных

$$\sum_{i,j}^N a_{i,j} \frac{d^2 U}{dx_i dx_j} = F$$

$$\frac{dU}{dx_i} = \sum_{k=1}^N \frac{dU}{d\xi_k} \frac{d\xi_k}{dx_i}$$

$$\frac{d^2 U}{dx_i dx_j} = \sum \frac{d^2 U}{d\xi_k d\xi_m} \frac{d\xi_k}{dx_i} \frac{d\xi_m}{dx_j} + \sum \frac{dU}{d\xi_k} \frac{d^2 \xi_k}{dx_i dx_j}$$

После подсчета вторых производных получается уравнение:

$$\sum A_{m,k} \frac{d^2 U}{d\xi_m d\xi_k} = F,$$

$$A_{m,k} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{d\xi_k}{dx_i} \frac{d\xi_m}{dx_j}$$

Используя квадратичную формулу  $\sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \alpha_j$ , можно получить следующее выражение:

$$A_{k,m} = \sum_{i,j} a_{ij} C_{ik} C_{jm}$$

$$\alpha_i = \frac{dU}{dx_i}$$

$$\frac{dU}{dx_i} = \sum_k \frac{dU}{d\xi_k} \frac{d\xi_k}{dx_i}$$

Видно, что это преобразование подобно квадратичной формуле:

$$\beta_k = \frac{dU}{d\xi_k}$$

$$C_{ik} = \frac{d\xi_k}{dx_i}$$

В таком случае соотношения совпадают. Путем линейного преобразования можно матрицу  $A$  привести к диагональному виду. Поэтому можно так выстроить коэффициенты  $C$ , что получится матрица  $A_{mk}$  в диагональном виде.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & & & \\ & A_{22} & 0 & & & \\ & 0 & A_{33} & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & & A_{NN} \end{pmatrix}$$

Если привести матрицу к диагональному виду, то количество положительных и отрицательных или равных нулю элементов на диагонали не зависит от способа приведения.

Возникает следующая классификация:

- 1) если после приведения к диагональному виду все коэффициенты будут отличны от нуля и будут содержаться элементы разного знака, то такое уравнение называется *гиперболическим*;
- 2) если все элементы будут одного знака, то это уравнение *эллиптическое*.

## Примеры постановок физических задач

### Задача продольных колебаний стержня

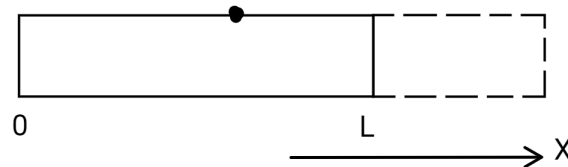


Рис. 10.3. Растяжение стержня

К уравнению гиперболического типа приводят задачи колебаний, к примеру, задачу продольных колебаний стержня.

Необходимо рассмотреть, как описывать отклонения и как связывать координату с точками стержня. Удобнее работать в Лагранжевых координатах, когда координата приписывается материальной точке (та координата, которую точку имела в начальный момент). Уравнение опирается на законы Гука и Ньютона:

$$K \frac{[U(x + \Delta x, t) + x + \Delta x] - [U(x, t) + x] - \Delta x}{\Delta x} = F$$

$$F(x, t) = \frac{dU}{dx}(x, t)$$

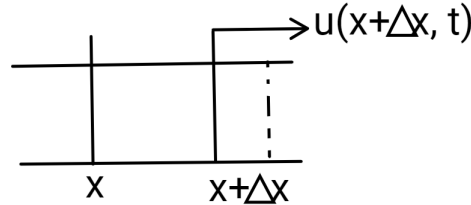


Рис. 10.4. Сечение стержня

Так получается сила растяжения из закона Гука. Чтобы получить уравнение колебаний, необходимо рассмотреть закон Ньютона или изменения импульса.

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) \left[ \frac{dU}{dt}(\xi, t + \Delta t) - \frac{dU}{dt}(\xi, t) \right] d\rho = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} K \left[ \frac{dU}{dx}(x + \Delta x, \tau) - \frac{dU}{dx}(x, \tau) \right] d\tau + \int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} f(\xi, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Так получается импульс силы со стороны граничных слоев. Кроме того, могут быть силы внутри (к примеру, сила тяжести).

$$\begin{aligned} \rho(x^*) \frac{\frac{dU}{dt}(x^*, t + \Delta t) - \frac{dU}{dt}(x^*, t)}{\Delta t} &= K \frac{\frac{dU}{dx}(x + \Delta x, t^*) - \frac{dU}{dx}(x, t^*)}{\Delta x} + f(x^{**}, t^{**}), \\ x^{**}, x^* &\in (x, x + \Delta x), \quad t^{**}, t^* \in (t, t + \Delta t) \end{aligned}$$

Таким образом, получается уравнение колебаний стержня.

$$\begin{aligned} \rho(x^*) \frac{d^2U}{dt^2}(x, t) &= K \frac{d^2U}{dx^2}(x, t) + f(x, t) \\ U_{tt} &= a^2 U_{xx} + F \\ a^2 &= \frac{K}{\rho} \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} &= F \end{aligned}$$

## Электромагнитные колебания

Другой пример – электромагнитные колебания тоже приведут к уравнению гиперболического типа (т.к. это тоже колебания).

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{dD}{dt} + \frac{4\pi}{c} j \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{dB}{dt} \\ \operatorname{div} D = 0 \\ \operatorname{div} H = 0 \\ B = \\ D = \epsilon E \\ j = \sigma E \end{array} \right.$$

Необходимо получить уравнение колебаний.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \frac{dH}{dt} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{4\pi\mu}{c^2} \sigma \frac{dE}{dt} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \frac{dH}{dt} \end{array} \right.$$

Получается:

$$\frac{\mu\epsilon}{C^2} \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{4\pi\mu}{C^2} \sigma \frac{dE}{dt} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\operatorname{grad} \operatorname{div} E + \Delta^2 E = \Delta E$$

Таким образом, получается уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\mu\epsilon}{C^2} E_{tt} + \frac{4\pi\sigma}{C^2} E_t = \Delta E$$

## Процессы расплывания тепла, диффузия

Эти процессы ведут к уравнениям параболического типа.

$$q = -K \nabla U$$

Берется малый объем  $dV$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{dV} C\rho U dV = - \int \vec{q} \vec{n} d\sigma = - \int_{dV} \operatorname{div} q dV = \int_{dV} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) dV$$

Уравнение теплопроводности:

$$C\rho \frac{dU}{dt} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)$$

$$U_t = \frac{k}{C\rho} \Delta U$$

Это уравнение параболического типа, т.к. коэффициент второй производной по  $t$  равен нулю.



## Лекция 11. Уравнения эллиптического типа

### Примеры постановок физических задач (продолжение)

#### Стационарные процессы

Задачи эллиптического типа встречаются также в стационарных процессах (к примеру, в электростатике).

$$\begin{cases} \operatorname{div} D = -4\pi\rho \\ \operatorname{rot} E = 0 \\ E = \nabla\varphi \\ \operatorname{div}\varepsilon\nabla\varphi = -4\pi\rho \end{cases}$$

Получается уравнение эллиптического типа:

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

#### Уравнение для амплитуды установившихся гармонических колебаний

Теперь необходимо рассмотреть уравнение для амплитуды установившихся гармонических колебаний.

$$U_{tt} = a^2\Delta U$$

Решение следует искать так:

$$\begin{aligned} U &= V(M)e^{i\omega t} \\ -\omega^2 V &= a^2\Delta V \end{aligned}$$

Получается уравнение Гельмгольца, которое описывает амплитуду колебаний:

$$\Delta V + \frac{\omega^2}{a^2}V = 0$$

## Уравнения эллиптического типа

### Формулы Грина

#### Фундаментальное решение уравнения Лапласа

Функция  $U$  является гармонической, если она дважды дифференцируема и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0$$

Радиально симметричное решение, имеющее особенность в нуле, называется *фундаментальным решением*. Далее радиально симметричное решение будет рассматриваться в трехмерном случае.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) &= 0 \\ r^2 \frac{dU}{dr} &= c_1 \\ U &= c_2 - \frac{c_1}{r}\end{aligned}$$

Фундаментальное решение такое:

$$U = \frac{1}{r}$$

Далее рассматривается двухмерный случай.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) &= 0 \\ r \frac{dU}{dr} &= c_1 \\ U &= c_1 \ln r + c_2\end{aligned}$$

Фундаментальное решение выглядит так:

$$U = \ln \frac{1}{r}$$

## 1-я формула Грина

Далее решение рассматривается в некоторой области  $D$  с границей  $\Sigma$ . Рассматриваются функции  $V$  и  $U$ .

$$\int_D V \Delta U dV = \int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn} d\sigma - \int_D \nabla V \nabla U dV$$

Формула *Остроградского*:

$$\int_{\Sigma} \bar{A}_n d\sigma = \int_D \operatorname{div} \bar{A} dV$$
$$\bar{A} = V \nabla U$$

Отсюда получается *первая формула Грина*:

$$\int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn} d\sigma = \int_D \operatorname{div}(V \operatorname{grad} U) dV = \int_D \nabla V \nabla U dV + \int_D \nabla \Delta U dV$$

Эта формула справедлива, если  $U$  и  $V$  имеют непрерывные вторые производные во внутренних точках и производная непрерывна при выходе на границу.

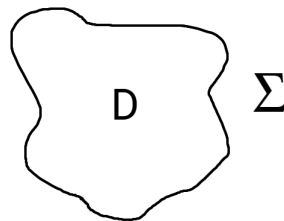


Рис. 11.1.  $D$  и  $\Sigma$

$$U, V \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(E)$$

Не подходит функция, которая сама непрерывна, а ее производная обращается на границе в бесконечность. Подходит функция, у которой производная непрерывна при выходе на границу.

## 2-я формула Грина

Вторая формула Грина получается следующим образом.

$$\int_D V \Delta U dV = \int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn} d\sigma - \int_D \nabla U \nabla V dV$$

$$\int_D U \Delta V dV = \int_{\Sigma} U \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D \nabla V \nabla U dV$$

Получается вторая формула Грина:

$$\int_D [U \nabla V - V \nabla U] dV = \int_{\Sigma} \left[ U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right] d\sigma$$

Эти формулы подходят для гладких функций.

## 3-я формула Грина

Для третьей формулы Грина берется сначала трехмерный случай, т.е. работа ведется в  $R_3$ . В качестве  $V$  будет  $\frac{1}{r}$ . Решение необходимо найти в точке  $M_0$  в области  $D$ . Эта точка окружается сферой радиусом  $\varepsilon$  (Рис. 11.2).

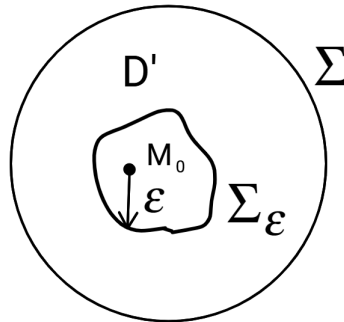


Рис. 11.2. 3-я формула Грина,  $R^3$

$$-\int_D \frac{\Delta U}{r} dV = \int_{\Sigma} \left[ U \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right] d\sigma + \int_{\Sigma_\varepsilon} \left[ U \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{dU}{dr} \frac{1}{\varepsilon} \right] \varepsilon^2 d\Omega$$

Если  $M_0 \in D$ :

$$4\pi U(M_0) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma$$

Если  $M_0 \in \sigma$ :

$$2\pi U(M_0) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma$$

Если  $M_0 \notin \bar{D}$ :

$$0 = \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma$$

Получили третью формулу Грина. Она позволяет вычислить значение функции в точке  $M_0$ , если известны значения  $U$  и  $\frac{dU}{dn}$  на поверхности и значение оператора Лапласа во внутренних точках.

Теперь необходимо рассмотреть, что меняется, если взять двухмерный случай. Фундаментальное решение:

$$V = \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$$

Если  $M_0 \in D$ :

$$2\pi U(M_0) = \int_{\Sigma} \left[ \ln \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r} \right] d\sigma - \int_D \ln \frac{1}{r} \Delta U dV$$

Если  $M_0 \in \sigma$

$$2\pi U(M_0) = \int_{\Sigma} \left[ \ln \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r} \right] d\sigma - \int_D \ln \frac{1}{r} \Delta U dV$$

Если  $M_0 \notin \bar{D}$ :

$$2\pi U(M_0) = \int_{\Sigma} \left[ \ln \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r} \right] d\sigma - \int_D \ln \frac{1}{r} \Delta U dV$$

## Свойства гармонических функций

### Теорема Гаусса

Пусть  $U$  является гармонической функцией. Она также рассматривается в области  $D$  с границей  $\Sigma$ . **Первое свойство:**

$$\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0$$

Иначе это можно назвать *теоремой Гаусса*. Берется  $V \equiv 1$ . Это соотношение имеет следующий физический смысл: если электростатический потенциал  $U$  и нет зарядов, то  $\frac{dU}{dn}$  – это нормальная составляющая  $E_n$ .

### Формула среднего значения

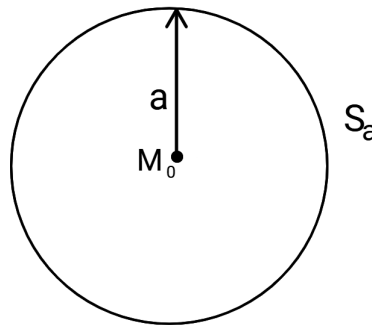


Рис. 11.3. Сфера  $S_a$

**Второе свойство:** если гармоническую функцию  $U$  окружить сферой радиусом  $a$  (Рис. 11.3), то получается формула среднего значения:

$$U_{M_0} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} U(M) d\sigma_m$$

Эту формулу можно получить из третьей формулы Грина.

$$4\pi U(M_0) = \int_{S_a} \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma = \frac{1}{a^2} \int_{S_a} U d\sigma$$

## Функция, гармоническая внутри области, имеет бесконечное число производных

**Третье свойство:** гармоническая внутри области функция имеет бесконечное число производных.

### Принцип максимума

**Принцип максимума:** если в области  $D$  рассмотреть гармоническую функцию отличную от тождественной константы, то эта функция не может достигать максимального или минимального значения во внутренних точках области.

$$\max U = U(M_0) = A$$

Если во всех точках сферы значение меньше, чем  $A$ , то получается противоречие с формулой среднего значения. Подобласть  $D$  обозначается как  $G$ , где  $U = A$ . Так как  $U$  отлично от тождественной константы, то найдется точка  $G$  для всей области  $D$ .

### Принцип сравнения

Из принципа максимума следует **принцип сравнения**. Рассматриваются две гармонические функции:

$$\Delta U_1 = 0$$

$$\Delta U_2 = 0$$

Пусть  $U_1 > U_2$  на границе  $\Sigma$ . Тогда  $U_1 > U_2$  всюду в  $\bar{D}$ .

$$V = U_1 - U_2$$

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\Sigma} \geq 0 \end{cases}$$

$$V(M_0) < 0$$

Тогда получается противоречие с принципом максимума. Если во внутренней точке где-то  $V < 0$ , а на границе больше нуля, то минимум достигается в некоторой внутренней точке.

Т.е. если сравнить две гармонические функции, то больше внутри та, которая больше на границе.

## Постановка внутренних краевых задач с уравнением Лапласа

Задача состоит не только из уравнения, но и из дополнительных условий. В случае уравнений эллиптического типа дополнительные условия должны ставиться на границе. При этом необходимо следить за тем, что ставится не слишком много и не слишком мало дополнительных условий. Это проверяется доказательством существования решения.

Существуют три постановки задачи:

- 1) Первая краевая задача. Требуется найти функцию, удовлетворяющую неоднородному уравнению Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta U = F \\ U|_{\Sigma} = \varphi \end{cases}$$
$$m \in D, U \in C^{(2)}(D) \wedge C(\bar{D})$$

Это задача Дирихле.

- 2) Вторая краевая задача. Задача, в которой задана не сама функция, а ее производная, называется задачей Неймана.

$$U \in C^{(2)}(D) \wedge C^{(1)}(\bar{D})$$
$$\begin{cases} \Delta U = F \\ \frac{dU}{dn}|_{\Sigma} = \psi \end{cases}$$

- 3) Третья краевая задача.

$$\begin{cases} \Delta U = F \\ \left( \frac{dU}{dn} + hU \right) |_{\Sigma} = \mu \end{cases}$$

## Задача Дирихле (доказательство единственности решения)

Эта задача имеет единственное решение. Допускается, что имеется два решения и берется их разность:

$$V = U_1 - U_2$$
$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке,  $V$  не может быть больше или меньше нуля ни в одной точке, а значит  $U_1 = U_2$ .



## Задача Неймана (решение не единственно)

Здесь решение не единственное.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \frac{dU}{dn} = \varphi \end{cases}$$

Известно, что :

$$\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0$$

Значит решение не единственное и оно не всегда существует.

## 3-я краевая задача (доказательство единственности решения 3-й и неединственность решения 2-й задач)

Рассматривается случай, когда  $h \geq 0$ . Для доказательства единственности допущается, что существуют два решения и рассматривается их разность.

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ \left( \frac{dV}{dn} + hV \right) |_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$
$$\int_D V \Delta V dV = \int_{\Sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D \nabla V^2 dV$$
$$\int_{\Sigma} hV^2 d\sigma + \int_D \nabla V^2 dV = 0$$

Таким образом, получаем, что  $V \equiv 0$ , а значит решение третьей краевой задачи единственное. Если  $h = 0$ , то получается третья краевая задача.

## Пример 3-й краевой задачи с $h < 0$ (решение не единственно)

Далее рассматривается пример третьей краевой задачи, где  $h$  отрицательный.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \left(\frac{dU}{dr} + U\right) = 0 \end{cases}$$

$$U_1 \equiv 0$$

$$U_2 = r \sin \varphi$$

### Пример задачи Дирихле с разрывом граничной функции

Пусть рассматривается задача Дирихле в простом двухмерном случае. В точке  $M_1$  имеется разрыв граничного условия первого рода (Рис. 11.4).

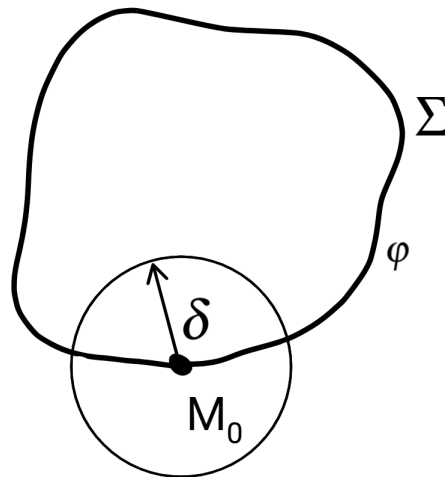


Рис. 11.4. Разрыв граничного условия первого рода

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = \varphi(M) \\ |U| = A \end{cases}$$

В такой постановке решение единственное.

$$V = U_1 - U_2$$

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\Sigma} = \varphi(M) \\ |V| < 2A \end{cases}$$

Необходимо доказать, что  $V \neq 0$ .

$$W(M) = \varepsilon \ln \frac{d}{r_{M,M}}$$
$$\Delta W = 0$$
$$W|_{\Sigma} > 0$$

По теореме сравнения  $W$  всюду больше, чем  $V$ .

$$V(M) \geq W(M) = \varepsilon \ln \frac{d}{r_{M_0,M}}$$

Фиксируется  $m$ ,  $\varepsilon$  стремится к нулю. Тогда получается, что  $V(M)$  в фиксированной точке стремится к нулю, что возможно только если  $V(M) = 0$ . Поэтому решение единственное.

## Постановка внешних краевых задач для уравнения Лапласа

Внешняя задача означает: вне области  $D$ . Существует граница  $\Sigma$  – область внутри называется  $D_{in}$ , а внешняя область  $D_{ex}$  (Рис. 11.5).

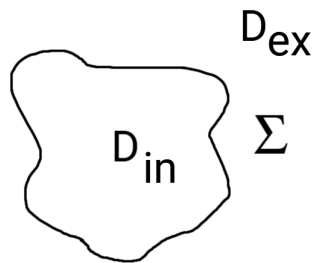


Рис. 11.5.  $D_{in}$  и  $D_{ex}$

Задача рассматривается в трехмерном случае.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{r=1} = 1 \\ |U| = A \end{cases}$$

Сразу можно выписать два решения:

$$U_1 \equiv 1$$
$$U_2 = \frac{1}{r}$$

Того решения, что удовлетворяет уравнению и граничному условию, становится уже недостаточно для единственности решения

## Лекция 12. Определение регулярной функции

### Постановка внешних краевых задач для уравнения Лапласа (продолжение)

Для внутренних задач требуется, чтобы функция удовлетворяла уравнению Лапласа и граничным условиям. Граничные условия первого и третьего рода обеспечивали единственность решения, а граничные условия второго рода единственности не обеспечивали.

Для внешних задач граничных условий на поверхности  $\Sigma$  уже недостаточно. Задача для трехмерного случая:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{r=1} = 1 \\ |U| = A \end{cases}$$

Единственности нет, два решения такие:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv 1 \\ U_2 &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Для двухмерного случая единственности решения тоже нет, решения будут такие:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv 1 \\ U_2 &= \ln \frac{e}{r} \end{aligned}$$

Решение не единственное, т.к. во внешней области существует еще одна граница на бесконечности. Рассматривается внешняя область, начиная от поверхности и далее. От того, что требуется на бесконечности, зависит решение.

### Определение регулярной функции

В трехмерном случае любая функция называется *регулярной*, если

$$\begin{cases} U = O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{dU}{dx_i} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

В двумерном случае функция будет *регулярной*, если

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx_i} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \text{и при } r \rightarrow \infty \text{ существует конечный предел } \lim U(r) = a \end{cases}$$

Для регулярной на бесконечности функции остаются в силе формулы Грина.

$$\int_D V \Delta U dV = \int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn} d\sigma - \int_D \nabla U \nabla V dV$$

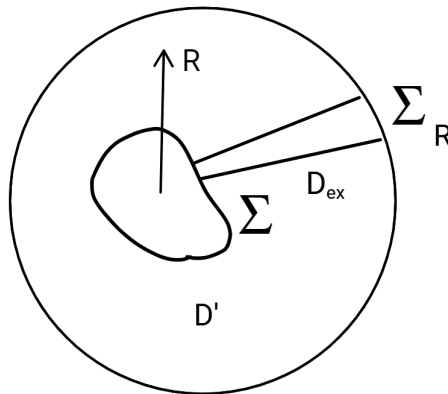


Рис. 12.1. Область  $\Sigma$  для задачи  $D_{EX}$

Это первая формула Грина во внутренней области. Для внешней области формула Грина будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \int_{D'} V \Delta U dV &= \int_{\Sigma} V \frac{dU}{dn} d\sigma + \int_{\Sigma_R} V \frac{dU}{dn} d\sigma - \int_{D'} \nabla V \nabla U dV \\ V &= O\left(\frac{1}{R}\right) \\ \frac{dU}{dn} &= O\left(\frac{1}{R^2}\right) \end{aligned}$$

### Условие регулярности для решений уравнения Лапласа (доказательство)

Итак, регулярность обеспечивает справедливость формул Грина. Но при постановке задач условия регулярности выглядят тяжеловесно. Для решений уравнений

Лапласа можно записать достаточно простые условия, обеспечивающие условия регулярности.

В **трехмерном** случае, если функция  $U$  гармонична и равномерно стремится к нулю, то она регулярна. В **двухмерном** случае, если функция  $U$  гармонична и ограничена, то она также регулярна. Эти условия легче тех, что ставятся для любых функций.

**Доказательство** (рассматривается двухмерный случай):

Замена переменных:

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{r} \\ \phi' = \phi \\ w = \frac{1}{\bar{z}} \end{cases}$$

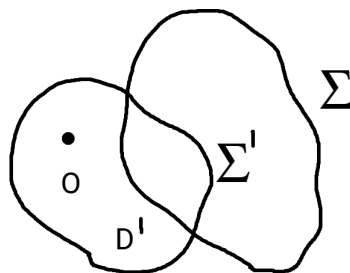


Рис. 12.2. Новые области

Получается новая граница  $\Sigma'$  и область  $D'$  (Рис. 12.2). Данное преобразование  $w = \frac{1}{\bar{z}}$  - это конформное преобразование второго рода. Следовательно, в новых координатах уравнение Лапласа остается в силе.

В новых координатах функция  $U$  гармонична всюду, кроме нуля. Аналитическая функция в изолированной точке может быть полюсом, существенно особой или устранимой точкой. В полюсе функция растет до бесконечности, но  $U$  ограничена, значит точка не является полюсом или существенно особой точкой. Значит эта точка вне оператора Лапласа может быть продолжена по непрерывности.

Получается, что всюду в  $D'$  функция  $U$  гармонична.

$$\left| \frac{dU}{dr} \right| = \left| \frac{dU}{dr'} \frac{dr'}{dr} \right|$$

Производная функции в новых координатах всюду ограничена.

$$\left| \frac{1}{r} \frac{dU}{d\phi} \right| = \left| \frac{r'}{r} \frac{1}{r'} \frac{dU}{d\phi'} \right| \leq M \frac{1}{r^2}$$

Таким образом, было доказано, что если функция  $U$  ограничена, то ее производные ведут себя так, как требуется при определении регулярности.

## Постановки внешних краевых задач

В трехмерном пространстве внешняя краевая задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = \phi \\ U \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$$

В двухмерном случае задача ставится аналогичным образом, но требуется условие ограниченности.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = \phi \\ U < |A| \end{cases}$$

## Доказательство единственности решения внешней задачи

### Дирихле в $R^3$

Для доказательства единственности допускается, что есть два решения.

$$V = U_1 - U_2$$

Тогда получается следующая задача:



$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{\Sigma} = 0 \\ V \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$$

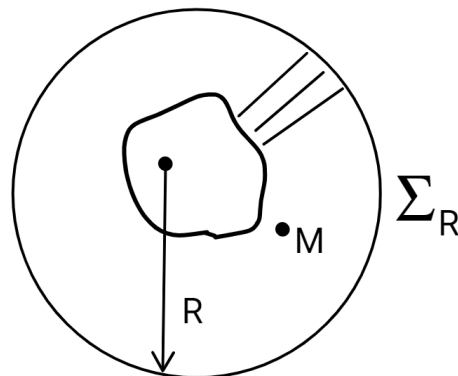


Рис. 12.3. Поверхность  $\Sigma$ , окруженная большой сферой  $\Sigma_R$

Действовать необходимо так: поверхность  $\Sigma$  окружить большой сферой  $\Sigma_R$  радиусом  $R$ . Рассматривается некоторая точка  $M$  (Рис. 12.3). Имеется конечная область между поверхностями  $\Sigma$ . Так как область конечна, то можно использовать принцип максимума.

$$|V(M)| \leq \max_{\Sigma} |V| + \max_{\Sigma_R} |V| \rightarrow 0$$

## 2-я и 3-я внешние краевые задачи (доказательство единственности решения)

Здесь можно использовать формулу Грина

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \left( \frac{dU}{dn} + hU \right) \Big|_{\Sigma} = \phi \\ U \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$$

Допускается, что существуют два решения и рассматривается их разность.

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ \left(\frac{dV}{dn} + hV\right) \bigg|_{\Sigma} = \phi \\ V \underset{r \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} 0 \end{cases}$$

Так как функция регулярна, то для решения можно использовать функцию Грина.

$$\begin{aligned} \int_{D_{ex}} V \Delta V dV &= \int_{\Sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D (\nabla V)^2 dV \\ &\int_{\Sigma} hV^2 d\sigma + \int_D (\nabla V)^2 dV \end{aligned}$$

Из этого соотношения для второй краевой задачи  $V$  является константой. Используя граничное условие на бесконечности, получается единственность решения.

## Внешняя задача Дирихле в двухмерном случае

Внешняя задача Дирихле в двухмерном случае ставится так:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = \phi \\ |U| < A \end{cases}$$

Предполагается, что есть два решения, а  $V$  – их разность, тогда  $|V| < 2A$ . Берется  $m_0$  внутри  $\Sigma$ . Эта точка окружается двумя окружностями. Первая – с малым радиусом  $a$ , а вторая – с радиусом  $R$ . Вводится барьерная функция:

$$w = 2A \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{R}{a}}$$

На поверхности  $\Sigma$  данная барьерная функция положительная, поэтому:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w|_{\Sigma} \geq 0 \\ w|_{r=R} = 2A \end{cases}$$

$$|V(M)| < w(M) = 2A \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{R}{a}} \rightarrow 0$$

Отсюда следует единственность решения задачи Дирихле в двухмерном случае.

## Лекция 13. Функция Грина. Обобщенные функции

### Обобщенные функции

Необходимо рассмотреть на  $R^n$  пространство основных функций  $D(R^n)$ .  $\phi \in D(R^n)$  если  $\phi$  бесконечно дифференцируема, т.е. можно брать любые частные производные. Дополнительно,  $\phi$  – локализована.

$$\text{supp}(\phi) = \{x | \phi(x) \neq 0\},$$

где  $\text{supp}(\phi)$  ограничена. Это множество удобно наделять богатой структурой:

- 1) это линейное пространство;
- 2) можно ввести понятие сходимости:

$$\phi_n \rightarrow \phi, \text{ если } D^\alpha \phi_n \rightarrow D^\alpha \phi$$

$$D^\alpha = \frac{d^{\alpha_1}}{dx_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{d^{\alpha_n}}{dx_n^{\alpha_n}}$$

### Определение линейного функционала

Вводится пространство обобщенных функций -  $D'(R^n)$ .

$f$  – линейный функционал на  $D$ . Это означает, что имеется некое отображение, которое можно записать как  $f(\phi)$ .

Линейность функции означает:

$$(f\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1(f, \phi_1) + \alpha_2(f, \phi_2)$$

Требуется, чтобы это был непрерывный функционал. Это означает, что если подать на вход сходящуюся последовательность, то результат должен сходиться.

Множество линейных функционалов тоже можно рассматривать как линейное пространство.

$$(\alpha f + \beta g)\phi = \alpha(f, \phi) + \beta(g, \phi)$$

## Определение регулярного функционала

Многим функциям можно поставить в соответствие некий линейный функционал.

Пусть  $f$  – локально интегрируемая функция на  $R^n$ . Это означает, что для любого замкнутого ограниченного множества существует интеграл по ограниченному множеству, где каждой привычной функции был поставлен некий функционал:

$$(f, \phi) = \int_{R^n} f(x)\phi(x)dx$$

При этом он определяется именно интегральными свойствами функции  $f$ . Если поменять функцию  $f$  в какой-то точке, то результат никак не изменится. Такие функционалы называются *регулярными*.

## Сходимость в пространстве обобщенных функций

В пространстве обобщенных функций тоже можно ввести понятие сходимости.  $f_n \rightarrow f$  в  $D'$ , если для любой основной функции  $\phi$  соответствующие функционалы сходятся. Эту сходимость можно назвать *слабой сходимостью*.

## $\delta$ -функция Дирака

Эта функция определяется так:

$$(\delta, \phi) = \phi(0)$$

Пусть существует регулярная функция  $f$  (Рис. 13.1).

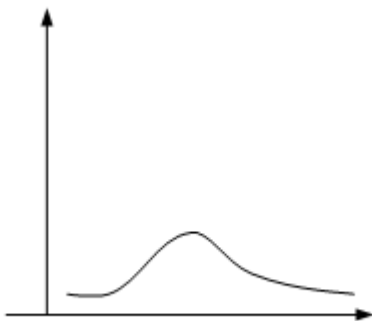


Рис. 13.1. Вид функции  $f$

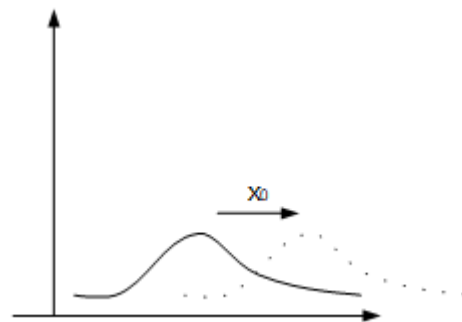


Рис. 13.2. Вид функции  $f$

Необходимо определить сдвиг функции на некоторый вектор  $(x_0)$ . Вся функция должна сдвинуться на этот отрезок вправо (Рис. 13.2).

$$f_{x_0}(x) = f(x - x_0)$$

Теперь необходимо ввести сдвиг вектора  $x_0$  для обобщенной функции.

$$(f_x, \phi) = \int f(x - x_0)\phi(x)dx = \int f(x')\phi(x' + x_0)dx' = (f, \phi(x + x_0))$$

$$(f(x - x_0), \phi) = (f, \phi(x + x_0))$$

В частности, теперь это можно использовать как определение для сдвинутой функции.

$$(\delta(x - x_0), \phi) = (\delta, \phi(x + x_0)) = \phi(x_0)$$

## Дифференцирование обобщенных функций

$$\left(\frac{d}{dx}, f, \phi\right) = \int \frac{d}{dx_1} f(x)\phi(x)dx = - \int f(x)\frac{d}{dx_1}\phi(x)dx$$

$$\left(\frac{d}{dx}, f, \phi\right) = - \left(f, \frac{d}{dx_1}\phi\right)$$

Последнее выражение можно использовать как определение производной для обобщенной функции.

$$(D^\alpha, f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \phi)$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Имеем некоторый дифференциальный оператор:

$$L = \sum_{|\alpha| < n} D_\alpha^{(x)} D^\alpha$$

$$(Lf, \phi) = (f, L^* \phi),$$

$$L^* = \sum_{|\alpha| < n} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) D^\alpha$$

## Обобщенное решение дифференциального уравнения

Теперь можно рассмотреть дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{aligned}LU &= f \\(LU, \phi) &= (f, \phi)\end{aligned}\tag{13.1}$$

В общем случае, обобщенным решением уравнения  $LU = f$  будет такая обобщенная функция  $U$ , которая удовлетворяет данному соотношению (13.1). В частности, правая часть уравнения тоже может быть обобщенной функцией.

$$\text{sapp}(\phi) = \{x | \phi(x) \neq 0\}\tag{13.2}$$

Необходимо рассмотреть дифференциальное уравнение следующего вида:

$$LU = -\delta(x - x_0) = -\delta(x, x_0)$$

Обобщенное решение такого уравнения — это фундаментальное решение для дифференциального оператора.

### Фундаментальное решение оператора Лапласа (функция Грина)

Следует рассмотреть обобщенное решение для оператора Лапласа.

$$\Delta U = -\delta(M, M_0)$$

### Формула Грина:

$$\begin{aligned}U(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_D \left( \frac{1}{R_{M, M_0}} \frac{d}{dn} U - U \frac{d}{dn} R_{M, M_0} \right) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{R_{M, M_0}} \Delta U dV \\G(M, M_0) &= \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}} - \text{Фундаментальное решение для } \Delta\end{aligned}$$

Необходимо доказать следующее:

$$(\Delta G, \phi) = (G, \Delta \phi) = \phi(M_0)$$

Берется  $D : \text{supp} \phi \in D$ , тогда:

$$(G, \Delta\phi) = \int_D \frac{1}{R_{M, M_0} 4\pi} \Delta\phi dV = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dn} \phi - \phi \frac{d}{dn} \frac{1}{R} \right) dS - \phi(M_0)$$

Получается:

$$(G, \Delta\phi) = -\phi(M_0)$$

Фундаментальное решение определено не единственным образом, и если к нему добавить гармоническую функцию, то ничего не изменится.

Фундаментальное решение для оператора Лапласа будет иметь такой вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}} + \delta(M, M_0)$$

$\delta(M, M_0)$  - гармоническая по  $m$ .

### Задача Дирихле (пример построения фундаментального решения)

$$\begin{cases} \Delta U = -f(M) \\ U|_{M \in \Sigma} = \mu(M) \end{cases} \quad m \in D$$

Третью формулу Грина можно переписать так:

$$U(M_0) = \int_{\Sigma} \left( G(M, M_0) \frac{dU}{dn} - U \frac{dG}{dn} \right) dS - \int_D G(M, M_0) \Delta U dV$$

где  $\Delta U = -f$ .

$$U(M_0) = - \int_{\Sigma} \mu \frac{dG}{dn} d\Sigma + \int_D G f dV$$

$$\begin{cases} G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}} + \delta \\ G(M, M_0)|_{M \in \Sigma} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, для функции  $V$  получается следующая задача:



$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V|_{M \in \Sigma} = \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}} \end{cases}$$

Такая задача имеет единственное решение.

Функцию Грина можно определить как реакцию на  $\Delta$  функцию:

$$\begin{cases} \Delta G(M, M_0) = -\delta(M, M_0) \\ G(M, M_0)|_{M \in \Sigma} = 0 \end{cases}$$

### Свойства функции Грина

1) Функция Грина имеет простой вид.

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}}$$

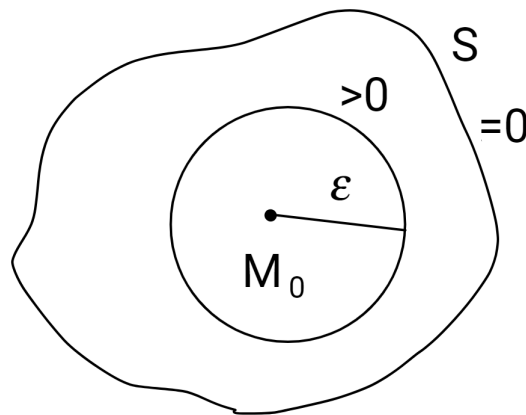


Рис. 13.3. Окрестность

Чтобы доказать, что функция Грина положительная, необходимо взять достаточно малую окрестность в точке  $M_0$  (Рис. 13.3). В этой точке функция Грина стремится к  $\infty$ .

Из принципа максимума получается, что во всех точках области  $D$   $G(M, M_0) > 0$ .

Так как  $V|_{\Sigma} < 0$ , то  $V$  в  $D$ , а  $G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi R_{M, M_0}}$ .

- 2) Функцию Грина записываем как функцию двух переменных, при этом они сильно отличаются.

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$$

Вводятся функции:  $U(M) = G(M, M_1)$ ,  $V(M) = G(M, M_2)$ .

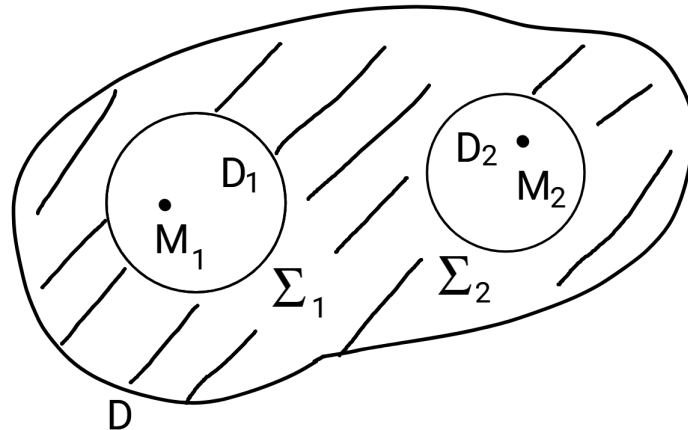


Рис. 13.4. Область  $D$

Каждая точка окружается достаточно малой сферой  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  (Рис. 13.4). Тогда во всей области обе функции гармонические. Необходимо применить к обеим функциям вторую Формулу Грина.

$$\int_D (U\Delta V - V\Delta U) dV = \int_{S+\Sigma_1+\Sigma_2} \left( U \frac{dV}{dn} + V \frac{dU}{dn} \right) dS$$

$$\int_{\Sigma_1} \left( U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) dS + \int_{\Sigma_2} \left( U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) dS = 0$$

$$U(M_2) = \int_{\Sigma_2} \left( \underbrace{G(M, M_2)}_{V(M)} \frac{\partial U}{\partial n} - U \underbrace{\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n}}_{\frac{\partial V}{\partial n}} \right) dS = G(M_2, M_1)$$

$$V(M_1) = \int_{\Sigma_1} \left( \underbrace{G(M, M_1)}_{U(M)} \frac{\partial V}{\partial n} - V \underbrace{\frac{\partial G(M_1, M)}{\partial n}}_{\frac{\partial U}{\partial n}} \right) dS = G(M_1, M_2)$$

$$U(M_2) - V(M_1) = 0$$

$$U(M_2) = V(M_1)$$

Таким образом, существует функция Грина, она единственная и симметричная.

## Лекция 14. Теория потенциалов

### Построение функции Грина по известному решению задачи Штурма - Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta U = f \\ U|_{\Sigma} = \phi \end{cases}$$

Пусть известно:

$$\begin{cases} \Delta V_i + \lambda_i V_i = 0 \\ V_i|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta G(m_0, m) = -\delta(m, m_0)$$

Оператор берется по переменным  $m$ . Функция Грина для первой краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta G(m_0, m) = -\delta(m, m_0) \\ G|_{m \in \Sigma} = 0 \end{cases}$$

$$G(m_0, m) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(m_0) V_i(m)$$

$$\Delta_m G = \sum C_i \Delta V_i = -\sum_i C_i \lambda_i V_i(m) = -\delta(m, m_0)$$

$$\sum_i C_i \lambda_i \int_D V_j V_i dV = \int_D V_j(m) \delta(m, m_0) dn$$

$$C_j \lambda_j \|V_j\|^2 = V_j(m_0)$$

$$C_j(m_0) = \frac{V_j(m_0)}{\lambda_j \|V_j\|^2}$$

После подстановки получается следующее выражение:

$$G(m_0, m) = \sum_j \frac{V_j(m_0) V_j(m)}{\lambda_j \|V_j\|^2}$$

Ответ задачи Дирихле:

$$U(m) = \int_{\Sigma} \phi(p) \frac{dG(m,p)}{dn_p} d\delta_p + \int_D f(p) G(m,p) dV_p$$

## Теория потенциалов

Рассмотрим эллиптические уравнения теории потенциалов. Потенциалы бывают двух видов:

- 1) объемные;
- 2) поверхностные.

### Определение объемного потенциала

Объемный потенциал имеет следующий вид:

$$U(m) = \int_D \frac{f(p)}{R_{mp}} dv_p$$

Это несобственный интеграл. Если  $m \in D$ , то  $R_{mp}$  может обратиться в ноль.

### Достаточное условие существования несобственного интеграла

Достаточное условие существования несобственного интеграла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \frac{f(p)}{R_{mp}^\sigma} dv_p \\ |f(p)| < f_0 \\ 0 < \sigma < n \end{array} \right.$$

### Свойства объемных потенциалов

$$\Delta U = -4\pi f$$

$$\Delta_m U = \int_D f(p) \Delta_m \frac{1}{R_{mp}} dV_p = \int_D f(p) [-4\pi \sigma(m,p)] dV_p = -4\pi 2(m)$$

## Сведение неоднородной задачи к однородной (на примере внутренней задачи Дирихле)

Использование объемного потенциала позволяет задачу с неоднородным уравнением свести к задаче с однородным.

$$V(m) = -\frac{1}{4\pi} \int_D f(p) \frac{1}{R_{mp}} dV_p$$

Тогда:  $\Delta V = f$ .

$$U = V + W,$$

где  $W$  - все, что остается.

$$\Delta W = 0$$

$$W = U - V$$

$$W|_{\Sigma} = \phi - V|_{\Sigma}$$

Получается, что задачу с неоднородным уравнением Дирихле можно свести к уравнению Лапласа.

## Определение потенциалов простого и двойного слоя

Вводятся понятия потенциалов простого и двойного слоя.

*Потенциал простого слоя:*

$$V_1(m) = \int_{\Sigma} \frac{f(p)}{R_{mp}} dv_p$$

Если  $m$  не принадлежит поверхности, тогда  $\Delta V_1 = \int_{\Sigma} f \Delta \frac{1}{R_{mp}} dV = 0$ .

$$\begin{cases} \Delta V_1 = 0 \\ V_1 \rightarrow 0 \\ r(m) \rightarrow \infty \end{cases}$$

Изучение свойств потенциала осуществляется ради решения задач.

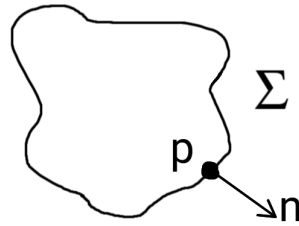


Рис. 14.1. Гладкая поверхность  $\Sigma$

Далее необходимо рассмотреть потенциал двойного слоя. Имеется гладкая поверхность  $\Sigma$ , где  $n$  - внешняя нормаль (Рис. 14.1).

$$V_2(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) dV_p$$

$$- \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R} = - \frac{d}{dR} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{dR}{dn_p} = \frac{1}{R^2}$$

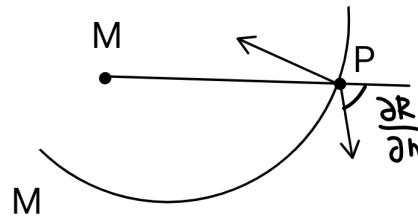


Рис. 14.2. Гладкая поверхность  $M$  и внутренняя нормаль в  $p$

### Равномерная сходимостъ потенциалов простого слоя (непрерывность при переходе через поверхность)

Рассматривается интеграл следующего вида:

$$U(m) = \int_{\Sigma} \frac{f(p)}{R_{mp}^{\kappa}} d\sigma_p$$

где  $0 < \kappa < n$ , а  $n$  - размерность пространства.

Необходимо доказать, что такой интеграл равномерно сходится.

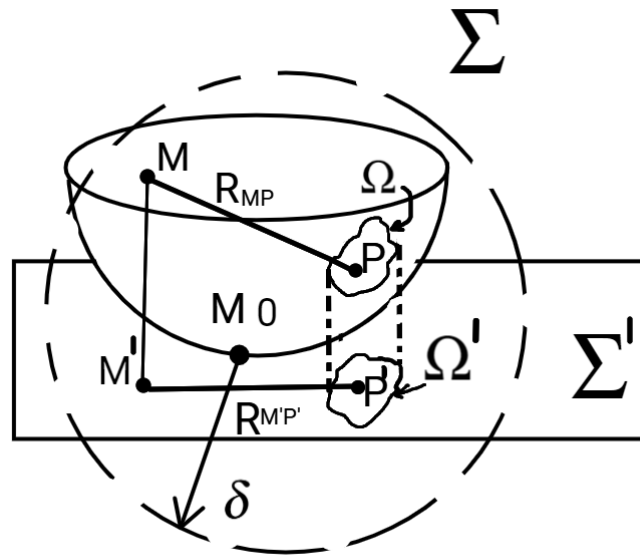


Рис. 14.3. Области и проекции

$$|I| = \left| \int_{\Omega} \frac{f(p)}{R_{mp}^{\varkappa}} d\sigma_p \right| < \varepsilon$$

$$|f(p)| < f_0$$

$$d\sigma' = d\sigma \cos \alpha$$

где  $\cos \alpha$  - угол между нормалью у  $d\sigma$  и  $d\sigma'$ .

$$\cos \alpha > \frac{1}{2}$$

$$|I| < \int_{\Sigma'} \frac{f_0 d\sigma}{R_{m'p'}^{\varkappa}} \leq 2f_0 \int_{K_{m_1}^{2\sigma}} \frac{d\sigma'}{R_{m'p'}^{\varkappa}}$$

$$d\sigma' = R dR d\phi$$

$$2f_0 \int_{K_{m_1}^{2\sigma}} \frac{d\sigma'}{R_{m'p'}^{\varkappa}} \leq 4\pi f_0 \int_0^{2\delta} \frac{dR}{R^{\varkappa-1}}$$

Так как  $\varkappa < 2$ , то получается:



$$4\pi f_0 \int_0^{2\delta} \frac{dR}{R^{x-1}} = 4\pi f_0 \frac{R^{2-x}}{2-x} \Big|_0^{2\delta} < \varepsilon$$

Таким образом, было доказано, что интеграл равномерно сходится, а значит является непрерывной функцией. Отсюда следует, что если взять гладкую поверхность и ограниченную функцию  $f$ , то потенциал простого слоя является непрерывной функцией при переходе через поверхность.

## Существование потенциалов двойного слоя

Потенциал двойного слоя в двухмерном случае:

$$V_2(m) = \int_C \mu(p) \frac{\cos \phi}{R_{mp}} dl_p$$

### Поверхность Ляпунова

Здесь есть неинтегрируемая особенность. Необходимо доказать, что интеграл сходится на поверхности. Доказательство будет вестись на поверхности Ляпунова. Это поверхность, обладающая следующими свойствами:

- 1) поверхность гладкая (в каждой точке существует нормаль);
- 2) существует число  $D > 0$ , единое для всей поверхности и такое, что, можно взять любую точку на поверхности внутри шара с центром в точке  $m$  радиуса  $D$ , а линии, параллельные нормали к поверхности в точке  $m$ , будут пересекать эту поверхность только один раз (Рис. 14.4);

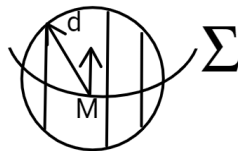


Рис. 14.4. Поверхность

- 3) угол между нормальными в точке  $m$  и нормальными в точке  $p$  меньше или равен, чем  $AR_{mp}^\sigma$ . Иными словами, изменение нормали мало, если точки близки.

Рассматривается в двумерном случае потенциал двойного слоя на поверхности (Рис. 14.5).

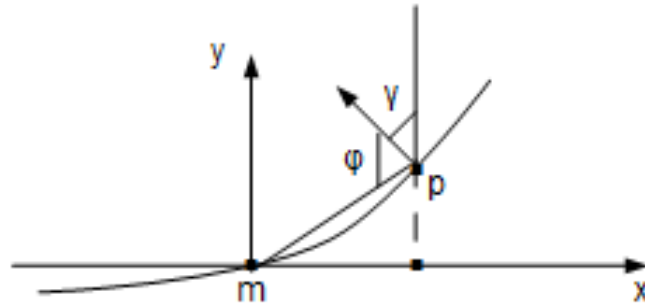


Рис. 14.5. Потенциал двойного слоя на поверхности

$$\phi + \gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$|\cos \phi| = \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha - \gamma \right) \right| = |\sin (\alpha + \gamma)|$$

$$|\sin (\alpha + \gamma)| \leq |\alpha + \gamma| \leq |\alpha| + |\gamma|$$

Необходимо проверить, что  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$ .

$$|\gamma| = AR^\sigma$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|pp'|}{|mp'|} = \int_0^{mp'} \frac{dy}{dx} dx \frac{1}{|mp'|}$$

$$\int_0^{mp'} \frac{dy}{dx} dx \frac{1}{|mp'|} \leq \max \left| \frac{dy}{dx} \right| \leq \operatorname{tg}(\max \alpha')$$

$$\operatorname{tg}(\max \alpha') = \operatorname{tg}(\max \gamma') \leq \operatorname{tg}(\max AR^\sigma) \leq \operatorname{tg} AR_{mp}^\sigma$$

$$\alpha \leq AR_{mp}^\sigma$$

Смысл состоит в том, что  $\alpha$  – это средний наклон, который не превышает максимальный наклон на кривой. А максимальный наклон не превышает  $AR^\sigma$ .

$$\cos \phi < 2AR^\sigma$$

Значит:

$$\left| f \frac{\cos \phi}{R_{mp}} \right| = f_0 \frac{2A}{R_{mp}^{1-\sigma}}$$

Таким образом, было доказано, что если точка  $m$  лежит на поверхности, то потенциал двойного слоя сходится и является непрерывной величиной, когда  $m$  движется по поверхности.

## Разрыв потенциала двойного слоя при переходе через поверхность в $R^3$

Рассматривается трехмерное пространство. Потенциал двойного слоя:

$$V_2(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Берется поверхность с точкой  $p_0$  на ней. Известно, что потенциал двойного слоя существует везде. Рассматривается случай при постоянной  $\mu$ .

$$\bar{V}_2(m) = - \int_{\Sigma} \mu_0 \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Третья формула Грина для функции, равной  $\mu_0$ .

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{1}{R} \frac{d}{dn} \mu_0 - \mu_0 \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{R} \right) \right) = \begin{cases} 4\pi\mu_0, m \in D \\ 2\pi\mu_0, m \in Z \\ 0, m \notin \bar{D} \end{cases}$$

Теперь необходимо рассмотреть полную задачу.

$$V_2(m) = \bar{V}_2(m) - \int_{\Sigma} (\mu(p) - \mu(p_0)) \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{R} \right) d\sigma$$

$$\int_{\Sigma} (\mu(p) - \mu(p_0)) \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{R} \right) d\sigma = I$$

$$I(m) = \int_{\Sigma} (\mu(p) - \mu(p_0)) \frac{\cos \phi}{R_{mp}^2} d\sigma$$

Таким образом, интеграл равномерно сходится,  $I$  является непрерывной функцией,  $\bar{V}$  имеет разрыв.

## Лекция 15. Уравнение Гельмгольца

### Разрыв потенциала двойного слоя при переходе через поверхность в $R^3$ и $R^2$ (продолжение)

В прошлой лекции было доказано, что потенциал простого слоя существует, непрерывен при переходе через поверхность; потенциал двойного слоя существует на поверхности, а при переходе через поверхность потенциал двойного слоя терпит разрыв.

Рассматривается потенциал двойного слоя в трехмерном случае.

$$V(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) d\sigma_p \quad (15.1)$$

Существует предел потенциала двойного слоя снаружи ( $V_{ex}$ ) в точке  $p_0$  (Рис. 15.1).

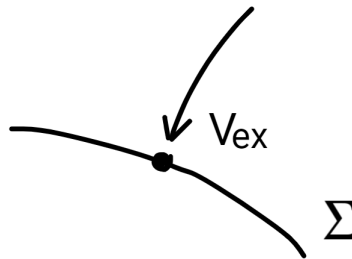


Рис. 15.1.  $V_{ex}$

$$(V_{ex}) = (V)_0 - 2\pi\mu(p_0) = (V)_{in} - 4\pi\mu(p_0)$$

Рассматривается потенциал двойного слоя в двухмерном случае.

$$V_{ex} = V_0 - \pi\mu(p_0) = V_{in} - 2\pi\mu(p_0)$$

### Разрыв производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность в $R^3$

Теперь необходимо рассмотреть, как ведет себя производная потенциала простого слоя. Сам потенциал непрерывен. Следует доказать, что его производная разрывна при переходе через поверхность. Берется двухмерный случай  $f$  (Рис. 15.2).

$$V_1(m) = \int_C v(p) \ln \frac{1}{R_{mp}} dl_p$$

Берется угол  $\psi$ , тогда:

$$\frac{dV_1(m)}{dn_0} = \int_C v(p) \frac{d}{dn_0} \ln \frac{1}{R_{mp}} dl_p = \int_C v(p) \frac{1}{R_{mp}} \cos \psi dl_p$$

$\gamma$  - угол между нормалью в точке  $p$  (Рис. 15.2).

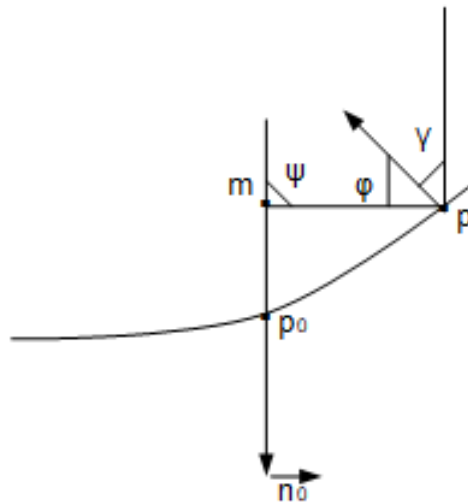


Рис. 15.2. Поверхность Ляпунова

Тогда:

$$\psi + \phi + \gamma = \pi$$

$$\cos \gamma = \cos (\pi - \phi - \gamma)$$

$$\frac{dV_1(m)}{dn_0} = \int_C \frac{v(p)}{R_{mp}} \cos (\phi + \gamma) dl_p = \int_C \frac{[v(p)] \cos \phi}{R_{mp}} dl_p - \int_C \frac{v(p) \sin \phi \sin \gamma}{R_{mp}} dl_p$$

$$|\sin \gamma| \leq \gamma \leq AR^\varkappa, \quad \varkappa > 0$$

Тогда получается следующее:

$$\left| \frac{v(p) \sin \phi \sin \gamma}{R} \right| \leq \frac{1}{R^{1-\varkappa}} B,$$

где  $B$  – некоторая непрерывная функция. Интеграл с такой особенностью равномерно сходится, а значит является непрерывной функцией переменной  $m$ . В точке перехода  $\cos \gamma = 1$ . Поэтому:

$$\left(\frac{dV_1}{dn_0}\right)_{in} = \left(\frac{dV_1}{dn_0}\right)^0 + \pi v(p_0) = \left(\frac{dV}{dn_0}\right)_{ex} + 2\pi v(p_0)$$

$$\left(\frac{dV_1}{dn_0}\right)^0 = - \int_C v(p) \frac{d}{dn_0} \ln \frac{1}{R_{p_0 p}} dl_p$$

В трехмерном случае будет то же самое, но скачок потенциала будет в два раза больше.

## Метод интегральных уравнений для решения задач с оператором Лапласа

Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана (доказательство существования решения)

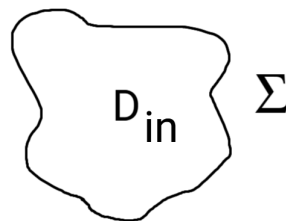


Рис. 15.3. Область  $D_{in}$  с границей  $\Sigma$

Начать следует с внутренней задачи Дирихле(1). Имеется область  $D_{in}$  с границей  $\Sigma$  (Рис. 15.3). Внутри области ставится задача:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = \phi \end{cases}$$

Решение ищется в виде потенциала двойного слоя в трехмерном случае.

$$U(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p \quad (15.2)$$

Задача: составить уравнение для определения  $\mu$ .

$$\begin{aligned}\phi(m) &= - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p + 2\pi\mu(m) \\ \mu(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p + \frac{\phi(m)}{2\pi}\end{aligned}\quad (15.3)$$

Теперь необходимо рассмотреть внешнюю задачу Неймана.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \frac{dU}{dn} \Big|_{\Sigma} = f \\ U \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \end{cases}\quad (15.4)$$

Здесь решение ищется в виде потенциала простого слоя.

$$U(m) = \int_{\Sigma} v(p) \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p \quad (15.5)$$

$f$  - предел производной снаружи.

$$f(m) = \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) d\sigma_p - 2\pi v(m)$$

Получается интегральное уравнение Фредгольма:

$$v(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) d\sigma_p - \frac{f(m)}{2\pi} \quad (15.6)$$

Это союзное уравнение с полярным ядром. Собственное значение ядра – те значения  $\lambda$ , при которых имеется нетривиальное решение:

$$y(m) = \lambda \int_{\Sigma} K(m, p) y(p) d\sigma_p$$

Далее рассматриваются союзные уравнения:

$$y(m) = \lambda \int_{\Sigma} K(m, p) y(p) d\sigma_p + f(p) \quad (*)$$



$$z(m) = \lambda \int_{\Sigma} K(p, m) z(p) d\sigma_p + g(m) \quad (**)$$

**Теорема 15.1.** *Первая теорема Фредгольма: если  $\lambda$  не является собственным значением ядра  $K$ , то она не является собственным значением союзного ядра, при этом оба уравнения имеют единственное решение при любых  $f$  и  $g$ .*

**Теорема 15.2.** *Вторая теорема Фредгольма: если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K(m, p)$ , то оно является также собственным значением союзного ядра. Причем ранг собственного значения в обоих случаях одинаков.*

**Теорема 15.3.** *Третья теорема Фредгольма: если  $\lambda$  является собственным значением ядра  $K$ , а мы рассматриваем неоднородное уравнение, то решение существует только в том случае, когда  $f$  ортогонально всем собственным функциям союзного ядра.*

Необходимо убедиться, что  $\frac{1}{2\pi}$  не является собственным значением ядра  $K$ .

**Лемма 15.1.** *Если потенциал простого слоя тождественно равен нулю, либо во внешней области, либо во внутренней области, то плотность потенциала равна нулю.*

Рассматривается потенциал простого слоя. Предполагается, что он равен нулю во внешней области (Рис. 15.4). Необходимо доказать, что  $\phi = 0$ .

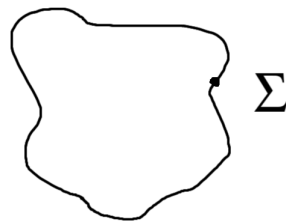


Рис. 15.4. Поверхность  $\Sigma$ ,  $\phi = 0$

$$V_1(m) = \int_{\Sigma} \frac{\phi(p)}{R_{mp}} d\sigma_p$$

В силу непрерывности потенциала простого слоя при переходе через поверхность он равен нулю и на границе, и изнутри, поэтому:

$$\begin{cases} \Delta V_1 = 0 \\ V|_{\Sigma} = 0 \\ \frac{dV}{dn} \equiv 0 \\ \left(\frac{dV_1}{dn}\right)_{in} - \left(\frac{dV}{dn}\right)_{ex} + 4\pi\phi \end{cases}$$

Отсюда  $\phi = 0$ .

$$v(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) d\sigma_p - \frac{f(m)}{2\pi} \quad (15.6')$$

Рассматривается следующее уравнение:

$$V_1(m) = \int_{\Sigma} \frac{v(p)}{R_{mp}} d\sigma_p$$

$$\begin{cases} \Delta V_1 = 0 \\ \left(\frac{dV_1}{dn}\right)_m = - \int_{\Sigma} v \frac{d}{dn_m} \left( \frac{1}{R_{mp}} \right) d\sigma_p - 2\pi v(m) \\ V_1 \rightarrow \infty \end{cases}$$

Таким образом, была получена внешняя задача Неймана в области  $D_{ex}$ . Решение краевой задачи  $V_1 \equiv 0$ , значит и  $v = 0$ .

Таким образом, было доказано существование решения.

### Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле (доказательство существования решения)

Теперь необходимо рассмотреть внутреннюю задачу Неймана и внешнюю задачу Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \left.\frac{dU}{dn}\right|_{\Sigma} = \phi \end{cases} \quad (15.7)$$

Решение ищется в виде потенциала простого слоя, уравнение рассматривается во внутренней области (Рис. 15.5).

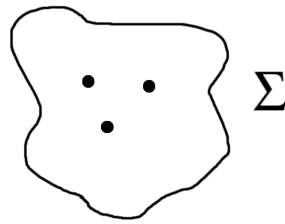


Рис. 15.5. Внутренняя область

$$U(m) = \int_{\Sigma} \frac{v(p)}{R_{mp}} d\sigma_p \quad (15.8)$$

Составляется уравнение для определения функции  $v$ .

$$\begin{aligned} \phi(m) &= \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p + 2\pi v(m) \\ v(m) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \frac{1}{R} d\sigma + \frac{\phi(m)}{2\pi} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Теперь рассматривается внешняя задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U|_{\Sigma} = f \\ U \rightarrow 0, z \rightarrow 0 \end{cases} \quad (15.10)$$

Решение ищется в виде потенциала двойного слоя.

$$U(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p + \frac{\alpha}{R_{Qm}} \quad (15.11)$$

$$f(m) = - \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p + 2\pi\mu(m) + \frac{\alpha}{R_{Qm}}$$

$$\mu(m) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mu(p) \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha}{R_{Qm} - f(m)} \right) \quad (15.12)$$

Таким образом, получились два союзных уравнения. Из третьей формулы Грина следует, что  $\mu = \mu_0 = const$ .

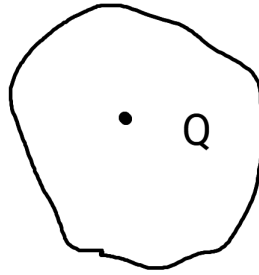


Рис. 15.6.  $Q$

$$2\pi\mu_0 = - \int_{\Sigma} \mu_0 \frac{d}{dn_p} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Таким образом, было доказано, что  $-\frac{1}{2\pi}$  является собственным значением ядер.

**Задача:** проверить, что ранг собственного значения  $-\frac{1}{2\pi}$  равен 1. Рассматривается следующее уравнение, у которого есть нетривиальное решение:

$$v(m) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Допускается, что есть два линейно независимых решения:  $v_1$  и  $v_2$ . Составляется потенциал простого слоя с плотностью  $v_1$ .

$$\bar{V}(m) = \int_{\Sigma} \frac{v_1(p)}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Задача строится в  $D_{in}$ .

$$\begin{cases} \Delta \bar{V} = 0 \\ \frac{d\bar{V}}{dn} \Big|_{\Sigma} = \int_{\Sigma} v_1(p) \frac{d}{dn_m} \left( \frac{1}{R} \right) d\sigma_p + 2\pi v = 0 \end{cases}$$

Известно, что решением такой задачи может быть только константа.

$$\bar{V} = C_1 \neq 0$$

Строится потенциал простого слоя с плотностью  $v_2$ .

$$\bar{\bar{V}} \equiv const = C_2 \neq 0$$

Строится плотность потенциала

$$v = \frac{v_1}{C_1} - \frac{v_2}{C_2}$$

Рассматривается потенциал простого слоя

$$V(m) = \int_{\Sigma} \frac{v(p)}{R_{mp}} d\sigma_p = 0$$

Из леммы понятно, что плотность потенциала  $v$  равна нулю, а это означает, что  $v_1$  и  $v_2$  линейно зависимы. Значит ранг собственных решений равен 1.

У неоднородного уравнения не бывает собственной функции. Она бывает у ядра или у однородного уравнения. Рассмотрим собственную функцию ядра  $v_0(m)$ . Если  $-\frac{1}{2\pi}$  является собственным значением, то по третьей теореме Фредгольма, для существования уравнения:

$$v(m) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} v(p) \frac{d}{dn_m} \frac{1}{R_{mp}} d\sigma_p$$

Необходимо и достаточно, чтобы неоднородность  $\frac{\psi(m)}{2\pi}$  была ортогональна всем собственным функциям союзного ядра (т.е.  $\mu_0 = const$ ).

$$\int_{\Sigma} v_0(m) \left( \frac{\alpha}{R_{Qm}} - f(m) \right) d\sigma_m = 0$$

Т.е. для существования (15.9) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Sigma} \frac{\phi(m)}{2\pi} \cdot \mu_0 d\sigma_m = 0$$

Или иначе

$$\int_{\Sigma} \phi(m) d\sigma_m = 0$$

Задача в бесконечной области сводится к интегральному уравнению на поверхности, которое решается численно.

## Уравнение Гельмгольца

Это уравнение следующего вида:

$$\Delta U + CU = 0$$

$$U_t = \Delta U - \alpha U + f$$

Если на поверхности поддерживаются фиксированные условия, то с течением времени решение выйдет на стационар и получится неоднородное уравнение Гельмгольца.

$$\Delta U - \kappa^2 U = f$$

Это уравнение можно рассматривать как установившийся процесс диффузии. Если взять  $C = k^2$ , то это будет задача об установившихся колебаниях.

$$V_{tt} = a^2 \Delta V + f(m)e^{i\omega t}$$

$$V(m, t) = e^{i\omega t} U(m)$$

$$\Delta U + \frac{\omega^2}{a^2} U = -\frac{f(m)}{a^2}$$

**Случай  $k = \kappa^2$ , доказательство единственности решения краевых задач**

Пусть имеется область  $D$  с границей  $\Sigma$ . Для следующего уравнения имеет место принцип максимума:

$$\Delta U - \kappa^2 U = 0$$

Принцип максимума гласит, что непрерывное решение данного уравнения в замкнутой области не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках.

Рассматривается первая краевая задача в  $D_{in}$ :

$$\begin{cases} \Delta U - \kappa^2 U = f \\ U|_{\Sigma} = \phi \end{cases}$$

Допускается существование двух решений и рассматривается их разность.

$$\begin{cases} \Delta V - \kappa^2 V = 0 \\ V|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Если  $V$  на границе равно 0, то положительный максимум достигается во внутренней точке, чего быть не может. Значит  $V \equiv 0$ , тогда решение поставленной задачи единственное.

Для доказательства второй и третьей краевых задач рассматривается функция Грина.

$$\begin{cases} \Delta U - \kappa^2 U = f \\ \left( \frac{dU}{dn} + hU \right) |_{\Sigma} = \phi \end{cases}$$

Допускается существование двух решений и рассматривается их разность.

$$\begin{cases} \Delta V - \kappa^2 V = 0 \\ \left( \frac{dV}{dn} + hV \right) |_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Надо доказать, что последняя задача имеет только тривиальное решение.

$$\begin{aligned} \int_D V(\Delta V - \kappa^2 V) dV &= \int_{\Sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D [(\nabla V)^2 + \kappa^2 V^2] dV = 0 \\ \int_{\Sigma} hV^2 d\sigma + \int_D [(\nabla V)^2 + \kappa^2 V^2] dV &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда получается, что  $V \equiv 0$ .

## Лекция 16. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

### Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

Имеется область  $D$  с границей  $\Sigma$  (Рис. 16.1).

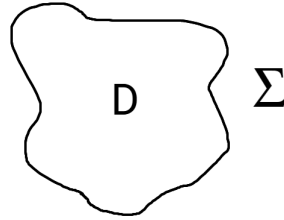


Рис. 16.1. область  $D$  с границей  $\Sigma$

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U \\ U|_{t=0} = \phi(m) \\ U|_{\Sigma} = \mu(m, t) \end{cases}$$

В прошлой лекции был доказан принцип максимума: решение однородного уравнения может достигать максимального значения либо при начальных условиях, либо на границе  $\Sigma$ . Отсюда следуют единственность, устойчивость и принцип сравнения. Рассматриваются два решения:

$$\begin{cases} U_{1t} = a^2 \Delta U_1 \\ U_1|_{t=0} = \phi_1 \\ U_1|_{\Sigma} = \mu_1 \end{cases} \quad \begin{cases} U_{2t} = a^2 \Delta U_2 \\ U_2|_{t=0} = \phi_2 \\ U_2|_{\Sigma} = \mu_2 \end{cases}$$

Необходимо рассмотреть разность  $V = U_1 - U_2$ . Тогда получается следующая задача:



$$\begin{cases} V_t = a^2 \Delta V \\ V|_{t=0} = \phi_1 - \phi_2 \\ V|_{\Sigma} = \mu_1 - \mu_2 \end{cases}$$

Пусть  $\phi_1 = \phi_2$ , а  $\mu_1 = \mu_2$ .

Тогда по принципу максимума  $V$  не может быть внутри положительным или отрицательным, поэтому  $V = 0$ , а значит решение единственно.

Пусть  $\phi_1 \geq \phi_2$ , а  $\mu_1 \geq \mu_2$ , тогда  $U_1 \geq U_2$ .

Если  $|\phi_1 - \phi_2| < \varepsilon$  и  $|\mu_1 - \mu_2| < \varepsilon$ , тогда  $|U_1 - U_2| < \varepsilon$ .

Далее рассматривается вторая и третья краевые задачи.

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U + f \\ U|_{t=0} = \phi \\ \left( \frac{dU}{dn} + hU \right) = \mu \end{cases}$$

Важно, что  $h \geq 0$ . Рассматривая вопрос единственности, допускается, что существуют два решения. Для разности получается однородная задача.

$$\begin{cases} V_t = a^2 \Delta V \\ V|_{t=0} = 0 \\ \left( \frac{dV}{dn} + hV \right) = 0 \end{cases}$$

$$\int_D V V_t dV = a^2 \int_D V \Delta V dV$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D V^2 dV = a^2 \left\{ \int_{\Sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D (\nabla V^2) dV \right\}$$

$$a^2 \left\{ \int_{\Sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int_D (\nabla V^2) dV \right\} = a^2 \left\{ - \int_{\Sigma} h V^2 d\sigma - \int_D (\nabla V)^2 dV \right\}$$

$$\int_D V^2 dV = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_D V^2 dV \leq 0$$

Так как интеграл равен нулю при всех  $t$ , значит  $V \equiv 0$ . Таким образом, был рассмотрен вопрос единственности, а теперь необходимо рассмотреть вопрос существования.

Существование решения доказывается так: необходимо построить решение, к примеру, с помощью разделения переменных, а потом доказать, что оно действительно является решением.

Рассматривается одномерный случай:

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U_{xx} \\ U|_{t=0} = \phi(x) \\ U(0, t) = 0 \\ U(l, t) = 0 \end{cases}$$

Замена переменных:

$$\begin{aligned} 0 \leq x' \leq \pi \\ t' = a^2 t \end{aligned}$$

Получается следующая задача:

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(x, 0) = \phi(x) \\ U(0, t) = U(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Задача легко решается разделением переменных.

$$\begin{aligned} U &= X(x)T(t) \\ \frac{T'}{T} &= \frac{x''}{x} = -\lambda \\ \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda_n = n^2$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X_n = \sin nx$$

$$T' + n^2 T = 0$$

$$T_n = e^{-n^2 T}$$

Таким образом, получается следующий функциональный ряд с помощью разделения переменных:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 T} \sin nx$$

Теперь необходимо проверить, при каких условиях на  $\phi$  этот ряд действительно является решением задачи. Под решением задачи понимается функция, непрерывная в замкнутой области, непрерывно примыкающая к начальным условиям и дважды непрерывно дифференцируемая во внутренних точках области.

Сам ряд является непрерывной функцией. Достаточно, чтобы  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  сходилась.

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(\xi) \sin n\xi d\xi$$

По теории рядов, если имеется некоторая функция  $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и она раскладывается в ряд, то сумма:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [|a_n|^K + |b_n|^K],$$

Эта сумма сходится, если функция  $f$  имеет  $K$  - непрерывных производных и  $K + 1$  кусочно непрерывную.

Для сходимости ряда достаточно, чтобы  $\phi$  была непрерывно дифференцируема, а  $\phi'$  имела кусочную производную.

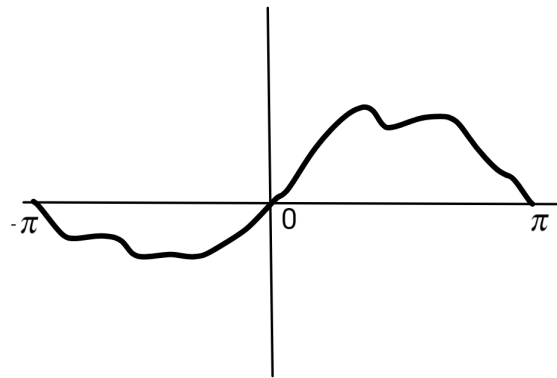


Рис. 16.2. Функция  $\phi$

Необходимо, чтобы функция  $\phi$  могла быть продолжена нечетным образом, а также  $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$  (Рис. 16.2).

Ряд можно почленно дифференцировать, если формально продифференцированный ряд равномерно сходится в любой замкнутой подобласти.

$$U_{xx} \sim - \sum_{n=1}^{\infty} C_n n^2 e^{-a^2 t} \sin nx$$

Необходимо, чтобы этот ряд сходился в любой замкнутой подобласти. Берется  $t_1$ :  $t > t_1 > 0$ . Рассматривается следующая область:  $0 < x < \pi, t > t_1$  (Рис. 16.3).

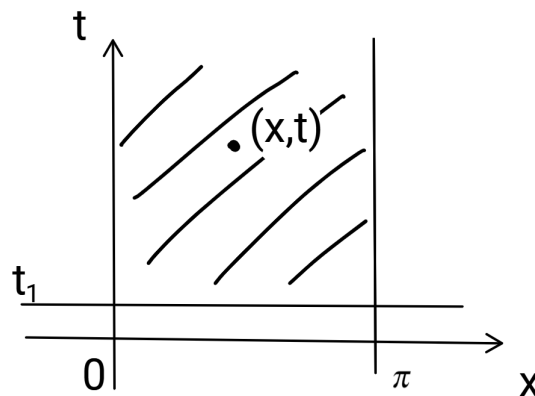


Рис. 16.3. Замкнутая подобласть

$$e^{-n^2 t} < e^{-n^2 t_1}$$

$$\bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 t}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \alpha < 1$$

$$\frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)^2 t_1}}{n^2 e^{-n^2 t_1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-2nt_1 - t_1}$$

Данное выражение стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Тем самым было доказано, что ряд сходится, значит дифференцирование было законно, т.е. то, что было построено, действительно является решением задачи.

Теперь необходимо построить решение неоднородного уравнения.

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U + f(m, t) \\ U|_{t=0} = \phi(m) \\ U|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta V_i + \lambda_i V_i = 0 \\ V_i|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Решение ищется в виде разложения по функциям собственной задачи Штурма-Лиувилля.

$$U(m, t) = \sum_i V_i(m) U_i(t)$$

$$f(m, t) = \sum_i V_i(m) f_i(t)$$

$$f_i(t) = \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_D f(p, t) V_i(p) dV_p$$

$$\phi(m) = \sum_i V_i(m) \phi_i$$

$$\phi_i = \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_D V_i(p) \phi(p) dV_p$$

Решение в виде суммы подставляется в уравнение и дифференцируется.

$$\sum_i V_i(m) U_i(t) = a^2 \sum_i \Delta V_i U_i + \sum_i V_i f_i$$

$$\sum_i V_i \left\{ U_i' + a^2 \lambda_i U_i - f_i \right\}$$

$$U_i' + a^2 \lambda_i U_i = f_i$$

$$\phi(m) = \sum_i V_i(m) U_i(0)$$

$$\phi = \sum_i V_i \phi_i$$

Решение будет такое:

$$U_i(t) = \phi_i e^{-a^2 \lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i a^2 (t-\tau)} f_i(\tau) d\tau$$

$$U(m, t) = \sum_i V_i(m) U_i(t)$$

$$U(m, t) = \sum_i V_i(m) \left\{ e^{-a^2 \lambda_i t} \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_D \phi(p) V_i(p) dV + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-a^2 \lambda_i (t-\tau)} \left[ \frac{1}{\|V_i\|^2} \int_D f(p, \tau) V_i(p) dV \right] d\tau \right\}$$

$$U(m, t) = \int_D G(m, p, t) \phi(p) dV + \int_0^t \int_D G(m, p, t-\tau) f(p, \tau) dV d\tau,$$

где функция  $G$ :

$$G(m, p, t) = \sum_i \frac{V_i(m) V_i(p)}{\|V_i\|^2} e^{-a^2 \lambda_i t}$$

Рассматривается обобщенное решение:

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U \\ U|_{t=0} = \sigma(m, m_0) \\ U|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Получается, что:

$$U(m, t) = G(m, m_0, t)$$

Это температура в точке наблюдения  $m$  в момент  $t$ , если в начальный момент в точке  $m_0$  было дельтаобразное единичное по мощности выделение температуры. Т.е. функция  $G$  – это функция точечного источника.

## Задача теплопроводности на неограниченной прямой

Рассматривается одномерная задача на  $-\infty < x < \infty$ . Задача Коши:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

Задача классическая, если функция  $\phi$  непрерывна. Теорема единственности гласит: ограниченное решение задачи единственно.

Предполагается, что  $|U| < A$ . Предполагается существование двух решений и рассматривается их разность.

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} \\ V|_{t=0} = 0 \\ V \leq 2A \end{cases}$$

Так как участок не ограничен, нельзя сразу применить принцип максимума. Рассматривается участок от  $-L$  до  $L$  с точкой  $x$  на ней (Рис. 16.4). Рассматривается вспомогательная функция на данном участке:

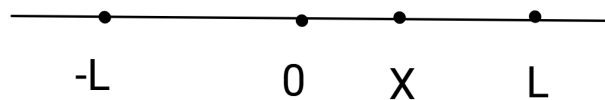


Рис. 16.4. Участок

$$W \left( \frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \frac{4A}{L^2}$$

$V$  и  $W$  сравниваются на ограниченном участке.

$$\begin{cases} W_t = a^2 W_{xx} \\ W|_{t=0} > 0 \\ W|_{x=\pm L} > 2 \end{cases}$$

$$|V(x,t)| = \left(\frac{x^2}{2} + a^2t\right) \frac{4A}{L^2} \rightarrow 0$$

Отсюда получается, что  $V$  не может отличаться от нуля, значит решение задачи единственное.

Теперь необходимо построить решение. Задача раскладывается в ряд Фурье.

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(k)e^{ixk-a^2k^2t} dk$$

При  $t = 0$ :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(k)e^{ixk} dk$$

Отсюда видно, что  $B$  - коэффициент Фурье.

$$B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)e^{i\xi k} d\xi$$
$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)e^{-i\xi k} d\xi \right] e^{ixk-a^2k^2t} dk$$
$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)-a^2k^2t} dk \right\} d\xi$$

Выражение в скобках имеет смысл точечного источника:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\xi)k-a^2k^2t} dk$$

Данный интеграл можно посчитать.

$$x - \xi = \alpha$$

$$a^2t = \beta$$



$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k - \beta k^2} dk$$
$$I(0, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta k^2} dk = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}$$
$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} i e^{i\alpha k} k e^{-\beta k^2} dk = \frac{i(-1)}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k} \frac{d}{dk}(e^{-\beta k}) dk$$

Интегрируем по частям, подстановки дают ноль.

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{i}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} i\alpha e^{i\alpha k - \beta k^2} dk$$
$$\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{2\beta} I$$
$$I = C e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}}$$

При  $\alpha = 0$ :

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta}}$$
$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

## Лекция 17. Задача теплопроводности на полупрямой с граничными условиями. Уравнения колебаний.

### Уравнения гиперболического типа

#### Задача теплопроводности на полупрямой с граничными условиями

Имеется задача на полупрямой (1):

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x, 0) = 0 \\ U(0, t) = \mu(t) \end{cases} \quad (17.1)$$

Рассматривается вспомогательная задача (2):

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x, 0) = 0 \\ U(0, t) = 1 \end{cases} \quad (17.2)$$

Цель: показать, что в случае решения задачи (17.2) можно решить и задачу (17.1).  
Допускается, что  $U_2$  известно. Рассматривается функция  $\mu$  и (Рис. 17.1).

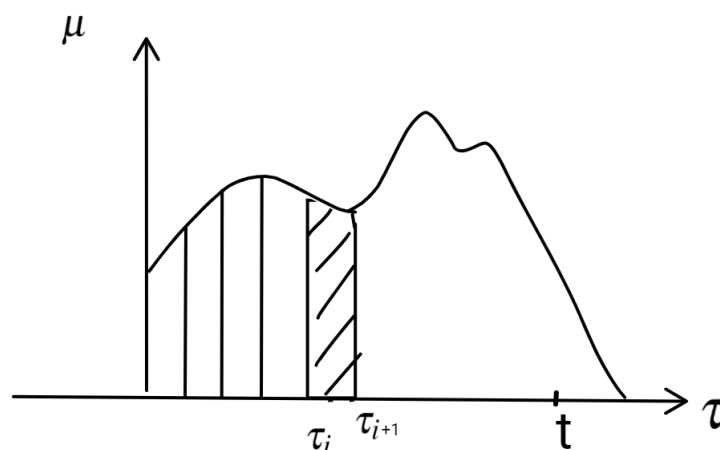


Рис. 17.1. Функция  $\mu$

Рассматривается влияние граничного условия в виде столбика на решение задачи в момент  $\tau$ .

$$U \sim \sum_i [U(x, t - \tau_i) - U(x, t - (\tau_i + \Delta))] \mu_i = - \sum_i \frac{[U(x, t - (\tau_i + \Delta)) - U(x, t - \tau_i)]}{\Delta} \mu(\tau_i) \Delta$$

$$U \sim - \int_0^t \frac{d}{d\tau} U(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau$$

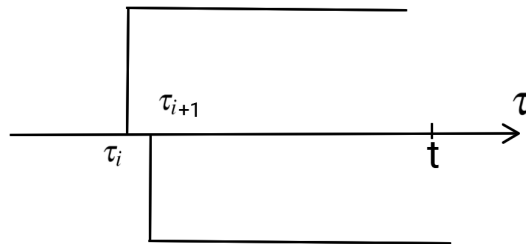


Рис. 17.2. Иной представление столбика

Важно, что явный вид уравнения нигде использован не был, а только его линейность. Значит, чтобы решить задачу с неоднородным граничным условием, достаточно уметь решать задачу с граничным условием 1, тогда для любой линейной задачи будет решение в таком виде:

$$U(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{d}{dt} U(x, t - \tau) d\tau$$

Очевидно, что  $U = 1 - w$ , где  $w$ :

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w|_{t=0} = 1 \\ w|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Можно рассмотреть задачу на участке  $-\infty < x < \infty$ .

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w|_{t=0} = \begin{cases} 1, x < 0 \\ -1, x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ранее такая задача уже была решена:

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} \\ U(x, 0) = \begin{cases} T_2, x > 0 \\ T_1, x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ее решение:

$$U(x, 0) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Тогда решение для  $w(x, t)$  будет таким:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ U(x, t) &= 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ \Phi(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-z^2} dz \\ \frac{dU}{dt} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \frac{-x}{4at^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Получается, что решение задачи (17.1) должно быть в таком виде:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \int_0^t \mu(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \\ \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} &= \frac{d}{dt} U \end{aligned}$$

Теперь необходимо проверить, что данное решение соответствует задаче (17.1).

$$U_t - a^2 U_{xx} = \int_0^t \mu(\tau) \frac{d}{dt} \left[ \frac{dU}{dt} - a^2 \frac{dU}{dx^2} \right] d\tau + \lim_{\tau \rightarrow t} \left[ \mu(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \right]$$

Вспомогательные соотношения:

$$\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} = z^2$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{8a^3(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = z^{\frac{3}{2}}$$

Тогда получается:

$$U_t - a^2 U_{xx} = \mu(\tau) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4a^2}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \left( x^{\frac{3}{2}} e^{-z^2} \right) = 0$$

Таким образом, было проверено, что полученное выражение действительно удовлетворяет уравнению.

$$U(x,t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

Необходимо показать, что при  $x \rightarrow 0$  данное выражение стремится к  $\mu(\tau)$ .

Замена переменных:

$$\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} = z$$

$$t-\tau = \frac{x^2}{4a^2z^2}$$

$$dz = \frac{x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

Получается следующее выражение:

$$U(x,t) = \int_0^t \mu \left( t - \frac{x^2}{4a^2z^2} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz$$

Теперь необходимо отгородиться от нуля так, чтобы  $\frac{x}{z} \rightarrow 0$ , когда  $x \rightarrow 0$ .

$$U(x,t) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \dots + \int_0^{\sqrt{x}} \dots$$

$$\int_0^{\infty} \mu(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} = \mu(t)$$

Таким образом, было проверено, что при  $x \rightarrow 0$  выполняется граничное условие.

Рассмотрим, что дает второе граничное условие. Задача на полубесконечном участке в одномерном случае с граничным условием второго рода.

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x, 0) = 0 \\ \frac{dU}{dx}(0, t) = v(t) \end{cases}$$

Известно, что поток тепла равен:

$$q = -k \frac{dU}{dx}$$

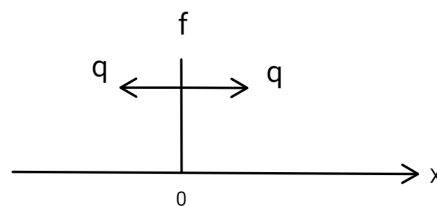


Рис. 17.3. Источник тепла в 0, дающий в обе стороны поток тепла  $q$

Значит, фактически задан поток тепла. Рассматривается бесконечный участок по  $x$ . В нуле помещается такой источник тепла, чтобы он налево и направо давал нужный поток тепла (Рис. 17.3).

$$q = -k v(t)$$

Уравнение теплопроводности:

$$C\rho U_t = k U_{xx} + F$$

$$U_t = a^2 U_{xx} + F$$

$$a^2 = \frac{k}{C\rho}$$

$$f = \frac{F}{C\rho}$$

Необходимо, чтобы мощность физических источников была такой:

$$q = -k\nu(t)$$

Значит, в уравнение необходимо подставить:

$$f = -\frac{2k\nu(t)}{C\rho}\delta(x)$$

### Задача теплопроводности на бесконечном участке. Уравнения колебаний. Уравнения гиперболического типа

Тогда получается следующая задача на участке  $-\infty < x < \infty$ :

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} - 2a^2 \nu(t) \delta(x) \\ U(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Решение задачи:

$$U(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau$$
$$U(x, t) = \int_0^t 2a^2 \nu(\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

Необходимо проверить, что при  $x \rightarrow 0$  производная должна стремиться к  $\nu(t)$ .

$$\frac{dU}{dx} = \int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \nu(\tau) d\tau$$

### Начально-краевая задача для уравнения колебаний

Это уравнения гиперболического типа.

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 \Delta U + f(m, t) \\ U(m, 0) = \phi(m) \\ U_t(m, 0) = \psi(m) \\ U|_{\sigma} = \mu(m, t)|_{m \in \Sigma} \end{cases}$$

Здесь  $m \in D$ .

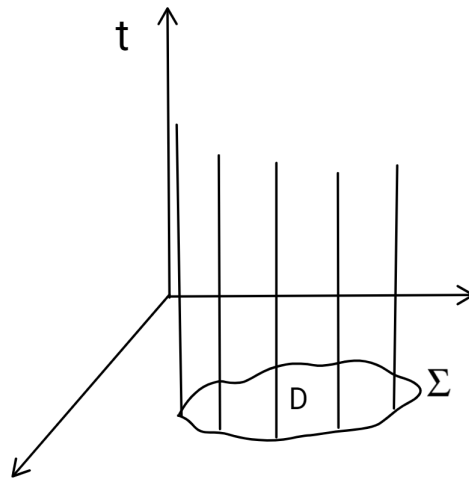


Рис. 17.4. Область  $\Sigma$  и  $D$

Задача является классической, если функции  $\psi, \mu, f$  непрерывны и сопряжены в углу. Сначала необходимо рассмотреть вопрос единственности. Это выясняется для того, чтобы понять, достаточно ли было задано дополнительных условий.

Допустим, что существуют два решения. Рассмотрим их разность.

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 \Delta V \\ V|_t = 0 = 0 \\ V|_{\sigma} = 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \int_D [V_t^2 + a^2 (\nabla V)^2] dV$$

$$E(0) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_D [V_t V_{tt} + a^2 \nabla V \nabla V_t] dV$$



$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_D V_t (V_{tt} - a^2 \Delta V) dV + a^2 \int_{\Sigma} V_t \frac{dV}{dn} d\sigma$$

Если  $V|_{\Sigma} = 0$ , то  $V_T|_{\Sigma} \equiv 0$ , то интеграл равен нулю.

Если  $\frac{dV}{dn}|_{\Sigma} = 0$ , то интеграл также равен нулю.

Если  $\left(\frac{dV}{dn} + hV\right)|_{\Sigma} = 0$ , при этом  $h > 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -a^2 \int_{\Sigma} hV V_t dV \\ \frac{d}{dt} \left\{ E + a^2 \int_{\Sigma} hV^2 dV \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Для первой и второй краевой задачи получалось, что :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

А для третьей:

$$E = -a^2 \int_{\Sigma} V^2 h dV \leq 0$$

Значит  $E = 0$ . И решение задачи единственное.

Теперь необходимо проверить существование решения, чтобы выяснить, не слишком ли много было выставлено условий.

Здесь тоже необходимо построить решение и проверить его справедливость. Рассматривается задача:

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx} \\ U(x, 0) = \phi(x) \\ U(0, t) = 0 \\ U(\pi, t) = 0 \\ U_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Вспомогательная задача:

$$U = XT$$
$$\frac{T''}{T} = \frac{x''}{x} = -\lambda$$

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = n^2$$

$$X(x) = \sin nx$$

$$T'' + n^2 T = 0$$

$$T = A \sin nt + B \cos nt$$

Получается ответ:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx [A_n \sin nt + B_n \cos nt]$$

Если  $t = 0$ , то

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

$$B_n = \phi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \sin nxdx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin nx$$

$$A_n = \frac{\psi_n}{n}$$

$$\psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nxdx$$

Получается ответ:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[ \frac{\psi_n}{n} \sin nt + \phi_n \cos nt \right]$$

Каждый член этого ряда по построению удовлетворяет уравнению. Необходимо проверить, что этот ряд равномерно сходится и что его можно дифференцировать по членам. Необходимо, чтобы сходились следующие ряды:

$$\sum_n \left[ \frac{|\psi_n|}{n} + |\phi_n| \right]$$

$$\sum_n n^2 \left[ \frac{|\psi_n|}{n} + |\phi_n| \right]$$

Ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Рассматривается сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(|a_n| + |b_n|)n^k]$$

Чтобы этот ряд сходился, достаточно, чтобы  $f(x)$  имела  $k$  непрерывных производных и  $k + 1$  кусочно непрерывную. Также функция должна быть непрерывная и продолжена на всю ось. Функция должна быть такой, чтобы ее можно было нечетно продолжить на участок  $(-\pi, 0)$  (Рис. 17.4).

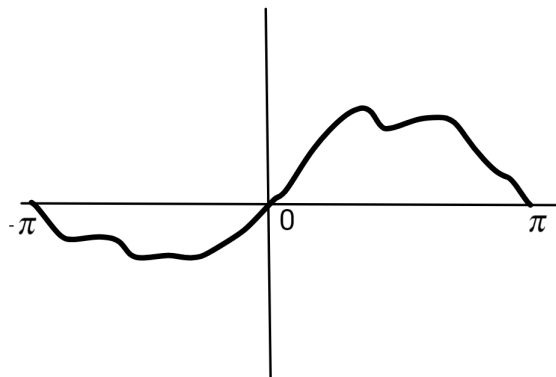


Рис. 17.5. Функция  $f(x)$

Условие для  $\psi$ :  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ , иметь непрерывную производную, 2-ю кусочно непрерывную.

Условие для  $\phi$ : две непрерывные производные, 3-ю кусочно непрерывную.

$$\phi(0) = \phi(\pi) = 0 \text{ и } \phi''(0) = \phi''(\pi) = 0$$

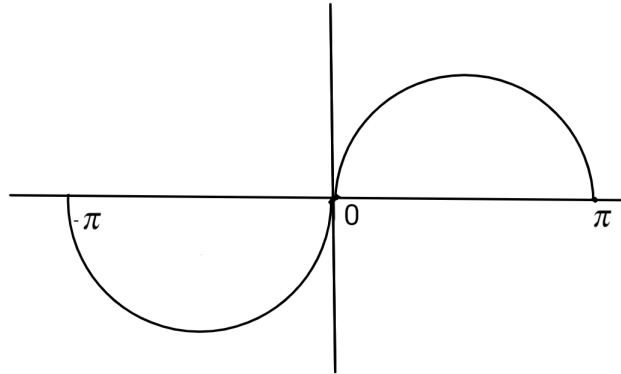


Рис. 17.6. Пример недостаточности условия непрерывности только функции: функция непрерывна, но вторая производная не непрерывна

Ряд равномерно сходится. Ряд из вторых производных тоже равномерно сходится. Выполнены все условия задачи. Это пример пути доказательства существования.

Теперь необходимо построить функцию источника и построить решение задачи.

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 \Delta U + f(m, t) \\ U(m, 0) = \phi(m) \\ U_t(m, 0) = \psi(m) \\ U|_{\sigma} = 0 \end{cases}$$

Решение ищется в виде разложения по собственным функциям.

$$\begin{cases} \Delta V_i + \lambda_i V_i = 0 \\ V_i|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

$$U(m, t) = \sum_i V_i(m) U_i(t)$$

$$f(m, t) = \sum_i V_i(m) f_i(t)$$

$$\phi(m) = \sum_i V_i(m) \phi_i$$

$$\psi(m) = \sum V_i(m) \psi_i$$

После подстановки в условие задачи получается:

$$\sum [V_i U_i'' - a^2 \Delta V_i U_i - V_i f_i] = 0$$

$$\sum V_i [U_i'' + a^2 \lambda_i U_i - f_i] = 0$$

$$U_i'' + a^2 \lambda_i U_i = f_i$$

$$U_i(0) = \phi_i$$

$$U_i'(0) = \psi_i$$

## Лекция 18. Задача Коши для уравнения колебаний (продолжение). Построение решения с помощью формулы Даламбера

### Задача Коши для уравнения колебаний (продолжение)

В прошлой лекции задача была сведена к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, имеющей следующий вид:

$$\begin{cases} u_i''(t) + \lambda_i a^2 u_i(t) = f_i(t) \\ u_i(0) = \phi_i \end{cases} \quad t \in (0, +\infty)$$

Решение данной задачи:

$$u_i(t) = \int_0^t K_i(t-\tau) f_i(\tau) d\tau + \phi_i \cos a\sqrt{\lambda_i} t + \frac{\psi_i}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t$$

$$u(m, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) V_i(m)$$

Окончательное выражение для полного решения:

$$\begin{aligned} u(m, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \sin a\sqrt{\lambda_i}(t-\tau) f_i(\tau) d\tau V_i(m) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \cos a\sqrt{\lambda_i} t V_i(m) + \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t V_i(m) \\ u(m, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i}(t-\tau) f_i(\tau) d\tau V_i(m) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t \right) V_i(m) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t V_i(m) \end{aligned} \quad (18.1)$$

Для  $\phi_i$  коэффициент имеет следующий вид:

$$\phi_i = \int_D \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \phi(Q) V_i(Q) dV_Q$$

После подстановки получается следующее:

$$\begin{aligned} u(m, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i}(t - \tau) \frac{V_i(m)}{\|V_i(m)\|^2} \int_D f(Q, \tau) V_i(Q) dV_Q + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \int_D \phi(Q) V_i(Q) dV_Q \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t \right) V_i(m) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \int_D \psi(Q) V_i(Q) dV_Q \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t V_i(m) \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} u(m, t) = & \int_0^t d\tau \int_D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i}(t - \tau) \frac{V_i(m) V_i(Q)}{\|V_i(m)\|^2} f(Q, \tau) dV_Q + \\ & + \int_D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \frac{V_i(Q) V_i(m)}{a\sqrt{\lambda_i}} \frac{d}{dt} (\sin a\sqrt{\lambda_i} t) \phi(Q) dV_Q + \\ & + \int_D \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \frac{V_i(Q) V_i(m)}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i} t \psi(Q) dV_Q \end{aligned} \quad (18.3)$$

Вводится следующее обозначение (функция Грина):

$$G(m, Q, t - \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|V_i(m)\|^2} \frac{V_i(Q) V_i(m)}{a\sqrt{\lambda_i}} \sin a\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)$$

Тогда выражение для  $u(m, t)$  будет иметь следующий вид:

$$u(m, t) = \int_0^t d\tau \int_D G(m, Q, t - \tau) f(Q, \tau) dV_Q + \int_D \frac{dG}{dt}(m, Q, t) \phi(Q) dV_Q + \int_D G(m, Q, t) \psi(Q) dV_Q$$

Таким образом, последняя полученная формула дает решение задачи через функцию Грина для уравнения колебаний.

## Уравнение колебаний на неограниченной прямой

Рассматривается задача Коши (1), если  $-\infty < x < \infty$ :

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad \Omega = R^1(0; +\infty) \quad (18.4)$$

Для этой задачи необходимо искать классическое решение.

*Классическим решением задачи (18.4)* называется такая функция  $u(x, t)$ , которая дважды непрерывно дифференцируема в области  $\Omega$ , непрерывно дифференцируема по переменной  $t$  в  $\bar{\Omega}$ , удовлетворяет уравнению (18.4) и начальным условиям при  $t \rightarrow 0$ .

Так как задача линейная, ее можно свести к двум задачам: задаче для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями и задаче для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями. Необходимо построить решение для каждой задачи. Решение основной задачи необходимо искать в виде суммы двух задач.

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

$u_1(x, t)$  является решением задачи (2):

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, (x, t) \in \Omega \\ u_1(x, 0) = \phi(x), u_{1t}(x, 0) = \psi(x), x \in R' \end{cases} \quad (18.5)$$

$u_2(x, t)$  является решением задачи (3):

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \\ u_2(x, 0) = 0, u_{2t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (18.6)$$

## Построение решения с помощью формулы Даламбера

Уравнение характеристик имеет следующий вид для уравнения (18.5):

$$(dx)^2 - a(dt)^2 = 0$$

Данное уравнение распадается на два уравнения:



$$\begin{cases} dx - adt = 0 \\ dx + adt = 0 \end{cases}$$

Его решение даст уравнение характеристик, имеющее следующий вид:

$$\begin{cases} x - at = C_1 \\ x + at = C_2 \end{cases}$$

Вводятся новые переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= x - at \\ \eta &= x + at \end{aligned}$$

Тогда уравнение колебаний принимает следующий вид:

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$$

Данное выражение получено следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \\ u = u(x, t) \\ U = U(\xi, t) \end{cases}$$

$$dU = U_{\xi}d\xi + U_{\eta}d\eta = U_{\xi}(dx - adt) + U_{\eta}(dx + adt) = (U_{\xi} + U_{\eta})dx + a(U_{\eta} - U_{\xi})dt$$

$$\begin{cases} u_x = U_{\xi} + U_{\eta} \\ u_t = -a(U_{\xi} - U_{\eta}) \end{cases}$$

$$du_x = u_{xx}dx + u_{xt}dt$$

$$du_x = U_{\xi\xi}d\xi + U_{\xi\eta}d\eta + U_{\eta\xi}d\xi + U_{\eta\eta}d\eta$$

$$du_x = U_{\xi\xi}(dx - adt) + U_{\xi\eta}(dx + adt) + U_{\eta\xi}(dx - adt) + U_{\eta\eta}(dx + adt)$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

Уравнение, полученное после подстановки всех производных, примет следующий вид:

$$U_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$$

Отсюда следует:

$$U_{\eta}(\xi, \eta) = F(\eta)$$

$$U(\xi, \eta) = \int F(\eta) d\eta + f_1(\xi)$$

$$\int F(\eta) d\eta = f_2(\eta)$$

$$U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

Таким образом, было построено общее решение задачи (??).

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = -af_1'(x - at) + af_2'(x + at) = \psi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = \phi(\zeta) \\ -af_1(\zeta) + af_2(\zeta) = \psi(\zeta) \end{cases}$$

Нижнее уравнение интегрируется по переменной  $\zeta$ .

$$-f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(z) dz$$

Получается выражение для  $f_2(\zeta)$ :

$$f_2(\zeta) = \frac{1}{2a} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(z) dz + \frac{1}{2} \phi(\zeta)$$

Выражение для  $f_1(\zeta)$ :

$$f_1(\zeta) = \frac{-1}{2a} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(z) dz + \frac{1}{2} \phi(\zeta)$$

Найденный вид подставляется в общее решение:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \phi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{\zeta}^{x-at} \psi(z) dz + \frac{1}{2} \phi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{\zeta}^{x+at} \psi(z) dz$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

Построенная формула называется *формулой Даламбера*.

## Решение неоднородной задачи

Пусть начальные условия тоже будут неоднородные.

$$\int_D \frac{dF}{dt}(x, t) dx dt = - \oint_{\Gamma} F(x, t) dx$$

$$\int_D \frac{dF}{dx}(x, t) dx dt = - \oint_{\Gamma} F(x, t) dt$$

Решение задачи будет строиться рассматривая фазовый треугольник  $\mu$  (Рис. 18.1). Предполагается, что у задачи существует классическое решение.

Необходимо проинтегрировать исходное уравнение по данному фазовому треугольнику:

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = \int_{\Delta ABM} f(x, t) dx dt$$

$$\int_{\Delta ABM} u_{tt} dx dt = - \int_{AB} u_t dx - \int_{BM} u_t dx - \int_{MA} u_t dx$$

$$\int_{\Delta ABM} u_{xx} dx dt = \int_{AB} u_x dt + \int_{BM} u_x dt + \int_{MA} u_x dt$$

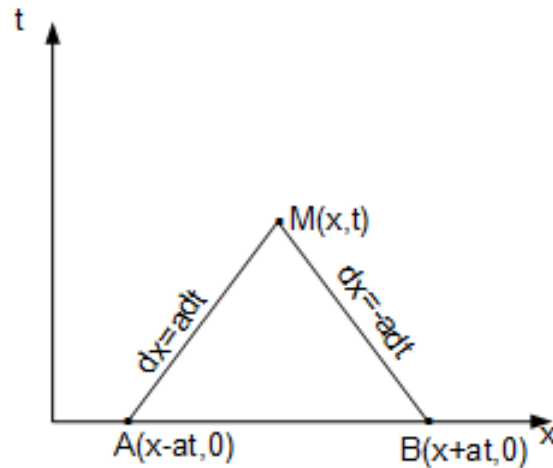


Рис. 18.1. Фазовый треугольник

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = - \int_{AB} \psi(x) dx + a \int_{BM} u_t dt - a \int_{MA} u + dt + a \int_{BM} u_x dx - a \int_{MA} u_x dx$$

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = - \int_{AB} \psi(x) dx + a \int_{BM} (u_t dt + u_x dx) - a \int_{MA} (u_t dt + u_x dx)$$

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = - \int_{AB} \psi(x) dx + a[u(M) - u(B) - u(A) + u(M)]$$

$$\int_{\Delta ABM} (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx dt = - \int_{AB} \psi(x) dx + 2au(M) - a[u(B) + u(A)] = \int_{\Delta ABM} f(x, t) dx dt$$

$$u(M) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2a} \int_{AB} \psi(x) dx + \frac{1}{2a} \int_{\Delta ABM} f(x, t) dx dt$$

Решение неоднородной задачи:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d(\xi) + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

Теперь необходимо рассмотреть существование и единственность решения. Существование очевидно, так как решение было построено. Оно единственно, так как любое из решений должно определяться той формулой, которая была получена согласно методу построения. Поэтому следует провести доказательство теоремы существования и единственности в случае неоднородного уравнения и нулевых начальных условий.

Задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), (x, t) \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, x \in R^1 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

Необходимо убедиться, что  $u$  дает классическое решение.

**Теорема 18.1.** Пусть  $f(x, t)$  непрерывно дифференцируема в области  $\Omega$ , тогда решение задачи существует, оно единственно и определяется формулой:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

Необходимо доказать, что построенное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям. Если подставить в уравнение  $t = 0$ , то получится ноль.

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau [f(x + a(t - \tau), \tau) - f(x - a(t - \tau), \tau)]$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t [f'_x(x + a(t - \tau), \tau) - f'_x(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right\} \Big|_{\tau=t} + \frac{1}{2a} \int_0^t [af(x + a(t - \tau), \tau) + af(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_{II}(x, t) = \frac{1}{2}f(x, t) + \frac{1}{2}f(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t [f'_x(x + a(t - \tau, \tau)) - f'_x(x - a(t - \tau, \tau))] d\tau$$

Теперь необходимо сравнить полученные выражения. Если их сравнить и подставить результаты в уравнение Даламбера, то получается, что уравнение очевидно выполнено. И получается, что  $f$  имеет все необходимые производные. Таким образом, теорема существования доказана. Единственность определяется тем, что все возможные решения были построены методом интегрирования по фазовому треугольнику.

## Лекция 19. Полубесконечный участок

### Уравнение теплопроводности на бесконечном участке в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y) \end{cases}$$

при  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ .

Решение ищется в следующем виде:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k, \omega) e^{ikx + i\omega y} e^{-a^2 k^2 t - a^2 \omega^2 t}$$

Преобразование Фурье в двумерном случае:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(k, \omega) e^{ikx + i\omega y} dk d\omega \\ A(k, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) e^{-ik\xi - i\omega\eta} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$A$  подставляется в двойной интеграл, получается:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi) + i\omega(y-\eta)} e^{-a^2(k^2 t + \omega^2 t)} dk d\omega \right\} d\xi d\eta$$

То, что стоит в фигурных скобках - функция источника.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta, t) d\xi d\eta \\ G &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi) - a^2 k^2 t} dk \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(y-\eta) - a^2 \omega^2 t} d\omega \\ G(x, y, \xi, \eta, t) &= G_0(x, \xi, t) - G_0(y, \eta, t) \end{aligned}$$

$$G_0(x, y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

Таким образом, функция Грина в двухмерном случае – это произведение одномерных функций точного источника по двум направлениям. В трехмерном случае будет тот же результат.

## Полубесконечный участок. Однородные задачи в одномерном случае $R^1$

Это изучение процессов вблизи одной из границ, вторая граница далеко и не сказывается.

### 1-я краевая задача

Рассматривается первая краевая задача:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x < \infty$$

Имеется некоторая функция; необходимо, чтобы в нуле все время был ноль. Следует продолжить начальные условия нечетным образом. Вместо решения данной задачи необходимо решать задачу на бесконечном участке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad f - \infty < x < \infty$$

$\Phi$  необходимо взять так, чтобы на бесконечной полуоси решение двух задач совпадало.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x > 0 \\ -\phi(x), x < 0 \end{cases}$$

Решение второй задачи уже известно:



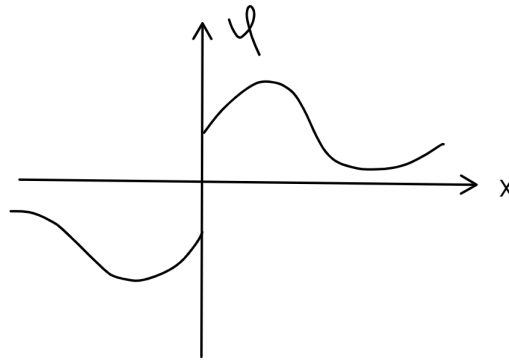


Рис. 19.1. На бесконечном участке

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) G_0(x, \xi, t) d\xi$$

$$u = \int_0^{\infty} \phi(\xi) G_0(x, \xi, t) d\xi + \int_{-\infty}^0 [-\phi(-\xi)] G_0(x, \xi, t) d\xi$$

$$u = \int_0^{\infty} \phi(\xi) [G_0(x, \xi, t) - G_0(x, -\xi, t)] d\xi$$

Выражение в явном виде:

$$u = \int_0^{\infty} \phi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]$$

Предполагается, что  $x = 0$ , тогда экспоненты в квадратных скобках одинаковые, значит, найденное решение в нуле равно нулю. Построенное решение удовлетворяет всем условиям первой задачи:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \phi(\xi) G_1(x, \xi, t) d\xi$$

$$G_1(x, \xi, t) = G_0(x, \xi, t) - G_0(x, -\xi, t)$$

## 2-я краевая задача

Рассматривается вторая краевая задача на участке от нуля до бесконечности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \frac{du}{dx}(0, t) = 0 \end{cases}$$

Имеется некоторая функция, ее необходимо продолжить четно, тогда, в силу симметрии, в нуле всегда будет ноль.

Вместо поставленной задачи, рассматривается задача на бесконечном участке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x > 0 \\ \phi(-x), x < 0 \end{cases}$$

Результат будет тот же, но поменяется знак.

$$u = \int_0^{\infty} \phi(\xi) [G_0(x, \xi, t) + G_0(x, -\xi, t)] d\xi$$

$$u = \int_0^{\infty} \phi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]$$

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \phi(\xi) G_2(x, \xi, t) d\xi$$

$$G_2(x, \xi, t) = G_0(x, \xi, t) + G_0(x, -\xi, t)$$

Таким образом, уравнение и все условия выполнены так же, как и для прошлой задачи.

$$\frac{du}{dx} = \int_0^{\infty} \phi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ -\frac{(x-\xi)}{2a^2 t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{-(x+\xi)}{2a^2 t} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

### 3-я краевая задача

Рассматривается третья краевая задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \left. \left( \frac{du}{dx} - hu \right) \right|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Задача рассматривается на бесконечном участке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

Необходимо подобрать  $\Phi$  так, чтобы были выполнены оба условия. Решение ищется в следующем виде:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) G_0(x, \xi, t) d\xi$$

При положительных  $x$   $\Phi$  должно быть равно  $\phi$ . Рассматривается следующая комбинация:

$$\begin{aligned} u_x - hu &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) [G_{0x} - hG_0] d\xi \\ G_{0x} &= G_0 \xi \\ u_x - hu &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) [G_0 \xi - hG_0] d\xi \\ u_x - hu &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0 [\Phi' - h\Phi] d\xi \end{aligned}$$

Необходимо, чтобы на границе комбинация  $u_x - hu$  была равна нулю. Для этого необходимо, чтобы выражение  $\Phi' - h\Phi$  было нечетно относительно нуля.

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} - h\Phi(\xi) = -\frac{d\phi(-\xi)}{d\xi} - h\phi(-\xi) \\ \Phi(0) = \phi(0) \end{cases}$$

$$\Phi(\xi) = \phi(0)e^{-h\xi} + \int_0^{\xi} e^{h(\xi-\alpha)} (-1)(\phi'(-\alpha) - h\phi(-\alpha)) d\alpha$$

$$\Phi(-\xi) = \phi(0)e^{-h\xi} + \int_0^{\xi} e^{h(\xi-\alpha)} (\phi'(\alpha) - h\phi(\alpha))' d\alpha$$

Выражение интегрируется по частям:

$$\Phi(-\xi) = \phi(0)e^{h\xi} + e^{h(\xi-\alpha)} \phi(\alpha) \Big|_0^{\xi} - 2h \int_0^{\xi} \phi(\alpha) e^{h(\xi-\alpha)} d\alpha$$

$$\Phi(-\xi) = \phi(\xi) - 2h \int_0^{\xi} \phi(\alpha) e^{h(\xi-\alpha)} d\alpha$$

Решение задачи будет такое:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \phi(\xi) G_0(x, \xi, t) d\xi - \int_0^{\infty} \phi(\xi) G_0(x, -\xi, t) d\xi + \int_0^{\infty} G_0(x, -\xi, t) \left[ 2h \int_0^{\xi} \phi(\alpha) e^{h(\xi-\alpha)} d\alpha \right]$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} G_3(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi$$

$$G_3(x, \xi, t) = G_0(x, \xi, t) - G_0(x, -\xi, t) - 2h \int_{\xi}^{\infty} G_0(x, -\alpha, t) e^{h(\alpha-\xi)} d\alpha$$

## Неоднородные задачи в одномерном случае. Принцип Дюамеля

### 1-я краевая задача

Рассматривается первая краевая задача на полубесконечном участке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \end{cases}$$

Решать такую задачу следует используя принцип Дюамеля. Он позволяет решать задачи с неоднородным граничным условием при умении решать задачи с единичным граничным условием.

Рассматривается задача с единичным граничным условием:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(x, 0) = 0 \\ U(0, t) = 1 \end{cases}$$

Пусть  $\mu$  имеет некоторый вид (Рис. 19.2).  $\mu$  берется в виде столбиков в момент  $\tau_i$  в момент  $t$ .

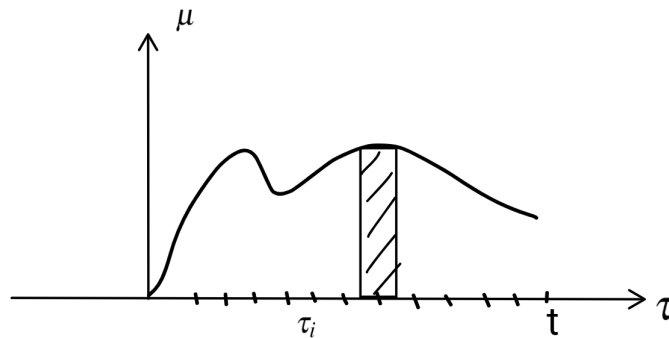


Рис. 19.2. Функция  $\mu$  и ее разбивка

Тогда  $\mu$  можно представить как положительную и отрицательную единицу (Рис. 19.3), и их сумма даст единицу.

$$u(x, t) \sim \sum_{i=1}^N [U(x, t - \tau_i) - U(x, t - (\tau_i + \Delta\tau))] \mu_i$$

$$u(x, t) = - \sum_i \frac{U(x, t - (\tau_i + \Delta\tau)) - U(x, t - \tau)}{\Delta\tau} \mu(\tau_i) \Delta\tau$$

$$u(x, t) = - \int_0^t \mu(\tau) \frac{dU}{d\tau}(x, t - \tau) d\tau$$

Выражение, написанное с помощью принципа Дюамеля:

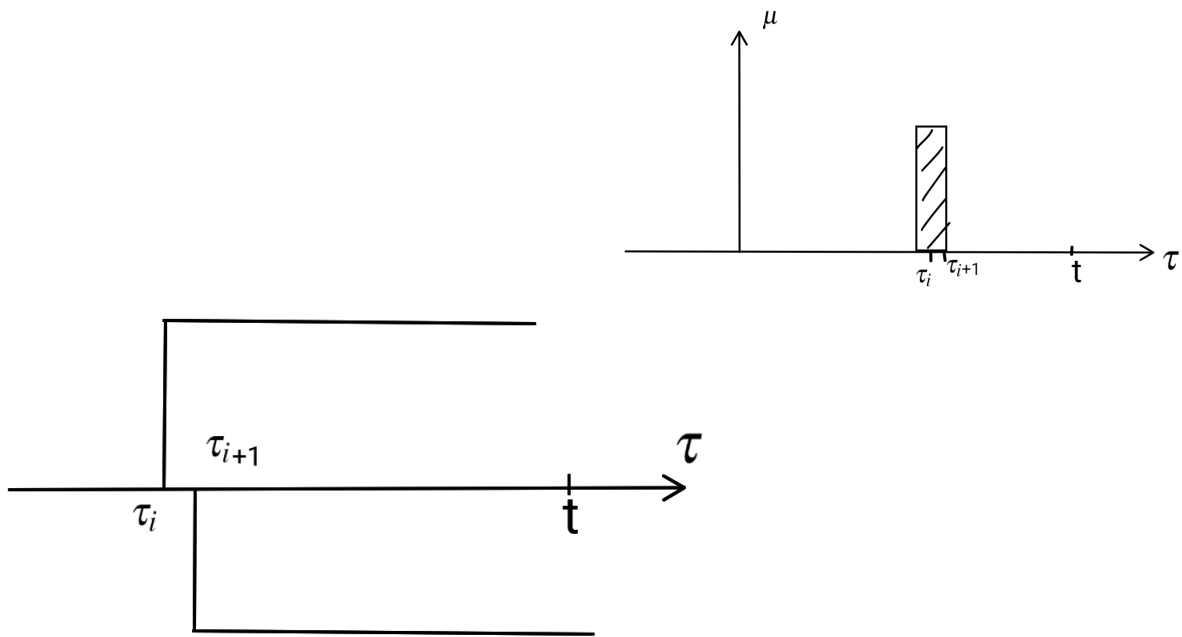


Рис. 19.3.  $\mu$  в виде положительной и отрицательной единиц

$$u(x, t) = - \int_0^t \mu(\tau) \frac{d}{d\tau} U(x, t - \tau) d\tau$$

Данный принцип дает ответ для любых линейных уравнений с граничным условием. Теперь необходимо получить явный ответ. Берется  $w = 1 - U$ , тогда:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 1 \end{cases}$$

При  $-\infty < x < \infty$ :

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} \\ V(x, 0) = \begin{cases} T_1, x > 0 \\ T_2, x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$V(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$V = \Phi$$

$$U = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \frac{x}{4at^{\frac{3}{2}}}$$

Решение первой задачи:

$$u(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

Необходимо проверить, что этот ответ удовлетворяет всем условиям первой задачи. При  $t = 0$  получается ноль, значит первое условие выполнено. Проверяется второе граничное условие при  $x \rightarrow 0$ .

Замена переменных:

$$\frac{xd\tau}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = dz$$

$$\tau = t - \frac{x}{2az}$$

Получается:

$$u(x, t) = \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \mu\left(t - \frac{x}{2az}\right) e^{-z^2} dz \frac{2}{\pi}$$

$$u(x, t) = \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mu(t) e^{-z^2} dz = \mu(t)$$

Таким образом, было проверено второе граничное условие.

## 2-я краевая задача

Вторая краевая задача решается иначе.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{du}{dx}(0, t) = v(t) \end{cases}$$

Рассматривается бесконечный участок. Необходимо подобрать такой источник  $f$ , который в обе стороны дает одинаковые потоки тепла (Рис. 19.4).

$$q = -k \frac{du}{dx}$$
$$c_t = \frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) + F$$
$$\frac{k}{c\rho} = a^2$$
$$\frac{F}{c\rho} = f$$

Получается следующая задача на участке  $-\infty < x < \infty$ :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - 2a^2 \delta(0) v(t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

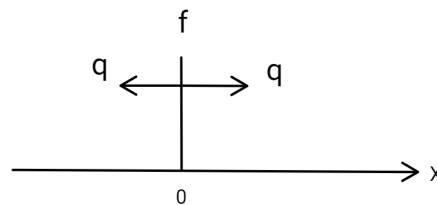


Рис. 19.4. Потоки тепла



## Лекция 20. Задача колебаний на бесконечной прямой

Задача колебаний на бесконечной прямой с начальными условиями  $u(x, 0) = \phi(x)$  и  $u_t(x, 0) = \psi(x)$

В прошлой лекции рассматривались задачи колебаний на бесконечной прямой.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

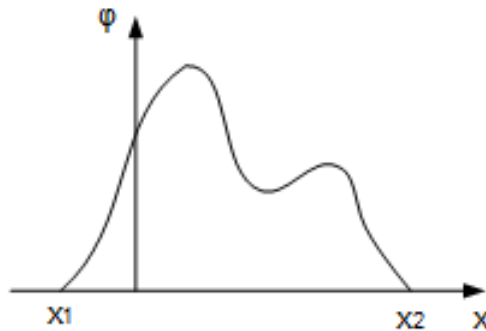


Рис. 20.1. Локальная функция  $\phi(x)$

Было найдено общее решение уравнения:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

Имеется неизвестная функция  $f$ , и есть два дополнительных условия  $\phi$  и  $\psi$ .

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

Это формула Даламбера. Она решает и вопрос существования, и вопрос единственности. Если  $\phi$  и  $\psi$  достаточно гладкие, то можно проверить, дифференцируя второе выражение, что все условия задачи выполнены.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

где  $\phi(x)$  – некоторая локальная функция (Рис. 20.1). Для решения задачи необходимо воспользоваться характеристическим треугольником. Рассматривается, как меняется решение в некоторой точке  $x$  с помощью точек при основании треугольника. Решение будет отлично от нуля в заштрихованных областях (Рис. 20.3).

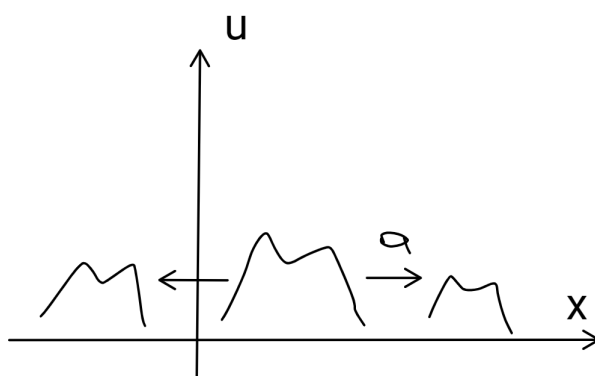


Рис. 20.2. Интерпретация формулы Даламбера – половинки начального возмущения разбегаются в разные стороны

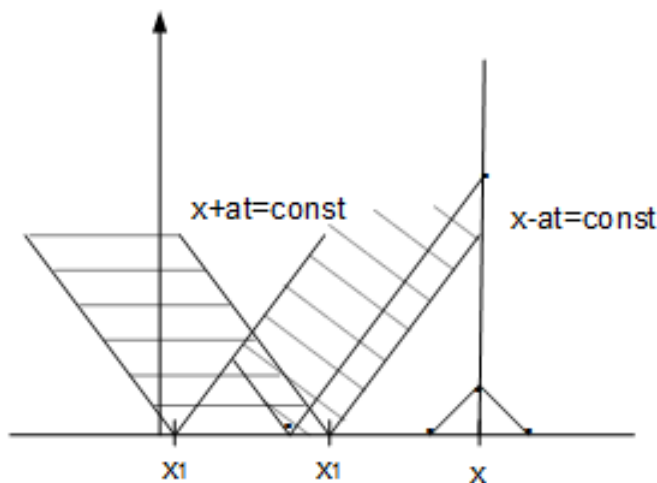


Рис. 20.3. Характеристический треугольник

### Задача с начальными условиями $u(x, 0) = 0$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$

Теперь рассматривается задача с другим начальным условием:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

При малом  $t$  интегрирование идет по основанию фазового треугольника. При большем  $t$  область треугольника захватывает область начальных возмущений. Интегрирование идет по захваченному участку. С ростом  $t$  область захвата увеличивается. При очень больших  $t$  интегрируется весь участок начальных возмущений, а далее ничего не меняется.

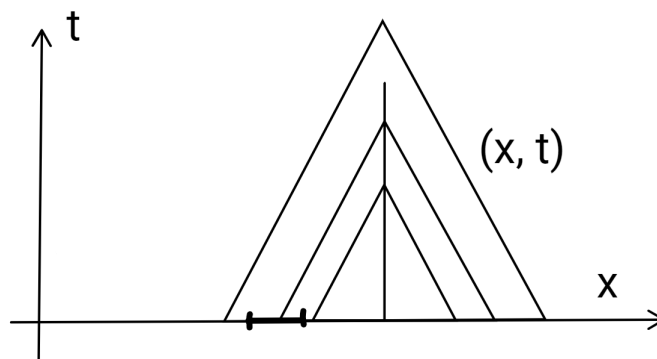


Рис. 20.4. Случай задачи с  $u(x, 0) = 0$  и  $u_t(x, 0) = \psi(x)$

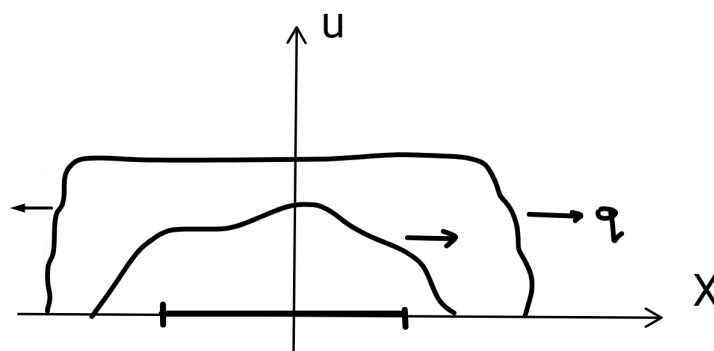


Рис. 20.5. 2 фронта, бегущих со скоростью  $a$

## Функция точечного источника (единичного импульса) для уравнения колебаний

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \delta(x - x_0) \end{cases}$$

Решение - формула Даламбера.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta(\alpha - x_0) d\alpha$$

Если участок интегрирования захватывает  $\delta$  функцию, то ответ будет - единица, а если нет - будет ноль.

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x - x_0|)$$
$$H(\alpha) = \begin{cases} 0, \alpha < 0 \\ 1, \alpha > 0 \end{cases}$$

Функция имеет следующий вид (Рис. 20.6) .

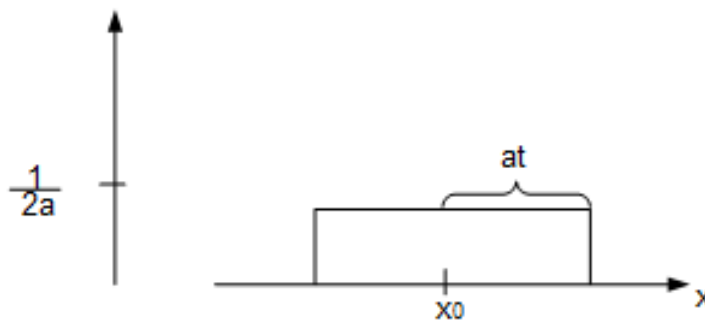


Рис. 20.6. Функция точечного источника для задачи колебаний

## Эквивалентность формулы Даламбера и решения с функцией точечного источника на примере однородной и неоднородной задач колебаний

Ранее рассматривалась следующая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(m, t) \\ u(m, 0) = \phi(m) \\ u_t(m, 0) = \psi(m) \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Ответ дается с помощью функции точечного источника:

$$u(m, t) = \int_D [\psi(p)G(m, p, t) + \phi(p)\frac{dG}{dt}(m, p, t)]dV_p + \int_0^t \int_D f(p, \tau)G(m, p, t - \tau)dV_p d\tau$$

Формула Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

Необходимо рассмотреть, совпадает ли формула Даламбера с формулой, полученной для конечной области при соответствующем изменении функции точечного источника.

Функция точечного источника:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x - \xi|)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha) \frac{1}{2a} H(at - |x - \xi|) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha$$

$$\frac{d}{dt} H(at - (x - \xi)) = \delta(at - (x - \xi))a$$

$$\frac{d}{dt} H(at - (\xi - x)) = \delta(at - (\xi - x))a$$

Формула Даламбера имеет тот же смысл, что и формула с функцией Грина в общем случае.

Рассматривается задача с неоднородным уравнением:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$I_{3a} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \tau) \frac{1}{2a} H(a(t - \tau) - |x - \xi|) d\xi d\tau$$

Предполагается следующий вид для  $u$ :

$$u = \int_0^t \left\{ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right\} d\tau$$

$$u(x, 0) = 0$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t [af(x + a(t - \tau), \tau) + af(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_{tt} = f(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t [f_x(x + a(t - \tau), \tau) - f_x(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_x = \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) - f(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2a} \int_0^t [f_x(x + a(t - \tau), \tau) - f_x(x - a(t - \tau), \tau)] d\tau$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

Таким образом, было проверено, что для того, чтобы найти решение неоднородного уравнения, необходимо воспользоваться общей формулой функции точечного источника и проверить все выкладки.

Если задача линейная, то она представляется как сумма более простых задач. Если взять задачу со всеми неоднородностями одновременно:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

то необходимо взять формулу Даламбера и прибавить вклад неоднородного решения. Ответ общей задачи:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right\} d\tau$$

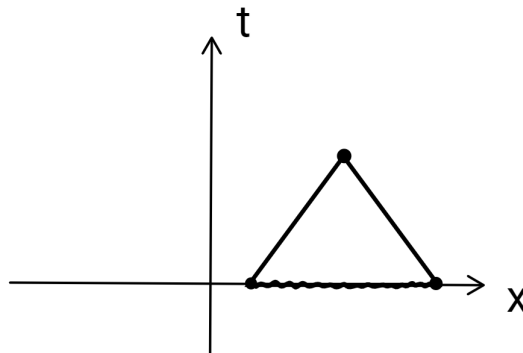


Рис. 20.7. Фазовая плоскость. Точка  $xt$  чувствует только то, что внутри треугольника

### Задача колебаний на полубесконечном участке (с однородными граничными условиями)

Рассматривается задача с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

При  $at < x$ , то решение будет такое:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right\} d\tau$$

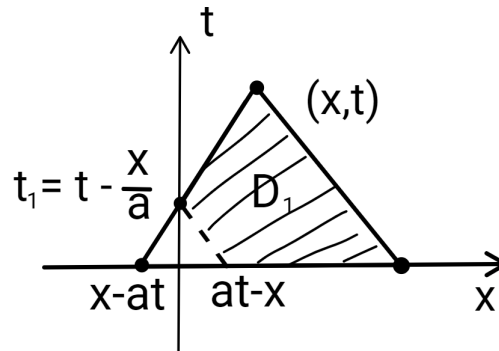


Рис. 20.8. Область  $D_1$

При  $at > x$ , решение такое:

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{t-\frac{x}{a}}^t \frac{x - a(t - \tau)}{x + a(t - \tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-\tau)-x}^{t-\frac{x}{a}x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\} \quad (20.1)$$

Если задача со вторым граничным условием:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

Продолжать решение необходимо четным образом, получается следующее выражение при  $t > \frac{x}{a}$ :



$$u(x, t) = \frac{\phi(x + at) + \phi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + 2 \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

Итак, в случае однородных граничных условий делается четное или нечетное продолжение в зависимости от граничных условий исходной задачи.

### Задача с неоднородными граничными условиями

Рассматривается задача с неоднородными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0, t) = \mu(t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Общий вид решения:

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

Решение строится в соответствии с уходящей от границы волны.

$$u(x, t) = f(x - at)$$

При  $t = 0$  и  $\xi > 0$  получается

При  $x = 0$  получается:  $\mu(t) = f(-at)$ . Значит при  $\xi < 0$ :

$$f(\xi) = \mu\left(-\frac{\xi}{a}\right)$$

Получается такой ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, t < \frac{x}{a} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

Решение повторяет граничные условия с запаздыванием на время хода.

Рассматриваются второе и третье граничные условия.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \\ (u_x - hu)|_{x=0} = v(t) \end{cases}$$

Проще всего искать решение в виде уходящей от границы волны.

$$u = f(x - at)$$

При  $t = 0$  и  $\xi > 0 \rightarrow f(\xi) = 0$ .

При  $x = 0$  и  $\xi < 0 \rightarrow f'(\xi) - hf(\xi) = -v\left(-\frac{\xi}{a}\right)$ .

Решение задачи:

$$f(\xi) = \int_0^{\xi} e^{h(\xi - \alpha)} \left(-v\left(-\frac{\alpha}{a}\right)\right) d\alpha$$

$$f(\xi) = -ae^{h\xi} \int_0^{-\frac{\xi}{a}} e^{haz} v(z) dz$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, t < \frac{x}{a} \\ -ae^{h(x-at)} \int_0^{\frac{t-x}{a}} e^{haz} v(z) dz, t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

### Задача колебаний в бесконечной области (радиально-симметричный случай)

Имеется бесконечная область  $R^3$ , рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) + f(r, t) \\ u(r, 0) = \phi(r) \\ u_t(r, 0) = \psi(r) \end{cases}$$

Рассматривается радиально-симметричный случай. Решение ищется так:

$$u(r,t) = \frac{V(r,t)}{r}$$

Получается:

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{rr} + rf(r,t) \\ V(r,0) = \phi(r)r = \phi_1(r) \\ V_t(r,0) = \psi(r)r = \psi_1(r) \\ V(0,t) = 0 \end{cases}$$

## Лекция 21. Формула Пуассона

### Формула Кирхгофа (общий случай задачи колебаний в бесконечной области)

Формула Кирхгофа – это некоторый аналог формулы Грина. Она позволяет вычислить значение в точке, если известно значение на окружающей ее поверхности.

Рассматривается задача в неограниченном трехмерном пространстве:

Необходимо найти решение в некоторой точке  $u(m_0, t_0)$  или  $u(m_0, \Theta_0)$ .

Вводится запаздывающее время.

$$\tau = \Theta_0 - \Theta + rm_0m$$

$$u(m, t) = U(m, \tau)$$

Вычисляются производные:

$$\frac{du}{d\Theta} = \frac{dU}{d\Theta}$$

$$\frac{d^2u}{d\Theta^2} = \frac{d^2U}{d\Theta^2}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{dU}{dr} + \frac{dU}{d\tau} 1$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2U}{dr^2} + 2 \frac{d^2U}{drd\tau} + \frac{d^2U}{d\tau^2}$$

После подстановки получается следующее выражение:

$$U_{\tau\tau} = u_{rr} + \frac{2}{r}U_r + \frac{1}{r^2}\Delta_\phi u + F$$

$$U_{\tau\tau} = U_{rr} + 2U_{rr} + U_{\tau\tau} + \frac{2}{r}(U_r + U_\tau) + \frac{1}{r^2}\Delta_\phi U + F$$

$$U_{\tau\tau} = \Delta U + 2U_{r,\tau} + \frac{2}{r}U_\tau + F + u_{\tau\tau}$$

$$\Delta U = - \left\{ \frac{2}{r}(ru_\tau)_r + F \right\}$$

Применяется третья формула Грина:

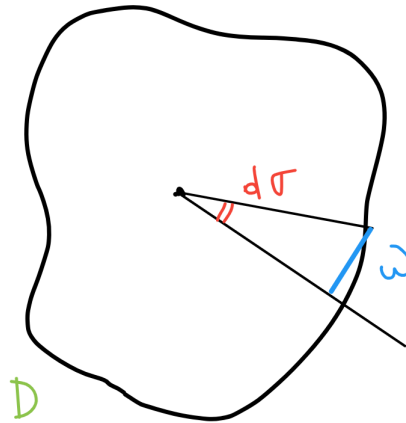


Рис. 21.1. Область  $D$ , разбитая на интегралы  $D\sigma$

$$4\pi U(m_0, 0) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma + 2 \int_D \frac{\frac{2}{r} (rU_{\tau})_r dV}{r} + 2 \int \frac{F}{r^2} dV$$

Необходимо посчитать следующий интеграл:

$$\int_D \frac{(rU_{\tau})_r}{r^2} dV = \int_{\Omega} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R(\omega)} (rU_{\tau})_r dr \right\} d\omega$$

$$\int_D \frac{(rU_{\tau})_r}{r^2} dV = \int_{\Omega} rU_{\tau} \Big|_{R(\omega)} d\omega$$

$$d\sigma \frac{dr}{dn} = r^2 d\omega$$

Тогда получается:

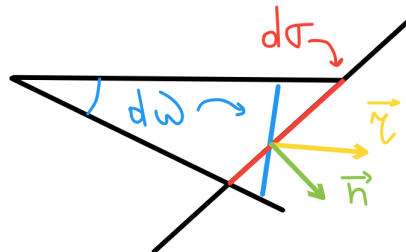


Рис. 21.2. Соотношения  $d\omega$  и  $d\sigma$

$$\int_D \frac{(ru_\tau)_r}{r^2} dV = \int_\Sigma \frac{u_\tau}{r} \frac{dr}{dn} d\sigma$$

$$4\pi U(m_0, 0) = \int_\Sigma \left[ \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} - u \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2uU_\tau}{r} \frac{dr}{dn} \right] \Big|_{\tau=\Theta-\Theta_0+r_{mp}=0} d\sigma_p + \int_D \frac{F}{r} dV$$

Теперь от  $U$  надо перейти к  $u$ .

$$u(m, \Theta) = U(m, \tau)$$

$$\tau = \Theta - \Theta_0 + r$$

$$\tau = 0$$

$$\Theta = \Theta_0 - r$$

$$\frac{dU}{dn} = \frac{du}{dn} - \frac{du}{d\Theta} \frac{dr}{dn}$$

Получается следующее выражение:

$$4\pi u(m_0, t_0) = \int_\Sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{u_t}{ra} \frac{dr}{dn} \right\} \Big|_{t=t_0-\frac{r}{a}} d\sigma + \frac{1}{a^2} \int_D \frac{f(p, t_0 - \frac{rm_0 p}{a})}{rm_0 p} dV_p$$

Таким образом, была получена формула Кирхгофа.

## Формула Пуассона

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(m, t) \\ u(m, 0) = \phi(m) \\ u_t(m, 0) = \psi(m) \end{cases}$$

Формула Кирхгофа не позволяет дать ответ на поставленную задачу. Необходимо взять такую поверхность, чтобы момент  $t$  на ней соответствовал нулю.

$$4\pi u(m, t) = \int_{S_m^{at}} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{r^2} + \frac{\psi}{ra} \right\} d\sigma + \frac{1}{a^2} \int_{K_m^{at}} \frac{f(p, t - \frac{rmp}{a})}{rmp} dV_p$$

$$\int_S \left( \frac{r}{r} + \frac{\phi}{r^2} \right) d\sigma = \int_{\Omega} (\phi_r r + \phi) d\omega$$

$$\int_{\Omega} (\phi_r r + \phi) d\omega = \frac{d}{dr} \int_{\Omega} (\phi r) d\omega = \frac{d}{dr} \int_S \frac{\phi}{r} d\sigma$$

Формула Пуассона:

$$u(m, t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \int_{S_m^{at}} \frac{\psi}{r} d\sigma + \frac{d}{dt} \int_{S_m^{at}} \frac{\phi}{r} d\sigma \right\} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K_m^{at}} \frac{f(p, t - \frac{rmp}{a})}{rmp} dV_p$$

Полученная формула Пуассона, в некотором смысле, формула Даламбера. Ее тоже можно представить в виде обычной формулы функции точечного источника.

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u \\ u(m, 0) = 0 \\ u_t(m, 0) = \sigma(m, m_0) \end{cases}$$

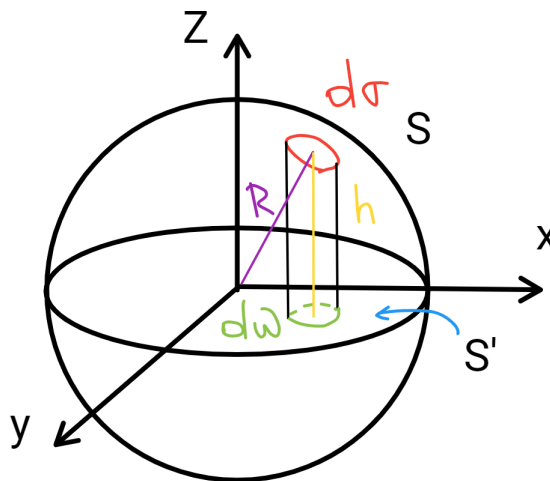


Рис. 21.3. Сфера S

$$G(m, m_0, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\sigma(at - R_{mm_0})}{R_{mm_0}}$$

$$u = \int_{R_3} \left( G\psi + \frac{dG}{dt} \phi \right) dV + \int_{R_3} G f dV$$

## Метод спуска. Формула Пуассона в случае $R^2$

Методом спуска к числу координат можно получить формулу, которая позволяет решить задачу Коши в двухмерном случае в неограниченном пространстве.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{cases}$$

Берется точка  $m$ , в которой надо найти решение. Согласно формуле Пуассона необходимо взять интеграл по сфере.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{R} &= \frac{d\omega}{h} \\ u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a} \int_{S_m^{at}} \frac{\psi(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi a} \frac{d}{dt} \int_{S_m^{at}} \frac{\phi(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{S_m^{at}} \frac{f(\xi, \eta, t - \tau) d\tau d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} \end{aligned} \quad (21.1)$$

## Случай $R^1$ - формула Даламбера

Рассматривается одномерный случай на бесконечном участке:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Берется круговой пояс (Рис. 21.4):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi dl}{R} &= \frac{d\sigma}{R} = 2\pi dx \\ \frac{dx}{dl} &= \frac{\rho}{R} \end{aligned}$$



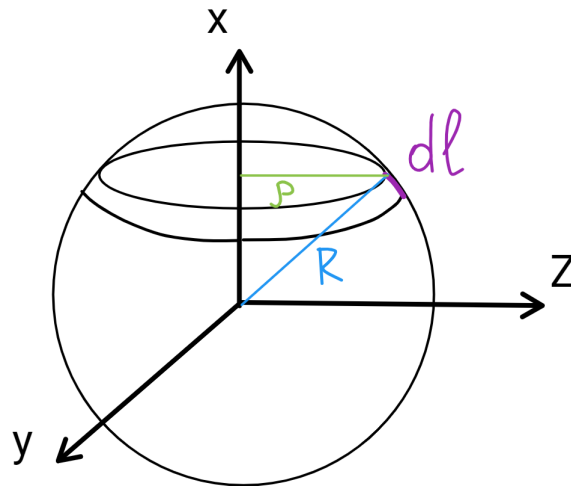


Рис. 21.4. Круговой пояс

Из формулы Пуассона получается:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \frac{d}{dt} \int_{x-at}^{x+at} \phi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

### Случай финитного начального условия

Рассматривается случай, когда начальное условие финитное. Пусть точка наблюдения находится вне области. Чтобы получить решение в точке, необходимо окружить ее радиусом  $at$  (Рис. 21.5).

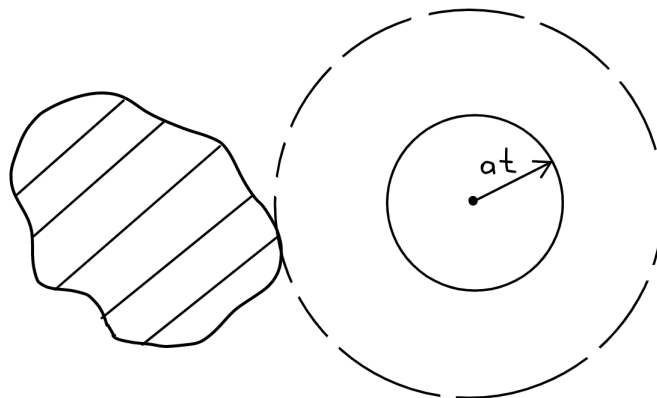


Рис. 21.5. Начальные условия и зона интегрирования (условие финитное)

Зона начальных возмущений при времени  $t$  займет concentricкую круговую область (полосу) по принципу Гюйгенса (Рис. 21.6). Каждая точка зоны возбужде-

ния создает волну. И если просуммировать, то получится полоса. В трехмерном случае существуют передний фронт и задний фронт волны, образованный локальным возмущением.

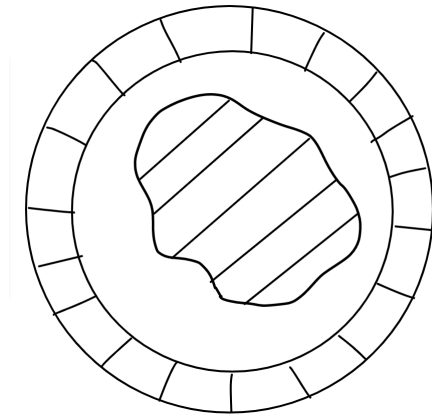


Рис. 21.6. Зона начальных возбуждений и концентрическая полоса для  $t$  (трехмерный случай)

В двухмерном случае, согласно формуле Пуассона, необходимо интегрировать не по сфере, а по кругу. Круг расширяется захватывая начальные условия, а начальные условия остаются внутри круга, т.е. у волны есть передний фронт, но нет заднего (Рис. 21.5). Принцип Гюйгенса не действует.



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ