ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

БОГОЛЮБОВ
АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Оглавление

Введение 5

I Специальные функции математической физики 6

1 Задача Штурма-Лиувилля 7
1.1 Малые колебания ненагруженной струны 7

2 Уравнение цилиндрических функций и свойства его решения 14
2.1 Уравнение специальных функций. Лемма о поведении решений в особых точках 14
2.2 Функции Бесселя 16
2.2.1 Уравнение Бесселя 16
2.2.2 Основные свойства Г-функции (гамма-функции) 16
2.3 Построение функции Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Метод Фробениуса 17
2.4 Рекуррентные формулы 19
2.5 Цилиндрические функции полуцелого аргумента 20
2.6 Интегральное представление функций Бесселя 21
2.7 Функции Ханкеля 23
2.8 Связь между функциями Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана . . 26
2.9 Линейная независимость промежуточных функций 27
2.10 Асимптотика цилиндрических функций 28
2.11 Собственные функции круга 30
2.12 Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента 32

3 Классические ортогональные полиномы 35
3.1 Определение классических ортогональных полиномов 35
3.2 Свойства КЛОП 35
3.3 Частные случаи КЛОП 41
3.3.1 Полиномы Якоби 41
3.3.2 Полиномы Лежандра 42
3.3.3 Полиномы Лагерра 44
3.3.4 Полиномы Эрмита 46
3.4 Присоединенные функции Лежандра 47
3.5 Сферические функции 48

3.6 Шаровые функции 49
3.7 Собственные функции шара 50

4 Замкнутые и полные системы ортогональных функций 52
4.1 Вспомогательные положения анализа 52
4.2 Примеры ортогональных систем функций 56
4.2.1 Полиномы Лежандра 56
4.2.2 Система присоединенных функций Лежандра 57
4.2.3 Система сферических функций 61
4.2.4 Системы полиномов Эрмита и Лагерра 62

II Уравнения математической физики 63

5 Классификация уравнений в частных производных второго порядка 64
Введение 64
5.1 Классификация дифференциальных уравнений в частных производных II порядка в случае двух переменных (x, y) 65
5.2 Преобразование дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных 68
5.3 Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных 70

6 Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач 74
6.1 Физические задачи, связанные с волновыми процессами 74
6.1.1 Малые поперечные колебания струны 74
6.1.2 Малые продольные колебания стержня 76
6.1.3 Случай многих переменных 77
6.2 Постановка краевых задач 78
6.3 Уравнение теплопроводности 79
6.4 Стационарные процессы 81
6.4.1 Уравнение теплопроводности 81
6.4.2 Стационарные задачи электродинамики 81
6.4.3 Уравнение колебаний 82
6.4.4 Установившиеся электромагнитные колебания 82

7 Метод разделения переменных (метод Фурье) 84
7.1 Постановка общей начально-краевой задачи 84
7.2 Первая и вторая формулы Грина 85
7.3 Задача I. (с однородными уравнением и ГУ) 86
7.4 Задача II. (с однородными начальными и граничными условиями) . 89
7.5 Задача III. (с однородными уравнением и начальными условиями) . 91

8 Уравнения эллиптического типа. Гармонические функции **92**
8.1 Определение 92
8.2 Третья формула Грина 92
8.3 Основные свойства гармонических функций 94
8.4 Принцип максимумов 96
8.5 Внутренние краевые задачи 97
8.5.1 Задача Дирихле 97
8.5.2 Общая задача 98
8.6 Внешние краевые задачи 99
8.6.1 Понятие функции, регулярной на бесконечности 99
8.6.2 Внешняя задача Дирихле 101
8.6.3 Метод барьерной функции 102
8.6.4 Внешняя задача Неймана 103
8.7 Функция Грина 104
8.7.1 Фундаментальное решение 104
8.7.2 Функция Грина задачи Дирихле 107
8.7.3 Свойства функции Грина 108
8.7.4 Функция Грина задачи Неймана 109

9 Уравнения параболического типа **111**
9.1 Постановка начально-краевой задачи 111
9.2 Принцип максимума 111
9.3 Задача Дирихле 113
9.4 Формальное построение решения задачи III. Функция источника 114
9.5 Существование решения задачи теплопроводности на отрезке (задачи I) 116
9.6 Задача Коши для уравнения теплопроводности 117
9.6.1 Постановка задачи 118
9.6.2 Теорема единственности 118
9.6.3 Формальное построение решения. Интеграл Пуассона 119
9.6.4 Свойства фундаментально решения 120
9.6.5 Теоремы устойчивости 122
9.7 Существование классического решения для однородного уравнения теплопроводности 123
9.8 Задача Коши в пространстве 125
9.9 Уравнение теплопроводности на полупрямой 127
9.9.1 Постановка задачи: 127
9.9.2 Однородные граничные условия 127
9.9.3 Физический смысл 128
9.9.4 Неоднородные граничные условия Дирихле. Принцип Дюамеля 128

10 Уравнения гиперболического типа **131**
10.1 Постановка начально-краевой задачи 131
10.2 Теорема единственности 131
10.3 Формальное построение решения задачи методом Фурье 132
10.4 Существование классического решения на отрезке 133
10.5 Физический смысл функции Грина 134
10.6 Уравнение колебаний на прямой 135
10.7 Фазовая плоскость. Физическая интерпретация решения 136
10.8 Метод интегрирования по фазовой плоскости 138
10.9 Уравнение колебаний на полуограниченной прямой 139
10.9.1 Постановка задачи 139
10.9.2 Задача Дирихле 139
10.9.3 Задача Неймана 140
10.10 Распространение краевого решения 140
10.11 Распространение волн в пространстве 141
10.11.1 Сферически-симметричный случай 141
10.11.2 Несимметричный случай. Формула Кирхгофа 142
10.11.3 Формула Пуассона 143
10.11.4 Метод спуска Адамара[1] 145
10.11.5 Принцип Гюйгенса 146

11 Уравнения эллиптического типа (продолжение) **148**
11.1 Теория потенциалов 148
11.1.1 Равномерная сходимость интегралов 148
11.1.2 Логарифмический потенциал 148
11.1.3 Поверхностный потенциал 155
11.2 Сведение краевых задач к интегральным уравнениям 157
11.2.1 Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана . . . 157
11.2.2 Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле . . . 159
11.3 Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля оператора Лапласа 162
11.3.1 Постановка задачи 162
11.3.2 Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению 162
11.3.3 Свойства 163
11.4 Уравнение Гельмгольца во внутренней области. 165
11.4.1 Постановка задачи 165
11.4.2 Фундаментальное решение в трехмерном случае 166
11.4.3 Фундаментальное решение в двумерном случае 167

[1] подробнее Б. К. С. стр 292

Введение

> Основным содержанием математической физики является построение и изучение моделей физических явлений
>
> Академик Андрей Николаевич Тихонов

Началом методов математической физики можно считать 1811 год, когда Парижская Академия наук объявила конкурс на создание теории теплопроводности.
1822 г. — Жан Батист Жозеф Фурье — “Аналитическая теория тепла”.
1828 г. — Джордж Грин — “Исследование по математической теории электричества и магнетизма”.

Часть I

Специальные функции математической физики

Глава 1

Задача Штурма-Лиувилля

1.1 Малые колебания ненагруженной струны

Задача имеет следующий вид:

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x \in (0, l) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}} \tag{1.1}$$

Нужно задать начальные положения и скорость:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), x \in [\,0, l\,] \\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in [\,0, l\,] \end{cases}$$

Будем искать $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,y) = T(t)X(x)$$

Подставим в (1.1)

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

Пусть $T(t)X(x) \neq 0$. Тогда:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Такой подход носит название "Метод Фурье".
Так как левая часть зависит только от t, а правая — только от x, то обе части равны некой постоянной - λ.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in (0, l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Тривиальное решение есть всегда при всяких λ. Нужно найти, при каких λ есть нетривиальные решения, то есть решить задачу Штурма-Лиувилля.
Рассмотрим 3 случая:

1. $\lambda < 0$. Тогда $\lambda = -\varkappa^2$, и пусть $\varkappa > 0$

$$X''(x) - \varkappa^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = C_1 e^{\varkappa x} + C_2 e^{-\varkappa x}$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 e^{\varkappa l} + C_2 e^{-\varkappa l} = 0 \end{cases}$$

Это однородная система. Ее определитель

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\varkappa l} & e^{-\varkappa l} \end{vmatrix} = e^{-\varkappa l} - e^{\varkappa l} \neq 0$$

Это значит, что решение есть только нулевое.

2. $\lambda = 0$

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 l + C_2 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $C_1 = C_2 = 0$

3. $\lambda > 0$. Тогда $\lambda = \varkappa^2$, $\varkappa > 0$

$$X''(x) - \varkappa^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = C_1 \cos(\varkappa x) + C_2 \sin(\varkappa x)$$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_1 \cos(\varkappa l) + C_2 \sin(\varkappa l) = 0 \end{cases}$$

$$\sin(\varkappa l) = 0 \Rightarrow \varkappa l = \pi n, n = 1, 2, 3, \dots \ (\varkappa \in \mathbb{R}\ n \in \mathbb{Z})$$

$$\varkappa = \frac{\pi n}{l}, \boxed{\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}, n \in \mathbb{Z}$$

Итак, $\boxed{X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}$, $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)}$

Теперь поработаем с $T(t)$

$$\frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,\ t \in (0, +\infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$$

Разложим начальные условия в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

Итак, новая задача есть задача Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, t \in (0, +\infty) \\ T_n(0) = \varphi_n(x), T_n' = \psi_n(x) \end{cases}$$

Построим решение

$$T_n(t) = C_{1n} \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + C_{2n} \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)$$

$$\begin{cases} T_n(0) = C_{1n} = \varphi_n \\ T_n'(0) = C_{2n} \dfrac{\pi n a}{l} t = \psi_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{1n} = \varphi_n \\ C_{2n} = \dfrac{l}{\pi n a} \psi_n \end{cases}$$

Итак,

$$T_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)$$

Окончательное решение:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \end{aligned}}$$

Первая группа обусловлена начальным положением струны, а вторая — начальной скоростью.

Рассмотрим различные варианты граничных условий — различного вида фигуры:

1. Отрезок
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Прямоугольник
$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0, \ (x, y) \in ; & \Pi \ \text{— прямоугольник} \\ N[u(x,y)]|_\Gamma = 0; & \Gamma \ \text{— граница прямоугольника} \end{cases}$$
$$N[u] = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u, |a| + |b| > 0$$
— оператор граничных условий.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$
$\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$ — оператор Лапласа. Ищем решение в виде: $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда
$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = 0$$
Перенося $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ в правую часть, получаем, что левая и правая часть уравнения зависят от разных переменных, а следовательно, они равны некоторой постоянной. Тогда $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\mu$, $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\nu$, $\lambda = \mu + \nu$. Получаем задачу
$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0, x \in (0, a) \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right), \mu = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, n \in \mathbb{Z}$$
Аналогично получаем для $Y(y)$:
$$Y_m(x) = \sin\left(\frac{\pi m y}{a}\right), \nu = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, m \in \mathbb{Z}$$
Тогда:
$$u_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right), \lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$$

3. Прямоугольный параллелепипед
$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0, \ x \in (0, a), \ y \in (0, b), \ z \in (0, c) \\ N[u]|_\Gamma = 0 \end{cases}$$
Аналогично второму пункту получаем:
$$u_{nmk}(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi k z}{c}\right),$$
$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2.$$

4. Круг

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0,\ R \in (0, a),\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ N[u]|_{=a} = 0 \end{cases}$$

В полярной системе координат:

$$\boxed{\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}$$

Ищем решение в виде: $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Phi(\varphi) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0$$

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

$\dfrac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu$ (аналогично прошлым примерам)

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r) - \mu R(r) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R(r) = 0}$$

Эта задача уже не может быть решена через элементарные функции.

5. Шар

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0, M \in K_0^a, \\ N[u]|_{\Gamma=a} = 0, \end{cases}$$

$$N[u] = \alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta u, |a| + |b| > 0.$$

В сферической системе координат:

$$\boxed{\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\triangle_{\theta\varphi} u}$$

$\triangle_{\theta\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа

$$\boxed{\triangle_{\theta\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}$$

Будем искать решение в виде $U(r,\theta,\varphi) = R(r)V(\theta,\varphi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)V(\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\triangle_{\theta\varphi}V(\theta,\varphi) + \lambda R(r)V(\theta,\varphi) = 0$$

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\triangle_{\theta\varphi}V(\theta,\varphi)}{V(\theta,\varphi)} + \lambda = 0$$

Метод разделения переменных:

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\triangle_{\theta\varphi}V(\theta,\varphi)}{V(\theta,\varphi)} = 0$$

Оба слагаемых равны константе $-\mu$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda r^2 - \mu\right)R(r)$$

Получаем задачу для радиальной части

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R(r) \\ N[u]|_{\Gamma=a} = 0 \end{cases}$$

Угловая часть:

$$\triangle_{\theta\varphi}V(\theta,\varphi) + \mu V(\theta,\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \mu V(\theta,\varphi) = 0$$

Ищем в виде: $V(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}\Theta(\theta) + \mu\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$$

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \mu\sin^2\theta\Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

И вновь срабатывает метод Фурье. Слагаемые равны $-\nu$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + (\mu \sin^2\theta - \nu)\Theta(\theta) = 0,$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left(\mu - \dfrac{\nu}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0, \\ |\Theta(\pi)| < \infty, \\ |\Theta(0)| < \infty. \end{cases}}$$

Полезна подстановка косинуса, но решить задачу без специальных функций не получится.

Глава 2

Уравнение цилиндрических функций и свойства его решения

2.1 Уравнение специальных функций. Лемма о поведении решений в особых точках

Рассмотрим уравнение

$$L[u] = 0, x \in (a, b) \tag{2.1}$$

где $L[u] = [k(x)u'(x)]' - q(x)u(x)$ Будем предполагать:
1)$k(x) > 0$ на (a, b)
2)$k(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b], \varphi(a) \neq 0$

Лемма 2.1.1. *Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (2.1), в котором $k(x) = (x - a)\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда если $u_1(x)$ — ограниченное решение, представимое в виде $u_1(x) = (x - a)^n v(x)$, $v(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $v(a) \neq 0$, то второе решение $u_2(x)$ является неограниченным в окрестности точки a.*

Доказательство. Обычно у нас будет $\varphi(x) \equiv 1$, $a = 0$, $v = x$. Очевидно, что

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = 0$$

С другой стороны,

$$u_1 L[u_2] - u_2 L[u_1] = u_1(ku_2')' - u_2(ku_1')' = (ku_1u_2')' - \cancel{ku_1'u_2'} - (ku_2u_1')' + \cancel{ku_2u_1'} =$$
$$= (ku_2'u_1 - ku_2u_1')' = [k(u_2'u_1 - u_2u_1')]' = 0$$

$$k(u_2'u_1 - u_2u_1') = C = const$$

$u_2'u_1 - u_2u_1'$ — определитель Вронского функций u_1 и u_2

$$W[u_1, u_2] = \frac{C}{k(x)}$$

Так как u_1 и u_2 — линейно независимые решения, то их $W \neq 0$. Значит, $C \neq 0$

$$\frac{u_2' u_1 - u_2 u_1'}{u_1^2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)' = \frac{C}{k(x)u_1^2(x)}$$

$$u_2(x) = u_1(x)\left[\int\limits_{x_0}^{x} \frac{C d\alpha}{k(\alpha)u_1^2(\alpha)} + C_1\right]$$

Константу C можно положить равной 1, а C_1 равной 0, так как на общий вид решения это влиять не будет.

$$u_2(x) = u_1(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{k(\alpha)u_1^2(\alpha)} = (x-a)^n\, v(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(x-a)\varphi(\alpha)(x-a)^{2n}v^2(\alpha)} =$$

$$= (x-a)^n v(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(x-a)^{2n+1}\varphi(\alpha)v^2(\alpha)}$$

Обозначим $\psi(x) = \varphi(x)v^2(x)$ и применим формулу среднего значения

$$u_2(x) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(x-a)^{2n+1}} = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} \left.\dfrac{-1}{2n(x-a)^{2n}}\right|_{x_0}^{x}, & n > 0 \\ \ln|x-a|, & n = 0 \end{cases}$$

Итак, u_2 представима в виде:

$$u_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0)$$

где

$$f_1(x) = \frac{v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} \dfrac{-1}{2n(x-a)^n}, & n > 0 \\ \ln(x-a), & n = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x, x_0) = \frac{(x-a)^n v(x)}{\psi(x^*)} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{2n(x_0-a)^{2n}}, & n > 0 \\ -\ln(x-a), & n = 0 \end{cases}$$

При любом $n > 0$ имеется особая точка $x = a$.
Здесь f_1 — неограниченная со степенной или логарифмической особенностью, а f_2 — равна нулю или ограничена. ■

Только что было доказано более сильное утверждение, чем было заявлено в формулировке Л1. Запишем новую формулировку:

Лемма 2.1.2. *Пусть выполнены условия Л1. Тогда:*
1) Если $u_1(a) \neq 0$, то есть $n = 0$, то $u_2(x)$ имеет при $x = a$ логарифмическую особенность.

$$u_1(a) \neq 0,\ u_2(x) \sim \ln(x-a)$$

2) Если $u_1(x)$ имеет в точке a нуль порядка n, то есть $u_1(x) = (x-a)^n v(x)$, где $v(x) \neq 0$, то u_2 имеет в точке a полюс порядка n.

$$u_1(x) \sim (x-a)^n, \ u_2(x) \sim (x-a)^{-n}$$

2.2 Функции Бесселя

2.2.1 Уравнение Бесселя

Вернемся к ЗШЛ для круга:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R(r) = 0$$

и переобозначим $\mu = \nu^2$, $Re\,\nu \geqslant 0$, $r > 0$.

Выполним подстановку: $x = \sqrt{\lambda}r \Rightarrow r = \dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda \neq 0$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{dR}{dx}\sqrt{\lambda}$$

Подставим:

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\sqrt{\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cancel{\sqrt{\lambda}}}\cancel{\sqrt{\lambda}}\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\lambda\right)R(x) = 0$$

Очевидно, что λ полностью уходит

Получаем <u>уравнение Бесселя</u> (дивергентная форма):

$$\boxed{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R(x) = 0} \tag{2.2}$$

Если обозначить $y = R$ и домножить на x^2, то получим вариант уравнения Бесселя в недивергентной форме:

$$\boxed{x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0} \tag{2.3}$$

2.2.2 Основные свойства Γ-функции (гамма-функции)

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \begin{array}{l} z \in \mathbb{C}, \\ Re\,(z) > 0. \end{array}$$

1. $$\Gamma(1) = 1, \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. $$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \Gamma(n+1) = n! \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+.$$

3.
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

4.
$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int\limits_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

где γ — контур на $\mathbb{C}$, обходящий нуль против часовой стрелки, а его концы уходят на бесконечность в действительной оси.

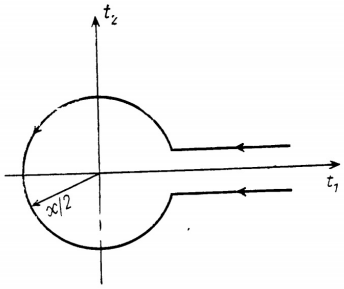


Рис 2.1

5.
$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{-t} t^{-z-1} dt.$$

Мы вывели уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R(x) = 0$$

Функции Бесселя — это нетривиальные решения уравнения Бесселя

2.3 Построение функции Бесселя в виде обобщенного степенного ряда. Метод Фробениуса

$x = 0$ — это особая точка функций Бесселя. (см. (2.2))
Ищем решения в виде $y \sim x^{\nu}$, $y \sim \dfrac{1}{x^{\nu}}$ (метод Фробениуса)

$$y(x) = x^{\sigma}(a_0 + a_1 x + \ldots) = x^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\sigma}$$

— решение в виде обобщенного степенного ряда.
Подставим в (2.3):

$$\begin{cases} (\sigma^2 - \nu^2)a_0 = 0 \\ ((\sigma+1)^2 - \nu^2)a_1 = 0 \\ ((\sigma+2)^2 - \nu^2)a_2 + a_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((\sigma+m)^2 - \nu^2)a_m + a_{m-2} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Считаем, что $a_0 \neq 0$. Тогда $\sigma = \pm\nu$, и $a_1 = 0$.
Здесь есть проблема. Если взять, к примеру, $\sigma = -\dfrac{1}{2}$, тогда во втором уравнении

в (2.4) скобка равна 0, и a_1 — не определена. Нам придется запретить значения: $\sigma \neq -\left(r+\frac{1}{2}\right)$, $r = 0, 1, \ldots$ При $\sigma = -\nu$, должно быть $\nu \neq \frac{m}{2}$ (ν — не полуцелое положительное число). При $\sigma = \nu$, ν — любое. Тогда:

$$\begin{cases} a_m = -\dfrac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)} \\ a_{2k+1} = 0 \end{cases}, \; m = 2k, \; k = 0, 1, \ldots$$

$$\boxed{a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(\sigma+2k+\nu)(\sigma+2k-\nu)}}$$

Рассмотрим случаи:

1. $\sigma = \nu$:
$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2(k+\nu)k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!(k+\nu)\ldots(1+\nu)} \tag{2.5}$$
Отсюда следует, что нужно взять:
$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$
так как $(k+\nu)\ldots(2+\nu)(1+\nu)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(k+\nu+1)$
Тогда можно сразу выписать решение уравнения (2.2) — функцию Бесселя:
$$\boxed{J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}} \tag{2.6}$$

Определение 2.3.1. *Функция $J_\nu(x)$, заданная формулой (2.6), называется функцией Бесселя порядка ν.*

Лемма 2.3.1. *Функция Бесселя (2.6) может быть аналитически продолжена на $\mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной части вещественной оси*

Доказательство. При нецелом ν при обходе нуля $\mathbb{C}$, мы переходим с одного листана римановой поверхности на другой. Чтобы это не произошло, надо сделать разрез по отрицательной части вещественной оси. При целом ν $J_n u(x)$ аналитичная всюду на $\mathbb{C}$, то есть является целой функцией ■

2. $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$
Получаем выражение аналогично (2.5), но
$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$$
$$\boxed{J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}} \tag{2.7}$$

Определение 2.3.2. *Функция $J_\nu(x)$, заданная формулой (2.7), называется функцией Бесселя порядка $-\nu$.*

Лемма 2.3.2. *Функция Бесселя (2.7) аналитична на $\mathbb{C}$ кроме отрицательной части вещественной оси*

При $\nu \neq n$ J_ν и $J_{-\nu}$ — линейно независимы.
Общее решение уравнения

$$\boxed{y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_1 J_{-\nu}(x),\ \nu \notin \mathbb{Z}}$$

3. $\sigma = -\nu$, $\nu = n$
   Суммирование идет от $k = n$, так как $\Gamma(k - n + 1) \to \pm\infty$ при $k < n$

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu \to n} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} =$$
$$/ * k = k' + n * / = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+1)\Gamma(k'+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+\nu} = (-1)^n J_n(x)$$

   Значит, $J_{\pm n}(x)$ при $n \in \mathbb{Z}$ линейно зависимы, и не составляют ФСР
   Нужна третья функция, такая, чтобы она была от них линейно независима

4. Вернемся к случаям $\nu = -r - \dfrac{1}{2}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Из (2.4):

$$a_m \cdot m(m - 2r - 1) + a_{m-2} = 0$$

   Возьмем $m = 2r + 1$. Тогда скобка в выражении будет равна нулю, а следовательно $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2r-1} = 0$, a_0 и a_{2r+1} будут неопределенными. Получим

$$y(x) = a_0 2^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-r + \frac{1}{2}\right) J_{-r-\frac{1}{2}}(x) + a_{2r+1} 2^{r+\frac{1}{2}} \Gamma\left(r + \frac{3}{2}\right) J_{r+\frac{1}{2}}(x)$$

   Обозначим $a_0 2^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-r + \dfrac{1}{2}\right) = C_1$ и $a_{2r+1} 2^{r+\frac{1}{2}} \Gamma\left(r + \dfrac{3}{2}\right) = C_2$. Таким образом "проблемные" a_0 и a_{2r+1} мы упрятали в произвольные константы ФСР. Итак, общее решение:

$$\boxed{y(x) = C_1 J_{-r-\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{r+\frac{1}{2}}(x),\ r = 0, 1, \ldots}$$

2.4 Рекуррентные формулы

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}} \Rightarrow \int \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} dx = \frac{-J_\nu(x)}{x^\nu} + C \tag{2.8}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)} \Rightarrow \int x^\nu J_{\nu-1}(x)dx = x^\nu J_\nu(x) + C \tag{2.9}$$

Доказательство. Докажем формулу (2.8):

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = x^\nu \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\frac{x^{2k-1+\nu}}{2^{2k+\nu}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$/*k = k'+1*/ = -\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+(\nu+1)+1)\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+(\nu+1)+1} = -J_{\nu+1}(x)$$

Аналогично доказывается формула (2.9). ■

Следствие.

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

Еще одно следствие:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \tag{2.10}$$

Эта формула не годится для вычисления J высоких порядков, так как она неустойчива, то есть приводит к лавинообразному нарастанию ошибок с ростом ν.

2.5 Цилиндрические функции полуцелого аргумента

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

Имеем:

$$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2k+1)!}{2^{k+1}\cdot 2^k\cdot k!}\sqrt{\pi} \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!}{k!(2k+1)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Итак,

$$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x}$$

Аналогично,

$$\boxed{J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x}$$

С помощью (2.10) мы сможем выразить любую ФБ полуцелого порядка через элементарные функции:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \sin(x - \pi) + \frac{3}{x} \cos(x - \pi) \right)$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) \right)$$

где $P_n(t)$, $Q_n(t)$: $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$ — полиномы сложного вида, мы не будем их здесь писать.

2.6 Интегральное представление функций Бесселя

Вспомним формулу:

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-t} t^{-z-1} dt$$

В качестве γ будем рассматривать контур, состоящий из луча $\left(+\infty, \frac{x}{2}\right)$ на верхнем берегу разреза вдоль положительной части вещественной оси, окружности с центром в нуле и радиусом $\frac{x}{2}$, которая обходится против часовой стрелки, и луча $\left(\frac{x}{2}, +\infty\right)$ на нижнем берегу разреза (см рис. 2.1).

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi k} e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-t} t^{-k} t^{-\nu} \frac{dt}{t}$$

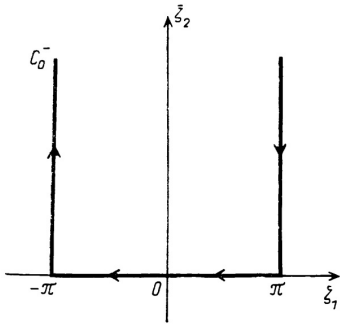
$$J_\nu(x) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!} \right) \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{dt}{t}$$

$$J_\nu(x) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{\frac{x^2}{4t} - t} \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{dt}{t} \tag{2.13}$$

Сделаем замену:

$$t = \frac{x}{2} e^{-i(\xi - \pi)}$$

Тогда контур γ переходит в контур C_0^-



Здесь, на C_0^-:

$$\xi = \pi + i\xi \Rightarrow t = \frac{x}{2} e^{\xi}$$
$$\xi = \xi_1 \Rightarrow \xi_1 = \pi \Rightarrow t = \frac{x}{2}$$
$$\xi_1 = -\pi \Rightarrow t = \frac{x}{2} e^{2\pi i}$$
$$\xi = -\pi + i\xi \Rightarrow t = \frac{x}{2} e^{2\pi i} e^{\xi}$$

Тогда, когда мы заменим,

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\xi}{i}$$

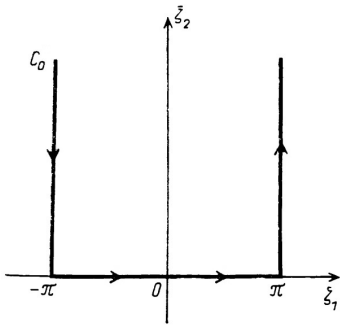
$$\left(\frac{x}{2t}\right)^\nu = e^{i(\xi - \pi)\nu} = e^{i(\xi\nu} e^{-i\pi\nu}$$

$$\frac{x^2}{4t} - t = t\left(\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - 1\right) = \frac{x}{2} e^{-i(\xi - \pi)} \left(e^{2i(\xi - \pi)} - 1\right) =$$
$$ix \frac{e^{i(\xi - \pi)} - e^{-i(\xi - \pi)}}{2i} = ix \sin(\xi - \pi) = -ix \sin \xi$$

Вернемся к (2.13)

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_0^-} e^{-ix \sin \xi + i\nu\xi} d\xi$$

Осталось только поменять направление обхода $C_0^- \to C_0$



Итак, интегральное представление ФБ:

$$\boxed{J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi} d\xi}$$

Полученный интеграл разделяется на три интеграла с вещественными пределами:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{0} e^{-ix\sin(-\pi+i\xi)+i\nu(-\pi+i\xi)} d(-\pi+i\xi) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+i\nu\alpha} d\alpha +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ix\sin(\pi+i\xi)+i\nu(\pi+i\xi)} d(\pi+i\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+i\nu\alpha} d\alpha +$$

$$\frac{e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi}}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{ix\sin(i\xi)-\nu\xi} i d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+i\nu\alpha} d\alpha - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}\,\xi-\nu\xi} d\xi$$

В частности, при целом ν

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha+in\alpha} d\alpha$$

$$J_0(0) = 1$$

2.7 Функции Ханкеля

Интегрально представление ФБ позволяет высказать следующее:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C} e^{-ix\sin\xi}\Phi(\xi) d\xi \tag{2.14}$$

где C — некоторый незамкнутый контур (в таком виде можно будет искать решение уравнения Бесселя)
Введем оператор Бесселя

$$L_\nu[y(x)] = x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2-\nu^2)y(x)$$

Ядро интеграла $K(x,\xi) = e^{-ix\sin\xi}$. Тогда:

$$L_\nu[K(x,\xi)] = -K_{\xi\xi}(x,\xi) - \nu^2 K(x,\xi)$$

Для всей функции:

$$L_\nu[y(x)] = \oint\limits_C [L_\nu[K(x,\xi)]\Phi(\xi)d\xi = -\oint\limits_C (K_{\xi\xi}(x,\xi) + \nu^2 K(x,\xi))\Phi(\xi)d\xi =$$

$$-\oint\limits_C K(x,\xi)(\Phi''(\xi) + \nu^2\Phi(\xi))d\xi = 0$$

То есть, надо потребовать, чтобы

$$\Phi''(\xi) + \nu^2\Phi(\xi) = 0 \Rightarrow \Phi(\xi) = e^{\pm i\xi\nu}$$

Контур C может уходить на бесконечность только в тех областях, где сходится интеграл (2.14). При вещественном $x > 0$ это выполняется, когда $Re\,(-i\sin\xi) < 0$

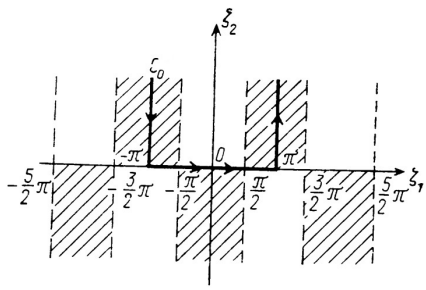
$$Re\,(-i\sin\xi) = Im\,(\sin\xi) = Im\,(\sin(\xi_1 + i\xi_2) =$$

$$= Im\,(\sin\xi_1 \operatorname{ch}\xi_2 + i\operatorname{sh}\xi_2\cos\xi_1) = \operatorname{sh}\xi_2\cos\xi_1 < 0$$

$$\operatorname{sh}\xi_2 > 0 \Rightarrow \cos\xi_1 < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi k < \xi_1 < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sh}\xi_2 < 0 \Rightarrow \cos\xi_1 > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \xi_1 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

То есть, контур C_0 лежит в разрешенных областях.

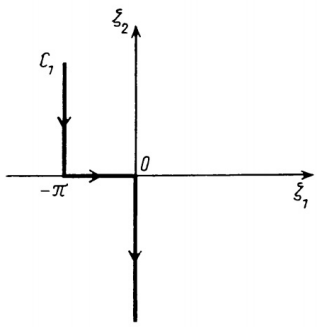


Определение 2.7.1.

Функция

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}d\xi,}$$

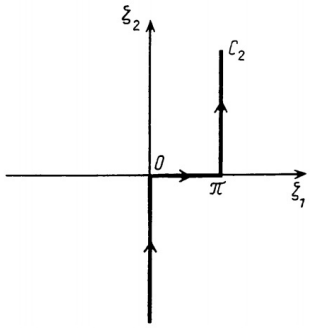
где C_1 — контур, изображенный на рисунке, называется функцией Ханкеля I рода



Определение 2.7.2.

Функция

$$\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}d\xi,}$$



где C_2 — контур, изображенный на рисунке, называется функцией Ханкеля II рода

Лемма 2.7.1. *Функции Бесселя и Ханкеля можно аналитически продолжить на $\mathbb{C}$ при условии $-\pi < \arg z < \pi$*

1. Найдем соотношение между $H_{-\nu}(x)$ и $H_\nu(x)$

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}d\xi = /*\xi = -\pi - \alpha * / =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1^-} e^{-ix\sin(-\pi-\alpha) + i\nu\alpha}e^{i\nu\pi}d(-\alpha) = \qquad \Big/ \textit{направление обхода изменяется на противоположное} \Big/$$

$$e^{i\nu\pi}\int\limits_{C_1^-} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}d(-\alpha) = e^{i\nu\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}d\alpha$$

Итак,

$$\boxed{H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x)}$$

Аналогично, заменой $\xi = \pi - \alpha$ получим

$$\boxed{H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x)}$$

2.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1,2)}(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{H_{\nu+1}^{(1,2)}(x)}{x^\nu}} \tag{2.15}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^\nu H_\nu^{(1,2)}(x)\right) = x^\nu H_{\nu-1}^{(1,2)}(x)} \tag{2.16}$$

Доказательство. Докажем формулу (2.15). Рассмотрим для определенности функцию Ханкеля первого рода

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1)}(x)}{x^\nu}\right) = \frac{1}{x^\nu}\left(H_\nu^{(1)\prime}(x) - \frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x)\right)$$

$$H_\nu^{(1)'}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}(-i\sin\xi)e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}d\xi$$

С другой стороны, интегрируя выражение для функции Ханкеля и с учетом того, что в силу выбора контура подстановки на бесконечности общаются в нуль, получаем:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}d\xi = \frac{x}{\nu}\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}\cos\xi e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}d\xi$$

$$H_\nu^{(1)'}(x) - \frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}(\cos\xi + i\sin\xi)e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}d\xi =$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{i\xi}e^{-ix\sin\xi+i\nu\xi}d\xi = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\xi+i(\nu+1)\xi}d\xi = -H_{\nu+1}^{(1)}(x)$$

Аналогично доказывается формула (2.16) ■

2.8 Связь между функциями Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана

$$\boxed{J_n u(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right)} \tag{2.17}$$

Доказательство. Совместив контуры C_1 и C_2, получим контур C_0. Поэтому, подставив функции Ханкеля в (2.17), получим $J_n u(x)$ в интегральном представлении ■

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2}\left(H_{-\nu}^{(1)}(x) + H_{-\nu}^{(2)}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x) + e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(x)\right)$$

При $\nu \neq n$

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}} \tag{2.18}$$

$$\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = -i\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}} \tag{2.19}$$

При $\nu = n$ имеем в (2.18) и (2.19) неопределенность $\dfrac{0}{0}$

$$\boxed{H_n^{(1)}(x) = \lim_{\nu\to n}H_\nu^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left(\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right)}$$

$$\boxed{H_n^{(2)}(x) = \lim_{\nu\to n}H_\nu^{(2)}(x) = J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left(\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right)}$$

Заметим, что при действительном аргументе x

$$H_n^{(1)}(x) = \left(H_n^{(2)}(x)\right)^*$$

и

$$J_\nu(x) = Re\left(H_\nu^{(1)}(x)\right) = Re\left(H_\nu^{(2)}(x)\right)$$

Определение 2.8.1. *Функция*

$$\boxed{N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right)}$$

$$N_\nu(x) = Im\left(H_\nu^{(1)}(x)\right) = Im\left(H_\nu^{(2)}(x)\right)$$

называется функцией Неймана.

Замечание. Функции $\{J_\nu(x), N_\nu(x)\}$ образуют базис:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

2.9 Линейная независимость промежуточных функций

Для $\nu \neq n$

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = -i\frac{1}{\sin\nu\pi}W[J_\nu, J_{-\nu}] \tag{2.20}$$

$$y''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

$$W[y_1, y_2] = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{C_0}{x}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\cdot\frac{x^{2k-2}}{2^{2k}}}_{\equiv P(x)}\right)$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + x^2 P(x)\right), \ |P(0)| < \infty$$

Аналогично получаем для $J_{-\nu}(x)$:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} + x^2 Q(x)\right), \ |Q(0)| < \infty$$

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(2xP(x) + x^2 P'(x)\right)$$

$$J'_{-\nu}(x) = -\frac{\nu}{x} J_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left(2xQ(x) + x^2 Q'(x)\right)$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2\nu}{x} J_\nu J_{-\nu} + xR(x), \ |R(0)| < \infty$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} + xR(x)$$

$$\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi}$$

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{x} \cdot \frac{\sin \nu\pi}{\nu\pi} + xR(x) = -\frac{2\sin \nu\pi}{\pi x} + xR(x) = \frac{C_0}{x}$$

$$C_0 = -\frac{2}{\pi} \sin \pi\nu$$

Итак,

$$\boxed{W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2}{\pi x} \sin \pi\nu} \tag{2.21}$$

Формула (2.21) верна и при $\nu = n$, так как в этом случае $W[J_n, J_{-n}] = 0$, что как раз и означает линейную зависимость J_n и J_{-n} Из формул (2.20) и (2.21):

$$\boxed{\begin{aligned} &W[J_\nu, H_\nu^{(1)}] = \frac{2i}{\pi x} \\ &W[J_\nu, H_\nu^{(2)}] = -\frac{2i}{\pi x} \\ &W[J_\nu, N_\nu] = \frac{2}{\pi x} \end{aligned}}$$

2.10 Асимптотика цилиндрических функций

Будем использовать метод перевала при $x \to \infty$ (подробнее про метод в Тихонове, Свешникове ТФКП) Имеем функцию:

$$F(x) = \oint\limits_C e^{xf(\xi)} \varphi(\xi) d\xi$$

где f, φ — аналитические функции, C — контур, лежащий в области их аналитичности. Формула метода перевала:

$$F(x) = e^{xf(\xi_0)}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(\xi_0)|}}\varphi(\xi_0)e^{i\psi} + O(x^{-\frac{3}{2}})\right)$$

Здесь ψ — угол наискорейшего спуска, ξ_0 — точки перевала: $f'(\xi_0) = 0$,
$\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(\xi_o))$
Эту методику можно применить к $F(x) = H'_\nu(x)$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\xi + i\nu\xi}d\xi$$

$$\varphi(\xi) = e^{i\nu\xi},\ f(\xi) = -i\sin\xi,\ f'(\xi) = -i\cos\xi$$

$$f''(\xi) = i\sin\xi,\ f'(\xi_0) = -i\cos\xi_0 = 0 \Rightarrow \xi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(\xi_o) = i,\ f''(\xi_0) = -i \Rightarrow \arg f''(\xi_o) = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\pi - \arg f''(\xi_o)) = -\frac{\pi}{4},\ \varphi(\xi_0) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}$$

Итак, из метода перевала получена асимптотика:

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = e^{ix}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(\nu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right),\ |x| \gg |\nu|} \tag{2.22}$$

Формула (2.22) может быть аналитически продолжена на область
$|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$
При $x \in \mathbb{R}$ (2.22) можно переписать:

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)}$$

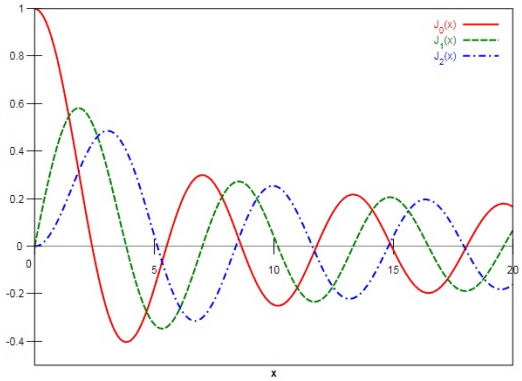
Аналогично получаем

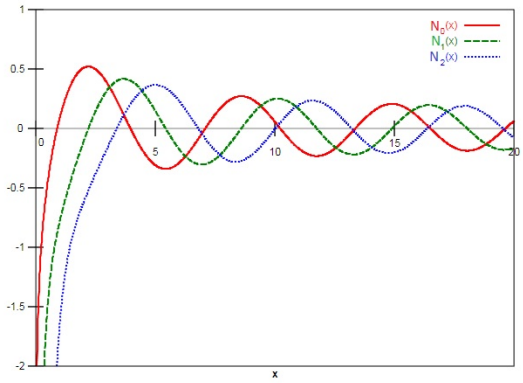
$$\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)}$$

Тогда из ранее доказанных формул:

$$\boxed{\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \\ N_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}}$$

$$J_0(0) = 1,\ J_\nu(x) \sim x,\ N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots \text{ — асимптоматика в нуле}$$





Теорема 2.10.1. *Все нули $J_\nu(x)$, за исключением, быть может $x = x_0$, простые.*

Доказательство. Предположим, что в $x = x_0$ $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$
y — решение уравнения Бесселя. Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy'' + (x^2 - \nu^2)y = 0,\ x > x_0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что $y(x) = 0$ при $x \geqslant x_0$. Это противоречит асимптотике $J_\nu(x)$ ■

Теорема 2.10.2. *$H_\nu^{(1,2)}(x)$ вообще не могут иметь вещественных корней*

Доказательство. Предположим, что x_0 — нуль H, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$H_\nu^{(1)}(x_0) = 0 \Rightarrow J_\nu(x_0) = 0,\ N_\nu(x_0) = 0 \Rightarrow W[J_\nu, N_\nu] = 0$$

Получаем противоречие. ■

2.11 Собственные функции круга

Вспомним Гл.1 §1 п.4:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Решая ЗШЛ для $\Phi(\varphi)$, получаем, что $\mu_n = n$, а СФ равны $\begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda^{(n)} - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0,\ 0 < r < r_0$$

$|R(0)| < \infty$, так как $r = 0$ — особая точка

$$\alpha \left.\frac{dR(r)}{dr}\right|_{r_0} + \beta R(r_0) = 0 \text{ — граничные условия III рода (условия Робена)}$$

Сделаем замену: $x = \sqrt{\lambda^{(n)}} r \Rightarrow y(x) = y(\sqrt{\lambda^{(n)}} r) = R(r)$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)$$

$$|y(0)| < \infty \Rightarrow C_2 = 0;\ R(r) = J_n(\sqrt{\lambda^{(n)}} r)$$

Из граничных условий:

$$\alpha\sqrt{\lambda^{(n)}} J_n'(\sqrt{\lambda^{(n)}} r_0) + \beta J_n(\sqrt{\lambda^{(n)}} r_0) = 0$$

— характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

$$\lambda = \lambda_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}$$

В дальнейшем будет показано, что задача Штурма-Лиувилля имеет счетное множество собственных функций и собственных значений, собственные функции ортогональны с весом r. Система собственных функций является замкнутой полной системой, для которой справедлива теорема Стеклова.
Найдем квадрат нормы:

$$\|R_{n,k}\|^2 = \int\limits_0^{r_0} r J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r\right) dr \tag{2.23}$$

Рассмотрим произвольную цилиндрическую функцию $Z_\nu(x)$

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_\nu(x) = 0 \tag{2.24}$$

$$I = \int x Z_\nu^2(x) dx = \int Z_\nu^2(x) d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} Z_\nu^2(x) - \int x^2 Z_\nu(x) Z_\nu'(x) dx$$

Из (2.24) следует:

$$-\int x^2 Z_\nu(x) Z_\nu'(x) dx = \int \left(x^2 Z_\nu''(x) Z_\nu'(x) + x\left(Z_\nu'(x)\right)^2\right) dx - \nu^2 \int Z_\nu(x) Z_\nu'(x) dx =$$
$$\int \left(\frac{x^2\left(Z_\nu'(x)\right)^2}{2}\right) dx - \frac{\nu^2}{2}\int \left(Z_\nu^2(x)\right)' dx$$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{2}\left(\left(Z_\nu'(x)\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu^2(x)\right)} \tag{2.25}$$

Полученная формула позволяет считать квадрат нормы для любой области

$$(2.23) \Rightarrow \|R\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}} \int\limits_0^{r_0} x J_n^2(x) dx \tag{2.26}$$

$$(2.25)(2.26) \Rightarrow \|R\|^2 = \frac{r^2}{2} \left(\left(J_n' \left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r_0 \right) \right)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)} r_0^2} \right) J_n^2 \left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r \right) \right)$$

Замечание. Нередко обозначают $\sqrt{\lambda_k^{(n)}} r_0 = \mu_k^{(n)}$ — корень характеристического уравнения.
Тогда СФ круга имеют вид:

$$\boxed{u_{kn}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) \cdot \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}}$$

или в комплексной форме

$$\boxed{u_{kn}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r \right) e^{in\varphi}}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2.12 Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

Определение 2.12.1. *Функцией Инфельда $I_\nu(x)$ называется функция:*

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}$$

$$I_{-\nu}(x) = i^\nu J_{-\nu}(ix)$$

Для $\nu < 0$ ФИ можно представить в виде:

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \ldots$$

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy(x)}{dx} \right) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0$$

При $\nu \neq n$ его решение:

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$$

и $I_\nu(x)$ с $I_{-\nu}(x)$ — линейно независимы.
Т.к. $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$, то $I_n(x) = I_{-n}(x)$
<u>Асимптотика функции Инфельда</u>

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^{-\nu}\frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right) =$$
$$i^{-\nu}\frac{1}{2}\left(e^{-i(ix)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right)\right) =$$
$$i^{-\nu}\frac{1}{2}e^x\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}e^{i\nu\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Определение 2.12.2. *Функцией Макдональда $K_\nu(x)$ называется функция:*

$$\boxed{K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)}$$

При $\nu \neq n$

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$
$$H_\nu^{(1)}(x) = i\frac{i^\nu I_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - i^{-\nu}J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$
$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right),\ \nu \neq n$$

При $\nu = n$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Предельный переход:

$$K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left(\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right) i^{-\nu}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^\nu \cdot i \cdot H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu \cdot i \cdot e^{i(ix)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

Тогда асимптотика функции Макдональда

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2x}}e^{-x}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Формулы дифференцирования и рекуррентные формулы:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} I_{\nu}(x)\right) = -x^{\nu} I_{\nu-1}(x)}$$

$$I_{\nu+1}(x) - I_{\nu-1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x)$$

$$K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x)$$

$$K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x) = -2K'_{\nu}(x)$$

В частности,

$$I'_0(x) = I_1(x),\ K'_0(x) = -K_1(x)$$

С помощью всех этих цилиндрических функций можно решить любые задачи в секторе и ряде других областей.

Глава 3

Классические ортогональные полиномы

3.1 Определение классических ортогональных полиномов

Определение 3.1.1. *Назовем систему полиномов все степеней $\{p_n(x)\}$, заданных на отрезке $[a, b]$, где, возможно, $a = -\infty$, $b = +\infty$, системой классических ортогональных полиномов (КЛОП), если они ортогональны на этом отрезке с весом $\rho(x)$, который удовлетворяет уравнению Пирсона:*

$$\boxed{\big(\sigma(x)\rho(x)\big)' = \tau(x)\rho(x)}$$

где $\tau(x) = Ax + B$ — линейная функция, ее коэффициенты A и B определяются из условия:

$$\boxed{x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b = 0},\ m = 0, 1, \ldots$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty,\ b \neq +\infty \\ (x-a) & ,\ a \neq -\infty,\ b = +\infty \\ (b-x) & ,\ a = -\infty,\ b \neq +\infty \\ 1 & ,\ a = -\infty,\ b = +\infty \end{cases}$$

Из уравнения Пирсона, эти три функции не являются независимыми:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right)$$

3.2 Свойства КЛОП

1. КЛОП ортогональны на $[a, b]$:

$$\int\limits_a^b p_m(x)p_l(x)\rho(x)dx = 0,\ m \neq l$$

2.

Теорема 3.2.1 (Теорема о нулях)**.** *КЛОП степени n содержит ровно n простых вещественных нулей строго на (a, b)*

Доказательство.

$$\int\limits_a^b p_0(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0,\ n \neq 0$$

$$p_0(x) = const \Rightarrow \int\limits_a^b p_n(x)\rho(x)dx = 0$$

Пусть $x_1, \ldots, x_i \neq x_j$ при $i,\ j = \overline{1,k}$ — нули $p_n(x)$. Тогда:

$$p_n(x) = \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)}_{r_k(x)}\underbrace{\varphi_n(x)}$$

Надо доказать, что $k = n$. Тогда в силу нашего предположения о $x_i \neq x_j$ $\varphi_n(x) \equiv 1$ и все нули — простые.
Предположим противное, пусть $k < n$. Тогда:

$$\int\limits_a^b p_n(x)r_k(x)\rho(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)r_k^2(x)\rho(x)dx \neq 0 \quad \begin{pmatrix}\text{т.к. выражение} \\ \text{под интегралом} \\ \text{не меняет знак}\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Для полинома $r_k(x)$ справедливо разложение

$$r_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i(x)$$

так как $\{p_n(x)\}$ содержит полиномы всех степеней. Тогда:

$$\int\limits_a^b p_n(x)r_k(x)\rho(x)dx = \sum_{i=0}^{k} c_i \int\limits_a^b p_n(x)p_i(x)\rho(x)dx = 0 \tag{3.2}$$

Из ортогональности полиномов следует, что все интегралы в (3.2) равны нулю. Формула (3.2) противоречит (3.1). Значит, $k \geqslant n$. А так как полином не может иметь корней больше, чем его степень, то $k = n$. ■

Следствие. Так как по т.Ролля между нулями дифференцируемой функции есть минимум один нуль ее производной, то система $\{p_n'(x)\}$ содержит как минимум $(n + 1)$ простых вещественных нулей.
Более того, система $\{p_n^{(k)}(x)\}$ содержит как минимум $(n + k)$ простых вещественных нулей.

3. Интеграл

$$\int\limits_a^b x^{m-1} p_n(x) \underbrace{\tau(x)\rho(x)}_{=(\sigma\rho)'} dx = 0 \tag{3.3}$$

так как $x^{m-1}\tau(x)$ может быть представлен в виде

$$x^{m-1}\tau(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_a^b x^{m-1} p_n(x)\tau(x)\rho(x)dx = p_n(x) \underbrace{x^{m-1}\sigma(x)\rho(x)|_a^b}_{=0} - \\ - (m-1)\int\limits_a^b x^{m-2}\sigma(x)p_n(x)\rho(x)dx - \int\limits_a^b p_n'(x)x^{m-1}\rho(x)\sigma(x)dx \end{aligned} \tag{3.4}$$

$x^{m-2}\sigma(x)$ — полином степени не больше m, а следовательно второй интеграл в (3.4) равен нулю аналогично (3.3). Тогда

$$\int\limits_a^b p_n'(x)x^{m-1}\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

то есть полином $p_n'(x)$ ортогонален всем полиномам степени $m-1$ на $[a,b]$с весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$:

$$\int\limits_a^b p_n'(x)p_m'(x)\rho_1(x)dx = 0$$

Убедимся, что $\rho_1(x)$ удовлетворяет условию Пирсона

$$(\sigma\rho_1)' = \sigma\rho_1' + \sigma'\rho_1 = \sigma(\sigma\rho)' + \sigma'\rho_1 = \sigma\tau\rho + \sigma'\rho_1 = (\tau+\sigma')\rho_1 = \tau_1(x)\rho_1(x)$$

Итак, система $\{p_n'(x)\}$ — система КЛОП с весом $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$.
Методом математической индукции можно показать, что система производных КЛОП $\{p_n^{(m)}(x)\}$ есть СКЛОП с весом $\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x)$, $\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x)$, где $\rho_0(x) \equiv \rho(x)$, $\tau_0(x) \equiv \tau(x)$.

4. Из формулы (3.4) следует, что

$$\int\limits_a^b p_n'(x)(x^m)'\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Проинтегрировал по частям, получим:

$$p_n(x)\underbrace{x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b x^m(\sigma\rho p_n'' + (\sigma\rho)'p_n')dx =$$

$$\int\limits_a^b x^m(\sigma\rho p_n'' + \tau\rho p_n')dx = \int\limits_a^b x^m q_n(x)\rho(x)dx = 0$$

где $q_n(x) = \sigma p_n'' + \tau p_n'$ — полином степени n, ортогональный всем x^m при $m < n$

$$\int\limits_a^b p_m(x)q_n(x)\rho(x)dx = 0$$

Можно разложить

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$$

$$\sum_{i=0}^{m} c_1 \int\limits_a^b p_m(x)p_i(x)\rho(x)dx = c_m \int\limits_a^b p_m^2(x)\rho(x)dx = 0$$

Отсюда $c_m = 0$ при $m < n$.

$$q_n(x) = c_n p_n(x)$$

Получаем уравнение для КЛОП (в недивергентной виде)

$$\boxed{\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0}$$

Если его домножить на $\rho(x)$ и продифференцировать, получим уравнение для КЛОП в дивергентом виде

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right) + \lambda_n\rho(x)p_n(x) = 0$$

Особые точки уравнения: $|y(a)| < \infty$, $|y(b)| < \infty$

Итак, задача Штурма-Лиувилля для КЛОП:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda_n\rho(x)y(x) & x \in (a,b) \\ |y(a)| < \infty,\ |y(b)| < \infty & y \equiv p_n(x) \end{cases}} \tag{3.5}$$

Если сделать разложения:

$$\sigma(x) = \sigma(0) + x\sigma'(0) + \frac{x^2}{2}\sigma''$$

$$\tau(x) = \tau(0) + x\tau'$$

$$a_n n(n-1)x^{n-2}\frac{x^2}{2}\sigma'' + a_n n x^{n-1}x\tau' + a_n\lambda_n x^n + \ldots = 0$$

то собственные значения ЗШЛ (3.5):

$$\lambda_n = -n\left(\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'\right)$$

5. $\{p_n^{(m)}(x)\}$, $\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\rho_{m+1}(x)\frac{dp_n^{(m)}(x)}{dx}\right) + \lambda_{nm}\rho_m(x)p_n^{(m)}(x) = 0$$

$$\lambda_{nm} = -(n-m)\left(\frac{n-m-1}{2}\sigma'' + \tau_m'\right)$$

$$\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x)$$

$$\rho_0(x) \equiv \rho(x),\ \tau_0(x) \equiv \tau(x),\ \lambda_{n0} \equiv \lambda_n$$

$$\rho(x)p_n(x) = -\frac{1}{\lambda_{n0}}\frac{d}{dx}\left(\rho_1(x)p_n'(x)\right) = \frac{1}{\lambda_{n0}\lambda_{n1}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\rho_2(x)p_n''(x)\right) = \ldots$$

Проведем эту процедуру m раз и получим:

$$\rho(x)p_n(x) = \frac{1}{A_{nm}}\frac{d^m}{dx^m}\left(\rho_m(x)p_n'^{(m)}(x)\right)$$

$$A_{nm} = (-1)^m\prod_{l=0}^{m-1}\lambda_{nl}$$

Следует положить $m = n$. Тогда:

$$p_n(x) = a_n x^n + \ldots \Rightarrow p_n^{(n)}(x) = a_n n!$$

Итак, вот так выглядят КЛОП:

$$\boxed{p_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sigma^n(x)\rho(x)\right),\ C_n = \frac{a_n n!}{A_{nn}}} \tag{3.6}$$

Выражение (3.6) называется <u>обобщенной формулой Родрига.</u>
Коэффициент C_n определяется из условия нормировки.

6. Формула Родрига (3.6) позволяет получить значение квадрата норма КЛОП:

$$N_n \equiv \int_a^b p_n^2(x)\rho(x)dx = \int_a^b a_n x^n p_n(x)\rho(x)dx$$

$p_n(x) = a_n x^n + q_{n-1}(x)$, и интеграл

$$\int_a^b q_{n-1}p_n(x)\rho(x)dx = 0$$

в силу ортогональности полиномов.

$$N_n(x) = \|p_n\|^2 = a_n C_n \int\limits_a^b x^n \frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n \rho) dx$$

$$\boxed{\|p_n\|^2 = a_n C_n (-1)^n \, n! \int\limits_a^b \sigma^n(x)\rho(x) dx}$$

— выражение для квадрата нормы КЛОП

7. Производящая функция классических линейных ортогональных полиномов

Определение 3.2.1. *Производящей функций КЛОП называется функция вида*

$$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n(x)}{n!} z^n$$

где

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{C_n}$$

Обозначим $\varphi(z) = \sigma^n(z)\rho(z)$ — аналитическая функция.
Пора выходить на $\mathbb{C}$. Интегральная формула Коши:

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sigma^n(x)\rho(x)) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{\sigma^n(t)\rho(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$$

где C — замкнутый контур, обходящий точку x.

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho(x)} \oint\limits_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma(t) z}{t - x} \right)^n \frac{\rho(t)}{t - x} \right) dt$$

При $|z| \ll 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma(t) z}{t - x} \right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{\sigma(t) z}{t - x}} = \frac{t - x}{t - x - \sigma(t) z} \quad \left(\begin{array}{c} \text{бесконечно убывающая} \\ \text{геометрическая прогрессия} \end{array} \right)$$

Итак,

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho(x)} \oint\limits_C \frac{\rho(t) dt}{t - x - \sigma(t) z}$$

Особая точка: $t - x - \sigma(t) z = 0$, $t_0 = t_0(x, z)$ — корень этого уравнения.
Интеграл равен вычету в этой точке

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{\rho(x)} Res \left(\frac{\rho(t)}{t - x - \sigma(t) z}; t_0 \right) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\rho(t_0)}{1 - \sigma'(t_0) z}$$

$$\boxed{\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1-\sigma'(t_0)z}}$$

— выражение для ПФ КЛОП

3.3 Частные случаи КЛОП

3.3.1 Полиномы Якоби

Возьмем $a = -1$, $b = 1$. Тогда:

$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

$$\rho(x) = \frac{1}{1-x^2} \exp\left(\int \frac{Ax+B}{1-x^2} dx\right)$$

$$\frac{Ax+B}{1-x^2} = \frac{A+B}{2(1-x)} + \frac{B-A}{2(1+x)}$$

$$\rho(x) = (1-x)^{-\frac{A+B}{2}-1}(1+x)^{\frac{B-A}{2}-1}$$

Обозначим $\alpha = -\dfrac{A+B}{2} - 1$, $\beta = \dfrac{B-A}{2} - 1$. Тогда

$$\boxed{\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \tag{3.7}$$

Определение 3.3.1. *Классические ортогональные полиномы, заданные на* $[1,1]$ *и ортогональные с весом* (3.7)*, называются полиномами Якоби.*

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right\}$$

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to T_n(x) \sim P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$$

— полином Чебышева I рода

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho(x) = \sqrt{1-x^2} \to U_n(x) \sim P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

— полином Чебышева II рода

3.3.2 Полиномы Лежандра

Лежандр ввел эти полиномы в 1784г., ровно за 5 лет до Великой французской революции. С тех пор многое поменялось, но ПЛ стабильны и не изменились

А. Н. Боголюбов

$$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \rho(x) = 1$$

$$P_n(x) \equiv P_n^{(0,0)}(x)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$$

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{dP_n}{dx}\right) + \lambda P_n(x) = 0$$

Но исчерпывают ли полиномы Лежандра СФ этой задачи?

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((1 - x^2)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda y(x) = 0 \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

Ее собственные значения:

$$\lambda_n = n(n + 1)$$

Здесь $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tau(x) = \sigma'(x) = -2x \Rightarrow A = -2$, $B = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ (получается из уравнения Пирсена), а значит СФ данной задачи — полиномы Лежандра. Посчитаем квадрат нормы:

$$a_n = \frac{2n\,(2n - 1)\ldots(n + 1)}{2^n\, n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

— из формулы Родрига

$$\|P_n\|^2 = a_n n!\, C_n \int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx$$

Найдем интеграл:

$$I_n = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = x(1-x^2)\Big|_{-1}^{+1} + 2n \int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1} =$$

$$2n \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1} dx - 2n \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

Тогда получим рекуррентную формулу:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n(2n-2)\ldots\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots\cdot 3} \underbrace{I_0}_{=2} = \frac{(2n)^2(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot 2$$

Вернемся к квадрату нормы:

$$\|P_n\|^2 = \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{2^n(n!)^2}} \frac{(-1)^n}{\cancel{2^n n!}} (-1)^n \cancel{n!} \frac{\cancel{(2^n)^2}\cancel{(n!)^2}}{(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot 2$$

$$\boxed{\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}}$$

Производящая функция полиномов Лежандра

$$\Psi(x,z) = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} \frac{1}{1-\sigma'(t_0)z}$$

$$t - x - \sigma(t)z = 0$$

$$t - x - (1-t^2)z = 0 \Rightarrow zt^2 + t - (z+x) = 0$$

$$t_0^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4z(z+x)}}{2z} \tag{3.8}$$

Итак,

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{1+2t_0^{\pm}z}$$

Нужно выбрать корень $t_0^{\pm}$. Из (3.8):

$$\lim_{z\to 0} t^+ = x$$

$$\lim_{z\to 0} t^- = -\infty$$

Отсюда мы выкидываем t^- из рассмотрения

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{1+4zx+4z^2}$$

Если также вспомнить, что $C_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n\, n!}$, и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-2z)^n$$

и переобозначить $-2z \to z$, то получаем окончательное выражение для производящей функции полиномов Лежандра

$$\boxed{\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{1-2zx+z^2}} \tag{3.9}$$

Продифференцировав (3.9) по z, и приравняв коэффициенты, получим:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

ЗШЛ на ПЛ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda y(x) = 0,\ x \in (-1,1) \\ |y(-1)| < \infty,\ |y(1)| < \infty \end{cases}$$

3.3.3 Полиномы Лагерра

$$a = 0,\ b = +\infty \Rightarrow \sigma(x) = x$$

$$\rho(x) = x^{-1} \exp\left(\int \left(A + \frac{B}{x}\right) dx\right) = e^{Ax} x^{B-1}$$

Положим $A = -1$. Тогда

$$\rho(x) = e^{-x} x^{\alpha},\ \alpha \neq 0 \tag{3.10}$$

Определение 3.3.2. *КЛОП, заданные на* $[0, +\infty)$ *и ортогональные на этом луче с весом* (3.10)*, называются обобщенными полиномами Лагерра.*

Тут имеем:

$$C_n = \frac{1}{n!}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha})$$

Уравнение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^{-x} x^{\alpha} y(x) = 0,\ x \in (0,\infty) \tag{3.11}$$

Определение 3.3.3. *Функция* $f(x)$ *называется квадратично интегрируемой с весом* $\rho(x)$ *на интервале* (a,b)*, если существует интеграл вида*

$$I = \int_a^b f^2(x)\rho(x)dx$$

Задача Штурма-Лиувилля для полиномов Лагерра формулируется так: “Найти все значение параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения (3.11), непрерывное в $\mathbb{R}^+$ (нужно для обеспечения ограниченности) и квадратично интегрируемое на $\mathbb{R}^+$ с весом $\rho(x)$.
Рассмотрим частный случай обобщенных полиномов Лагерра при $\alpha = 0$. Такие полиномы называются полиномами Лагерра.

$$L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x)$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow \tau(x) = 1 - x$$

Тогда ЗШЛ имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^{-x}y(x) = 0$$

Ее СЗ и СФ:

$$\lambda_n = -n\left(\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'\right) = n$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$$

— формула Родрига для полиномов Лагерра.
Тогда коэффициенты полиномов:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Найдем квадрат нормы:

$$\|L_n\|^2 = C_n(-1)^n\, n!\, a_n \int\limits_0^{+\infty} x^n\, e^{-x}dx = \frac{1}{n!}(-1)^n n!\frac{(-1)^n}{n!}\,\Gamma(n+1),\ \Gamma(n+1) = n!$$

$$\boxed{\|L_n\|^2 = \frac{n!}{n!} = 1}$$

Найдем производящую функцию полиномов Лагерра

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{L}_n(x)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)}\frac{1}{1-\sigma'(t_0)z}$$

где

$$t_0 - x - \sigma(t_0)z = 0 \Rightarrow t_0 - x - t_0 z = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{x}{1-z}$$

$$\Psi(x,z) = \frac{e^{-\frac{x}{1-z}}}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}$$

Итак

$$\boxed{\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n = \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{1-z}}$$

3.3.4 Полиномы Эрмита

$$\begin{cases} a = -\infty \\ b = +\infty \end{cases} \Rightarrow \sigma(x) = 1$$

$$\rho(x) = e^{\int (Ax+B)dx}$$

$$\text{Положим} \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{Тогда } \rho(x) = e^{-x^2} \tag{3.12}$$

Определение 3.3.4. *КЛОП, заданные на $\mathbb{R}^1$ и ортогональные с весом (3.12), называются полиномами Эрмита.*

Нормировочный коэффициент обычно принимают таким:

$$C_n = (-1)^n$$

Формула Родрига для полиномов Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$$

Коэффициенты полиномы полинома $a_n = 2^n$
Уравнение задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda e^{-x^2} y(x) = 0 \tag{3.13}$$

Задача Штурма-Лиувилля: найти те значения λ, при которых существует нетривиальное решение (3.13), непрерывное и квадратично интегрируемое с весом $\rho(x)$ на $\mathbb{R}^1$.
Собственные значения задачи:

$$\lambda_n = -n\left(\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'\right) = 2n$$

Найдем квадрат нормы:

$$\|H_n\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n\,(-1)^n(-1)^n\,n! \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

— интеграл Пуассона

$$\boxed{\|H_n\|^2 = 2^n\,n!\,\sqrt{\pi}}$$

Производящая функция:

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}(-z)^n = \frac{\rho(t_0)}{\rho(x)} = \frac{e^{-t_0^2}}{e^{-x^2}}$$

где

$$t - x - z = 0 \Rightarrow t_0 = x + z$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}(-z)^n = e^{-2xz-z^2}$$

Перейдем от $-z$ к z и окончательно получим:

$$\boxed{\Psi(x,z) = \frac{H_n(x)}{n!}z^n = e^{2xz-z^2}}$$

3.4 Присоединенные функции Лежандра

Определение 3.4.1. *Присоединенными функциями Лежандра называются функции, определяемые соотношением*

$$P_n^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

При $m > n$ они тождественно равны нулю;
При $m = 2k$ это полиномы степени n;
При $m = 2k + 1$ это иррациональные функции

$$\boxed{\left\|P_n^{(m)}\right\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{2}{2n+1}}$$

— квадрат нормы присоединенных функций Лежандра.
Очевидно, ПФЛ имеют простые нули в точках $x = \pm 1$, и еще $n - m$ простых нулей.
Функций $u(x) = P_n(x)$ удовлетворяет уравнению Лежандра:

$$(1 - x^2)u''(x) - 2xu'(x) + n(n+1)u(x)$$

Продифференцируем m раз это уравнение, используя формулу Лейбница:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)}(x) v^{(m-k)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k (1 - x^2)^{(k)} u^{(m+2-k)}(x) + \sum_{l=0}^{m} C_m^l (2x)^{(l)} u^{(m+1-l)}(x) + n(n+1)u^{(m)}(x) = 0$$

$$k = l + 1$$

$$\sum_{k=0}^{2} C_m^k (1 - x^2)^{(k)} u^{(m+2-k)}(x) + \sum_{k=1}^{2} C_m^{k-1} (1 - x^2)^{(k)} u^{(m+2-k)}(x) + n(n+1)u^{(m)}(x) = 0$$

Верхнем пределом суммы будет 2, так как производные более высших порядков от $1-x^2$ тождественно равны нулю.

$$\begin{aligned}
&k=0: C_m^0 = 1 \to \left(1-x^2\right) u^{(m+2)}(x)\\
&k=1: C_m^1 + C_m^0 = m+1 \to -2xu^{(m+1)}(x)\\
&k=2: C_m^2 + C_m^1 = \frac{1}{2}m(m-1)+m = \frac{1}{2}m(m+1) \to -2u^{(m)}(x)
\end{aligned}$$

$$(1-x^2)u^{(m+2)}(x) - 2(m+1)xu^{(m+1)}(x) + \big(n(n+1)-m(m+1)\big)u^{(m)}(x) = 0$$

Обозначим $v(x) = u^{(m)}(x)$. Будем иметь:

$$(1-x^2)v''(x) - 2(m+1)xv'(x) + \big(n(n+1)-m(m+1)\big)v(x) = 0$$

Сделаем замену:

$$v(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}} y(x)$$

$y(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

$$y(x) = P_n^{(m)}(x);\ \lambda_n = n(n+1)$$

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0\\
|y(\pm 1)| < \infty
\end{cases}$$

Если $x = \cos\theta$, то задача принимает вид:

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0,\ \theta\in(0,\pi)\\
|\Theta(\pi)| < \infty,\ |\Theta(0)| < \infty
\end{cases}$$

— задача на угловую часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Итак,

$$\boxed{\Theta_{nm}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)}$$

3.5 Сферические функции

Рассмотрим ЗШЛ на единичной сфере:

$$\begin{cases}
\triangle_{\theta\varphi}Y + \mu Y = 0\\
|Y(\theta,\varphi)| < \infty\\
Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi)
\end{cases} \tag{3.14}$$

Определение 3.5.1. *Ограниченные на единичной сфере решения уравнения* (3.14)*, удовлетворяющие граничным условиям, называются сферическими функциями.*

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \text{ где} \Theta_{nm}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

Каждое СЗ задачи (3.14) вырождено.
Задача для φ-части:

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi},\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n \text{ — всего } n+1 \text{ значений}$$

Можно переписать в тригонометрической форме:

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

Тогда выражение для сферических функций имеет вид:

$$\boxed{Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}}$$

При этом условились, что положительный верхний индекс m функции $Y(\theta,\varphi)$ соответствует умножению на $\sin m\varphi$, а отрицательный — на $\cos m\varphi$.

3.6 Шаровые функции

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре:

$$\triangle u = 0$$

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} + \frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = 0$$

Из (3.14) вытекает, что

$$\frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = -n(n+1)$$

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

$$R(r) = r^\sigma,\ R'(r) = \sigma r^{\sigma-1},\ R''(r) = \sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} \Rightarrow$$

$$\sigma(\sigma+1) = n(n+1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma = n \\ \sigma = -(n+1) \end{cases}$$

Таким образом, получаем два семейства частных решений уравнения Лапласа:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^nY_n^{(m)}(\theta,\varphi) \\ \dfrac{1}{r^{n+1}}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{3.15}$$

Определение 3.6.1. *Функции $u_{nm}(r,\theta,\varphi)$, определяемые формулой (3.15) и являющиеся частными решениями уравнения Лапласа в сферической системе координат, называются шаровыми функциями.*

Определение 3.6.2. *Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа.*

3.7 Собственные функции шара

$$\begin{cases} \triangle u + \lambda u = 0, & M \in R_0^a \\ U(P) = 0, & P \in \Sigma_0^a \end{cases}$$

где R_0^a — шар радиуса a с центром в 0, Σ_0^a — сфера радиуса a с центром в 0, $\bar{R}_0^a = R_0^a \bigcup \Sigma_0^a$. Делим переменные:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} + \lambda = 0$$

Подставляя СЗ задачи (3.14), получим уравнение:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r) = 0$$

Сделаем замену $R(r) = \dfrac{y(r)}{\sqrt{r}}$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)y(r),\ 0 < r < a \\ |R(0)| < \infty \\ R(a) = 0 \end{cases}$$

Решение полученного уравнения Бесселя:

$$y(r) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,r\right) \Rightarrow R(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,r\right)}{\sqrt{r}}$$

— сферическая функция Бесселя.

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,a\right) = 0$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) \Rightarrow \lambda_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\right)^2$$

где $k = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$
Итак, СФ шара имеют вид:

$$\boxed{u_{knm}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}\, r\right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}$$

Глава 4

Замкнутые и полные системы ортогональных функций

4.1 Вспомогательные положения анализа

Определение 4.1.1. *Последовательность функций* $\{\varphi_n(M)\}$ *называется* <u>*фундаментальной*</u>*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N, \ n \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \|\varphi_n - \varphi_{n+p}\| < \varepsilon$$

Определение 4.1.2. *Линейное пространство называется* <u>*полным*</u>*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится по норме данного пространства к элементу этого пространства.*

Определение 4.1.3. *Полное ЛП называется* <u>*банаховым*</u>*.*[1]

Определение 4.1.4. *ЛП называется* <u>*гильбертовым*</u>*, если в нем задано скалярное произведение и оно (пространство) является полным по норме, порожденной этим СП:*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Определение 4.1.5. *Множество* $L \subset E$*, где* E *— ЛП, называется* <u>*линейным множеством*</u> *(линейным многообразием, линеалом), если*

$$\forall f, g \in L \Rightarrow \lambda f + \mu g \in L, \ \lambda, \ \mu \ \text{— скаляры}$$

Определение 4.1.6. *Линейное пространство называется* <u>*плотным*</u> *в нормированном пространстве* E*, если*

$$\forall f \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in L : \|f - \varphi\| < \varepsilon$$

[1] Стефан Банах, польский математик

Рассмотрим ограниченную односвязную область D и множество функций, непрерывных и квадратично интегрируемых (квадратичная интегрируемость — это, грубо говоря, существование нормы) на $\bar{D}$:

$$f \in C(\bar{D}) \ \hat{} \ \exists \int\limits_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV$$

Обозначим это пространство как $\hat{L}_2(\bar{D})$. Оно является линейным:

$$|\lambda f + \mu g| \leqslant 2|\lambda|^2|f|^2 + 2|\mu|^2|g|^2$$

Введем на $\hat{L}_2(\bar{D})$ скалярное произведение и норму:

$$(f, g) = \int\limits_{\bar{D}} f(M)\overline{g(M)}dV$$

где черта означает комплексное сопряжение

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\bar{D}} |f(M)|^2 dV \tag{4.1}$$

Введенное нами ЛП со СП не является гильбертовым, так как не является полным.
Заметим, что сходимость по норме (4.1) является сходимостью в среднем.

Можно пополнить $\hat{L}_2(\bar{D})$, присоединить ко всем последовательностям из этого неполного пространства их предельные элементы. Полученное пространство будем звать $L_2(D)$. Это пространство Лебега.[2]
Два вопроса:

1. Всегда ли можно пополнить ЛП?
2. Как пополнить ЛП?

Общего ответа на второй вопрос нет, но на первый отвечает эта теорема:

Теорема 4.1.1. *Всякое линейное нормированное пространство можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в неком банаховом пространстве. Последнее называется* <u>*пополнением*</u> *этого ЛМ.*

Определение 4.1.7. *Множество L, принадлежащее пространству E, называется* <u>*множеством меры нуль*</u>*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число шаров, содержащих это множество, и их общий объем меньше ε*

Определение 4.1.8. *Если некое свойство выполняетя на D всюду, за исключением, может быть, подмножества D меры нуль, то говорят, что оно* <u>*выполняется почти всюду*</u> *на D.*

[2]Henry Leon Lebesque (Анри Леон Лебег), французский математик

Определение 4.1.9. *Два элемента из $L_2(D)$ называются равными в $L_2(D)$, если они равны почти всюду.*
<u>Нулем</u> в пространстве $L_2(D)$ является элемент, равный нулю почти всюду на D.

Определение 4.1.10. *Назовем скалярным произведением в $L_2(D)$:*

$$(f,g) = \lim_{n\to\infty}(f_n, g_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{\bar{D}} f_n(M)\overline{g_n(M)}dV\right\} \tag{4.2}$$

где $\{f_n(M)\}$, $\{g_n(M)\} \subset \hat{L}_2(\bar{D})$ — фундаментальные в среднем последовательности.
Соответственно, норма:

$$\|f\|^2 = (f,f) = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{\bar{D}} |f_n(M)|^2 dV\right\}$$

Пополняя пространство $\hat{L}_2(\bar{D})$ до $L_2(D)$, мы получаем предельные элементы, для которых интеграл по Риману может не существовать, поэтому необходимо расширить понятие интеграла.

Определение 4.1.11. *Назовем СП (4.2) в пространстве $L_2(D)$ <u>интегралом Лебега</u> от произведения функций $f \cdot g$*
В частности, полагая $g \equiv 1$, получим:

$$\int\limits_D f(M)dV = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{\bar{D}} f_n(M)dV\right\}$$

Отметим, что если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу, и оба интеграла совпадают.

Определение 4.1.12. *Последовательность $\{\varphi_n(M)\} \subset H(D)$, где H — гильбертово пространство, называется <u>ортогональной</u>, если*

$$\int\limits_D \varphi_n(M)\varphi_l(M)dV = 0, \text{ при } n \neq l$$

Если для нее

$$\int\limits_D \varphi_n(M)\varphi_l(M)dV = \delta_n^l$$

то она называется <u>ортонормированной</u>

Определение 4.1.13. *Ортогональная последовательность* $\{\varphi_n(M)\} \subset L_2(D)$ *называется* <u>*замкнутой*</u> *в* $L_2(D)$, *если*

$$\forall f \in L_2(D)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \exists \{C_n\} : \left\| f(M) - \sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(M) \right\|^2_{L_2(D)} < \varepsilon$$

Определение 4.1.14. *Ортогональная система функций* $\{\varphi_n(M)\} \subset L_2(D)$ *называется* <u>*полной*</u> *в* $L_2(D)$, *если не существует функции* $f(M) \in L_2(D)$, *где* $f \neq 0$ *почти всюду и ортогональной всем функциям системы, то есть:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (f, \varphi_n) \Rightarrow f(M) \overset{ПВ}{\equiv} 0$$

Теорема 4.1.2. *Необходимым и достаточным условием замкнутости ОСФ является выполнение равенства Парсеваля-Ляпунова-Стеклова*

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \tag{4.3}$$

где $f_n = (f, \varphi_n),\ n \in \mathbb{N}$ *(*f_n *— коэффициенты Фурье).*

Теорема 4.1.3. *Из замкнутости ОСФ следует их полнота.*

Доказательство. Предположим,

$$f \in L_2(D),\ f_n = (f, \varphi_n),\ n \in \mathbb{N}$$

Тогда из равенства ПЛС (4.3):

$$\|f\|^2 = \int\limits_D |f(M)|^2 dV = 0 \Rightarrow f(M) \overset{\text{ПВ}}{=} 0$$

■

Определение 4.1.15. *Множество* $\mu \subset L_2(D)$ *называется плотным (по Гейне) в* $L_2(D)$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall f \in L_2(D)\ \exists \{\varphi_n\} \subset \mu : \|\varphi_n - f\| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Теорема 4.1.4. *Из полноты ОСФ следует их замкнутость.*

Таким образом, в $L_2(D)$ понятия замкнутости и полноты эквивалентны.

Теорема 4.1.5. *Множество непрерывных на* $\bar{D}$ *функций — плотное в* $L_2(D)$

Так как согласно т. Вейерштрасса всякая непрерывная на $\bar{D}$ функция может быть равномерно приближена на $\bar{D}$ системой полиномов, то система полиномов полна в $C(D)$ и, следовательно, в $L_2(D)$.

Замечание. Аналогично вводится пространство Лебега с весом для скалярного произведения, где $\rho(M) > 0$ — непрерывная функция.

Рассмотрим теперь трехмерную область D с достаточно гладкой границей S и рассмотрим на $\bar{D}$ систему непрерывных функций. Легко показать, что эта система — ЛП, и ее можно перенести на $\bar{D}$

$$\boxed{(u,v) = \int\limits_{\bar{D}} f(M)\overline{v(M)}dV + \int\limits_{\bar{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\overline{\partial v}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\overline{\partial v}}{\partial z}\right) dV} \tag{4.4}$$

Если мы пополним введенное нами ЛП $\hat{W}_2^1(\bar{D})$ по норме с СП (4.4), то мы получим пространство Соболева $W_2^1(D)$. В нем есть четыре фундаментальные последовательности относительно нормы ЛП: $\{u_n\}$, $\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial z}\right\}$.

Они называются обобщенными частными производными в ПС.

4.2 Примеры ортогональных систем функций

4.2.1 Полиномы Лежандра

Теорема 4.2.1. *Система ПЛ замкнута в* $L_2(-1,1)$

Доказательство. Рассмотрим $\forall f \in L_2(-1,1)$. Так как множество $C[-1,1]$ плотно в $(-1,1)$, то

$$\forall \varepsilon' > 0\ \exists g(M) \in C[-1,1] : \|f - g\| < \varepsilon'$$

В силу т. Вейерштрасса:

$$\forall \varepsilon'' > 0\ \exists N(\varepsilon'')\ \exists\{\tilde{C}_n\}\ \exists\{Q_n(x)\}\ (Q_n(x) \text{ — система полиномов}):$$

$$\max_{[-1,1]} \left| g(M) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon''$$

$$\left\| g(M) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x) \right\|^2 = \int\limits_{-1}^{+1} \left| g(M) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x) \right|^2 dV < 2(\varepsilon'')^2$$

Приравняем $Q_n(x)$ к полиномам Лежандра $P_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x)$$

Тогда получаем:

$$\left\| g(M) - \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) \right\| < \sqrt{2}\varepsilon''$$

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) \right\| \leqslant \|f - g\| + \left\| g(M) - \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) \right\| < \varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' \equiv \varepsilon$$

■

Следствия

1. Из замкнутости системы полиномов Лежандра $\{P_n(x)\}$ следует ее полнота, так как система $\{P_n(x)\}$ ортогональна.

2. Система $\{P_n(x)\}$ определяет все СФ ЗШЛ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda y(x) = 0,\ x \in (-1, 1) \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

   Доказательство. Действительно, $\{P_n(x)\}$ ортогональна с весом $\rho(x) \equiv 1$. Пусть

$$\exists\, \tilde{y}(x) \neq P_n(x) : \exists \text{ СЗ } \tilde{\lambda} \neq \lambda_n = n(n+1)$$

   Тогда в силу общих свойств СФ:

$$\big(\tilde{y}(x), P_n(x)\big) = 0,\ \ n = 0, 1, \ldots$$

   Из полноты $\{P_n(x)\}$ следует, что $\tilde{y}(x) = 0$ ПВ на $[-1, 1]$
   Значит, $\tilde{y}(x)$ не может быть СФ ЗШЛ. ■

3.

   Теорема 4.2.2 (Теорема Стеклова)**.** *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе полиномов Лежандра, то есть если*
   $f(x) \in C[-1, 1]^{(2)}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x)$$

   где

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

4.2.2 Система присоединенных функций Лежандра

Лемма 4.2.3. *Для всякой непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ можно подобрать непрерывную функцию $\bar{\varphi}(x)$, такую что*

$$\varphi(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \bar{\varphi}(x)$$

приближает в среднем фунцию $f(x)$ на $[-1, 1]$

Доказательство. Возьмем в качестве $\varphi(x)$ функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, & x \in [-1,\ -1+\delta] \\ f(x), & x \in (-1+\delta,\ 1-\delta) \\ A_2\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}, & x \in [1-\delta,\ 1] \end{cases} \tag{4.5}$$

Постоянные A_1 и A_2 выберем из условия непрерывности в точках $-1+\delta$, $1-\delta$, где $\delta > 0$. Выберем

$$\bar{\varphi}(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{m}{2}} \varphi(x)$$

Она годится, так как непрерывна.
По т. Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция ограничена на нем.

$$|\varphi(x)| \leqslant M,\ |f(x)| \leqslant M$$

Тогда

$$|f(x)-\varphi(x)|^2 \leqslant |f(x)|^2 + 2|f(x)||\varphi(x)| + |\varphi(x)|^2 \leqslant 4M^2$$

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx = \int\limits_{-1}^{-1+\delta} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx + \int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx +$$

$$\int\limits_{1-\delta}^{1} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx \leqslant /* \text{второй интеграл равен нулю по постр. } \varphi(x) */$$

$$\leqslant 4M^2 \int\limits_{-1}^{-1+\delta} dx + 4M^2 \int\limits_{1-\delta}^{1} dx = 8M^2\delta$$

Если взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8M^2}$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x)-\varphi(x)|^2 dx < \varepsilon$$

■

Замечание. Если ввести норму пространства $L_2(-1,1)$

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx$$

то доказанная лемма 4.2.3 утверждает, что функцию $f(x) \in C[-1,1]$ можно приблизить с любой заданной точностью с помощью функции (4.5) в норме $L_2(-1,1)$: для любого $\varepsilon > 0$ можно построить функцию $\varphi(x)$ по формуле (4.5) такую, что

$$\|f - \varphi\|_{L_2}^2 < \varepsilon$$

Теорема 4.2.4. *Система присоединенных функций Лежандра замкнута на* $[-1,1]$.

Доказательство. Пусть задана функция $f(x) \in L_2(-1,1)$.
Из матанализа известно, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists g(x) \in C[-1,1] : \|f(x) - g(x)\|_{L_2(-1,1)} < \varepsilon' \tag{4.6}$$

Из выше доказанной леммы 4.2.3, для $g(x)$:

$$\forall \varepsilon'' > 0 \ \exists \varphi(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \bar{\varphi}(x), \ \bar{\varphi}(x) \in C[-1,1] : \|g(x) - \varphi(x)\|_{L_2(-1,1)} < \varepsilon'' \tag{4.7}$$

По другой т. Вейерштрасса для $\bar{\varphi}(x) \in C[-1,1]$

$$\forall \varepsilon''' > 0 \ \exists N(\varepsilon''') \ \exists \{\tilde{C}_n\} \ \exists \{Q_n(x)\} : \max_{[-1,1]} \left| \bar{\varphi}(x) - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x) \right| < \varepsilon'''$$

$$\sum_{n=m}^{N+m} C_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n Q_n(x)$$

Итак, система $\{C_n\}$ выражается через $\{\tilde{C}_n\}$

Так как $0 \leqslant \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \leqslant 1$ на $[-1,1]$, то при домножении левой части неравенства на $\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}}$, неравенство усилится

$$\max_{[-1,1]} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \right| < \varepsilon'''$$

$$\max_{[-1,1]} \left| \varphi(x) - \sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x) \right| < \varepsilon'''$$

$$\left\|\varphi(x)-\sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\right\|^2_{L_2(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1}\left|\varphi(x)-\sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\right| dx < 2(\varepsilon''')^2 \Rightarrow$$

$$\left\|\varphi(x)-\sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\right\|_{L_2(-1,1)} < \sqrt{2}\varepsilon''' \tag{4.8}$$

Тогда, применяя неравенство треугольника и используя оценки (4.6), (4.7), (4.8), получаем

$$\left\|f(x)-\sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\right\|_{L_2(-1,1)} \leqslant \|f(x)-g(x)\|_{L_2(-1,1)} + \|g(x)-\varphi(x)\|_{L_2(-1,1)} +$$
$$\left\|\varphi(x)-\sum_{n=m}^{N+m} C_n P_n^{(m)}(x)\right\|_{L_2(-1,1)} < \varepsilon' + \varepsilon'' + \sqrt{2}\varepsilon''' < \varepsilon$$

Выберем ε', ε'', $\sqrt{2}\varepsilon'''$ такими, чтобы их сумма была меньше любого наперед заданного ε. ■

Следствия

1. Из замкнутости системы ПФЛ $\{P_n^{(m)}(x)\}$ следует ее полнота, так как система $\{P_n^{(m)}(x)\}$ ортогональна.

2. Система $\{P_n^{(m)}(x)\}$ исчерпывает все СФ ЗШЛ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\dfrac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right) y(x) = 0,\ x \in (-1,1) \\ |y(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

Доказательство. Пусть

$$\exists\,\text{СФ}\ \tilde{y}(x) \neq P_n^{(m)}(x) : \exists\ \text{СЗ}\ \tilde{\lambda} \neq \lambda_n = n(n+1)$$

Тогда в силу общих свойств СФ:

$$\left(\tilde{y}(x), P_n^{(m)}(x)\right) = 0 \text{ при каждом } m, n = 0, 1, \ldots$$

Из полноты $\{P_n^{(m)}(x)\}$ следует, что $\tilde{y}(x) = 0$ ПВ на $[-1,1]$
Значит, $\tilde{y}(x)$ не может быть СФ ЗШЛ. ■

3.

Теорема 4.2.5 (Теорема Стеклова)**.** *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, обращающаяся в ноль на концах отрезка, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $\{P_n^{(m)}(x)\}$, то есть если $f(x) \in C[-1,1]^{(2)}$, $f(-1) = f(1) = 0$, то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(m)}(x)$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n^{(m)}(x) dx$$

4.2.3 Система сферических функций

Лемма 4.2.6. *Пусть $G \subset E^n$, $D \subset E^m$, где E^n, E^m — евклидовы пространства размерностей n и m соответственно. Пусть, кроме того, система функций $\psi_l(P)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ замкнута и ортонормирована в области D, а система $\varphi_{kl}(M)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — в G.*
Тогда система функций $\chi_{kl}(M, P) = \varphi_{kl}(M)\psi_l(P)$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ замкнута и ортонормирована в области $G \times D$.

Примем эту лемму без доказательства.

Система сферических функций:

$$\begin{cases} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi \\ Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi \end{cases}, \ m = \overline{0, n}$$

Или, в комплексной форме

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Замкнутость $\{Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)\}$ следует из леммы 4.2.6, замкнутости $\{P_n^{(m)}(x)\}$ и замкнутости системы тригонометрических функций.

Полнота следует замкнутости и ортогональности.

Система сферических функций исчерпывает все СФ ЗШЛ:

$$\begin{cases} \triangle_{\theta\varphi} Y(\theta, \varphi) + \lambda Y(\theta, \varphi) = 0 \\ |Y(\theta, \varphi)| < \infty \\ Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Здесь $\lambda_n = n(n+1)$, СЗ вырождены, кратность вырождения $(2n+1)$

Теорема 4.2.7 (Теорема Стеклова)**.** *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на Ω функция $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $\{Y_n^{(m)}(x)\}$:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n Y_n^{(m)}(x)$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2\pi(1+\delta_0^m)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int\limits_{-1}^{1} f(x) Y_n^{(m)}(x) dx$$

4.2.4 Системы полиномов Эрмита и Лагерра

Теорема 4.2.8. *Система полиномов Эрмита полна в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой прямой, и квадратично интегрируема с весом e^{-x^2}.*

Часть II

Уравнения математической физики

Глава 5

Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Введение

Рассмотрим уравнение вида:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_2}, \ldots, u_{x_ix_j}, \ldots, u_{x_nx_n}) = 0$$

где u — искомая функция.
Чаще всего это уравнение имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1, x_2, \ldots, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 5.0.1. *Уравнение называется* <u>*линейным*</u>*, если оно линейно относительно u и ее производных:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где $a_{ij},\ b_i,\ c$ — функции только $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 5.0.2. *Уравнение называется* <u>*квазилинейным*</u>*, если:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1, x_2, \ldots, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Определение 5.0.3. *Если правая часть $f(\ldots) \equiv 0$, то уравнение называется однородным.*

Определение 5.0.4.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}$$

называется главной частью линейного (квазилинейного) уравнения.

5.1 Классификация дифференциальных уравнений в частных производных II порядка в случае двух переменных (x, y)

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{5.1}$$

Определение 5.1.1. *Если в (5.1) $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, то оно называется линейным в главной части.*

Определение 5.1.2. *Линейное уравнение в частных производных II порядка в случает двух переменных — это уравнение вида*

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y) \tag{5.2}$$

где $a_{ij},\ b_i,\ c$ — функции только (x, y).
Если в (5.2) $f(x, y) \equiv 0$, то (5.2) называется линейным однородным.

Сделаем замену:

$$\xi = \varphi(x, y),\ \ \eta = \psi(x, y)$$

где $\varphi,\ \psi \in C^{(2)}$, и их якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$$

и есть обратное преобразование

$$x = x(\xi, \eta),\ \ y = y(\xi, \eta)$$

$$u(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

Вопрос: Как выбрать замену, чтобы уравнение (5.1) приняло наиболее простой вид?

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x$$

$$u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$$

Выполнив замену, получим новое уравнение:

$$\bar{a}_{22}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{22}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0$$

где:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2
\end{aligned}$$

Замечание. При таком преобразовании не теряется линейность уравнения. Рассмотрим, желая выкинуть $\bar{a}_{11}$ ($\bar{a}_{11} \to 0$)

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \tag{5.3}$$

И, по аналогии с ним, ОДУ

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{5.4}$$

Лемма 5.1.1. *Если $z = \varphi(x, y)$ — частное решение уравнения (5.3), то $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (5.4); и если $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (5.4), то $z = \varphi(x, y)$ — частное решение уравнения (5.3).*

Доказательство.

1. Из условия

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$$

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{5.5}$$

Из $\varphi(x, y) = C$ y — неявная функция:

$$y = y(x, C)$$

По теореме о производной неявной функции:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\bigg|_{y=y(x,C)}$$

Подставим полученное выражение в (5.5) и домножим его на dx^2

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

То есть, $\varphi(x, y) = C$ определяет решение уравнения (5.4).

2. Пусть теперь $\varphi(x,y) = C$ — общий интеграл уравнения (5.4). Тогда через C_0 проходит интегральная кривая:

$$C_0 = \varphi(x,y)$$

$$y = y(x, C_0),\ \ y_0 = y(x_0, C_0)$$

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\Bigg|_{y=y(x,C_0)} =$$

$$a_{11}\left(-\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{dy}{dx}\right) + a_{22}\Bigg|_{y=y(x,C_0)} = 0 \Rightarrow$$

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$$

Выполняется всегда при $y = y_0,\ x = x_0$. Это значит, что $\varphi(x,y)$ — решение уравнения (5.3).

■

Определение 5.1.3. *Уравнение (5.4) называется характеристическим уравнением уравнения (5.1).*

Мы видим, что уравнение (5.4) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{5.6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Определение 5.1.4. *Уравнение (5.1) называется в точке M уравнением:*

1. *гиперболического типа, если $\triangle(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$*
2. *эллиптического типа, если $\triangle(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$*
3. *параболического типа, если $\triangle(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$*

Замечания:

1. В различных точках области уравнение может иметь различный тип. Например,

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

имеет при $y > 0$ эллиптический тип, при $y < 0$ гиперболический тип, а при $y = 0$ — параболический. В общем случае, такое уравнение называется уравнением смешанного типа

2. Тип уравнения не меняется при замене переменных:

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right) D$$

5.2 Преобразование дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду в случае двух независимых переменных

1. Уравнение гиперболического типа.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$$

Характеристическое уравнение имеет два различных вещественных решения: $\varphi(x, y) = C$, $\psi(x, y) = C$.
Сделаем замену переменных:

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y)$$

Тогда:

$$\bar{a}_{11} = 0, \ \bar{a}_{22} = 0$$

В новых переменных уравнение будет иметь вид:

$$U_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \tag{5.7}$$

где $\Phi_1 = -\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{22}}$

Определение 5.2.1. *Уравнение* (5.7) *называется* <u>*первой канонической формой для уравнения гиперболического типа*</u>.

Можно привести уравнение (5.7) к другому виду. Сделаем замену:

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \ \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\boxed{U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \Phi_2} \tag{5.8}$$

где $\Phi_2 = 4\Phi_1$

Определение 5.2.2. *Уравнение* (5.8) *называется* <u>*второй канонической формой для уравнения гиперболического типа*</u>.

2. Уравнение эллиптического типа.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

Уравнение характеристик имеет два комплексно-сопряженных решения.
Пусть $\varphi(x, y)$ — комплексный интеграл уравнения (5.6). Сделаем следующую замену:

$$\varphi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$$

$$\psi(x,y) = \xi(x,y) - i\eta(x,y)$$

Получится уравнение вида

$$U_{\varphi\psi} = \tilde{\Phi}$$

где $\tilde{\Phi} = -\dfrac{\bar{F}}{2\bar{a}_{22}}$

Чтобы перейти к действительным переменным, выберем

$$\xi = \frac{\varphi + \psi}{2}, \ \eta = \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Тогда

$$\boxed{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \Phi} \tag{5.9}$$

где $\Phi = \tilde{\Phi}$

Определение 5.2.3. *Уравнение* (5.9) *называется* *канонической формой для уравнения эллиптического типа.*

Замечание. Данное преобразование возможно только в том случае, когда коэффициенты являются аналитическими функциями.

3. Уравнение параболического типа.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

Характеристическое уравнение имеет два совпадающих вещественных решения. Общий интеграл уравнения (5.4): $\varphi(x,y) = C$.
Сделаем замену переменных:

$$\xi = \varphi(x,y), \ \eta = \psi(x,y)$$

где $\psi(x,y) \in C^{(2)}$, и ψ не зависит от φ, то есть

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$$

Тогда

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y) \cdot (\sqrt{a_{11}}\nu_x + \sqrt{a_{22}}\nu_y) = 0$$

Получаем:

$$\boxed{U_{\eta\eta} = \Phi} \tag{5.10}$$

где $\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$

Определение 5.2.4. *Уравнение* (5.10) *называется* *канонической формой для уравнения параболического типа.*

5.3 Классификация дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1,\ldots,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) = 0 \tag{5.11}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, при $i,j = \overline{1,n}$
Сделаем замену:

$$\xi_k = \xi_k(x_1,\ldots,x_n),\ \ k = \overline{1,n}$$

где $\xi_k \in C^{(2)}$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

$$\frac{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$$

— невырожденное преобразование.

Так как $D \neq 0$, то существуют

$$x_i = x_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)$$

$$U(\xi_1,\ldots,\xi_n) = U(x_1(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ldots,x_n(\xi_1,\ldots,\xi_n))$$

Тогда:

$$U_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} U_{\xi_k}\alpha_{ik},\ \ \alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

$$U_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} U_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} U_{\xi_k}\left(\xi_k\right)_{x_ix_j}$$

Новое уравнение имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a_{kl}}U_{\xi_k\xi_l} + \bar{F}(x_1,\ldots,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) = 0$$

Обозначим:

$$Q(y_1,\ldots,y_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j \tag{5.12}$$

где

$$a_{ij}^0 = a_{ij}(x_1^0,\ldots,x_n^0)$$

Делаем линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^0 \eta_k \tag{5.13}$$

Тогда квадратичная форма (5.12)

$$\bar{Q}(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l$$

где

$$\bar{a}_{ij}^0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik}^0 \alpha_{jl}^0 \tag{5.14}$$

При нашем преобразовании оказывается, что $\bar{a}_{kl}$ преобразуется:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{lk} \tag{5.15}$$

Сравнивая (5.14) и (5.15), мы видим, что коэффициенты главной части (5.11) преобразуются аналогично коэффициентам формы (5.12) при преобразовании (5.13).

Вспомним теорему из линейной алгебры:

Теорема 5.3.1. *У всякой симметричной квадратичной формы коэффициенты могут быть приведены с помощью линейного преобразования к каноническому диагональному виду, причем* $\bar{a}_{kk}^0 = -1$ *или* 0 *или* 1.

Следовательно, выбирая невырожденное преобразование так, чтобы

$$\alpha_{ik}(M_0) \ = \left.\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right|_{M_0} = \alpha_{ik}^0$$

мы приводим матрицу к диагональному виду, то есть все коэффициенты в новой матрице, кроме тех, что на главной диагонали, равны нулю. Имеет место

Теорема 5.3.2 (Закон инерции квадратичной формы)**.** *Число отрицательных, нулевых и положительных элементов, стоящих на главной диагонали матрицы квадратичной формы, инвариантно относительно линейных преобразований.*

Определение 5.3.1. *Уравнение* (5.11) *в т.* M_0 *называется* <u>*уравнением:*</u>

1. <u>*эллиптического типа*</u>*, если все* $\bar{a}_{kk}^0$ *одного знака.*

2. <u>*гиперболического типа*</u> *(нормального гиперболического типа), если* $n-1$ *коэффициентов одного знака и один — противоположного.*

3. <u>*ультрагиперболического типа*</u>*, если* $n-m$ *коэффициентов одного знака, а* m *— противоположного.*

4. *<u>параболического типа</u>, если есть хотя бы один нулевой (равный нулю) коэффициент.*

Выбирая преобразование в т. M_0 мы получаем:

1. для эллиптического типа

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_{\xi_k\xi_k} + \Phi = 0}$$

2. для гиперболического типа

$$\boxed{U_{\xi_1\xi_1} = \sum_{k=2}^{n} U_{\xi_k\xi_k} + \Phi}$$

3. для ультрагиперболического типа

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} U_{\xi_k\xi_k} = \sum_{k=m+1}^{n} U_{\xi_k\xi_k} + \Phi}$$

$m > 1,\ n - m > 1$

4. для параболического типа

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-m} U_{\xi_k\xi_k} + \Phi = 0}$$

$m \neq 0$

Возникает вопрос: если в некой окрестности M_0 уравнение (5.11) принадлежит одному виду, можно ли его привести к каноническому виду во всей окрестности?

$$\bar{a}^0_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j} = 0$$

Количество условий, которым должны удовлетворять функции $\xi(x_1, \ldots, x_n)$, чтобы обратились в нуль все коэффициенты при смешанных производных, равно:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Если $n > 3$, то число условий будет больше числа функций, поэтому диагонализировать не получится.
Если $n = 3$, то число условий будет равно числу функций. Диагонализировать получится, но отнормировать — нет.
Итак, если $n \geqslant 3$, то привести уравнение всюду к каноническому виду нельзя. Но если все $a_{ij} = const$, то если мы сможем привети уравнение к КВ в одной точке, то мы сможем сделать то же и в любой другой точке.

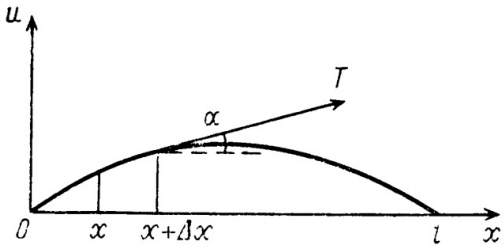
Глава 6

Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач

6.1 Физические задачи, связанные с волновыми процессами

6.1.1 Малые поперечные колебания струны

Будем считать, что смещения струны расположены в одной плоскости. В этому случае процесс колебаний струны можно описать с помощью функции $u(x,t)$, представляющей собой поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t.



Ввиду малости колебаний, возникающие напряжения определяются законом Гука, а также будем учитывать лишь члены первого порядка малости.

Посчитаем удлинение участка струны $(x, x+\Delta x)$ в момент времени t. Длина дуги этого участка равна:

$$S = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx \simeq \Delta x.$$

Следовательно, в пределах принятой точности удлинения участка струны не происходит. Поэтому в силу закона Гука величина натяжения T в каждой точке не изменяется со временем.

Проекции натяжения на оси x и u равны

$$T_x = T(x)\cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \simeq T(x), \tag{6.1}$$

$$T_u = T(x)\sin\alpha \cong T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)u_x,$$

где α — угол между касательной к кривой $u(x,t)$ и осью x.

Сумма проекций сил, действующих на участок $(x, x+\Delta x)$ струны вдоль оси x, равна

$$T_x(x) - T_x(x+\Delta x) = 0,$$

То есть, с учетом (6.1) получим $T(x) = T(x+\Delta x)$. В силу произвольности точки x получаем, что $T(x) = T_0$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона для участка струны $(x, x+\Delta x)$. Обозначим линейную плотность струны через $\rho(x)$, а через f(x, t) — плотность импульса внешней поперечной силы, приложенной к струне. Тогда:

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \{u_t(\xi, t+\Delta t) - u_t(\xi, t)\}\,\rho(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} T_0\,\{u_x(x+\Delta x,\tau) - u_x(x,\tau)\}\,d\tau + \int\limits_x^{x+\Delta x}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{6.2}$$

Применяя к формуле (6.2) теорему о среднем и формулу конечных приращений, получим

$$u_{tt}(x^*, t^*)\rho(x^*)\Delta t\Delta x = T_0 u_{xx}(x^{**}, t^{**})\Delta t\Delta x - f(x^{***}, t^{***})\Delta t\Delta x, \tag{6.3}$$

где

$$x^*, x^{**}, x^{***} \in (x, x+\Delta x),$$
$$t^*, t^{**}, t^{***} \in (t, t+\Delta t).$$

Сократив обе части формулы (6.3) на $\Delta t\Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получим

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = T_0 u_{xx}(x,t) + f(x,t). \tag{6.4}$$

Здесь $a_{11} = \rho(x) > 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -T_0 < 0 \Rightarrow \triangle = \rho(x)T_0 > 0$. Значит, уравнение гиперболическое.

Если плотность среды постоянная $\rho(x) = \rho_0$, то уравнение (6.4) обычно записывается в виде

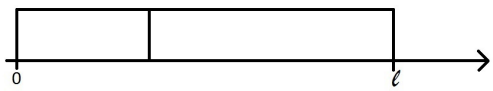
$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + F,}$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $F = \dfrac{1}{\rho_0}f$.

6.1.2 Малые продольные колебания стержня

$$\hat{x} = x + u(x,t),$$

$\hat{x}$ — эйлеровы координаты, $x+u(x,t)$ — лагранжевы. $\rho(x)$ — плотность, $k(x)$ — коэффициент упругости, $f(x,t)$ — плотность внешней силы.



Малыми будем считать колебания, подчиняющиеся закону Гука

$$F(x,t) = k(x)\varepsilon(x,t),$$

где

$$\varepsilon(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\widetilde{\Delta x}}{\Delta x}$$

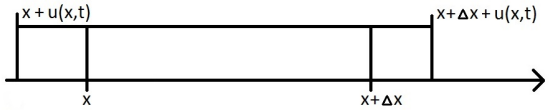
— относительное удлинение.

$$\widetilde{\Delta x} = x + \Delta x + u(x+\Delta x, t) - x -$$

$$-u(x,t) - \Delta x = u(x+\Delta x, t) - u(x,t).$$

$$\varepsilon(x,t) = u_x(x,t) \Rightarrow$$

$$F(x,t) = k(x)u_x(x,t).$$



За время Δt

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \{u_t(\xi, t+\Delta t) - u_t(\xi,t)\}\, \rho(\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} \{k(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,\tau) - k(x)u_x(x,\tau)\}\, d\tau + \int\limits_x^{x+\Delta x}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (6.5)$$

Применяя к формуле (6.5) теорему о среднем и формулу конечных приращений, получим

$$u_{tt}(x^*,t^*)\rho(x^*)\Delta t\Delta x = \frac{\partial}{\partial x}\{k(x)u_x(x^{**},t^{**})\}\,\Delta t\Delta x - f(x^{***},t^{***})\Delta t\Delta x, \qquad (6.6)$$

где

$$x^*, x^{**}, x^{***} \in (x, x+\Delta x),$$

$$t^*, t^{**}, t^{***} \in (t, t+\Delta t).$$

Разделив обе части формулы (6.6) на $\Delta t\Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получим

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) \qquad (6.7)$$

— дифференциальное уравнение колебаний в стержне.

Если плотность среды постоянная $\rho(x) = \rho_0$, $k(x) = k_0$, то уравнение (6.7) обычно записывается в виде

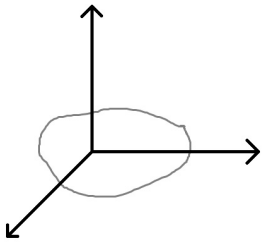
$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + F,}$$

где $a^2 = \dfrac{k_0}{\rho_0}$, $F = \dfrac{1}{\rho_0} f$.

6.1.3 Случай многих переменных

Малые поперечные колебания мембраны

В математической физике мембрана — это тонкая пленка, оказывающая сопротивление натяжке. Аналогично колебаниям струны, вводим $u(x, y, t)$, ρ_0, T_0, $f(x, y, t)$.



$$\rho_0 u_{tt} = T_0 \left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, y, t).$$

Сделав замену: $t = \sqrt{\rho_0}\,\tau$, $x = \sqrt{T_0}\,\xi$, $y = \sqrt{T_0}\,\eta$, получим:

$$u_{\tau\tau} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, \tau).$$

Это уравнение — гиперболического типа.

Задачи электродинамики

$$\begin{cases} rot\,\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}^{\text{ст}}, \\ rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\,\vec{D} = \rho, \\ div\,\vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \end{cases} \tag{6.8}$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$; $\mu_a = \mu \cdot \mu_0$, $\mu_0 = 3\pi \cdot 10^7 \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Мы будем работать в СИ, а не в СГСЭ. Прелесть СИ в том, что уравнения Максвелла не имеют в ней множителей вида $\dfrac{4\pi}{c}$, которые в математической физике будут только мешать. У нас $\varepsilon_a = const,\ \mu_a = const$

Имеем:

$$rot\left(rot\,\vec{H}\right) = grad\,div\,\vec{H} - \vec{\nabla}^2\vec{H} = \varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{E} + \sigma rot\,\vec{E} + rot\,\vec{j}^{\text{ст}} =$$

$$= -\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu_a\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + rot\,\vec{j}^{\text{ст}}.$$

$$\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu_a\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla}^2\vec{H} + rot\,\vec{j}^{\text{ст}}.$$

Это уравнение вида

$$ddut2 - \alpha\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\triangle u + f(M,t),$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon_a},\ a^2 = \frac{1}{\varepsilon_a\mu_a}.$$

Замечание. Равенство $\vec{\nabla}^2 \equiv \triangle$ выполняется только в декартовой системе координат, так как в ней орты неподвижны. В других системах, где подвижные орты, оно не выполняется в общем случае.

6.2 Постановка краевых задач

Определение 6.2.1. *Начально-краевая задача называется* <u>*поставленной корректно (по Адамару)*</u>*, если ее решение:*

1. *существует,*
2. *единственно,*
3. *устойчиво (то есть непрерывно зависит от входных условий).*

Определение 6.2.2. *Назовем* <u>*$n+1$-мерным цилиндром*</u> *множество*

$$Q_T \equiv D\times(0,T\,] = \{(M,t) : M\in D,\ t\in(0,T\,]\}\,.$$

Тогда <u>*$n+1$-мерный замкнутый цилиндр*</u>

$$\bar{Q}_T \equiv \bar{D}\times[\,0,T\,] = \left\{(M,t) : M\in\bar{D},\ t\in[\,0,T\,]\right\}.$$

Пусть $D = D_0$

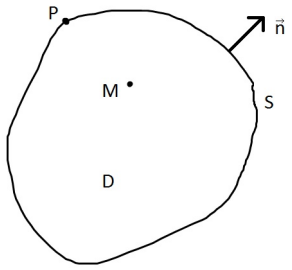
$$\rho(M)u_{tt} = div\,(k(M)grad\,u) + f(M,t), \tag{6.9}$$

где $(M,t) \in Q_\infty$.

Начальные условия

$$u(M,0) = \varphi(M), \tag{6.10}$$

$$u_t(M,0) = \psi(M). \tag{6.11}$$



Граничные условия

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P)u(P,t) = \mu(P,t), \tag{6.12}$$

где $P \in S,\ t \in [0,+\infty)$.

Определение 6.2.3. *Функция $u(M,t)$ называется <u>классическим решением</u> задачи (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), если*

1. *$u(M,t)$ — решение этой задачи,*
2. *$u(M,t) \in C^{(2)}(Q_\infty) \bigcap C^{(1)}(\bar{Q}_\infty)$,*
3. *удовлетворяет уравнению (6.9),*
4. *непрерывно примыкает к условиям (6.10), (6.11), (6.12), то есть $\lim\limits_{t\to 0} u(M,t) = \varphi(M)$, и т. д.*

Замечание. Пункт 4 можно выкинуть, так как он следует из $u(M,t) \in C^{(1)}(\bar{Q}_\infty)$. Пункт 1, наверное, тоже,

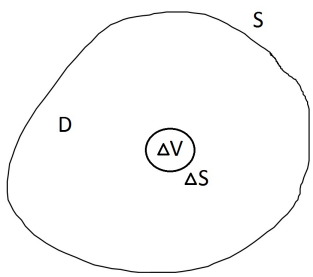
$$\alpha(P)\frac{\partial \varphi(n)}{\partial n} + \beta(P)\varphi(n) = \mu(P,0),$$

$$\alpha(P)\frac{\partial \psi(n)}{\partial n} + \beta(P)\psi(n) = \frac{\partial}{\partial t}\mu(P,0).$$

6.3 Уравнение теплопроводности

Рассмотрим область D вещества с источниками и стоками тепла и с разной температурой. Закон Фурье:

$$dQ = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma dt.$$



$k(M)$ — коэффициент теплопроводности.

$u(M,t)$ — температура.
$c(M)$ — теплоемкость.
$\rho(M)$ — плотность вещества.
$f(M,t)$ — плотность источников и стоков тепла.

За время Δt

$$\Delta u = u(M, t+\Delta t) - u(M,t),$$

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{\Delta V} c(M)\rho(M)\left\{u(M,t+\Delta t) - u(M,t)\right\} dV,$$

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\Delta S} k(P)\frac{\partial u}{\partial n_{ext}} d\sigma d\tau.$$

Имеет место формула Остроградского-Гаусса: Для векторного поля

$$\vec{A} \in C^{(1)}(D) \bigcap C(\bar{D}),\ \bar{D} = D \bigcup S$$

верна формула:

$$\boxed{\int\limits_{D} \vec{A}(M) dV = \oint\limits_{S} \vec{A}\vec{n}_{ext} d\sigma.}$$

$$\vec{A}(M) = k(M) grad\, u(M),$$

$$(\vec{n}_{ext}, grad\, u) = \frac{\partial}{\partial n_{ext}} u,$$

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\Delta V} div\left(k(M) grad\, u\right) dV d\tau,$$

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \int\limits_{\Delta V} f(M,t) dV d\tau.$$

Уравнение теплового баланса:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 \tag{6.13}$$

Собрав все в (6.13) и устремив $\Delta V \to M,\ \Delta t \to 0$, получим

$$c(M)\rho(M) u_t = div\left(k(M) grad\, u(M)\right) + f(M,t),\ (M,t) \in Q_\infty. \tag{6.14}$$

Это уравнение параболического типа.
Начальные условия:

$$u(M,0) = \varphi(M),\ M \in \bar{D}. \tag{6.15}$$

Граничные условия:

$$\alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n}(P,t) + \beta(P) u(P,t) = \mu(P,t), \tag{6.16}$$

где $P \in S,\ t \in [0, +\infty)$.

Определение 6.3.1. *Функция $u(M,t)$ называется классическим решением задачи (6.14), (6.15), (6.16), если:*

1. *$u(M,t)$ удовлетворяет уравнению (6.14) при $(M,t) \in Q_\infty$,*
2. *$u(M,t)$ удовлетворяет условиям (6.15) и (6.16),*
3. *$u(M,t)$ непрерывна вместе с первыми и вторыми производными по M.*

6.4 Стационарные процессы

6.4.1 Уравнение теплопроводности

$$c\rho u_t = div\,(k(M) grad\, u) + f(M),$$
$$u = u(M),\ \ u_t = 0.$$

Тогда

$$div\,(k(M) grad\, u) = -f(M),$$

где

$$k = k_0 = const.$$

Тогда мы получаем уравнение Пуассона

$$\boxed{\triangle u = -\frac{1}{k_0} f(M)}$$

или уравнение Лапласа

$$\boxed{\triangle u = 0}$$

6.4.2 Стационарные задачи электродинамики

Из (6.8) и стационарности

$$rot\,\vec{E} = 0.$$

Тогда

$$\vec{E} = -grad\, u,$$
$$div\,\vec{D} = \rho.$$

Тогда будем иметь:

$$div\,(\varepsilon_a(M) grad\, u) = -\rho(M).$$

6.4.3 Уравнение колебаний

$$u_{tt} + \alpha u_t = a^2 \triangle u + F(M,t), \tag{6.17}$$

где вынуждающая сила

$$F(M,t) = F(M)e^{-i\omega t}.$$

Разделим переменные:

$$u(M,t) = v(M)e^{-i\omega t}.$$

Подставим в (6.17)

$$-\omega^2 v - i\alpha\omega v = a^2 \triangle v + F(M) \Rightarrow$$

$$\boxed{\triangle v + k^2 v = -f(M),}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2 + i\alpha\omega}{a^2}, \ f = \frac{1}{a^2}F.$$

— уравнение Гельмгольца.

6.4.4 Установившиеся электромагнитные колебания

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$rot\,\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$div\,H = 0,$$

$$div\,E = 0.$$

Гармонические колебания:

$$\vec{H}(M,t) = \vec{H}_0(M)e^{-i\omega t},$$

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(M)e^{-i\omega t}.$$

Тогда:

$$rot\,\vec{H}_0 = -i\omega\varepsilon_a \vec{E}_0,$$

$$rot\,\vec{E}_0 = -i\omega\mu_a \vec{H}_0,$$

$$rot\left(rot\,\vec{H}_0\right) = grad\,div\,\vec{H}_0 - \nabla^2\vec{H}_0 = -i\omega\varepsilon_a rot\,\vec{E} = \omega^2\varepsilon_a\mu_a\vec{H}_0.$$

Получаем уравнение и к нему НГУ:

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{H}_0 + \omega^2\varepsilon_a\mu_a\vec{H}_0 = 0, \\ div\,(k(M)grad\,u) = -f(M), \ M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = \mu(P), \ P \in S. \end{cases} \tag{6.18}$$

Определение 6.4.1. *Функция $u(M,t)$ называется* <u>*классическим решением*</u> *задачи* (6.18), *если*

1. *$u(M)$ является решением уравнения* (6.18),
2. *$u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D})$,*
3. *$u(M)$ непрерывно примыкает к начально-граничным условиям.*

Глава 7

Метод разделения переменных (метод Фурье)

7.1 Постановка общей начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u] + f(M,t) \text{ — уравнение,} \\ (M,t) \in Q_\infty, \\ \left.\begin{array}{l} u(M,0) = \varphi(M),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \varphi_1(M), \ldots, \\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = \varphi_m(M),\ M \in \bar{D}, \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{начальные условия} \\ \text{по времени,}\end{array} \\ N_P[u(P,t)] = \mu(P,t) \text{ — граничные условия,} \end{cases} \tag{7.1}$$

где

$$\begin{gathered} P \in S\ (S \text{ — граница } D),\ t \in [0,+\infty), \\ P_t[u] \equiv \sum_{k=0}^{m+1} a_k(t)\frac{\partial^k u(M,t)}{\partial t^k}, \\ L_M[u] \equiv div\,\{k(M)grad\,(u)\} - q(M)u, \\ N_P[u] \equiv \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u, \\ k(M) > 0,\ \rho(M) > 0, q(M) \geqslant 0 \text{ при } M \in D, \\ \alpha(P) \geqslant 0,\ \beta(P) \geqslant 0,\ \alpha(P) + \beta(P) > 0. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Определение 7.1.1. *Функция $u(M,t)$ называется* <u>*классическим решением*</u> *задачи (7.1), если*

1. $u(M) \in C^{(2,m+1)}_{M,t}(Q_\infty) \bigcap C^{(1,m)}_{M,t}(\bar{Q}_\infty)$,
2. *$u(M)$ удовлетворяет уравнению (7.1) в классическом смысле,*
3. *$u(M)$ непрерывно примыкает к начальным и граничным условиям.*

Для существования классического решения задачи (7.1) необходимо, чтобы

$$\boxed{\alpha(P)\frac{\partial\varphi_l(P)}{\partial n}+\beta(P)\varphi_l(P)=\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mu(P,0),}$$

где $l=\overline{0,m},\ P\in S$.

В силу линейности задачи (7.1) можно провести <u>редукцию общей задачи</u>, то есть

$$u(M,t)=u_I(M,t)+u_{II}(M,t)+u_{III}(M,t),$$

так, чтобы

$$u_I(M,t): f\equiv 0,\ \varphi_l\neq 0,\ \mu\equiv 0,$$
$$u_{II}(M,t): f\neq 0,\ \varphi_l\equiv 0,\ \mu\equiv 0,$$
$$u_{III}(M,t): f\equiv 0,\ \varphi_l\equiv 0,\ \mu\neq 0,$$

и решать три задачи с нулевыми условиями. (однородными)

7.2 Первая и вторая формулы Грина

Пусть скалярное поле $\varphi(M)\in C^{(1)}$, векторное поле $\vec{A}(M)\in C^{(2)}$. Тогда выполняется равенство

$$div\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi\, div\,\vec{A}+\vec{A}\,grad\,\varphi. \tag{7.3}$$

Из (7.3) $\Rightarrow$

$$\varphi\, div\,\vec{A}=div\left(\varphi\vec{A}\right)-\vec{A}\,grad\,\varphi. \tag{7.4}$$

Пусть функции $k(M),\ v(M)\in C^{(1)}(D)\bigcap C(\bar{D}),\ u(M)\in C^{(2)}(D)\bigcap C^{(1)}(\bar{D})$ таковы, что

$$\varphi(M)=v(M),$$
$$\vec{A}(M)=k(M)grad\,u(M).$$

Тогда получаем из (7.4)

$$\int\limits_D v(M)div\,(k(M)grad\,u)\,dV=\underbrace{\int\limits_D div\,(vk\,grad\,u)\,dV}_{=I}-\int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV. \tag{7.5}$$

Здесь

$$I=\oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma. \tag{7.6}$$

Подставим (7.6) в (7.5):

$$\int\limits_D v(M)div\,(k(M)grad\,u)\,dV=\oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n}d\sigma-\int\limits_D k\,grad\,u\,grad\,v\,dV.$$

Здесь $k(M),\ v(M) \in C^{(1)}(D) \bigcap C(\bar{D}),\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D})$.

Получаем первую формулу Грина:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int\limits_D v(M) L_M[u(M)] dV = \oint\limits_S k(P) v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n} d\sigma - \\ &- \int\limits_D k\, grad\, u\, grad\, v\, dV - \int\limits_D q(M) u(M) v(M) dV, \end{aligned}} \tag{7.7}$$

где $u(M),\ v(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D})$.

Поменяем в (7.7) u и v местами и вычтем полученную формулу из (7.7). Получим вторую формулу Грина:

$$\boxed{\int\limits_D \{v(M) L_M[u(M)] - u(M) L_M[v(M)]\}\, dV = \oint\limits_S k(P) \left\{ v(P) \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} d\sigma.}$$

7.3 Задача I. (с однородными уравнением и ГУ)

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[u] = L_M[u], \\ u(M,0) = \varphi(M),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \varphi_1(M), \ldots,\ \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = \varphi_m(M),\ M \in \bar{D}, \\ N_P[u(P,t)] = 0. \end{cases}$$

Идея Фурье: искать решение в виде

$$w = v(M) T(t).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[w] = L_M[w], & (M,t) \in Q_\infty, \\ N_P[w] = 0, & P \in S,\ t \in [0, +\infty), \\ w(M,t) = v(M) T(t), & w \not\equiv 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

В результате разделения переменных будем иметь

$$\frac{P_t[T]}{T(t)} = \frac{L_M[v]}{\rho(M) v(M)} = -\lambda = const. \tag{7.9}$$

Так как в (7.9) левая часть зависит только от t, а правая — только от M, а t и M — независимые переменные, то равенство в (7.9) возможно, только если обе части равны константе $-\lambda$.

Получаем задачу Штурма-Лиувилля на пространственную часть с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} L_M[v(M)] + \lambda\rho(M)v(M) = 0, & M \in D, \\ N_P[v(P)] = 0, & P \in S. \end{cases} \tag{7.10}$$

Свойства собственных значений и собственных функций: (спектральная теория операторов)

1. Если $k(M) \in C^{(1)}(\bar{D})$; $\rho(M)$, $k(M) \in C(\bar{D})$, то существует счетное множество вещественных СЗ $\{\lambda_n\}$ и СФ $\{v_n(M)\}$, кратность (ранг) которых равны единице.

   Доказательство будет дано после сведения задачи к интегральному уравнению Фредгольма.

2. СФ, соответствующие разным СЗ, ортогональны с весом $\rho(x)$

   Доказательство.

$$L_M[v_k] = -\lambda_k\rho v_k, \ N_P[v_k(P)] = 0, \ P \in S, \tag{7.11}$$

$$L_M[v_l] = -\lambda_l\rho v_l, \ N_P[v_l(P)] = 0, \ P \in S. \tag{7.12}$$

   Найдем

$$I = \int\limits_D \{(7.11)v_l - (7.12)v_k\}\, dV.$$

$$I = \int\limits_D \{L_M[v_k]v_l - L_M[v_l]v_k\}\, dV = (\lambda_l - \lambda_k)\int\limits_D \rho(M)v_l v_k dV.$$

   С другой стороны,

$$I = \oint\limits_S k(P)\left\{v_l\frac{\partial v_k}{\partial n} - v_k\frac{\partial v_l}{\partial n}\right\} d\sigma.$$

   Здесь $v_k, \ v_l \in C^{(2)}(D)\bigcap C^{(1)}(\bar{D})$. Так как

$$\frac{\partial v_k}{\partial n} = -\frac{\beta}{\alpha}v_k,$$

$$\frac{\partial v_l}{\partial n} = -\frac{\beta}{\alpha}v_l.$$

   (из граничных условий), то $I \equiv 0$.

   Так как ранг СЗ и СФ равен 1, то при $k \neq l$ $\lambda_k - \lambda_l \neq 0$. Значит,

$$\int\limits_D \rho(M)v_l(M)v_k(M)dV = 0, \ l \neq k,$$

   то есть СФ ортогональны с весом ρ. ■

3. Ортогональная система функций $\{v_n(M)\}$ является замкнутой, а, следовательно, и полной, и исчерпывает все СФ задачи (7.10).

   Справедлива теорема Стеклова:

   Теорема 7.3.1 (Стеклова)**.** *Всякая функция $f(M) \in C^{(2)}(\bar{D})$, $N_P[f(P)] = 0$, при $P \in S$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k v_n(M),$$

   где

$$f_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_D \rho(M) f(M) v_n(M) dV,$$

$$\|v_n\|^2 = \int\limits_D \rho(M) v_n^2(M) dV.$$

4. При выполнении условия (7.2) собственные значения задачи (7.10) вещественны и неотрицательны.

   Доказательство. Имеем:

$$\int\limits_D v_n L_m[v_n] dV = \int\limits_S \underbrace{k(P)}_{>0} v_n \underbrace{\frac{\partial v_n}{\partial n}}_{\geqslant 0} d\sigma -$$

$$- \int\limits_D \underbrace{k(M)}_{>0} (grad\, v_n)^2 dV - \int\limits_D \underbrace{q(M)}_{\geqslant 0} v_n^2(M) dV = -\lambda_k \rho(M) v_n > 0.$$

   Значит, $\lambda_n \geqslant 0$. ■

   Лемма 7.3.2 (Владимирова)**.** *Для того, чтобы $\lambda_1 = 0$ было СЗ задачи (7.10), необходимо и достаточно, чтобы:*

$$q(M) = 0, \ \beta(P) = 0, \ v_1 \equiv const$$

Вернемся к временной части. Задача на временную часть:

$$P_t[T_n(t)] + \lambda_n T_n(t) = 0,$$

$$a_{m+1}(t) T_n^{(m+1)} + \ldots + a_0(t) T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = 0.$$

Собственные функции этой задачи

$$\{T_{nk}(t)\}, \ k = \overline{0, \ m},$$

$$T_{nk}^{(l)}(0) = \delta_k^l, \ l, \ k = \overline{0, \ m}.$$

Тогда временная часть

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{nk} T_{nk}(t),$$

и решение всей задачи

$$\boxed{u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \sum_{k=0}^{m} C_{nk} T_{nk}(t).}$$

Коэффициенты C_{nl} определим из начальных условий:

$$\frac{\partial^l u(M,0)}{\partial t^l} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(M) \sum_{k=0}^{m} C_{nk} T_{nk}^{(l)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nl} v_n(M) = \varphi(M),$$

$$\boxed{C_{nl} = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_D \rho(M) \varphi_l(M) v_n(M) dV, \ l = \overline{0, \ m},}$$

где

$$\|v_n\|^2 = \int\limits_D \rho(M) v_n^2(M) dV.$$

Теорема 7.3.3 (Обобщенный принцип суперпозиции)**.** *Пусть $L[w] = 0$, где L — линейный дифференциальный оператор. Тогда*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n$$

также будет являться решением того же уравнения, если все операции можно проводить путем дифференцирования под знаком суммы.

7.4 Задача II. (с однородными начальными и граничными условиями)

$$\begin{cases} \rho(M) P_t[u] = L_M[u] + f(M,t), & (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \ldots = \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = 0, & M \in \bar{D}, \\ N_P[u(P,t)] = 0 & P \in S, \ t \in [0, +\infty). \end{cases} \tag{7.13}$$

Будем искать решение задачи (7.13) в виде разложения по СФ задачи Штурма-Лиувилля (7.8):

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M), \ \|v_n\| = 1 \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{7.14}$$

$$u_n(t) = \int\limits_D \rho(M)u(M,t)v_n(M)dV, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

Коэффициенты $f_n(t)$ будем искать по методу Галеркина: Домножим уравнение в задаче (7.13) на $v_n(M)$ и проинтегрируем полученное выражение по области D. Получим:

$$P_t[u_n(t)] = \underbrace{\int\limits_D v_n(M)L_M[u]dV}_{=J} + f_n(t), \tag{7.15}$$

где

$$f_n(t) = \int\limits_D f(M,t)v_n(M)dV, n = 1, 2, \ldots. \tag{7.16}$$

Применяя к J вторую формулу Грина и учитывая однородные граничные условия, для функций u и v, получим

$$J = \int\limits_D u \ \underbrace{L[v_n]}_{=-\lambda_n \rho v_n} \ dV.$$

Из (7.15) и (7.16) получаем

$$\begin{cases} P_t[u_n(t)] + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = u_n'(0) = \ldots = u_n^{(m)}(0) = 0. \end{cases}$$

— задача на временную часть (задача Коши).
Частное решение неоднородного уравнения:

$$u_n(t) = \int\limits_0^t K_n(t-\tau)f_n(\tau)d\tau, \tag{7.17}$$

где K_n — ядро, являющееся решением задачи

$$\begin{cases} P_t[K_n] = 0, \\ K_n(0) = K_n'(0) = \ldots = K_n^{(m-1)}(0) = 0; \ K_n^{(m)} = 1. \end{cases}$$

Подставляя (7.17) в (7.14) и расписывая $f_n(t)$ по формуле (7.16), имеем:

$$u(M,t) = \int\limits_0^t \int\limits_D g(M,Q,t-\tau)f(Q,\tau)dV_Q d\tau,$$

где $g(M,Q,t-\tau)$ — ядро резольвентного оператора,

$$g(M,Q,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t-\tau)v_n(M)v_n(Q).$$

7.5 Задача III. (с однородными уравнением и начальными условиями)

$$\begin{cases} \rho(M)P_t[u] = L_M[u], & (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0) = \ldots = \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}(M,0) = 0, & M \in \bar{D}, \\ N_P[u(P,t)] = \mu(P,t) & P \in S,\ t \in [\,0,+\infty). \end{cases} \tag{7.18}$$

Решение задачи (7.18) ищем в виде

$$u(M,t) = v(M,t) + w(M,t),$$

где $w(M,t)$ — решение

$$N_P[w(P,t)] = \mu(P,t),$$

а $v(M,t)$ — решение

$$\rho(M)P_t[v] = L_M[v] + \left(L_M[w] - \rho P_t[w]\right),$$

$$v(M,0) = u(M,0) - w(M,0),\ M \in D$$

— дополнительная неоднородность.

Глава 8

Уравнения эллиптического типа. Гармонические функции

8.1 Определение

Определение 8.1.1. *Функция $u(M) \in C^{(2)}(D)$ называется* <u>*гармонической*</u> *в области D, если $\triangle u(M) = 0$ при $M \in D$.*

Например, $u(M) = r^n$ — гармоническая функция.

8.2 Третья формула Грина

Введем функцию

$$\boxed{v_0(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}.}$$

$$\triangle_M v_0(M) = 0$$

при $M \neq M_0$.

Пусть $u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D})$.

Рассмотрим шар радиуса ε с центром M_0 внутри D.

$$\bar{K}^{\varepsilon}_{M_0} = K^{\varepsilon}_{M_0} + \Sigma^{\varepsilon}_{M_0}.$$

Здесь $K^{\varepsilon}_{M_0}$ — открытый шар, $\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}$ — сфера.

Обозначим

$$D_{\varepsilon} = D \backslash \bar{K}^{\varepsilon}_{M_0}.$$

Имеем: (по II формуле Грина для двух поверхностей)

$$\int\limits_{D_{\varepsilon}} (v_0 \triangle u - u \triangle v_0)\, dV = \oint\limits_{S} \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma + \oint\limits_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} \left(v_0 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) d\sigma.$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial n}\right|_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} = -\left.\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$$I_1 = \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} u\frac{\partial v_0}{\partial n}d\sigma = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2}u(M^*)4\pi\varepsilon^2}_{\text{теорема о среднем}} = 4\pi u(M^*),\ M^* \in \Sigma^\varepsilon_{M_0},$$

$$I_2 = \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}} v_0\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(M^{**})}{\partial n}4\pi\varepsilon^2}_{\text{теорема о среднем}} = 4\pi\varepsilon\frac{\partial u(M^{**})}{\partial n},\ M^{**} \in \Sigma^\varepsilon_{M_0}.$$

При $\varepsilon \to 0,\ M_0 \in D$ имеем:

$$I_2 \to 0,\ I_1 \to 4\pi u(M_0).$$

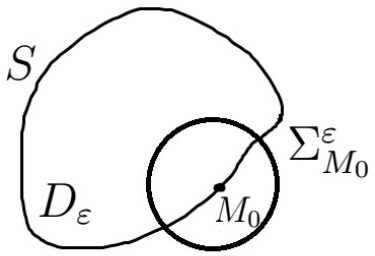
(так как $\dfrac{\partial u(M^{**})}{\partial n}$ — ограничена)

$$u \triangle v_0 = 0.$$

Итак, получаем:

$$4\pi u(M_0) = \oint\limits_S \left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right\}d\sigma_M - \int\limits_D \frac{\triangle u(M)}{r_{MM_0}}dV_M,\ M_0 \in D.$$

Пусть теперь $M_0 \in S$.
Тогда вместо $4\pi u(M_0)$ будет $2\pi u(M_0)$, так как мы будем интегрировать по половине сферы $\Sigma^\varepsilon_{M_0}$.



Если $M_0 \notin \bar{D}$, то $v_0 \in C^{(2)}(D)\bigcap C^{(1)}(\bar{D})$ и является гармонической функцией всюду в области D, и поэтому вместо 4π ставим 0.

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega_3\, u(M_0) = \oint\limits_S \left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)\right\}d\sigma - \int\limits_D \frac{\triangle u(M)}{r_{MM_0}}dV_M, \\ \text{где} \\ \Omega_3 = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \in D, \\ 2\pi, & M_0 \in S, \\ 0, & M_0 \notin \bar{D} \end{cases} \end{array}}$$

— <u>третья формула Грина</u>.

Замечание. В двумерном случае

$$v_0(M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}},$$

$$\triangle v_0 = 0, M \neq M_0,$$

$$\bar{G}_\varepsilon = G_\varepsilon + \Gamma,$$

$$\bar{U}^\varepsilon_{M_0} = U^\varepsilon_{M_0} + C^\varepsilon_{M_0}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_2\, u(M_0) = \oint\limits_\Gamma \left\{ \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} dl_0 - \\ - \int\limits_G \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \triangle u(M) dS_M, \\ \text{где} \\ \Omega_2 = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in G, \\ \pi, & M_0 \in \Gamma, \\ 0, & M_0 \notin \bar{G}. \end{cases} \end{aligned}}$$

8.3 Основные свойства гармонических функций

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

1.

Теорема 8.3.1 (Теорема Гаусса)**.** *Если функция $u(M)$ — гармоническая в области D, то*

$$\boxed{\oint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,} \tag{8.1}$$

где Σ — замкнутая поверхность, $\Sigma \subset D$.

Доказательство. Для доказательство следует применить вторую формулу Грина, положив $v = 1$. ■

Замечание. Пусть $u(M) \in C^{(1)}(\bar{D})$. Тогда можно ослабить условие теоремы, $\Sigma \subset \bar{D}$.

Следствие.

$$\begin{cases} \triangle u(M) = 0, \ M \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P) = h(P), \ P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}). \end{cases} \tag{8.2}$$

Функция $h(P)$ в задаче (8.2) может быть только такая, что

$$\boxed{\oint\limits_S h(P)d\sigma_P = 0.}$$

2. **Существование производных любого порядка.**
$u(M),\ D,\ M \in D_\Sigma$, где $\bar{D}_\Sigma = D_\Sigma + \Sigma$.

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_\Sigma \left\{\frac{1}{r_{PM}}\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\right\} d\sigma. \tag{8.3}$$

Так как P и M никогда не совпадут, $(P \in \Sigma,\ M \notin \Sigma)$ то $v = \dfrac{1}{r_{PM}}$ не имеет особенности и ограничена $\Rightarrow$ интегралы в (8.3) являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки M неограниченное число раз.

3.

Теорема 8.3.2 (Формула среднего значения)**.** *Пусть сфера $\Sigma^R_{M_0} \subset D$. Тогда*

$$\boxed{u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint\limits_{\Sigma^R_{M_0}} u(P)d\sigma_P.}$$

(интегрируем по окружности и делим на ее площадь)
Если $u(M) \in C(\bar{D})$, то возможно $\Sigma^R_{M_0} \subset \bar{D}$.

Доказательство. Применим III формулу Грина:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_\Sigma \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\sigma.$$

Учитывая, что

$$u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R} = -\frac{1}{R^2},\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ из } (8.1),$$

получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint\limits_\Sigma u(P)d\sigma_P.$$

■

8.4 Принцип максимумов

Теорема 8.4.1. *Функция $u(M)$, не равная тождественно постоянной, гармоническая в ограниченной связной области D и непрерывная в $\bar{D}$, достигает своего максимального значения только на границе области.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u(M_0) \geqslant u(M),\ M \in \bar{D}$, $M_0 \in\ D$. (M_0 — внутренняя точка D)

Формула среднего значения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{\Sigma^R_{M_0}} u(P) d\sigma_P \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{\Sigma^R_{M_0}} u(M_0) d\sigma_P = u(M_0).$$

Тогда

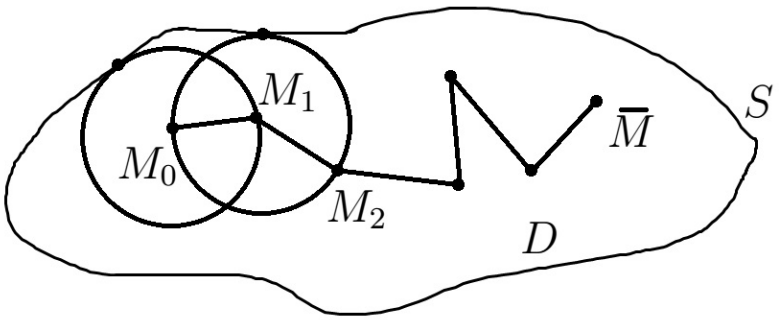
$$u(P)|_{\Sigma^R_{M_0}} = u(M_0). \ \big(u(\text{на сфере}) = u(M_0)\big)$$

Пусть

$$R_0^m = \min \rho(M_0, S).$$

Тогда $\Sigma^{R_0^m}_{M_0}$ касается S в точке M^*.

$$u(M^*) = u(M_0),\ M^* \in S.$$



Так как D — область связная, то любые M_0 и $\bar{M} \in D$ можно соединить ломаной $L(l)$, целиком лежащей в D. Сфера $\Sigma^{R_0^m}_{M_0}$ пересечет $L(l)$ в точке M_1. Вокруг M_1 построим сферу с радиусом $R_1^m = \min \rho(M_1, S)$. Она пересечет $L(l)$ в точке M_2, $u(M_1) = u(M_0)$.

Продолжаем строить окружности, $R_i^m = \min \rho(M_i, S)$, $u(M_i) = u(M_{i-1})$. Продолжая данный процесс, в результате конечного числа шагов, количество которых не более $\dfrac{l}{d}$, где l — длина ломаной, а d — наименьшее расстояние от ломаной до S, установим, что $u(\bar{M}) = u(M_0)$.

Итак, $u(M) = const$ на D. Получаем противоречие. ■

Замечания:

1. Аналогично доказывается принцип минимума.

2. Из всех гармонических функций только константа может достигать своих максимальных и минимальных значений внутри области.

3.

   Теорема 8.4.2 (Принцип сравнения)**.**
   Пусть $u(M),\ v(M) \in C(\bar{D})$,
   и пусть $u(P) \leqslant v(P),\ P \in S$.
   Тогда $u(M) \leqslant v(M),\ M \in \bar{D}$.

   Доказательство. Рассмотрим функцию $w(M) = u(M) - v(M)$. Из условия теоремы $w(P) \leqslant 0,\ P \in S$, а так как гармоническая функция достигает своего максимума на границе области, то $w(M) \leqslant 0,\ M \in \bar{D}$. ■

4.
$$div\,(k(M) grad\, u) - q(M)u(M) = 0, \tag{8.4}$$
   где $k(M),\ q(M) > 0,\ M \in D$.

   Теорема 8.4.3. *Классическое решение задачи* (8.4)*, непрерывное в* $\bar{D}$*, не может достигать во внутренних точках* D *локального положительного максимума или минимума.*

   Доказательство. Пусть $M_0 \in D,\ u(M_0 > 0,\ grad\, u(M_0) = 0,\ \triangle u(M_0) \leqslant 0$. Тогда
$$\underbrace{k(M_0)}_{>0}\underbrace{\triangle u(M_0)}_{\leqslant 0} + grad\, k(M_0)\underbrace{grad\, u(M_0)}_{=0} - \underbrace{q(M_0)}_{>0}\underbrace{u(M_0)}_{>0} < 0.$$
   ■

8.5 Внутренние краевые задачи

8.5.1 Задача Дирихле

$$\begin{cases} \triangle u(M) = -f(M), & M \in D, \\ u(P) = g(P), & P \in \Sigma, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}). \end{cases} \tag{8.5}$$

Теорема 8.5.1. *Классическое решение задачи* (8.5) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что их два: $u(M) \neq v(M)$. Функция $w(M) = u(M) - v(M)$ — гармоническая. Из принципа максимума $w(M) \geqslant 0$, а из принципа минимума $w(M) \leqslant 0$. Значит, $u \equiv v$. ■

Теорема 8.5.2. *Классическое решение задачи* (8.5) *устойчиво по граничным условиям в равномерной норме.*

Доказательство. Рассмотрим две задачи Дирихле с различными граничными условиями $g_1(P)$ и $g_2(P)$:

$$\begin{cases} \triangle u_j = 0, & M \in D, \\ u_j|_S = g_j, & j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Пусть u_1 и u_2 — классические решения этих задач. Подбирая ГУ $g_1(P)$ и $g_2(P)$, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ для

$$v(M) = u_1(M) - u_2(M)$$

выполнялось неравенство на границе

$$-\varepsilon < v < \varepsilon.$$

В силу принципа сравнения, это неравенство выполняется всюду на $\bar{D}$:

$$|u_1 - u_2| < \varepsilon.$$

Мы доказали, что решение непрерывно зависит от граничных условий, а значит, оно устойчиво. ■

8.5.2 Общая задача

Рассмотрим общую задачу

$$\begin{cases} div\,\{k(M) grad\, u\} - q(M)u = -f(M), & M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u(P) = \mu(P), & P \in \Sigma, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}), \end{cases} \tag{8.6}$$

где

$$k(M),\ q(M0 > 0, \quad M \in D,$$
$$\alpha(P),\ \beta(P) \geqslant 0, \quad P \in S,\ |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Теорема 8.5.3. *Классическое решение задачи* (8.6) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что их два: $u_1(M) \neq u_2(M)$. Пусть

$$v(M) = u_1(M) - u_2(M)$$

$$\int\limits_D v(M)dV \cdot (div\,\{k(M) grad\, v\} - q(M)v(M)) = 0$$

Используем первую формулу Грина:

$$0 = \int\limits_D v\, div\,\{k(M) grad\, u\}\, dV - \int\limits_D q(M)v^2(M)dV =$$

$$= \oint\limits_S k(P)v(P)\frac{\partial v(P)}{\partial n}d\sigma - \int\limits_D k(M)\, grad^2 v(M)dV - \int\limits_D q(M)v^2(M)dV = 0.$$

Так как из ГУ при $\alpha(P) \neq 0$

$$\frac{\partial v(P)}{\partial n} = -\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v(P),$$

то получаем

$$\underbrace{\oint\limits_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v^2(P)d\sigma}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int\limits_D k(M)\, grad^2 v(M)dV}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int\limits_D q(M)v^2(M)dV}_{\geqslant 0} = 0.$$

Значит,

$$grad\, v(M) = 0 \Rightarrow v(M) = C.$$

Так как $v(\mathrm{P}) = 0$, то $C = 0$ и $u_1(M) \equiv u_2(M)$.
При $\alpha(P) = 0$ имеем задачу Дирихле, единственность решения которой доказывается из принципа максимума. ■

Замечание. В случае задачи Неймана, применяя энергетический способ, можно показать, что $grad\, v = 0,\ M \in D$, откуда $v = u_1 - u_2 \equiv const$.

Теорема 8.5.4. *Классическое решение задачи Неймана*

$$\begin{cases} \triangle u(M) = -f(M), & M \in D, \\ \dfrac{\partial}{\partial n}u(P) = h(P), & P \in \Sigma, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}), \end{cases}$$

определено с точностью до аддитивной константы.

8.6 Внешние краевые задачи

8.6.1 Понятие функции, регулярной на бесконечности

1. Функция трехмерная

Определение 8.6.1. *Функция $u(x, y, z)$ называется* <u>*регулярной на бесконечности*</u>*, если*

$$\forall\, A > 0\ \exists\, r_0 : \forall\, r \geqslant r_0\ \left(|u| \leqslant \frac{A}{r},\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}\right).$$

То есть на бесконечности и убывает к нулю быстрее, чем $\dfrac{1}{r}$, а ее производные — быстрее, чем $\dfrac{1}{r^2}$.

Лемма 8.6.1. *Если гармоническая вне некой замкнутой области функция равномерно стремится к* 0 *при* $r \to \infty$*, то она регулярна на* ∞*.*

Доказательство. Доказательство приведено в Тихоновом, Самарском. ■

Лемма 8.6.2. *Для функций, регулярных на* ∞ *справедливы формулы Грина.*

Доказательство. Пусть $u,\ v$ — функции, заданные в

$$D_e,\ u,\ v \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e)$$

и регулярные на ∞. S — граница "полости"D_i внутри D_e.
Окружим S сферой Σ_R радиуса R. D_R — область между S и Σ_R.

В D_R можно записать I формулу Грина:

$$\int\limits_{D_R} u \triangle v \, dV = \oint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \underbrace{\oint\limits_{\Sigma_R} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma}_{=I} - \int\limits_{D_R} grad\, u \, grad\, v \, dV.$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos\gamma \ < \frac{3A}{R^2}.$$

$$\left| u \frac{\partial v}{\partial n} \right| < \frac{A}{R} \frac{3A}{R^2} = \frac{3A^2}{R^3}.$$

$$|I| < \frac{3A^2}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{12A^2\pi}{R} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

Так как $u,\ v$ — регулярны на ∞, то

$$grad\, u \, grad\, v \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

$$\int\limits_{D_e} grad\, u \, grad\, v \, dV = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{D_R} grad\, u \, grad\, v \, dV,$$

$$\int\limits_{D_e} \triangle v \, dV = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{D_R} \triangle v \, dV,$$

Суммируя все вышесказанное, получаем

$$\boxed{\int\limits_{D_e} u \triangle v \, dV = \oint\limits_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \int\limits_{D_e} grad\, u \, grad\, v \, dV}$$

— первую формулу Грина. Остальные формулы Грина выводятся из первой аналогично тому, как выводились для внутренней области. ■

2. Функция двумерная

Определение 8.6.2. *Функция $u(x, y)$ называется* <u>*регулярной на ∞*</u>*, если она имеет конечный предел на ∞.*

Лемма 8.6.3. *Если $u(x, y)$ гармоническая вне замкнутого контура и ограничена на ∞, то она регулярна на ∞.*

8.6.2 Внешняя задача Дирихле

1. Трехмерный случай

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \triangle u(M) = 0, & M \in D_e, \\ u(P) = \mu(P), & P \in \Sigma, \\ u(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \\ u(M) \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e). \end{cases} \tag{8.7}$$

Теорема 8.6.4. *Классическое решение внешней задачи Дирихле (8.7) для уравнения Лапласа единственно.*

Доказательство. Предположим, что их два: $u_1(M) \neq u_2(M)$. Введем функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Тогда

$$\begin{cases} \triangle v(M) = 0, & M \in D_e, \\ v(P) = 0, & P \in \Sigma, \\ v(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \end{cases} \tag{8.8}$$

В силу условия равномерного стремления к нулю в задаче (8.8)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, R > 0 : \forall\, r \geqslant R \Rightarrow |v(M)| < \varepsilon.$$

Применяя в D_e принцип максимума, получим

$$|v(M)| < \varepsilon,\ M \in D_r.$$

Значит, $v(M) = 0,\ M \in D_r$.
При $\forall\, M \in D_r,\ r \to 0$ получаем, что $v(M) \equiv 0$ при $M \in D_e$. Значит, $u_1 \equiv u_2$. ■

Замечание.

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & r > R, \\ u = f_0, & r = R. \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} u_1 &= f_0, \\ u_1 &= f_0 \frac{R}{r}. \end{aligned}$$

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2,\ \alpha + \beta = 1.$$

Так, равномерное стремление к нулю в трехмерном случае обеспечивает единственность решения.

Двумерный случай

$$\begin{cases} \triangle u(M) = 0, & M \in G_e, \\ u(P) = \mu(P), & P \in \Gamma, \\ |u(M|) < N, \\ u(M) \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e). \end{cases} \tag{8.9}$$

Замечание.

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & r > 1, \\ u = 1, & r = 1. \end{cases}$$

В этой задаче решение фактически одномерное.

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

$$u(M) \rightrightarrows 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Задача решения не имеет. Отсюда мы видим, что требование равномерного стремления к нулю в двумерном случае является слишком жестким.

8.6.3 Метод барьерной функции

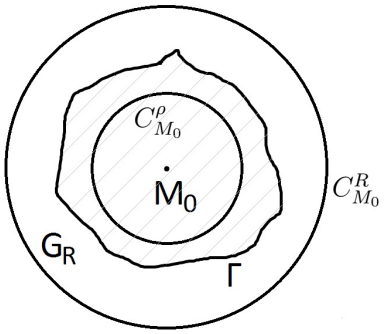
Теорема 8.6.5. *Решение задачи* (8.9) *единственно.*

Доказательство.

Вокруг M_0 берем окружности $C^R_{M_0}$ и $C^\rho_{M_0}$. $U^{\rho,R}_{M_0}$ — круги этих окружностей, так чтобы

$$U^\rho_{M_0} \subset D_i \subset U^R_{M_0}.$$

$$\bar{U}^\rho_{M_0} = U^\rho_{M_0} + C^\rho_{M_0}.$$



Введем барьерную функцию:

$$\boxed{\omega(M, R) = N \frac{\ln \dfrac{r_{MM_0}}{\rho}}{\ln \dfrac{R}{\rho}}.}$$

Тогда

$$\begin{cases} \triangle_M \omega = 0, & M \in G_e, \\ \omega > 0, & M \in \Gamma, \\ \omega = N, & M \in C^R_{M_0}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Теперь докажем единственность решения задачи.
Пусть: $u_1(M) \neq u_2(M)$ — решения, $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$.
Тогда так как $|u_i| < N_i,\ i = 1, 2$, то $|v| < N,\ N = N_1 + N_2$.

$$\begin{cases} \triangle v = 0, & M \in G_e, \\ v = 0, & P \in \Gamma, \\ |v| < N, & M \in G_e, \\ |v| < N, & M \in C^R_{M_0}. \end{cases} \tag{8.11}$$

Сравнивая (8.10) и (8.11), и применяя принцип сравнения, получаем:

$$|v(M)| < \omega(M, R),\ M \in \bar{G}_R.$$

Так как $\bar{M} \in \bar{G}_R,\ R \to \infty$, то $\omega(M, R) \to 0$, и $v \equiv 0$. Значит, $u_1 \equiv u_2$. ■

8.6.4 Внешняя задача Неймана

1. Трехмерный случай

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \triangle u(M) = 0, & M \in D_e, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P) = \mu(P), & P \in \Sigma, \\ u(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \\ u(M) \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e). \end{cases} \tag{8.12}$$

Теорема 8.6.6. *Классическое решение внешней задачи Дирихле* (8.12) *для уравнения Лапласа единственно.*

Доказательство. Пусть: $u_1(M) \neq u_2(M)$ — решения,

$$v(M) = u_1(M) - u_2(M).$$

Применим первую формулу Грина:

$$\int\limits_{D_e} v \underbrace{\triangle v}_{=0} \, dV = \oint\limits_S v \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} \, d\sigma - \int\limits_{D_e} grad^2 v \, dV,$$

(подынтегральные выражения равны нулю из условий), а значит

$$grad\, v = 0,\ M \in D_e \Rightarrow v = C = const,\ M \in D_e.$$

Так как $v \rightrightarrows 0$, то $C = 0$, и $v \equiv 0$. Значит, $u_1 \equiv u_2$.

Напомним, что у внутренней задачи Неймана решение определено с точностью до аддитивной постоянной. ■

1. Двумерный случай

Теорема 8.6.7. *Решение внешней задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство. Доказывается аналогично трехмерному случаю, однако отсутствие равномерной сходимости в двумерной задачи не позволяет определить константу. ■

8.7 Функция Грина

8.7.1 Фундаментальное решение

Пусть в пространстве E^n, $x = x(x_1, \ldots, x^n)$ — его элемент.
При $n = 3$ получим $E = E^3$, и его элемент $M = M(x, y, z)$.

Определение 8.7.1. *Носителем кусочно-гладкой функции $f(M)$ называется замыкание множества точек, где она не равна нулю.*
Обозначается $\operatorname{supp} f$.

Определение 8.7.2. *Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то будем говорить, что f — финитная функция.*

Определение 8.7.3. *Отнесем к классу основных функций на множестве D все бесконечно много раз дифференцируемые функции, носителями которых является множество D.*

Определение 8.7.4. *Пространство основных функций $D(E^n)$ — это множество всех функций, чьи носители лежат в E^n.*

Определение 8.7.5.

$$\boxed{D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^{\alpha_1} \cdot \partial x^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.}$$

Определение 8.7.6. *Пусть последовательность основных функций $\{\varphi_k\} \subset D(E^n)$. Будем говорить, что она сходится к $\varphi \in D(E^n)$, если*

1. *Существует шар, содержащий носители всех φ_k;*
2. $$\forall\, \alpha = 1, 2, \ldots, n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \left(D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi\right).$$

   (все последовательности и все последовательности производных сходятся равномерно)

Определение 8.7.7. *Обобщенной функцией (по Соболеву-Шварцу) называется всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве основных функций.*

1. Функционал f сопоставляет $\forall\,\varphi \in D(E^n)$ число (f, φ).

2. Линейный — значит

$$\forall\,\varphi, \psi \in D(E^n)\ \forall\,\lambda, \mu\ \left\{(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)\right\}.$$

3. Непрерывный — значит

$$\forall\,\varphi_k \to \varphi,\ k \to \infty,\ \varphi_k, \varphi \in D(E^n)\ \left\{(f, \varphi_k) \to (f, \varphi),\ k \to \infty\right\}.$$

Определение 8.7.8. *Обозначим $D'(E^n)$ пространство обобщенных функций.*

Определение 8.7.9. *Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $\{f_k\}$ сходится к обобщенной функции f, $(f_k \to f,\ k \to \infty)$ если*

$$\forall\,\varphi \in D(E^n)\ \left\{(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)\right\}.$$

Определение 8.7.10. *Регулярными обобщенными функциями назовем такие ОФ, что*

$$\forall\,\varphi \in D(E^n)\ \exists\, f(M)\ \left\{(f, \varphi) = \int\limits_{E^n} f(M)\varphi(M)dV\right\}.$$

Определение 8.7.11. *Носителем ОФ называется замыкание множества таких точек, что*

$$\forall\,\varphi \in D(E^n)\ \left\{(f, \varphi) \neq 0\right\}.$$

Определение 8.7.12. *Обозначим $D(G)$ совокупность ОФ, чьи носители лежат в G.*

Определение 8.7.13. *Будем говорить, что $f = 0$ в G, если*

$$\forall\,\varphi \in D(G)\ \left\{(f, \varphi) = 0\right\}.$$

Определение 8.7.14. *Обозначим*

$$\boxed{(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\,(f, D^\alpha \varphi)}$$

— производная обобщенной функции порядка α.

Всякая ОФ имеет производные любого порядка.

Лемма 8.7.1 (дю Буа Реймон)**.** *Для того, чтобы кусочно-непрерывная функция обращалась в нуль в смысле ОФ (в G), необходимо и достаточно, чтобы она была равна нулю почти всюду на G.*

Определение 8.7.15. *Введем оператор*

$$\boxed{Lu = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) D^\alpha u,} \; a_\alpha \in C^{(\infty)}(G).$$

Регулярная ОФ и является <u>*обобщенным решением*</u> *уравнения*

$$Lu = f, \; M \in G,$$

если

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi) \;\; \forall \varphi \in D(G).$$

Утверждение. Если $\exists$ классическая производная, то она совпадает с обобщенной. Если $\exists$ классическое решение, то оно совпадает с обобщенным.

Определение 8.7.16. *Регулярная ОФ u_0 являющаяся решением уравнения*

$$Lu_0 = -\delta(x, x_0),$$

то есть

$$(Lu_0, \varphi) = -(\delta, \varphi), \; \varphi \in D(E^n)$$

называется <u>*фундаментальным решением уравнения $Lv = 0$ (фундаментальным решением оператора L)*</u>.

Вернемся в методы математической физики.

Теорема 8.7.2. *Функция*

$$\boxed{u_0(M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}}$$

есть фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$\boxed{\triangle u_0(M) = 0, \; M \neq M_0.}$$

Доказательство. Из III формулы Грина получаем:

$$(\triangle u_0, \varphi) = (u_0, \triangle\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_D \frac{\triangle\varphi(M)}{r_{MM_0}} dV_M =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left\{ \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial\varphi(P)}{\partial n} - \varphi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} d\sigma_P - \varphi(M_0).$$

Мы можем выбрать $supp\,\varphi \subset D$; $supp\,\varphi \bigcap S \neq \varnothing$, тогда

$$(\triangle u_0, \varphi) = -\varphi)M_0),$$

$$\Big(-\delta(M, M_0), \varphi\Big) = -\varphi(M_0).$$

Значит,

$$(\triangle u_0, \varphi) = \Big(-\delta(M, M_0), \varphi\Big), \; \varphi \in D(E^n),$$

$$\triangle u_0 = -\delta(M, M_0).$$

Итак, u_0 — фундаментальное решение уравнения $\triangle v = 0$. ■

8.7.2 Функция Грина задачи Дирихле

$$\begin{cases} \triangle u(M) = -f(M), & M \in D, \\ u(P) = \mu(P), & P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}). \end{cases} \tag{8.13}$$

Обозначим

$$\boxed{g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0).} \tag{8.14}$$

$$v : \triangle_M v = 0, \ v \in C^{(1)}(\bar{D}).$$

(v — гармоническая функция)

Применяя к $u(M)$ I формулу Грина, а к $v(M, M_0)$ — II формулу Грина, складывая результаты, и применяя (8.14), получаем:

$$u(M_0) = \oint\limits_S \left(g(P, M_0) \frac{\partial u(P)}{\partial n} - \underbrace{u(P)}_{=\mu(P)} \frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0) \right) d\sigma_P - \int\limits_D g(M, M_0) \underbrace{\triangle u(M)}_{=-f(M)} dV_M.$$

$$\begin{cases} \triangle_M g(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M \in D, \\ g(P, M_0) = 0, & P \in S, \quad M_0 \in D. \end{cases} \tag{8.15}$$

Определение 8.7.17. *Функция $g(M, M_0)$ вида (8.14) и являющая решением задачи (8.15), называется <u>функцией Грина</u> задачи (8.13).*

Тогда решение задачи Дирихле будет:

$$\boxed{u(M_0) = \oint\limits_S \mu(P) \frac{\partial g(P, M_0)}{\partial n_P} d\sigma_P + \int\limits_D g(M, M_0) f(M) dV_M.} \tag{8.16}$$

Доказывает ли (8.16) единственность и существование решения задачи Дирихле, и при каких условиях?

Замечание. Проведя тщательные исследования, Александр Михайлович Ляпунов показал, что (8.16) дает классическое решение для достаточно широкого класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова.

Замечание. В $2D$ функция Грина имеет вид

$$\boxed{g(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),}$$

где $v(M, M_0)$ — гармоническая функция.

Замечание. Понятие функции Грина можно ввести для внешних краевых задач.

Замечание. Так как построение функции Грина сводится к решению I краевой задачи

$$\begin{cases} \triangle v = 0, & M \in D, \\ v(P, M_0) = -\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}, & P \in S, \end{cases} \tag{8.17}$$

то, значит, если функция Грина существует, то она единственна.

8.7.3 Свойства функции Грина

1. Оценка для ФГ

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0).$$

Всегда существует достаточно малое r, такое, что $g > 0$.Так как

$$g|_{\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}} > 0, \ g|_S = 0,$$

то по принципу минимума $g > 0$ между сферой $\Sigma^{\varepsilon}_{M_0}$ всюду в D.

Для функции v, являющейся решением уравнения (8.17) справедлив принцип максимума. Поэтому $v < 0$ всюду в D, а следовательно

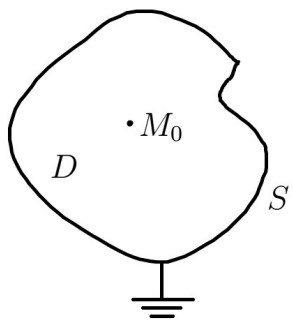
$$g < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

Получаем оценку для ФГ:

$$0 < g(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

2. Физический смысл ФГ

Функция Грина имеет физический смысл потенциала, создаваемого точечным зарядом в точке M_0. Если мы помещаем в S проводящую поверхность и и заземляем ее, то на этой поверхности будут индуцированы заряды, потенциал которых таков, что их поле в области должно компенсировать поле точечного заряда, так как потенциал заземленного проводника равен нулю.



Вследствие этого, потенциал на поверхности должен удовлетворять граничному условию $u(P) = 0$, то есть потенциал полного поля в области представляет собой функцию Грина задачи Дирихле, поставленной для данной области.

3. Симметричность ФГ

$$g(M, M_0) = g(M_0, M)$$

Обозначим

$$u_1(M) = g(M, M_1),$$

$$u_2(M) = g(M, M_2),$$

$$\begin{cases} \triangle u_i(M) = 0, \ i = 1, 2, & M \in D_e, \\ u_i(P) = 0, & P \in S. \end{cases}$$

Применяем вторую формулу Грина. У нас останется интеграл только по поверхности:

$$\oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_1}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) d\sigma = \oint\limits_{\Sigma^\varepsilon_{M_2}} \left(u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) d\sigma.$$

$$u_1 = \frac{1}{4\pi r_{MM_1}} + v_1(M, M_1) \text{ — с выбросом,}$$

$$u_2 \text{ — выброса не имеет, она хорошая.}$$

Применив третью формулу Грина к подынтегральному выражению и воспользовавшись гармоничностью v, получим

$$-u_2(M_1) = -u_1(M_2),$$

$$g(M_1, M_2) = g(M_2, M_1).$$

8.7.4 Функция Грина задачи Неймана

$$\begin{cases} \triangle u(M) = -f(M), & M \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P) = \mu(P), & P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}) & \text{— условие классичности.} \end{cases}$$

Положим g как для задачи Дирихле:

$$g(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

где

$$\begin{cases} \triangle_M v = 0, & M \in D, \\ \dfrac{\partial v(P, M_0)}{\partial n_P} = -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial n_P} \left(\dfrac{1}{r_{PM_0}}\right), & P \in S. \end{cases}$$

Проблема в том, что не выполняется условие разрешимости:

$$\oint\limits_S \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) d\sigma_P = -1 \neq 0.$$

Для внутренней (не для внешней, она поставлена корректно по Адамару, то есть решение единственно) нужно ставить более общий вид функции Грина:

$$\begin{cases} \triangle_M g(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M \in D, \\ \dfrac{\partial g}{\partial n_P}(P, M_0) = C, & P \in S, \end{cases}$$

$$\oint\limits_S \left\{ C - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \right) \right\} d\sigma_P = 0,$$

$$C\tilde{S} + 1 = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{\tilde{S}} \ (\tilde{S} \text{ — площадь поверхности } S).$$

$$u(M_0) = \oint\limits_S \left(g(P, M_0) \underbrace{\frac{\partial u(P)}{\partial n}}_{=\mu(P)} - u(P) \underbrace{\frac{\partial}{\partial n_P} g(P, M_0)}_{=C} \right) d\sigma_P - \int\limits_D g(M, M_0) \underbrace{\triangle u(M)}_{=-f(M)} dV_M.$$

$$\boxed{u(M_0) = \oint\limits_S \mu(P) g(P, M_0) d\sigma_P + \int\limits_D g(M, M_0) f(M) dV_M + \underbrace{\frac{1}{\tilde{S}} \oint\limits_S u(P) d\sigma_P + C_1}_{\text{среднее значение } u(P) \text{ на } S}}.$$

Глава 9

Уравнения параболического типа

9.1 Постановка начально-краевой задачи

Начально-краевая:

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = L_M[u] + f(M,t), & (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \bar{D}, \\ N_P[u(P,t)] = \mu(P,t), & P \in S,\ t \in [\,0,+\infty), \end{cases}$$

где

$$L_M[u] \equiv div\left\{k(M)grad\,(u)\right\},$$

$$\rho(M) = C(M)\tilde{\rho}(M),$$

$$N_P[u] \equiv \alpha(P)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u,$$

— оператор граничных условий,

$$\rho(M),\ k(M) > 0,\ M \in D,$$

$$\alpha(P),\ \beta(P) \geqslant 0,\ P \in S,\ |\alpha| + |\beta| > 0.$$

9.2 Принцип максимума

Теорема 9.2.1. *Классическое решение однородного уравнения*

$$\rho(M)u_t = div\left\{k(M)grad\,(u)\right\},$$

где

$$\rho(M),\ k(M) > 0,\ M \in D$$

(непрерывное на $\bar{Q}_T$), во внутренних точках цилиндра $\bar{Q}_T$ не может достигать значений, больших, чем граничное значение.

Напомним,

$$Q_T \equiv D \times (0, T\,],$$
$$\bar{Q}_T \equiv \bar{D} \times [\,0, T\,].$$

Доказательство. Обозначим

$$M = \max \left\{ \begin{matrix} u(M,0) & ; & u(P,t) \\ M \in D & & P \in S,\ t \in [\,0,T\,] \end{matrix} \right\}.$$

Предположим, что в точке $(M_0, t_0) \in Q_T \quad u(M_0, t_0) > M$:

$$u(M_0, t_0) = M + \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

Построим вспомогательную функцию:

$$v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t).$$

1. $$v(M_0, t_0) = u(M_0, t_0).$$

2. $$v(M,t) \in C(\bar{Q}_T),$$

   а значит, по теореме Вейерштрасса она достигает своего максимального значения в некой точке $v(M_1, t_1)$.

$$v(M_1, t_1) \geqslant v(M_0, t_0) = M + \varepsilon,$$
$$\max \left\{ \begin{matrix} v(M,0) & ; & v(P,t) \\ M \in D & & P \in S,\ t \in [\,0,T\,] \end{matrix} \right\} \leqslant M + 2T < M + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь мы положили, что $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{2T}$.
Теперь можно утверждать, что $(M_1, t_1) \in Q_T$.

$$v_t(M_1, t_1) \geqslant 0,$$

$$grad\, v(M_1, t_1) = 0,$$
$$\triangle v(M_1, t_1) \leqslant 0$$

— необходимые условия экстремума.

$$u_t(M_1, t_1) \geqslant \alpha > 0,\ grad\, u(M_1, t_1) = 0,\ \triangle u(M_1, t_1) \leqslant 0,$$

$$\underbrace{\rho(M_1)}_{>0} \underbrace{u_t(M_1, t_1)}_{>0} = k(M_1) \underbrace{\triangle u(M_1, t_1)}_{\leqslant 0} + \underbrace{grad\, u(M_1, t_1)}_{=0} grad\, k(M).$$

Слева выражение строго больше нуля, а справа меньше или равно нулю. Получаем противоречие.
Если бы мы не использовали (M_1, t_1) и α, то у нас слева не было бы строгого неравенства. ■

Замечание. Аналогично доказывается принцип минимума.

Теорема 9.2.2 (Принцип сравнения)**.**
Пусть u_1, u_2 — два решения уравнения теплопроводности, и пусть

$$u_1(M,0) \leqslant u_2(M,0),\ \ M \in \bar{D},$$

$$u_1(P,t) \leqslant u_2(P,T),\ \ P \in S,\ \ t \in [\,0,T\,].$$

Тогда

$$u_1(M,t) \leqslant u_2(M,t),\ \ (M,t) \in \bar{Q}_T.$$

Замечание. Принцип максимума не противоречит существованию решения, равного тождественно константе.
Замечание. Физически принцип максимума означает отсутствие флуктуаций: температура тела во внутренней точке не может стать большей, чем температура тела в начальный момент или на границе тела при отсутствии источников тепла ($f(M) \equiv 0$).

9.3 Задача Дирихле

$$\begin{cases} u_t = L_M[u] + f(M,t), & (M,t) \in Q_T, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \bar{D}, \\ u(P,t) = \mu(P,t), & P \in S,\ t \in [\,0,T\,]. \end{cases} \tag{9.1}$$

Теорема 9.3.1. *Классическое решение задачи* (9.1) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существует два решения и рассмотрим их разность. Из принципа максимума эта разность тождественно равна нулю, а значит, решение единственно. ■

Теорема 9.3.2. *Классическое решение задачи* (9.1) *устойчиво по начальным и граничным условиям.*

Доказательство. Можно положить $f(M) \equiv 0$.
Нужно доказать, что при

$$\varphi : u_i(M,t) \sim \varphi_i(M),\ \mu_i(P,t)\ (i = 1,2)$$

если

$$|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| < \varepsilon,\ \ M \in \bar{D} \tag{9.2}$$

и

$$|\mu_1(P,t) - \mu_2(P,t)| < \varepsilon,\ \ P \in S,\ \ t \in [\,0,T\,], \tag{9.3}$$

то

$$|u_1(M,t) - u_2(M,t)| < \varepsilon,\ \ M \in \bar{Q}_T.$$

Из (9.2) и (9.3) следует

$$-\varepsilon < u_1(M,0) - u_2(M,0) < \varepsilon,\ M \in \bar{D},$$

$$-\varepsilon < u_1(P,t) - u_2(P,t) < \varepsilon,\ P \in S,\ t \in [\,0,T\,].$$

Отсюда по принципу максимума и минимума получаем

$$-\varepsilon < u_1(M,t) - u_2(M,t) < \varepsilon,\ M \in \bar{Q}_T$$

■

9.4 Формальное построение решения задачи III. Функция источника

$$\begin{cases} \rho(M)u_t = L_M[u] + f(M,t), & (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \bar{D}, \\ N_P[u] = 0, & P \in S,\ t \in [\,0,\infty), \end{cases} \tag{9.4}$$

$$\begin{cases} L_M[v_n] + \lambda_n \rho(M) v_n(M) = 0, & M \in D, \\ N_P[v_n] = 0, & P \in S, \end{cases} \tag{9.5}$$

$$\|v_n\| = 1,\ n = 1,2,\ldots.$$

Решение (9.4) ищем в виде разложение по СЗ и СФ ЗШЛ (9.5).

$$u(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(M), \tag{9.6}$$

$$\left.\begin{aligned} u_n(t) &= \int\limits_D u(Q,t) v_n(Q) \rho(Q) dV_Q, \\ f_n(t) &= \int\limits_D f(Q,t) v_n(Q) dV_Q, \\ \varphi_n(t) &= \int\limits_D \varphi(Q) v_n(Q) \rho(Q) dV_Q. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{коэффициенты Фурье,} \\ &n = 1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t),\ t \in (0,+\infty), \\ u_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau + \varphi_n e^{-\lambda_n t} \tag{9.8}$$

— интеграл Коши.
Подставляем (9.8) в (9.6), используя (9.7):

$$\boxed{u(M,t) = \int\limits_0^t \int\limits_D g(M,Q,t-\tau) f(Q,\tau) dV_Q d\tau + \int\limits_D g(M,Q,t)\varphi(Q)\rho(Q) dV_Q,} \tag{9.9}$$

где

$$\boxed{g(M,Q,t) = \sum_{n-1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(M) v_n(Q).} \tag{9.10}$$

Определение 9.4.1. *Функция $g(M,Q,t)$, заданная формулой (9.10) называется <u>функцией источника</u>.*

Физический смысл

Выберем функцию φ_ε :

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(M) > 0, & M \in K^\varepsilon_{M_0}, \\ \varphi_\varepsilon(M) = 0, & M \notin K^\varepsilon_{M_0} \end{cases} \tag{9.11}$$

и

$$\int\limits_{K^\varepsilon_{M_0}} \rho(M)\varphi_\varepsilon(M) dV_M = 1,$$

$$f(M,t) = 0.$$

Тогда из (9.9) и (9.11)

$$u_\varepsilon(M,t) = \int\limits_D g(M,Q,t)\varphi_\varepsilon(Q)\rho(Q) dV_Q = g(M,M^*,t) \underbrace{\int\limits_{K^\varepsilon_{M_0}} \varphi_\varepsilon(Q)\rho(Q) dV_Q}_{=1}.$$

Последнее равенство получено из формулы среднего значения, $M^* \in K^\varepsilon_{M_0}$.

$$\text{При } \varepsilon \to 0 \quad M^* \to M_0.$$

Тогда

$$u_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M,t) = g(M,M_0,t)$$

И <u>мощность источника</u>

$$q = c\tilde{\rho} \int\limits_D \varphi_0(Q)\rho(Q) dV_Q = c\tilde{\rho}.$$

9.5 Существование решения задачи теплопроводности на отрезке (задачи I)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (0,l),\ t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(M), & [\,0,l\,], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [\,0,+\infty). \end{cases} \tag{9.12}$$

Применяем метод разделения переменных, и

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l},} \tag{9.13}$$

где

$$\boxed{C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k \xi}{l} d\xi.} \tag{9.14}$$

Теорема 9.5.1. *Пусть $\varphi(x)$, непрерывная на $[\,0,l\,]$, имеет на нем кусочно-непрерывную первую производную, то есть*

$$\varphi(x) \in C[0,l] \bigcap Q^{(1)}[0,l],$$

а также

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Тогда классическое решение задачи (9.12) существует и представимо в виде (9.13)(9.14).

Доказательство. Продифференцируем (9.13) и убедимся, что это — решение

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2}_{=const} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{9.15}$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}_{=const} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{9.16}$$

Но нам еще нужно доказать правомерность этого, то есть, что ряд сходится равномерно.
Из (9.14)

$$\varphi(x) \in C[\,0,l\,] \Rightarrow |\varphi(x)| < M \Rightarrow |C_n| < 2M\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Подберем мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}, \tag{9.17}$$

где для (9.15)

$$N = 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2,$$

а для (9.16)

$$N = 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Сходимость ряда вида (9.17) следует из признака Даламбера при $x \in (0, l)$, $t \in [0, +\infty)$.
Значит, (9.13) сходится равномерно, и дифференцировать можно.

Рассмотрим $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty)$.
Из теории рядов Фурье, периодическая на $[-l, l]$ функция $F(x)$, если она

$$F(x) \in C^{(k)}[-l, l] \bigcap Q^{(k+1)}[-l, l],$$

то существует и сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right).$$

Если периодическая $f(x)$ на $[0, l]$ раскладывается по $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}$, то

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0, \\ -f(x), & x \leqslant 0 \end{cases}$$

— требуется нечетное продолжение $f(x)$.

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(l) = 0.$$

Из условия теоремы следует сходимость мажорантного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|.$$

Итак, теорема доказана. ■

9.6 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Введем множества:

$$\Omega_T \equiv \mathbb{R}^1 \times (0, T],$$
$$\bar{\Omega}_T \equiv \mathbb{R}^1 \times [0, T].$$

9.6.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1, \\ |u(x,t)| < M, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty. \end{cases} \tag{9.18}$$

9.6.2 Теорема единственности

Введем барьерную функцию

$$\boxed{\omega(x,t,L) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).}$$

$$\Omega_{LT} \equiv [\,-L, L\,] \times (0, T\,],$$
$$\bar{\Omega}_{LT} \equiv [\,-L, L\,] \times [\,0, T\,].$$

Теорема 9.6.1. *Классическое решение задачи* (9.18) *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1,\ u_2$ — решения задачи. Введем функцию $v = u_1 - u_2$. Тогда v — решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty, \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^1, \\ |v(x,t)| < 2M, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty. \end{cases}$$

Чтобы применить принцип сравнения, ограничим Ω_∞, введя область $\Omega_{L\infty}$. В ней барьерная функция удовлетворяет уравнению

$$\omega_t = a^2 \omega_{xx},\ x \in \Omega_\infty.$$

Имеем:

$$\omega(\pm L, t, L) \geqslant 2M > |u(\pm L, t)|\,,$$
$$\omega(x, 0, L) \geqslant v(x,0) = 0.$$

Из принципа сравнения:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} + a^2\bar{t}\right) \leqslant v(\bar{x},\bar{t}) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{\bar{x}^2}{2} + a^2\bar{t}\right)$$

при $(\bar{x},\bar{t}) \in \bar{\Omega}_{L\infty}$. При

$$L \to \pm\infty \Rightarrow \bar{\Omega}_{L\infty} \to \bar{\Omega}_\infty.$$

По теореме о двух милиционерах,

$$v(\bar{x},\bar{t}) = 0 \text{ при } (\bar{x},\bar{t}) \in \bar{\Omega}_\infty.$$

Значит, всякие два решения совпадают. ■

9.6.3 Формальное построение решения. Интеграл Пуассона

Ядро интегрального преобразования Фурье:

$$K(x,k) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx}.$$

$$U(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-ikx} d\xi,$$

$$F(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,t) e^{-ikx} d\xi, \tag{9.19}$$

$$\Phi(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-ikx} d\xi. \tag{9.20}$$

Из этих формул

$$U_t(k,t) = a^2 \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\xi\xi} e^{-ikx} d\xi + F(k,t).$$

Отсюда

$$\begin{cases} U_t + a^2 k^2 U = F(k,t), & t \in (0,\infty), \\ U(k,0) = \Phi(k), & k \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид импульсной функции:

$$U(x,t) = \int\limits_0^t e^{-a^2k^2(t-\tau)} F(k,\tau) d\tau + \Phi_n e^{-a^2k^2t}, \tag{9.21}$$

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(k,t) e^{ikx} dk. \tag{9.22}$$

Из формул (9.19), (9.20), (9.21), (9.22) получаем

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi,} \tag{9.23}$$

$$\boxed{g(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2k^2(t-\tau)+ik(x-\xi)}.} \tag{9.24}$$

Определение 9.6.1. *Функция, заданная формулой (9.24), называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.*

Определение 9.6.2. *Представление решения задачи в виде интеграла (9.23) называют интегралом Пуассона.*

Выразим фундаментальное решение через элементарные функции.
Обозначим:

$$I(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk,$$

$$I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 k^2} dk = /*z = \alpha k*/ = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha},$$

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ik\, e^{-\alpha^2 k^2} e^{ik\beta} dk = -\frac{\beta}{2\alpha_2} I(\beta).$$

Мы получили задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dI(\beta)}{d\beta} = -\dfrac{\beta}{2\alpha_2} I(\beta), \ \beta > 0, \\ [I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha}. \end{cases}$$

Ее решение:

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}. \tag{9.25}$$

Из (9.24) и (9.25) получим

$$\boxed{g(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.}$$

9.6.4 Свойства фундаментально решения

1.
$$g(x, \xi, t) > 0 \text{ при } x, \xi \in \mathbb{R}^1, \ t \in (0, \infty).$$

2.
$$g_t = a^2 g_{xx}, \ x, \xi \in \mathbb{R}^1, \ t \in (0, \infty).$$

3. Дельта-функция

$$\delta(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-\xi)}. \tag{9.26}$$

Из (9.24) и (9.26) $\Rightarrow$

$$g(x,\xi,0)=\delta(x,\xi).$$

Это позволяет дать следующее определение фундаментального решения:

Определение 9.6.3. *Фундаментальным решением $g(x,\xi,t)$ уравнения теплопроводности в одномерном случае называется решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} g_t = a^2 g_{xx}, & x,\xi\in\mathbb{R}^1,\ t\in(0,\infty),\\ g(x,\xi,0)=\delta(x,\xi), & x,\xi\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

непрерывное всюду в области $\bar{\Omega}_\infty$, за исключением точки

$$(\xi,0): x=\xi,\ t=0.$$

4.

$$f(x,t)=0\Rightarrow u(x,t0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi. \tag{9.27}$$

Из (9.27) следует, что $g(x,\xi,t)$ с физической точки зрения есть температура бесконечной прямой в точке x в момент времени t, если при $t=0$ в точке $x=\xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла $q>0$.

Найдем количество тепла. Для этого проинтегрируем $g(x,\xi,t)$ по ξ от $-\infty$ до ∞, используя замену

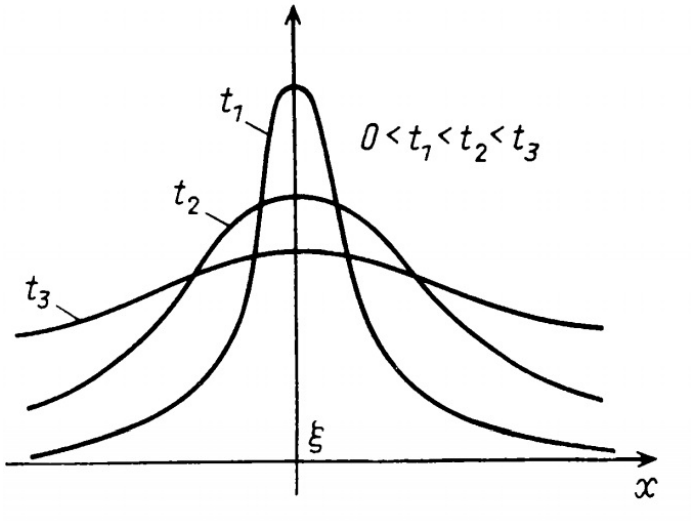
$$z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=1.$$

Физический смысл полученного выражения — закон сохранения энергии, то есть количество теплоты на прямой в любой момент времени $t>0$ равно

$$q=c\tilde{\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x.\xi,t)d\xi=c\tilde{\rho}.$$

5. График функции $g(x,\xi,t)$:



6.
$$g(x,\xi,t) = g(\xi,x,t).$$

9.6.5 Теоремы устойчивости

Теорема 9.6.2. *Классическое решение задачи* (9.18) *устойчиво относительно начальной функции.*

Доказательство. Пусть $f \equiv 0$, u_i — решение, соответствующее φ_i $(i = 1, 2)$.

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\,|\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)|\,d\xi.$$

Пусть
$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon,$$
$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)d\xi = \varepsilon,$$

то есть, решение устойчиво при $(x,t) \in \bar{\Omega}_\infty$. ■

Теорема носит глобальный характер.

Теорема 9.6.3. *Классическое решение задачи* (9.18) *устойчиво по правой части.*

Доказательство. Пусть $\varphi \equiv 0$, u_i — решение, соответствующее f_i $(i = 1, 2)$.

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t-\tau)\,|f_1(\xi,\tau) - f_2(\xi,\tau)|\,d\xi d\tau.$$

Пусть

$$|f_1 - f_2| < \delta, \ (x,t) \in \bar{\Omega}_T$$

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \delta \int\limits_0^t d\tau = \delta t \leqslant \delta T,$$

то есть, решение устойчиво при $(x,t) \in \bar{\Omega}_T$. ■

Эта теорема носит локальный характер.

"Математические основы интуиционизма"

Редукция от абсурдного, маскировка доказательства от противного (к теоремам о единственности).
Доказательство теорем единственности:

1. Противоречием: "Предположим, существуют два решения, не равных друг другу", и получаем противоречие.

2. Конструктивно: "Предположим, существуют два решения", и доказать, что они всегда совпадают.

9.7 Существование классического решения для однородного уравнения теплопроводности

Теорема 9.7.1. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на бесконечной прямой и ограничена на ней, то есть*

$$\left.\begin{array}{r} \varphi(x) \in C[\mathbb{R}^1], \\ |\varphi(x)| < M, \end{array}\right\}, \ x \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда интеграл Коши:

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi}$$

определяет классическое решение однородной задачи теплопроводности на бесконечной прямой.

Доказательство.

1. $$|u(x,t)| < M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)d\xi = M, \ (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty.$$

   Решение ограничено.

2. Так как область открытая, то пусть $t \geqslant \varepsilon > 0$.
   Продифференцируем:

$$g_t = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\, g + \frac{(x-\xi)^2}{4t^2a^2} g \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}t},$$

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \tag{9.28}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4t^2a^2} g(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi. \tag{9.29}$$

   С помощью замены

$$z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{\pi t}}$$

   интегралы (9.28) и (9.29) сводятся к интегралам, мажорируемым

$$I_1 : \frac{M}{2\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-z^2},$$

$$I_2 : \frac{M}{\sqrt{\pi}\varepsilon} z^2 e^{-z^2}$$

   — сходящимися функциями, а значит, они сходятся равномерно на Ω_∞, $t \geqslant \varepsilon > 0$.

3.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \varphi\left(x + 2az\sqrt{\pi t}\right).$$

   Так как интеграл сходится равномерно, то возможен предельный переход:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \varphi(x),$$

   то есть решение примыкает непрерывно к ГУ.

Итак, наше решение удовлетворяет определению классического решения. ■

Замечание. Можно ослабить условия, потребовав равномерную сходимость

$$|\varphi(x)| < Ne^{b|x|}.$$

<u>Пример:</u>

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = T_0 \int\limits_0^{+\infty} g(x,\xi,t)d\xi = \frac{T_0}{2}\left\{1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\},$$

где

$$\Phi(\omega) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\omega} e^{-z^2} dz$$

— интеграл ошибок (функция ошибок).
Свойства функции ошибок:

1. $$\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega),\ \Phi(0) = 0.$$

2. $$\Phi(+\infty) = 1,\ \Phi(-\infty) = -1$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0+0}} u(x,t) = T_0,$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0-0}} u(x,t) = 0.$$

Рассмотрим также одновременный переход $x \to 0,\ t \to 0$ вдоль кривой $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} = \alpha$, где $-\infty < \alpha < +\infty$. Получаем

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to 0+0\\ \frac{x}{2a\sqrt{t}}=\alpha}} u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left\{1 + \Phi\left(\alpha\right)\right\}$$

и при $-\infty < \alpha < +\infty$ будем иметь любое значение, заключенное между 0 и T_0.

9.8 Задача Коши в пространстве

Введем множества:

$$\Omega_T^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times (0,T\,],$$

$$\bar{\Omega}_T^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times [\,0,T\,].$$

Постановка задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \triangle u + f(M,t), & (M,t) \in \Omega_\infty^3, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \mathbb{R}^3, \\ |u(M,t)| < N, & (M,t) \in \bar{\Omega}_\infty^3. \end{cases} \tag{9.30}$$

Определение 9.8.1. *Фундаментальным решением уравнения теплопроводности в пространстве (9.30) называется функция $g(M, M_0, t)$, удовлетворяющая условиям:*

$$\begin{cases} g_t = a^2 \triangle g, & (M,t) \in \Omega^3_\infty, \\ g(M, M_0, 0) = \delta(M, M_0), & M, M_0 \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{9.31}$$

и непрерывное всюду в $\bar{\Omega}^3_\infty$, за исключением точки $(M_0, 0)$.

Лемма 9.8.1. *Пусть $u(t)$ — решение задачи Коши.*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \triangle u, & (M,t) \in \Omega^3_\infty, \\ u(M, 0) = \varphi(M) \equiv \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z), & M \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

Тогда

$$u(M,t) = u_1(x,t)u_2(y,t)u_3(z,t),$$

где

$$\begin{cases} u_{1t} = a^2 u_{1xx}, \\ u_1(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2t} = a^2 u_{2yy}, \\ u_2(y,0) = \varphi_2(y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{3t} = a^2 u_{3zz}, \\ u_3(z,0) = \varphi_3(z). \end{cases}$$

Доказательство. Имеем:

$$a^2 \triangle u = \underbrace{a^2 u_{1xx}}_{=u_{1t}} u_2 u_3 + \underbrace{a^2 u_{2yy}}_{=u_{2t}} u_1 u_3 + \underbrace{a^2 u_{3zz}}_{=u_{3t}} u_1 u_2 = (u_1 u_2 u_3)_t = u_t,$$

$$u(M,0) = u_1(x,0)u_2(y,0)u_3(z,0) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) = \varphi(M).$$

■

В трехмерном случае дельта-функцию можно представить в виде произведения трех одномерных дельта-функций:

$$\delta(M, M_0) = \delta(x, x_0)\delta(y, y_0)\delta(y, y_0),$$

Поэтому, применяя лемму к задаче (9.31), получаем

$$g(M, M_0, t) = g(x, x_0, t)g(y, y_0, t)g(x, x_0, t),$$

и итоговое выражения для ФР:

$$\boxed{g(M, M_0, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2 t}},}$$

а для решения задачи:

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} g(M, Q, t-\tau) f(Q, \tau) dV_Q d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^3} g(M, Q, t)\varphi(Q) dV_Q.}$$

9.9 Уравнение теплопроводности на полупрямой

Введем множества:

$$\Omega_T^+ \equiv \mathbb{R}^+ \times (0, T\,],$$
$$\bar{\Omega}_T^+ \equiv \mathbb{R}^+ \times [\,0, T\,].$$

9.9.1 Постановка задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \bar{\mathbb{R}}^+, \\ u(0,t) = \mu(t), & t \in [\,0, +\infty), \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t \in [\,0, +\infty), \\ |u(x,t)| < M, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty^+. \end{cases}$$

9.9.2 Однородные граничные условия

Лемма 9.9.1.

1. *Пусть функция $\varphi(x)$ является нечетной, то есть*

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Тогда интеграл Пуассона

$$u(0,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(0,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi = 0.$$

2. *Пусть функция $\varphi(x)$ является четной, то есть*

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Тогда

$$u_x(0,t) = 0.$$

Доказательство.

1. Ввиду четности g, под интегралом нечетная функция, и ее интеграл в симметричных пределах равен нулю.

2. Аналогично предыдущему случаю, для производной под интегралом будет стоять нечетная функция (φ — четная, $g_x(x,\xi,y)$ — нечетная), интеграл от которой также равен нулю.

■

Условия Дирихле (однородные)

Введем функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{9.32}$$

Она нечетная.
Тогда

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi$$

— решение задачи, так как

$$v(0,t) = 0,\ t \in [\,0,+\infty).$$

Используя формулу (9.32) можно записать решение нашей задачи в виде

$$u(x,t) = v(x,t)|_{x\geqslant 0} = \int\limits_{0}^{+\infty} g_1(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$g_1(x,\xi,t) = g(x,\xi,t) - g(x,-\xi,t)$$

9.9.3 Физический смысл

Если в точку ξ посадить источник, а в $-\xi$ — такой же по мощности потребитель, то в нуле будет поддерживаться нулевая температура и задача сводится к задаче на полупрямой.

Условия Неймана

Все то же самое, но вместо g_1 будет g_2, имеющая вид

$$g_2(x,\xi,t) = g(x,\xi,t) + g(x,-\xi,t).$$

В точку $-\xi$ мы ставим не потребитель (отрицательный источник), а положительный, такой же, как в ξ. Встречные потоки тепла нейтрализуют друг друга, и в нуле не потока не будет.

9.9.4 Неоднородные граничные условия Дирихле. Принцип Дюамеля

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ u(x,0) = 0, & x \in \bar{\mathbb{R}}^+, \\ u(0,t) = \mu(t), & t \in [\,0,+\infty), \\ |u(x,t)| < M, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty^+. \end{cases}$$

Определение 9.9.1. *Функции $u(x,t)$ ставится в соответствие изображение преобразования Лапласа.*

$$u(x,t) \risingdotseq U(x,p) \equiv \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} u(x,t)dt.$$

$$u_{xx}(x,t) \risingdotseq U_{xx}(x,p),$$
$$u_t(x,t) \risingdotseq pU(x,p) - \underbrace{u(x,0)}_{=0} = pU(x,p),$$
$$\mu(t) \risingdotseq M(p).$$

Тогда для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \risingdotseq pU = a^2 U_{xx},$$

$$|U| < M_1 \Rightarrow U(x,p) = M(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} = M(p) \cdot p \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{p}}_{\risingdotseq G(x,t)}.$$

Свертка имеет своим образом

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \risingdotseq F_1(p) F_2(p). \tag{9.33}$$

(9.33) есть свертка. Значит,

$$\begin{cases} G_t = a^2 G_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ G(x,0) = 0, & x \in \bar{\mathbb{R}}^+, \\ G(0,t) = 1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}, & t \in [0,+\infty), \\ |G(x,t)| < M_2, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty^+. \end{cases}$$

Перекинем неоднородность в начальные условия:

$$v(x,t) = 1 - G(x,t),$$

Эта функция может быть определена как не классическое решение начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ v(x,0) = 1, & x \in \bar{\mathbb{R}}^+, \\ v(0,t) = 0, & t \in [0,+\infty), \\ |v(x,t)| < M_3, & (x,t) \in \bar{\Omega}_\infty^+. \end{cases}$$

Решение этой задачи записывается через фундаментальное решение:

$$v(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} g_1(x,\xi,t)1d\xi = \Phi\left(\frac{1}{2a\sqrt{t}}\right),$$

$$G(x,t) = 1 - v(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz. \tag{9.34}$$

В пространстве оригиналов,

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau, \tag{9.35}$$

Решение задачи в виде (9.35) носит название интеграла Дюамеля.

Из (9.34) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

и окончательно получаем:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{\left(2a\sqrt{t-\tau}\right)^2}} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.}$$

Определение 9.9.2. *Изложенный выше прием построения решения начально-краевой задачи с неоднородными граничными условиями в виде интеграла Дюамеля (9.35) является частным случаем общего метода решения данного класса линейный начально-краевых задач, известного под названием принципа Дюамеля.*

Глава 10

Уравнения гиперболического типа

10.1 Постановка начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(M)u_{tt} = div\,(k(M)\,grad\,u) + f(M,t), & (M,t) \in Q_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in D, \\ u_t(M,0)\psi(M), & M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \mu(P,t), & P \in S,\ t \in [\,0,+\infty). \end{cases} \tag{10.1}$$

10.2 Теорема единственности

Теорема 10.2.1. *Пусть в задаче* (10.1)

$$\rho(M),\ k(M) > 0,\ M \in D,$$

$$\alpha(P),\ \beta(P) \geqslant 0 \text{ при } P \in S \text{ и } \alpha + \beta > 0.$$

Тогда решение задачи (10.1) *единственно.*

Доказательство. Обозначим

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_D \left(\rho u_t^2 + k\,grad^2 u\right).$$

Предположим, что есть два решения $u_1,\ u_2$,

$$v = u_1 - u_2,\ \alpha > 0.$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int\limits_D \left(\rho v_t v_{tt} + k\,grad\,v \cdot grad\,v_t\right) dV =$$

$$= \oint\limits_S k(P) v_t \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma + \int\limits_D v_t \underbrace{\left\{\rho v_t t - div\,(k\,grad\,v)\right\}}_{=0 \text{ из уравнения}} dV =$$

$$= -\oint\limits_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v\cdot v_t d\sigma = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\oint\limits_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v^2 d\sigma.$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t)+\frac{1}{2}\oint\limits_S k(P)\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}v^2 d\sigma_P\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow E=c=const.$$

Из начальных условий задачи (10.1) следует, что $c=0$.

$$E=0\Rightarrow v_t=0,\ \ grad\, v=0\Rightarrow v=c_1=const$$

Аналогично, из начальных условий задачи (10.1) следует, что $c_1=0$, а значит

$$u_1\equiv u_2.$$

Для $\alpha=0\vee\beta=0$ доказывается аналогично. ■

10.3 Формальное построение решения задачи методом Фурье

Решение задачи (10.1) будем искать в виде разложения

$$\boxed{u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(M),}$$

где

$$\boxed{u_n(t)=\int\limits_D u(Q,t)\rho(Q)v_n(Q)dV_Q,}$$

$$\|v_n\|=1,\ \ n=1,2,\ldots.$$

$$\boxed{\begin{aligned}u(M,t)=&\int\limits_D\left\{\frac{\partial g\,(M,Q,t)}{\partial t}\varphi(Q)+g(M,Q,t)\psi(Q)\right\}\rho(Q)dV_Q\,+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_D g(M,Q,t-\tau)f(Q,\tau)dV_Q d\tau,\end{aligned}}$$

где

$$\boxed{g(M,Q,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}t}{\sqrt{\lambda_n}}v_n(M)v_n(Q).}\qquad(10.2)$$

Определение 10.3.1. *Функция $g(M,Q,t)$, заданная формулой (10.2) называется <u>функцией источника</u> для задачи (10.1).*

10.4 Существование классического решения на отрезке

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0,l),\ t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,l], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [0,+\infty). \end{cases} \tag{10.3}$$

Построим решение

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^l \frac{\partial g\,(x,\xi,t)}{\partial t}\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^l g(x,\xi,t)\psi(\xi)d\xi,}$$

где

$$g(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l},$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l},\ n = 1,2,\ldots.$$

Неоднородная задача имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in (0,l),\ t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,l], \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

и ее решение

$$\boxed{u(x,t) = \int\limits_0^l \frac{\partial g\,(x,\xi,t)}{\partial t}\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^l g(x,\xi,t)\psi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l g(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,}$$

где

$$g(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n \xi}{l},$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l},\ n = 1,2,\ldots.$$

Будем рассматривать (10.3), где $f(x,t) \equiv 0$.

Теорема 10.4.1. *Пусть*

$$\varphi(x) \in C^{(2)}[0,l] \bigcap Q^{(3)}[0,l],$$

$$\psi(x) \in C^{(1)}[\,0,l\,] \bigcap Q^{(2)}[\,0,l\,],$$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Тогда решение задачи (10.3) *существует и равно*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t) \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi,$$

$$b_n = \frac{1}{\omega_n}\psi_n = \frac{2}{l \cdot \omega_n} \int\limits_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n \xi}{l} d\xi,$$

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из свойств рядов Фурье, согласно которым сходятся мажорантные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (a_n), \ k = 1, 2, \ldots$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (b_n), \ k = 1, 2, \ldots,$$

вследствие чего наши ряды сходятся равномерно. ■

10.5 Физический смысл функции Грина

Рассмотрим случай

$$\varphi(x) = 0, \ \psi(x) = 0, \ x \in [\,0,l\,].$$

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l g(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi.$$

Обозначим

$$\Omega_\Delta \equiv (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x) \times (t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t)$$

И введем функцию f_Δ, такую, что

$$f_\Delta(x,t) \neq 0, \ (x,t) \in \Omega_\Delta,$$

$$f_\Delta(x,t) = 0, \ (x,t) \notin \Omega_\Delta,$$

$$F_\Delta(t) = \rho \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_\Delta(\xi, t) d\xi,$$

$$I = \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} F_\Delta(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$u_\Delta(x,t) = g(x, x^*, t - t^*)\,\frac{I}{\rho},$$

где

$$x^* \in [\,x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x\,],$$

$$t^* \in [\,t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t\,],$$

и

$$u_0(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} u_\Delta(x,t) = g(x, x_0, t - t_0)\,\frac{I}{\rho}.$$

Итак, функция Грина имеет смысл смещения струны в точке x в момент времени t, если в точке x_0 в момент времени t_0 на нее подействовала точечная сила I. ρ — плотность струны ($\rho = const\ \forall\,(x,t)$). По-другому здесь функция Грина называется функцией влияния точечного источника.

10.6 Уравнение колебаний на прямой

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [\,0, l\,], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [\,0, l\,]. \end{cases} \tag{10.4}$$

Получим формулу д'Аламбера методом распространяющихся волн.

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

— уравнение характеристик. Получаем:

$$\begin{cases} x + at = C_1, \\ x = at = C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x = at. \end{cases}$$

$$U_{\xi\eta} = 0$$

(перекрестный член в уравнении отсутствует),

$$U_\eta = f(\eta) \Rightarrow U(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

и

$$u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at).$$

Далее имеем для начальных условий:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C.$$

Получаем формулу д'Аламбера:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz.}$$

Теорема 10.6.1. *Если*

$$\varphi(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}^1),$$
$$\psi(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1),$$

то классическое решение задачи (10.4) *существует, единственно и представимо формулой д'Аламбера.*

Теорема 10.6.2. *Классическое решение задачи* (10.4) *устойчиво по начальным данным, то есть, если*

$$u_i(x,t) \sim \varphi_i(x),\ \psi_i(x)\ (i = 1,2)$$

и

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon,$$

$$\int\limits_a^b |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)|\, d\xi < \varepsilon(b-a)\ \forall\, a,\ \forall\, b,$$

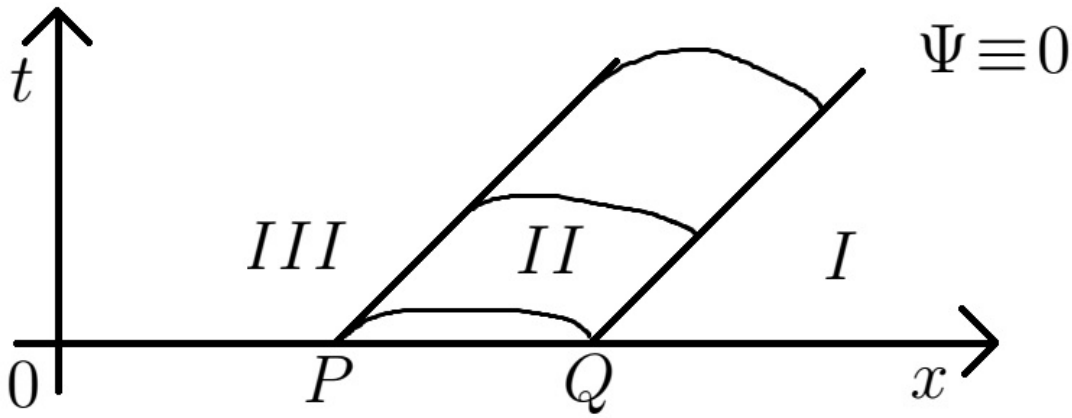
то

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon(1+T),\ (x,t) \in \bar{\Omega}_T.$$

Теорема носит локальный характер.

10.7 Фазовая плоскость. Физическая интерпретация решения

(В конспекте мало информации, более подробно см. учебник "Лекции по математической физике, Свешников, Боголюбов, Кравцов", стр.272). Напомним, Для выяснения характера решения удобно пользоваться фазовой плоскостью (x,t).



Прямые

$$x - at = C_1,\ x + at = C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные, являются характеристиками уравнения, вдоль них функция

$$u = f(x - at),\ u = f(x + at)$$

имеет постоянные значения.

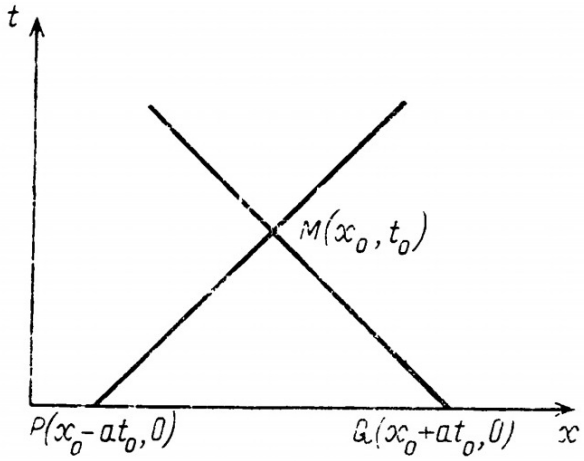


Рис 10.1

Выберем на фазовой плоскости точку $M(x_0, t_0)$ и проведем через нее характеристики. Значение функции в этой точке равно

$$u(x_0, t_0) = f(x_0 - at_0) + f(x_0 + at_0),$$

и целиком определяется значениями функции в точках P и Q.

Определение 10.7.1. *Треугольник MPQ, образованный двумя отрезками характеристик и отрезком оси x (см. Рис 10.1), называется характеристическим треугольником точки M.*

Значение функции в этой точке будет

$$\boxed{u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{PQ} \psi(z)dz.}$$

10.8 Метод интегрирования по фазовой плоскости

Пусть $\bar{G} = G + \Gamma,\ G$ — открытая область с границей Γ.

$$F(x,t) \in C^{(1)}(G) \bigcap C(\bar{G}),$$

$$\int\limits_G \frac{\partial F}{\partial t} dxdt = -\oint\limits_\Gamma dx,$$

$$\int\limits_G \frac{\partial F}{\partial x} dxdt = \oint\limits_\Gamma dt.$$

В качестве G возьмем характеристический треугольник, обход против часовой стрелки

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz + \frac{1}{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi}$$

— формула д'Аламбера для неоднородного уравнения.

Замечание. Условия теоремы существования не предполагают начальных функций в виде треугольных импульсов, но в силу теоремы устойчивости, вместо них можно рассматривать сглаженный треугольник, $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x)$ и решать задачу через предельный переход.

Лемма 10.8.1.

1. *Пусть функция $\varphi(x)$ является нечетной, то есть*

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

Тогда

$$u(0,t) = 0.$$

2. *Пусть функция $\varphi(x)$ является четной, то есть*

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Тогда

$$u_x(0,t) = 0.$$

Доказательство. Доказательство напрямую следует из формулы д'Аламбера. ■

10.9 Уравнение колебаний на полуограниченной прямой

10.9.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = 0, & t \in [0,+\infty) \text{ (задача Дирихле)}, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in [0,+\infty) \text{ (задача Неймана)}. \end{cases} \tag{10.5}$$

10.9.2 Задача Дирихле

Продолжим функции ε и ψ нечетным образом

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

Согласно формуле д'Аламбера,

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(z)dz$$

— решение задачи (10.5). Преобразуем полученное выражение:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, & 0 < t \leqslant \dfrac{x}{a},\ x > 0, \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(z)dz, & t \geqslant \dfrac{x}{a},\ x > 0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Замечание. При $0 < t \leqslant \dfrac{x}{a},\ x > 0$ волна не успевает отразиться от $\bar{x}$ и проинтерферировать сама с собой, а значит, нам не важно, прямая у нас или полупрямая и формула (10.6) совпадает с формулой д'Аламбера.

10.9.3 Задача Неймана

Продолжим функции ε и ψ четным образом

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

Согласно формуле д'Аламбера,

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x-at) + \tilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(z)dz$$

— решение задачи (10.5). Преобразуем полученное выражение:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, \quad 0 < t \leqslant \dfrac{x}{a}, \ x > 0, \\ \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \left\{ \displaystyle\int\limits_{0}^{x+at} \psi(z)dz + \int\limits_{0}^{at-x} \psi(z)dz \right\}, \ t \geqslant \dfrac{x}{a}, \ x > 0. \end{cases}$$

Замечание, сделанное по поводу задачи Дирихле также остается в силе и для задачи Неймана.

10.10 Распространение краевого решения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in \Omega_\infty^+, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = \mu(t), & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Так как в случае полупрямой волне не от чего отражаться, то ищем только правое решение:

$$u(x,t) = f(x-at),$$
$$u(x,0) = 0, \ x \geqslant 0,$$
$$u_t(x,0) = -af'(x) = 0, \ x \geqslant 0,$$
$$u(0,t) = f(-at) = \mu(t), \ t \geqslant 0,$$
$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & t \geqslant \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

10.11 Распространение волн в пространстве

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u + f(M,t), & (M,t) \in \Omega^3_\infty, \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(M,0) = \psi(M), & M \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{10.7}$$

10.11.1 Сферически-симметричный случай

$$\begin{aligned} u(M,t) &= u(r,t), \\ f(M,t) &= f(r,t), \\ \varphi(M) &= \varphi(r), \\ \psi(M) &= \psi(r). \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) + f(r,t), & (r,t) \in \Omega^+_\infty, \\ u(r,0) = \varphi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \psi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ |u(0,t)| < \infty, & t \in [\,0, +\infty). \end{cases}$$

Сделаем замену

$$u(r,t) = \frac{1}{r} v(r,t),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r f(r,t), & (r,t) \in \Omega^+_\infty, \\ u(r,0) = r\varphi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(r,0) = r\psi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ v(0,t) = 0, & t \in [\,0, +\infty). \end{cases} \tag{10.8}$$

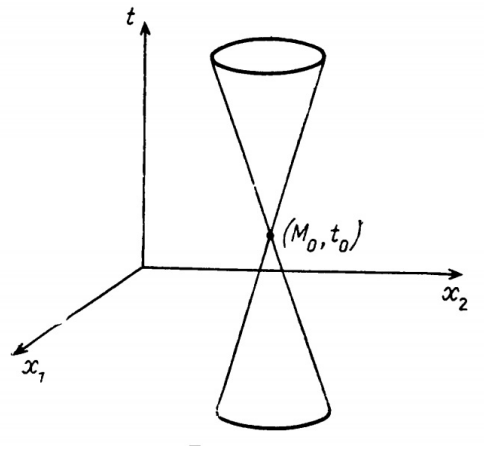
Таким образом, исходная задача (10.7) сводится к уже изученной задаче (10.8), описывающей одномерные колебания на полупрямой, решение которой можно представить в виде суперпозиции правых и левых бегущих волн, а значит решение задачи (10.7) представляет суперпозицию распространяющихся в радиальном направлении волн

$$\frac{u(x-at)}{r}, \ \frac{u(x+at)}{r},$$

амплитуда которых убывает по мере удаления от центра M_0. Такие колебания называются расходящимися и сходящимися бегущими сферическими волнами в зависимости от направления распространения от точки M_0 или к этой точке.

10.11.2 Несимметричный случай. Формула Кирхгофа

При рассмотрении явлений в фазовом пространстве вводится характеристический конус — аналог характеристического треугольника в трехмерном и двумерном пространстве.



Введем локальное время

$$t' = t - \left(t_0 - \frac{r_M M_0}{a}\right).$$

Если взять начальную точку M_0, то после несложных преобразований

$$\triangle U = -\frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right) - \frac{1}{a^2}F(M, t').$$

$$(M_0, 0) : M = M_0,\ t = t_0 \Rightarrow t' = 0$$

(в начальной точке локальное время равно нулю).

$$J = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\frac{2}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial t'}\right)_{t'=0}\underbrace{dV_r}_{=dr\cdot r^2 d\omega} = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\frac{2}{ar}r^2\left(\frac{\partial U}{\partial t'}\right)_{t'=0}d\omega =$$

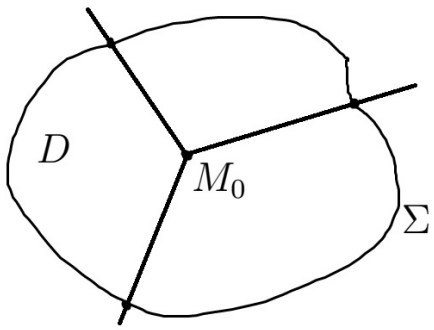
$$= \Big/ * \ r^2 d\omega|_{\Sigma} = \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{r}}\right)d\sigma = \frac{dr}{dn}d\sigma \ * \Big/$$

Используя третью формулу Грина, получаем

$$U(M_0, 0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \frac{2}{ar_{PM_0}}\frac{\partial U'}{\partial t}\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}\right\}_{t'=0}d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{D}\frac{F(Q, 0)}{r_{QM_0}}dV_Q.$$

Требуется, чтобы область $\bar{D} = D + \Sigma$ была звездной относительно точки M_0, то есть чтобы каждый луч с началом в точке M_0 пересекал ее границу в одной точке.



$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial r}}_{=-\frac{1}{a}} \frac{\partial r}{\partial n}$$

Итак,

$$\boxed{\begin{aligned} u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\Sigma} \Bigg\{ & \frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \\ & + \frac{1}{a r_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial t} \left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) \frac{d r_{PM_0}}{d n_P} \Bigg\}_{t = t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}} d\sigma_P + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_D \frac{f\left(Q, t_0 - \frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}} dV_Q. \end{aligned}} \tag{10.9}$$

Определение 10.11.1. *Формула* (10.9) *называется* <u>*формулой Кирхгофа*</u>*, и имеет физический смысл запаздывающих потенциалов.*

10.11.3 Формула Пуассона

Пусть наша область — шар радиуса at_0 с центром в M_0

$$\underbrace{\Sigma \to \Sigma_{M_0}^{at_0}}_{\text{сфера}}, \quad \underbrace{D \to K_{M_0}^{at_0}}_{\text{шар (открытый)}}, \quad P \in \Sigma_{M_0}^{at_0}.$$

Имеем:

$$u\left(P, t_0 - \frac{1}{a} r_{PM_0}\right) = u(P, 0) = \varphi(P),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}(P, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(P),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(P),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\varphi\right).$$

Если $f = 0$, получаем из формулы Кирхгофа (10.9)

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varphi\right) + \frac{1}{ar^2}\left(r\psi\right)\right\}\underbrace{d\sigma}_{=r^2 d\omega} = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varphi\right) + \frac{1}{a}\left(r\psi\right)\right\}_{r=at_0} d\omega,$$

где Ω — единичная сфера.

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial at_0}\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}} + \frac{\psi(P)}{ar_{PM_0}}\right\} r^2 d\omega =$$

$$\boxed{= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t_0}\oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left.\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\right|_{r=at_0} d\sigma_P + \frac{1}{4\pi a}\oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left.\frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\right|_{r=at_0} d\sigma_P.} \tag{10.10}$$

При $f \neq 0$ добавится интеграл по шару (см. (10.9)):

$$\boxed{\begin{aligned} u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi a}&\left\{\frac{\partial}{\partial t_0}\oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left.\frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\right|_{r=at_0} d\sigma_P + \oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}}\left.\frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\right|_{r=at_0} d\sigma_P\right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{M_0}^{at_0}}\frac{f\left(Q, t_0 - \dfrac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}} dV_Q. \end{aligned}} \tag{10.11}$$

Определение 10.11.2. *Формулы* (10.10) *и* (10.11) *называются формулами Пуассона для соответственно однородного и неоднородного уравнений колебаний в пространстве.*

Замечание. Из формулы Пуассона следуют теоремы единственности, устойчивости, а также существования классического решения при

$$\varphi \in C^{(3)}(\mathbb{R}^3),$$

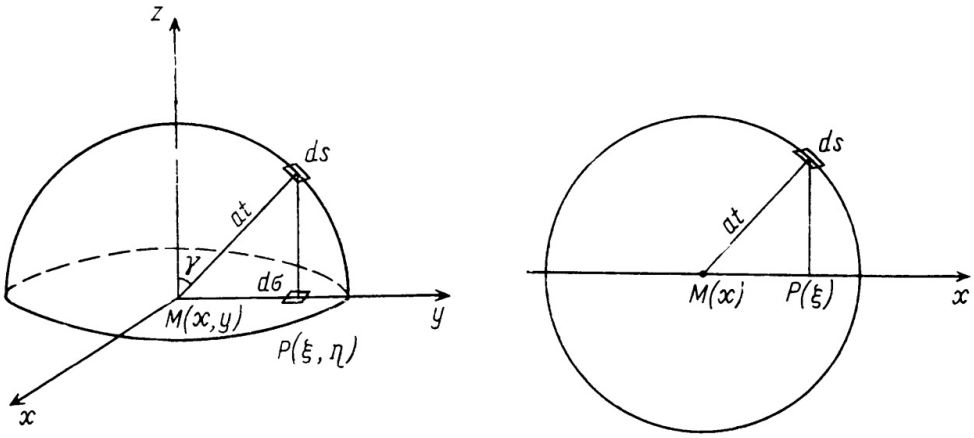
$$\psi \in C^{(2)}(\mathbb{R}^3),$$

$$f \in C^{(2)}(\Omega_\infty^3).$$

10.11.4 Метод спуска Адамара[1]

Уменьшим размерность пространства до двух:

$$\varphi = \varphi(x, y),\ \psi = \psi(x, y),\ f = f(x, y, t) \Rightarrow u = u(x, y, t).$$



Пусть

$$M \to M,\ t_0 \to t,$$

$$dS = d\xi \cdot d\eta,$$

$$\frac{d\sigma}{r} = \left.\frac{dS}{r\cos\gamma}\right|_{r=at},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{at}$$

$$\left.\frac{d\sigma}{r}\right|_{r=at} = \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

U_M^{at} — круг с центром M и радиусом at.

$$J = \int\limits_{K_M^{at}} \frac{f\left(Q, t - \dfrac{r_{QM}}{a}\right)}{r_{QM}} r^2 dr d\omega = \int\limits_0^{at} d\left(a\tau\right) \int\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f\left(Q, t-\tau\right)}{r_{QM}} d\sigma_Q =$$

$$= a \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Sigma_M^{a\tau}} \frac{f\left(Q, t-\tau\right)}{r_{QM}} d\sigma_Q.$$

[1]подробнее Б. К. С. стр 292

Для двумерного случая

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\Bigg\{ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{U_M^{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \\ + \int\limits_{U_M^{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} \Bigg\} + \\ + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{U_M^{at}} \frac{f(\xi,\eta,t-\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}. \end{aligned}}$$

Эта формула была получена методом спуска Адамара из формулы Кирхгофа. Этот метод позволяет получить из формулы решения с большим числом пространственных переменных формулы решения с меньшим числом пространственных переменных. Метод применим не только к уравнению колебаний, но и другим типам уравнений.

10.11.5 Принцип Гюйгенса

Пусть

$$f \equiv 0,\ D_0 = supp\,\varphi = supp\,\psi.$$

Трехмерный случай

Рассмотрим

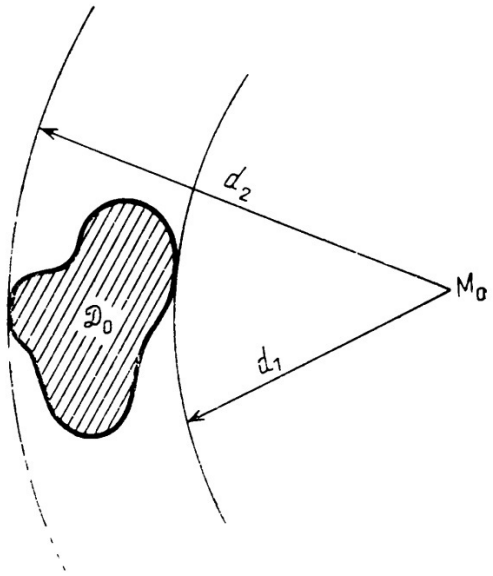
$$\Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0.$$

$$\text{Если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{c_1}{a},\ \text{ то } \Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0 = \varnothing \Rightarrow u(M_0,t) = 0.$$

$$\text{Если } \frac{c_2}{a} \leqslant t \leqslant \frac{c_1}{a},\ \text{ то } \Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0 \neq \varnothing \Rightarrow u(M_0,t) \neq 0.$$

$$\text{Если } t \geqslant \frac{c_2}{a},\ \text{ то } \Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0 = \varnothing \Rightarrow u(M_0,t) = 0.$$

В трехмерном случае, локализованное в пространстве возмущение вызывает возмущение, локализованное во времени. Волна имеет четко выраженный передний и задний фронт. Принцип Гюйгенса выполняется.



Двумерный случай

$$\text{Если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{c_1}{a}, \text{ то } \Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0 = \varnothing \Rightarrow u(M_0, t) = 0.$$

$$\text{Если } t \geqslant \frac{c_1}{a}, \text{ то } \Sigma_{M_0}^{at} \bigcap D_0 \neq \varnothing \Rightarrow u(M_0, t) \neq 0.$$

В двумерном случае, локализованное в пространстве возмущение не вызывает возмущения, локализованного во времени. Волна имеет четко выраженный передний фронт, а вместо заднего фронта — медленное спадание.
Принцип Гюйгенса не может выполнятся.

Глава 11

Уравнения эллиптического типа (продолжение)

11.1 Теория потенциалов

11.1.1 Равномерная сходимость интегралов

Рассмотрим несобственный интеграл

$$u(M) = \int\limits_D f(M,Q)\rho(Q)dV_Q, \tag{11.1}$$

где

$$|\rho(M)| < N,$$
$$f(M,Q) \in C \text{ при } M \neq Q,$$

и при $M = Q$ $f(M,Q)$ имеет особенность.

Определение 11.1.1. *Интеграл* (11.1) *называется* <u>*равномерно сходящимся в точке* M_0</u>*, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, M \in K^{\delta}_{M_0}\ \forall\, D^{\delta} \subset K^{\delta}_{M_0}\ (M_0 \in D^{\delta}) \Rightarrow \left(\left| \int\limits_{D^{\delta}} f(M,Q)\rho(Q)dV_Q \right| < \varepsilon \right).$$

Теорема 11.1.1. *Если* (11.1) *равномерно сходится в точке* M_0*, то он непрерывен в* M_0

Доказательство. Б. К. С. стр 168. ■

11.1.2 Логарифмический потенциал

Определение 11.1.2. *Интеграл*

$$\boxed{v(M) = \oint\limits_C \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P}$$

называется логарифмическим потенциалом простого слоя в двумерном случае.

Здесь C — это ориентированная кривая с определенной нормалью, $\mu(P)$ — функция, заданная на кривой C.

Определение 11.1.3. *Интеграл*

$$\boxed{\omega(M) = \oint\limits_C \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}}dl_P = \oint\limits_C \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r_{PM}}dl_P,}$$

где C — ориентированная кривая, называется логарифмическим потенциалом двойного слоя в двумерном случае.

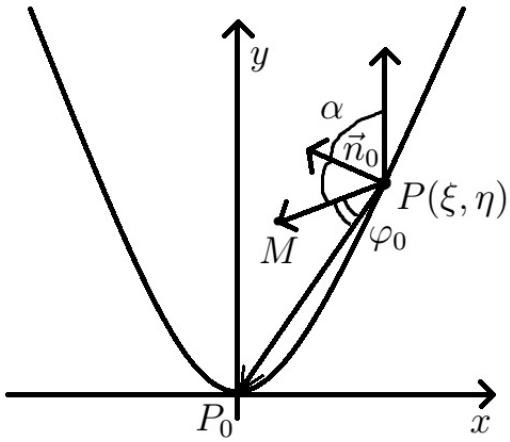
Определение 11.1.4. *Назовем кривой класса A плоскую кривую с непрерывной ограниченной кривизной.*

Свойства:

1. В каждой точке $C \in A$ существует непрерывное поле нормалей (или касательных).

2. Для любой точки p_0 на кривой C существует $\delta > 0$, такая что на участке кривой
$$C^\delta = C \bigcap U^\delta_{p_0}$$
в локальной системе координат (в местной системе координат) кривая может быть представлена в виде однозначной непрерывной функции $y = f(x)$.

Местная система координат — значит начало координат берется в рассматриваемой точки и оси направляются определенным образом. В данном случае:



$$\eta(\xi) : \eta(0) = 0,\ \eta'(0) = 0,$$

$$\eta(\xi) = \eta(0) + \xi\,\eta'(0) + \frac{\xi^2}{2}\eta''(\theta\cdot\xi),\ \theta \in (0,1),$$

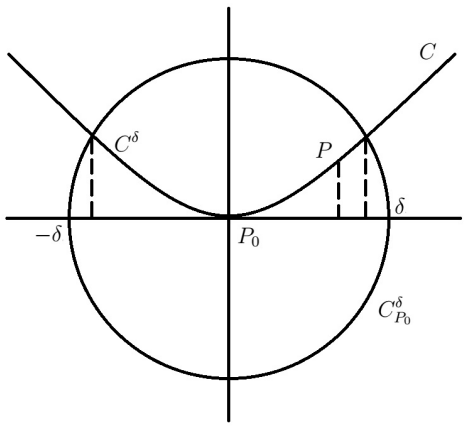
$$|\eta(\xi)| \leqslant \frac{k}{2}\xi^2,$$

$$\eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi', \eta''(\theta \cdot \xi),\ \theta \in (0,1),$$
$$\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha = \eta'(\xi),$$
$$|\eta'(\xi)| \leqslant k\xi,$$
$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha > \frac{1}{2}.}$$

Теорема 11.1.2. *Пусть функция $\mu(P)$ ограничена ($|\mu(P)| < N$). Тогда*
$$v(M) \in C(\mathbb{R}^2),$$
то есть логарифмический потенциал простого слоя непрерывен.

Доказательство. Если $M \notin C$, то $v(M)$ — собственный интеграл, и он непрерывен.
Если $M \equiv P_0 \in C$, то достаточно доказать равномерную сходимость интеграла $v(M)$.

Нам нужно доказать, что
$$\left| \oint\limits_{C^\delta} \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM_0}} dl_P \right| < \varepsilon$$
(рассматриваем кусок C^δ кривой C внутри $C^\delta_{M_0}$).



$$\left| \ln \frac{1}{r_{PM_0}} \right| \leqslant \left| \ln \frac{1}{x - \xi} \right|,$$
$$dl_P = \frac{d\xi}{\cos\alpha} < 2d\xi,$$
$$\left| \oint\limits_{C^\delta} \mu(P) \ln \frac{1}{r_{PM_0}} dl_P \right| < 2N \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \ln \frac{1}{x - \xi} d\xi < \varepsilon\ \forall\, M \in U^\delta_{P_0}.$$
Интеграл сходится равномерно, а значит непрерывен. ■

Теорема 11.1.3. *Пусть функция $\nu(P)$ ограничена ($|\nu(P)| < N$). Тогда логарифмический потенциал двойного слоя $\omega(M)$ существует всюду в $\mathbb{R}^2$.*

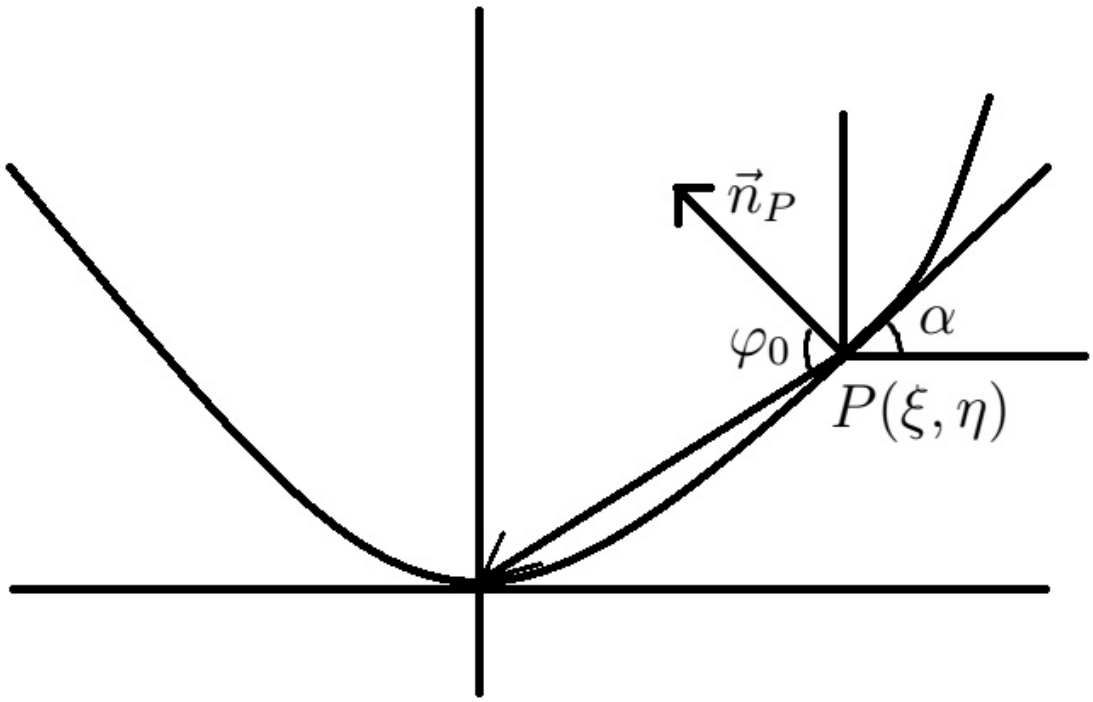
Доказательство. Пусть $M \notin C$, то $v(M)$ — собственный интеграл, а значит, существует.

Пусть $M \equiv P_0 \in C$.

Тогда:

$$\vec{r}_{PP_0} = \{-\xi, -\eta\} : \vec{n}_P = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$$

(в местной системе координат).



Тогда

$$\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}} = \frac{\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha}{r},$$

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}\right| = \left|\frac{\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha}{r}\right| \leqslant \frac{k\xi^2 + \frac{1}{2}k\xi^2}{r_{PP_0}^2} = \frac{3}{2}k.$$

$$\left|\oint\limits_{C^\delta} \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}dl_P\right| \leqslant 2Nk\delta < \varepsilon,$$

при $P_0 \in C$ и при выборе достаточно малого $\delta > 0$, а значит, несобственный интеграл существует. ■

Мы доказали две теоремы:

Теорема 11.1.2. Если $\mu(P)$ ограничена ($|\mu(P)| < N$), то

$$v(M) \in C(\mathbb{R}^2),$$

Теорема 11.1.3. Если $\nu(P)$ ограничена ($|\nu(P)| < N$), то $\omega(M)$ существует в $\mathbb{R}^2$, но необязательно является непрерывной.

Обычно $\nu(P) = \nu_0 = const$, и тогда

$$\overset{\circ}{\omega}(M) = \oint\limits_C \nu_0 \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P.$$

Теорема 11.1.4.

$$\overset{\circ}{\omega}(M) = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & M \in G, \\ \pi\nu_0, & M \in \Gamma, \\ 0, & M \notin \bar{G}. \end{cases} \tag{11.2}$$

Доказательство. (11.2) следует из третьей формулы Грина на плоскости с учетом того, что в последней нормаль внешняя, а у нас — внутренняя. ■

Следствия:

1. $$\overset{\circ}{\omega}{}^{(i)}(P_0) - \overset{\circ}{\omega}{}^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu_0, \ P_0 \in C$$

   (потенциал двойного слоя претерпевает скачок при переходе через границу).

2. При C^δ, $\cos\varphi$

   $$\oint\limits_{C^\delta} \frac{|\cos\varphi|}{r_{PM}} dl_P \leqslant 2\pi.$$

Теорема 11.1.5. *Пусть*

$$\nu(P) \in Q(\mathbb{R}^2), \ |\nu(P)| < N$$

(кусочно-непрерывная на $\mathbb{R}^2$ и ограничена). Тогда при переходе через границу $\omega(M)$ претерпевает скачок:

$$\omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0), \ P_0 \in C. \tag{11.3}$$

Доказательство. Пусть

$$P_0 \in C, \ \nu(P_0) = \nu_0.$$

$$J(M) = \omega(M) - \overset{\circ}{\omega}(M) = \oint\limits_C \{\nu(P) - \nu(P_0)\} \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P.$$

Остается доказать, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 : \forall\, P, P_0 \in C^\delta \Rightarrow \left\{ |\nu(P) - \nu(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \right\},$$

для чего достаточно доказать непрерывность J.

Из оценки

$$\left| \oint\limits_{C^\delta} \{\nu(P) - \nu(P_0)\} \frac{\cos\varphi}{r_{PM}} dl_P \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\pi = \varepsilon.$$

Мы доказали равномерную сходимость, а значит, и непрерывность

На внутренней стороне

$$\omega^{(i)}(P_0) = \overset{\circ}{\omega}{}^{(i)}(P_0) + J(P_0) = \pi\nu(P_0) + \underbrace{\overset{\circ}{\omega}(P_0) + J(P_0)}_{=\omega(P_0)}.$$

На внешней стороне

$$\omega^{(e)}(P_0) = \overset{\circ}{\omega}{}^{(e)}(P_0) + J(P_0) = -\pi\nu(P_0) + \underbrace{\overset{\circ}{\omega}(P_0) + J(P_0)}_{=\omega(P_0)}.$$

Получаем

$$\omega^{(i)}(P_0) = \omega(P_0) + \pi\nu(P_0), \tag{11.4}$$

$$\omega^{(e)}(P_0) = \omega(P_0) - \pi\nu(P_0), \tag{11.5}$$

Вычитая из (11.4) формулу (11.5), получаем (11.3). ■

Итак, потенциал двойного слоя терпит скачок на несущей границе.

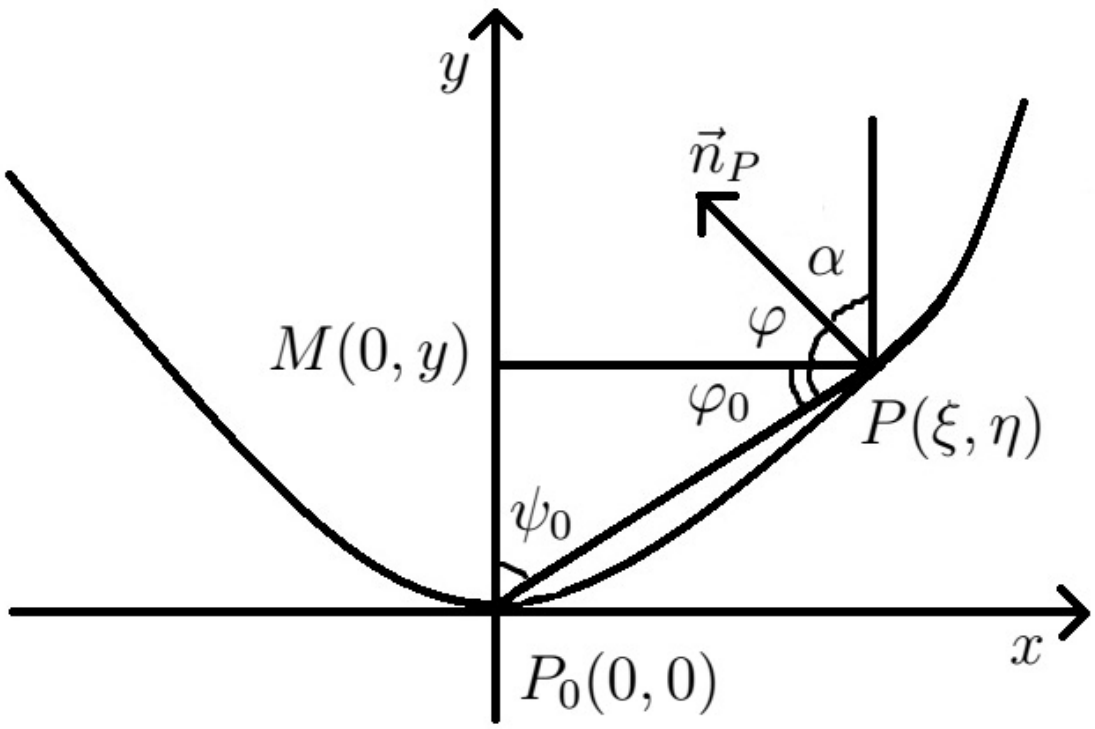
$$\frac{\partial v}{\partial y}(M) \equiv \frac{\partial v}{\partial n_i}(M).$$

Теорема 11.1.6. *Пусть*

$$\mu(P) \in Q(\mathbb{R}^2),\ |\mu(P)| < N.$$

Тогда при переходе через границу производная $\dfrac{\partial v}{\partial n}(M)$ *претерпевает скачок:*

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = 2\pi\mu(P_0),\ P_0 \in C.$$



Доказательство. Смотрим на картинку.

$$\psi = \pi - (\varphi = \alpha) \Rightarrow \cos\psi_0 = -\cos(\varphi_0 + \alpha) = -\cos\varphi_0 \cos\alpha + \sin\varphi_0 \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n_1}(P_0) = \oint\limits_C \mu(P)\frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}}dl_P = -\oint\limits_C \underbrace{\mu(P)\cos\alpha}_{\substack{:=\tilde{\nu}(P)\\ \tilde{\nu}(P_0)=\mu(P_0)}} \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}}dl_P +$$

$$+ \underbrace{\oint\limits_C \mu(P)\sin\varphi_0 \frac{\sin\alpha}{r_{PP_0}}dl_P}_{J(P_0)}.$$

Второй интеграл сходится равномерно.

Имеем:

$$\left|\mu(P)\sin\varphi_0\frac{\sin\alpha}{r_{PP_0}}\right| < kN,$$

$$\left|\oint\limits_{C^\delta} \mu(P)\sin\varphi_0\frac{\sin\alpha}{r_{PP_0}}dl_P\right| < 2kN\delta < \varepsilon.$$

Значит, второй интеграл сходится равномерно, и скачок их суммы определяется

скачком только первого интеграла.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) &= \frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0) + \pi\nu(P_0),\\ \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) &= \frac{\partial v}{\partial n_i}(P_0) - \pi\nu(P_0),\end{aligned}}$$

При переходе через границу получаем скачок на $2\pi\nu(P_0)$. ■

11.1.3 Поверхностный потенциал

Определение 11.1.5. *Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если:*

1. *В каждой точке S существует касательная поверхность (нормаль).*
2. *$\forall\, P_0 \in S\ \exists\, \delta > 0$ участок $S^\delta = S \bigcap K^\delta_{P_0}$ представим в виде функции $z = f(x, y)$.*
3. $$\forall\, P_1, P_2 \in S \Rightarrow \left\{\gamma(P_1, P_2) \equiv (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \leqslant AR^\delta_{P_1P_2}\right\},$$
   то есть на поверхности нет изломов.

Определение 11.1.6. *Интеграл*

$$\boxed{v(M) = \oint\limits_S \frac{\mu(P)}{r_{PM}} d\sigma_P,}$$

где S — поверхность Ляпунова, называется поверхностным потенциалом простого слоя.

Определение 11.1.7. *Интеграл*

$$\boxed{\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P = \oint\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi}{r^2_{PM}} d\sigma_P,}$$

где S — поверхность Ляпунова, называется поверхностным потенциалом двойного слоя.

Теорема 11.1.7. *$v(M)$, $\omega(M)$ являются гармоническими функциями вне несущей поверхности S, то есть*

$$\triangle v(M) = 0,\ M \notin S,$$

$$\triangle \omega(M) = 0,\ M \notin S.$$

Доказательство.

$$\triangle v(M) = \oint\limits_S \mu(P) \underbrace{\left(\triangle_M \frac{1}{r_{PM}}\right)}_{=0} d\sigma_P = 0,$$

$$\triangle \omega(M) = \oint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \underbrace{\left(\triangle_M \frac{1}{r_{PM}}\right)}_{=0} d\sigma_P = 0.$$

■

Теорема 11.1.8. *$v(M)$, $\omega(M)$ равномерно сходят к нулю на бесконечности, то есть*

$$v(M) \rightrightarrows 0,\ M \to \infty,$$
$$\omega(M) \rightrightarrows 0,\ M \to \infty.$$

Доказательство.

$$\omega(M) = \frac{\cos\varphi}{r_{PM}^2} \oint\limits_S \nu(P) d\sigma_P$$

$$\omega(M) = O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ M \to \infty,$$

$$v(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),\ M \to \infty.$$

■

Теорема 11.1.9. *Пусть*

$$\nu(P) \in Q(\mathbb{R}^3),\ |\nu(P)| < N$$

Тогда при переходе через границу $\omega(M)$ претерпевает скачок:

$$\omega^{(i)}(P_0) - \omega^{(e)}(P_0) = 4\pi\nu(P_0),\ P_0 \in S.$$

Теорема 11.1.10. *Пусть*

$$\mu(P) \in Q(\mathbb{R}^3),\ |\mu(P)| < N.$$

Тогда при переходе через границу производная $\dfrac{\partial v}{\partial n}(M)$ претерпевает скачок:

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0) - \frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0) = 4\pi\mu(P_0),\ P_0 \in S.$$

Доказательство. Доказательство обеих теорем аналогично двумерному случаю, множитель 4 получается из третьей формулы Грина для трехмерного случая. ■

11.2 Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

11.2.1 Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана

Задача Дирихле

$$\begin{cases} \triangle\omega(M) = 0, & M \in D_i, \\ \omega(P) = g(P), & P \in S, \\ \omega(M) \in C^{(2)}(D_i) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_i). \end{cases}$$

Ищем решение в виде поверхностного потенциала двойного слоя:

$$\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2} d\sigma_P, \tag{11.6}$$

$$\boxed{\omega^{(i)}(P_0) = 2\pi\nu(P_0) + \oint\limits_S \nu(P) \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = g(P_0).} \tag{11.7}$$

— эквивалентное интегральное уравнение.

Задача Неймана

$$\begin{cases} \triangle v(M) = 0, & M \in D_e, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(P) = h(P), & P \in S, \\ v(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \\ v(M) \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e). \end{cases}$$

Ищем решение в виде поверхностного потенциала простого слоя:

$$v(M) = \oint\limits_S \mu(P) \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P, \tag{11.8}$$

$$\boxed{\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n}(P_0) = 2\pi\mu(P_0) + \oint\limits_S \mu(P) \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2} d\sigma_P = h(P_0).} \tag{11.9}$$

— эквивалентное интегральное уравнение.

Мы получили два интегральных уравнения с ядрами

$$K_1(P, P_0) = \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi_0}{r_{PP_0}^2},$$

$$K_2(P, P_0) = \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{r_{PP_0}^2}.$$

Ввиду того, что интегральные уравнения (11.7) и (11.9) являются союзными, они имеют одинаковый набор собственных значений.

Предположим, что $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$ есть собственное значение. Тогда $\mu_0(P)$ — соответствующая собственная функция.

$$v_0(M) = \oint\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PP_0}} d\sigma_P,$$

$$2\pi\mu_0(P_0) = \oint\limits_S \mu_0(P) \frac{\cos\psi_0}{r^2_{PP_0}} d\sigma_P = 0.$$

Получаем внешнюю задачу

$$\begin{cases} \triangle v_0(M) = 0, & M \in D_e, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial n}(P) = 0, & P \in S, \\ v_0(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \end{cases}$$

Значит,

$$v_0(M) = 0, \ M \in \bar{D}_e.$$

Ввиду непрерывности:

$$v_0(P) = 0, \ P \in S.$$

Для внутренней задачи:

$$\begin{cases} \triangle v_0(M) = 0, & M \in D_i, \\ v_0(P) = 0, & P \in S, \end{cases}$$

Ввиду единственности решения внутренней задачи Дирихле,

$$v_0(M) = 0, \ M \in \bar{D}_i,$$

$$v_0(M) = 0, \ M \in \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0)}_{=0} = 4\pi\mu_0(P_0), \ P_0 \in S$$

$$\Rightarrow \mu_0(P_0) = 0.$$

Теорема 11.2.1. *Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана разрешимы однозначно при любых непрерывных граничных функциях $g(P)$ и $h(P)$ и представимы в виде потенциалов (11.6) и (11.8).*

11.2.2 Внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле

$$\begin{cases} \triangle v(M) = 0, & M \in D_i, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(P) = h(P), & P \in S, \\ v(M) \in C^{(2)}(D_i) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_i). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle \omega(M) = 0, & M \in D_e, \\ \omega(P) = g(P), & P \in S, \\ \omega(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \\ \omega(M) \in C^{(2)}(D_e) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}_e). \end{cases}$$

Интегральное уравнение для внешней задачи Дирихле:

$$\boxed{\omega^{(e)}(P_0) = -2\pi\nu(P_0) + \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PP_0}}d\sigma_P = g(P_0).}$$

Интегральное уравнение для внутренней задачи Дирихле:

$$\boxed{\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n}(P_0) = -2\pi\mu(P_0) + \oint\limits_S \mu(P)\frac{\cos\psi_0}{r^2_{PP_0}}d\sigma_P = h(P_0),}$$

так как

$$v(M) = \oint\limits_S \mu(P)\frac{1}{r_{PM}}d\sigma_P,$$

$$\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r^2_{PM}}d\sigma_P.$$

Из интегральных уравнений видно, что $\lambda_0 = -\dfrac{1}{2\pi}$ есть СЗ.

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \nu_0 = const,\ \mu(P),$$

— собственные функции.

Определение 11.2.1. *Величина*

$$\boxed{v_0(M) = \oint\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM}}d\sigma_P}$$

называется <u>*потенциалом Робена*</u>.

$$\begin{cases} \triangle v_0(M) = 0, & M \in D_i, \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial n}(P) = 0), & P \in S, \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_0(M) = c = const, \ M \in D_i.$$

Обозначим

$$r = rank\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = 1.$$

Тогда $\lambda_0 = -\dfrac{1}{2\pi}$ соответствует СФ $\mu_{0k}, \ k = \overline{1, r}$.

$$v_{0k}(M) = \oint\limits_S \frac{\mu_{0k}(P)}{r_{PM}} d\sigma_P,$$

$$v_{0k}(M) = c_k, \ M \in D_i, \ k = \overline{1, r}.$$

Введем функцию

$$V(M) = v_{0k}(M) - \frac{c_k}{c_1} v_{01}(M) = \oint\limits_S \left\{\mu_{0k}(P) - \frac{c_k}{c_1}\mu_{01}(P)\right\} \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_P,$$

$$V(M) \equiv 0 \text{ при } M \in \bar{D}_i.$$

Для этого потенциала из теоремы 11.1.7 справедливо:

$$\begin{cases} \triangle V(M) = 0, & M \in D_e, \\ V(P) = 0, & P \in S, \\ V(M) \rightrightarrows 0, & M \to \infty, \end{cases}$$

$$v(M) = 0, \ M \in \bar{D}_e \Rightarrow V(M) = 0, \ M \in \mathbb{R}^3,$$

$$\underbrace{\frac{\partial v^{(e)}}{\partial n_i}(P_0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial v^{(i)}}{\partial n_i}(P_0)}_{=0} = 4\pi \left\{\mu_{0k}(P_0) - \frac{c_k}{c_1}\mu_{01}(P_0)\right\}, \ P_0 \in S$$

$$\Rightarrow \mu_{0k}(P) = \frac{c_k}{c_1}\mu_{01}(P), \ P \in S.$$

Вспоминаем теоремы Фредгольма и альтернативу.

$$\oint\limits_S \nu_0 h(P) d\sigma_P = 0,$$

$$\oint\limits_S h(P) d\sigma_P = \oint\limits_S \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} d\sigma_P = 0.$$

$$\oint\limits_S \mu_0 g(P) d\sigma_P = 0,$$

Эти выражения следуют из

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi} \Rightarrow \nu_0 = const,\ \mu(P),$$

$$rank\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = 1.$$

В силу теоремы 11.1.8,

$$\omega(M) = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

Чтобы из этого класса вылезти,

$$\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2} d\sigma_P + \frac{\alpha}{r_{M_i M}}, \qquad \begin{array}{l} \alpha = const, \\ M_i \in D_i, \end{array}$$

$$2\pi\nu(P_0) - \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2} d\sigma_P = -g(P_0) + \frac{\alpha}{r_{P_0 M_i}},\ P_0 \in S,$$

$$\oint\limits_S g(P)\mu_0(P) d\sigma_P - \alpha \oint\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM_i}} d\sigma_P = 0.$$

$$\oint\limits_S \frac{\mu_0(P)}{r_{PM_i}} d\sigma_P = const = 1$$

(нормировкой СФ $\mu_0(P)$).

$$\alpha = \oint\limits_S g(P)\mu_0(P) d\sigma_P,$$

$$\omega(M) = \oint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2} d\sigma_P + \frac{1}{r_{M_i M}} \oint\limits_S g(P)\mu_0(P) d\sigma_P. \tag{11.10}$$

$$\Rightarrow C\nu_0 \oint\limits_S \frac{\cos\varphi_0}{r_{PM}^2} d\sigma_P = 0,\ M \in D_e.$$

Сформулируем следующие теоремы для задач Дирихле и Неймана:

Теорема 11.2.2. *Внутренняя задача Неймана имеет классическое решение при любой непрерывной граничной функции $h(P)$, удовлетворяющей условию*

$$\oint\limits_S h(P) d\sigma_P = 0$$

и определено с точностью до аддитивной константы. Решение представимо в виде поверхностного потенциала простого слоя.

Теорема 11.2.3. *Внешняя задача Дирихле имеет классическое решение при любой непрерывной функции $g(P)$ и представимо в виде (11.10).*

11.3 Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля оператора Лапласа

11.3.1 Постановка задачи

$$\begin{cases} \triangle u(M) + \lambda\rho(M)u(M) = 0, & M \in D, \\ u(P) = 0, & P \in S, \\ u(M) \in C^{(2)}(D) \bigcap C^{(1)}(\bar{D}), \\ \rho(M) \in C^{(1)}(D). \end{cases}$$

11.3.2 Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению

$$\triangle u(M) = -\lambda\rho(M)u(M) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(M) = \int\limits_D g(M,Q)\rho(Q)u(Q)dV_Q.}$$

Определение 11.3.1. *Ядро*

$$K(M,Q) = \frac{H(M,Q)}{r^{\alpha}_{M_Q}},$$

где

$$H(M,Q) \in C(\bar{D} \times \bar{D}),\ N = \dim(D),$$

называется <u>*полярным*</u> *при* $\alpha < N$, *и* <u>*слабополярным*</u> *при* $\alpha < \dfrac{N}{2}$.

Функция Грина:

$$g(M,Q) = \frac{1}{4\pi r_{MQ}} + v(M,Q).$$

Введем

$$K(M,Q) = \sqrt{\rho(M)}g(M,Q)\sqrt{\rho(Q)},$$

$$v_n(M) = \sqrt{\rho(M)}u_n(M),$$

$$v_n(M) = \lambda_n \int\limits_D K(M,Q)v_n(Q)dV_Q.$$

Будем считать ядро $K(M,Q)$ симметрическим, вещественным (следует из свойств функции Грина):

$$K(M,Q) = K(Q,M).$$

11.3.3 Свойства

1. Существует хотя бы одно СЗ λ_1.

2.

   Теорема 11.3.1. *Множество СЗ и соответствующее множество СФ счетно*

   Следствие.
   $$rank(\lambda_n) < \infty.$$

3.
   $$\lambda_n > 0.$$

4.
   $$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

5.
   $$\int\limits_D v_n(Q)v_l(Q)dV_Q = 0 \text{ при } n \neq l,$$
   $$v_n = \sqrt{\rho}u_n \Rightarrow \int\limits_D u_n(Q)u_l(Q)\rho(Q)dV_Q = 0$$
   (собственные функции ортогональны).

6.
   $$\frac{v_n(M)}{\lambda_n} = \int\limits_D K(M,Q)v_n(Q)dV_Q,$$
   $$K(M,Q) = \sum_n \frac{v_n(M)v_n(Q)}{\lambda_n}.$$
   Этот ряд является бесконечным.
   В случае конечного ряда ядро называется <u>вырожденным</u> (теорема Мерсера).
   $$K(M,Q) \in C(\bar{D} \times \bar{D}).$$

7.

   Теорема 11.3.2. *Если $f(M) \in C(\bar{D})$ истокопредставима через ядро $K(M,Q)$ с помощью функции $h(M) \in C(\bar{D})$, то есть*
   $$f(M) = \int\limits_D K(M,Q)h(Q)dV_Q,$$
   то ее можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по собственным значениям и собственным функциям задачи Дирихле.

8.

Теорема 11.3.3 (Теорема Стеклова)**.**
Произвольная дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $\bar{D}$ функция $f(M)$, удовлетворяющая граничному условию

$$f(P) = 0$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным значениям и собственным функциям задачи Дирихле.

Доказательство. Подействуем на функцию f оператором Лапласа и обозначим

$$h(M) = -\triangle f(m).$$

Можно считать, что $f(M)$ есть классическое решение задачи

$$\begin{cases} \triangle f(M) = -h(M), & M \in D, \\ f(P) = 0, & P \in S. \end{cases}$$

$$f(M) = \int\limits_D g(M,Q)h(Q)dV_Q.$$

$$F(M) = \int\limits_D K(M,Q)H(Q)dV_Q,$$

где

$$F(M) = \sqrt{\rho(M)}f(M),$$

$$H(M) = \left(\sqrt{\rho(M)}\right)^{-1} h(M).$$

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M), \tag{11.11}$$

где

$$F_n = \int\limits_D F(Q)v_n(Q)dV_Q = \int\limits_D f(Q)u_n(Q)\rho(Q)dV_Q = f_n.$$

Из (11.11) получаем

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(M).$$

■

9.

Теорема 11.3.4. *Система собственных функций задачи Дирихле оператора Лапласа полная, то есть если $f(M) \in C(\bar{D})$ и*

$$\int\limits_D f(Q)u_n(Q)\rho(Q)dV_Q = 0 \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{11.12}$$

то $f(M) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что $f \neq 0$. Тогда из (11.12) следует

$$\int\limits_D F(Q)v_n(Q)dV_Q = 0.$$

Значит,

$$\int\limits_D K(M,Q)F(Q)dV_Q = 0.$$

Будем иметь:

$$\underbrace{\int\limits_D g(M,Q)f(Q)\rho(Q)dV_Q}_{\text{пусть равен } u(M)} = 0.$$

Тогда

$$\underbrace{\triangle u(M)}_{=0} = -f(M)\underbrace{\rho(M)}_{>0} \Rightarrow f(M) \equiv 0, \ M \in \bar{D}.$$

■

Замечание. Из полноты СФ следует их замкнутость.

11.4 Уравнение Гельмгольца во внутренней области.

11.4.1 Постановка задачи

Уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$\boxed{\triangle u + cu = -f.}$$

Обычно обозначают:

$$c < 0 \Rightarrow c = -\varkappa^2,$$

$$c > 0 \Rightarrow c = k^2.$$

11.4.2 Фундаментальное решение в трехмерном случае

$$\triangle u + cu = 0.$$

Введем сферическую систему координат и найдем решение, зависящее только от радиальной составляющей

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + cu = 0. \tag{11.13}$$

Сделав замену

$$v = ru,$$

получаем

$$\frac{d^2v}{dr^2} + cv = 0.$$

c > 0

Решением уравнения (11.13) в этом случае являются функции:

$$u = \frac{e^{\pm ikr}}{r},$$

$$r = r_{MM_0}.$$

В случае неограниченной области фундаментальными будут являться решения

$$\boxed{\frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{e^{-ikr}}{r},} \tag{11.14}$$

а также действительное решение

$$\boxed{\frac{\cos kr}{r}.} \tag{11.15}$$

Замечание. Действительное решение

$$\frac{\sin kr}{r}$$

не является ФР, так как не имеет особенности в нуле.

В ограниченной области решения (11.14) и (11.15) эквиваленты и каждое является ФР этого уравнения.

Физическая интерпретация

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \triangle U. \tag{11.16}$$

Если рассматривать установившиеся гармонические волны, зависящие от времени по закону

$$U(M,t) = u(M)e^{-i\omega t},$$

то для амплитуды волны $u(M)$ получаем уравнение Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0,\ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

Таким образом, сферически-симметричные относительно точки M_0 решения уравнения (11.16) имеют вид

$$\frac{e^{-i\omega t+ikr}}{r},\ \frac{e^{-i\omega t-ikr}}{r},\ e^{-i\omega t}\frac{\cos kr}{r},$$

где первое решение представляет собой сферическую волну, расходящуюся от точки M_0 (уходящую на бесконечность), второе решение — волну, сходящуюся к точке M_0 (приходящую из бесконечности), а третье — стоячую волну с особенностью в точке M_0 (содержит волну, приходящую из бесконечности). Если все источники волн расположены в конечной области, то физический смысл имеет только первое решение.

$c < 0$

Решением уравнения (11.13) в этом случае являются функции:

$$u = \frac{e^{\pm\varkappa r}}{r},$$

при этом

$$\frac{e^{\varkappa r}}{r}$$

неограниченно возрастает на бесконечности, поэтому не имеет физического смысла. Фундаментальным решением будет решение

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

11.4.3 Фундаментальное решение в двумерном случае

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + cu = 0.$$

При $c > 0$ ФР

$$H_0^{(1)}(kr),\ H_0^{(2)}(kr).$$

При $c < 0$ ФР

$$K_0(\varkappa r).$$

$I_0(\varkappa r)$ не является ФР, так как не имеет особенности в нуле.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \triangle u + cu = -f(M), & M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta(P)u = 0, & P \in S \end{cases} \tag{11.17}$$

и соответствующую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \triangle v_n + \lambda_n v_n = 0, & M \in D, \\ \alpha(P)\dfrac{\partial v_n}{\partial n} + \beta(P)v_n = 0, & P \in S \end{cases} \tag{11.18}$$

Теорема 11.4.1. *Если c в (11.17) не совпадает с собственными значениями задачи (11.18), то решение (11.17) единственное.*

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ