ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

ЧИРКИН
АНАТОЛИЙ СТЕПАНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

Лекция 1. Стационарный процесс

Стационарные случайные процессы

Точное описание случайных процессов основано на бесконечномерной корреляционной функции. Это бесконечномерная или бесконечного порядка функция распределения, которую можно записать следующим образом:

$$\omega(\{X(t)\})$$

Берется бесконечное множество значений $X(t)$ во всех возможных моментах времени. Это бесконечномерная функция распределения и *вероятностный функционал.*

Такому вероятностному функционалу можно сопоставить бесконечномерную характеристическую функцию:

$$C\{U(t)\} = < e^{i\int U(t)X(t)dt} >$$

Усреднение производится по реализации. В итоге получили бесконечномерную характеристическую функцию — *континуальный (функциональный) интегралом.* Интегрирование стоит в показателе экспоненты.

Решение задачи в такой постановке и нахождение различных статистических характеристик случайных процессов довольно сложно. Нужно обладать знаниями о функциональных производных, дифференцировании и т.д.

Ограничимся некоторыми значениями случайного процесса, а именно моментами времени

$$t_1, t_2, ..., t_n$$

В такие моменты времени случайные процессы имеют значения

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

Когда описываем многомер случайного процесса, рассматриваем именно многомерное распределение n-го порядка.

Под функцией распределения подразумевается функция распределения плотности вероятности. Среди класса процессов, которые взяты в дискретные моменты времени, выделяют *стационарные случайные процессы.*

Запишем общий вид выражения для многомерной функции распределения, взятое в момент времени. Если для процесса есть возможность сдвинуть временные аргументы на произвольный интервал времени

$$\omega_n(X_1, X_2, ..., X_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \omega_n(X_1, X_2, ..., X_n; t_1 + t, t_2 + t, ..., t_n + t) =$$

то такой процесс можно отнести к классу стационарных случайных процессов. Из-за того, что t взяли произвольное, пусть

$$t = -t_j$$

$$= \omega_n(X_1, X_2, ..., X_n; t_1 - t_j, t_2 - t_j, ..., 0, ..., t_n - t_j)$$

Многомерная функция распределения n-го порядка для стационарного случайного процесса зависит от $n-1$ аргумента. Выше – математическая формулировка стационарного случайного процесса.

Определение 1.1. *Стационарный процесс*

Случайный процесс, если его произвольная n-мерная функция распределения не меняется при одновременном сдвиге всех точек $t_1, t_2, ..., t_n$ на временной оси на одну и ту же величину.

$$\omega_n(X_1, X_2, ..., X_n; t_1, t_2, ..., t_n) = \omega_n(X_1, X_2, ..., X_n; t_1 - t_j, t_2 - t_j, ..., 0, ..., t_n - t_j)$$

Такое определение относится к классу определений стационарного процесса в широком смысле. То есть имеется ввиду произвольная n-мерная функция распределения.

В большинстве случаев достаточно употребления более широкого определения понятия стационарности, когда ограничение накладывается только на функции первого и второго порядков.

К функциям распределения первого порядка относят

$$\omega_1(X; t) = \omega_1(X)$$

Такое распределение не зависит от времени.

К функциям распределения второго порядка

$$\omega_2(X_1, X_2; t_1, t_2) = \omega_2(X_1, X_2; t_2 - t_1) =$$

Такое распределение зависит только от разности времен.

По определению стационарности возможен любой сдвиг на оси времени. Тогда получаем

$$= \omega_2(X_1, X_2; t_1 - t_2)$$

В данном случае для второго порядка получили одно и то же распределение.

Если функция не удовлетворяет свойствам и определена для произвольного случая n-мерной функции к распределению, то такие случайные процессы будут нестационарными. То есть *нестационарные процессы* не удовлетворяют накладываемым свойствам (условиям).

Следствием определения стандартного стационарного процесса в широком смысле для первого порядка будет условие

$$< X(t) >= \mathrm{const}$$

А корреляционная функция K в смешанный момент для второго порядка, взятая в различные моменты времени, будет зависеть от разности аргументов

$$< X(t_1)X(t_2) >= K(t_2 - t_1) = K(\tau)$$

$$t_2 - t_1 = \tau$$

Рассмотрим перенос понятия стационарности на случайные поля. Случайные поля – протекание процесса не в одномерном, а в n-мерном пространстве. Для случайных полей, в которых процессы зависят от пространственных координат, временные аналоги будут вносить определенный вклад.

Пусть есть случайный процесс $\xi(\vec{r})$. Он зависит в пространстве от координат. К таким процессам можно отнести показатель приломления среды, характеристики среды, температуру и т.д.

В данном случае стационарность будет заменяться понятием «однородность».

$$< \xi(\vec{r}) >= \mathrm{const}$$

Для такой функции выполняется условие коррелятора

$$< \xi(\vec{r}_1)\xi(\vec{r}_2) >= K(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Если коррелятор зависит от разности аргументов, то они будут называться статистически однородными.

Получаем, что перенос на многомерный случай понятия стационарности – это однородность. Но в данном случае имеем вектор, то есть статистическая однородность.

Если этот коррелятор

$$K(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = K(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|),$$

то такие поля называются статистически изотропными. Поэтому в данном случае важна длина вектора, а не его направление. В статистической однородности важную роль играет направление вектора.

Корреляционная (автокорреляционная) функция случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$ и выделим в нем среднее значение $\hat{X}$ и флуктуационную часть $\xi(t)$

$$X(t) = \bar{X} + \xi(t)$$

$$< \xi(t) >= 0$$

Вспомним понятие автокорреляционной функции:

$$< \xi(t_1)\xi(t_2) >=< \xi_1\xi_2 >=$$

При определении автокорреляционной функции надо вычитать среднее значение. Если же явно не выделять, то значение будет выглядеть следующим образом:

$$=< (X(t_1) - \bar{X})(X(t_2) - \bar{X}) >$$

До сих пор, говоря об усреднении, имеем ввиду усреднение по ансамблю реализации, то есть по всему набору изменений случайного процесса при наблюдении в одних и тех же условиях.

Распишем смысл уголковых скобок:

$$| < (t_n, t_k) =< \xi(t_1)\xi(t_2) >$$

$$| < (t_1, t_2) = \iint \xi_1\xi_2\omega_2(\xi_1, \xi_2; t_2, t_1)d\xi_1 d\xi_2 =$$

Получили общее определение. Для стационарного случая интеграл примет вид:

$$= \iint \xi_1\xi_2\omega_2(\xi_1, \xi_2; t_2 - t_1)d\xi_1 d\xi_2$$

В данном случае, при введении определения стационарного случайного процесса в широком смысле

$$K(t_1, t_2) = K(\tau = t_2 - t_1)$$

1) Коррелятор зависит от разности аргументов. Либо, если ввели именно таким образом параметр τ, то

$$K(t_1, t_2) = K(-\tau)$$

Это первое свойство функций стационарного случайного процесса. Оно означает, что корреляционная функция является четной относительно своего аргумента.

2) Если взять значение

$$\tau = 0$$

$$K(0) = \sigma^2$$

то получается дисперсия или интенсивность флуктуации случайного процесса, что является вторым важным свойством функций данного вида. То есть «убираем» среднее значение и просто наблюдаем за флуктуациями процесса или интенсивностями таких флуктуаций.

3) Возьмем интервал значений времен при стремлении к нулю

$$\tau \to \infty$$

$$K(\tau \to \infty) \to 0$$

Это третье свойство — связи в процессе корреляции спадают.

4) Четвертым свойством можно показать, что корреляционные функции, спадающие во времени монотонно, определяются условием

$$|K(\tau)| \leqslant K(0) = \sigma^2$$

В квантовых процессах это условие может не выполняться. Например, в неклассических световых полях.

5) Последним свойством будет функция, которую назовем «спектральной плотностью», выполняющаяся только для физически реализуемых случайных процессов.

Введем функцию $S(\omega)$ такую, что

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \geqslant 0$$

Нормированное значение корреляционной функции носит название «коэффициент корреляции» случайного процесса.

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2}$$

$$r(0) = 1$$

$$|r(\tau)| \leqslant 1 - \text{следствие четвертого свойства}$$

Изобразим типичные распределения для корреляционной функции, которые встречаются при анализе случайных процессов. Первый тип – монотонные симметричные (Рис. 1.1).

Другой вид – монотонно-спадающие, осциллирующие (Рис. 1.2).

Поведение этих типичных корреляционных функций описывается либо первой, либо второй кривой. Характерный масштаб спада корреляционных функций называют «временем корреляции» (τ_k). В теории для монотонно-симметричного τ_k соответствует времени на половинной высоте.

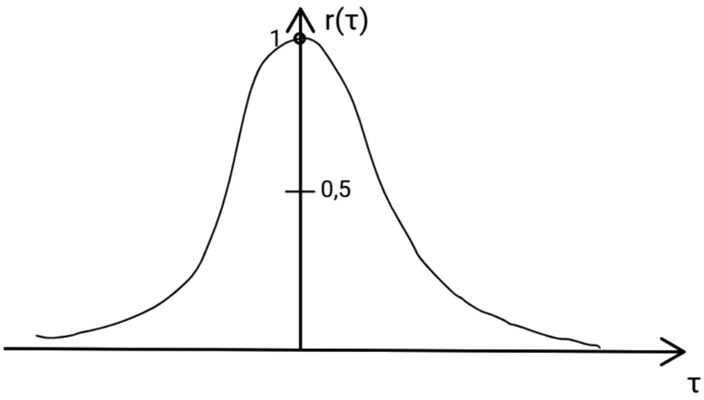

Рис. 1.1. Монотонно симметричное распределение для корреляционной функции

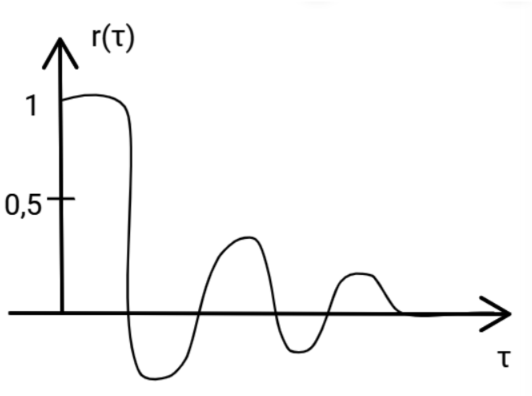

Рис. 1.2. Монотонно-спадающее распределение для корреляционной функции

Если же корреляционная функция имеет вид экспоненциальный, например, может задаваться так:

$$e^{-(\frac{\tau}{\tau_k})^2}$$

то «берут» по уровню e^{-1}.

Для монотонно-спадающей тоже можно принимать при половинной высоте, либо по значению функции, когда она в первый раз принимает ноль. Характерным значением считается время корреляции. Во многих экспериментах определение τ_k является очень удобным при сравнении параметров системы с характерным шумом или протекающим процессом в данном физическом устройстве. В результате можно сделать вывод: может ли шум влиять на случайность процесса или нет.

Спектральные представления стационарного случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина

Вернемся к пятому свойству (преобразование Фурье) и определим его физический смысл.

Рассмотрим случайный процесс без среднего:

$$X(t) = \xi(t)$$

Изобразим реализацию произвольного процесса

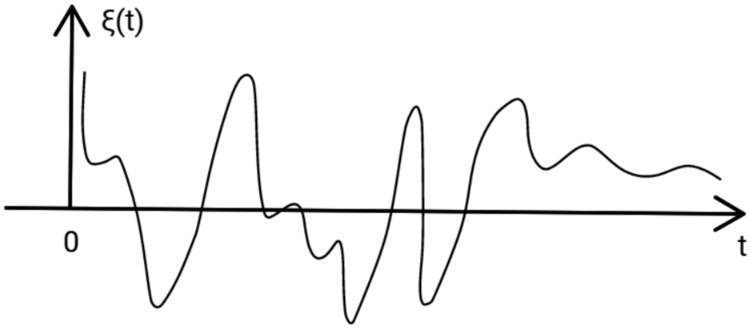

Рис. 1.3. Произвольный процесс

Такую реализацию можно разложить в Фурье спектр, то есть записать

$$\xi(t) = \int \hat{\xi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\hat{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \xi(t) e^{i\omega t} dt$$

Взяв Фурье преобразование, переходим от описания случайного процесса временного к частотному представлению. То есть производим переход от одного аргумента к другому. Так как $\xi(t)$ – случайный процесс, вид реализации меняется от эксперимента к эксперименту, тогда величина $\hat{\xi}(\omega)$ тоже будет случайной.

Из обоих интегралов следует следующее свойство: если $\xi(t)$ – действительный случайный процесс или принимает действительные значения, то

$$\hat{\xi}(-\omega) = \hat{\xi}*(\omega)$$

Отрицательные частоты не вносят никакого вклада, то есть они учитываются уже комплексным сопряжением.

Запишем корреляционную функцию стационарного процесса через Фурье преобразование. По определению это процесс стационарный, случайный.

$$K(\tau) =< \xi(t)\xi(t+\tau) >=< \iint \hat{\xi}(\omega_1)\hat{\xi}(\omega_2) e^{-i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 (t+\tau)} d\omega_1 d\omega_2 >=$$

$$= \iint < \hat{\xi}(\omega_1)\hat{\xi}(\omega_2) > e^{-i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 (t+\tau)} d\omega_1 d\omega_2$$

Левая часть коррелятора зависит от разности времен, а в правой части, записанной через Фурье преобразование, содержатся текущие моменты времени. То есть в процессе интегрирования явная зависимость от времени пропадает. Это будет выполняться при условии:

$$< \hat{\xi}(\omega_1)\hat{\xi}(\omega_2) >= S(\omega_1)\delta(\omega_1+\omega_2)$$

Если вспомнить «фильтрующие» свойства дельта-функции, то, подставив вместо среднего значение его в интеграл и проинтегрировав по дельта-функции, можно будет для упрощения заменить ω_2 на $-\omega_1$.

Важно отметить, что в данном случае происходит усреднение по реализациям. То есть для разных функций $\xi(t_i)$ брать значения в одни и те же моменты времени. Это статистическое усреднение, а не временное.

Перепишем интеграл:

$$K(\tau) = \iint S(\omega_1)e^{-i(\omega_1+\omega_2)t-i\omega_2\tau}\delta(\omega_1+\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$\delta(\omega_1+\omega_2) \neq 0, \text{ если } \omega_1+\omega_2 = 0$$

$$\omega_2 = -\omega_1 = \omega$$

$$= S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Получили запись корреляционной функции через Фурье образ. Можно также записать обратное Фурье преобразование:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

Прямое и обратное Фурье преобразование составляет теорему Винера-Хинчина. Математически ее можно сформулировать следующим образом:

Для того, чтобы корреляционная функция $K(\tau)$ представляла собой корреляционную функцию стационарного случайного процесса, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде

$$K(\tau) = S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Необходимость – условия на дельта-функцию, а достаточность – запись условия на функцию ξ

$$\xi(\omega) = \xi(\tau)$$

и проведение усреднения, указав в ней корреляционную функцию, зависящую только от разных аргументов. Независимо от характера корреляционной функции стационарных, случайных процессов, их Фурье компоненты всегда будут дельта-коррелированы.

Из обратного Фурье преобразования можно получить:

$$S(-\omega) = S(\omega)$$

Это выполняется в силу того, что $K(\tau)$ – корреляционная функция симметричная.

Величину $S(\omega)$ назовем *спектральной плотностью случайного процесса* (общее определение). В зависимости от того, какая величина флуктуирует, какой у нее физический смысл, она может иметь смысл спектральной плотности, то есть быть связанной с энергией случайного процесса. Если же флуктуирует показатель преломления, то будет спектр флуктуации такого показателя преломления. Если флуктуирует фаза электромагнитной волны, то спектры флуктуации не будут иметь физического смысла.

Пусть $K(\tau)$ – корреляционная функция, которая спадает на масштабе времени τ_k. Показатель экспоненты – временной аргумент. Наибольшее значение обратного Фурье преобразования для спектральной плотности будет приниматься, когда

$$\omega\tau \leqslant 1$$

В этом случае можно забыть про экспоненту. Когда берем значение ω такое, что:

$$\omega\tau \geqslant 1$$

При интегрировании по τ производим усреднение по осцилляциям. Положительные и отрицательные значения будут нивелировать друг друга, то есть давать нулевое значение. Поэтому характерный масштаб значения ω, где

$$S(\omega) \neq 0$$

$$\triangle\omega\tau_k = \text{const}$$

Последнее соотношение говорит о том, какая ширина у спектра, когда задано время корреляции. Такое соотношение в литературе называют «соотношением взаимности» между шириной спектра и временем корреляции.

$$\triangle\omega \sim \frac{1}{\tau_k}$$

Если τ_k очень большое, то ширина спектра будет узкая. И наоборот, время мало, а ширина спектра – большая.

Таким образом, полученная математическая модель этого процесса физически не реализуема, но удобна в расчетах. Она характеризуется параметром на выходе физической системы. Там присутствуют инерционные времена отклика, и особенности математических функций будут нивелироваться.

Спектральная плотность во всем диапазоне частот будет приниматься равной

$$S(\omega) = S_0$$

$$K(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

Тогда получаем определение дельта-функции. Такой процесс с постоянной спектральной плотностью во всем диапазоне обладает дельта-корреляцией. Это *«белый шум»* (на спектральном языке) или *дельта-коррелированный шум* (во временном представлении). Процесс физически нереализуем, т.к. при подстановке $\tau = 0$, получим дисперсию, или интенсивность случайных процессов. В последнем случае $K(\tau)$ будет бесконечна. Такая модель удобна математически и будет использоваться в стохастических методах. При решении задач дельта-функция пропадет за счет конечного временного отклика системы.

Усреднение по времени и эргодичность

Рассмотрим доказательство того, что для стационарного случайного процесса усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени. Оно основано на свойстве эргодичности.

Когда выполняем математические выкладки, говорим про усреднение по ансамблю реализации. При наблюдении «массового опыта», то есть проведения эксперимента на нескольких установках одновременно в одних и тех же условиях, начинают развиваться случайные процессы во времени, которые в действительности не наблюдаются и неосуществимы. Поэтому усреднение для стационарного случайного процесса по ансамблю можно заменить усреднением по времени, но при определенных специфических условиях, то есть рассмотреть время усреднения «больше какого-то» характерного для процесса времени. Характерное время для случайного процесса – это время корреляции.

Определим и измерим корреляционную функцию через временное усреднение.

$$K_T(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\xi(t+\tau)dt$$

В данном случае t – длительность процесса, по которому производится интегрирование.

В настоящее время можно использовать компьютерные технологии, аналоговые или цифровые варианты расчета этой характеристики. Необходимо выбрать такое время, чтобы получить значение, близкое к статистическому среднему или математическому ожиданию.

Рассмотрим пример измерения среднего значения.

$$X(t) = X_0 + \xi(t)$$

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi(t_1)\xi(t_2) >= K(t_2 - t_1)$$

$$< X(t) >= X_0 \text{ – математическое ожидание}$$

$$< X(t) >_T = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} X(t_1)dt_1$$

$$<< X(t) >_T >= \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} X_0 dt_1 = X_0$$

Таким образом, определенное среднее значение дает несмещенную оценку X_0. Если подставить в интеграл вместо $X(t_1)$ значение через среднее, то имеет место выражение:

$$< X(t) >_T - X_0 = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \xi(t_1)dt_1 = \tilde{Y}_P(t)$$

Видим, что временное среднее отличается от статистического на случайную величину $\tilde{Y}_P(t)$. Среднее значение такой величины равно нулю. Поэтому нужно оценить дисперсию, так как среднее новой информации не дает.

$$\sigma_T^2 =< [\tilde{Y}_P(t)]^2 >= \frac{1}{T^2}\iint\limits_t^{t+T} < \xi(t_1)\xi(t_2) > dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\iint\limits_t^{t+T} K(t_2 - t_1)dt_1dt_2 = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T (T-\tau)K(\tau)d\tau$$

Если задан определенный вид корреляционной функции, то ее можно сразу рассчитать, но важно рассматривать различные предельные случаи. Получившаяся функция ограничивается спадающей. Рассмотрим длительность процесса (длина реализации гораздо больше времени корреляции):

$$T >> \tau_k$$

$$\sigma_T^2 =< [\tilde{Y}_P(t)]^2 >\approx \frac{2}{T^2}T\int\limits_0^\infty K(\tau)d\tau \sim \frac{\text{const}}{T}$$

$$\sigma_T^2 \to 0 \text{ при } T\to\infty$$

В этом случае измеренное среднее значение будет близко к ожидаемому среднему, которое получено при усреднении по реализациям случайного процесса.

Определение 1.2. *Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если его любая статистическая характеристика, полученная с помощью усреднения по ансамблю реализации, может быть сколь угодно близка к соответствующему временному среднему, полученному по одной реализации за достаточно большой промежуток времени.*

Статистическое среднее (по ансамблю реализаций) сравниваем с временным, нужно сделать, чтобы эти величины были сколь угодно близки. Разность по времени определяется дисперсией, которая при достаточно большом интервале времени стремится к нулю.

Получив конкретную характеристику для конкретного вида корреляционной функции, можно рассчитать дисперсию. Можно задать ее точность. Зная $\xi(\tau)$, найти значение T – время измерения. Таким образом, решается обратная задача: задали точность, находим время.

За достаточно большой промежуток времени среднее временное стремится к статистическому среднему, т.к. фактически происходит фильтрация случайного процесса, и частоты постепенного высшего порядка отсекаются.

$$\xi(t) = \int \xi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$\tilde{Y}_P(t) = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \xi(t_1)dt_1 =$$

Если же в интеграл подставить значение $\xi(t)$, проинтегрировать по dt_1, то получаем

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\frac{sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}e^{-i\omega(t+\frac{T}{2})}d\omega$$

По флуктационной части временного измерения спектральная компонента случайного процесса берется с дробным весом.

$$\frac{sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = sinc(\frac{\omega T}{2})$$

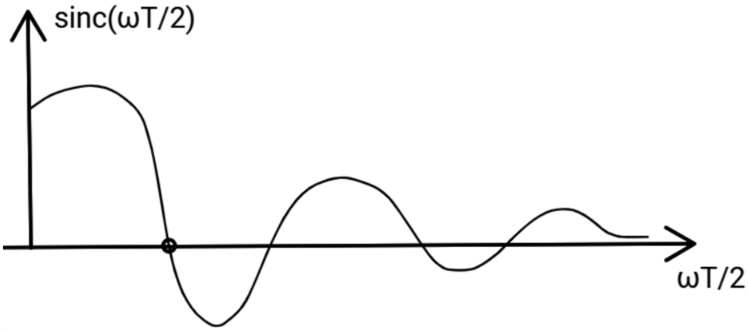

Рис. 1.4. Убывающая функция для случайного процесса

Она является убывающей функцией, подобно тому, когда наблюдается дифракция электромагнитной волны на решетке.

Тогда вклад высших частот в дисперсию будет уменьшатьс.

Рассмотрим, как можно пользоваться временным усреднением. Во-первых, спектральная плотность:

$$S_T(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T\pi} |\int\limits_0^T X(t) e^{i\omega t} dt|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T\pi} |X(\omega, T)|^2$$

То есть берется Фурье спектр в процессе измерения и рассчитывается модуль. Если время достаточно большое, то стремится характеристика к спектральной плотности случайного процесса.

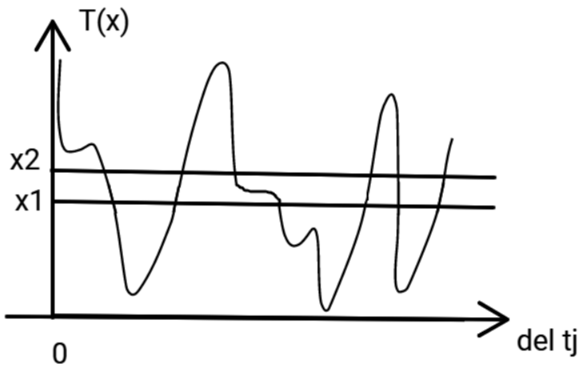

Рис. 1.5. Функция распределения

Можно вывести трансформацию, как изменяется закон распределения случайного поля при действии ударных волн.

$$P_T(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{T_{x_1 x_2}}{T}$$

Устремляя время к малым величинам, можно получить функцию распределения.

$$T_{x_1 x_2} = \sum \triangle t_j$$

Такой подход в большинстве случаев бывает очень удачным. Нахождение сводится к определению времени пребывания в определенной области значения этого процесса.

Не всякий случайный процесс может быть эргодическим. Нужно смотреть, по каким именно характеристикам он обладает эргодичностью. Может быть, он обладает эргодичностью для среднего значения, а для коррелятора не может обладать. Каждый раз нужно оценивать ошибку между статистическим средним и временным средним, то есть характеристикой.

Нестационарные случайные процессы в некоторых условиях могут обладать свойством эргодичности.

Лекция 2. Пуассоновский процесс

Квазигармонический стационарный случайный процесс. Статистические характеристики квадратурных компонент и комплексные амплитуды

Рассмотрим гармонический процесс:

$$X(t) = \rho cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где ω_0 – несущая частота, ρ – огибающая, φ – фаза.

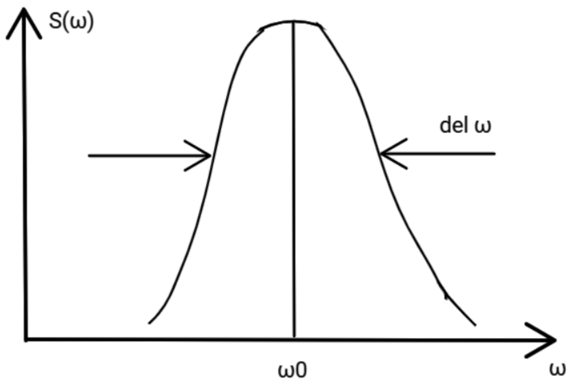

Рис. 2.1. Спектральная плотность

Спектральная плотность, соответствующая такому процессу, изображена на (Рис. 2.1). Это дельта-функция или *выкалывающая функция*.

Представим, что огибающая зависит от времени и фазы:

$$\xi(t) = \rho(t)cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

Такую функцию можно представить в таком же виде, как гармонический процесс. Это возможно в том случае, когда график спектральной плотности имеет ограниченный спектр. То есть не бесконечно узкий, а имеет конечную полосу (ширину), при этом:

$$\triangle\omega << \omega_0$$

Получается, что ρ огибающая и функция $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся за период колебаний функции. Зависимость будет выглядеть как на (Рис. 2.2). Сигнал будет похож на гармонический, но не будет таковым.

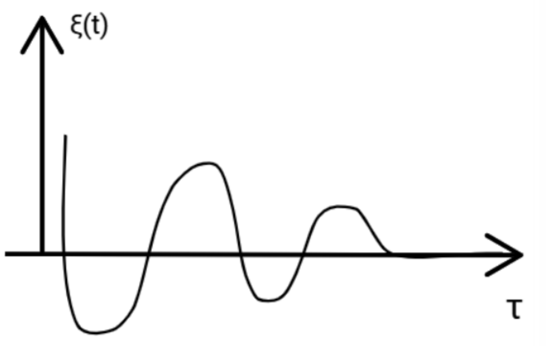

Рис. 2.2. Зависимость $\xi(t)$ от t

Условие того, что процесс квазигармонический (квазимонохроматический или узкополосный). Такие понятия выходят из условия $\triangle\omega << \omega_0$. Выше записанные равенства возможны, если

$$\dot{\rho}(t) << \frac{\rho(t)}{T^2} \approx \rho(t)\omega_0$$

То есть изменение мало на периоде колебаний. Такое же условие можно записать и для фазы:

$$\dot{\varphi}(t) << \frac{\varphi(t)}{T^2} \approx \varphi(t)\omega_0$$

Знаем, что $\xi(t)$ – случайный процесс. Огибающая и фаза тоже будут случайными процессами. Последние записи производных некорректны, но дают понимание, что изменение очень мало. В статистике обязательно нужно еще учитывать среднеквадратичное и определять строго дисперсию.

Существует другая запись этого случайного процесса через квадратурные компоненты. Воспользуемся законами алгебры и распишем чему равен $cos(x)$:

$$\xi(t) = a(t)cos\omega_0 t - b(t)sin\omega_0 t$$

Получили суперпозицию двух колебаний. Это два составляющих слагаемых, которые отличаются друг от друга на $\frac{\pi}{2}$. На плоскости они образуют квадрат, а амплитуды $a(t)$ и $b(t)$ называются «квадратурными компонентами». Для квазигармоничности на них накладываются условия такие, что они считаются медленно меняющимися:

$$\dot{a}(t) << \frac{a(t)}{T^2} \approx a(t)\omega_0$$

$$T\dot{a}(t) << a(t)$$

Получили, что изначально есть одно колебание $\xi(t)$, а выразили его через два случайных процесса $a(t)$ и $b(t)$. Получается некая неоднозначность. В рамках приближения, что процесс квазигармонический, такое противоречие физически является обоснованным. И когда производится поиск производных случайных процессов, то

$$\dot{\xi}(t) = -\omega_0 a(t) sin\omega_0 t - \omega_0 b(t) cos\omega_0 t$$

Если знаем статистику $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$, то можно выразить через них обе амплитуды $a(t)$ и $b(t)$.

Когда есть запись через случайную огибающую и фазу, то дифференцирование случайного процесса

$$\dot{\xi}(t) = -\omega_0 \rho(t) sin(\omega_0 t + \varphi(t))$$

В рамках квазигармонического приближения медленно меняющиеся параметры по времени не дифференцируемы, они остаются постоянными. То есть дифференцируются только постоянные осциллирующие функции.

Все это принято относить к случайному процессу самого общего вида. Посмотрим, каким статистическим свойством обладают функции амплитуд или «квадратурные компоненты» $a(t)$ и $b(t)$ для стационарного случайного процесса.

$$<\xi(t)>= 0$$

$$\bar{a}(t) = \bar{b}(t) = 0$$

$$<\xi(t)\xi(t+\tau)>= K(\tau)$$

Найдем интенсивность случайного процесса или дисперсию:

$$<\xi^2(t)>= \bar{a}^2(t) cos^2\omega_0 t + \bar{b}^2(t) sin^2\omega_0 t - a(t)\bar{b}(t) sin2\omega_0 t = \sigma^2$$

По условию, что процесс стационарный, эта величина не зависит от времени. Это может быть тогда и только тогда, когда

$$a(t)\bar{b}(t) = 0$$

$$\bar{a}^2(t) = \bar{b}^2(t) = \sigma^2$$

Из первого условия следует, что квадратурные компоненты не коррелированы между собой.

Введем обозначения:

$$a(t) = a$$

$$a(t+\tau) = a_\tau$$

Рассчитаем корреляционную функцию:

$$K(\tau) =<\xi\xi_\tau>= a\bar{a}_\tau cos\omega_0 t cos\omega_0(t+\tau) + b\bar{b}_\tau sin\omega_0 t sin\omega_0(t+\tau) -$$

$$-a\bar{b}_\tau cos\omega_0 t sin\omega_0(t+\tau) - b\bar{a}_\tau sin\omega_0 t cos\omega_0(t+\tau)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2}(a\bar{a}_\tau + b\bar{b}_\tau)cos\omega_0 t + \frac{1}{2}(a\bar{a}_\tau - b\bar{b}_\tau)cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau) +$$

$$+\frac{1}{2}(-a\bar{b}_\tau + b\bar{a}_\tau)sin\omega_0\tau - \frac{1}{2}(b\bar{a}_\tau + a\bar{b}_\tau)sin(2\omega_0 t + \omega_0\tau)$$

По условию, левые части только зависят от τ, есть явные функции. Но процесс стационарно случайный, то есть зависимость от этого текущего времени должна пропасть. Это значит, что

$$a\bar{a}_\tau - b\bar{b}_\tau = 0$$

$$b\bar{a}_\tau + a\bar{b}_\tau = 0$$

Тогда для квадратурных компонент получаем следующие корреляторы:

$$a\bar{a}_\tau = b\bar{b}_\tau = p(\tau)\sigma^2$$

$$p(0) = 1$$

$$-b\bar{a}_\tau = a\bar{b}_\tau = q(\tau)\sigma^2$$

$$q(0) = 0$$

Тогда получаем

$$K(\tau) = \frac{1}{2}(a\bar{a}_\tau + b\bar{b}_\tau)cos\omega_0 t + \frac{1}{2}(-a\bar{b}_\tau + b\bar{a}_\tau)sin\omega_0\tau$$

$$K(\tau) = p(\tau)\sigma^2 cos\omega_0 t - q(\tau)\sigma^2 sin\omega_0\tau$$

Для узкополосного случайного процесса корреляционная функция принимает такой вид. Одно из важных свойств – симметричность относительно начала координат.

$$K(-\tau) = K(\tau)$$

$$p(-\tau) = p(\tau)$$

$$q(-\tau) = -q(\tau)$$

Коррелятор зависит от одной гармонической функции. Это можно показать, если выбрать симметричный спектр и по его центру выбрать несущую частоту ω_0.

Если же взять не по центру, то появится второе слагаемое коррелятора через квадратурные компоненты. При записи узкополосного случайного процесса квадратурные компоненты в один и тот же момент времени не коррелируются между собой. И авто корреляция одинаковых компонентов – симметричная функция, а взаимная корреляция будет антисимметричной.

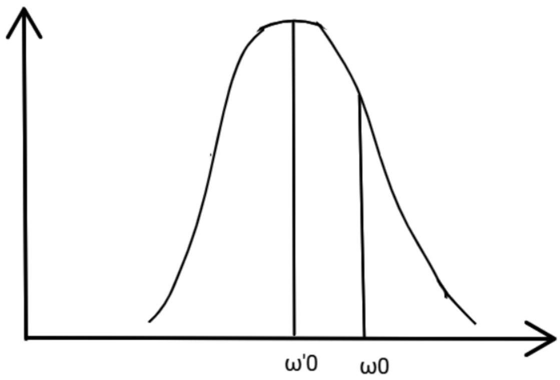

Рис. 2.3. Симметричный спектр с несцщей частотой

Представление через комплексную амплитуду бывает удобно, так как измеряемые величины реагирующего устройства реагируют на квадрат величины. Представим

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} + A*(t)e^{-i\omega_0 t}$$

Выделение в квантовой теории экспонент с противоположными показателями имеет свой физический смысл.

Будем использовать именно такое представление. Расписывая через синус, косинус и квадратурные компоненты, можно определить, что

$$A(t) = \frac{1}{2}(a(t) + ib(t))$$

$$< A(t) >= 0$$

$$< |A(t)|^2 >= \frac{1}{4}[\bar{(}a^2(t)) + \bar{(}b^2(t))] = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$< A^2(t) >= 0$$

В рамках корреляционной теории считаем все основные статистические характеристики: моменты, корреляторы и т.д. Запишем корреляционную функцию этой амплитуды.

$$< AA*_\tau >= \frac{1}{4} < (a+ib)(a_\tau - ib_\tau) >= \frac{1}{4}[(a\bar{a}_\tau + b\bar{b}_\tau) + i(b\bar{a}_\tau - a\bar{b}_\tau)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2(p(\tau) - iq(\tau))$$

Если $q(0) = 0$, то фаза не добавляется и мнимую часть можно перенести в фазу, но при этом сдвига фаз нет.

Не обсуждается, какая статистика у случайного поля колебаний — просто «стационарный случайный процесс». В рамках корреляционной теории пока не не накладывали ограничения на функции распределения случайного процесса.

Гауссовский квазигармонический стационарный процесс

Вернемся к первоначальному обозначению – аналитическому представлению случайного процесса через огибающие, фазы и квадратуры.

$$\xi(t) = \rho(t)cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = a(t)cos\omega_0 t - b(t)sin\omega_0 t$$

Интерес вырос к квадратурным компонентам в связи с лигенерацией неклассических состояний. Они могут быть в субмиллиметровом состоянии, оптическом диапазоне и т.д. Интерес к ним возник после регистрации первых гравитационных волн. Оказалось, что в некотором нелинейном оптическом процессе можно флуктуации одной квадратуры увеличить, а другой уменьшить. То есть происходит некоторая перекачка.

$$< \xi(t) >= 0$$

$$\bar{ab} = 0$$

$$\bar{a} = \bar{b} = 0$$

Если сделаем предположение, что процесс гауссовский, то запись через квадратурные компоненты – линейная операция. Статистика у квадратурных компонентов тогда будет гауссовская. Кроме того, что они подчиняются именно гауссовской статистике и некоррелированы между собой, амплитуды статистически независимы.

$$\omega_2(a,b) = \omega(a)\omega(b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}$$

Если знаем величины и двумерный закон распределения, можно найти определение через огибающую $\omega_2(\rho,\varphi)$.

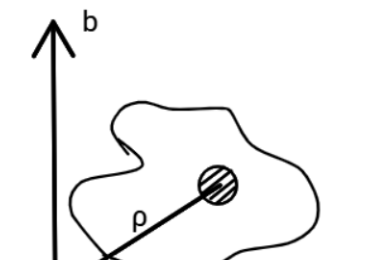

Рис. 2.4. Закон распределения

Такая модель случайных колебаний очень часто используется. Основа перехода от двумерного распределения параметров a, b к ρ, φ базируется на том, что есть закон распределения (Рис. 2.4). Заштрихованная область – вероятность, с которой нужные значения попадают туда. С точки зрения квадратур, ρ,φ – переход к полярным координатам. Вероятность в интервале в декартовых координатах можно записать

$$\omega_2(a,b)dadb = \omega_2(\rho,\varphi)d\rho d\varphi$$

Переход от одного распределения к другому осуществляется через якобиан преобразования.

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \text{– распределение Релея}$$

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

Пуассоновский процесс. Импульсный случайный процесс

Пуассоновский процесс – это дискретный случайный процесс. Он относится к классу случайных процессов, который описывает случайный поток событий – *точечный случайный процесс*, который представляет собой последовательность событий, происходящих в некоторые случайные дискретные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$.

Если же имеется дело с однотипным потоком событий, то наряду со случайными моментами времени появляются величины, характеризующие число событий, проявляющихся за данный промежуток наблюдения. То есть рассматривается целочисленный случайный процесс $n(t)$. В таком случае имеем дело с двумя случайными параметрами: время появления случайного события и число событий, рассматриваемое на промежутке времени $[t, t+T]$. Изучаемые далее пуассоновские процессы будут относится к этому типу потоков событий. Он удовлетворяет следующим условиям:

1) Ординарность

   В данный момент времени может происходить только одно событие. Два и более событий физически не могут происходить в этот момент времени.

2) Стационарность

   Инвариантность (независимость) статистических характеристик или сдвиги по временным осям.

3) Независимость превращений

   Если в системе имеются два временных интервала, на которых рассматриваются случайные процессы или явления, и они не перекрываются между собой, то такие события будут независимые друг от друга.

При таких условиях вероятность проявления n событий на интервале времени $[0,T]$ характеризуется распределением Пуассона:

$$P(n) = \frac{(\nu T)^n}{n} e^{-\nu T}$$

ν – интенсивность потока или число событий, происходящих в единицу времени.

Распределение Пуассона – целочисленный случайный процесс. Выведем его, основываясь на предположения, которые были ранее озвучены.

$$P(1) = \nu \triangle t$$

Рассматриваемый процесс относится к одношаговым процессам.

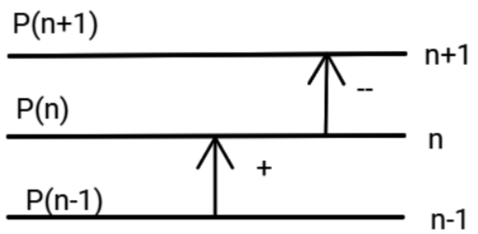

Рис. 2.5. Распределение Пуассона

То есть было $n-1$ событий, произошло еще одно и их стало n – вероятность увеличилась. Если же еще одно событие произойдет и станет $n+1$ событий, то вероятность упает.

Тогда вероятность того, что события независимы:

$$\triangle P(n,t) = P(n-1,t)\nu\triangle t - P(n,t)\nu\triangle t$$

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle P(n,t)}{\triangle t} = \frac{dP(n,t)}{dt} = \nu[P(n-1,t) - P(n,t)]$$

$$P(n<0,t) = 0$$

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\nu P(0,t)$$

$$P(0,t) = e^{-\nu t}$$

$$P(n,t) = e^{-\nu t}Q(n,t)$$

$$\frac{\partial Q(n,t)}{\partial t} = \nu Q(n-1,t)$$

$$Q(0,t) = 1$$

$$Q(n,t) = \frac{(\nu t)^n}{n}$$

Иногда Пуассоновское распределение получают из биномиального, полагая, что распределение событий мало. Если имеем процессы погложения и рекомбинации, то процессы погут происходить как в одну сторону, так и в другую. То есть это более сложная модель описания процесса. Он используется для описания гибели и рождения.

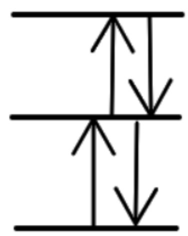

Рис. 2.6. Распределение Пуассона для описания гибели и рождения

Математические модели, которые рассматриваем, имеют применения в ряде различных областей физики.

Пуассоновская импульсная последовательность. Временные и спектральные характеристики. Формула Шоттки

Под пуассоновской последовательностью имеем ввиду импульсную последовательность.

Рассмотрим случайный процесс, который обозначим, как $x(t)$.

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} F(t - t_j)$$

В этом случае также два случайных параметра: время и число событий на времени T. Сначала запишем усреднение по времени:

$$< x(t) >_t = \sum_{j=1}^{n} < F(t - t_j) >_t$$

Если рассматривается поток событий или случайная последовательность испульсов, то всегда длительность импульсов намного меньше интервала наблюдения

$$\tau_{\text{имп}} << T$$

И поскольку поток событий удовлетворяет условию временной инвариантности (стационарности), то вероятность

$$\omega(t_j) = \frac{1}{T}$$

Тогда можно ввести понятие площади и переписать усреднение по времени:

$$< x(t) >_t = \sum_{j=1}^{n}\int_0^T \omega(t_j)F(t-t_j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T}S = \frac{nS}{T}$$

$$S = \int_0^T F(t)dt$$

Так можно сделать, так как время импульса гораздо меньше интервала наблюдения.

$$<< x(t) >_t >_n = \frac{\bar{n}S}{T} = \nu S$$

Знаем, что $\frac{\bar{n}}{T}$ – интенсивность потока событий.

Рассчитаем корреляционную функцию.

$$<< x(t)x(t+\tau) >_t >_n = << \sum_{j,p}^{n} F(t-t_j)F(t-t_p+\tau) >>=$$

Выделим слагаемые с $j = p$. Получим следующее

$$=<< \sum_{j=1}^{n} F(t-t_j)F(t-t_j+\tau) >> + << \sum_{p\neq j} F(t-t_j)F(t-t_p+\tau) >>=$$

$$= \bar{n}\bar{F F_\tau} + (\bar{n^2}-\bar{n})(\bar{F})^2$$

Вычтем среднее значение, используя соотношение Винера-Хинчина. Найдем спектральную плотность.

$$K_x(\tau) = << xx_\tau >> - << x(t) >>^2 = \bar{n}\bar{F F_\tau} + (\bar{n^2}-\bar{n}-(\bar{n})^2)(\bar{F})^2$$

Если имеем дело с пуассоновским случайным процессом:

$$\bar{n^2}-\bar{n}-(\bar{n})^2 = 0$$

$$K_x(\tau) = << xx_\tau >> - << x(t) >>^2 = \bar{n}\bar{F F_\tau} = \nu\phi(\tau)$$

$$\nu = \frac{\bar{n}}{T}$$

$$\phi(\tau) = \int F(t)F(t+\tau)dt$$

Спектральные характеристики

Воспользуемся теоремой Винера-Хинчина и найдем спектральные характеристики случайного процесса. Предварительно введем Фурье преобразование случайной функции:

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int F(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \nu g(\omega)$$
$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \phi(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

Коррелятор – произведение двух функций. Тогда свертка от Фурье преобразования есть произведение Фурье спектров:

$$g(\omega) = 2\pi|\tilde{F}(n)|^2$$

Форма спектра не зависит от интенсивности случайного процесса. Величина спектральной плоности зависит, а форма нет.

Далее анализ спектральной плотности при нулевой частоте может привести к формуле Шоттки.

Лекция 3. Марковский процесс

Спектральные характеристики (продолжение)

Рассмотрим выражения для корреляционной функции:

$$K_x(\tau) = \nu\phi(\tau),$$

где ν – скорость или частота появления импульса. Корреляционная функция тогда будет выглядеть следующим образом:

$$\phi(\tau) = \int F(t)F(t+\tau)dt$$

Пользуясь теоремой Винера-Хинчина, перешли к спектральной плотности этой последовательности импульсов. Получили следующее выражение:

$$S_x(\omega) = \nu g(\omega)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \phi(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

где $g(\omega)$ – Фурье образ.

Коррелятор – это свертка. Запишем его через Фурье образ или Фурье преобразование:

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int F(t)e^{-i\omega t}dt$$

Если обратное Фурье преобразование подставить в выражение $\phi(\tau)$, то:

$$g(\omega) = 2\pi|\tilde{F}(\omega)|^2$$

Если подставить в $S_x(\omega)$, то получим выражение для спектральной плотности случайных импульсов. Наиболее наглядный результат получается вблизи нулевой частоты – выражения для спектральной плотности удается связать. Формула будет иметь более простой вид и содержать параметры процесса.

$$S_x(0) = \nu g(0) = 2\pi\nu(\frac{1}{2\pi})^2|\int F(t)dt|^2$$

$$|\int F(t)dt|^2 = S \text{ – площадь импульса}$$

$$S_x(0) = \frac{\nu}{2\pi}S^2$$

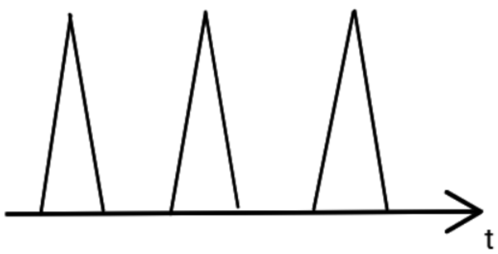

Рис. 3.1. Флуктуация анодного тока в электродной лампе

Эта формула описывает спектральную плотность дробового случая. Например, это флуктуация анодного тока в электронной лампе (Рис. 3.1).

Имеем случайную последовательность пуассоновских импульсов. Еще эту формулу используют для анализа дробового шума, рекомбинации полупроводника. Получили формулу Шоттки в общем виде. Но ее можно привести к наглядному, каноническому виду. Для этого нужно ввести параметры, например, среднее значение x. Ранее вводили это значение через сумму функций $F(x)$. Так как речь идет о движении зарядов, то скорость:

$$\vec{x} =< i >= i_0 = \nu S$$

$$S = q_e = e_0,$$

где e_0 – значение заряда.

$$S_i(\omega \approx 0) = \frac{1}{2\pi} e_0 i_0$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$2\pi df = d\omega$$

$$S_i^{(+)}(f \approx 0) = 2e_0 i_0$$

В итоге получаем рабочую формулу для флуктуаций дробового шума. Она является простой и ее можно применять в окрестности нулевой частоты. Но есть и приближенный результат, знаки и области ее применимости.

Если рассматривать последовательно вылет электрона из катода, и он летит к аноду, – это процесс случайный. Он будет определять пуассоновскую статистику регистрируемых импульсов. Стохастическая природа фотоэмиссии катода приводит к пуассоновской статистике этих импульсов, появления их в анодной цепи. Поскольку статистика фотоэмиссии пуассоновская, то она эквивалентно отображается в импульсах. Причем предполагается, что все электроны, вылетевшие из катода достигли анод. Если есть экран и разность потенциалов между анодом и катодом недостаточно большая, то у катода может собраться облако электронов и тем самым будет экранировать. Через это облако проскочат только те электроны, которые обладают соответствующей скоростью. То есть происходит торможение. Это один момент. Другой, частота или область частот, на которой можно пользоваться формулой Шоттки, считается такой, что время пролета от анода к катоду должно быть больше, чем время импульса

$$\frac{1}{\triangle f} \approx r_{\text{имп}} << r_{\text{пролета}}$$

То есть все это должно происходить почти мгновенно. Инерции в таком случае не будет.

Это замечание касается формулы Шоттки при исследовании дробового шума. В каких-то приборах возникает и приводит к ограничению измеряемых параметров. Это модель случайного процесса, которая широко используется на практике. В гравитации и гравитационном поле может возникнуть дробовой шум из-за того, что фотоны падают на зеркало. Даже когерентный свет подчиняется пуассоновской статистике. Поэтому удары электронов о зеркало с большим коэффициентом отражения тоже будут иметь шум. Оно имеет название *дробового шума*. Его нужно учитывать, чтобы рассчитать наименьшее значение величины смещения зеркала.

Случайный телеграфный процесс

Рассмотрим свойства простейшего телеграфного случайного процесса. Будем полагать, что импульсы имеют одинаковую форму, как и в предыдущем случае. Модель такого процесса изображена на (Рис. 3.2).

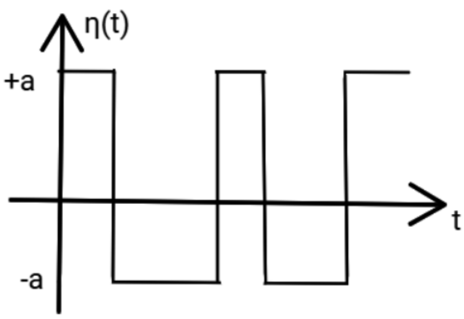

Рис. 3.2. Случайный телеграфный процесс

Случайный телеграфный процесс является дискретным. Это произвольная ломаная линия (скачки) во времени. a – значение амплитуды импульса. Общее название такой зависимости – «меандр». Это последовательность одинаковой амплитуды. А скачки – переключения с + на - в моменты времени происходят случайно.

Теоретически это записывается следующим образом:

$$\eta(t) = a(-1)^{n(0,t)}$$

$n(0,t)$ – целое число скачков

t – время или интервал времени, на котором рассматриваем процесс

$$\eta(0) = 1$$

Скачки происходят по пуассоновскому закону

$$P(n,t) = \frac{(\nu t)^{n(0,t)}}{n} e^{-\nu t}$$

ν – интенсивность потока или число событий, происходящих в единицу времени.

Наряду с гауссовским случайным процессом, пуассоновский – фундаментальный, базовый процесс. Рассчитаем среднее значение, коррелятор и спектральную плотность.

$$< \eta(t) >= a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n,t)$$

Экспонента выносится за знак суммы. Знаем, что сумма пуассоновского случайного процесса нормирована на единицу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,t) = 1$$

В результате, формула преобразуется с помощью ряда Тейлора:

$$< \eta(t) >= a e^{-2\nu t}$$

Среднее зависит от времени. Если же

$$t >> \frac{1}{\nu},$$

где $\frac{1}{\nu}$ – средняя длительность импульса. Если достаточно далеко находимся от начала координат, то среднее значение не будет зависеть от времени.

Распишем коррелятор по ансамблю реализаций.

$$< \eta(t)\eta(t+\tau) >=< \eta\eta_\tau >= K(t,t+\tau)$$

В записи присутствует два временных аргумента. Это связано с тем, что неизвестно, будет ли процесс стационарным или нет. Если бы знали, что исходный процесс линейный и стационарный, то стационарность сохранялась бы, и писали бы разность временных аргументов.

Если на интервале времени присутствует четное число скачков n, то

$$\eta\eta_\tau = a^2$$

Если же число скачков n – нечетное, то будем иметь амплитуду и значение

$$\eta\eta_\tau = -a^2$$

Чтобы найти коррелятор, нужно просуммировать по всем значениям четным и нечетным.

$$K(t,t+\tau) = a^2 \sum_{n=0,2,4,\ldots} P(n,\tau) - a^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots} P(n,\tau) =$$

$$= a^2 \sum_{n=0,1,\ldots}^{\infty} (-1)^n P(n,\tau) = a^2 e^{-2\nu\tau} = K(\tau)$$

Важное замечание, что по умолчанию предполагаем, что $\tau > 0$. Если бы рассматривали значение времени отрицательное, то в формуле появилось бы значение модуля. Корреляционная функция имеет экспоненциальный вид. Соответствующая спектральная плотность характеризуется лоренцевским спектральным распределением.

Такая модель случайного процесса дает возможность исследовать воздействия шума с конечной шириной спектра, наряду с дельта-коррелированным процессом и белым шумом, для которого изучается влияние на протекание того или иного нелинейного процесса. Тогда эта модель позволяет рассмотреть влияние шума на протекание процесса.

Рассмотрим еще одно свойство, характерное для телеграфного процесса. Запишем выражение для нормированной корреляционной функции.

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{a^2} = e^{-2\nu\tau} =$$

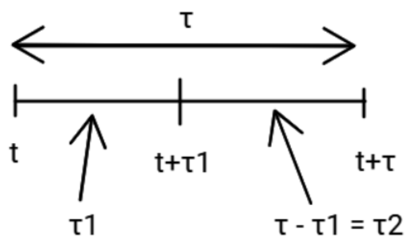

Рис. 3.3. Временной участок

Разобьем участок шириной τ на два (Рис. 3.3). Тогда корреляционная функция примет вид:

$$= e^{-2\nu\tau_1+\tau_2} = K(\tau_1)K(\tau_2)$$

Это же соотношение можно вывести другим способом.

$$K(\tau) =< \eta\eta_\tau >=< \eta(t)\eta^2(t+\tau_1)\eta(t+\tau) >=$$

Поскольку скачки статистически независимы по Пуассону, то можно преобразовать выражение:

$$=< \eta(t)\eta(t+\tau_1) >< \eta(t+\tau_1)\eta(t+\tau) >= K(\tau_1)K(\tau_2)$$

Тем самым происходит своеобразный разрыв усреднения.

В литературе же встречается более строгое доказательство через функциональные производные.

Предварительные замечания. Стохастические дифференциальные уравнения

Стохастические дифференциальные уравнения являются обобщением обычных дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных.

Определение 3.1. *Стохастическое дифференциальное уравнение*

уравнение со случайными начальными или краевыми условиями, со случайным воздействием или случайными параметрами.

Смысл стохастических уравнений: их записывают как обычные уравнения, но у них либо начальные условия случайны, либо граничные случайны, либо некоторые параметры случайны в самом уравнении. То есть воздействующие силы носят случайный характер.

Эти стохастические дифференциальные уравнения описывают динамику случайных явлений или случайных процессов. С ними встречаются во многих областях физики независимо от того, чем ученый бы не занимался. Это следующий этап познания в той или иной области исследования. Изучаются динамические уравнения с постоянными коэффициентами, а следующий этап – учет влияния внешнего воздействия, который всегда имеет случайный, неконтролируемый характер, и дает более адекватные результаты по исследованию процесса.

Существуют различные методы решения таких уравнений. Пусть на некоторый процесс действует сила $\xi(t)$ и удается найти реакцию системы (процесса) как зависимость:

$$x(t) = F(\xi(t))$$

Зная эту статистику и статистические свойства, можно найти характеристику этого процесса. Это редкое исключение.

Бывают случаи, когда наше стохастическое дифференциальное уравнение не удается решить аналитически, то есть выразить реакцию системы на воздействие в таком аналитическом виде. Для таких случаев есть следующий подход.

Можно написать уравнения для статистических параметров: среднее, коррелятор. Но, как правило, получается так, что уравнения для корреляционных функций оказываются связаны не с коррелятором корреляционной функции более высокого порядка. В результате получается цепочка уравнений. Либо, если имеем нелинейную систему уравнений, появляются моменты более высокого порядка. Нужно выходить из положения и получать какие-то результаты и выяснять, как ведет себя система. Такие предположения, обязательно, должны быть обоснованы физически. Чаще всего, это предположение о гауссовской статистике.

Гауссовская статистика – это когда есть коррелятор высокого порядка, который разбивается на всевозможные моменты. Возникает произведение моментов второго порядка. В квантовой электродинамике это носит название теоремы Вика. Если есть вакуумная флуктуация и нужно найти произведение этих операторов, то их тоже нужно разбить на всевозможные подпроизведения парных моментов. В гидродинамике это разбиение момента четвертого порядка на произведения носит название гипотезы Миллионщикова. Но все равно процесс должен подчиняться гауссовской статистике. Следа турбулентные, неоднородные, что является достаточным основанием, чтобы так предполагать.

В процессе нелинейного взаимодействия, хотя и случайная сила, и случайное воздействие могут создавать гауссовскую статистику, она может меняться. То есть такое предположение может не работать. Тогда «на помощь приходят» стохастические методы анализа анализа дифференциальных уравнений. Они специально разработаны. Одним из основополагающих процессов в основе анализа физических явлений являются именно марковские процессы.

Марковские процессы описывают такие процессы, в которых отсутствуют последействия.

Марковские процессы. Типы процессов. Определения

Исследуем поведение параметра (характеристики) $x(t)$. В данном случае приступствуют в записи две величины: t – время измерения в дискретный момент времени или в непрерывный момент, величина x может принимать непрерывные и дискретные значения. Отсюда получаются четыре основополагающие базовые модели марковских процессов.

Представим модели в виде таблицы (Рис. 3.4).

Это четыре фундаментальных марковских процесса. Но возможна при анализе и комбинация этих процессов.

аргум t	x(t)	
	Дискретный	Непрерывный
Дискр	Марковская цепь	Марковская последовательность
Непрер	Дискретный марковский процесс	Непрерывный марковский процесс

Рис. 3.4. Таблица возможных моделей

Рассмотрим непрерывный марковский процесс. $x(t)$ принимает непрерывные значения, аргумент тоже непрерывный.

Рассмотрим значение процесса в момент времени $t_1, t_2, ..., t_n$

$$x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)$$

$$t_1 < t_2 < ... < t_n$$

Рассмотрим значение процесса в момент времени t_n как статистическую характеристику

$$x(t_n) = x_n$$

В данном случае будем анализировать распределение плотности вероятности, то есть функцию распределения. Если рассмотреть условно функцию распределения

$$\omega(x_n|_{x_1, x_2, ..., x_{n-1}}) = \omega(x_n|_{x_{n-1}})$$

и у процесса выполняется это условие, то такой процесс назовем *математически марковским.* То есть функция распределения в момент времени t_n зависит только от предыдущего момента времени.

Определение 3.2. *Марковский случайный процесс*

– случайный процесс, если для любых n для моментов времени $t_1 < t_2 < ... < t_n$ условная функция распределения на отрезке $[0, T]$ в момент времени t_n зависит только от предыдущего момента времени.

Можно дать другое, образное определение процесса.

Определение 3.3. *Случайный процесс обладает марковским свойством, если его будущее в настоящий момент времени не зависит от прошлого.*

Функция условного распределения $\omega(x_n|x_{n-1})$ – вероятность перехода из состояния с моментом времени t_{n-1} в момент времени t_n.

$$\omega(x_n|_{x_{n-1}}) = p_{n,n-1}$$

Если имеем дело с марковским случайным процессом, то многомерная функция распределения будет записываться следующим образом:

$$\omega(x_1,x_2,x_3,...,x_n) = \omega(x_n|_{x_{n-1}})\omega(x_{n-1}|_{x_{n-2}})...\omega(x_2|_{x_1})\omega(x_1)$$

В результате получили произведение условных функций распределения. Они ни что иное, как вероятности функций распределения при соответствии момента времени и значения функции в этот момент. Модель марковского процесса описывает процессы без последействия, когда производятся бескоррелированные воздействия на систему.

Если в дальнейшем имеем дело с марковским процессом, то зная одномерную функцию распределения и функцию вероятности перехода, можно записать сколь угодно высокого порядка многомерную функцию распределения.

Уравнения Смолуховского-Колмогорова-Чепмена (СКЧ)

Это уравнение следует из анализа марковского процесса. Уравнение работает для непрерывного и дискретного случаев.

Рассмотрим трехмерную функцию распределения и запишем ее через условные функции:

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = \omega(x_3|_{x_2})\omega(x_2|_{x_1})\omega(x_1)$$

$$\omega(x_1,x_3) = \int \omega(x_1,x_2,x_3)dx_2 = \int \omega(x_3|_{x_2})\omega(x_2|_{x_1})\omega(x_1)dx_2$$

$$\omega(x_3|_{x_1}) = \int \omega(x_3|_{x_2})\omega(x_2|_{x_1})dx_2 \text{ – уравнение СКЧ}$$

Изобразим наглядную интерпретацию случайного процесса (Рис. 3.5).

В результате получаем все возможные пути перехода через область момента времени t_2. То есть происходит интегрирование по промежуточной области значений, что стало при переходе от начального к конечному моменту времени.

Дискретный марковский процесс

Выше написано уравнение для непрерывных величин, а можно его интерпретировать для дискретного случая. В этом случае вместо плотностей вероятности будут сами вероятности, а интеграл будет заменен на сумму.

$$p(n_3|_{n_1}) = \sum_{n_2} p(n_3|_{n_2})p(n_2|_{n_1})$$

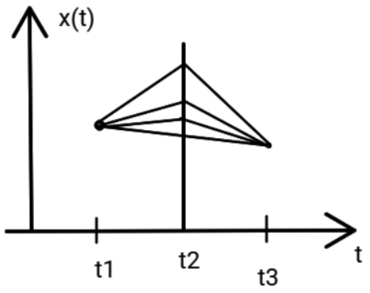

Рис. 3.5. Интерпретация случайного процесса

Суть состоит в том, как определить какой будет функция распределения при определенных первоначальных данных. Это довольно сложная задача. Поэтому производим переход к динамических переменным упрощая и используя предположения, которые налагаются на функцию перехода из одного состояния в другое.

Более упрощенное уравнение – *уравнение Колмогорова*. Но для него запишем более общий вид и восстановим временные аргументы. Моменты времени расположим как на (Рис. 3.6).

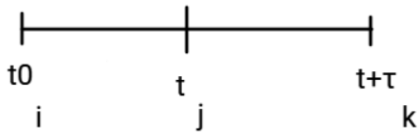

Рис. 3.6. Моменты времени

$$p(n_k, t+\tau|_{n_i,t_0}) = \sum_j p(n_k, t+\tau|_{n_j,t})p(n_j, t|_{n_i,t_0})$$

Для малых времен τ вероятность перехода можно записать следующим образом:

$$p(n_k, t+\tau|_{n_j,t}) = \delta_{jk} + A_{jk}\tau + O(\tau)$$

$$\tau \to 0$$

$$p(n_k, t+\tau|_{n_j,t}) = \delta_{jk}$$

δ_{jk} – символ Кронекера, то есть находимся в том же самом начальном условии, а A_{jk} имеет вероятность скорости перехода. Продифференцируем выражение:

$$\frac{\partial p(n_k, \Theta+\tau|_{n_j,\Theta})}{\partial \Theta}|_{\Theta=t} = A_{jk}(t)$$

Теоретически считают, что эта производная существует.

Существует еще одно свойство условной вероятности перехода. В момент времени τ частичка будет физическим аналогом блуждания частицы. Поэтому в момент времени t со временем она куда-то перейдет вертикально по k. Этот факт достоверный, поэтому получаем:

$$\sum_k p(n_k, t+\tau|_{n_j,t}) = 1$$

И если это условие подставить в формулу, где фигурирует дельта-функция, просуммировать выражения, то оттуда будет следовать следующее условие:

$$\sum_k A_{jk}(t) = 0$$

$$\sum_k \delta_{jk} = 1$$

$$A_{jj} = -\sum_{k \neq j} A_{jk}$$

A_{jk} – вероятность скорости перехода, величина положительная. Тогда величина A_{jj} будет отрицательной.

Если

$$\tau \to 0$$

$$\frac{\partial p(n_k, t|_{n_i,t_0})}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) p(n_j, t|_{n_i,t_0}) \text{ – уравнение Колмогорова}$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений для дискретных переменных. Это же уравнение можно преобразовать для одномерной функции распределения. Для этого умножим обе части на $p(n_i, t_0)$.

$$p_1(n_k, t) = \sum_i p(n_k, t|_{n_i,t_0}) p(n_i, t_0)$$

$$\frac{\partial p(n_k, t)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t) p_1(n_j, t)$$

Так как имеем дело с марковским процессом, то можно записать функцию столь угодно высокого порядка распределения. Если имеем дело со стационарным случайным процессом, то все эти вероятности переходов будут зависеть только от разности времен (из определения стационарности).

Применим этот аппарат к какой-нибудь ситуации. Фактически, один пример был ранее, когда выводили пуассоновский процесс – одношаговый (односторонний) процесс. Теперь обратимся к двухстороннему процессу: одношаговые случайные блуждания.

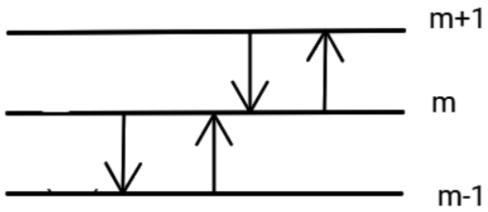

Рис. 3.7. Одношаговые случайные блуждания

В данном случае интересует вероятность нахождения на уровне m. Воспользуемся уравнением, которое вывели ранее.

$$\frac{dp_m}{dt} = A_{m-1,m}p_{m-1} + A_{m+1,m}p_{m+1} + A_{m,m}p_m$$

$$A_{mm} = -(A_{m-1,m} + A_{m+1,m})$$

Будем считать, что «блуждания» симметричные. Тогда

$$A_{m-1,m} = A_{m+1,m} = A$$

$$A_{m,m} = -2A$$

$$\Theta = At$$

$$\frac{dp_m}{d\Theta} = p_{m-1} + p_{m+1} - 2p_m$$

Уравнение для вероятности перехода можно преобразовать к плотности вероятности. Величину шага обозначим a.

$$p_m = p(ma, t)$$

$$x = ma$$

$$\frac{p(ma,t)}{a} = \omega(t,x)$$

$$\frac{d\omega(x,\Theta)}{d\Theta} = \omega(x-a,\Theta) + \omega(x+1,\Theta) - 2\omega(x,\Theta)$$

Если длина шага мала, то можно

$$\omega(x \pm a) = \omega(x) \pm \frac{\partial\omega(x)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega(x)}{\partial x^2}a^2 + ...$$

Отсюда можно понять закон, которому подчиняется частичка, когда блуждает.

Лекция 4. Винеровский процесс

Дискретный марковский процесс (продолжение)

В прошлой лекции рассматривали дискретный марковский процесс и уравнение Колмогорова для одношагового случайного процесса. Получили следующее уравнение для вероятности перехода при том, что плотность вероятности перехода введена делением верояности перехода на шаг, при котором совершается случайное блуждание.

Получили следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\omega}(x,\Theta) = \omega(x-a,\Theta) + \omega(x+a,\Theta) - 2\omega(x,\Theta)$$

Если считать параметр a малым, то это выражение можно разложить в ряд Тейлора и тем самым выражение упростить. Раскладываем в ряд Тейлора до вторых членов, пренебрегая, фактически, четвертым порядком производных, поскольку кубическая производная пропадает из-за различных знаков перед нужным параметром:

$$\dot{\omega}(x,\Theta) = a^2 \frac{\partial^2 \omega(x,\Theta)}{\partial \Theta^2}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Это параболическое уравнение, или частное уравнение Фоккера-Планка. Решением такого уравнения будет гауссовское распределение плотности вероятности:

$$\omega(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\Theta}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\Theta}}$$

Учитывая дисперсию, что вводили ранее

$$\sigma_x^2 = 2a^2\Theta$$

$$\Theta = At$$

Дисперсия случайного процесса линейно растет со временем. Поэтому вероятность частички попасть с одного уровня на другой будет подчиняться гауссовскому распределению. Это один из примеров дискретного марковского процесса.

Непрерывный марковский процесс. Уравнение Фоккера-Планка

Рассматриваем непрерывный марковский процесс. Поэтому величина $x(t)$ будет изменяться непрерывно. И будем рассматривать все марковские процессы, у которых аргумент t тоже изменяется непрерывно. В рассмотренном ранее дискретном марковском процессе значение аргумента менялось непрерывно.

Запишем двумерную функцию распределения, соответствующую двумерному закону распределения в моменты времени t_1 и t_2:

$$\omega_2(x_1,t_1;x_2,t_2) = p_{t_1,t_2}(x_2|_{x_1}\omega(x_1,t_1)$$

Если воспользоваться законом соответствия и проинтегрировать получившееся выражение, то

$$\omega(x_2,t_2) = \int \omega_2(x_1,t_1;x_2,t_2)dx_1 = \int p_{t_1,t_2}(x_2|_{x_1}\omega(x_1,t_1)dx_1$$

Интегрирование проводится по области определения и задания величины x_1. И для того, чтобы работать с этим выражением дальше, введем следующие обозначения

$$t_1 = t > 0$$

$$t_2 = t+\tau > t$$

$$x_1(t_1) = x$$

$$x_2(t_2) = x_2(t+\tau) = x_\tau$$

При таких обозначениях получим следующий компактный вид выражения:

$$\omega_\tau(x_\tau) = \int p_{t+\tau,t}(x_\tau|_x)\omega(x)dx$$

Это интегральное уравнение и его трудно решить, найти закон распределения и его динамику. Как плотность вероятности меняется со временем, если под интегралом берется значение в момент времени t, когда интересует в момент времени τ? Поэтому от такого интеграла переходят к дифференциальному уравнению и при некоторых заменах его упрощают.

Переходя к другой записи динамики уравнения, проще использовать некоторые разумные предположения. Введем отклонение (приращение) на интервале $[t+\tau,t]$:

$$\triangle x = x_\tau - x$$

Будем считать, что величина x фиксированная. Рассчитаем характеристическую функцию этого распределения.

$$C^{\text{усл}}(U,x) = < e^{iU\triangle x} > = \int e^{iU\triangle x} p(x_\tau|_x)dx_\tau$$

Разложим экспоненту в ряд Тейлора и приведем усреднение.

$$m_0 = 1$$

$$\int p_{t+\tau,t}(x_\tau|_x)dx_\tau = 1$$

$$C^{\text{усл}}(U,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iU)^k}{k} m_k^{\text{усл}}(x)$$

Если значение x меняется, то и моменты $m_k(x)$ будут изменяться.

Воспользуемся значением характеристической функции в момент времени и с помощью обратного преобразования Фурье восстанавливаем условную вероятность перехода.

$$p_{t+\tau,t}(x_\tau|_x) = \frac{1}{2\pi}\int C^{\text{усл}}(U,x)e^{-iU\triangle x}dU$$

$$p_{t+\tau,t}(x_\tau|_x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k^{\text{усл}}(x)}{k}\int_{-\infty}^{\infty}(iU)^k e^{-iU\triangle x}dU$$

Вспомним определение дельта-функции:

$$\delta(x_\tau - x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-iU(x_\tau - x)}dU$$

Дифференцирование дельта-функции по x_τ дает соответствующее значение функции:

$$\frac{1}{2\pi}\int (iU)^k e^{-iU(x_\tau - x)}dU = (-\frac{\partial}{\partial x_\tau})^k e^{-iU(x_\tau - x)}dU = (-\frac{\partial}{\partial x_\tau})^k \delta(x_\tau - x)$$

$$\omega_\tau(x_\tau) = \omega(x_\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial x_\tau})^k \frac{1}{k}[m_k^{\text{усл}}(x_\tau)\omega(x_\tau)]$$

Преобразуя интегральное уравнение получили дифференциальное.

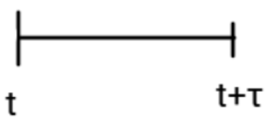

Рис. 4.1. Временной интервал

$$\tau \to 0$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\omega_\tau(x_\tau) - \omega(x_\tau)}{\tau} = \frac{\partial\omega(x(t))}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\omega(x(t))}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{\partial}{\partial x_\tau})^k \frac{1}{k}[K_k(x)\omega(x_\tau)]$$

$$K_k(x) = \lim\frac{m_k^{\text{усл}}(x_\tau)}{\tau}$$

Есть предположение, что этот предел существует для каких-то определенных моментов времени, малых значениях τ. Тогда предел будет выглядеть следующим образом:

$$K_k(x) = K_k(x,t) + O(\tau)$$

Слагаемыми высокого порядка малости (3 и выше) пренебрегаем. В статистической физике это уравнение аналогично кинетическому уравнению. Если полагать, что отклонения третьего и более порядков быстро стремятся к нулю с ростом τ

$$|x_\tau - x|,$$

то в уравнении можно оставить только первые два слагаемых.

$$K_{k\geqslant 3}(x) = O(\tau)$$

Воспользовавшись таким предположением получаем упрощенное выражение Фоккера-Планка для непрерывного марковского процесса. Это уравнение Эйнштейна-Фоккера-Планка.

$$\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(k_1(x)\omega(x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_2(x)\omega(x))$$

Для того, чтобы его решить, нужно задать начальные условия:

$$\omega_0(x) = \delta(x - x_0)$$

Тогда решение этого уравнения даст вероятность перехода

$$\omega(x|_{x_0}) = p(x|_{x_0})$$

Зная это решение и предыдущие функции распределения, можно записать сколь угодно высокого порядка распределения.

Рассмотрим вопрос: какой смысл имеют коэффициенты k? Коэффициент k_1 называется «коэффициентом сноса», а k_2 – коэффициентом диффузии. Начальное уравнение было интегральным. Сейчас получили дифференциальное уравнение. На частных производных такое уравнение можно решать при некоторых предположениях, которые были сделаны ранее, и выводах.

Уравнение Фоккера-Планка используется часто и описывает многие случайные процессы.

Винеровский (диффузионный) процесс. Уравнение Фоккера-Планка (УФП) и стохастическое дифференциальное уравнение

Предположим, что коэффициент сноса $k_1 = 0$. Тогда, если заданы какие-то начальные условия, имеем дело с вероятностью перехода.

$$\frac{\partial p(x,t|_{x_0,t_0})}{\partial t} = \frac{1}{2}k_2\frac{\partial^2 p(x,t|_{x_0,t_0})}{\partial x^2}$$

Нужно решить эту уравнение. Это известно из математического анализа. Решение подразумевает нахождение физической характеристики – характеристической функции для этого процесса.

$$\int e^{iUx}p(x,t|_{x_0,t_0})dx = C(U,t)$$

$$\int e^{iUx}p"_{xx}(x,t|_{x_0,t_0})dx = \text{проводим интегрирование по частям} = -U^2C(U,t)$$

$$\frac{\partial C(U,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}k_2U^2C(U,t)$$

$$\text{Решение: } C(U,t) = e^{-\frac{1}{2}k_2U^2(t-t_0)}C(U,t_0)$$

$$C(U,t_0) = e^{iUx_0}$$

Получили характеристическую функцию. Когда подставим ее, появится еще одно слагаемое. Тогда выражение гауссовского вида сворачивается и получается гауссовская вероятность перехода.

В итоге получили характеристическую функцию для винеровского случайного процесса, который описывается параболическим уравнением. С помощью преобразования Фурье можно перейти от характеристической функции к вероятностям перехода $p(x,t|_{x_0,t_0})$ – вероятность нахождения какого-то параметра в момент времени t принимает значение x при условии, что раньше в момент времени t_0 было значение x_0.

$$p(x,t|_{x_0,t_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)k_2}}e^{-\frac{(x(t)-x_0(t_0))^2}{2k_2(t-t_0)}}$$

Это одно из фундаментальных распределений, которому подчиняется условная вероятность перехода. Отсюда можно найти

$$< x(t) >= x_0$$

$$< (x(t)-x_0(t_0))^2 >= k_2(t-t_0)$$

Дисперсия наростает линейно со временем. Поэтому винеровский процесс хорошо описывает броуновское движение частиц. На частичку действует, случайно ударяясь, другая молекула, и она начинает описывать хаотические движения. Этому же закону (линейному нарастанию дисперсии) подчиняется также поведение фазы в генераторах в радиодиапазоне или в оптическом. Поскольку никаких ограничений нет на наблюдаемую случайную величину, на случайные воздействия измеряемых параметров, то чаще всего процессы подчиняются именно такому диффузионному закону. То есть представляет собой винеровский случайный процесс. Причем, если траектории – непрерывные величины, то производные от этой x, характеризующей скорость движения, представляют уже разрывную случайную величину. Это связано с тем, что молекула ударяется о маленькую частичку и скорость меняется скачком.

Покажем, что винеровский случайный процесс связан со стохастическим дифференциальным уравнением.

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t)$$

Зададим статистику. Считается, что

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi\xi_\tau >= R_0(\tau)$$

Определим, каким условиям должна удовлетворять корреляция и корреляционные свойства случайного процесса. Найдем решения дифференциального уравнения.

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(t')dt'$$

$$\bar{\eta}(t) = 0$$

Посчитаем дисперсию случайного процесса:

$$\sigma^2(t) =< \eta^2(t) >= \iint\limits_0^t < \xi(t_1)\xi(t_2) > dt_1dt_2 = \iint\limits_0^t R_0(t_2 - t_1)dt_1dt_2 =$$

Функция R_0 симметрична относительно аргумента коррелятора. С помощью замены координат можно получить:

$$= 2\int_0^t (t-\tau)R_0(\tau)d\tau$$

Проведем анализ выражения не задавая вид корреляционной функции. Существенные значения функции определяются радиусом корреляции $\tau_{\text{кор}}$. При $\tau >> \tau_{\text{кор}}$ можно считать, что значения ξ раздвинуты на интервал времени τ между собой не коррелированы.

Если

$$t << \tau_{\text{кор}}$$

$$\tau \approx 0$$

$$\sigma^2(t) \approx R_0(0)t^2$$

Если же другой предельный случай

$$t >> \tau_{\text{кор}}$$

$$\tau \approx 0$$

$$\text{Тогда } t \approx \infty$$

$$\sigma^2(t) \approx 2tR_0\tau_{*\text{кор}}$$

$$\tau_{*\text{кор}} = \frac{\int_0^\infty R(\tau)d\tau}{R_0(0)}$$

Из стохастического уравнения малого порядка на малых временах дисперсия будет расти пропорционально t^2, а тогда, когда $t >> \tau_{\text{кор}}$ имеем диффузионный закон, то есть дисперсия будет нарастать пропорционально τ.

Затронем вопрос применимости результатов при больших временах для изучения броуновского движения частиц, фазовой флуктуации в генераторах (естественные флуктуации). Они называются естественными, так как определяются причинами, от которых нельзя избавиться. При малых временах флуктуации обусловлены медленными уходами. Если происходят медленные изменения, а наблюдения проводят на временах гораздо меньше времени измерения, закон нарастания (дисперсии) пропорционален t^2. То есть такое приближение характеризует технические флуктуации.

Тем самым, рассмотрели общее решение стохастического уравнения. Оказывается, что этот результат можно получить из дельта-коррелированных функций, как в броуновском движении. Получим связь стохастического дифференциального уравнения и уравнения Винера.

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi\xi_\tau >= k_2\delta(\tau) => R_0(\tau)$$

$$\sigma^2(t) =< \eta^2(t) >= \iint\limits_0^t k_2\delta(t_2 - t_1)dt_1dt_2 = k_2t$$

Таким образом, сразу получается диффузионный закон. Это говорит о том, что на тех временах $t >> \tau_{\text{кор}}$ можем случайную силу считать дельта-коррелированной. Но при $\tau = 0$ процесс описывает дисперсию интенсивности флуктуации, то есть получаем бесконечность. Это физически нереализуемый процесс, но, если система инерционная, то никаких сингулярностей, расхождения в решениях не получается, они «съедаются» интегралами.

Случайные процессы являются марковскими, когда внешнее изменение параметра является дельта-коррелированным случайным процессом. Это является своеобразными «мостиком» от уравнения Винера, где формулизована вероятность перехода, к стохастическому дифференциальному уравнению. Но всегда время корреляции любого случайного воздействия конечно. Поэтому для того, чтобы получить корректные результаты, заменяется эффективное воздействие реального случайного процесса с конечной корреляционной функцией на математически дельта-коррелированный случайный процесс.

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_0(\tau)d\tau = \int k_2\delta(\tau)d\tau$$

Какая получится величина R_0, такая величина и получится в коэффициенте k_2. Тем самым можно корректно получить результаты эксперимента.

Уравнение Ланжевена и уравнение для статистических моментов

Рассмотрим связь коэффициентов k_1 и k_2 с теми параметрами, которые входят в стохастические дифференциальные уравнения.

Пусть есть стохастические дифференциальные уравнения первого порядка общего вида:

$$\dot{x}(t) + a(x) = b(x)\xi(t)$$

$$\bar{\xi}(t) = 0$$

$$<\xi\xi_\tau>= 2D\delta(\tau)$$

Значит, случайная сила дельта-коррелирована, то есть это пример белого шума. Функции $a(x)$ и $b(x)$ детерминированные и определенные, они не являются случайными.

$$t_2 \leqslant t_1$$

$$<x(t_1)\xi(t_2)>\neq 0$$

Таким образом, функционально, согласно уравнению, x_1 будет зависеть от ξ.

$$t_2 > t_1$$

$$<x(t_1)\xi(t_2)>= 0$$

Это говорит о том, что «будущее не влияет на прошлое».

Метод, который сейчас затронем, в какой-то мере считается оригинальным. Выведен на Физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, но существенно основан на предположении дельта-коррелированности случайных процессов. Является наглядным методом, который позволяет непосредственно связать стохастическое дифференциальное уравнение с уравнением Фоккера-Планка.

Рассматриваем случайный непрерывный процесс $\xi(t)$. Дискретный же процесс позволяет рассмотреть воздействие случайной силы с конечной шириной спектра. Белый шум бесконечный математически. В дискретном случае будет конечная ширина спектра.

Идея состоит в следующем: выделим коррелированные и некоррелированные части. В литературе этот подход оказывается классическим с точки зрения того, что используется очень часто.

Таким образом, есть уравнение, воздействие с некоторым полем корреляции, которую считаем нулевой и величина $x(t)$, которая обладает конечным временем корреляции $\tau_{\text{кор}}^{(x)}$. Тогда поступаем как на (Рис. 4.2).

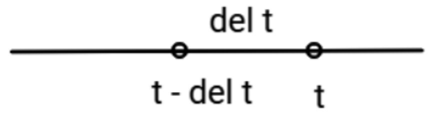

Рис. 4.2. Временной интервал

Рассчитываем статистические характеристики в какой-то определенный момент времени t. Отступим от этого времени на интервал $\triangle t$. Затем этот интервал берем таким образом, что

$$\tau_{\text{кор}}^{(\xi)} << \triangle t << \tau_{\text{кор}}^{(x)}$$

Такие условия накладываются на рассматриваемый интервал времени. И величину можно представить следующим образом

$$x(t) = x(t - \triangle t) + \delta x(t)$$

В силу того, что $\tau_{\text{кор}}^{(\xi)} << \triangle t$, то величина $x(t - \triangle t)$ будет некоррелирована с процессом $x(t)$.

Покажем, что приращение будет коррелировано с силой.

$$\delta x(t) = \int_{t-\triangle t}^{t} [-a(x(t')) + b(x(t'))\xi(t')]dt' =$$

$$\triangle t \to 0$$

$$= -a(x(t*))\triangle t + b^{\text{нк}}(x(t**)) \int_{t-\triangle t}^{t} \xi(t')]dt'$$

Теперь в приращении оценим вклад величин $a(x)$ и $b(x)$. Если находим среднее, то флуктуация не будет давать никакого вклада, поэтому надо искать флуктуацию по интенсивности. Если есть среднее, то его просто надо будет вычесть. Среднее значение приращения можно также перенести в некоррелированную часть.

Вклад первого слагаемого:

$$a^2(\triangle t)^2$$

Во втором же слагаемом получаем –

$$b^2(x)\iint\limits_{t-\triangle t}^{t}\xi(t')\bar{\xi}(t")dt'dt-$$

$$<\xi\xi_\tau>=2D\delta(\tau)$$

$$=2Db^2(x)\triangle t$$

Получаем, что случайная сила дает вклад пропорциональный t, а регулярная – более высокого порядка малости. Если производить рассчет с точностью до $\triangle t$, то первым слагаемым можно принебречь.

$$\delta x(t)=b^{\text{нк}}(x(t**))\int_{t-\triangle t}^{t}\xi(t')dt'$$

Оставшаяся часть коррелирована с $\xi(t)$. Этот подход используем для получения некоторых статистических характеристик из уравнения Ланжевена.

Хотим получить некие моменты от произвольной функции $F(x(t))$. Происходит динамика стохастического дифференциального уравнения. Фактически нужно получить закон изменения функции от времени.

$$\frac{\partial F(x(t))}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

Для того, чтобы уравнение Ланжевена написать для произвольной функции, нужно умножить обе части уравнения на $\frac{\partial F}{\partial x}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F'_x$$

$$\frac{\partial F(x(t))}{\partial t}+a(x)F'_x(x)=F'_x(x)b(x)\xi(t)$$

Для того, чтобы проще работать с полученным уравнением, введем новые обозначения:

$$a(x)F'_x(x)=\alpha(x)$$

$$F'_x(x)b(x)=\beta(x)$$

$$\frac{\partial F(x(t))}{\partial t}+\alpha(x)=\beta(x)\xi(t)$$

Получили уравнение для некоторой функции от x. Если хотим искать среднее значение, значит

$$\frac{\partial \bar{F}(x(t))}{\partial t}+\alpha\bar{(}x)=\beta(x)\bar{\xi}(t)$$

Лекция 5. Уравнение Ланжевена

Уравнение Ланжевена и уравнение для статистических моментов (продолжение)

В прошлый раз рассматривали стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка в виде:

$$\dot{x}(t) + a(x) = b(x)\xi(t)$$

$$\bar{\xi}(t) = 0$$

$$< \xi\xi_\tau >= 2D\delta(\tau)$$

Случайная сила $\xi(t)$ будет дельта-коррелирована. Такое уравнение принято называть *уравнением Ланжевена.*

Теперь займемся рассчетом статистических характеристик процессов, описываемых этим уравнением. Метод будет основан на выделении коррелированных и некоррелированных составляющих. Это универсальный удобный метод, который обычно используют для анализа квантового процесса. Когда рассматривают такой процесс, источником флуктуации бывают либо спонтанные излучения, либо вакуумные. Вакуумные флуктуации имеют бесконечные спектры и их тоже стараются моделировать дельта-коррелированным шумом. Поэтому такой подход можно применять для операторных уравнений, если заменить функции на соответствующие операторы.

Этот курс считается классическим, рассматриваются именно случайные процессы. Поэтому не делаем акцент на рассмотрение операторных уравнений.

Основной идеей выделения коррелированной и некоррелированной составляющей базируется на следующем: $\xi(t)$ – случайная сила, которая является дельта-коррелированной. То есть время памяти процесса пратически нулевое. Эта математическая модель является очень полезной. А процессы, происходящие в системе, которые записывали ранее, характеризуются временем установления, релаксации, временем изменения параметра больше, чем время корреляции воздействующей силы. Тем самым имеем два параметра: временной параметр быстрой случайной силы и наблюдаемая фиксированная величина $x(t)$, медленно меняющаяся в среднем по времени. Пользуясь этим обстоятельством будет изложен метод выделения коррелированной и некоррелированной составляющих.

Когда процесс описывается, можно выделить несколько характерных времен. Это позволяет решить более сложные уравнения. Поэтому такой метод часто используется на практике. В первых своих работах этот метод использовал Эйнштейн. Также использование адиабатического приближения основано на том, что есть два характерных времени.

Этот метод считают универсальным. В теории нелинейных процессов обычно используют приближение заданного поля. В нем считается мощная накачка, амплитуда, постоянная фаза. Ограничение всегда налагается на коэффициент преобразования, а как меняется фаза, умалчивается. С точки зрения математики, это некорректно. Поэтому был развит метод приближения с заданной интенсивностью, где учитывается тот факт, что изменение фазы происходит довольно быстро, а амплитуда изменяется медленно. Тем самым, исключая уравнения для фазы, нужное уравнение установится и в дальнейшем будем изучать изменение только интенсивности. Что с математической точки зрения будет более корректно, потому что, если говорить, что такое приближение верно при малых эффективностях преобразований и т.д., говорим именно об интенсивности, эффективности преобразований. То есть о фазе нет речи.

Пользуясь этим подходом выделения, что есть переменные быстрые и медленные, делаем на оси времени отступление (Рис. 5.1).

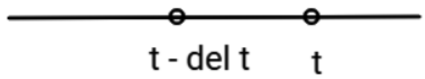

Рис. 5.1. Временной интервал

Процесс осуществляется в течение времени t.

$$x(t) = x^{\text{нк}}(t - \triangle t) + \delta x(t)$$

Интервал выбирается таким образом, что

$$\tau_{\text{кор}}^{(\xi)} << \triangle t << \tau_{\text{кор}}^{(x)}$$

Процесс ξ дельта-коррелированный и, фактически, нулевой. И для такой величины приращение можно записать как

$$\delta x(t) = \int_{t-\triangle t}^{t} b(x(t'))\xi(t')dt'$$

Среднее отлично от 0 и не носит статистический характер. В данном случае интересуют коррелированные и некоррелированные части для рассчета коррелятора. В дисперсию основной вклад дает флуктуационный член.

При таком соотношении времен выполняются следующие операции:

$$\delta x(t) = b^{\text{нк}}(x(t)) \int_{t-\triangle t}^{t} \xi(t')dt' = dx^{\text{к}}(t)$$

Также было показано, что

$$<(\delta x(t))^2>\sim \triangle t$$

Далее весь подход будет основан на выделении коррелированной и некоррелированной составляющих. Можно записать уравнение для произвольной функции $F(x)$. Для этого умножим правую и левую часть уравнения на $F'_x(x)$:

$$x(t)=x^{\text{нк}}(t-\triangle t)+\delta x(t)$$

$$\frac{\partial F(x(t))}{\partial t}+a(x)F'_x(x)=F'_x(x)b(x)\xi(t)$$

Для простоты введем новые обозначения:

$$a(x)F'_x(x)=\alpha(x)$$

$$F'_x(x)b(x)=\beta(x)$$

$$\frac{\partial F(x(t))}{\partial t}+\alpha(x)=\beta(x)\xi(t)$$

Получили уравнение для функции от x. Если хотим искать среднее значение:

$$\frac{\partial \bar{F}(x(t))}{\partial t}+\alpha\bar{(x)}=\beta(x)\bar{\xi}(t)$$

То есть нужно определить средние значения полученного коррелятора. Воспользуемся коррелированной и некоррелированнной частями уравнения.

$$\beta(x,t)=\beta(x^{\text{нк}}(t-\triangle t)+\delta x(t))=$$

Раскладываем в ряд Тейлора с точностью до первого порядка малости по $\triangle x$:

$$=\beta(x^{\text{нк}}(t-\triangle t)+\frac{\partial\beta(x^{\text{нк}}(t))}{\partial x^{\text{нк}}}|_{t=t-\triangle t}\delta x(t))=$$

$$=\frac{\partial\beta(x^{\text{нк}}(t))}{\partial x^{\text{нк}}}|_{t=t-\triangle t}\delta x(t))$$

$$<\beta(x)\xi(t)>=<\frac{\partial\beta(x^{\text{нк}})}{\partial x^{\text{нк}}}|_{t=t-\triangle t}b(x^{\text{нк}}(t))\xi(t)\int_{t-\triangle t}^{t}\xi(t')dt'>=$$

В рамках приближения интервал времени мал, а время изменения самого x гораздо больше этого интервала. Также важно, что эта величина некоррелирована. Тогда получаем:

$$=<\frac{\partial\beta}{\partial x}|_t b(x(t))>\int_{t-\triangle t}^{t}<\xi(t)\xi(t')>dt'=<\frac{\partial\beta}{\partial x}|_t b(x(t))>\int_{t-\triangle t}^{t}2D\delta(t-\triangle t)dt'=$$

$$=<\frac{\partial\beta}{\partial x}|_t b(x(t))>\int_0^{\triangle t} 2D\delta(\tau)d\tau = D<\frac{\partial\beta}{\partial x}|_t b(x(t))>$$

Получили выражение для правой части уравнения. В итоге получаем уравнение для средних в следующем виде:

$$\frac{\partial\bar{F}(x(t))}{\partial t}+<a(x)F_x'(x)>=D<b(x)[b(x)F_x'(x)]_x'>$$

Т.е. взяли уравнение Фоккера-Планка, учли дельта-корреляцию, воспользовались определением коррелированной и дельта-коррелированной составляющей. Таким образом, если задана функция $F_x'(x)$, можно решать уравнение и находить моменты.

Пример 5.1. *Пусть есть уравнение*

$$\dot{x}(t)+\alpha x=\xi(t)$$

Это уравнение Орнштейна – Уленбека или уравнение броуновской частицы при наличии трения и затухания этого параметра α. Это довольно общий вид уравнения в радиофизике – прохождение случайного сигнала через полосовой фильтр. Уравнение имеет много применений, если процесс будет описываться им.

Пусть будет интересовать функция средней интенсивности (мощности) флуктуаций

$$F(x)=\bar{x}^2(t)$$

В данном случае среднее значение не будет представлять интереса, так как при усреднении его будет 0. Все затухает. Домножим обе части на $2x$.

$$\frac{d<x^2(t)>}{dt}+2a\bar{x}^2=2<x(t)\xi(t)>$$

В данном случае нужно найти теперь значение коррелятора $<x(t)\xi(t)>$.

$$a(x)=\alpha x$$

$$b(x)=1$$

$$[b(x)F_x'(x)]_x'=2$$

$$\frac{d<x^2(t)>}{dt}+2a\bar{x}^2=2D$$

$$\text{Стационарное решение при } \frac{d<x^2(t)>}{dt}=0$$

$$\bar{x}^2=\frac{D}{\alpha}$$

В итоге получаем среднюю интенсивность флуктуации x.

Все хорошо решается для линейных уравнений. В более сложных нужно уже смотреть усреднение по всех остальных зависимостей. То есть получим нелинейное уравнение по переменной x, которое даже не всегда удается решить. Но существуют некоторые примеры, которые приводят к интегрируемости нужного уравнения. Хотя можно записать уравнения для некоторых моментов, но в общем случае получится цепочка связанных между собой уравнений для разных моментов. В связи с этим на помощь приходит уравнение для функции распределения плотности вероятности или уравнение Фоккера-Планка.

Мы исходили из стохастического дифференциального уравнения первого порядка (уравнение Ланжевена). Если же есть система стохастических дифференциальных уравнений второго (или более высокого) порядка, то и в этом случае можем применять этот метод, но нужно вводить вспомогательную функцию.

Пример 5.2. *Рассмотрим еще один пример – гармонический осциллятор с затуханием. ω_0 – частота колебаний, а α – затухание.*

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \xi(t)$$

Справа находится случайная сила, обладающая теми же свойствами, которые были рассмотрены ранее. Чтобы рассмотреть подход, а именно коррелированную и некоррелированную составляющие, вводим

$$\dot{x}(t) = y(t)$$

$$\dot{y}(t) + 2\alpha y(t) + \omega_0^2 x(t) = \xi(t)$$

Тем самым привели уравнение второго порядка к уравнению первого.

Домножим первое уравнение на $x(t)$, а второе на $y(t)$. В итоге получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d < x^2(t) >}{dt} = < x(t)y(t) >$$

$$\frac{1}{2}\frac{d < y^2(t) >}{dt} + 2\alpha\bar{y}^2(t) + \omega_0^2 < y(t)x(t) > = < y(t)\xi(t) > = D$$

Теперь будет искать среднее в установившемся режиме, стационарном случайном процессе. Как знаем, что есть колебательные процессы, переходные моменты включения. Будем интересоваться установившимися значениями. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d < y^2(t) >}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d < x^2(t) >}{dt} = 0$$

$$\omega_0^2 < y(t)x(t) >= 0$$
$$2\alpha\bar{y}^2(t) = D$$
$$\bar{y}^2(t) = \frac{D}{2\alpha}$$

Теперь же домножим первое уравнение на $y(t)$, а второе на $x(t)$. В итоге получаем, опуская математические выкладки:

$$< x(t)\dot{y}(t) >= \frac{1}{2}\frac{d < x^2(t) >}{dt} = 0$$
$$\bar{x}^2(t) = \frac{D}{2\alpha\omega_0^2}$$

Получается, посмотрели, как дифференциально можно решать стохастические уравнения более высокого порядка, вводя новые промежуточные обозначения. И там, где случайная сила, сводим к дифференциальному уравнению первого порядка.

Теперь возпользуемся общим уравнением для усреднения и домножения на среднее значение функции $F(x)$ и выведем уравнение Фоккера-Планка. Как знаем, $F(x)$ может быть любой величиной, может быть квадратичной, как смотрели ранее, линейная и т.д. Если хотим найти характеристическую функцию, то надо умножать на экспоненту.

С дельта-коррелированным случайным процессом связано уравнение Фоккера-Планка, что показано на примере диффузионного процесса Виннера. Теперь попытаемся вывести уравнение Фоккера-Планка другим способом: исходя из общей формы.

Запишем уравнение Ланжевена:

$$\frac{\partial\bar{F}(y(t))}{\partial t} + < a(y)F_y'(y) >= D < b(y)[b(y)F_y'(y)]_y' >$$

Рассмотрим функцию такую, что

$$\dot{F}(y) = F(x,y) = \delta(x-y)$$
$$< F(x,y) >= \int \delta(x-y)\omega(y)dy = \omega(x)$$

В итоге получаем плотность вероятности от x. Рассчитаем величину второго слагаемого в уравнении:

$$< a(y)\delta_y'(x-y) >= \int a(y)\delta_y'(x-y)\omega(y)dy = \int a(y)\omega(y)d\delta(x-y) =$$

В данном случае учитываем дельта-функцию, как четную. На функцию распределения вероятности $\omega(y)$ накладывается условие, что на краях при стремлении к бесконечности y значение функции стремиться к нулю.

$$= a(y)\omega(y)\delta(x-y)|_{-\infty}^{+\infty} - \int (a(y)\omega(y))'\delta(x-y)dy = -(a(x)\omega(x))_x'$$

Теперь рассмотрим производную в правой части:

$$< b(y)[b(y)F'_y(y)]'_y >= \int b(y)[b(y)F'_y(y)]'_y\omega(y)dy =$$

$$= -b(y)\delta'_y(x-y)[b(y)\omega(y)]'_y dy = [b(x)\omega(x)]''_{xx}$$

В конце концов само уравнение будет принимать вид:

$$\frac{\partial\omega(y(t))}{\partial t} = a(x)\omega(x) + Db(x)[b(x)\omega(x)]''_{xx}$$

Его можно записать в каноническом виде:

$$\frac{\partial\omega(y(t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}k_1(x)\omega(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}k_2(x)\omega(x)$$

Это уравнение для распределения плотности вероятности, которое считается уравнением Фоккера-Планка, где

$$k_1(x) = a(x) - Db(x)b'(x)$$

$$k_2(x) = 2Db^2(x)$$

Сами коэффициенты: k_1 – коэффициент сноса, а k_2 – коэффициент диффузии.

То есть имея стохастическое дифференциальное уравнение самого общего вида, уравнение Ланжевена, которое может быть по x нелинейным. Свели его к уравнению для функции распределения плотности вероятности $\omega(x)$ и по этой функции распределение стало линейным. Таким образом, его можно решить и, зная распределение, найти любые статистические характеристики. Можно найти стационарное решение, а нестационарное дает вероятность перехода из одного момента времени в другое. Таким образом можно написать сколь угодно высокого порядка функцию распределения.

Запишем стационарное решение уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}k_1(x)\omega_{\text{ст}}(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x) = 0$$

Уравнение первого порядка имеет решение и получаем

$$k_1(x)\omega_{\text{ст}}(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x) = 0$$

И зная, что константы распределения вероятности на бесконечности равны нулю, поэтому уравнение можно решить.

$$-k_1(x)\omega_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x)$$

$$-k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x) = \frac{k_2(x)}{2k_1(x)}\frac{\partial}{\partial t}k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x)$$

$$k_2(x)\omega_{\text{ст}}(x) = e^{-\int^x \frac{2k_1(x')}{k_2(x')}dx'}$$

Если подставить в полученное выражение значения k_1 и k_2:

$$\omega_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{|b(x)|}e^{-\int^x \frac{a(x')}{2b^2(x')}dx'}$$

Тем самым нашли общее решение для уравнения Фоккера-Планка для распределения x, где $a(x)$ и $b(x)$ некоторые заданные уравнения функции. Также знаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\text{ст}}(x)dx = 1$$

из условия нормировки.

Пример 5.3. *Рассмотрим еще один пример. Вернемся опять к уравнению Орнштейна – Уленбека:*

$$\dot{x}(t) + \alpha x = \xi(t)$$

$$a(x) = \alpha x$$

$$b(x) = 1$$

$$\omega_{cm}(x) = Ce^{-\frac{\alpha x^2}{2D}}$$

То есть получили гауссовский закон распределения. На $\xi(t)$ накладывали условие, что она дельта-коррелирована. Никакой статистики не предполагалось, какая она будет – неважно. Это линейное уравнение, которое можем решить. На основе центральной предельной теоремы, статистика будет гауссовская. Если же есть нелинейный осциллятор, то функция распределения будет меняться. В линейном наоборот.

В итоге получили результат: уравнение Ланжевена первого порядка, уравнение для функции распределения плотности вероятности, уравнение Фоккера-Планка, которое является линейным по самой функции. С помощью последнего уравнения можно находить и моменты, но есть проблема – возникновение цепочки моментов. Их можно разорвать, если делать предположение о статистике самого процесса. Во многих случаях можно считать, что в развитом режиме физический процесс подчиняется гауссовской статистике.

Но этот подход, анализ флуктуационных явлений и случайных процессов, основанный на уравнении Ланжевена, имеет один недостаток – случайная сила будет дельта-коррелирована. То есть спектр у нее будет бесконечность, это белый шум. С другой стороны, если среднее значение $\xi(t)$ равно нулю, а сами значения могут быть и положительные и отрицательные, и, например, флуктуирует величина, которая физически не может принимать отрицательные значения, то этот подход будет несправедлив. Такой подход можно применять там, где спектр шума случайной силы, действующей на функцию, гораздо шире, чем полоса спектра самой системы, которую обрабатываем.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) с коэффициентами, меняющимися по закону случайного телеграфного процесса или сигнала. Формула дифференцирования

Эти типы не являются уже марковскими, но допускают получение функции плотности распределения вероятности. Это все, когда на систему действует окрашенный шум. То есть существует конечное время корреляции случайной силы.

Запишем стохастическое дифференциальное уравнение, где вместо случайной силы $\xi(t)$ запишем случайную силу, соответствующую телеграфному процессу $\eta(t)$.

$$\dot{x}(t)+a(x)=b(x)\eta(t)$$

Случайная сила принимает значения как на (Рис. 5.2).

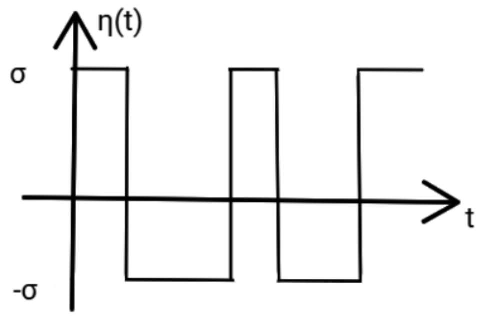

Рис. 5.2. Случайная сила

В литературе также встречается понятие «бихатомный процесс». Значения принимаются в интервале $[-\sigma,\sigma]$.

$$\eta(t)=(-1)^{n(0,t)}\tau_0$$

Как уже знаем $n(0,t)$ – пуассоновский процесс, т.е. случайно в какой-то момент времени происходит дискретное изменение аргумента.

$$\eta^2(t)=\tau_0$$

Рассматриваем интервал времени $[0,t]$, где число перескоков тоже будет подчиняться пуассоновскому закону:

$$P(n) = \frac{(\nu t)^n}{n} e^{-\nu t},$$

где ν – средняя частота (скорость или переключение) перескоков.

Чтобы дальше работать с этим уравнением, нужно вывести формулу дифференцирования. Формула дифференцирования играет роль «когерентной добавки». Рассмотрим формулу следующего произведения:

$$\frac{d < \eta(t)x(t) >}{dt} =< \dot{\eta}(t)x(t) > + < \eta(t)\dot{x}(t) >$$

Теперь рассмотрим следующее среднее:

$$< \eta(t_1)x(t) >= \frac{1}{\sigma^2} < \eta(t_1)\eta^2(t)x(t) >=$$

Поскольку перескоки случайные и интервалы от 0 до t_1 и от t_1 до t статистически независимы. Поэтому усреднение можно записать следующим образом:

$$= \frac{1}{\sigma^2} < \eta(t_1)\eta(t) >< \eta(t)x(t) >= \frac{1}{\sigma^2} e^{-2\nu(t_1-t)} < \eta(t)x(t) >$$

Возьмем производную от полученного выражения.

$$\frac{d < \eta(t_1)x(t) >}{dt_1} = -2\nu e^{-2\nu(t_1-t)} < \eta(t)x(t) >$$

Возьмем предел этого выражения при $t_1 \to t$:

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{d < \eta(t_1)x(t) >}{dt_1} = -2\nu < \eta(t)x(t) >=< \dot{\eta}(t)x(t) >$$

Подставим полученное выражение в первоначальное уравнение и получим формулу дифференцирования:

$$\frac{d < \eta(t)x(t) >}{dt} + 2\nu < \eta(t)x(t) >=< \eta(t)\dot{x}(t) >$$

Посмотрим, как работает формула и что она физически дает.

Вернемся к стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка.

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) + \alpha x(t) = \beta(x)\eta(t)$$

Умножим обе стороны на $\dot{x}(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{x}^2(t) + 2\alpha \bar{x}^2(t) = 2\beta x(t)\bar{\eta}(t)$$

Подставим уравнение в формулу дифференцирования. Получаем:

$$\frac{d<\eta(t)x(t)>}{dt}+2\nu<\eta(t)x(t)>=<\eta(t)[2\beta x(t)\eta(t)-2\alpha x^2(t)]>$$

$$\sigma_0^2=1$$

$$\frac{d<\eta(t)x(t)>}{dt}+2\nu<\eta(t)x(t)>=\beta-\alpha<\eta(t)x(t)>$$

В результате получили значение коррелятора $2\beta x(t)\bar{\eta}(t)$. Поэтому формула играет роль вспомогательной части коррелированной составляющей.

Для того, чтобы найти дисперсию или интенсивность флуктуацию, нужно решить замкнутые уравнения. Ограничимся стационарным случаем и найдем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}^2(t)=0$$

$$\frac{d<\eta(t)x(t)>}{dt}=0$$

$$\bar{x}^2(t)=\frac{\beta}{\alpha}x(t)\bar{\eta}(t)$$

$$x(t)\bar{\eta}(t)=\frac{\beta}{2\nu+\alpha}$$

$$\bar{x}^2(t)=\frac{\beta^2}{\alpha(2\nu+\alpha)}$$

где ν – средняя частота перескоков.

Тогда

$$\nu\to\infty$$

$$\bar{x}^2(t)=\frac{D}{\alpha}$$

$$D=\frac{\beta^2}{2\nu+\alpha}$$

Получаем перескоки. Они очень частые и получается случайный дельта - коррелированный процесс. Также ν учитывает конечную полосу спектра. И только когда полоса спектра будет стремиться к бесконечности, получим этот закон. Такой подход со случайным телеграфным процессом дает учесть конечную полосу шума, воздействующую на систему. Коэффициент затухания также будет сохраняться.

Таким образом, были рассмотрены два метода решения стохастических дифференциальных уравнений для дельта - коррелированного случайного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением Ланжевена. Обобщение этого уравнения в квантовой теории носит название *уравнения Гейзенберга-Ланжевена*, если имеем операторную часть. И подход будет аналогичный. Также показали, что, выделяя коррелированную и некоррелированную части, можно получить уравнения для произвольных моментов, функции распределения плотности вероятности (Фоккера-Планка), а также уравнение для характеристической функции.

$$F(x) = e^{iUx}$$

Среди преимуществ данного подхода – что уравнение для распределения вероятностей является линейным уравнением, было получено решение для стационарного установившегося случайного процесса. Зная это решение для нестационарного процесса, находим вероятность перехода из одного момента времени в другой. И можно записать сколь угодного порядка функции распределения. Но это все работает только для дельта-коррелированных сил. Если же случайная сила не является дельта-коррелированной или величина может принимать только случайно положительные значения, то используется теория, связанная со случайным телеграфным процессом. Это «дихатомный процесс», который имеет в качестве значений положительные и отрицательные величины. Постоянную часть можно всегда сдвинуть. Поэтому она учитывает конечную длительность выбросов или конечную полосу случайного процесса. В итоге получаем соответствующую формулу дифференцирования. Это аналог коррелированной и некоррелированной составляющей.

Можно решать колебательное уравнение второго порядка со случайной дельта-коррелированной силой, приводя к системе двух уравнений. Так же можно поступать и с не дельта-коррелированной случайной силой, приводя к соответствующей случайной силе. Можно также взять дельта-функцию, усреднить ее и получить уравнение для распределения плотности вероятности. Но это уже не будет уравнением Фоккера-Планка, так как фигурирует конечное время корреляции.

Теория со случайным телеграфным процессом не является широко доступной в учебной литературе. В отечественной литературе мало развита и со временем меняется.

Лекция 6. Флуктуационные явления

Стохастические интегралы Ито и Стратоновича

Случайный Винеровский процесс, который математически моделирует движение броуновской частицы, можно одинаковым образом описывать как уравнением Фоккера-Планка, так и стохастическим дифференциальным уравнением. В результате получали один и тот же результат. Но переход от стохастического дифференциального уравнения к уравнению Фоккера-Планка оказывается неоднозначным, если само дифференциальное уравнение оказывается нелинейным.

Существует два подхода: первый был разработан в 1940-х годах японским ученым математиком Ито. Второй подход выведен в 1960-х годах Русланом Леонтьевичем Стратоновичем, профессором кафедры общей физики и волновых процессов Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Первый подход имел именно математический характер, обобщение математического подхода на решение стохастических дифференциальных уравнений, а подход Стратоновича более физичен, чем математичен.

Вернемся к стохастическому дифференциальному уравнению Ланжевена:

$$\dot{x}(t) + a(x) = b(x)\xi(t)$$

По определению случайной силы стационарного случайного процесса:

$$< \xi(t) >= 0$$

$$< \xi\xi_\tau >= 2D\delta(\tau)$$

При переходе от этого стохастического дифференциального уравнения к уравнению Фоккера-Планка искали средние моменты или векторы смещения $(k_1(x))$ и коэффициенты диффузии $(k_2(x))$. Последние получены через запись условной функции распределения. В результате получали соответствующие моменты.

Параметры связаны с определенными видами моментов. $k_1(x)$ – со средним значением, а $k_2(x)$ – с дисперсией.

Согласно уравнению, нужно найти приращение $\triangle x$ на интервале $\triangle t$

$$\triangle x(t) = x(t+\triangle t) - x(t) = \int_t^{t+\triangle t} -a(x(t'))dt' + \int_t^{t+\triangle t} b(x(t'))\xi(t')dt'$$

Первое слагаемое показывает, что нет случайной силы. Это не вызывает сомнения для расчета величины. Второе же – включает в себя случайное воздействие случайной силы. Поэтому в зависимости от того, как представляется интеграл и будет зависеть результат.

$$I(t) = \int_t^{t+\triangle t} b(x(t'))\xi(t')dt' =$$

$$\dot{\omega}(t) = \xi(t)$$

$$d\dot{\omega}(t) = \xi(t)dt$$

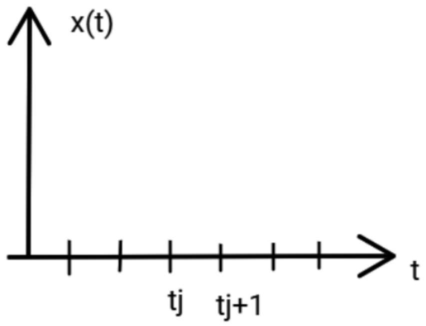

Рис. 6.1. График зависимости функции от времени

Запишем интеграл через математическое определение. Построим координаты с временным участком (Рис. 6.1). На нем выделим участок, соответствующий $\triangle t$. В итоге получаем:

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} b(x(t_j))[\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j)]$$

$$\omega(t_{j+1}) - \omega(t_j) = \triangle\omega(t_j) = \triangle\omega_j$$

В итоге получили приращение Винеровского процесса на интервале времени. $I(t)$ – определение стохастического интеграла по Ито.

Теперь рассмотрим, как этот вопрос решал Стратонович. Он предложил взять значение функции не на краю интервала, а в середине.

$$S(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} b(\frac{1}{2}(x(t_j) + x(t_{j+1}))\triangle\omega_j$$

В зависимости от того, какой выбираем точку регулярной случайной функции, по которой «ходит» функция x (она зависит от случайного воздействия), можем получать различные результаты для уравнения Фоккера-Планка.

Сначала продемонстрируем, что наглядный результат определения интегралов по Ито и Стратоновичу дают различные результаты. Для этого поступим следующим образом. Для простоты произведем замену:

$$b(x(t)) \to \omega(t)$$

Тогда будем иметь в интегралах следующие значения:

$$I(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0} \omega(t_j)\triangle\omega_j$$

Для интеграла Стратоновича возьмем не середину отрезка, а другой край. Когда оцениваем результат, точку можно взять любую. Поэтому возьмем правую точку и убедимся, что результат получается совершенно другой. Если же берем в середине точку, то будет различие в записи интегралов.

$$\tilde{S}(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0} \omega(t_{j+1}) \triangle \omega_j$$

Теперь, если рассмотрим разность и возьмем среднее от нее, то получим

$$M(\tilde{S}(t) - I(t)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0} < \triangle \omega_j^2 >=$$

$$\triangle \omega_j = \int_{t_j}^{t_j+\triangle t} \xi(t')dt'$$

$$< \triangle \omega_j^2 >= \iint_{t_j}^{t_j+\triangle t} < \xi(t')\xi(t") > dt'dt - 2D \iint_{t_j}^{t_j+\triangle t} \delta(tt')dt'dt - 2D\triangle t_j$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0} 2D(t_{j+1} - t_j) = 2D(t - t_0)$$

Получаем, что в зависимости от того, как выбирается точка при выполнении интегрирования, получаем различный результат.

Это яркая демонстрация, что в стохастических дифференциальных уравнениях, когда функция нелинейная, выбор точки интегрирования оказывается существенным.

Вернемся к интегралам Ито и Стратоновича.

$$\triangle x(t) = -a(x(t))\triangle t + b(x(t)) \int_{t}^{t+\triangle t} \xi(t')dt'$$

$$\int_{t}^{t+\triangle t} \xi(t')dt' = d\omega(t')$$

Запишем интеграл Стратоновича еще раз:

$$\tilde{S}(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} b(\frac{1}{2}(x(t_j) + x(t_{j+1})))\triangle \omega_j$$

Для него приращение будет выглядеть следующим образом:

$$\triangle x(t) = -a(x(t))\triangle t + \int_{t}^{t+\triangle t} b(x(t'))d\omega(t') =$$

$$b(x(t')) = b_s(\frac{1}{2}(x(t)+x(t+\triangle t)))$$

$$= -a(x(t))\triangle t + b(\frac{1}{2}(x(t)+x(t+\triangle t)))\int_t^{t+\triangle t} d\omega(t') =$$

$$x(t+\triangle t) = x(t) + \triangle x(t)$$

$$b_s = b(x(t) + \frac{1}{2}\triangle x(t)) = b(x(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial b(x(t))}{\partial x}\triangle x(t)$$

Теперь можно воспользоваться оценкой $\triangle x(t)$ для более высокого порядка (т.е. появятся слагаемые более высокого порядка). Тогда получаем следующее выражение, подставив в формулу Ито:

$$\triangle x(t) = -a(x(t))\triangle t + \frac{1}{2}a(x(t))b'_x(x(t))\triangle t\triangle\omega(t) + \frac{1}{2}b(x(t))b'_x(x(t))(\triangle\omega(t))^2 + b^2(x(t))\triangle\omega(t)$$

Подставляя в уравнение для k_1 и k_2 при выводе уравнения Фоккера-Планка

$$k_1 = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\bar{x}(t)}{\triangle t} =$$

$$\frac{1}{2}a(x(t))b'_x(x(t))\triangle t\triangle\omega(t) = 0$$

$$b^2(x(t))\triangle\omega(t) = 0$$

$$= -a(x(t)) + \frac{1}{2}b(x(t))b'_x(x(t))2D = a(x(t)) - Db(x(t))b'_x(x(t))$$

$$k_2 = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{(\triangle\bar{x}(t))^2}{\triangle t} =$$

$$-a(x(t))\triangle t = 0$$

$$\frac{1}{2}a(x(t))b'_x(x(t))\triangle t\triangle\omega(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}b(x(t))b'_x(x(t))(\triangle\omega(t))^2 = 0$$

$$= 2Db^2(x(t))$$

Если подставить эти коэффициенты в уравнение Фоккера-Планка, то можно получить тот результат как когда выделяли коррелированные и некоррелированные составляющие. Когда рассчитываем коэффициенты смещения и диффузии, то в приращении по Стратоновичу появилось дополнительное слагаемое $b'_x(x(t))$, а в Ито оно отсутствует.

Итак, за счет того, что выбираем при оценке интеграла значение функции не с левого края интервала, а из середины, получается математически дополнительное слагаемое, которое входит в запись интеграла Стратоновича. Если просто берут и рассчитывают стохастическое дифференциальное уравнение и его характеристики, то некоторые ученые сразу берут формулу Ито, а другие по Стратоновичу.

Если перед флуктуационной силой есть коэффициент и он не зависит от самой величины x, то результат получается один и тот же. Если стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. линейное, то оно будет линейным в том смысле, что перед случайной силой нет нелинейной функции. Первое же слагаемое может быть нелинейной функцией. То в уравнениях Ито и Стратоновича будет одно и то же. Если же нелинейное, то появляется дополнительное слагаемое.

Когда Стратонович предложил этот факт, в научном сообществе возникла большая дискуссия. В 1960-х годах не было мощных компьютеров или их аналогов, с помощью которых можно проверить и убедиться в правильности выкладок Стратоновича. И если сейчас моделировать сложные процессы, решать системы уравнений, исследовать статистические характеристики процессов, то нужно брать по Стратоновичу. Получим в итоге физически правильный ответ.

Если смотреть по существу, то когда получали уравнение Фоккера-Планка, исходили из того, что есть коррелированные и некоррелированные составляющие. Он фактически совпадал с подходом Стратоновича. То есть это и математический вывод (обоснование) и физический. Физически происходит следующее: когда функция $b(x(t))$ стоит под интегралом, тогда x – некоторый функционал, решение самого простейшего дифференциального уравнения. И такая зависимость учитывается, когда выделяется именно коррелированная составляющая. То есть это физически разумный подход выделения коррелированной и некоррелированной составляющих. Но математически нужно производить подбор, как делали выше для коэффициентов k_1 и k_2.

Естественно, если взять зависимость от того, каким образом выносим функцию из-под интеграла, как ее оцениваем, то именно от этого будет зависеть полученный результат. То есть где бы не взяли значение (с правого или левого края или в середине) получим разное значение.

При решении проблем со случайными дифференциальными уравнениями, описывающими стохастические процессы, рекомендуется использовать физико-математический подход Стратоновича. Некоторые ученые, для сравнения результатов, рекомендуют проводить для оценки оба подхода – и Ито, и Стратоновича. Но в итоге выбирать тот, который физически более удобен и разумен.

Флуктуационные явления в линейных средах

Теперь рассмотрим проблему рассчета отклика линейной системы на случайное воздействие. Линейные системы больше всего исследуются и изучены. Кроме того, часто к линейным системам сводят нелинейные. Например, когда рассматривали поведение физической системы, определили некоторые физические точки. Это отклик без стационарного значения. То есть, когда берется стационарное значение и ищется около него, как реагирует система на различные возмущения.

Явным примерном считается расчет флуктуаций генератора, какого бы диапазона они не были в сложных системах. Линейные системы встречались и ранее. Уравнение Винера тоже считается линейным, так как описывает линейную физическую систему – отклик частички на случайное воздействие.

В общем виде можно представить как на (Рис. 6.2).

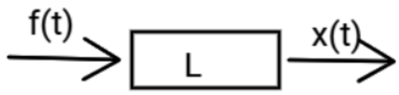

Рис. 6.2. Отклик частички на случайное воздействие

Физическое воздействие $f(t)$ может быть как случайное, так и регулярное. В итоге интересует результат $x(t)$. Математически такой процесс можно записать следующим образом:

$$Lx(t) = f(t),$$

где L – некоторый оператор для $x(t)$. Величина, поведение которой интересует и иследуется, находится под действием оператора. Правая часть уравнения – внешнее воздействие. Иногда этот факт вызывает некоторое сомнение. Причем линейный оператор может быть дифференциальный, интегральный и т.д. Но важный факт, что он линейный в любом случае.

Линейность системы позволяет анализировать ее двумя способами, дополняющими друг друга и связанными между собой – временным и спектральным.

Временное и спектральное описание отклика линейной системы

В общем случае, если система имеет постоянные параметры, то есть характеристики не зависят от времени. Решение общематематическое будет представляться как интеграл Дюамеля:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\Theta) f(\Theta) d\Theta =$$

$$t - \Theta = \tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) f(t-\tau) d\tau = L^{-1} f(t)$$

$$H(\tau) = 0 \text{ при } \tau > 0$$

$$H(\tau) = h(\tau) \text{ при } \tau \geqslant 0$$

Это выражение удовлетворяет условию, что выполняется принцип «причинности». Это означает, что отклик на выходе не может появиться раньше, чем воздействие на эту систему – это физический разрыв.

$$f(\tau) = \delta(\tau)$$

$$x(\tau) = h(t)$$

Еще одно свойство – однородность во времени, которое говорит о следующем. Если есть два воздействия с интервалом

$$\triangle t = t_2 - t_1$$

то и на выходе воздействия будут отличаться между собой на момент времени $\triangle t$.

Когда на систему действует дельта-функция, то отклик на нее (полученное выражение) носит название *функции Грина*. Если нашли функцию Грина $h(t)$ для данной системы уравнений, то можно найти общее решение. Выше записано временное представление. Но в целом ряде случаев оказывается удобно именно спектральное представление для решения уравнения.

Пишем через Фурье образ:

$$f(t) = \int \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Считается, что этот интеграл удовлетворяет необходимым условиям. Если подставить это выражение, то получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau d\omega =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = K(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Коэффициент K носит название частотной передаточной функции или частотный коэффициент передачи.

Если $H(\tau)$ действительная, то

$$K^+(\omega) = K(-\omega)$$

Зная частотный коэффициент передачи, можем найти соответствующие характеристики процесса. Обратимся к стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка. Его можно рассматривать как уравнение Винера с затуханием или движение частички с затуханием.

$$\dot{x}(t) + \alpha x = f(t)$$

Переходим к Фурье образу через Фурье компоненты.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} dt$$

Подставим в предыдущее уравнение

$$(\frac{d}{dt} + \alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega + \alpha) \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Если это справедливо для любого момента времени, то это означает

$$(i\omega + \alpha)\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$$

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{i\omega + \alpha} = K(\omega)\tilde{f}(\omega)$$

$$K(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha}$$

Будем искать отклик дифференциального уравнения первого порядка. Найдем коэффициент частот передачи на одной гармонии.

$$\dot{x}(t) + \alpha x = f(t)$$

$$f(t) => e^{i\omega t}$$

$$x(t) => K(\omega) e^{i\omega t}$$

$$K(\omega)(i\omega + \alpha) = 1$$

$$K(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha}$$

Тем самым нашли Фурье компоненты, измеряемые величины. Но при случайных воздействиях корректно искать не возведение в квадрат $\tilde{x}(\omega)$, так как сила $\tilde{f}(\omega)$ может быть дельта-коррелирована, а нужно искать коррелятор

$$< \tilde{x}(\omega)\tilde{x}*(\omega') >= K(\omega)K*(\omega) < \tilde{f}(\omega)\tilde{f}*(\omega') >$$

При воздействии стационарного случайного процесса Фурье компоненты будут только дельта-коррелированы. Даже не зависит от того, какая корреляция будет во времени.

$$< \tilde{x}(\omega)\tilde{x}*(\omega') >= G_x(\omega)\delta(\omega'-\omega)$$

$$< \tilde{f}(\omega)\tilde{f}*(\omega') >= G_f(\omega)\delta(\omega'-\omega),$$

где $G_f(\omega)$ – спектральная плотность

$$G_x(\omega)\delta(\omega'-\omega) = |K(\omega)|^2 G_f(\omega)\delta(\omega'-\omega)$$

$$G_x(\omega) = |K(\omega)|^2 G_f(\omega)$$

Получаем соотношение для спектральной плотности при воздействии на систему стационарного случайного шума. Из него можно искать любые временные характеристики с точки зрения расчета корреляционной функции или интенсивности.

Флуктуация в резонансном RLC–контуре, формула Найквиста для теплового шума

Этот подход можно использовать для расчета флуктуаций при воздействии случайной силы на гармонический осциллятор с затуханием. Можно просто рассматривать эту проблему не конкретизируя какую-то физическую реальность. Но для удобства рассмотрим конкретный пример: колебательный контур с затуханием и соответствующими параметрами. Это колебательный контур в радиодиапазоне, куда входят емкость (C), индуктивность (L) и резистор сопротивления (R).

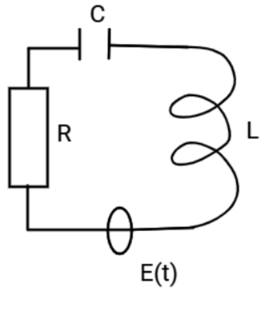

Рис. 6.3. Колебательный контур

Колебательный контур изображен на (Рис. 6.3). Обязательно должен присутствовать ЭДС тепловой силы ($E_T(t)$). Носителями создается ток, который обусловлен движением электронов. Если не прикладывать к резистору напряжение, то в результате теплового движения электронов создается ЭДС на концах резистора.

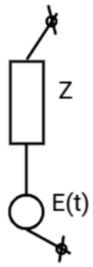

Рис. 6.4. Резистор

В общем случае резистор обозначают как на (Рис. 6.4). Его также называют «импеданс» Если резистор высокопроводимый, то он будет колебаться. Источник этой случайной ЭДС обусловлен дискретностью зарядов и электронов под тепловым движением этих электронов.

Рассчитаем отклик колебательной системы и найдем из условия равновесия при некоторой температуре источник тепловых флуктуаций. Для этого получим уравнение для системы.

Пусть заряд на конденсаторе q. Тогда

$$L\ddot{q}(t)+\frac{q}{C}+R\dot{q}=E_T(t)$$

Приведем выражение к стандартной форме.

$$\ddot{q}(t)+2\alpha\dot{q}+\omega_0^2 q=\frac{1}{L}E_T(t)$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

Если же рассмотреть задачу в общем, то это колебание частицы с затуханием под действием случайной силы. Чтобы уравнение имело физический смысл, можно забыть, что q – заряд.

Это пример стохастического дифференциального уравнения второго порядка. Уравнение Ланжевена связано со стохастикой первого порядка. Поэтому его можно анализировать тем способом, который был показан ранее. Т.е. вместо уравнения второго порядка можно ввести два уравнения первого порядка. Но сейчас рассмотрим применение Фурье (линейного) подхода для временных систем. Но можно решать любым способом – в итоге получится одинаковый ответ.

Используем Фурье образ.

$$e^{i\omega t}$$

$$q(\omega) = K(\omega)e^{i\omega t}$$

$$K(\omega) = \frac{\frac{1}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega}$$

Соответственно, заряд, который накапливается на емкости:

$$q(t) = \int K(\omega)\xi_T(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Расмматриваем полную энергию, накопленную под действием тепловых движений в этом контуре.

$$< E > = < E_C > + < E_L > = \frac{1}{2C}\overline{q^2(t)} + \frac{L}{2}\overline{(\dot{q}(t))^2}$$

$$\overline{q^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_q(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |K(\omega)|^2 G_T(\omega)d\omega =$$

$$|K(\omega)|^2 = \frac{L^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} |K(\omega)|^2 G_T(\omega)d\omega$$

Далее нужно знать функции распределения спектральной плотности, если случайный процесс стационарный. Если считаем, что воздействующий шум имеет широкий спектр, а сам контур узкочастотный, то максимальное значение будет достигаться при $\omega_0^2 = \omega^2$.

Рассмотрим, в чем состоит традиционное упрощение. Если частотный коэффициент передачи подобного вида:

$$|K(\omega)|^2 = \frac{L^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}$$

а случайная сила, воздействующая на эту систему, имеет более широкий спектр, чем потерь, полоса выбирается $(2\alpha\omega)^2$ величиной контура. Тогда поступают следующим образом:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) =$$

Считая, что контур высокодобротный, получаем

$$= 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

$$2\alpha\omega \approx 2\alpha\omega_0$$

Тогда выражение для частотного коэффициента передачи будет

$$|K(\omega)|^2 = \frac{L^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\alpha\omega)^2} = \frac{L^2}{(2\omega_0)^2[(\omega_0-\omega)^2+\alpha^2]}$$

При такой замене упрощается выражение для коэффициента. Спектр широкий, а контур узкий. Тогда

$$\bar{q^2}(t) = \frac{2G_T(\omega_0)}{L^2(2\omega_0)^2}\int_0^{+\infty}\frac{d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\alpha^2}$$

Проведем следующую замену

$$\omega_0 - \omega = \Omega$$

$$d\omega = -d\Omega$$

При этом происходят переходы:

$$\int_0^{+\infty} \to -\int_{\omega_0}^{-\infty} d\Omega \to -\int_{+\infty}^{-\infty} d\Omega \to \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega$$

Рассматриваем добротный резонатор. Величина, описывающая добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{\triangle\omega_k} >> 1$$

Тогда вводя замены получаем

$$\bar{q^2}(t) = \frac{2G_T(\omega_0)}{L^2(2\omega_0)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Omega}{\Omega^2+\alpha^2} =$$

Проводя некоторые преобразование в итоге значение будет равно

$$= \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2\alpha L^2\omega_0^2}$$

Лекция 7. Воздействие шума на осциллятор

Флуктуация в резонансном RLC–контуре, формула Найквиста для теплового шума (продолжение)

Ранее начали рассматривать колебательную систему: RLC–контур. Для него получили стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{q}(t) + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L}E_T(t)$$

Уравнение было получено для конкретной системы. Подобная колебательная система встречается довольно широко. Например, механический осциллятор, колебания электрона или какой-то еще частицы. Все зависит от того, какой источник будет внешнего воздействия.

В конкретном случае – это случайная флуктуация, которая обусловлена дискретностью заряда и его тепловым движением. Коэффициент α связан с затуханием. Когда полоса контура меньше, чем несущая частота:

$$2\alpha = \triangle\omega_k << \omega_0$$

$$\frac{\omega_0}{\triangle\omega_k} = Q >> 1$$

Последняя величина Q — добротность.

В этих приближениях для среднего квадрата величины заряда получили следующее выражение

$$q^{\bar{2}}(t) = \frac{\pi G_\xi(\omega_0)}{2\alpha L^2\omega_0^2}$$

Учитывая то, что контур высокодобротный, то для значения

$$< \dot{q}^2(t) >^2 = \frac{\pi G_\xi(\omega_0)}{2\alpha L^2}$$

Это ток. Энергия, запасенная на кондексаторе, будет иметь вид

$$< E_C > = \frac{1}{2C} < q^2(t) > = \frac{\pi G_\xi(\omega_0)}{4\alpha L}$$

Энергия же, запасенная в индуктивности, представляет собой

$$< E_L > = \frac{L}{2} < q^2(t) > = < E_C >$$

Нетрудно убедиться, что на обоих элементах средние энергии равны. Тогда можно записать полную энергию в контуре, как сумму составляющих

$$< E > = < E_C > + < E_L > = \frac{\pi G_\xi(\omega)}{2\alpha L}$$

Параметры контура могут быть любые и выбраны произвольно. α характеризует потери. Подставим это значение вместо величины:

$$< E >= \frac{\pi G_\xi(\omega)}{R} =$$

Это средняя величина энергии, запасенная в контуре в результате теплового движения электронов. Если сила известна, то нашли ее величину. Но в данном случае величина неизвестна. Ее можно определить пользуясь результатом из статистической физики о равном распределении по степеням свободы. Поэтому получаем равенство:

$$= \frac{1}{2} N k_Б T,$$

где $k_Б$ – постоянная Больцмана. Число N определяет порядок дифференциального уравнения, в котором есть флуктуации. Порядок $\frac{N}{2}$ – число степеней свободы. В нашем случае

$$N = 2$$

$$< E >= k_Б T$$

Если дифференциальное уравнение третьего порядка, то $N = 3$. Тогда число степеней свободы будет $\frac{3}{2}$. Это характерно для систем, в которых есть обратное воздействие.

Поэтому, подставляя $N = 2$, найдем значение спектральной плотности флуктуации ЭДС (напряжения).

$$G_\xi(\omega) = \frac{1}{\pi} k_{TR}$$

Когда вводили спектральную плотность были положительные и отрицательные частоты, а физический смысл имеют только положительные. Когда определяем дисперсию флуктуации, то переходим к положительным частотам и появляется коэффициент 2.

$$G_\xi^{(+)}(\omega) = \frac{2}{\pi} k_Б T R$$

Это фактически уже формула Найквиста. Она связывает флуктуации в этой колебательной системе с наличием потерь или с флуктуационной дисперсионной теоремы (это ее частный случай). Теорема говорит о том, что если в системе есть потери, то флуктуационные силы будут воздействовать на нее.

Если перейти от круговых частот к обычным, то получим

$$\omega = 2\pi f$$

$$G_\xi^{(+)}(\omega) = 4 k_Б T R$$

Чаще всего формулу Найквиста записывают именно в таком виде. Она была выведена в 1927 году. В определенной области частот, приближений или диапазоне определенного соотношения параметром она работает хорошо.

Для более общего случая спектральная плотность флуктуации:

$$G_{\xi}^{(+)}(\omega) = 4k_{\text{Б}}TR_eZ$$

где R_eZ – действительная часть импеданса системы. Такая формула применима, если фигурируют более сложные элементы, схемы включения резисторов, емкостей и индуктивности.

Рассмотрим для примера спектральную плотность флуктуации ЭДС. А среднеквадратичное значение дисперсии (интенсивности) флуктуации будет

$$\sigma^2 = 4k_{\text{Б}}TR\triangle t$$

где $\triangle t$ – полоса пропускания.

$$k_{\text{Б}} = 1,38 * 10^{-23}\text{Дж/градус}$$

$$T = 300\text{К}$$

$$R = 10^7\text{Ом}$$

$$\triangle t = 10^3\text{Гц}$$

Если подставить эти значения в формулу дисперсии, то получим

$$\sigma = 13\text{мкВ}$$

На данный момент развитие физики «борется» за повышение чувствительности схем и формула Найквиста показывает, с какими величинами воздействия флуктуации можно иметь дело.

В итоге нашли спектральную плотность напряжения. Если нужно знать спектральную плотность тока, то нужно поделить на импеданс системы.

$$G_I^{(+)}(f) = \frac{G_{\xi}^{(+)}(f)}{|Z(\omega)|^2}$$

Полная же мощность флуктуации будет выглядеть следующим образом

$$P = \int \frac{G_I^{(+)}(f)}{|Z(\omega)|} df$$

Существуют рамки, в которых этот результат будет применим. Он будет применим к той области, где низкие частоты

$$\hbar\omega << k_{\text{Б}}T$$

Т.е. квантовые эффекты еще не сказываются. Это классическая часть. Если же обобщить на более высокий диапазон частот, то производим замену

$$k_{\text{Б}}T \to \frac{1}{2}\hbar\omega cth\frac{\hbar\omega}{k_{\text{Б}}T}$$

Но в пределе получим тот же самый результат. Но есть и ограниченная частота, где можно использовать классически, и квантовый подход будет определяться из условия, что

$$k_{\text{Б}}T = \hbar\omega$$

$$f_{\text{гр}} = \frac{k_T}{2\pi\hbar}$$

Это граничная частота, которая лежит в диапазоне 10^{13} Гц. Отсюда видно, что представляет интерес именно терагерцовый диапазон (10^{12} Гц). Поэтому в этом диапазоне вклад будут давать тепловые флуктуации в значительной мере.

У резистора всегда есть «паразитные утечки», что как раз ограничивает область применимости этой формулы. А значит, нужно проводить обобщение.

Рассмотренное – это спектральный подход к анализу колебательной системы. То есть ее можно рассматривать как колебательную систему с затуханием под воздействием внешней силы. Кроме этого, полезно рассмотреть еще и временной подход. Его следует использовать, если нужно изучить именно корреляционные свойства. А с помощью спектрального подхода можно определить энергетические характеристики. Если же корреляции и колебания происходят в разные моменты времени, то удобнее использовать временной подход. Это совершенно другой способ решения. И анализируем подход на рассмотрении того же уравнения. Причем убедимся, что как и временной подход, так и спектральный, должны дать одинаковые результаты в определенных приближениях.

Теперь будем искать решения через квадратурные компоненты:

$$a(t) = A(t)cos\omega_0 t - B(t)sin\omega_0 t$$

И учитывая, что система высокодобротная, будем пользоваться методом медленно меняющихся амплитуд (ММА). Этот подход часто используется, чтобы получить наглядные результаты. Метод основан на том, что фазой будет следующее приближение – изменение амплитуды на периоде колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\frac{\triangle A_T}{A} << 1$$
$$\frac{\triangle B_T}{B} << 1$$

Также этот подход можно записать и следующим образом:

$$\frac{dA}{dt}\frac{2\pi}{\omega} << A$$

Используя метод ММА записали колебания в таком виде. В таком же виде представим напряжение

$$\frac{1}{L}E_T(t) = a(t)cos\omega_0 t - b(t)sin\omega_0 t$$

Источник флуктуаций – шум. Его считаем стационарным через свойства квадратурных компонентов. Запишем эти свойства:

$$< a(t) >=< b(t) >$$

$$< a(t)b(t) >= 0$$

$$< a(t)a(t+\tau) >=< aa_\tau >=< bb_\tau >= \frac{1}{L^2}2\pi G_\xi^{(+)}(\omega_0)$$

Знаем, что ω_0 – положительная частота. Поэтому сразу нужно писать спектральную плотность по положительным частотам.

Таком образом, поставлена задача, изложен метод и источники флуктуаций. Т.е. определены статистические характеристики, а время линейное. Найдем первую и вторую производную колебаний и подставим в уравнение. Приравняем части при одинаковых частотах.

$$\dot{a}(t) = \dot{A}(t)cos\omega_0 t - \dot{B}(t)sin\omega_0 t$$

$$\dot{a}(t) = -\omega_0 A(t)sin\omega_0 t - \omega_0 B(t)cos\omega_0 t$$

$$\ddot{a}(t) = -2\omega_0\dot{A}(t)sin\omega_0 t - 2\omega_0\dot{B}(t)cos\omega_0 t - \omega_0^2 A(t)cos\omega_0 t - \omega_0^2 B(t)sin\omega_0 t$$

Подставим значения производных в первоначальное уравнение и получаем

$$\dot{A}(t) + \alpha A(t) = \frac{b(t)}{2\omega_0}$$

$$\dot{B}(t) + \alpha B(t) = \frac{a(t)}{2\omega_0}$$

Теперь проанализируем полученную систему уравнений. Было дифференциальное уравнение второго порядка и оно преобразовалось в систему уравнений первого порядка. При чем уравнения расцепляются между собой, то есть оказываются несвязанными.

Методом решения этого уравнения будет частотный коэффициент передачи.

$$A(t) = \int k(\Omega)\frac{b(\Omega)}{2\omega_0}e^{i\Omega t}d\Omega$$

$$K(\Omega) = \frac{1}{\alpha + i\Omega}$$

$$|K(\Omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

То есть частотный коэффициент передачи имеет лоренцевскую форму. Это полностью совпадает с тем, что получили, когда исходили из дифференциального уравнения второго порядка. Предполагали, что контур высокодобротный и производили замены, связанные с разностью квадратов частот. В таком подходе высокодобротность задана изначально. Ранее был общий случай.

$$\sigma_A^2 = < A^2(t) >= \int_{-\infty}^{+\infty} |K(\Omega)|^2 \frac{G_\xi^{(+)}(\omega_0)}{4L^2\omega_0^2}d\Omega$$

Коэффициент перед $d\Omega$ представляет собой наличие внешней силы в спектральном подходе. Для стационарного шума Фурье компоненты дельта-коррелированы. Коэффициент перед дельта-корреляцией – это и есть спектральная плотность. Поэтому

$$\sigma_A^2 = < A^2(t) >= \frac{G_\xi^{(+)}(\omega_0)}{4L^2\omega_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(\Omega)|^2 d\Omega$$

Для лоренцевского контура, если интеграл приведен к безразмерному виду в пределах от $-\infty$ до ∞ дает значение π. Поэтому

$$\sigma_A^2 = < A^2(t) >= \frac{G_\xi^{(+)}(\omega_0)}{4L^2\omega_0^2}\frac{\pi}{\alpha}$$

Точно такое же значение получается для дисперсии по квадратуре B. То есть система имеет одинаковые квадратурные компоненты, одинаковые частоты. Далее проводим рассчеты и получаем то же значение запасенной энергии:

$$< E >= \frac{\pi G_\xi(\omega_0)}{4R} = k_Б T$$

В итоге два подхода дали одинаковые частоты.

Воздействие шума на осциллятор с периодически меняющейся частотой. Формирование сжатого шума

Интересными свойствами обладает другая колебательная система под действием случайных сил. Математическая постановка задачи:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2[1 - 2msin2\omega_0 t]x(t) = \omega_0^2\xi(t)$$

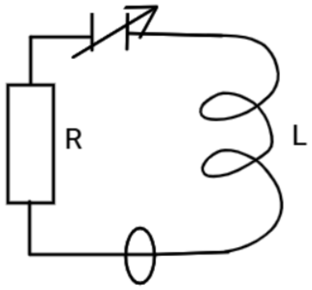

Рис. 7.1. Система, которую описывает параметрическое уравнение второго порядка

Это параметрическая система, которая является привязкой к конкретной системе (Рис. 7.1). При этом меняется емкость. На нее подается напряжение. Когда конденсатор работает в запертом режиме, у него может меняться емкость, а частота колебаний представляет собой

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2C_0}$$

А сама емкость меняется по закону

$$C = C_0[1 + msin2\omega_0 t]$$

Амплитуда этих колебаний мала. И если подставить значение частоты

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

и при этом емкость будет задаваться тем же законом, то

$$\omega_0^2 \approx \omega_0^2[1 - 2msin2\omega_0 t]$$

Вернемся к исходному уравнению под воздействием случайных сил. Воспользуемся тем подходом, который был изложен ранее, то есть временным подходом, чтобы решить это уравнение. Проведем анализ влияния шума в такой системе.

Представим $x(t)$ через квадратурные компоненты.

$$x(t) = A(t)cos\omega_0 t - B(t)sin\omega_0 t$$

$$\xi(t) = a(t)cos\omega_0 t - b(t)sin\omega_0 t$$

Воспользуемся уже выведенными первыми и вторыми производными и приравнивая коэффициенты при $m = 0$, которая характеризует глубину модуляции частоты. В итоге имеем колебательную систему с затуханием. Подставив соответствующие производные в уравнения и, приравняв при одинаковых гармонических функциях (синусе и косинусе), получаем систему уравнений:

$$\dot{A}(t)+\alpha(t)(1+\mu)=\frac{\omega_0}{2}b(t)$$

$$\dot{B}(t)+\alpha(t)(1-\mu)=-\frac{\omega_0}{2}a(t)$$

Появился новый параметр в коэффициентах поглощения. Его можно записать следующим образом:

$$\mu=\frac{1}{2}mQ$$

$$Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}$$

Этот коэффициент связан не только с глубиной модуляции частоты, но и с добротностью. Как видно, в первом уравнении потери добавляются из-за этой модуляции, а во втором – уменьшаются.

Частотный коэффициент передачи выглядит следующим образом:

$$K_\alpha(\Omega)=\frac{1}{\alpha(1+\mu)+i\Omega}$$

Дисперсия же этой квадратуры:

$$\sigma_A^2=<A^2(t)>=\int_{-\infty}^{+\infty}|K(\Omega)|^2(\frac{\omega_0}{2})^2G_\beta(\omega_0)d\Omega$$

$$\sigma_A^2=\frac{\pi\omega_0^2G_\beta(\omega_0)}{4\alpha(1+\mu)}=\frac{D}{1+\mu}$$

$$D=\frac{\pi\omega_0^2G_\beta(\omega_0)}{4\alpha}$$

При $\mu=0$ получаем известный результат:

$$\sigma_A^2=\frac{\pi\omega_0^2G_\beta(\omega_0)}{4\alpha}$$

Для дисперсии квадратур B можно сразу написать выражение

$$\sigma_A^2=\frac{\pi\omega_0^2G_\beta(\omega_0)}{4\alpha(1-\mu)}=\frac{D}{1-\mu}$$

Если опять обратиться к колебательной системе, то при снятии напряжения с резистора видим, что дисперсия одной квадратуры будет больше, чем обычная колебательная система, а другая меньше.

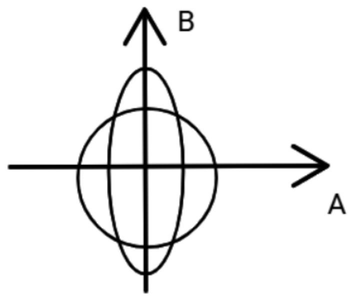

Рис. 7.2. Колебательная система в фазовой плоскости

В фазовой плоскости (Рис. 7.2), когда никаких колебаний не было, воздействующий шум имел одинаковую дисперсию. Это стационарный случайный процесс. Т.е. область существенной флуктуации дисперсии будет иметь вид круга.

В этой же колебательной системе при воздействии шума с одинаковой дисперсией квадратурных компонент у квадратуры A шум уменьшается, а у квадратуры B шум растет. В итоге получается область в виде эллипса.

Это наглядная картинка послужила определению такого состояния, как *сжатый шум*. Это понятие впервые возникло в квантовой оптике и сейчас переходит на другие диапазоны частот. Всюду, где дисперсия квадратуры оказывается неодинаковой, понятие носит название сжатого шума, сжатого состояния. В квантовой оптике интерес к этим состояниям вначале был вызван тем, что в одной квадратуре можем шум сделать меньше, чем считалось до каких-то пор стандартным квантовым пределом. Вакуумная флуктуация, с точки зрения классики, это стационарный шум. Если можем подавить уровень флуктуцации в одной из квадратурных компонент, то можем проводить измерения на этой квадратурной компоненте.

Стимулировали исследования в этом направлении эксперименты именно регистрация гравитационных волн. Желание подавить шум в большой системе и получить значение его ниже квантового значения является сейчас актуальным вопросом.

То, что выше, можно считать классическим аналогом квантового рассмотрения, которое проводится с наличием операторов, коммутационных соотношений и т.д. Это же классическое получение сжатого шума.

Сейчас особенно интенсивно в лазерной физике занимаются этим вопросом. Существует одна группа в Европе, которая сжала шум к уровню стандартного квантового предела, то есть подавила его на 95%. Вряд ли возможно дойти до значения, так как все время делаются приближения в расчетах. В мощных лазерных установках это осуществимо.

Рассмотрим колебания с точки зрения статистических характеристик. Ранее рассматривали стационарный шум, воздействующий на такую систему. Сама система нестационарная – у нее меняются параметры. В результате этого шум (колебания), который можем снять с резистора, будет периодически нестационарный.

Вспомним выражение для $x(t)$

$$\ddot{x}(t)+2\alpha\dot{x}(t)+\omega_0^2[1-2msin2\omega_0 t]x(t)=\omega_0^2\xi(t)$$

$$x(t)=A(t)cos\omega_0 t-B(t)sin\omega_0 t$$

$$<x^2(t)>=\sigma_A^2cos\omega_0 t-\sigma_B^2sin\omega_0 t=$$

Перекрестные слагаемые будут равны нулю. Это происходит от того, что квадратуры компонентов между собой не коррелированы.

В стационарном шуме дисперсии равны. Поскольку это нестационарный процесс, то приведем к любому виду, например:

$$=\frac{1}{2}(\sigma_A^2+\sigma_B^2)+\frac{1}{2}(\sigma_A^2-\sigma_B^2)cos2\omega_0 t$$

Если $\sigma_A=\sigma_B$, то имеем стационарный шум. Определение стационарности в широком смысле. Среднее будет равно нулю, а дисперсия не зависит от времени, корреляционная функция зависит от разности времен. Таким образом, процесс получается периодически нестационарный. Поэтому интересны и спектральные свойства такого процесса.

Спектральные компоненты для стационарного шума дельта-коррелированы. Поэтому и фазы тоже будут случайными величинами, не связанными между собой на любых рассматриваемых частотах. В этом случае спектральные компоненты колебаний имеют сопряженные фазы.

Рассматривали параметрическую систему изменения колебаний накачки, где они в два раза больше, чем колебания самой системы. Рассматривали радиодиапазон, оптический. Это, соответственно, два зеркала, нелинейный кристалл, выраженный режим параметрического взаимодействия. Для простоты будем считать, что квадратурная компонента A полностью подавлена, а значит ей можно принебречь. Тогда в записи остается только одна квадратура:

$$x(t)=-B(t)sin\omega_0 t$$

Эта система параметрически усиливается. Для одной квадратуры такая система окажется усилителем, а для другой – аттенюатор, то есть затухает. В результате, если в системе коэффициент μ близок к единице, то можно пренебречь второй квадратурой и рассматривать в рамках существования одной такой квадратурной компоненты.

Рассмотрим Фурье спектр этого колебания.

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}d\omega = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(t)[e^{i(\omega_0+\omega)t} - e^{-i(\omega_0-\omega)t}]dt$$

Рассмотрим только при $\omega > 0$

$$e^{i(\omega_0+\omega)t} \to 0$$

$$x(\omega) = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(t)e^{-i(\omega_0-\omega)t}dt$$

$$\omega - \omega_0 = \Omega$$

$$x(\omega) = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(t)e^{i\Omega t}dt$$

$B(t)$ – действительная величина. Тогда если возьмем сопряженную Фурье компоненту от $x(t)$, получим следующее выражение для действительной части:

$$x*(\Omega) = -x(-\Omega)$$

$$Rex(\Omega) = \frac{1}{2}(x(\Omega) + x*(\Omega)) = \frac{1}{2}(x(\Omega) - x(-\Omega))$$

Проделав ту же процедуру для $x(-\Omega)$, получим

$$Rex(-\Omega) = -Rex(\Omega)$$

Эти выражения соответствуют действительным частям. Для мнимых же:

$$Imx(-\Omega) = Imx(\Omega)$$

Таким образом, через нахождение мнимых и действительных частей можно записать значение от $x(\Omega)$, обладающее свойствами:

$$x(\Omega) = Rex(\Omega) + iImx(\Omega)$$

$$x(\Omega) = |x(\Omega)|e^{i\varphi(\Omega)}$$

Знаем, что

$$|x(\Omega)| = \sqrt{(Rex(\Omega))^2 + (Imx(\Omega))^2}$$

Сама же фаза

$$tg\varphi(\Omega) = \frac{Imx(\Omega)}{Rex(\Omega)}$$

Соответственно, таким же образом можно представить через действительную и мнимую часть модуль амплитуды, фазу, колебания, асимметрично расположенные относительно несущей частоты.

$$x(-\Omega) = |x(-\Omega)|e^{i\varphi(-\Omega)}$$

$$tg\varphi(-\Omega) = \frac{Imx(-\Omega)}{Rex(-\Omega)}$$

Определив соотношение между действительными и мнимыми частями, Ω заменяем на $-\Omega$:

$$tg\varphi(-\Omega) = -tg\varphi(\Omega)$$

Получается, что при изменении частоты фаза будет меняться. Изобразим спектр такого колебания (Рис. 7.4).

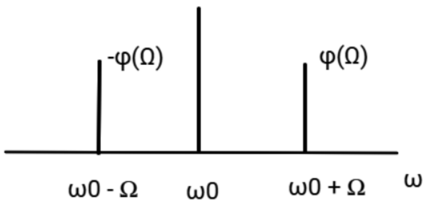

Рис. 7.3. Спектр колебания

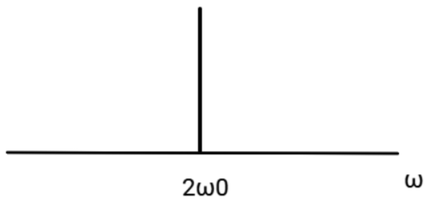

Рис. 7.4. Спектр колебаний после преобразования

Имеем несущую частоту и рассматриваем спектральные компоненты, отстоящие на величину Ω. Амплитуды у них одинаковые. В правой области фаза будет положительная, а в левой – отрицательная. Фазы будут сопряженные, определение фаз симметричное. При прохождении через ω_0 фаза будет менять знак на обратный. И это происходит только в периодическом нестационарном процессе. В стационарном же процессе фазы будут случайные. Тут они тоже случайные, но они расположены симметрично относительно несущей частоты и меняют фазу на обратную.

Рассмотрим последствия такого спектра. Если имеет место удвоение частоты, то есть нелинейного элемента (например, при детектировании в нелинейной оптике), то это нелинейный кристалл и происходит сложение частот.

Можно также рассматривать процесс формирования такой частоты. Просто происходит удвоение спектральной компоненты, с другой стороны начальный спектр конечный. Поэтому, помимо удвоения, происходит сложение частот. Таким образом, вклад в центральную частоту также дадут симметрично расположенные компоненты относительно нее.

$$2\omega_0 = (\omega_0 + \Omega) + (\omega_0 - \Omega)$$

Поскольку фазы сопряжены и отличаются только на π, то суммарная фаза этих колебаний будет нулевой. В результате сложения этих симметрично расположенных частот Фурье компоненты будут иметь нулевую фазу. Все эти Фурье компоненты, которые есть в начальном спектре, будут давать вклад с нулевой фазой. То есть интерференция или вклад в эти колебания будет на центральной частоте конструктивная, т.е. все они будут складываться.

В результате получаем центральный пик и частоты с фазами, сдвинутыми к основной. Спектр будет менее интенсивный. Вклад будет вносить деструктивная интерференция.

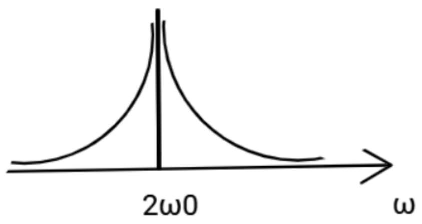

Рис. 7.5. Менее интенсивный спектр

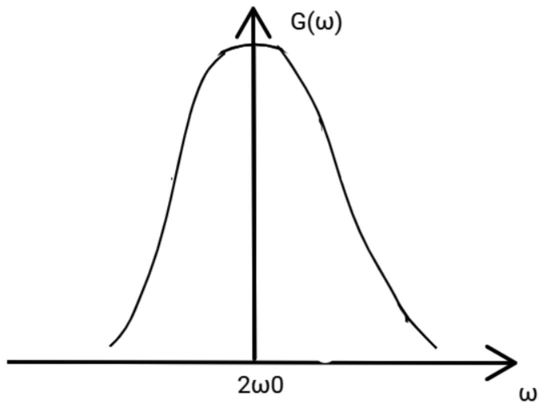

Рис. 7.6. Спектр для стационарного шума

Если же взять обычный стационарный шум, то он даст равномерное распределение. А если наблюдаем третью гармонику, то отличия от обычного шума не будет. На третьей гармонике (когда начинаем) фазы у всех будут разные, так как нужны три частоты. Но уже на четвертой гармонике будут все четные, и получится спектр нужного вида.

На распределенных линиях наблюдался эффект довольно четко. Поэтому такую особенность в спектре можно использовать в экспериментах.

Дополнительные замечания о СДУ (стохастических дифференциальных уравнениях)

Рассмотрение ограничивалось стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = \xi(t)$$

Решение стохастического уравнения второго порядка:

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega^{0x(t)=\xi(t)}$$

Кроме того, в уравнении Винера при наличии затухания диффузии частиц рассмотрены флуктуации следующего типа. Пусть $\xi(t)$ – белый шум. К нему относится более общий случай – уравнение Ланжевена со случайной силой.

Другой случай – когда $\xi(t)$ заменили на $\eta(t)$, что соответствует случайному телеграфному процессу. Для него была выведена формула дифференцирования.

Причем, как при наличии белого шума, так и при наличии формулы дифференцирования показано, как можно получать из динамических стохастических уравнений функции распределения плотности вероятности.

Также важным классом процессов является *пуассоновский белый шум.* В этом случае сила будет дельта-коррелирована.

$$\xi(t) = \sum_j A_j \delta(t - t_j)$$

Если ограничиваться рассчетом средних значений интенсивностей, можем решать линейные уравнения. В итоге находить среднее значение, дисперсию и другие характеристики. Если же нужно определять функции распределения плотности вероятности, то нужно пользоваться методом теории марковских процессов и получать соответствующие выражения.

Пуассоновский белый шум может быть сведен к функции распределения плотности вероятности, которая определяется уравнением Колмогорова-Феллера. Как правило, именно этот источник флуктуации присутствует в твердом теле. Ранее рассматривали дробовой шум, а именно вылет фотоэлектрона, эмиссия электрона – это дельта-процесс. Он случайный и определяется дельта-функцией, характерной для вылета заряда. В результате инерционности системы для каждого дельта-импульса образуется соответствующий импульс на аноде, а уже их перекрытие приводит к белому шуму. Все зависит и от того, какие характерные времена установления колебаний и время отклика соответствуют данной системе.

В уравнении Колмогорова-Феллера справа – непрерывный белый шум, телеграфный пуассоновский процесс. Поэтому его широко используют в экспериментальной физике.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ