МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

НИКОНОВ
ИГОРЬ МИХАЙЛОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ТАГИРОВУ ДЖАННЕТ ДЖАБРАИЛОВНУ

Содержание

1. Лекция 1 **5**
Введение . . . 5
Модель Вальраса . . . 6
Описание равновесия в модели Вальраса . . . 7
Теория неподвижных точек . . . 9
Теорема Брауэра . . . 10

2. Лекция 2 **12**
Неподвижные точки многозначных отображений. Непрерывность многозначного отображения . . . 12
Теорема Какутани . . . 13
Линейная комбинация полунепрерывных сверху отображений . . . 14
Лемма Гейла . . . 15

3. Лекция 3 **16**
Модель Эрроу-Дебре . . . 16
Состояние равновесия . . . 17
Теорема о существовании равновесия в модели Эрроу-Дебре . . . 17

4. Лекция 4 **21**
Оптимальность по Парето. Формализация . . . 21
Конкурентное равновесие модели Эрроу-Дебре . . . 21
Оптимальность равновесия модели Эрроу-Дебре по Парето . . . 22
Пример оптимизации равновесия по Парето . . . 23
Теорема о дополнении до состояния равновесия оптимальной по Парето системы . . . 24
Модель Вальраса гарантированного дохода . . . 25

5. Лекция 5 **27**
Модель Вальраса гарантированного дохода . . . 27
Теорема о существовании равновесия в модели с гарантированными доходами . . . 27
Модель Вальда-Касселя . . . 30
Теорема о существовании равновесия в модели Вальда-Касселя. Начало . 31

6. Лекция 6 **33**
Модель Вальда-Касселя. Напоминание . . . 33
Теорема о существовании равновесия в модели Вальда-Касселя . . . 33
Пример . . . 37

7. Лекция 7 **38**
Теория Игр . . . 38
Оптимальность по Парето и по Нэшу . . . 38
Матричные игры . . . 39
Смешанное расширение матричной игры . . . 40
Теорема Нэша . . . 40
Примеры приложений теоремы Нэша . . . 42

8. Лекция 8 **43**
Модель монополиста. Описание . . . 43
Критерий экстремальности траекторий Эйлера-Лагранжа . . . 44
Пример 1 . . . 45
Автономный случай . . . 45
Примеры . . . 45
Производственные функции . . . 46
Свойства производственных функций . . . 47
Двухфакторная модель . . . 47
Класс некласических производственных функций . . . 48
CES-функции . . . 48
Модели технического прогресса . . . 49
Прогресс нейтральный по Хиксу . . . 50
Прогресс нейтральный по Хараду и Солу . . . 50

9. Лекция 9 **51**
Моделирование процессов распределения капиталовложений . . . 51
Принцип максимума Понтрягина. Описание . . . 52
Теорема. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства) . . . 53
Стационарные решения в модели Рамсея . . . 53
Общий случай: k(t), s(t) не постоянны . . . 54

10. Лекция 10 **56**
Модели со случайными и неопределенными факторами . . . 56
Имитационные модели . . . 57
Модель Нейлора . . . 57
6 типов устойчивости . . . 58
Неоклассическая модель роста Солоу . . . 59

1. Лекция 1

Введение

Рассмотрим общую модель экономики с производством и частной собственностью, берущую своё начало от Вальраса, и получившую развитие в более поздних исследованиях.

Экономическая структура общества предполагается состоящей из двух секторов: производственного сектора и сектора потребления. **Сектор потребления** можно представлять себе как совокупность всех индивидуумов, составляющих общество, а также учреждений, не учавствующих непосредственно в производстве. **Производственный сектор** состоит из отдельных отраслей, выступающих в качестве производителей. Один и тот же объект может фигурировать и как производитель, и как потребитель.

Товары также имеют двоякий характер. Одна группа товаров, которые мы будем называть **продуктами производства**, характеризуется тем, что каждый из них может быть произведен в производственном секторе: металл, машины, электроэнергия и т.д. Другая группа товаров, называемая **первичными факторами**, состоит из таких товаров, которые производственным сектором не выпускаются: труд, земля и т.п.

Первичные факторы являются собственностью потребителей, которые их продают с целью приобретения продуктов производства.

Потребитель, находясь в рамках бюджетных ограничений, старается получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента товаров.

Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных продуктов и затрат на приобретение первичных факторов и других продуктов на осуществление производства. Описанная структура схематично представлена на рис. 1.

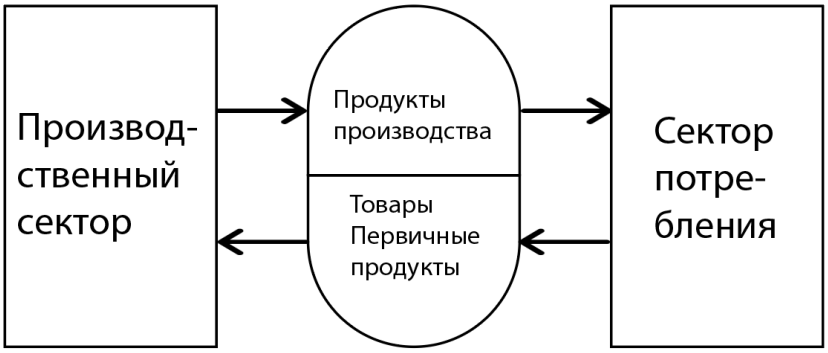

Рис. 1.

Итак, мы предполагаем, что каждый из участников экономики максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях, причем и целевая функция, и ограничения зависят от цен на товары и первичные факторы в нашей системе. Более того, предполагается, что каждый участник экономики пассивно приемлет существующую систему цен, не пытаясь на нее влиять (что, вообще говоря, не выполняется при наличии, например, монополий).

Цены на продукты и первичные факторы называются **равновесными**, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый продукт и фактор не превосходит его предложения.

Основной вопрос в общей модели экономики - существуют ли равновесные цены? - ждал своего решения более полувека, и ответ на него был получен лишь в последние 40 лет. Ниже мы изложим на формальном языке модель Вальраса и рассмотрим две ее разновидности при различных ограничениях на составные компоненты модели. Первая из них, предложенная Касселем, близка к модели, рассмотренной Вальдом. Вторая, наиболее известная в настоящее время, - это модель Эрроу-Дебре. Для них мы докажем существование равновесия.

Модель Вальраса

Для описания экономической деятельности участников экономики определяется пространство товаров $\mathbb{R}^n = (x_1, ..., x_n)|x_i \geqslant 0$, в котором по i-ой оси откладывается количество i-ого из имеющихся товаров (предполагается, что для каждого товара выбрана некоторая единица измерения его количества). Элементы пространства товаров называются **потребительскими наборами**.

Далее, для каждого потребителя мы рассматриваем множество $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$ всех потребительских наборов, доступных данному потребителю и пригодных для него. Это множество X_i мы называем **множеством потребления** или **потребительским множеством**. На потребительском множестве мы определяем **функцию полезности**, выражающую предпочтение потребителя одного потребительского набора перед другим: чем больше значение функции полезности, тем выше предпочтение потребителя данного потребительского набора. Кроме того, у каждого потребителя предполагается некоторый доход, выражающийся в наличии у потребителя капитала $K_i(p)$, зависящего, вообще говоря, от сложившейся системы цен. Мы будем предполагать, что **функция дохода** складывается из двух компонент: от продажи потребителем начального запаса товаров b_i, стоимость которого равна $p \cdot b$ (при ценах p), и некоторого дохода $I_i(p)$, возникающего, скажем, в результате участия потребителя в доходах производственного сектора. Таким образом, имеем: $K_i(p) = p \cdot b_i + I(p)$

По потребительскому множеству $X \subset \mathbb{R}^n_+$, функции полезности $u_i(x)$ и функции дохода $K(p)$ строится многозначное отображение, называемое **функцией спроса** $\Phi(p)$, следующим образом. Обозначим через $B_i(p)$ бюджетное множество $\{x \in X_i | px \leqslant K_i(p)\}$, т.е. множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p. Тогда

$$\Phi_i(p) = \{x \in B_i(p) | u_i(x) = \max_{x' \in B_i(p)} u_i(x')\}$$

Иными словами, $\Phi(p)$ это подмножество потребительского множества X, состоящее из всех товарных наборов, которые наиболее подходят потребителю при заданных бюджетных ограничениях.

Итак, будем считать, что в нашей модели имеется l потребителей, причем i-ый потребитель характеризуется:

- своим потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$;

- функцией дохода $K_i(p) = p \cdot b_i + I_i(p)$, зависящей от системы цен $p \in \mathbb{R}^n$ на имеющиеся товары и складывающейся из доходов от продажи начального запаса товаров b_i , и дохода $I_i(p)$ от участия в доходах производственного сектора;

- функцией полезности $u_i(p) : X \to \mathbb{R}$

Рассмотрим теперь структуру производства. Прежде всего, каждое производство характеризуется своим **технологическим множеством** $Y_i \subset \mathbb{R}^n$, т.е. множеством тех товаров, которые оно может произвести, за вычетом потребляемых при этом товаров (множеством производственных планов). Далее, построим по множеству Y многозначное отображение, называемое **функцией предложения** $\Psi(p)$, из пространства цен в пространство товаров:

$$\Psi_i(p) = \{y \in Y | p \cdot y = \max_{y' \in Y} p \cdot y'\}$$

Описание равновесия в модели Вальраса

Определение 1.1. *Равновесие - это набор (p^*, x_i^*, y_j^*), где $p^* \in \mathbb{R}^n_+$ - положительный вектор равновесных цен, $x_i^* \in X_i$ - потребительский набор i-го потребителя, $y_j^* \in Y_j$ - некоторый технологический вектор j-го производителя, с условиями:*

1) $x_i^* \in \Phi_i(p^*)$

2) $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$ *- спрос не превышает предложение*

4) $\langle p^*, \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \rangle = \langle p^*, \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i \rangle$ *- закон Вальраса*

Если посмотреть на определение функции предложения $\Psi_i(p) = \{y \in Y | p \cdot y = \max\limits_{y' \in Y} p \cdot y'\}$, то можно заметить, что эта функция линейна и одинакова для всех производителей.

Рассмотрим $Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$ - совокупное технологическое множество. Элементом такого множества является $y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j,\ y_j \in Y_j$. Тогда, если заменить всех производителей на одного, то модель не поменяется.

Обозначим $\Psi_0(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Psi_j(p)$ - совокупное предложение производственного сектора.
И $\Psi_0'(p) = \{y \in Y | py = \max\limits_{y' \in Y} py'\}$

Утверждение.
$\Psi_0(p) = \Psi_0'(p)$

Доказательство.

1) Покажем, что $\Psi_0(p) \subset \Psi_0'(p)$
   Рассмотрим $y \in \Psi_0(p)$. Тогда $y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j,\ y_j \in \Psi_j(p)$. Значит $\forall y_j' \in Y_j\ \ py_j \geqslant py_j'$
   Пусть $y' \in Y$ - элемент совокупного технологического множества. Тогда $y' = \sum\limits_{i=1}^{m} y_j',\ y_j' \in Y_j$. Следовательно $\forall j\ \ py_j \geqslant py_j'$. Возьмем сумму этих неравенст и получим, что $py \geqslant py'$, Таким образом, $y \in \Psi_0'(p)$

2) Пусть $y \in \Psi_0'(p)$, тогда $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_j,\ y_j \in Y_j$. Предположим, что $\exists j_0 :\ y_{j_0} \notin \Psi_{j_0}(p)$. Тогда $\exists y_{j_0}' \in Y_{j_0} :\ py_{j_0}' > py_{j_0}$.
   Рассмотрим вектор $y' = \sum\limits_{i=1}^{m} y_j'$, где $y_j' = \begin{cases} \text{y}_j,\ j \neq j_0 \\ \text{y}_{j_0}',\ j = j_0 \end{cases}$
   Тогда $y' \in Y$ и $py' = \sum\limits_{i=1}^{m} py_j' > \sum\limits_{i=1}^{m} py_j = py$. Отсюда следует, что $y \notin \Psi_0'(p)$ - противоречие. Таким образом, $\forall j\ y_j \in \Psi_j(p)$ и $y \in \Psi_0(p)$. Это означает, что $\Psi_0'(p) \subset \Psi_0(p)$

■

Введем обозначения:
$\Psi(p) = \Psi_0(p) + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$ - совокупная функция предложения
$\Phi(p) = \sum\limits_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ - функция совокупного спроса.
Тогда, в данных обозначениях, можем записать условие равновесия в следующем виде:

Определение 1.2. *Равновесие в модели Вальраса - это тройка* $(p^*, x^*, y*)$, *где* $p^* \in \mathbb{R}_+^n$, $x^*, y^* \in \mathbb{R}_+^n$, *такие, что:*

1) $x_i^* \in \Phi(p^*)$

2) $y_j^* \in \Psi(p^*)$

3) $x^* \leqslant y^*$

4) $p^*x^* = p^*y^*$

Модель Вальраса задавалась функцией каптиала для потребителя $K_i(p) = pb_i + I_i(p)$.

Утверждение.
Пусть $\sum\limits_{i=1}^{l} I_i(p) = py$, где $y_0 \in \Psi_0(p)$. Тогда $\forall x \in \Phi(p), y \in \Psi(p) : \ px \leqslant py$ (закон Вальраса в широком смысле)

Доказательство. Если $x \in \Phi(p) \Rightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{l} x_i, \ x_i \in \Phi_i(p) \Rightarrow x_i \in B_i(p)$, т.е. $px_i \leqslant K_i(p) \Rightarrow px = \sum\limits_{i=1}^{l} px_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} K_i(p) = \sum\limits_{i=1}^{l} pb_i + \sum\limits_{i=1}^{l} I_i(p) = \sum\limits_{i=1}^{l} pb_i + py_0 = py$. Т.е. совокупное предложение включает в себя первоначальный запас и предложение производственного сектора. ■

Теория неподвижных точек

Пусть X - множество, $f : X \to X$ - отображение. Тогда $x \in X$ называется неподвижной точкой f, если $f(x) = x$.
Если X - линейное пространство и $f : X \to X$, тогда ему можно сопоставить $g : X \to X$, заданное формулой $g(x) = f(x) - x$. Тогда $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$
Рассмотрим ситуации, когда неподвижные точки существуют:

Неподвжиные точки сжимающих отображений.
$(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ - метрические пространства.

Определение 1.3. *Отображение $f : X \to Y$ называется сжимающим, если $\exists\ 0 < q < 1 : \ \forall x_1, x_2 \in X : \ \rho_y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q\rho_x(x_1, x_2)$ - расстояние между образами меньше расстояния между прообразами*

Утверждение. Если отображение сжимающее, то оно непрерывно.

Доказательство.
$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta (= \varepsilon) > 0 : \ \forall x' \in U_\delta(x) = \{x' \in X | \rho_x(x', x) < \delta\} \quad f(x') \in U_\varepsilon(f(x)) : \rho_y(f(x'), f(x)) < \rho_x(x', x) < \delta = \varepsilon$ ■

Теорема 1.1. *Пусть $f : (X, \rho_x)$ - сжимающее отображение. Тогда*

1) *у f есть не менее одной неподвижной точки*

2) *если X - полное метрическое пространство, то у f есть неподвжижная точка $x^* \in X$, причем $\forall x \in X : \ x^n = \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$, где $f^n(x)$ - результат n-кратного применения отображения f.*

Доказательство.

1) Пусть $x, y \in X$ - неподвижные точки. Тогда $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x, y)$. $q < 1 \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) Пусть $x \in X$. Обозначим $x_n = f^n(x), \ n \geqslant 0$. Покажем, что $\{x_n\}$ - фундаментальная.
$\forall n \ \rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n, f(x_{n-1}))) \leqslant q\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant ... \leqslant q^n\rho(f(x), x)$.
Тогда рассмотрим $\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + ... + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant (q^n + q^{n+1} + ... + q^{n+p-1})\rho(x, f(x)) = q^n \dfrac{1-q^p}{1-q}\rho(x, f(x)) \leqslant q^n \dfrac{\rho(x, f(x))}{1-q}$
Т.к. $q^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geqslant N \ \forall p \geqslant 1 \ \ \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$
Т.к. X- полное, то x_n сходится, т.е.
$\exists x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ \ f(x^n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$

■

Пример.
Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ - непрерывная функция. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n, \ f_0 \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим множество $X = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], U_\varepsilon(x_0))$.
Рассмотрим отображение (оператор Пекара) $Ax(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x(t), \tau)d\tau$.
Тогда при подходящем выборе δ и ε A -сжимающий оператор. $\Rightarrow \exists$ неподвижная точка $x^*(t) : \ Ax^*(t) = x^*(t)$.
Значит $x^*(t_0) = x_0$ и $\dfrac{dx^*(t)}{dt} = f(x^*(t), t)$

Теорема Брауэра

Пусть $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leqslant 1\}$ - n-мерный диск.

Теорема 1.2. *Пусть $f : D^n \to D^n$ - непрерывно. Тогда $\exists x \in D^n : \ f(x) = x$.*

Доказательство.
При $n = 1$ диск - отрезок $[-1, 1]$. Рассмотрим $g(x) = f(x) - x = 0$. $g(-1) = f(-1) + 1 \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \exists x^* : g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^*$

$n > 1$. Пусть $f : D^n \to D^n$ - непрерывно и без неподвижных точек. Построим отображение $g : D^n \to S^{n-1}$ из диска на границу диска. Это отображение непрерывно и $\forall x \in S^{n-1}$ $g(x) = x$. $g(x)$ называется ретракцией диска на сферу.
Построим семейство отображений $h_t : S^{n-1} \to S^{n-1}$ $h_t(x) = g(tx)$. Это семейство отображений - гомотопия. Степень отображения $deg(h) \in \mathbb{Z}$ (алгебраическое число прообразов). Эта степень не меняется при гомотопии. Следовательно, $deg(h_0) = \underset{id}{deg(h_1)} = 1$. h_0 - отображение центра диска. Значит $deg(h_0) = 0 \Rightarrow 0 = 1$ - противоречие. ■

Пусть K - выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3. *Пусть $f : K \to K$ - непрерывно. Тогда $\exists x^* \in K :\ f(x^*) = x^*$*

Доказательство.
Пусть L - аффинная оболочка K. $L \simeq \mathbb{R}^m,\ m \leqslant n$. Тогда перейдя от $\mathbb{R}^n$ к L можем считать, что K имеет непустую внутренность.
Тогда $\exists$ гомеоморфизм $g : K \to D^m$. тогда можно построить непрерывное отображение $\tilde{f} = g \circ f \circ g^{-1}$ из D^m в D^m. Тогда $\exists y \in D^m :\ \tilde{f}(y) = y$. Положим $x^* = g^{-1}(y) \in K$. Тогда $f(x^*) = x^*$. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2. Лекция 2

Неподвижные точки многозначных отображений. Непрерывность многозначного отображения

Определение 2.1. *Пусть X, Y - множества. 2^Y - множество всех подмножеств в множестве Y. Многозначное отображение из X в Y - это отображение $F : X \to 2^Y$. Будем обозначать это отображение $F : X \Rightarrow Y$.*

Обозначим область определения F: $D(F) = \{x \in X | F(x) \neq \varnothing\}$ и область значений F: $I(F) = \{y \in Y | \exists x \in X : y \in F(x)\} = \cup_{x \in X} F(x)$

Определение 2.2. *Пусть $F : X \Rightarrow X$ - многозначное отображение. Тогда x^* называется неподвжиной точкой F, если $x^* \in F(x^*)$*

Пусть (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) - метрические пространства и $F : X \Rightarrow Y$ - многозначное отображение.

Определение 2.3. *Многозначное отображение F полунепрерывно сверху в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : \ \rho(x, x_0) < \delta \quad F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$*

Определение 2.4. *Многозначное отображение F полунепрерывно снизу, в точке $x_0 \in X$, если $\forall \{x_n\} \in X : \ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \ \ \forall y_0 \in F(x_0)\ \exists \{y_n\} : \ y_n \in F(x_n)$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y_0$*

Определение 2.5. *Многозначное отображение F непрерывно, если оно полунепрерывно сверху и снизу.*

Пример.

$X, Y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $F : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое условием $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{x}\neq 0 \\ [\text{-1,1}], & \text{x=0} \end{cases}$

и $G : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое условием $G(x) = \begin{cases} 0, & \text{x= 0} \\ [\text{-1,1}], & \text{x}\neq 0 \end{cases}$

Рассмотрим отображение F. Оно полунепрерывно сверху в любой точке. Полунепрерывность снизу нарушается в точке $x_0 = 0$ ($x_n = \frac{1}{n}, y_n = 1$). В остальных точках F полунепрерывно снизу. Отображение G полунепрерывно снизу в точке $x_0 = 0$, но не полунепрерывно сверху.

Теорема Какутани

Теорема 2.1. *Пусть X - непрерывный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Пусть $F : X \Rightarrow X$ - многозначное отображение, такое что*

1) *F - полунепрерывно сверху.*

2) *$\forall x \in X \quad F(x)$ - непустое выпуклое замкнутое множество.*

Тогда $\exists x^* \in X : \quad x^* \in F(x^*)$

Доказательство.
Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим покрытия $\{U_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$. X - компактно $\Rightarrow x_1^\varepsilon, ..., x_{N_\varepsilon}^\varepsilon \in X_i$: $X \subset \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} U_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$. Рассмотрим функции $\varphi_i^\varepsilon : \ X \to \mathbb{R}, \ \varphi_i^\varepsilon = max(\varepsilon - \|x - x_i^\varepsilon\|, 0)$
Тогда

1) φ_i^ε - непрерывно

2) $\varphi_i^\varepsilon(x) \geqslant 0$ и $\varphi_i^\varepsilon(x) > 0 \Leftrightarrow x \in U_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$

3) $\forall x \in X \ \varphi^\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x) > 0$

Положим $\alpha_i^\varepsilon(x) = \dfrac{\varphi_i^\varepsilon(x)}{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x)}$.
Тогда:

1) α_i^ε - непрерывная, неотрицательная

2) $\alpha_i^\varepsilon(x) > 0 \Leftrightarrow x \in U_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x) = 1 \ \forall x \in X$

Определим функцию $f^\varepsilon : X \to X$ формулой $f^\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i^\varepsilon(x) y_i^\varepsilon$, где $y_i^\varepsilon \in F(x_i^\varepsilon)$ - фиксированное значение.
Тогда:

1) f^ε - непрерывно

2) $\forall x \in X \quad f^\varepsilon(x) \in span(y_i^\varepsilon) \subset X$, т.к. X - выпукло

Заметим, что $f^\varepsilon(x) \in span\{y_i^\varepsilon |\ \ \|x - x_i^\varepsilon\| < \varepsilon\}$
Таким образом, $f^\varepsilon : X \to X$ - непрерывная функция. По теореме Брауэра у такой функции есть неподвижная точка x^ε.
Рассмотрим последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Тогда, определены f^{ε_n} и x^{ε_n} - неподвжиная точка f^{ε_n}. X - компактно $\Rightarrow$ в x^{ε_n} есть сходящаяся подпоследовательность. Перейдем к этой подпоследовательности и будем считать, что $x_n = x^{\varepsilon_n}$ сходится к $x^* \in X$.
Покажем, что $x^* \in F(x^*)$. Предположим обратное. $(*)$
Тогда, т.к. $F(x^*)$ - замкнуто, то $\exists r > 0 :\ \ \forall x \in F(X^*)\ \ \|x - x^*\| \geqslant r$. Тогда $U_{\frac{r}{2}}(x^*) \cap U_{\frac{r}{2}}(F(x^*)) = \varnothing$. Заметим, что $F(x^*)$ - выпуклое множество, а значит $U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$ - выпуклая.
F - полунепрерывно сверху в $x^* \Rightarrow \exists \delta > 0 :\ \ \forall x :\ \|x - x^*\| < \delta\ \ F(x) \subset U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$
$\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \exists N_1 :\ \ \forall n > N_1 :\ \varepsilon < \dfrac{\delta}{2}$
$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x^* \Rightarrow \exists N_2 :\ \ \forall n > N_2 :\ \|x_n - x^*\| < min(\frac{r}{2}, \frac{\delta}{2})$
Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Рассмотрим x_N. Тогда $\|x_N - x^*\| < \frac{r}{2}$, т.е. $x_N \in U_{\frac{r}{2}}(x^*)$
С другой стороны, $x_N = f^{\varepsilon_N}(x_N) = \sum\limits_i \alpha_i^{\varepsilon_N}(x_N) y_i^{\varepsilon_N} \in span\{y_i^{\varepsilon_N} |\ \|x_N - x_i^{\varepsilon_N}\| < \varepsilon_N\ \}$
Пусть $\|x_N - x_i^{\varepsilon_N}\| < \varepsilon_N < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда $\|x_N - x_i^{\varepsilon_N}\| < \dfrac{\delta}{2}$ и $\|x_N - x_*\| < \dfrac{\delta}{2} \Rightarrow \|x_i^{\varepsilon_N} - x^*\| < \delta$.
Значит, $F(x_i^{\varepsilon_N})_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$. В частности, $y_i^{\varepsilon_N} \in U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$.
Таким образом $x_N \in span(U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))) = U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$, т.к. $U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$ - выпукло.
Получаем, что $x_N \in U_{\frac{r}{2}}(x^*) \cap U_{\frac{r}{2}}(F(x^*))$ - противоречие $(*)$. ■

Линейная комбинация полунепрерывных сверху отображений

Утверждение.
Пусть $F : X \Rightarrow \mathbb{R}^n$ и $G : X \Rightarrow \mathbb{R}^n$ - полунепрерывны сверху.
Определим $(F + G) : X \Rightarrow \mathbb{R}^n$ как $(F + G)(x) = F(x) + G(x) = \{y_1 + y_2 \in \mathbb{R}^n |\ y_1 \in F(x),\ y_2 \in G(x)\}$. Также определим $\alpha F : X \Rightarrow \mathbb{R}^n\ \ (\alpha F)(x) = \alpha F(x) = \{\alpha y |\ y \in F(x)\}$.
Тогда $F + G$ и αF - полунепрерывны сверху.

Доказательство.
1) F и G полунепрерывны сверху, следовательно, $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta_1 > 0 :\ \forall x' :\ \rho(x, x') < \delta_1\ \ F(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x))$
$\exists \delta_2 > 0 :\ \forall x' :\ \rho(x, x') < \delta_2\ \ G(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(G(x))$
Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x' :\ \rho(x', x) < \delta$.
Отсюда следует, что:

$$(F+G)(x') = F(x') + G(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x)) + U_{\frac{\varepsilon}{2}}(G(x)) = F(x) + U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) + G(x) + U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) =$$

$$= F(x) + G(x) + U_\varepsilon(0) = U_\varepsilon(F(x) + G(x)) = U_\varepsilon((F + G)(x))$$

2) Если $\alpha = 0$, то $\alpha F \equiv 0$ - постоянное отображение. Оно полунепрерывно сверху.
Пусть $\alpha \neq 0$. Выберем $\varepsilon > 0$.
Т.к. F - полунепрерывно сверху $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \ \forall x' : \ \rho(x, x') < \delta \ \ F(x') \subset U_{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}}(F(x))$
Тогда $(\alpha F)(x') = \alpha F(x') \subset \alpha U_{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}}(F(x)) = \alpha(F(x) + U_{\frac{\varepsilon}{|\alpha|}}(0)) = \alpha F(x) + U_{|\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|}}(0) = U_\varepsilon(\alpha F(x))$ ■

Лемма Гейла

Теорема 2.2. *(Гейл)*
Пусть $\Delta^{n-1} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | \ \forall i : \ \ x_i \geqslant 0 \ и \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ *- стандартный* $n-1$*-мерный симплекс и* $X \in \mathbb{R}^n$ *- выпуклый компакт. Пусть* $\varphi : \Delta^{n-1} \Rightarrow X$ *- многозначное отображение, такое что:*

1) φ *- полунепрерывно сверху*

2) $\forall x \in \Delta \ \varphi(x)$ *- непустое замкнутое множество*

3) $\forall x \in \Delta$, $\forall u \in \varphi(x)$*:* $ux \geqslant 0$

Тогда $\exists x^* \in \Delta$, $\exists u^* \in \varphi(x^*) : \ u^* \geqslant 0$

Доказательство.
Построим отображение $\nu : X \Rightarrow \Delta$ по формуле $\nu(u) = \{x \in \Delta | \ xu = \min\limits_{x' \in \Delta} x'u\}$.
Тогда:

1) ν - полунепрерывно сверху

2) $\forall u : \ \nu(u)$ - непустое выпуклое замкнутое множество

Рассмотрим отображение $\nu \times \varphi : \ \Delta \times X \Rightarrow \Delta \times X$, где $(\nu \times \varphi)(x, u) = \nu(u) \times \varphi(x)$.
Тогда:

1) $\nu \times \varphi$ - полунепрерывно сверху

2) $\nu \times \varphi(u, x)$ - выпуклое замкнутое множество

Кроме того, $\Delta \times X$ - выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда по теореме Какутани $\exists (x^*, u^*) \in (\nu, \varphi)(x^*, u^*)$. Т.е. $x^* \in \nu(u^*)$, а $u^* \in \varphi(x^*)$.
Тогда, $\forall x' \in \Delta : \ \ x'u^* \geqslant x^*u^* \geqslant 0$. Таким образом $u^* \geqslant 0$ ■

3. Лекция 3

Модель Эрроу-Дебре

Модель Эрроу-Дебре - частный случай модели Вальраса. Мы имеем пространство товаров, цены на которые задает вектор цен $p \in \mathbb{R}^n$.

Описание потребительского сектора

В потребительском секторе l потребителей, каждый из которых задается набором параметров:
$X_i \subset \mathbb{R}^n_+$ - потребительское множество:

1) X - замкнуто, выпукло и неограничено.

2) $\forall x_k \subset X_i : \ \exists j_0 : \ (x_k)_{j_0} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ выполнено $\forall j : \ (x_k)_j \underset{k\to\infty}{\to} \infty$

$u_i : X_i \to \mathbb{R}$ - функция полезности:

1) u_i - непрерывна

2) u_i - вогнута, т.е. $\forall x, y \in X_i \ \forall \lambda \in [0,1] \ \ u_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda u_i(x) + (1-\lambda)u_i(y)$

3) u_i - ненасыщаемя, т.е. $\forall x \in X_i \ \exists y \in X_i : \ u_i(y) > u_i(x)$

$b_i \in \mathbb{R}^n_+$ - начальный запас потребителя

1) $\exists x \in X_i : \ x << b_i$

$K_i(p) = pb_i + I_i(p)$ - функция капитала, где $I_i(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j(p)$, $\pi_j(p)$ - доход j-го производителя, $\alpha_{ij} = const$.

Описание производственного сектора

В производственном секторе m производителей. j-й производитель характеризуется:
Технологическим множеством $Y - j \subset \mathbb{R}^m$

1) Y_j - компактно и $0 \in Y_j$

2) $Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$ - выпукло

$\pi_j(p) = max\{py| \ y \in Y_j\}$ - доход производителя.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Состояние равновесия

Для i-го потребителя: $B_i(p) = \{x \in X_j |\ px \leqslant K_i(p)\}$ - бюджетное множество.
$\Phi_i(p) = \{x \in B_i(p) |\ u_i(x) = \max\limits_{x' \in B_i(p)} u_i(x')\}$ - функция спроса.
Для j-го производителя: $\Psi_j(p) = \{y \in Y_j |\ py = \max\limits_{y' \in Y_j} py'\}$ - функция предложения.

Состояние равновесия - набор (p^*, x_i^*, y_j^*), $i = 1, .., l \quad j = 1, .., m$, $p^* \in \mathbb{R}_+^n$, $x_i^* \in X_i$, $y_j^* \in Y_j$

1) $x_i^* \in \Phi_i(p^*)$

2) $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$

4) $\langle p^*, \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \rangle = \langle p^*, \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i \rangle$

Теорема о существовании равновесия в модели Эрроу-Дебре

Теорема 3.1. *В модели Эрроу-Дебре существует равновесие.*

Доказательство.
Рассмотрим функцию избыточного предложения $\varphi(p) = \sum\limits_j \Psi_j(p) + \sum\limits_i b_i - \sum\limits_i \Phi_i(p)$.
Необходимо показать, что $p^*:\ \exists u \in \varphi(p^*),\ u \geqslant 0$.
Из линейности по ценам функции капитала следует, что при умножении цен на скаляр, бюджетное множество и спрос не меняются. Аналогично для функции предложения. Поэтому, можем считать, что $p \in \Delta^{n-1} = \{(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n |\ p_i \geqslant 0\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\}$

Лемма.
$\exists$ компакт $\tilde{K}_i \subset \mathbb{R}_+^n$, такой что $\forall P \in \Delta\ B_i(p) \subset \tilde{K}_i$
Доказательство.
Рассмотрим функцию $K_i : \Delta \to \mathbb{R}$. Она непрерывная, Δ - компакт $\Rightarrow \exists \bar{K}_i = \max\limits_{p \in \Delta} K_i(p)$.
Определим $\bar{B}_i(p) = \{x \in X_i |\ px \leqslant \bar{K}_i\}$. Тогда $B_i(p) \subset \bar{B}_i(p)$.
Рассмотрим $B_i = \cup_{p \in \Delta} \bar{B}_i(p)$. Покажем, что B_i - ограничено.
Пусть B_i - неограничено. Тогда $\exists x_k \in B_i :\ \|x_k\| \underset{k \to \infty}{\to} \infty$. $x_k \in B_i \Rightarrow x_k \in \bar{B}_i(p_k)$ для

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

некоторого $p_k \in \Delta$.
Δ - компакт $\Rightarrow \exists$ подпоследовательность $k_l: \ p_{k_l} \underset{l\to\infty}{\to} p \in \Delta$.
$\|x_k\| \to 0 \Rightarrow \exists$ подпоследовательность $k_l : \exists j_0 : \ (x_{k_l})_{j_0} \underset{l\to\infty}{\to} \infty$.
Отсюда следует, что $\forall j : \ (x_{k_l})_j \underset{l\to\infty}{\to} \infty$
Пусть $(p)_{j_1} > 0$. Тогда $p_{k_l} x_{k_l} \geqslant (p_{k_l})_{j_1} (x_{k_l})_{j_1} \underset{l\to\infty}{\to} \infty$. Но с другой стороны $p_{k_l} x_{k_l} \leqslant \bar{K}_i$ - противоречие. Следовательно, $\tilde{K}_i = B_i$ - замкнутое ограниченое множество, следовательно, компактное. ■

Лемма.
$B_i : \Delta \Rightarrow \tilde{K}_i$ - полунепрерывно сверху.
Доказательство.
Утверждение.
$F : X \Rightarrow Y$, Y - компактно и пусть $\forall x_n \to x \in X$, $\forall y_n \to y \in Y : \ y_n \in F(x_n)$ и выполнено, что $y \in F(x)$. Тогда F - полунепрерывно сверху в точке x.

Пусть $p_k \to P \in \Delta$ и $x_k \in B_i(p_k)$ и $x_k \to x \in \tilde{K}_i \subset X_i$
Проверим, что $x \in B_i(p) : \ x_k \in B_i(p_k) \Rightarrow p_k x_k \leqslant K_i(p_k)$. При переходе к пределу получаем $px \leqslant K_i(p) \Rightarrow x \in B_i(p)$ ■

Лемма.
B_i - полунепрерывно снизу.
Доказательство.
Покажем, что $\forall p_k \to p \in \Delta$ и $\forall x \in B_i(p) \ \exists x_k \in B_i(p_x) : \ x_k \to x$.
Пусть $p_k \to P \in \Delta$ и $x \in B_i(p)$. Если $p_k x \leqslant K_i(p_k)$, то $x \in B_i(p_k)$. Возьмем $x_k = x$.
Пусть $p_k x > K_i(p_k)$. $x_i \in X_i : \ x_i << b_i \Rightarrow x_i \in B_i(p_k) \ \forall k$.
$\exists x_k = \lambda_k x_i + (1-\lambda_k)x : \ p_k x_k = K_i(p_k) \Rightarrow \lambda_k = \dfrac{p_k x - K_i(p_k)}{p_k x - p_k x_i}$. Тогда $x_k \in B_i(p_k)$.
При $k \to \infty : \ \lambda_k \to \dfrac{px - K_i(p)}{px - p_k x_i} \leqslant 0$. Но т.к $\lambda_k \geqslant 0 \Rightarrow \lambda_k \to 0 \Rightarrow x_k \to x$.
Таким образом $B_i(p)$ - полунепрерывно снизу. ■

Лемма.
$\Phi_i(p)$ - полунепрерывно сверху.
Доказательство.
Достаточно показать, что $\forall p_k \to p \in \Delta, \ \forall x_k \in \Phi_i(p_k) : \ x_k \to x \in X_i$ выполнено $x \in \Phi_i(P)$.
Пусть $p_k \to p, \ x_k \in \Phi_i(p_k)$ и $x_k \to x \in X_i$.
B_i - полунепрерывно сверху $\Rightarrow x \in B_i(p)$. Возьмем произвольный $x' \in B_i(p)$ и воспользуемся полунепрерывностью снизу. $\exists x'_k \in B_i(p_k) : \ x'_k \to x'$.
$x_k \in \Phi_i(p_k) \Rightarrow u_i(x_k) \geqslant u_i(x'_k)$. Перейдя к пределу получим $u_i(x) \geqslant u_i(x')$, следова-

тельно, $u_i(x) = \max\limits_{x' \in B_i(p)} u_i(x')$ т.е. $x \in \Phi(p)$ ■

Лемма.
$\forall p \in \Delta$ $\Phi_i(p)$ - непустое выпуклое замкнутое множество.

Доказательство.
X_i - выпукло и замкнуто $\Rightarrow B_i(p) = X_i \cap \{x \in \mathbb{R}^n |\ px \leqslant K_i(p)\}$ - выпукло и замкнуто.
$B_i(p)$ - ограничено $\Rightarrow$ компактно.
u_i - непрерывно $\Rightarrow \Phi_i(p) = \{x \in B_i(p) |\ u_i(x) = \max\limits_{x' \in B_i(p)} u_i(x')\}$ - непусто и замкнуто.
Пусть $x', x'' \in \Phi_i(p)$ и $\lambda \in [0,1]$. Тогда $x = \lambda x' + (1-\lambda)x'' \in B_i(p)$, т.к. $B_i(p)$ - выпукло. u_i - вогнута $\Rightarrow u_i(x) \geqslant \lambda u_i(x') + (1-\lambda)u_i(x'') = u_i(x') \Rightarrow u_i(x) = u_i(x')$, т.е. $x \in \Phi_i(p)$. Таким образом $\Phi_i(p)$ - выпукло. ■
В модели Эрроу-Дебре можем заменить всех производителей на одного с совокупным технологическим множеством $Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$. Это множество выпукло и компактно.
Тогда рассмотрим $\Psi(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Psi_i(p) = \{y \in Y |\ py = \max\limits_{y' \in Y} py'\}$

Лемма.

1) Ψ - полунепрерывна сверху

2) $\forall p \in \Delta$ $\Psi(p)$ - непустое выпуклое замкнутое множество

Определим $\varphi(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Psi_j(p) + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i - \sum\limits_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ - функция избыточного предложения $\Delta \Rightarrow \mathbb{R}^n$.

Лемма.

1) φ - полунепрерывна сверху

2) $\forall p \in \Delta$ $\varphi(p)$ - непустое выпуклое замкнутое множество

Пусть $u \in \varphi(p)$. Тогда $u = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i$, где $y_j \in \Psi_j(p)$, $x_i \in \Phi_i(p) \Rightarrow x_i \in B_i(p)$, т.е. $px_i \leqslant K_i(p) = pb_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j(p)$.
Следовательно $\sum\limits_{i=1}^{l} px_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} pb_i + \sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} py_j = \sum\limits_{i=1}^{l} pb_i + \sum\limits_{j=1}^{m} py_j \Leftrightarrow pu \geqslant 0$.
Тогда по теореме Гейла:
$\exists p^* \in \Delta,\ u^* \in \varphi(p^*):\ u^* \geqslant 0.\ u^* = \sum\limits_{i=j}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^*$, где $x_i^* \in \Phi_i(p^*),\ y_j^* \in \Psi_j(p^*)$
$u^* \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{i=j}^{m} y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$
Покажем, что $\langle p^*, \sum\limits_i x_i^* \rangle = \langle p^*, \sum\limits_j y_j^* + \sum\limits_i b_i \rangle$.

Заметим, что $\langle p^*, \sum\limits_j y_j^* + \sum\limits_i b_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^{l} K_i(p^*)$.
$x_i^* \in \Phi_0(p^*) \Rightarrow x_i^* \in B_i(p^*)$, т.е. $p^* x_i^* \leqslant K_i(p^*)$.
Пусть $p^* x_i^* < K_i(p^*)$. Т.к. u_i - ненасыщаема $\Rightarrow \exists x_i' \in X_i : \ u_i(x_i') > u_i(x_i^*)$.
Рассмотрим $x_i'' = \lambda x_i' + (1-\lambda) x_i^*$. Т.к. $p^* x_i^* < K_i(p^*) \Rightarrow \exists \lambda > 0 (\lambda < 1) : \ p x_i'' \leqslant K_i(p^*)$, но при этом $u_i(x_i'') \geqslant (1-\lambda) u_i(x_i^*) + \lambda u_i(x_i') > u_i(x_i^*)$ - противоречие с условием $x_i^* \in \Phi_i(p^*)$.

Таким образом, $p^* x_i^* = K_i(p^*)$ и $\langle p^*, \sum\limits_i x_i^* \rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{l} K_i(p^*) = \sum\limits_j y_j^* + \sum\limits_i b_i \rangle$

Таким образом, (p^*, x_i^*, y_j^*) - равновесие. Теорема доказана. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4. Лекция 4

Оптимальность по Парето. Формализация

Это понятие возникает в задачах оптимизации по многим критериям. Рассмотрим произвольное множество X. В нем выделяют допустимое подмножество: $X_0 \subset X$ — множество допустимых элементов.
И предположим, что у нас есть некоторое выражение: $u(x) \to \mathbb{R}^l$. Ставится задача макимизации этого векторно-значимого отображения: $u(x) = (u_1(x), ..., u_l(x)$. Обычно не удается подобрать x так, чтобы все элементы были макимальны, поэтому рассматривают разные приближения.

Определение 4.1. *Элемент $x \in X_0$ называется оптимальным по Парето, если не существует допустимого элемента x', такого что $u(x') > u(x)$, т.е. $u_i(x_i') > u_i(x_i)$*

Конкурентное равновесие модели Эрроу-Дебре

Модель Эроу-Дебре.
n — товаров, l — поребителей, m — производителей. $1 \leqslant i \leqslant l$ $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$ потребительское множество. Требуется, чтобы X_i было выпукло, замкнуто, неограничено. И для любой последовательности потребительских наборов: $\forall x_k \in X_i : \exists p_0(x_l)_{p_0} \to \infty, k \to \infty$ выполнено $\forall p(x_k)_P \to \infty, k \to \infty$
u_i: $X_i \to \mathbb{R}$ — функция полезности. u_i — непрерывна, вогнута, ненасыщаема. $b_i \in \mathbb{R}^n_+$ — начальный запас $\exists x_i \subset X_i : x_i << b_i$ $K_i(p) = p \cdot b_i + I_i(p)$ $I_i(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \pi_j(p)$, где π_j — доход j-того производителя.

$$1 \leqslant j \leqslant m$$

$$Y_j \subset \mathbb{R}^n \text{ — технологическое множество } Y_j \to 0$$

$$Y_i \text{ — компактно } Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j \text{ — выпукло}$$

Конкурентное равновесие
(p^*, x_i^*, y_j^*), $p^* \subset \Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n_i x_i^* \leftarrow X_i, y_j \subset Y_j$:

1) $x_i^* \in \Phi_i(p^*)$

2) $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} y_j * + \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$

4) Закон Вальраса $\langle p_i^*, \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \rangle = \langle \sum\limits_{j=1}^{m} y_j *, \sum\limits_{i=1}^{l} b_i \rangle$

Теорема Эрроу-Дебре утверждает, что такое равновесие существует.

Оптимальность равновесия модели Эрроу-Дебре по Парето

Теперь посмотрим, как связано это равновесие с оптимальностью по Порето. В каком случае это равновесие будет оптимально.
Итак, пусть $X = \prod_{i=1}^{i} X_i, x = (x_1, x_2, ..., x_l), x_i \subset X_i$
Допустимое множество: $X_0 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in X \mid \exists Y : \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \leqslant b + y\}$, $b = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$ — совокупный начальный запас. Заметим, что это условие, есть условие баланса спроса и предложения. То есть множество допустимых векторов это такое потребление, по которым существует предложение, которое дает баланс между спросом и предложением.
$u \to \mathbb{R}^l$ $x = (x_1, ..., x_l)$ — набор потреблений, то $u(x) = (u_1(x_1), u_2(x_2), ..., u_l(x_l))$ — значения функции полезности на соответствующих векторах потребления. Теперь мы можем сформулировать утверждение, связывающее конкурентное равновесие с оптимальностью по Парето.

Теорема 4.1. *Пусть есть равновесие (p^*, x_i^*, y_j^*) — конкурентное равновесие в модели Эрроу-Дебре, тогда $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_l^*)$ оптимально по Парето.*

Доказательство. Заметим, что $x^* \leftarrow X_0$, т.к. $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{j=1}^{l} y_j^* + b$. Предположим, что x^* — неоптимально, тогда $\exists x = (x_1, ..., x_l) \in X_0 : u(x) < u(x^*)$, т.е. $\forall i u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)$
и $\exists i_0 u_{i_0}(x_{i_0} > u_{i_0}(x_{i_0}^*))$. Немного изменим x, чтобы неравенства стали строгими. u — ненасыщаема $\Rightarrow \exists \tilde{x}_i \in X_i : u_i(\tilde{x}_i) > u_i(x_i^*)$. Пусть $0 < t \leqslant 1$ и $x_i(t) = (1-t)x_i + t_i \leftarrow X_i$
$u_i(x_i(t)) \geqslant$ (вогнутость) $(1-t)u_i(x_i) + tu_i(\tilde{x}_i)$, а поскольку $(1-t)u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*), tu_i(\tilde{x}_i) > u_i(x_i^*) \Rightarrow u_i(x_i(t)) \geqslant (1-t)u_i(x_i) + tu_i(\tilde{x}_i) > u_i(x_i^*)$
$x_i^* \in \Phi_i(p^*) \Rightarrow x_i(t) \notin B_i(p^*)$, то стоимость этого набора: $p^* x_i(t) > K_i(p^*)$ $(\forall t > 0)$
$\Rightarrow \forall i p^* x_i \geqslant K_i(p^*)$ и $p^* x_{i_0} > K_{i_0}(p^*) \Rightarrow p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i > \sum\limits_{j=1}^{l} K_i(p^*) = \sum\limits_{i=1}^{l} (p^* b_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} \pi_j(p^*)) = p^* b - \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
Воспользуемся тем фактом, что x_i — допустимый вектор. $x \in X \Rightarrow \exists y \in Y y =$

$\sum\limits_{j=1}^{m} y_j, y_j \in Y_j$, такой что $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i \leqslant y + b = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j + b$

Следовательно, $p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \leqslant p^* b + \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j \leqslant p^* b + \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$ в силу условия, что $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$

Таким образом, x^* — оптимально по Парето. ■

Пример оптимизации равновесия по Парето

Рассмотрим модель Эрроу-Дебре $n = 2, l = m = 1$, потребительское множество задается: $X = (x_1, x_l) \in \mathbb{R}^2_+ \mid |x_1 - x_2| \leqslant 3$, функция полезности: $u(x_1, x_2) = x_1 x_2, b = (1, 2)$

Функция капитала, тогда равна $K(p) = pb + py$. Производители: $Y = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid max(y_1, y_2, y_1 + y_2 - 1) \leqslant 2\}$

Найдем равновесие. Здесь как раз удобно воспользоваться теоремой. Давайте изобразим множество допустимых векторов: $x \leqslant b + y$, если к y прибавить b, получим

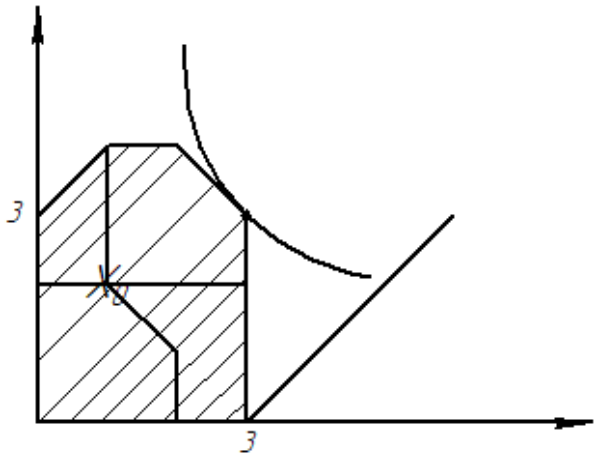

Рис. 2. Множество потребления

x^* — оптимально по Парето, значит x^* — точка максимума функции u на X_0. Хорошо, что множество X_0 не зависит от цен и здесь максимум всегда один и тот же. $x^* = (3, 3)$ $x^* \leqslant b + y^* \Rightarrow y^* = (2, 1)$.

Найдем вектор цен. Для этого нужно построить бюджетное множество. $B(p) = \{x \in X \mid px \leqslant K(p)\}$. Бюджетное множество это то, что лежит ниже бюджетной линии. И мы хотим, чтобы максимум полезности достигался в этой точке $(3, 3)$. Получаем условие: $p \| \ grad\ u(x)$ $\ grad\ u(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ $\ grad\ x^* = (3, 3) \Rightarrow p^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Теорема о дополнении до состояния равновесия оптимальной по Парето системы

Теорема 4.2. *Пусть дана теорема Эрроу-Дебре и элемент* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*) \in X_0$ *оптимален по Парето.*
Тогда $\exists p^* \in \Delta \exists y_j^* \in Y_j$, *такая что*

1) $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^* + b$

2) $\forall x_i \in X_i : u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)\ p^* x_i \geqslant p^* x_i^*$

3) $\forall y_j \in Y_j p^* y_j \leqslant p^* y_j^*$

Докажем эту теорему.

Доказательство. Обозначим $M_i = \{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) > u_i(x_i^*) \subset X\}$. В силу того, что u_i — ненасыщаема $\Rightarrow M_i \neq \varnothing$ u_i — вогнуто $\Rightarrow M_i$ — выпукло
$\forall x\ x' \in M_i \forall t \in [0,1]\ u_1((1-t)x + tx') \geqslant (1-t)u_i(x) + tu_i(x') > u_i(x_i^*) \Rightarrow (1-t)x + tx' \in M_i$.
Пусть $G = b + Y - \sum\limits_{i=1}^{l} M_i$. Тогда $G \neq \varnothing$, т.к. Y и M_i — непустые. G — выпукло, т.к. Y и M_i — выпукло. $G \cap \mathbb{R}_+^n = \varnothing$. Пусть $z \in G \cap \mathbb{R}_+^n$. Тогда $z = b + y - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \geqslant 0$, где $x_i \in M_i, y \in Y$.
Тогда $x = (x_1, \ldots, x_l) \in X_0$ — допустимый набор. ($z \geqslant 0$) Видим, что все элементы принадлежат M_i: $u(x) >> u(x^*)$. Значит x^* неоптимально по Парето — противоречие. Поэтому пересечение пусто, это означает, что есть два множества G и $\mathbb{R}_+^n$, они непустые и выпуклые, не пересекаются. Тогда можно применить теорему об отделимости. $\exists p^* \neq 0 : \forall z \in \mathbb{R}_+^n p^* z \geqslant 0,\ \forall z \in G p P^* z < 0$.
Из первого условия следует, что $p^* > 0$.
Второе условие означает, что $\forall y_j \in Y_j \forall x_i \in M_i : p^* \sum x_i \geqslant p^* b + p^* \sum\limits_{i=1}^{m} y_j$.
Пусть $\overline{M_i}$ — замыкание M_i, тогда $\overline{M_i} = \{x_i \in X_i \mid u_i(x_i) \geqslant u_i(x_i^*)\}$. Будем брать точки из замыкания. $\forall y_j \in Y_j\ \forall x_i \in \overline{M_i} : p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i \geqslant p^* b + \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j$. В частности,
$p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \geqslant p^* b + \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j$. $x^* \in X_i \Rightarrow \exists y^* \in Y : y^* = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*, y_j^* \in Y_j$, такой что $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant b + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$.
Следовательно, $p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* = p^* b + \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
Из неравенства выше вычтем это равенство: $\sum\limits_{i=1}^{l} p^*(x_i - x_i^*) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} p^*(y_j - y_j^*)$ — это неравенство верно для $\forall x_i \overline{M_i}\ \forall y_j \in Y_j$.

Положим $y_j = y_j^*$ и $x_{i'} = x_{i'}^* \forall i' \neq i$, тогда $\forall x_i \in \overline{M_i} : p^*(x_i - x_i^*) \geqslant$, т.е. $p^* x_i \geqslant p^* x_i^*$
Положим, $x_i = x_i^*$ и $y_{j'} = y_j^* \forall j i \neq j$, тогда $0 \geqslant p^*(y_j - y_j^*)$, т.е. $p^* y_j \leqslant p^* y_j^*$, $\forall y_j Y_j$. Все условия теоремы выполняются. Теорема доказана. ■
Мы доказали, что из оптимальности по Парето следует что-то похожее на состояние равновесия.

Упражнение
Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*) \in X$ - оптимально по Парето.
Тогда существует перераспределение доходов и начальных запасов. $b_i^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $\alpha'_{ij} \geqslant 0 \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha'_{ij} = 1$, такие что для новыъ функций капитала $K'_j(p) = pb_i^* + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha'_{ij} \pi_j(p)$, x_i^* будет значением функции спроса и этот набор можно дополнить до состояния равновесия: $\exists p^* y_j^* : (p^*, x_i^*, y_j^*)$ — конкурентное равновесие. То есть, если мы перераспределим доходы, так чтобы они обеспечивали этот спрос, то установится конкурентное равновесие.

Модель Вальраса гарантированного дохода

Рассмотрим модель Эрроу-Дебре и немного ее модифицируем.
Имеем: n товаров, l потребителей, m производителей.
Каждый потребитель задается потребительским множеством, функцией полезности, начальным запасом, функцией капитала. Соотвественно, X_i, u_i, b_i, $K'_i(p) = p_i b_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \pi_j(p)$
Y_j — технологическое множество
Положим $b_i = 0$, тогда может получится так, что у какого-то потребителя будет слишком низкий доход, поэтому мы будем его перераспределять.
Пусть $\pi(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j(p)$ — совокупный доход производственного сектора, тогда если его поделить на количество потребителей, будет средний доход $d\frac{\pi(p)}{l}$
Пусть $0 < \mu \leqslant 1$ μd — минимальный доход потребителя. Мы будем требовать, чтобы капитал потребителя при ценах $K_i(p) \geqslant \mu d$. Если доход у потребителя меньше минимального, то необходимо доплатить необходимую сумму. Эта сумма берется за счет налогов на производственный сектор. Пусть $\gamma = 1 - \mu$ — ставка налога на производство, тогда пусть $\widetilde{\pi}_j(p) = \pi_j(p) - \gamma - \pi_j(p)$ — доход после налогообложения.
Новая функция капитала будет иметь вид: $K_i(p) = max\{\mu d, \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{\pi}_j(p)\}$ (*)
Тогда у нас появлсяется дополнительный параметр μ. Возникает вопрос, есть ли при заданной новой функции капитала в данной системе равновесие.

Теорема 4.3. *Пусть в модели выполняется предположение модель Эрроу-Дебре, кроме нового условия $b_i = 0$ и новой функции капитала (*), тогда в модели существует равновесие: $p^*, x_i^*, y_j^*, \gamma^*$:*

1) $x_{*\in\Phi_i(p^*,\gamma^*)}$

2) $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{l} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$

4) $p^* \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* = p^* \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5. Лекция 5

Модель Вальраса гарантированного дохода

Мы продолжаем изучение модели с гарантированными доходами, модификацию модель Вальраса. Напомним основные положения этой модели и сформулируем теорему.

Имеем дело с n товарами, $p \in \mathbb{R}^n$ - вектор цен, Потребительский сектор l потребителей. i-тый потребитель: $X_i < \mathbb{R}$ множество потребления, $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ функция полезности. Функция капитала: $K_i(p) = max\{\mu d, \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\widetilde{\pi}_j(p)\}$.
Объясним все эти обозначения. Введем понятие производственного сектора: m производителей, j-тый производитель характеризуется технологическим множеством $Y_j \in \mathbb{R}^n$, тогда $\pi_j(p) = max\ p \cdot y, t \in Y_j$. Тогда если взять сумму $\pi(p) = \sum\limits_{j=1}^{m} \pi_j(p)$, получим прибыль производственного сектора. Тогда $d = \frac{\pi(p)}{l}$ - прибыль производственного сектора, приходящаяся на одного потребителя.
Тогда α_{ij} - доля дохода i-го производителя, поступающая i-му потребителю. Мы хотим, чтобы доход не был ниже минимального дохода, чтобы этот доход обеспечить, нужно прибыль производственного сектора перераспределить. Перераспределение происходит путем взимания налогов и потом выплачиванием налогов самым бедным потребителям.
Предположим, что у нас есть ставка налога на прибыль $= 1 - \mu$. $\widetilde{j}(p) = (1-\gamma)\pi_j(p)$ — прибыль после налогообложения.

Теорема о существовании равновесия в модели с гарантированными доходами

Сформулируем ограничение, которое обеспечивает состояние равновесия модели с гарантированными доходами.

Теорема 5.1. *Пусть параметры модели удовлетворяют условиям:*

1) X_1 *— выпукло, замкнуто, неограничено*

2) $\forall(x_k) \in X_i : \exists j_0(x_k)_{j_0} \to \infty, k \to \infty$, *выполнено* $\forall j(x_k)_j \to \infty, k \to \infty$. *Если потребление товара с номером* j_0 *неограничено возрастает, то потребление всех других товаров неорганичено возрастает.*

3) u_i *— непрерывна*

4) u_i *— вогнута, т.е.* $\forall x', x'', \in X_i$ $\lambda \in [0,1]$ $u_i(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \geqslant \lambda u_i(x') + (1-\lambda)u_i(x'')$

5) u_i *— ненасыщаема, т.е.* $\forall x \in X_i \exists x' \in X_i : u_i(x') > u_i(x)$

6) $Y_j \ni 0$ *и* Y_j *— компактно*

7) $Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j$ *— выпукло и* $\exists y >> 0, y \in Y$

Тогда в модели с гарантированными доходами существует равновесие, т.е. набор $(p^*, \gamma^*, x_i^*, y_j^*)$*, где* $p^* \in \Delta \subset \mathbb{R}^n$*,* $\gamma^* \in [0,1]$*,* $x_i^* X_i$*,* $y_j^* \in Y_j$*, такой что*

1) $x_i^* \in \Phi_i(p^*, \gamma^*)$ *Бюджетное ограничение зависит от ставки налога, функция капитала зависит от параметра* μ*, который связана с* γ *линейным образом. То есть у нас получается, что функция зависит от ставки налога.*

2) $y_j^* \in \Psi_j(p^*)$ *Если принять, что налог постоянная величина, то макимизация прибыли до и после налогообложения — это одно и то же.*

3) Баланс спроса и предложения: $\sum\limits_{i=1}^{l} x_i^* \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$

4) Закон Вальраса: $p^* \sum\limits_{i}^{l} x_i^* = p^* \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$
При этом капитал каждого потребителя больше нуля: $K(p^*, \gamma^*) > 0$

Перед доказательством посмотрим, как связан налог и капитал.
$K_i(p) = max\{\mu d, \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \widetilde{\pi}_j(p)\}$ (1)
$d = \frac{\pi(p)}{l}$, $\widetilde{\pi}_j(p) = (1-\gamma)\pi_j(p) = \mu\pi_j(p)$
Мы выбирали ставку на налога так, чтобы выражение (1) было линейно по μ
$K_i(p) = max\{\mu\frac{\pi(p)}{l}, \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\mu\pi_j(p)\} = \mu \cdot max\{\frac{\pi(p)}{l}, \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\mu\pi_j(p)\}$.
То есть выбор связи параметра ставки налога с минимальным доходом обеспечивает нам линейность по параметру μ.
В равновесии должен выполняться закон Вальраса, а из-за того, что функция полезности ненасыщаема, означает, что стоимость потребляемых товаров равна капиталу. Это позволяет написать нам соотношение на μ: $\sum\limits_{i=1}^{l} px_i^* = \sum\limits_{i=1}^{l} K_i(p) = py^* = \pi(p)$.
Найдем μ.

$$\mu = \frac{\pi(p)}{\sum\limits_{i=1}^{l} max\{\frac{\pi(p)}{l} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\pi_j(p)\}}$$

Таким, образом, мы видим, что параметр μ будет зависить от цен p. **Лемма.**

1) $\mu(p)$ — непрерывная функция
2) $\mu(\lambda p) = \mu(p) \forall \lambda > 0$

Доказательство. $\pi_j(p)$ — непрерывно по $p \Rightarrow \pi(p)$ — непрерывно и $\mu(p)$ — непрерывно, $\exists y \in Y : y >> 0 \Rightarrow \pi(p) > 0 \ \forall p$.
$\pi_j(\lambda p) = \underset{y \in Y_j}{max}(\lambda p)y = \lambda \underset{y \in Y_j}{max}(py) = \lambda \pi_j(p) \Rightarrow \pi(\lambda p) = \lambda \pi(p)$ и $\mu(\lambda p) = \mu(p)$ ■

$$K_i(p) = max\{\mu \frac{\pi(p)}{l}, \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \widetilde{\pi}_j(p)\}$$

.
Следствие: $K_i(p)$ — непрерывна по p и $K_i(\lambda p) = \lambda K_i(p)$ линейно однородна.
Схема доказательства теоремы:

1) Лемма. $B_i(p) = \{x_i \in X_i \mid px_i \leqslant K_i(p)\} \subset B_i$, где B_i — выпуклый компакт.
2) Лемма. $B_i(p) : \Delta \Rightarrow X_i$ — полунепрерывна сверху и снизу.
3) Лемма.
   а) $\Phi_i(p) : \Delta \Rightarrow X_i$ — полунепрерывна сверху
   б) $\forall p \Phi(p)$ — непустое выпуклое замкнутое множество
4) а) $\Psi_j(p)$ — полувыпуклое сверху
   б) $\forall p \Psi(p)$ — непустое выпуклое замкнутое множество

Положим $\varphi(p) = \Psi(p) - \sum\limits_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ — функция избыточного предложения, тогда:
Лемма. $\varphi : \Delta \Rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow K \in \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.
Тогда:

1) φ — полунепрерывно сверху
2) $\forall \varphi(p)$ — непустое замкнутое множество
3) $\forall u \in \varphi(p) : pu \geqslant 0$ — следует из бюджетного ограничения.

По Лемме Гейла $\exists p^* \in \Delta \ \exists u^* \varphi(p^*) : u^* \geqslant 0$, $u^* = y^* - \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^*$, $y^* = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$
Тогда $p^*, x_i^*, y_j^* : y^* = 1 - \mu(p^*)$ — равновесие.

Модель Вальда-Касселя

Рассмотрим еще одну модель рыночного равновесия — модель Вальда-Касселя. Это исторически была первая модель, в которой было доказано существование равновесия.
Вспомним общую схему модели Вальраса.

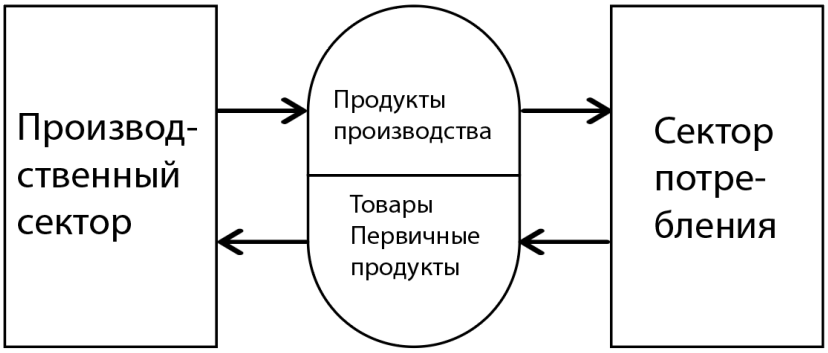

Рис. 3. Общую схема модели Вальраса

Пусть у нас имеется n продуктов производства и m первичных факторов.
Обозначим цены на продукты производства $p \in \mathbb{R}^n$, цены на первичные факторы: $v \in \mathbb{R}^m$.
Охарактеризуем потребительский сектор в модели Вальда-Касселя. Все потребители агрегируются в одного обобщенного потребителя, который характеризуется двумя параметрами.

1) $\Phi(p, v)$ — функция спроса. $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — спросы на продукты производства.

2) $b \in \mathbb{R}^m$ — начальный запас первичных факторов.

Требуется, чтобы

1) φ — непрерывная однозначная функция

2) $p\Phi(p, v) = vb$

3) $b >> 0$

Производственный сектор.
Описывается моделью Леонтьева. A — матрица прямых затрат $(m \times n)$.
a_{ij} — количество i-го первичного фактора, необходимого для производства единичного продукта.

$y \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор выпуска. То есть если мы хотим некоторый набор продуктов производства, то в процессе производства будет затрачен такой набор первичных факторов: $Ay \in \mathbb{R}^m$ — вектор затрат. У нас возникает ограничение, поскольку затраты у нас в первичных факторов, а первичные факторы дают только потребители в количестве начального запаса. $Ay \leqslant b$
Мы должны нашу прибыль.
py — доход производственного сектора.
vb — затраты
$py - vb$ — прибыль. Поскольку затраты не зависят от вектора цен и не зависит от y, поэтому максимизация прибыли это все равно что максимизация дохода.

Функция предложения: $\begin{cases} \text{py} \to max \\ \text{Ay} \leqslant b \ (*) \\ \text{y} \geqslant 0 \end{cases}$

Равновесие в модели Вальда-Касселя.
Набор (p^*, v^*, y^*), где $p^* \in \mathbb{R}^n_+$m $v^* \in \mathbb{R}^m_+$, $y^* \in \mathbb{R}^n_+$,
Такой что:

1) y^* — решение задачи (*) при pp^*

2) $y^* = \Phi(p^*, v^*)$

Затем $p^*y^* = v^*b = p^*\Phi(p^*, v^*)$

Теорема о существовании равновесия в модели Вальда-Касселя. Начало

Теорема 5.2. *Пусть в модели Вальда-Касселя*

1) $b >> 0$

2) В матрице затрат A нет нулевых x строк и столбцов.

Тогда в модели существует равновесие (p^*, v^*, y^*), причем можно считать, что

v^* *— решение задачи* $\begin{cases} vb \to min \\ vA \ p \ (**) \\ v \geqslant 0 \end{cases}$

Лемма. Пусть $y \in \mathbb{R}^n_+$ и $r \in \mathbb{R}^m_+$ удовлетворяет условию $Ay \leqslant b$, $vA \geqslant p$.

Тогда $\begin{cases} \text{y — решение задачи (*)} \\ \text{v — решение задачи (**)} \end{cases} \Rightarrow py = vb$

Доказательство.
Пусть $Ay \leqslant b$, $vA \geqslant p$. Тогда $v'b \geqslant v'A_{y'} \geqslant py'$.
В частности,

$$\forall y' : A_{y'} \leqslant b,\ py' \leqslant vb$$

$$\forall v' : v'A \geqslant p,\ v'b \geqslant py$$

Если $vb = py$, то $\forall y' \geqslant 0 : A_{y'} \leqslant b\ p'y \leqslant py = vb \Rightarrow y$ — решение (*)
$\forall v' \geqslant 0 : v'A \geqslant p\ v'b \geqslant vb = py \Rightarrow v$ — решение (**)
Пусть $py < vb$ и y — решение (*). Положим $c = py$, тогда $\forall y' \geqslant 0\ A_{y'} \leqslant b \Rightarrow py' \leqslant c$
По теореме о системе линейных неравенств. $q \geqslant 0 q \in \mathbb{R}^m : p \leqslant qA$ и $c \geqslant qb$
Мы получили $q \geqslant 0\ qA \geqslant 0\ qb \leqslant c = py, vb \Rightarrow V$ — не решение (**) ■
Доказательство Теоремы о существовании равновесия:

Теорема 5.3. *Построим выпуклый компакт $S \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$ и многозначное отображение: $\varphi : S \Rightarrow$ удовлетворяющее условию теоремы Какутани, такое что неподвижная точка $(p^*, v^*) \in \varphi(p^*, v^*)$ Дает равновесие моделм Вальда-Касселя.*
Обозначим $\|p\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} |p_i|$ — порция на $\mathbb{R}^n$

Пусть a — сумма столбцов матрицы A, т.е. $a = Ae$, где $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$ и $a >> 0$
Обозначим $\|v\|_a = |v|a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i|v_i|$ — норма на пространстве $\mathbb{R}^n$
Пусть $\alpha = \min\limits_{i \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$
$\alpha > 0$, т.к. в A нет нулевых столбцов. $\beta = \|b\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$
Т.к. $b >> 0$, т.е. существует $\gamma > 0$: $\gamma\alpha < b$.
Положим $\mu = \frac{\alpha\gamma}{\beta} > 0$, заметим, что $\mu \leqslant 1$, т.к. $\alpha\gamma \leqslant \beta$
Действительно, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \geqslant \gamma \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \gamma \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = \gamma \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}) \geqslant \gamma \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha = n\alpha\gamma \geqslant \alpha\gamma$
Теперь мы можем определить выпуклый компакт S.
Положим $S = \{(pv) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \mid \mu \leqslant \|p\|_0 \leqslant 1, \|v\|_a = 1\}$
Тогда S — ограничено, замкнуто и выпукло, т.к. ограничения линейны.

6. Лекция 6

Модель Вальда-Касселя. Напоминание

В данной модели есть производственные товары, их n штук и они задаются вектором цен. $p \in \mathbb{R}^n$, а $v \in \mathbb{R}^m$ — цены на первичные факторы. $b \in \mathbb{R}^m_+$ — начальный запас потребителей. $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(p, v) \text{ — однозначная непрерывная функция}$$

$$p\Phi(p, v) = v \text{ — закон Вальраса}$$

A — матрица $(m \times n)$ прямых затрат, $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор выпуска.

$$\begin{cases} py \to max \\ Ay \leqslant b \ (*) y \geqslant 0 \end{cases}$$

Равновесие в моедели Вальда-Касселя - (y^*, p^*, v^*), $y^* \in \mathbb{R}^n, p^* \in \mathbb{R}^n, v^* \in \mathbb{R}^m$.

1) $y^* = \Phi(p^*, v^*)$
2) y^* — решение задачи (*)

Теорема о существовании равновесия в модели Вальда-Касселя

Теорема 6.1. *Пусть $b >> 0$ и в A нет нулевых строк и столбцов.*
Тогда в модели Вальда-Касселя имеется положение равновесия (y^*, p^*, v^*), причем v^* есть решение задачи $\begin{cases} vb \to min \\ vA \geqslant p \quad (**) \\ v \geqslant 0 \end{cases}$

Доказательство. Доказательство сводится к тому, чтобы построить некоторое многозначное отображение на компактном подмножестве пространства цен, т.е. $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ — компактно, $\varphi : S \Rightarrow S$.

Пусть $a = Ae$, где $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, т.е. a — сумма столбцов матрицы. в A нет нулевых строк $\Rightarrow a >> 0$,

$$x \in \mathbb{R}^m \left\| x \right\|_a = a|x|, \text{ где } |x| = \begin{pmatrix} |\mathrm{x}_1| \\ \vdots \\ |x_m| \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \left\|x\right\|_0 = e|x|, \text{ где } |x| = \begin{pmatrix} |\mathrm{x}_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$$

Введем несколько значений: $\beta = \left\|b\right\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$, $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant n \leqslant} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ $\alpha > 0$, т.к. в A нет нулевых столбцов.
$\gamma > 0 : \gamma a \leqslant b$. $\mu = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$, тогда, как мы убедились в прошлом семинаре $0 \leqslant \mu \leqslant 1$
$S = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \mid \mu \leqslant \left\|p\right\|_0 \leqslant 1, va = 1\}$. Про это пространство можно сказать, что S — органичено, замкнуто, выпуклое, таким образом S — выпуклый компакт.
Остается построить многозначное отображение на этом выпуклом компакте. Придется строить в несколько этапов. Введем обозначение: Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x//y = \sup\{\delta \mid \delta y \leqslant x\}$
Утверждение:

1) $0 \leqslant x//y \leqslant \infty$
2) $x//y$ — непрерывно по x и y
3) $(x//y)y \leqslant x$
4) $\forall \lambda, \mu > 0$ $(\lambda x)//(\mu y) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (x//y)$

Следовательно, $x//((x//y)y) = 1$. Теперь при помощи этого обозначения введем первый элемент многозначного отображения на этом множестве S, а именно $Z : S \Rightarrow \mathbb{R}^n_+$ $Z(p, v) = (b//A\Phi(p, v)) \cdot \Phi(p, v)$
Лемма. Z — корректно определено, непрерывно и $b//AZ(p, v) = 1$.

Доказательство.
Покажем, что $A\Phi(p, v) > 0$. Если $A\Phi(p, v) = 0$, то в A нет нулевых столбцов, то $\Phi(p, v) = 0$. Но $p\Phi(p, v) = vb > 0$. Противоречие
Таким образом, Z — коректно определено. Z непрерывно, т.к. Φ непрерывно и $\cdot//\cdot$ непрерывно. $b//AZ(p, v) = b//((b//A\Phi(p, v)) \cdot A\Phi(p, v)) = 1$ ■

Определение 6.1. *$y \in \mathbb{R}^n_+$ называется эффективным вектором, если $b//Ay = 1$*
$\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ — множество эффективных векторов.
Тогда $Z : S \to \Omega$ $y \in \Omega \Rightarrow Ay \leqslant b$ $\exists i (Ay)_i = b_i$.

Определим многозначное отображение:

$$p : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^n_+$$

$$p(y) = \{p \in \mathbb{R}^n_+ \mid y - \text{ — решение } (*) \text{ для } p\}$$

$$\begin{cases} py \to max \\ Ay \leqslant b \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма $\forall y \in \Omega\ p(y) \neq 0$

Доказательство. $y \in \Omega \Rightarrow Ay \leqslant b$ И $\exists i : (Ay)_i = b_i$ $(Ay)_i = a_i \cdot y$, a_i — i-ая строка A, $a_i > 0$.
Положим $p = a_i$, тогда $\forall y' \in \mathbb{R}^n_+ : Ay' \leqslant b$ выполнено $py' = a_i y' = (Ay')_i \leqslant b_i = py$, т.е. y — решение (*) для $p = a_i$, т.е. $a_i \in p(y)$ ■
Лемма $\forall y \in \Omega$ $p(y)$ — ненулевой выпуклый замкнутый конус. Проверим выпуклость и замкнутость и то, что это конус

Доказательство.
Пусть $p_1, p_2 \in p(y)$. Тогда $\forall y' \geqslant 0 : \forall y' \geqslant b$ $p_i y' \leqslant p_i y$, $i = 1, 2$
Тогда $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\forall y' \geqslant 0 : \forall y' \leqslant b$
$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)y' = \lambda_1 p_1 y' + \lambda_2 p_2 y' \leqslant \lambda_1 p_1 y + \lambda_2 p_2 y = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)y$
Значит, $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in p(y)$, т.е. $p(y)$ — выпуклый конус ■
Замкнутость:
Пусть $p_k \in p(y)$ и $p_k \to p, k \to \infty$. Тогда $\forall y' \geqslant 0 : \forall y' \in b$ $p_k y' \leqslant p_k y, k \to \infty \Rightarrow p \in p(y)$, т.е. $p(y)$ — замкнуто.
Определим отображение $V : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+$ $V(p) = \{v \in \mathbb{R}^m_+ \mid v$ — решение (**) для $p\}$

$$\begin{cases} vb \to min \\ vA \geqslant p\ (**) \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

$K : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$
$K(y) = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \mid p \in P(y), v \in V(p)\}$
Лемма $\forall y \in \Omega$ $K(y)$ — ненулевой выпуклый замкнутый конус.

Доказательство.

1) $y \in \Omega \to peP(y) : p > 0$. В A нет нулевых строк $\Rightarrow V(p) \neq \varnothing \Rightarrow v \in V(p)$
   Тогда $(p, v) \in K(y)$ и $(p, y) \neq$

2) Пусть (p_2, v_1), $(p_2, v_2) \in K(y)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0/$
   $(p_i, v_i) \in K(y) \Rightarrow p_i \in P(y), v_i \in V(p_i)$, т.е. y — решение (*) для p_i, v_i — решение (**) для $p_i \Rightarrow p_i y = v_i b$ (по теореме двойственности)

   Пусть $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, $P(y)$ — выпуклый конус. $\Rightarrow vA - \lambda_1 v_1 A + \lambda_2 v_2 A \geqslant \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 < p$, т.е. V — допустимый вектор для p и $py = \lambda_1 p_1 y + \lambda_2 p_2 y = \lambda_1 v_1 b + \lambda_2 v_2 b = vb \Rightarrow y$ — решение (*) для p, v — решение (**) для $p \Rightarrow (p, v) \in K(y)$
   Таким образом, $K(y)$ — выпуклый конус.

   Осталось проверить замкнутость.

3) Пусть есть последовательность значений $(p_k, v_k) \in K(y)$ и $(p_k, v_k) \to (p, v)$. Тогда $V_k \in V(p_k) \xrightarrow{k\to\infty} v_k A \geqslant p_k \Rightarrow vA \geqslant p$
$p_k \in P(y)$, $v_k \in V(p_k) \Rightarrow y$ — решение (*) для p_k, v_k — решение (**) для p_k $\Rightarrow p_k y = v_k b \xrightarrow{k\to\infty} py = vb \Rightarrow y$ — решение (*) для p, v — решение (**) для p $\Rightarrow p \in P(y)$ $v \in V(p)$, т.е. $(p, v) \in K(y)$

Значит, $K(y)$ — замкнуто. ■

Лемма $\forall y \in \Omega$ $K(y) \cap S \neq \varnothing$

Доказательство.

Пусть $(p, v) \in K(y)$, где $p > 0$. Тогда $v > 0$ $(vA \geqslant p > 0)$
Рассмотрим пару $p' = \frac{p}{\|v\|_a}$, $v' = \frac{v}{\|v\|_a}$. Тогда $(p', v') \in K(y)$, т.к. $K(y)$ — конус и $\|v\|_a = 1$ Покажем, что $\mu \leqslant \|p\|_0 \leqslant 1$, т.е. что $(p', v') \in S$, $v'A' \geqslant p \Rightarrow v'Ae \geqslant pe$, т.е. $\|p\|_0 \leqslant 1$

$y \in \Omega \Rightarrow Ay \leqslant b \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_k \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} b_i = \beta \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \geqslant \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} y_j = \alpha \|y\|_0$

Значит, $\|y\|_0 \leqslant \frac{\beta}{2}$

$(p', v') \in K(y) \Rightarrow p'y = v'b$ $p'y = \sum\limits_{j=1}^{n} p'_j \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = \|p'\|_0 \|y\|_0$

$v'b \geqslant v'\gamma a = \gamma v'a = \gamma \|v'\|_a = \gamma \Rightarrow \|p'\|_0 \|y\|_0 \geqslant \gamma \Rightarrow \|p'\|_0 \geqslant \gamma \frac{\alpha}{\beta} = \mu$ ■

Положим $\varphi : S \Rightarrow S$ $\varphi(p, v) = K(Z(p, v)) \cap S$

Лемма $\forall (p, v) \in S$ $\varphi(p, v)$ — непустое выпуклое замкнутое множество.

Доказательство.

Пусть $y = Z(p, v) \in \Omega$. Тогда $\varphi(p, v) = K(y) \cap S \neq \varnothing$
$K(y)$ — выпуклый замкнутый конус, S — выпукло и замкнуто $\Rightarrow \varphi(p, v) = K(y) \cap S$ — выпукло и замкнуто. ■

Лемма φ — полунепрерывно сверху.

Доказательство.

Достаточно показать, что $\forall$ последовательности, сходящейся $(p_k, v_k) \in S : (p_k, v_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (p, v)$ и $\forall$ последовательности $(\widetilde{p_k}, \widetilde{v_k}) \in \varphi(p_k, v_k) : (\widetilde{p_k}, \widetilde{v_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\widetilde{p}, \widetilde{v})$ выполнено $(\widetilde{p}, \widetilde{v}) \in \varphi(p, v)$
Пусть $y_k = Z(p_k, v_k)$. Тогда $\widetilde{p_k} \in P(y_k)$ $\widetilde{V_k} \in V(\widetilde{p_k}) \Rightarrow \widetilde{p_k} y_k = \widetilde{v_k} b$
Z — непрерывно $\Rightarrow y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} y = Z(p, v)$. Тогда $\widetilde{p}y = \widetilde{v}b \Rightarrow \widetilde{p} \in P(y)$, $\widetilde{y} \in V(\widetilde{p}) \Rightarrow (\widetilde{p}, \widetilde{v}) \in K(y)$.
Таким образом, $(\widetilde{p}, \widetilde{v}) \in K(y) \cap S = \varphi(p, v)$.
Значит, φ — полунепрерывна сверху ■

По теореме Какутани $(\widetilde{p}, \widetilde{v}) \in S : (\widetilde{p}, \widetilde{v}) \in \varphi(p^*, v^*)$, т.е. если $y^* = Z(p^*, v^*)$, $p^* \in P(y^*)$ $v^* \in V(p^*)$, то y^* — решение (*) для p^*, v^* — решение (**) для $p^* \Rightarrow p^* y^* = v^* b > 0$

$$y^* = (b//A\Phi(p^*, v^*))\Phi(p^*, v^*)$$

Закон Вальраса $p^*\Phi(p^*, v^*) = v^*b \Rightarrow p^*y^* = p^*\Phi(p^*, v^*)(b//A\Phi(p^*, v^*))\Phi(p^*, v^*) = p^*\Phi(p^*, v^*) \Rightarrow b//A\Phi(p^*, v^*) = 1$ и $y^* = \Phi(p^*, v^*)$
Значит, (y^*, p^*, v^*) — равновесие. Теорема доказана. ■

Пример

$n = 2$, $m = 2$, $b = (1, 1)$, $\Phi(p, v) = (\frac{v_1+v_2}{2p_1}, \frac{v_1+v_2}{2p_2})$
$p\Phi(p, v) = p_1\frac{v_1+v_2}{2p_1} + p_2\frac{v_1+v_2}{2p_2} = v_1 + v_2 = vb$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $py \to max$, $Ay \leqslant b$, $y_1 + y_2 \leqslant 1$, $y_1 + 2y_2 \leqslant 1$
Можем посмотреть, какие решения дает эта задача для разных p. Получаем: $p_2 < 2p_1 \to$ решение $y^* = (p_1, 0)$
$p_2 = 2p_1 \to$ решение $y^* = (t, \frac{1}{2} - \frac{t}{2})$, $t \in [0, 1]$
$p_2 > 2p_1 \to$ решение $y^* = (0, \frac{1}{2})$
$y^* = \Phi(p^*, v^*) \Rightarrow \frac{y_1^*}{y_2^*} = \frac{p_2^*}{p_1^*}$
$2p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{y_1^*}{y_2^*} = 2$ $t = 2\frac{1}{2} - \frac{t}{2} \Rightarrow y^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $p^* = (1, 2)$, $v_1 + v_2 \to min$ $vA \geqslant p$ $v_1 + v_2 \geqslant 1$ $v_1 + 2v_2 \geqslant 2 \Rightarrow v^* = (0, 1)$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7. Лекция 7

Теория Игр

Мы будем рассматривать бескоалиционные игры, т.е. игры, в которых каждый участник действует сам по себе.

Определение 7.1. *Игра - тройка* $\Gamma = \{I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I}\}$, *где*
$I = \{1, ..., n\}$ *- набор игроков*
S_i *- множество стратегий* i*-го игрока.*
Выбор стратегий для всех игроков однозначно определяет ситуацию, которая складывается.
$S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n = \prod\limits_{i\in I} S_i$ *- множество ситуаций.*
$H_i : S \to \mathbb{R}$ *- функция выигрыша* i*-го игрока.*

$\sum\limits_{i\in I} H_i(S) = const$ - игра с постоянной суммой
$\sum\limits_{i\in I} H_i(S) = 0$ - игра с нулевой суммой
$I = \{1, 2\}$ $\sum\limits_{i=1}^{2} H_i = 0$ - антагонистическая игра.

Оптимальность по Парето и по Нэшу

Определение 7.2. *Ситуация* $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ *- оптимальна по Парето, если не существует такой ситуации* $s' = \{s_i\}$, *что*
$\forall i : H_i(s') \geqslant H_i(s)$
$\exists i_0 : H_{i_0}(s') > H_{i_0}(s)$

Определение 7.3. *Равновесие по Нэшу:*
Ситуация $s = \{s_i\}_{i\in I}$ *приемлема для игрока* i, *если*
$\forall s'_i \in S_i \;\; H_i(s \llcorner s'_i) \leqslant H_i(s)$, *где* $s \llcorner s'_i = (s_1, .., s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, ...)$
Ситуация называется равновесием по Нэшу, если она приемлема для всех игроков.

Пример. Дилемма бандита.
Два бандита $I = 1, 2$ имеют выбор из двух стратегий $S_1 = S_2$ - сознаться и не сознаться. В зависимости от выбора каждого они получают разный срок.

Рассмотрим, какие ситуации оптимальны по Парето. Запишем пары выигрышей $H = (H_1, H_2) : (-8, -8), (-10, 0), (0, -10), (-1, -1)$. Из этих исходов можно улучшить только первый. Следовательно, оптимальны по Парето ситуации, в которых

H_1

		игрок 2	
		С	Н
игрок 1	С	−8	0
	Н	−10	−1

H_2

		игрок 2	
		С	Н
игрок 1	С	−8	−10
	Н	0	−1

Рис. 4. Дилемма бандита

кто-то не сознается.

Равновесия по Нэшу:
Ситуация, когда оба сознаются, является равновесной, так как если один из игроков решит поменять стратегию, то получит больший срок.
Ситуация, когда первый игрок не сознается, а второй сознается. Если первый игрок поменяет стратегию, то получит меньший срок. Следовательно, эта стратегия не приемлема для первого игрока.
Ситуация, когда первый игрок сознается, а второй не сознается - приемлема для первого игрока, но неприемлема для второго.
Ситуация, когда оба не сознаются - неприемлема для обоих игроков, так как оба могут увеличить свой выигрыш (уменьшить срок). Следовательно, ситуацией равновесия является только та, в которой оба сознаются.

Матричные игры

Пусть $I = \{1, 2\}$. $\sum\limits_{i=1}^{2} H_i(s) = 0$, S_1, S_2 - конечные. $S_1 = \{1, ..., m\}$, $S_2 = \{1, ..., n\}$
Матрица выгрыша $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = H_1(i, j)$, $1 \leqslant i \leqslant m \quad 1 \leqslant j \leqslant n$
Эта матрица задает значения функции выигрыша первого игрока, но также она задает функцию выгрыша второго игрока, так как сумма выигрышей равна 0.
Если рассмотреть $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = H_2(i, j)$, то мы получим, что $B = -A$, поэтому можно рассматривать только одну матрицу.
Замечание.
В игре с постоянной суммой все ситуации оптимальны по Парето. В матричной игре оптимальность не имеет смысла.
Равновесие по Нэшу в матричной игре - набор стратегий (i^*, j^*) таких, что $a_{i,j^*} \leqslant a_{i^*,j^*} \leqslant a_{i^*,j} \quad \forall i, j$. Набор индексов (i^*, j^*) с таким условием называется седловой точкой.
Пример.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Седловая точка - элемент, максимальный в своем столбце, но минимальный в строке. Это элемент $i^* = 2, j^* = 1$.

В матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ нет седловых точек.

Смешанное расширение матричной игры

Пусть дана матрица выигрышей A размера $m \times n$. Рассмотрим смешанное расширение игры. Это новая игра $I = \{1, 2\}$, где
$\tilde{S}_1 = \Delta^{m-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^m_+ | x_i \geqslant 0 \quad \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1\}$
$\tilde{S}_2 = \Delta^{n-1} = \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | y_j \geqslant 0 \quad \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1\}$
$\tilde{H}_1(x, y) = x^T A y = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$
$\tilde{H}_2(x, y) = -\tilde{H}_1(x, y)$
Считаем, что старая игра является подмножеством этой. Стратегия вида $x = (0...0\overset{i}{1}0...0)$ $y = (0...0\overset{j}{1}0...0)$ называется чистой стратегией. У первого игрока m чистых стратегий, у второго - n.
В такой игре всегда есть равновесие по Нэшу.

Теорема Нэша

Рассмотрим игру:
$I = \{1, 2, ..., n\}$
S_i - выпуклый компакт ($S_i \subset \mathbb{R}^N$)
$H_i : \ S \to \mathbb{R}$ - непрерывная, вогнутая по i-му аргументу функция
$S = S_1 \times ... \times S_n$ - множество ситуация - выпуклый компакт
Пусть $s \in S$, $s'_i, s''_i \in S_i \quad \lambda \in [0, 1]$
Тогда мы требуем $H_i(s_{\llcorner}(\lambda s'_i + (1 - \lambda) s''_i)) \leqslant \lambda H_i(s_{\llcorner} s'_i) + (1 - \lambda) H_i(s_{\llcorner} s''_i)$ - условие вогнутости.

Теорема 7.1. ***Теорема Нэша***
При данных условиях в игре существует равновесие

Доказательство.
Для доказательства теоремы сведем ее к теореме Какутани.

Введем обозначение: $S_{-i} = \prod\limits_{j \neq i} S_j$ - набор стратегий всех игроков, кроме i-го.
Определим функцию $\mu_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ таким образом: $\mu(S_{-i}) = \max\limits_{s_i \in S_i} H_i(s_{-i} \llcorner s_i)$, где $s_{-i} \in S_{-i}$. Это максимальный выигрыш i-го игрока, при условии, что стратегии других игроков фиксированы.
И $\varphi_{-i} : S_{-i} \Rightarrow S_i$ это $\varphi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i |\ H_i(s_{-i} \llcorner s_i = \mu_i(s_{-i}))\}$
Эта функция - многозначное отображение. ■

Лемма.

1) μ_i - непрерывна

2) φ_i - полунепрерывно сверху

3) $\forall s_{-i} \in S_{-i}\ \varphi_i(s_{-i})$ - непустое выпуклое замкнутое множество

Доказательство.

1) μ_i - непрервная, т.к. H_i непрерывная и S_{-i} и S_i - компакты.

2) φ_i - полунепрерывная сверху.
Достаточно показать (т.к образ компактен), что из условий
$\forall s_{-i}^k \in S_{-i} :\ s_{-i}^k \underset{k \to \infty}{\to} s_{-i} \in S_{-i}$
$\forall s_i^k \in \varphi_i(s_{-i}^k) :\ s_i^k \to s_i \in S_i$
выполнено $s_i \in \varphi_i(s_{-i})$
Из условия $s_i^k \in \varphi_i(s_{-i}^k) \Rightarrow H_i(s_{-i}^k \llcorner s_i^k) = \mu_i(s_{-i}^k) \overset{k \to \infty}{\Rightarrow} H_i(s_{-i} \llcorner s_i) = \mu_i(s_{-i}) \Rightarrow s_i \in \varphi_i(s_{-i})$

3) S_i - компактно, H_i - непрерывна $\Rightarrow \varphi_i(s_{-i}) \neq \varnothing$
H_i - непрерывна $\Rightarrow \varphi_i(s_{-i})$ - замкнуто
Пусть $s_i', s_i'' \in \varphi_i(s_{-i})$ и $\lambda \in [0, 1]$.
Тогда

$$H_i(s_{-i} \llcorner (\lambda s_i' + (1-\lambda) s_i'')) \geqslant \lambda H_i(\underbrace{s_{-i} \llcorner s_i'}_{\mu_i(s_{-\text{в}})}) + (1-\lambda) H_i\ \underbrace{(s_{-i} \llcorner s_i'')}_{\mu_i(s_{-i})} = \mu_i(s_{-i}) \Rightarrow \lambda s_i' + (1-\lambda) s_i'' \in \varphi_i(s_{-i})$$

Таким образом $\varphi_i(s_{-i})$ - выпукло.
Теперь определим $\varphi : S \Rightarrow S$. $\varphi(s) = \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(s_i)$.
Тогда:
1)$\forall s\ \ \varphi(s)$ - непустое выпуклое замкнутое множество
2)φ - полунепрерывно сверху
По теореме Какутани $\exists s^* = (s_1^*, ..., s_n^*) \in S :\ \ s^* \in \varphi(s^*)$. Это означает, что $\forall i\ \ s_i^* \in \varphi_i(s_{-i}^*)$, т.е. $H_i(s_{-i}^* \llcorner s_i^*) = \max\limits_{s_i \in S_i} H_i(s_{-i}^* \llcorner s_i)$ - ситуация s^* приемлема для i-го игрока. Таким образом, ситуация приемлема для всех игроков - равновесие.

■

Примеры приложений теоремы Нэша

Пример 1.
Рассмотрим смешанное расширение матричной игры. $I = \{1, 2\}$, $S_1 = \Delta^{m-1}$, $S_2 = \Delta^{n-1}$ — выпуклые компакты.
$H_1(x.y) = x^T Ay$ — линейна по $x \Rightarrow$ вогнута по x
$H_2(x.y) = x^T Ay$ — линейна по $y \Rightarrow$ вогнута по y
По теореме Нэша в этой задаче есть равновесие.
Пример 2 (Модель Курно).
Пусть $I = \{1, 2, ..., n\}$ — продавцы товара. $s_i = [0, +\infty)$ — количество товара, продаваемого i-ым продавцом. Тогда $s = s_1 + ... + s_n$ — совокупное предложение. Возникает зависимость цены от предложения $P(s) = a - bs$. c — удельная себестоимость.
Тогда $H_i(s_1, ..., s_n) = (P(s) - c)s_i = (a - c - b(s_1 + ... + s_n))s_i$
Найдем равновесие. $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$. Если есть равновесие, то $H_i(s^*) \geqslant 0$. Это означает, что можно рассматривать стратегии $s_i^* \leqslant \dfrac{a-c}{b}$ (если $s_i \geqslant \dfrac{a-c}{b}$, то $H_i < 0$).
Т.е. можно взять $S_i = [0, \dfrac{a-c}{b}]$ — выпуклый компакт.
Найдем равновесие. График зависимости функции выигрыша от стратегии — вогнутая парабола, следовательно, максимум достигается в вершине. $s_i^* = \dfrac{\dfrac{a-c}{b} - s_{-i}^*}{2} = \dfrac{\dfrac{a-c}{b} - s^* + s_i^*}{2} \Rightarrow s_i^* = \dfrac{a-c}{b} - s^*$. Отсюда следует, что стратегии всех продавцов одни и те же. Найдем объем продаж: $s^* = n\dfrac{a-c}{b} - ns^* \Rightarrow s^* = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{a-c}{b}$,
$s_i^* = \dfrac{a-c}{b}(1 - \dfrac{n}{n+1}) = \dfrac{a-c}{(n+1)b}$
Выигрыш i-го игрока: $H_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$

8. Лекция 8

Модель монополиста. Описание

Продолжаем чтение курса. В прошлый раз мы рассматривали теорию игр, которая позволила нам рассмотреть модель олигополистического рынка. Перед этим были модели Вальда-Касселя и Эрроу-Дебре, но это все разновидностями модели Вальраса, которая моделирует рынок совершенной конкуренции, где ни у одного из участников системы нет решающего голоса, все образуется в результате равновесного взаимодействия всех участников.

Сегодня рассмотрим модель монополиста. Она была предложена в 1924 году экономистом Д. Эвансом.
Рассматриваем пространство, включающее в себя n товаров, тогда есть $p \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор цен на эти товары. Предположим, что все потребители агрегированы и совокупное потребление задается функцией спроса, которая зависит от цен, но в данной модели включается еще один фактор. Модель, которую мы рассматриваем будет динамической. Мы рассматриваем время, которое будет непрерывным $t \in \mathbb{R}$ — время. $p(t)$, $t \in [0, T]$, тогда $\Phi(p(t), \dot{p(t)})$ — функция спроса. $\Phi_i \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — описание потребительского сектора в модели монополиста.
Производственный сектор описывается функцией затрат: $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция затрат. $C(x)$ — затраты на производства набора товаров $x \in \mathbb{R}^n$
Предположим, что у нас на рынке есть монополист, только у него потребитель может купить товар. Тогда прибыль монополиста в момент t: $p(t)\Phi(p(t), \dot{p(t)}) - C(\Phi(p(t), \dot{p(t)}))$

Совокупная прибыль: $\begin{cases} \int\limits_0^T (p(t)\Phi(p(t), \dot{p(t)}) - C(\Phi(p(t), \dot{p(t)})))dt \to max \\ \text{p(0)=p}_0,\ p(T) = p_T \text{ — краевые условия} \end{cases}$

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область. $x \in \Omega$

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ — логранжиан}$$

$$l(x, p, t)\ x : [0, T] \to \Omega$$

$$I(x(t)) = \int\limits_0^T L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

В общем случае идет поиск макисмальных и минимальных траекторий. Определим экстремальную траекторию: $x(t)$ называется экстремальной, если $\forall$ возмущения $h(t)$

$$h : [0, T] \to \mathbb{R}^n$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} (x(t) + \varepsilon h(t))0$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Критерий экстремальности траекторий Эйлера-Лагранжа

Теорема 8.1. *Траектория $x(t)$ экстремальна $\Leftrightarrow$ $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа:*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p_i}(x(t),\dot{x}(t),t)))$$

Доказательство.
($\Leftarrow$) Пусть дана $x(t)$, $\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x,\dot{x},t))$,
$h : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — определение экстремальности $h(0) = h(T) = 0$
Проверим экстремальность $x(t)$. Рассмотрим произвольное $h(t)$.
Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(x(t)\varepsilon h(t)) = \frac{d}{d\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0}(\int\limits_0^T L(x+\varepsilon h,\dot{x}+\varepsilon\dot{h},t)dt) =$$

$$= \int\limits_0^T (\frac{\partial L}{\partial x}(x+\varepsilon h,\dot{x}+\varepsilon\dot{h},t)h + \frac{\partial L}{\partial p}(x+\varepsilon h,\dot{x}+\varepsilon\dot{h},t)\dot{h})dt \mid_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int\limits_0^T [\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)h(t) + \frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t),t)\dot{h}(t)]dt =$$

$$= \int\limits_0^T \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)h(t)dt + \int\limits_0^T \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)h(t))dt - \int\limits_0^T \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t),t))h(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^T (\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t),t)))h(t)dt = 0$$

Для любого приращения производная равна нулю. Таким образом, наша траектория $x(t)$ будет экстремальной. ■

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть $x(t)$ — экстремальна, тогда $\forall\ h(t) : h(0) = h(t) = 0$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\mid_{\varepsilon=0} I(x(t)+\varepsilon h(t)) = \int\limits_0^T (\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{d}{dp}((x(t),\dot{x}(t),t))h(t)dt$$

Предположим, что $t_0 \in [0,T] : \frac{\partial L}{\partial x}((x(t),\dot{x}(t),t) \neq \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial x}((x(t),\dot{x}(t),t))$ в $t_0 \Rightarrow$ в окрестности t_0.
Рассмотрим $h(t) = [\frac{\partial L}{\partial x}((x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}((x(t),\dot{x}(t),t)] \cdot t(T-t)\ h(0) = h(T) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \int\limits_0^T \left\|\frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t),t))\right\|^2 t(T-t)dt > 0 \text{ Противоречие!}$$

Таким образом, уравнение Эйлера-Лагранжа выполняется. ■

Пример 1

$\Omega = \mathbb{R}^n$ $L(x,p,t) = \frac{mp^2}{2} - U(x)$ (кинетическая и потенциальная энергии), тогда условие экстремальности: $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial L}{\partial p} = mp$
$\frac{-\partial U}{\partial x}(x(t)) = \frac{d}{dt}(x\dot{x}(t)) = m\ddot{x}(t)$
Перепишем как: $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F$ — 2-ой закон Ньютона $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$ — поле сил.

Автономный случай

Пусть $L(x,p)$ $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ не зависит от t
Рассмотрим $H(x,p) = p\frac{\partial L}{\partial p} - L$ — гамильтониан
Тогда

Теорема 8.2. *Пусть $x(t)$—экстремальная траектория, тогда $H(x(t),\dot{x}(t)) = const$ (не зависит от времени)*

Доказательство.
Пусть $x(t)$ — экстремально, тогда рассмотрим производную

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(\dot{x}(t)\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t)) - L(x(t),\dot{x}(t))) =$$

$$= \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t)) + \dot{x}\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t))) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))\dot{x}(t) - \frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t))\ddot{x}(t) =$$

$$= \dot{x}(t)(\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p}(x(t),\dot{x}(t))) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t))) = 0$$

Таким образом, $H(x(t),\dot{x}(t)) = const$ ■

Примеры

Пример
$L(x,p) = \frac{mp^2}{2} - U(x) \Rightarrow H(x,p) = pmp - L = \frac{mp^2}{2} + U(x)$ (кинетическая и потенциальная энергии), следовательно $H(t)$ — полная энергия. Значит, $H = const$ — закон сохранения энергии.

Пример. Модель монотонности
$L(p, \dot{p}) = p\Phi(p, \dot{p}) - C(\Phi(p, \dot{p}))$

$$H(p, \dot{p}) = \dot{p}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - L = \dot{p}(p\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}(p.\dot{p}) - grad\ C(\Phi(p, \dot{p}))\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}(p, \dot{p})) - p\Phi(p, \dot{p}) - C(\Phi(p, \dot{p})) = const$$

Производственные функции

Для определения производства в ряде моделей возникает другая форма выражения производственного сектора, она связана с производственными функциями. (1928 г. Кобб-Дуглас)
Кобб и Дуглас рассматривали совокупное производство США с 1899 - 1921 гг. $Y = AK^{\alpha}$ - капитал L^{β}-труд $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$.
Производственная функция

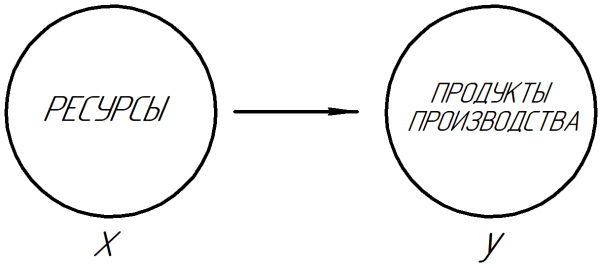

Рис. 5. К определению производственной функции

Определение 8.1. $x \in D \subset \mathbb{R}^n_+$ $y \in U \subset \mathbb{R}^m$. *Возникает некоторое отображение* $F : D \underset{x \to y}{\longrightarrow} U$, *ограничимся* $m = 1$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства производственных функций

1) D, U — Области в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. F — гладкое отображение.
2) Все ресурсы существенны: $F(x, x, 0, x, \ldots, x) = 0$
3) F монотонно возрастает по каждому аргументу. $\frac{\partial F}{\partial x_i} \geqslant 0$
4) Закон убывающей отдачи $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \leqslant 0$

Двухфакторная модель

Определение 8.2. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ однородна степени γ, если $\forall (x_1, \ldots, x_n)$ и $\forall \lambda > 0$ $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma f(x_1, \ldots, x_n)$*
при $\gamma = 1$ f называется линейно-однородной.
Формула Эйлера.
$f(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная степени γ $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n) x_i = \gamma f(x_1, \ldots, x_n)$

$Y = F(K, L)$, где Y - выпуск, K -капитал, L - труд.
Тогда можно записать условия в явном виде: $\frac{\partial F}{\partial K} \geqslant 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} \geqslant 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \leqslant 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leqslant 0$
Пусть F линейно однородна.
$y = \frac{Y}{L}$ — производительность труда, $\gamma = \frac{\partial Y}{\partial L}$ — предельная производительность труда,
$z = \frac{Y}{K}$ — средняя фондоотдача, $v = \frac{\partial Y}{\partial K}$ — предельная фондоотдача.

$$Y = F(K, L) = \frac{\partial F}{\partial K} + \frac{\partial F}{\partial L} L \text{ — стоимость произведенных товаров}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} \text{ — норма доходности капитала}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} L = W \text{ — средняя заработная плата}$$

$$\alpha = \frac{v}{z} = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} \text{ — эластичность выпуска по фондам}$$

$$\beta = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{L}{Y} \text{ — эластичность выпуска по труду}$$

Функции постоянной эластичности: $\alpha = const$ $\beta = const \Rightarrow$ функции Кубба-Дугласа:

$$Y = AK^\alpha L^\beta$$

Пусть F - линейно однородна, тогда $Y = F(K, L) = F(\frac{K}{L}, 1)L$, $\frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, 1)$ $y = f(k)$ $f(x) = F(x, 1)$ $k = \frac{K}{L}$ — фондовооруженность.

Класс некласических производственных функций

Определение 8.3. *Линейно-однородная производственная функция $F(K, L)$ называется неклассической, если выполняются условия: $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $f(0) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$*

В качестве примера можно взять функцию Кобба-Дугласа: $f(k) = Ak^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ $f' = \alpha A \frac{1}{k^{1-\alpha}} > 0$, $f'' = \alpha(\alpha - 1)A\frac{1}{k^{2-\alpha}} < 0$

$$F(K, L) = f(\frac{K}{L}L) = A(\frac{K}{L})^\alpha L = AK^\alpha L^{1-\alpha} \text{ — функция Кобба-Дугласа}$$

CES-функции

Функции постоянной эластичности замен (CES-функции).
Пусть $Y = F(K, L)$ однородная
Фиксируем уровень выпуска $F(K, L) = const$. Тогда $F(K, L(K)) = const$ $K \to K + \Delta K \Rightarrow L \to L + \Delta L$

$$-\frac{dL}{dK} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}} = S_L \text{ — норма замены основных фондов трудовыми ресурсами}$$

Аналогично $K = K(L)$

$$S_K = \frac{-dK}{dL} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$$

$$S_K \cdot S_L = 1$$

Можно заметить, что в случае однородности: $F(K, L) = L^\gamma f(k), k = \frac{K}{L}$ S_K, S_L — выражено через k.

Упражнение $S_K = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k$

$\frac{1}{\sigma_K} = \frac{dS_K}{dK}\frac{k}{S_K}$, σ_K — эластичночть замены трудовых ресурсов основными фондами
$\frac{1}{\sigma_L} = \frac{dS_L}{d(k^{-1})}\frac{k^{-1}}{S_L}$ $\sigma_K = \sigma_L$

Определение 8.4. *$F(K, L)$ называется CES=функцией, если $\sigma_K = const$ (не зависит от фондовооруженности k)*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение
Пусть $F(K,L)$ однородная степени γ, CES-функция и $\sigma = \frac{\sigma_k}{\gamma}$, тогда при
$\sigma = 1$ $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ $\alpha + \beta = \gamma$
$\sigma = 0$ $F(K,L) = min(AK^{\gamma}, BL^{\gamma})$
$\sigma \neq 0,1$ $F(K,L) = (AK^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + BL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}$

$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, $\delta = \frac{A}{A+B}$, $c = (A+B)^{\frac{-\gamma}{\rho}}$, то

$$F(K,L) = c(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{\frac{-\gamma}{\rho}}$$

Модели технического прогресса

$Y = F(K,L)$. Добавляем динамику времени: $Y(t) = F(K(t), L(t), t)$
Имеет место технический прогресс, если $\frac{\partial F}{\partial t} > 0$ $F(K,L,t) \rightsquigarrow y, r, z, v, \alpha, \beta, S_K, \sigma_k$

Определение 8.5. *Технический прогресс называется* Φ*-нейтральным, где* $\Phi(y, r, z, v, \alpha, \beta, S_K, \sigma_k)$ *если* $\Phi(y, r, z, v, \alpha, \beta, S_K, \sigma_k) = const$*, т.е. не зависит от времени.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Прогресс нейтральный по Хиксу

Дан технический прогресс нейтральный по Хиксу. Предполагается, что $S = \varphi(k)$, $\Phi(k, S) = S - \varphi(k)$
$S = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k = \varphi(k)$, значит $\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{\varphi(k)+1} = \varphi_1(k)$ $\frac{d}{dk}(\ln(f(k))) = \varphi(k) \Rightarrow \ln f(k) = \int \varphi_1(k)dk + c(t)$
$f(k) = e^{c(t)} e^{\int \varphi_1(k)dk} = A(t) f_0(k)$
Из этого выражения, получаем $F(K, L) = L^\gamma f(\frac{K}{L}) = A(t) f_0(\frac{K}{L}) L^\gamma = A(t) F_0(K, L)$

Прогресс нейтральный по Хараду и Солу

Технический прогресс нейтральный по Хараду v - предельная фондоотдача $=$ $\varphi(z$ - средняя фондоотдача). Пусть $F(K, L)$ — линейно однородна.

$$z = \frac{Y}{K} = \frac{y}{k} = \frac{f(k)}{k}$$

$$v = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial K} = f'(k)$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \frac{\partial (F(\frac{K}{L})L)}{\partial K} = \frac{\partial (f(\frac{K}{L})L)}{\partial K} = f'(\frac{K}{L}) = f'(k)$$

Получаем условие: $f'(k) = \varphi(\frac{f(k)}{k})$. Введем новую функцию $g(k) = \frac{f(k)}{k} \Rightarrow (g(k)k)' = \varphi(g(k))\ g(k) + g'(k)k = \varphi(g(k))$, получаем $\frac{1}{k} = \frac{g'(k)}{\varphi(g(k)) - g(k)}$. Можем взять интеграл

$$c(t) + \ln k \int \frac{1}{k} dk = \int \frac{dg}{\varphi(g) - g} = \psi(g)$$

Возьмем экспоненту

$$ke^{c(t)} = e^{\psi(g)} = \Psi(g) \Rightarrow g(k) = \Psi^{-1}(ke^{c(t)}) = \frac{f(k)}{k}$$

$$f(k) = k\Psi^{-1}(ke^{c(t)}) = ke^{c(t)}\Psi^{-1}(ke^{c(t)})\frac{1}{e^{c(t)}} =$$

$$=|\ A(t) = e^{-c(t)}\ f_0(k) = k\Psi^{-1}(k)\ |= A(t) f_0(\frac{k}{A(t)})$$

$$F(K, L, t) = Lf(\frac{K}{L}, t) = A(t) L f_0(\frac{K}{A(t)L}) = F_0(K, A(t)L)$$

Технический прогресс нейтральный по Солу
v - предельная производительность труда $= \varphi(y$ - средняя производительность труда)
$F(K, L, t) = F_0(A(t), K, L)$

9. Лекция 9

Моделирование процессов распределения капиталовложений

Сегодня рассмотрим модель, где широко используется понятие производственной функции — Модель Ромсея.
Имеем производственную функцию $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где Y — выпуск, K — капитал, L — труд. $t \in [0, T]$

$$Y(t) = C(t) + I(t), \text{ где } C(t) \text{ — потребление, } I(t) \text{ — инвестиции}$$

$$s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} \text{ — доля инвестиций, } 0 \leqslant s(t) \leqslant 1$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} \text{ — удельное потребление}$$

$c(t)e^{-\delta t}$ — коэффициент дисконтирования. Он отражает тот факт, что блага, которые присутствуют в данный момент времени более ценные, чем те, которые будут присутствовать через некоторое время в будущем. $\int\limits_0^T c(t)e^{-\delta t}dt = \int\limits_0^T \frac{C(t)}{L(t)}e^{\delta t}dt \to \max$

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) - \mu K(t), \ \mu \text{ — коэффициент амортизации}$$

$$L(t) = const$$

Пусть $F(K, L)$ — линейно однордная неклассическая функция, значит $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \Rightarrow F(K, L) = LF(\frac{K}{L}, 1) = f(\frac{K}{L})L$, $k = \frac{K}{L}$ — фондовооруженность. Можно выразить в терминах k.

$$k(t) = \frac{K(t)}{L}, \ C(t) = (1 - s(t))Y(t) = (1 - s(t))F(K(t), L) = L(1 - s(t))f(k(t))$$

$$\int\limits_0^T (1-s(t))f(k(t))e^{\delta t}dt \to \max, \ \frac{dK}{dt} = L\frac{dk}{dt}, \ K(t) = Lk(t), \ I(t) = s(t), \ Y(t) = Ls(t)f(k(t))$$

$$\frac{dk}{dt} = s(t)f(k(t)) - \mu k(t)$$

Начальные условия:

$$k(0) = k_0 = \frac{k(0)}{L}, \ k(T) \geqslant k_T \text{ — выбор экономического горизонта}$$

Таким образом, $\int\limits_0^T (1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t}dt \to \max$, $k'(t) = s(t)f(k(t)) - \mu k(t)$, $k(0) = k_0$, $k(T) \geqslant k_T$ $0 \leqslant s(t) \leqslant 1$ — управление.
Возникает вопрос нахождения решения такого рода задач. Существует необходимое условие максимальности

Принцип максимума Понтрягина. Описание

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$, которое будем называть фазовым пространством. $x'(t) = f(x(t), u(t), t)$, где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная. $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление В общем случае: $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, где U — множество допустимых управлений. Возьмем начальное условие $x(0) = x_0$, $u(t) \to x(t)$ — фазовая траектория, соответствующая управлению $u(t)$. $t \in [0, T]$, задаем $M \subset \mathbb{R}^n$.
Управление $u(t)$ переводит $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в M, если соответствующая траектория удовлетворяет условию $x(T) \in M$. Обозначим $u(t) \in U(x_0, M)$
Оптимизируем некоторый функционал $L(x, u, t)$ — лагронжиан, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $t \in \mathbb{R}$, тогда

$$\int\limits_0^T L(x(t), u(t), t)dt \to \max$$

Иными словами: Управление $u(t) \in U(x_0, M)$ называется оптимальным, если оно обеспечивает максимум функционала $\int\limits_0^T L(x(t), u(t), t)dt$ среди всех управлений из $U(x_0, M)$

Введем дополнительный набор переменных: $p \in \mathbb{R}^n$ — двойственные фазовые переменные. Тогда $H(x, p, u, t) = L(x, u, t) + pf(x, u, t)$ — гамильтониан.
$\frac{H}{\partial p} = f(x, u, t) \Rightarrow x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}$ $p'(t) = -\frac{H}{\partial x}$ — сопряженная система.

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \\ p'(t) = -\frac{H}{\partial x} \end{cases}$$

— гамильтонова система уравнений
Определим еще одну функцию

$$M(x, p, t) = \max_{u \in U} H(x, p, u, t)$$

Теорема. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства)

Теорема 9.1. ***Принцип максимума Понтрягина***
Пусть управление $u(t)$ $t \in [0, T]$ *является оптимальным для задачи* $\int\limits_0^t L(x(t), u(t), t) \to \max$, $x'(t) = f(x(t), u(t), t)$, $x(0) = x_)$, $x(T) = X_T$, $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, *тогда* $\exists$ *кусочно непрерывное дифференцируемое решение* $p(t)$ *сопряженной системы* $p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t), t)$. *Такой что* $H(x(t), p(t), u(t), t) = M(x(t), p(t), t)$.
Если M *имеет вид* $M = x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant x_t$, *то* $p(t)$ *удовлетворяет условию* $p(T)(x(T) - x_T) = 0$

Применение принципа максимума Понтрягина к задаче распределения капиталовложений

$L(k, u, t) = (1 - s)f(k)e^{-\delta t}$ $H(k, p, u, t) = (1 - s)f(k)e^{-\delta t} + p(sf(k) - \mu k)$

Стационарные решения в модели Рамсея

$k(t) = const$, $s(t) = const$ $\int\limits_0^T (1 - s)tf(k)e^{-\delta t}dt = (1 - s)f(k)\frac{1}{\partial}(1 - e^{-\delta T})$
$(1 - s)f(k) \to max$, $sf(k) - \mu k = 0$, $f(k) = \frac{\mu}{s}k$

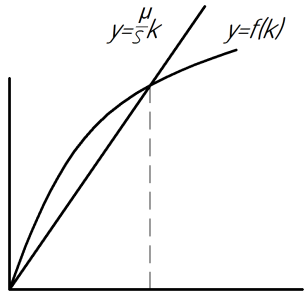

Рис. 6. Решение для k_s

$f(k_s) - sf(k_s) = f(k_s) - \mu k_s \to max \Rightarrow \frac{d}{ds}(f(k_s) - \mu k_s) = 0$, $f'(k_s)\frac{dk_s}{ds} - \mu\frac{dk_s}{ds} = 0 \Rightarrow f'(k_s) = \mu$ $f'(k^*) = \mu$, $s^* = \frac{\mu k^*}{f(k^*)} = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}$ — доля инвестиции.

Умножим долю инвестиции на выпуск: $K^* = k^*L$, $I^* = s^*F(K^*, L) = \frac{\frac{\partial F}{\partial K}(K^*, L)K^*}{F(K^*, L)}F(K^*, L)$

$$I^* = \frac{\partial F}{\partial K}(K^*, L)K^*$$

У нас уже встречалось это выражение. $y = \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L$ — золотое правило инвестиций.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

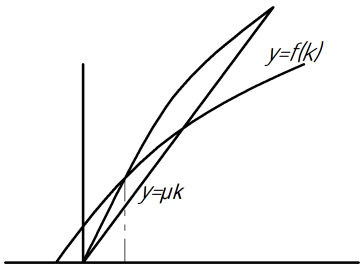

Рис. 7. Решение для k^*

Общий случай: k(t), s(t) не постоянны

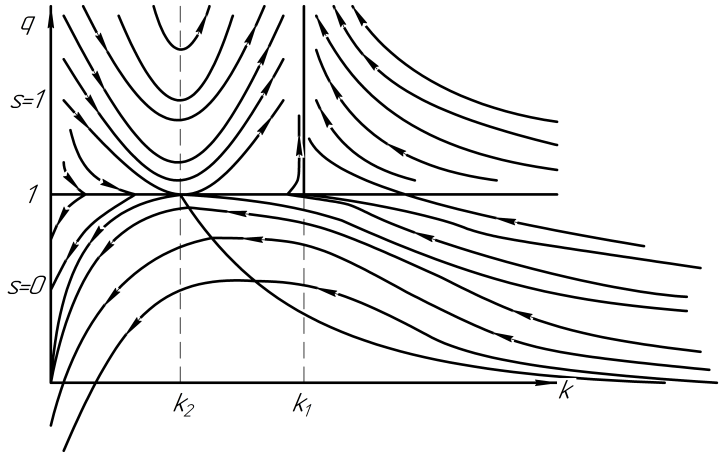

Рис. 8.

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial K} = -(1-s)e^{-\delta t}f'(k) - p(sf'(k) - \mu)$$

$$H(k,p,s,t) = s[f(k)(p - e^{-\delta t})] + f(k)e^{-\delta t} - \mu pk =$$

$$= sf(k)e^{-\delta t}(pe^{\delta t} - 1) + f(k)e^{-\delta t} - \mu pk$$

$$s^*(t) = \begin{cases} 1, pe^{\delta t} > 1 \\ 0, pe^{\delta t} < 1 \\ \in [0,1], pe^{\delta t} = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, q(t) > 1 \\ 0, q(t) < 1 \\ \in [0,1], q(t) = 1 \end{cases}$$

Перепишем сопряженную систему через q: $q(t) = p(t)e^{\delta t}$,

$$q' = p'e^{\delta t} + \delta pe^{\delta t} =$$

$$= -e^{\delta t}((1-s)e^{-\delta t}f'(k) + p(sf'(k) - \mu)) +^{\delta t} = -(1-s)f'(k) + q(sf'(k) - \mu) + \delta q =$$

$$= -(1-s)f'(k) + q(sf'(k)) + q(\mu + \delta - f'(k)) =$$

$$\begin{cases} k' = sf(k) - \mu k \\ q' = (s-1)f'(k) + q(\mu + \delta - sf'(k)) \end{cases}$$

$k(0) = k_0$
$q(T)(k(T) - k_T) = 0,$
$q > 1$ $s = 1$: $\begin{cases} k' = f(k) - \mu \\ q' = q(\mu + \delta - f'(k)) \end{cases}$ $q < 1$ $s = 0$: $\begin{cases} k' = -\mu K \\ q' = -f'(k) + (\mu + \delta) \end{cases}$
$f(k_1) = \mu k_2,\ f'(k_2) = \mu + \delta,\ (k_2 < k_1)$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

10. Лекция 10

Модели со случайными и неопределенными факторами

Модели со случайными факторами

Рассмотрим случай, когда выгрыш зависит от внешнего фактора $W(x, y) \to max$, где $x \in X$, y - внешний. В модели со случайными факторами y - случайная величина.
(Ω, A, P) - вероятностное пространство, где Ω - множество элементарных событий, A - σ-алгебра подмножеств Ω, P - вероятностная мера на A, т.е. $A \in A \mapsto P(A) \in [0, 1]$
Тогда случайная величина - измеримое отображение $y : \Omega \to \mathbb{R}$.
Функция распределения: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, тогда $F_\xi(t) = P\{\xi \leqslant t\}$. $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, F_ξ - монотонно возрастает.
Функция плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = F_\xi(t)$
Математическое ожидание: $M_\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf_\xi(t)dt$
Дисперсия: $D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2$
Моменты: $m_k(\xi) = M_{\xi^k}$
Квантиль: $Q_\alpha(\xi) = F_\xi^{-1}(\alpha) : \quad P(\xi \leqslant Q_\alpha(\xi)) = \alpha$
Можем сказать, что у нас есть функционал, который случайной величине сопоставляет характеристику.
Пусть у нас есть задача со случайной величиной. При фиксированном x $W(x, y)$ - случайная величина. Можем применить функционал $\Phi(W(x, y)) = \tilde{W}(x) \underset{x \in X}{\to} max$. Это называется Φ-критерий решения задачи максимизации.

Модели с неопределенными факторами

$W(x, y) \underset{x \in X}{\to} max$, где $y \in Y$ - неизвестная внешняя переменная.

1. Критерий пессимиста (критерий Вальда).
Рассмотрим $W(x, y)$ и найдем минимальный выигрыш для фиксированного x $W'(x) = \min\limits_{y \in Y} W(x, y)$, и максимизируем $W'(x)$.

2. Критерий оптимиста.
$W''(x) = \max\limits_{y \in Y} W(x, y)$ и максимизируем $W''(x)$.

3. Критерий Гурвица.
$\alpha \in [0, 1]$ и рассмотрим $W_\alpha(x) = \alpha W'(x) + (1 - \alpha)W''(x)$. Фиксируем α и максимизируем $W_\alpha(x)$. В случае $\alpha = 0$ - критерий оптимиста, $\alpha = 1$ - критерий пессимиста.

4. Критерий Сэвиджа.
При фиксированном x наше решение будет отличаться от оптимального на величину $B(x,y) = \max\limits_{x\in X} W(x,y) - W(x,y)$, которая называется функцией потерь. Критерий Сэвиджа заключается в минимизации этой функции по критерию пессимиста.

5. Критерий Байесса-Лапласа
Предполагаем, что y - случайная величина с известными распределением. Далее сводим эту задачу к модели со случайными факторами.

Имитационные модели

x - фазовая переменная, y - случайные факторы. $x'(t) = f(x(t), y(t))$ - динамическая система.

Алгоритм работы имитационной модели

1. Формализация модели
2. Программироавние модели
3. Моделирование
4. Статистическая обработка

Модель Нейлора

Основные факторы:
Y_t - национальный доход, C_t - потребление, P_t - прибыль государства, I_t - инвестиции, W_t^p - фонд заработной платы в частном секторе, K_t - основной капитал.
Управляющие факторы:
G_t - государственные заказы, W_t - фонд заработной платы в государственном секторе и T_t - налог на деловую активность.
Между этими факторами существуют соотношения:
1) Балансовые соотношения:
уравнение дохода: $Y_t = C_t + I_t + G_t - T_t$
ураванение прибыли: $P_t = Y_t - (W_t + W_t^p)$
уравнение изменения капитала: $K_t = K_{t-1} + I_t$

2) Уравнения динамики:
динамика спроса: $C_t = a_0 + a_1(W_t + W_t^p) + a_2 P_t + a_3 P_{t-1} + \xi_t^1$

динамика инвестиций: $I_t = b_0 + b_1 K_{t-1} + b_2 P_t + b_3 P_{t-1} + \xi_t^2$
динамика спроса на рабочую силу: $W_t^p = c_0 + c_1(Y_t + T_t - W_t) + c_2(Y_{t-1} + T_{t-1} - W_{t-1}) + c_3 t + \xi_t^3$
$(\xi_t^1, \xi_t^2, \xi_t^3) = \vec{\xi_t}$ - последовательность независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин.

6 типов устойчивости

$x = f((x,t),\ x \in \mathbb{R}^n\ \ x(0) = x_0 \mapsto x(t)$ - решение
$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}(t)$ - решение

Определение 10.1. *Решение $x(t)$ - устойчиво, если $\forall \varepsilon > 0\ \delta > 0 :\ \forall$ решения $\tilde{x}(t) :\ \|\tilde{x}(0) - x(0)\| < \delta$ выполнено $\forall t\ \|\tilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$*

$x(t) \equiv x_0$ - стационарное решение.

Определение 10.2. *Решение $x(t)$ - асимптотически устойчиво, если $\forall$ другого решения $\tilde{x}(t) :\ \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} \infty$*

Пусть $\dot{x} = f(x)$, x_0 - стационарная точка, т.е. $f(x_0) = 0$. $\dot{x} = A(x - x_0)$, где $A = df(x_0)$ - линеаризация в окрестности x_0.
Утверждение.
Пусть для любого собственного значения λ матрицы A $Re\lambda < 0$. Тогда $x(t) \equiv x_0$ - асимптотически устойчиво.
Пусть $\varphi(t)$ - решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x,t)$. Тогда:

1) $\varphi(t)$ - сильно абсолютно устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $|\varphi(t) - \psi(t)| \underset{t\to\infty}{\to} 0$
2) $\varphi(t)$ - слабо абсолютно устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $|\varphi(t) - \psi(t)|$ - ограничена
3) $\varphi(t)$ - сильно относительно устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} \to 1$
4) $\varphi(t)$ - слабо относительно устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $\exists c > 0 : \forall t\ \dfrac{1}{c} < \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} < c$
5) $\varphi(t)$ - сильно логарифмически устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $\dfrac{ln\psi(t)}{ln\varphi(t)} \to 1$
6) $\varphi(t)$ - слабо логарифмически устойчиво, если $\forall$ решения $\psi(t)$ $\exists c > 0 : \forall t\ \dfrac{1}{c} < \dfrac{ln\psi(t)}{ln\varphi(t)} < c$

Неоклассическая модель роста Солоу

$Y = F(K, L)$, F — линейная однородная. $F(k, 1) = f(k)$
Пусть $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$
$f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$
$f'(\infty) = a$, $f'(0) = b$, где $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$; $t \in [0, T]$
$Y(t) = F(K(t), L(t))$, s — доля инвестиций, n — темп прироста рабочей силы.

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = nL(t) \\ \dot{K}(t) = sF(K(t), L(t)) \ (*) \end{cases}$$

В силу линейной однородности, можем эту модель упростить. $L(t) = L_0 e^{nt}$, $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$,

$$\dot{K}(t) = \frac{d}{dt}(k(t)L(t)) = \dot{k}(t)L(t) + k(t)nL(t) = (\dot{k} + nk)L(t)$$

$$sF(K(t), L(t)) = sF(\frac{K(t)}{L(t)}, 1)L(t) = sf(k)L(t)$$

$$\dot{k} = sf(k) - nk$$

Теорема 10.1. *Пусть $\frac{n}{s} \in (a, b)$, тогда:*

1) *уравнение (**) имеет единственное стационарное решение k^*, которое при этом асимптотически устойчиво.*

2) *Любое решение исходной системы (*) слабо относительно устойчиво*

Докажем теорему:

Доказательство. $k(t) \equiv k^* \Rightarrow 0 = sf(k^*) - nk^* \Leftrightarrow f(k^*) = \frac{nk^*}{s}$, $f(k) - \frac{nk}{s}$, $f'(k) - \frac{n}{s}$
$k < k^*$ $sf(k) - nk > 0$
$k > k^*$ $sf(k) - nk < 0 \Rightarrow k(t)$ — решение $\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} k(t) = k^* \to k^*$ — асимптотическая устойчивость.
Пусть $K_1(t), L_1(t)$ — решение, $K_2(t), L_2(t)$ — другое решение, тогда $L_1(t) = c_1 e^{nt}$), $L_2(t) = c_2 e^{nt} \Rightarrow \frac{L_1(t)}{L_2(t)} = \frac{c_1}{c_2}$ — ограничено, а если взять $\frac{K_1(t)}{K_2(t)} = \frac{k_1(t)L_1(t)}{k_2(t)L_2(t)} \to \frac{k^*}{k^*}\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $\Rightarrow$ — ограничена, т.е. $\exists c$: $\forall t \frac{1}{c} < \frac{K_1(t)}{K_2(t)} < c$ — таким образом, $(K_1(t), K_2(t)))$ — слабо относительно устойчиво. ■

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ