МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. ЧАСТЬ 2

КУЗНЕЦОВ
СТЕПАН ЛЬВОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
ПЕТРУСОВУ ЕКАТЕРИНУ ДМИТРИЕВНУ

Содержание

Лекция 1

Примитивно-рекурсивные функции

Примитивно-рекурсивные функции

Функция $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$. Класс примитивно-рекурсивных функций (ПРФ) строго содержится в классе вычислимых функций. Модель вычислений ПРФ слабее, чем для вычислимых функций. Однако вычислимые функции бывают частичными (может не выдать никакого ответа в программе), что не является удобным для некоторых целей. Наша функция должна быть доказуемо всюду определенной. Например, если $f(\overline{x}) = y, F(\overline{x}, y)$, то утверждение должно быть истинно и доказуемо для функций, подходящих этой формальной системе. Такие функции называются доказуемо тотальными. ПРФ входят в этот класс. Вспомним основные определения.

1) Базовые функции

$$\begin{aligned} &Z(x) = 0 \\ &S(x) = x + 1 \\ &I_k^m(x_1, \ldots, x_m) = x_k \end{aligned}$$

2) Композиция

$$g(f_1(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x}))$$

3) Примитивная рекурсия

$$\begin{aligned} &f(0, \overline{y}) = g(\overline{y}) \\ &f(x + 1, \overline{y}) = h(f(x, \overline{y}), x, \overline{y}) \end{aligned}$$

Примеры $x+y, x \cdot y, x!$, взятие предыдущего $pred(x) = x \dot{-} 1$, урезанное вычитание

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, x \geqslant y \\ 0, x < y \end{cases}$$

Программно можно реализовать

$$cases(x, y, z) = \begin{cases} y, x = 0 \\ z, x > 0 \end{cases}$$

Помимо ПРФ существуют примитивно-рекурсивные предикаты (или отношения) $R \subseteq \mathbb{N}^m$, которые соответсвуют

$$\chi_R(\overline{x}) = \begin{cases} 1, \overline{x} \in R \\ 0, \overline{x} \notin R \end{cases}$$

Существует ограниченный μ-оператор:

$$\mu y < z.R(\overline{x}, y) = \begin{cases} y_0, \text{если } y_0 - \text{ наименьшее } y < x \\ z, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu y < x.R(\overline{x}, y) = \sum_{y<z} \prod_{u \leqslant y} (1 \dot{-} \chi_R(\overline{x}, u))$$

При рассмотрении двух случаев получим, что

$$\prod_{u \leqslant y} (1 \dot{-} \chi_R(\overline{x}, u)) = \begin{cases} 1, y < y_0 \\ 0, y \geqslant y_0 \end{cases}$$

Предикат "быть простым числом"$Prime(x)$ является ПРФ. Определим операцию деления с остатком $Rm(x, y)$. Значит,

$$\bigwedge_{1<y<x} \neg(Rm(x, y) = 0)$$

Это отношение является примитивно-рекурсивным, т.к. отрицание выражается так, как было определено выше, а конъюнкция является произведением характеристических функций, больших 1. Тогда $n-$ простое число

$$p_0 = 2$$
$$p_{x+1} = \mu y < \prod_{t \leqslant x} p_t + 1.Prime(y) \wedge y > p_x$$

Кодирование последовательностей

Хотим возвратную рекурсию реализовать в примитивно-рекурсивной среде. При рекурсии вида $f(x, \overline{y}) = h(f(x-1, \overline{y}), x-1, \overline{y})$ для избежания нефиксированного числа аргументов в h в качестве аргумента рассматривается конечная последовательность натуральных чисел с помощью одного числа. Для этого реализуется специальное кодирование.

Код последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ будет $p_0^{a+0+1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}+1}$. Такой не будет являться кодом двух последовательностей одновременно, следовательно по такому коду можно идентифицировать последовательность и узнать ее длину, выявить $i-$ый элемент. Для пустой последовательности код будет 1 за счет "$+1$"в степени кода.

Утверждение Следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

1) Характеристическая функция множества всех кодов последовательности

$$Seq(x) = \begin{cases} 1, x - \text{ код последовательности} \\ 0 - \text{иначе} \end{cases}$$

2) Длина последовательности с кодом $x - Ln(x)$.

3) Выделение $i-$ того элемента последовательности $Ind(x,i) = (x)_i = a_i$.

4) Функция конкатенации $Cat(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$

<u>*Доказательство*</u>

1)

$$\forall i : p_i | x \Rightarrow \forall j < i : p_j | x \Rightarrow x - \text{ код последовательности}$$
$$\text{Или } \forall i < x (p_i | x \to p_{i-1} | x), i < p_i, p_i | x \Rightarrow p_i \leqslant x$$

2) Длина - наименьший номер числа, не встречающийся в индексах кода.

$$Ln(x) = \mu i \leqslant x : p_i \text{ не является делителем } x, p_x > x$$

3) $Ind(x,i) = \mu z \leqslant x . p_i^{z+2}$ не является делителем x

4)

$$[a_0, dots, a_{n-1}] \times [b_0, \ldots, b_{n-1}] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}] =$$
$$= \underbrace{p_0^{a_0+1} \ldots p_{n-1}^{a_{n-1}+1}}_{x} \underbrace{p_n^{b_0+1} \ldots p_{i+n}^{b_i+1} p_{i+k-1}^{b_{k-1}+1}}_{\hat{y}}$$
$$n = Ln(x)$$
$$\hat{y} = \prod_{i < Ln(y)} (p_{i+Ln(x)})^{(y)_i+1}$$
$$[\Lambda] = 1$$
$$[a] = 2^{a+1}$$
$$[a,b] = 2^{a+1}3^{b+1}$$

Совместная рекурсия

При совместной рекурсии определяются две и больше функций одновременно с использованием предыдущих значений этих функций.

$$f_1(0, \overline{y}) = g_1(\overline{y})$$
$$f_2(0, \overline{y}) = g_2(\overline{y})$$
$$f_1(x+1, \overline{y}) = h_1(f_1(x, \overline{y}), f_2(x, \overline{y}), x, \overline{y})$$
$$f_2(x+1, \overline{y}) = h_2(f_1(x, \overline{y}), f_2(x, \overline{y}), x, \overline{y})$$

Для сведения к приметивной рекурсии необходимо использовать пары. Определим функцию

$$\begin{aligned}
&f(0,\overline{y}) = [g_1(\overline{y}), g_2(\overline{y})]\\
&f(x+1,\overline{y}) = [h_1((f(x,\overline{y})_0, (f(x,\overline{y})_1), x, \overline{y})), h_2(\dots)]\\
&\Rightarrow f_1(x,\overline{y}) = (f(x,\overline{y}))_0\\
&\Rightarrow f_2(x,\overline{y}) = (f(x,\overline{y}))_1
\end{aligned}$$

Возвратная рекурсия

$$f_{\#}(x,\overline{y}) = [f(0,\overline{y}),\dots,f(x-1,\overline{y})]$$

По определению возвратной рекурсии

$$f(x,\overline{y}) = h(f_{\#}(x,\overline{y}), x, \overline{y})$$

Индукция:

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall y \varphi(y)$$

Полная индукция:

$$\forall x((\forall x < x\ \varphi(x)) \to \varphi(x)) \to \forall y \varphi(y)$$

Для сведения к примитивной рекурсии $f_{\#}$ необходимо описать через f и воспользоваться совместной рекурсией.

$$\begin{cases}
f(0,\overline{y}) = h(1,0,\overline{y})\\
f_{\#}(0,\overline{y}) = 1\\
f(x,\overline{y}) = h(f_{\#}(x,\overline{y}), x, \overline{y})\\
f_{\#}(x,\overline{y}) = f_{\#}(x-1,\overline{y})[f(x-1,\overline{y})]
\end{cases}$$

Функция Аккермана

$$\begin{cases}
Ack(0,x) = x+2\\
Ack(n+1,0) = Ack(n,0)\\
Ack(n+1,m+1) = Ack(n, Ack(n+1,m))
\end{cases}$$

Функция Аккермана вычислима, однако не является примитивно-рекурсивной.

Задача $Ack(n, n)$ не ПРФ.

Идея решения Если зафиксировать один из аргументов функции, то можно снизу оценить скорость роста функции экспоненциальным образом по предыдущим. Далее необходимо доказать теорему, что для любой примитивно-рекурсивной программы, если в ней глубина вложенности рекурсии ограничена числом k, то можно написать верхнюю оценку на скорость роста этой функции. Получится, что $k-$ ая ветвь функции Аккермана будет расти быстрее, чем любая другая ПРФ, у которой глубина вложенности рекурсии $\leqslant k$. Значит, $Ack(n, n)$ не ПРФ, т.к. она обладает такой ветвью.

Лекция 2

Арифметика Пеано

Арифметика Пеано

Сигнатура $=, 0, S, +, \cdot$. Арифметика Пеано содержит все стандартные аксиомы исчисления предикатов с равенствами, а также нелогические аксиомы:

1) определяющие соотношения для функциональных символов
   а) $0 \neq Sx$
   б) $S_x = Sy \to x = y$
   в) $x + 0 = x$
   г) $x + Sy = S(x + y)$
   д) $x \cdot 0 = 0$
   е) $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$
2) индукция
   а) $(\varphi(0) \wedge \forall y(\varphi(y) \to \varphi(S_y))) \to \varphi(x)$ - схема аксиомы индукци, $\varphi[x := 0], \varphi[x := Sy]$
   б) аксиома исчисления предикатов 1-го порядка
   в) правила вывода $\frac{\varphi \to \psi \; \varphi}{\psi}$ $\frac{\varphi(x)}{\forall y \varphi(y)}$

В арифметике Пеано аксиома индукции не ограничена, φ произвольная. Существуют и ограниченные версии. Стандартная модель $\mathbb{N} \neq PA$. Арифметика Пеано не обладает полнотой, т.к. существуют утверждения, которые она не может ни доказать, ни опровергнуть.

Определение Нумерал $n = \underbrace{S(S \ldots (S}_{n} 0))$.

Формулы в арифметике Пеано

Если φ доказуема, то это записывается, как $PA \vdash \varphi$ или $\vdash \varphi$.
Упражнение

$$\vdash x = 0 \vee \exists y x = Sy$$
$$\vdash x + y = y + x$$
$$\vdash (x + y) + z = x + (y + z)$$
$$\vdash x(y + z) = xy + xz$$
$$\vdash (xy)z = z(yz)$$
$$\vdash xy = yx$$

Определение $x < y \leftrightharpoons \exists z(x + Sz = y)$.

Упражнение

$$\vdash \neg x < x$$
$$\vdash x < y \wedge y < z \to x < z$$
$$\vdash x < y \vee y < x \vee x = y$$
$$\vdash x < y \to x + z < y + z$$
$$\vdash 0 < z \wedge x < y \to xz < yz$$

Задача Если u и v замкнутые термы, задающие одно и то же число, то их равенство доказуемо в арифметике Пеано.

Задача $PA \vdash x < \underline{n} \leftrightarrow \bigwedge_{i<n} x = i(x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = n - 1)$.

Определение Полная индукция $(\forall y(\forall z(z < y \to \varphi(z))) \to \varphi(y)) \to \varphi(x)$.

Используя обычную индукцию, можно доказать полную с помощью $\psi(x) \leftrightharpoons \forall y(y \leqslant x \to \varphi(x))$. Пусть верна посылка полной индукции, докажем эту формулу. Если верно $\psi(t)$, то $\psi(St) \leftrightarrow \psi(t) \vee \varphi(St)$, $\psi(t) \leftrightarrow \forall z(z < St \to \varphi(z))$. Т.е. $\psi(x) \to \varphi(x)$.

Определение Принцип наименьшего числа $\varphi(x) \to \exists x'(\varphi(x') \wedge \forall y < x' \neg\varphi(y))$.

Утверждение

$$\forall y < u\, \xi \leftrightharpoons \forall y(y < u \to \xi)$$
$$\exists y < u\, \xi \leftrightharpoons \exists y(y < u \wedge \xi)$$

Доказательство

$$\forall x'(\neg\varphi(x') \vee \neg\forall y < x' \neg\varphi(y)) \to \neg\varphi(x)$$
$$\forall x'(\neg\varphi(x') \leftarrow \forall y < x' \neg\varphi(y)) \to \neg\varphi(x)$$

Функции (многочлены) определяются с помощью термов. Например, определение кусочно-линейной функции через термы будет невозможно за счет определения арифметики Пеано. Для реализации такой функции необходимо определить функции с помощью формул. Функция $f(x)$ имеет график $\{(\overline{x}, y) | y = f(\overline{x})\} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, задающийся формулой φ.

$$f(\overline{n}) = m \leftrightarrow N \vDash \varphi(\overline{n}, m)$$

Но дополнительно необходимо, чтобы формулы обладали свойствами доказуемости. Например, для нумералов это должно быть доказуемо в арифметике Пеано.

Определение Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ доказуема тотально в PA, если существует формула $\varphi(\overline{x}, y)$:

1) $f(\overline{n}) = m \Rightarrow PA \vdash \varphi(\overline{n}, m)$
2) $PA \vdash \forall\overline{x}\exists! y\, \varphi(\overline{x}, y)$
   $\exists! y\, \xi(y) \leftrightharpoons \exists y(\xi(y) \wedge \forall y'(\xi(y' \to y' = y)))$

Теоремы

Теорема Пусть T - теория 1-го порядка в сигнатуре Ω и пусть $T \vdash \forall \overline{x} \exists ! y\, \varphi(\overline{x}, y)$. Пусть f-новый k-местный функциональный символ, который не входит в сигнатуру Ω, T_f - теория в сигнатуре $\Omega + f$: $T_f = T \bigcup \{f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y)\}$. Тогда T_f- консервативное расширение T, т.е. если $\psi \in F_{m_\Omega}$, то $T_f \vdash \psi \leftrightarrow T \vdash \psi$.
$T_f \vdash u(f(0)) = w \leftrightarrow \exists x(\varphi(v, x) \wedge u(x) = w)$

Доказательство $\Leftarrow$ очевидно.
$\Rightarrow$ от противного. $T \vdash \psi \Rightarrow$ по теореме Гёделя о полноте $\exists M - \Omega$-структура, $M \models T, M \neq \psi$. $M_f(\Omega + f)-$структура, $M_f|_\Omega = M$, $M \models \overline{x} \exists ! y\, \varphi(\overline{x}, y), \overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in M^k$, $M \models \exists ! y\, \varphi(\overline{a}, y)$, $f_{M_f}(\overline{a}) = b, y = b$. Утверждается, что $M_f \models T_f$. Необходимо проверить, что $M_f \models f(\overline{a}) = b \leftrightarrow \varphi(\overline{a}, b)$. Но в $M_f \neq \psi$. Значит, T_f не доказуема для ψ.

Теорема Всякая примитивно-рекурсивная функция доказуемо-тотальна в арифметике Пеано.

Замечание Не всякая всюду определенная вычислимая функция доказуема тотально в арифметике Пеано.

Доказательство От противного. Пусть для каждой всюду определенно вычислимой функции можно построить представление, что она будет доказуема тотально. Тогда можно написать язык программирования, полный по Тьюрингу, но в классе всех всюду определенных функций. Пусть A - алгоритм, вычисляющий функцию f. По ней построена формула φ. D - доказательство в ПА формулы $\forall \overline{x} \exists ! y\, \varphi(\overline{x}, y)$. Будем рассматривать пары (φ, D). Исполнение:

1) Проверить D
   а) Если не доказуема, то возвращаем 0.
   б) Если доказуема, то ищем $f(\overline{x})$.

Все функции в таком программировании останавливаются.

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_0, D_0) \\
&(\varphi_1, D_1) \\
&\ldots \\
&d(n) = f_n(n) + 1
\end{aligned}
$$

d вычислима, всюду определена и не доказуема тотально в PA.

Для класса ПРФ получим вычислимую всюду определенную функцию, но не являющейся ПРФ. Рассмотрим $\forall x\, \exists ! y\, \delta(x, y)$, где δ - формула, представляющая d. Эта формула истина в стандартной модели, но не доказуема в PA. Следовательно, важно, чтобы функции были примитивно-рекурсивными.

Примитивная рекурсия

$$\begin{cases} f(0,\overline{y}) = g(\overline{y}) \\ f(x+1,\overline{y}) = h(f(x,\overline{y}),x,\overline{y}) \end{cases}$$

$$\varphi(x,\overline{y},z) : \exists \text{ последовательность } \delta : \begin{cases} S_o = g(\overline{y}) \\ \forall i < x\ S_{i+1} = h(S_i,x,\overline{y}) \\ S_x = z \end{cases}$$

Утверждение Функция взятия остатка доказуема тотально в PA.

$$\rho(x,d,r) = (r < d \wedge \exists q : x = qd + r) \vee (d = 0 \wedge r = x)$$

Необходимо доказать, что $\vdash \forall x, d\, \exists! r\ \rho(x,d,r)$.

Доказательство Доказывается индукцией по x.

$$\begin{aligned} &\vdash x, d \exists! r\ \rho(x,d,r) \\ &r < d \to Sr < d \vee Sr = d \\ &x = qd + r \\ &Sx = qd + Sr \\ &\text{Ост}(x,d) = r \end{aligned}$$

Утверждение $PA \vdash a, b > 1 \wedge a, b$ взаимно простые $\to \exists x, y(ax + 1 = by)$ (теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя)

Доказательство В PA. Рассмотрим наименьшее i_0 :

$$\begin{aligned} &\exists x, y(ax_0 + i_0 = by_0) \\ &i = a, a\underbrace{(b-1)}_{x} + a = \underbrace{\ a\ }_{y} b \end{aligned}$$

Если $\exists x, y(ax+i = by)$, то $i_0|i$. Т.к. $i > i_0$, $i = qi_0 + r \Rightarrow qax_0 + qi_0 = qby_0, ax + i = by$.

$$\begin{aligned} &x' \leqslant x + qby_0 + (b-1)x_0q \\ &y' \leqslant y + qax_0 + (a-1)y_0q \\ &ax' + r = by' \\ &i = a : x_a = b - 1, y_a = a \\ &i = b : ab + b = b(a+1), x_b = b, y_b = a + 1 \\ &\Rightarrow i_0|a, i_0|b \Rightarrow i_0 = 1 \end{aligned}$$

Утверждение $PA \vdash p$ - простое, $p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$.

Доказательство Если p не делитель a, то они взаимно простые, значит, $ax + 1 = py$.

$$\begin{aligned} &abx + b = bpy \\ &p|abx \\ &p|bpy \Rightarrow p|b \end{aligned}$$

Лекция 3

Китайская теорема об остатках

Определение наименьшего общего кратного чисел

$\text{НОК}[m(i), i < k]$, где $m(i) -$ псвдотерм

$\text{НОК}[m(i), i < k] = f(k)$

$"f(k) = l" \leqslant ((\forall i < k\, m(i) > 0) \wedge l > 0 \wedge (\forall i < k\, m(i) < l) \wedge (\forall j < l\, \neg \forall i < k\, m(i)|l))\vee$
$\vee\, (l = 0 \wedge \exists i < k\, m(i) = 0) \vee (k = l = 0)$

Утверждение $PA \vdash \forall k \exists ! l\, \varphi_f(k, l)$.
Упражнение Индукция по k.
Упражнение $PA \vdash j < k \rightarrow m(j)|\text{НОК}[m(i), i < k]$
Упражнение $PA \vdash \forall i < km(i)|d \rightarrow \text{НОК}[m(i), i < k]|d$
Упражнение $PA \vdash p\,\text{простое}\ \wedge p|\text{НОК}[m(i), i < k] \rightarrow \exists i < k\, p|m(i)$

Китайская теорема об остатках и её доказательство

Китайская теорема об остатках m, h - псевдотермы.

$PA \vdash \forall i < k(m(i) > 1 \wedge m(i) > h(i)) \wedge \forall i, j(i < j < k \rightarrow m(i)$ и $m(j)$ взаимно простые$) \rightarrow \exists a < \text{НОК}[m(i), i < k]\ \forall i < k\, \text{ост}(a, m(i)) = h(i)$

Доказательство Дано: $\forall i < k_0\ (m(i) > 1 \wedge m(i) > h(i))$ и $\forall i, j\ (i < j < k_0 \rightarrow m(i)$ и $m(j)$ взаимно простые. Будем рассматривать $k \leqslant k_0$. Индукцией по k докажем, что $\exists a < \text{НОК}[m(i), i < k]\ \forall i < k\, \text{ост}(a, m(i)) = h(i)$.

База: $k = 0, a \leqslant 1$.

Шаг. Пусть $m \leqslant m(k)$. По индукции $\exists a < \text{НОК}[m(i), i < k]\ \forall i < k\, \text{ост}(a, m(i)) = h(i)$. l, m взаимно простые, т.к $p|l \rightarrow p|m(i), i < k \rightarrow p$ не делитель m. Значит, $\exists x, y : lx + 1 = ly$. Умножим на $a + (l - 1)h(k)$. Получим

$$\begin{aligned}
&\text{Слева } alx + a + l(l-1)h(k) + (l-1)h(k) = lx' + a + (l-1)h(k)\\
&\text{Справа } my'\\
&\text{l}x' + a + (l-1)h(k) = my'\\
&a \leqslant l(x' + h(k)) + a\\
&a' = my' + h(k)\\
&\Rightarrow \text{ост}(a', m) = h(k)\\
&\text{ост}(a', m(i)(i<k)) = \text{ост}(a, m(i)) = h(i)
\end{aligned}$$

Хотим $a' < \text{НОК}[m(i), i \leqslant k] = l'$. Тогда $a'' \leqslant \text{ост}(a', l') = a' - bl'$. Получим, что $\text{ост}(a'', m(i)(i \leqslant k)) = \text{ост}(a', m(i)) = h(i)$.

β-функция Гёделя

<u>**Определение**</u> $\beta(a,b,i) = \text{ост}(a, \underbrace{1 + (i+1)b}_{m(i)})$

Лемма Гёделя h - псевдотерм, $PA \vdash \forall k \exists a, b :$

1) $\forall i < k\ \beta(a,b,i) = h(i)$

2) $b \leqslant \text{НОК}[i+1, i < s], s = max\{k, max[h(i), i<k]\} + 1$

3) $a < \text{НОК}[m(i), i < k]$

<u>*Доказательство*</u>

$$\begin{aligned}
&b = \text{НОК}[i+1, i<s]\\
&i<j<k\ p|1+(i+1)b, p|1+(j+1)b \Rightarrow\\
&p|(i-j)b, p|j-1|b \Rightarrow p|b(?!)\\
&h(i) < s \leqslant b < m(i)
\end{aligned}$$

По китайское теореме об остатках получаем остатки, которые и являются остатками β-функции.

Упражнение НОК доказуема тотально.

Лемма о расширении $\forall c, d, k, n \exists a, b :$

$$\begin{cases} \forall i, k\ \beta(a,b,i) = \beta(c,d,i)\\ \beta(a,b,k) = n \end{cases}$$

Т.е. пара (c,d) при помощи β-функции задает последовательность длины k и имеет вид $x_0, x_1, \ldots, x_{k_1}$. Утверждается, что по этой последовательности в арифметике Пеано можно доказать существование $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, n$ в смысле β.

В арифметике Пеано $\beta(c,d,i)$ - функция от i. Рассмотрим функцию

$$h(i) = \begin{cases} \beta(c,d,i), i < k \\ n, i \geqslant k \end{cases}$$

По лемме Гёделя для $h(i)$ можно подобрать a, b, которые закодируют ее первые $k+1$ элемент.

$$f(0) = g$$
$$f(n+1) = h(f(n), n)$$

Чтобы $f(x) = y$ необходима последовательность, у которой нулевой элемент равен g, x-овый элемент равен y и на каждом меньшем удовлетворяет второму условию.

Кодирование пар

$$< x, y >= 2((x+y)^2 + x + 1)$$

Упражнение $PA \vdash < x, y >=< x', y' >\to x = x' \wedge y = y'$
Упражнение $PA \vdash x << x, y > \wedge y << x, y >$
Упражнение $PA \vdash x < x' \to < x, y ><< x', y > \wedge < z, x ><< z, x' >$
Условие $\varphi \to \psi =<\to, < \varphi, \psi >>$ гарантирует, что код или гёделев номер формулы больше, чем у всех ее подформул. Значит, индукция по структуре подформул будет сводиться к возвратной индукции по номеру.

$$"w = \pi_1(z)" \lesseqgtr (\exists y < z \ < w, y >= z) \vee (z - \text{не пара } \wedge w = 0)$$

Код последовательности длины $k :<< a, b >, k >$.

Ограниченные кванторы

$$\forall x < t\, \varphi \lesseqgtr \forall x (x < t \to \varphi)$$
$$\exists x < t\, \varphi \lesseqgtr \exists x (x < t \wedge \varphi)$$

Δ_0 - формула, в которой все кванторы ограниченные. Если формула замкнутая, то t- внешний ограниченный символ.

Утверждение Задача проверки истинности Δ_0 формул в $\mathbb{N}$ алгоритмически разрешима.

Σ_1 - формула, в которой $\varphi = \exists x\, \psi, \psi \in \Delta_0$.

$$\exists x \exists y, \xi$$
$$\exists w(\exists x < w\, \exists y < w(w =< x, y > \wedge \xi))$$

Теорема 1 Класс Σ_1 замкнут относительно $\wedge, \vee, \exists, \forall x < t$ с точностью до эквивалентности в PA.

Доказательство

$$(\exists x \psi_1) \vee (\exists x \psi_2) \leftrightarrow \exists x(\psi_1 \vee \psi_2)$$
$$(\exists x \psi_1) \wedge (\exists y \psi_2) \leftrightarrow \exists x \exists y(\psi_1 \wedge \psi_2)$$
$$\forall y < t\, \exists x \psi$$
$$\exists a, b \forall y < k\, \psi(\beta(a, b, y), y)$$
$$\exists a, b \forall y < k \exists x < a \psi(B(a, b, y, x) \wedge \psi(x, y))$$

Теорема 2 В PA Σ_1 полна, т.е.

$$\left.\begin{matrix} N \vDash \varphi \\ \varphi \in \Sigma_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow PA \vdash \varphi$$

Лекция 4

Кодирование примитивно-рекурсивных функций в PA

$$PA - \text{ арифметика Пеано}$$
$$\Sigma_1 : \exists x\, \varphi(x), \varphi \in \Delta_0$$
$$\forall y \leqslant t\, \exists y \leqslant t$$

Теорема (о Σ_1 полноте) Если $\psi \in \Sigma_1$, то $N \models \psi \leftrightarrow PA \vdash \psi$.
Лемма Пусть $\delta \in \Delta_0$ - замкнуто. Тогда $\mathbb{N} \models \delta \Rightarrow PA \vdash \delta$, $\mathbb{N} \not\models \delta \Rightarrow PA \vdash \neg\delta$
Утверждение $\underline{k} = \underbrace{SS\dots S}_{k}0$

1) Пусть u-константный терм,значение u равно k. Тогда $PA \vdash u = \underline{k}$.
   а) $k \neq k' \Rightarrow PA \vdash \underline{k} \neq \underline{k'}$
   б) $k \leqslant n \Rightarrow PA \vdash \underline{k} \leqslant \underline{n}$
2) $PA \vdash \forall x(x \leqslant \underline{k} \leftrightarrow x = 0 \vee \dots \vee x = \underline{k})$

<u>*Доказательство леммы*</u> Индукция по структуре δ.

1) δ атомарная, $u = v$. Значение u это $[u]$.
   а) Допустим, $\mathbb{N} \models u = v$. Тогда $[u] = [v] = k$. Значит, $PA \vdash u = k \wedge v = k$.
   б) Допустим, $\mathbb{N} \not\models u = v$. Тогда $[u] = k, [v] = k', k > k', \underline{k} = \underbrace{S\dots S}\overline{k'}, \overline{k'} = S\dots S0$. Значит, $PA \vdash u = k \wedge v = k$. Пусть $k - k' = \underbrace{S\dots S}0 \neq 0$. Тогда $S(S\dots S) \neq S0$.
2) Основные операции $\bot, \to, \exists x \leqslant t$.
   а) $\delta = 1, PA \vdash \neg \bot$
   б) $\delta = \delta_1 \to \delta_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} N \not\models \delta_1 \Rightarrow (\text{по индукции}) PA \vdash \delta_1 \\ N \models \delta_2 \end{array} \right. \Rightarrow PA \vdash \delta_1 \to \delta_2$
   в) $\mathbb{N} \models \exists x \leqslant t\, \delta'(x), \exists i \leqslant [t], \mathbb{N} \models \delta'(i) \Rightarrow PA \vdash \delta'(i), PA \vdash i \leqslant t \Rightarrow$
   $PA \vdash \exists x < t\, \delta'(x)$
   г) $\mathbb{N} \not\models \exists x \leqslant t\, \delta'(x)$. Пусть $k = [t]$. $N \models \neg\delta'(0) \wedge \dots \wedge \neg\delta'(k)$. В натуральных числах не верна каждая из этих формул. Значит, $PA \vdash \neg\delta'(0) \wedge \dots \wedge \neg\delta'(k)$. В арифметике Пеано возьмем произвольный $x \leqslant t$, t равно нумералу k. Для каждого случая есть соответствующая доказуемая формула.

<u>*Доказательство теоремы*</u>

$$\mathbb{N} \models \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \mathbb{N} \models \varphi(i) \Rightarrow PA \vdash \varphi(i) \Rightarrow PA \vdash \exists x\, \varphi(x)$$

Кодирование примитивно рекурсивной функции в PA

ПРФ:

1) Базовые функции $Z(x), I_k^n(x_1, \dots, x_n), S(x)$
2) композиция
3) примитивная рекурсия

$$\begin{cases} f(0, \overline{y}) = g(\overline{y}) \\ f(x+1, \overline{y}) = h(f(x, \overline{y}), x, \overline{y}) \end{cases}$$

Теорема Всякая примитивно рекурсивная функция представима в PA. Пусть f - ПРФ. Тогда существует формула $\varphi_f(\overline{x}, y) \in \Sigma_1$:

1) $f(\overline{n}) = m \leftrightarrow PA \vdash \varphi_f(\underline{n}, \underline{m})$
2) $PA \vdash \forall \overline{x}\, \exists! y\, \varphi_f(\overline{x}, y)$
3) В PA доказуемы множественные рекурсивные соотношения

Замечание В 1) формула принадлежит Σ_1, она замкнутая $\Rightarrow \mathbb{N} \vDash \varphi_f(\underline{n}, \underline{m})$
Базовые функции

$$\begin{aligned} &\varphi_S(x, y) = y = Sx \\ &\varphi_z(x, y) = y = 0 \\ &\varphi_I(x, y) = y = x_k \end{aligned}$$

Простая композиция

$$\begin{aligned} &f = h(g(x)) \\ &\varphi_f(x, y) = y = h(g(x)) = \exists z(\varphi_h(z, y) \wedge \varphi_g(x, z)) \\ &\vdash \forall x\, \exists y(\exists z(\varphi_h(z, y) \wedge \varphi_g(x, z))) \\ &\forall x\, \exists z(\varphi_g(x, z) \wedge \exists y \varphi_h(z, y)) \end{aligned}$$

Упражнение Для композиции доказать

1) единственность
2) соотношение $PA \vdash \forall x\, f(x) = h(g(x))$

$$\begin{aligned} &\text{"}f(x, y) = z\text{"}\ \varphi_f(x, y, z) \\ &k_0 = g(y) \\ &k_{i+1} = h(k_i, i, y), k_x = z \end{aligned}$$

Сформулируем через β-функцию

$\varphi_f(x,y,z) = \exists a,b(\beta(a,b,0) = g(y) \wedge \forall i < x(\beta(a,b,S_i) = h(\beta(a,b,i),i,y) \wedge \beta(a,b,x) = z)$
$k_i = \beta(a,b,i)$
$\exists a,b(\varphi_g(y,\beta(a,b,c))) \wedge \forall i < x$
$\varphi_h(\beta(a,b,i),i,y,\beta(a,b,S_i) \wedge \beta(a,b,x) = z)$
$\varphi_g(y,\beta(a,b,0)) \leftrightarrow \exists w(\beta(a,b,0,w) \wedge \varphi_g(y,w))$
$f(n,m) = k\ \varphi_f(n,m,k)$ истинная и доказуемая стандартная модель

Докажем второй пункт теоремы

$$
\begin{aligned}
&PA \vdash \forall x,y\exists z\ \varphi_f(x,y,z) \text{ индукцией по } x \text{ в } PA\\
&x = 0:\\
&\vdash \exists a,b : \beta(a,b,0) = g(y)\\
&x+1:
\end{aligned}
$$

Лемма о распределении

$$
\begin{aligned}
&\forall c,d,x,k\ \exists a,b\\
&\forall i \leqslant x\ \beta(a.b.i) = \beta(c,d,i) \wedge \beta(a,b,S_x) = k
\end{aligned}
$$

Доказательство Докажем тотальность.

$$
\begin{aligned}
&\exists c,d,z,\dots\ k = z' = h(\beta(c,d,x),x,y)\\
&\exists a,b : \forall i \leqslant x\ \beta(a,b,i) = \beta(c,d,i)\\
&i = x\ \beta(a,b,S_x) = \underbrace{h(\beta(a,b,x),x,y)}_{z'}
\end{aligned}
$$

Докажем единственность.

$$
\begin{aligned}
&\exists a,b : \beta(a,b,0) = g(y), \beta(a,b,0) = z\\
&\exists \widetilde{a},\widetilde{b} : \beta(\widetilde{a},\widetilde{b},0) = g(y), \beta(\widetilde{a},\widetilde{b},0) = \widetilde{z}
\end{aligned}
$$

Шаг индукции

$$
\begin{aligned}
&\vdash \forall x,y(f(Sx,y) = h(f(x,y),x,y))\\
&\vdash \forall x,y\exists z,z'(\varphi_f(Sx,y,z') \wedge \varphi_f(x,y,z) \wedge \varphi_h(z,x,y,z'))\\
&\beta(a,b,x) = \beta(\widetilde{a},\widetilde{b},x)\\
&\beta(a,b,S_x) = h(\beta(\widetilde{a},\widetilde{b},x),x,y) = \beta(a,b,S_x) = z
\end{aligned}
$$

Для x,y существует z', для которого выполняется условие.

Лекция 5

Гёделева нумерация

У любого синтаксического объекта (терм, формула) есть гёделев номер.
Для четных

$$
\begin{aligned}
&[\perp] = 1\\
&[\to] = 3\\
&[\forall] = 5\\
&[=] = 7\\
&[0] = 9\\
&[S] = 11\\
&[+] = 13\\
&[\cdot] = 15\\
&[x_i] = 2i + 17
\end{aligned}
$$

Для нечетных в кодировании используется пара $< x, y >= 2((x + y)^2 + x + 1)$. Свойства $x << x, y >, y << x, y >, < x, y, z >=< x, < y, z >>$.

$$
\begin{aligned}
&[2 + 2] =< [+], [2], [2] >\\
&[2] = [S(S0)] =< [S], < [S], [0] >>
\end{aligned}
$$

Упражнение Чему равно $[2 + 2]$?

У последовательности $[a_0, \dots, a_{l-1}] = p_0^{a_0+1} \dots p_{l-1}^{a_{l-1}+1}$ будет тот же номер, что и формулы. Можно проверить, что $Seq(x)$, " - код последовательности". Это означает, что если число делится на простое, то оно должно делится на все меньшие простые.

Рассмотрим $Tm(x)$ "x – код терма". Имеем х, который должен иметь одно из представлений

$$
\begin{aligned}
&x =< [S], x_1 >\\
&x =< [+], x_1, x_2 >\\
&x =< [\cdot], x_1, x_2 >
\end{aligned}
$$

Если он не является таковым, то он не является термом. Если нечетный, то $x = [0]$. Если четный, то он должен быть парой одной из форм. Таким образом, характеристическая функция терма (отличающая терм от не терма) рекурсивна, представима в арифметике Пеано и ей соответствует формула $\varphi_{x_{Tm}}(x, 1)$. Для нее рекурсивные принципы будут верны.
Например, $\forall x, x_1, x_2 (\vdash Tm(x) \wedge x =< [+], x_1, x_2 >\to Tm(x_1))$.

Аналогично для $Fm(x)$ "x - код формулы".

Задача Если ПРФ определена возвратной рекурсией, то PA доказывает возвратное рекурсивное условие.

$Tm(x), Fm(x) \in \Sigma_1$. Для предиката $Prf(y,x)$ говорит, что y - доказательство x, т.е. y кодирует последовательность формул, которые являются доказательством формулы x. Иначе, $Prf(y,x) = 0$.

$$\begin{aligned}
&Prf(y,x) = Seq(y) \wedge l(y) > 0 \wedge y_{l-1} = x \wedge \forall i < l(Ax(y_i) \vee \\
&\vee \exists j, k < i : (y_k =< [\to], y_j, y_i >) \vee \exists j < i \exists v \leqslant y_i (y_i =< [\forall], v, y_j >)) \\
&y_i = [\psi] \\
&y_j = [\varphi] \\
&y_k = [\varphi \to \psi] \\
&\varphi \to (\psi \to \varphi)
\end{aligned}$$

Заведем переменные по формулам как пару, где первый компонент равен 0, а второй - нечетному числу. Тогда возможно определение формул, в которых есть переменные второго порядка $P \to (Q \to P)$. После этого можно определить ПРФ подстановки, которая подставляет P и Q в формулу. Существует функция, которая по коду φ и ψ восстанавливает код $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, т.е. $\exists x, y : Fm(x) \wedge Fm(y) \wedge y_i =< [\to], x, \cdots >$. Получили, что y_i является аксиомой такого вида.

Упражнение Записать формулу $AxInd(z), z$ кодирует одну из реализаций аксиомы индукции.

Упражнение $\vdash Tm(x) \to Tm(< [S], x >)$.

Лемма $PA \vdash \forall y, z, \ Prf(y, [\varphi \to \psi]) \wedge Prf(z, [\varphi]) \to Prf(y * z * ([\psi]), [\psi])$

Доказательство Для доказательства утверждения необходимо доказать

$$\begin{aligned}
&\vdash l(y * z) = l(y) + l(z) \\
&\vdash Seq(x) \wedge Seq(z) \to Seq(y * z) \\
&\vdash i < l(y) \to (y * x)_i = y_i \\
&\vdash i < l(z) \to (y * z)_{l(y)+i} = z_i \\
&\vdash [a]_0 = a
\end{aligned}$$

Эти утверждения можно проверить. Например, 2 формулы необходимо вспомнить последовательность (если делится на простое число, то делится и на меньшие простые числа) и $y * z = y(z \uparrow l(y))$, $z = z' * [b]$, $y * z = (y * z')p_l^{b+1}(\dots)$. Остальные через индукцию по длине.

$$Pr(x) = \exists y Prf(y, x)$$

Условия доказуемости

1) $PA \vdash \varphi \Rightarrow PA \vdash Pr([\varphi])$
   $\mathbb{N} \models Pr([\varphi])$, а значит Σ_1- полнота.

2) $PA \vdash Pr([\varphi \to \psi]) \wedge Pr([\varphi]) \to Pr([\psi])$

$$\exists y, x(Prf(y, [\varphi \to \psi]) \wedge Prf(z, [\varphi]) \to \exists w Prf(w, [\psi]))$$
$$\forall y, z(\exists y, x(Prf(y, [\varphi \to \psi]) \wedge Prf(z, [\varphi]) \to \exists w Prf(w, [\psi])))$$
$$w = y * z * ([\psi])$$

Т.е. необходимо найти соответствующий w. Он существует, т.к. функция доказуема тотально $\exists! w\, \xi(y, x, ([\psi]), w)$.

3) $PA \vdash Pr(\varphi) \to Pr([Pr([\varphi])])$

Теорема Пусть $\sigma \in \Sigma_1$, замкнуто. Тогда $PA \vdash \sigma \to Pr([\sigma])$ (формализованная Σ_1-полнота).

<u>*Доказательство*</u> В случае $N \models \sigma$ все проверяется. В случае $N \models \neg\sigma$ нарушается первоначальное условие, т.е. опровергнуть σ нельзя, но можно доказать выводимость.

Подстановки и параметры

Для формулы $\varphi(x)$ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать номера $[\varphi(x)]$ и $[\varphi(k)]$. Существует $f : f(z) = sub(z, [x], k)$. Функция примитивно рекурсивная по z и k.

$$sub([\varphi(\mathrm{x})], [\mathrm{x}], x) \leqslant [\varphi(\dot{x})]$$

Лемма $PA \vdash \forall \overline{x} Pr([\varphi(\dot{\overline{x}}) \to \psi(\dot{\overline{x}})] \wedge Pr([\varphi(\dot{\overline{x}})]) \to Pr([\psi(\dot{\overline{x}})]))$
<u>*Доказательство*</u>

$$PA \vdash [\varphi(\dot{\overline{x}}) \to \psi(\dot{\overline{x}})] =< [\to], [\varphi(\dot{\overline{x}})], [\psi(\dot{\overline{x}})] >$$
$$[\varphi(\dot{\overline{x}}) \to \psi(\dot{\overline{x}})]$$

Лемма $PA \vdash \varphi(\overline{x}) \Rightarrow PA \vdash Pr([\varphi(\dot{\overline{x}})])$
<u>*Доказательство*</u>

$$PA \vdash \varphi(\dot{\overline{x}}) \Rightarrow PA \vdash \forall \overline{x}\, \varphi(\dot{\overline{x}})$$
$$PA \vdash Pr([\forall \overline{x}\, \varphi(x) \to \varphi(\dot{\overline{x}})])$$
$$\forall x\, \varphi(x) \to \varphi(t)$$

Лемма(формализованная параметрическая Δ_0-полнота) $\delta(\overline{x}) \in \Delta_0$

$$PA \vdash \delta(\overline{x}) \to Pr([\delta(\dot{\overline{x}})])$$
$$PA \vdash \neg\delta(\overline{x}) \to Pr([\neg\delta(\dot{\overline{x}})])$$

Доказательство

$$\sigma = \exists x \delta(x)$$

$$PA \overset{?}{\vdash} \exists x \delta(x) \to Pr([\exists x \delta(x)])$$

$$PA \vdash \forall x(\delta(x) \to Pr([\delta(\dot{x})]))$$

$$PA \vdash Pr([\delta(\dot{x}) \to \exists x \delta(x)])$$

Лекция 6

Параметрическая Δ_0-полнота

$$Pr(x) = \exists y Prf(y, x) \in \Sigma_1$$

Σ_1-полнота: $\sigma \in \Sigma_1$ замкнуто. $\sigma = \exists x \delta(x), \delta \in \Delta_0$.

$$\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow PA \vdash \sigma$$
$$PA \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{N} \models Pr(\varphi) \Rightarrow PA \vdash Pr([\varphi])$$

Условия на Pr:

1) $PA \vdash \varphi \Rightarrow PA \vdash Pr([\varphi])$

2) $PA \vdash Pr([\varphi \to \psi]) \wedge Pr([\varphi]) \to Pr([\psi])$

$$PA \vdash Pr([\varphi(\dot{\overline{x}}) \to \psi(\dot{\overline{x}})]) \wedge Pr([\varphi(\dot{\overline{x}})]) \to Pr([\psi(\dot{\overline{x}})])$$
$$[\varphi(\dot{x})]$$
$$n \xrightarrow{f} [\varphi(n)], n = \underbrace{S \dots S}_{n} 0$$
$$n \to \underline{n}$$
$$Pr([\varphi(\dot{x})]) = Pr(f(x))$$

x - свободные переменные. Значит, $PA \vdash \forall \overline{x}(Pr([\varphi(\dot{\overline{x}}) \to \psi(\dot{\overline{x}})]) \wedge Pr([\varphi(\dot{\overline{x}})]) \to Pr([\psi(\dot{\overline{x}})]))$

Доказуемая Σ_1 - полнота:

$$PA \vdash \sigma \to Pr([\sigma]), \sigma \in \Sigma_1$$

Из этого следует 3-ий пункт условий на Pr:

3) $PA \vdash Pr([\varphi]) \to Pr([Pr([\varphi])])$

Доказуемая параметрическая Δ_0-полнота:

$$\delta(\overline{x}) \in \Delta_0$$
$$PA \vdash \forall \overline{x}(\delta(\overline{x}) \to Pr([\delta(\dot{\overline{x}})]))$$
$$PA \vdash \neg\delta(\overline{x}) \to Pr([\neg\delta(\dot{\overline{x}})])$$

Согласно внешней индукции по построению формулы δ докажем утверждения выше. Пусть $u(\overline{x})$ - терм. Тогда $PA \vdash y = u(\overline{x}) \to Pr([\dot{y} = u(\dot{\overline{x}})])$. Если $u = x_i$, то $Pr([\dot{y} = \dot{x}_i])$.

$$sub([v_1 = v_2], num(y), num(x_i))$$
$$y = x_i \to num(y) = num(x_i)$$
$$sub([v_1 = v_2], num(y), num(y)), [v_1 = v_2] =< [=], < [v_1], [v_2] >>$$
$$< [=], < y, y >>:$$
$$[\forall z(z = z), \forall z\, P(z) \to P(y), P(y)]$$

Рассмотрим в PA:

$$y = u_1(\overline{x}) + u_2(\overline{x})$$
$$\exists y_1, y_2 : y = y_1 + y_2 \wedge y_1 = u_1(\overline{x})n \wedge y_2 = u_2(\overline{x})$$
$$Pr([\dot{y_1} = u_1(\dot{\overline{x}})])\ Pr([\dot{y_2} = u_2(\dot{\overline{x}})])$$
$$Pr([\dot{y} = \dot{y_1} + \dot{y_2}])$$
$$y_2 = Sy_2^{'}$$
$$y = Sy^{'}, y^{'} = y_1 + y_2^{'}$$
$$Pr([\dot{y^{'}} = \dot{y_1} + \dot{y_2^{'}}])$$

Упражнение

$$PA \vdash Pr([S\dot{x} = \dot{\overbrace{Sx}}])$$
$$[S\dot{x} = \dot{w}] = f(x, w), f(x, Sx)$$

Продолжим рассуждение

$$Pr([\dot{y_1} + S\dot{y_2^{'}} = S(\dot{y_1} + \dot{y_2^{'}})])$$
$$Pr([\dot{y_1} + \dot{y_2} = S(\dot{y^{'}})])$$
$$PA \vdash y = u(\overline{x}) \to Pr([\dot{y} = u(\dot{\overline{x}})])$$
$$Pr([u_1(\dot{\overline{x}}) + u_2(\dot{\overline{x}}) = \dot{y_1} + \dot{y_2}])$$
$$y = Su^{'}(x)$$
$$y = Sy^{'}$$
$$y^{'} = u^{'}(\overline{x})$$
$$Pr([\dot{y} = S\dot{y}])$$

Т.е. доказали необходимое.

$$PA \vdash u(\overline{x}) = v(\overline{x}) \to Pr([u(\dot{\overline{x}}) = v(\dot{\overline{x}})])$$
$$u(\overline{x}) = v(\overline{x}) \to Pr([u(\dot{\overline{x}}) \neq v(\dot{\overline{x}})])$$
$$\delta(\dot{\overline{x}}) =\perp, \perp\to Pr([\perp]), \neg \perp\to Pr([\neg \perp])$$
$$\delta(\dot{\overline{x}}) = \delta_1(\dot{\overline{x}}) \to \delta_2(\dot{\overline{x}}), Pr([\delta_1(\dot{\overline{x}})])$$
$$\neg\delta_1(\overline{x})\ \ Pr([\neg\delta_1(\dot{\overline{x}})])\ \ Pr([\neg\delta_2(\dot{\overline{x}})])\ \ \delta_2(\dot{\overline{x}})$$

Это доказуемо, значит, есть принцип $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$.

$$\delta(\overline{x}) = \forall z \leqslant t(\overline{x})\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z)$$
$$\exists w(w = t(\overline{x}) \wedge \forall z \leqslant w\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z))$$

Докажем $Pr([\dot{w} = t(\dot{\overline{x}})])$ индукцией по w.

$$Pr([\forall z \leqslant \dot{w}\ \ \delta^{'}(\dot{\overline{x}}, z)])$$
$$w = 0 : Pr([\delta^{'}(\overline{x}, 0)])$$
$$w = Sw^{'}\ \ \forall z \leqslant SW^{'}\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z) \leftrightarrow \forall z \leqslant w^{'}\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z) \wedge \delta^{'}(\overline{x}, Sw^{'})$$
$$Pr([\forall z < w^{'}\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z)])$$
$$Pr([\delta^{'}(\dot{\overline{x}}, S\dot{w})])$$
$$Pr([\forall z \leqslant S\dot{w}^{'}\ \ \delta^{'}(\dot{\overline{x}}, z)])$$
$$Pr([\forall z \leqslant Sw^{'}\ \ \delta^{'}(\dot{\overline{x}}, z)])$$

Это происходит на случай истинности формулы. В случае ложности

$$PA \vdash \forall z \leqslant w\ \ \delta^{'}(\overline{x}, z) \to Pr([\neg\forall z \leftarrow \dot{w}\ \ \delta^{'}(\dot{\overline{x}}, z)])$$
$$\neg\delta^{'}(\overline{x}, z_0)\ \ z_0 \leqslant w$$
$$Pr([\neg\delta^{'}(\dot{\overline{x}}, \dot{z_0})])$$

Доказали, что $PA \vdash \forall z \leqslant w\,\delta^{'}(\overline{x}, z) \to Pr([\forall z \leqslant \dot{w}\,\delta(\dot{\overline{x}}, z)])$ и $PA \vdash Pr([\dot{w} = t(\dot{\overline{x}})])$. Подставляем и получаем доказательство доказуемости формулы.

$$\sigma = \exists x\delta(x)$$
$$\delta(x_0)$$
$$Pr([\delta(\dot{x_0})])$$
$$Pr([\delta(\dot{x_0}) \to \exists x\delta(x)])$$
$$Pr([\exists x\delta(x)])$$

Таким образом, получили все необходимое.

Теорема о неподвижной точке Пусть $\varphi(x)$ - арифметическая формула. Тогда существует замкнутая арифметическая формула ψ с свойством $PA \vdash \psi \leftrightarrow \varphi([\psi])$.

С помощью этой теоремы сможем построить $\gamma \leftrightarrow \neg Pr([\gamma])$.

Утверждение $\gamma \leftrightarrow Pr([\bot])$.

Доказательство теоремы Рассмотрим $g : [\underbrace{\zeta(x)}_{=n}] \to [\zeta([\zeta(x)])]$, x - формальная переменная. Если n не является кодом формулы с одной свободной переменной, то значение g неважно. Если n - код, то осуществляется подстановка $sub_x(n, \underline{n})$. Функция взятия нумерала и подстановки приметивно рекурсивны, следовательно, g - ПРФ.

$$\begin{aligned}
&\xi(x) \leqslant \varphi(g(x)) \leftrightarrow \exists y(\varphi(y) \wedge G(x, y)) \\
&\quad \leqslant \xi([\xi(x)]) \\
&\quad = \xi([\xi(x)]) = \varphi(g([\xi(x)])) \leftrightarrow \varphi([\xi([\xi(n)])]) \\
&\ \vdash g([\xi(n)]) = [\xi([\xi(n)])] = \varphi([\psi]) \\
&\xi(x) = \exists y(\varphi(y) \wedge G(x, y)) \\
&\quad = \xi([\xi(x)]) = \exists y(\varphi(y) \wedge \underbrace{G([\xi(x)],}_{\leftrightarrow y = [\xi([\xi(x)])]}\ y)) \leftrightarrow \varphi([\xi([\xi(x)])]) = \varphi([\psi])
\end{aligned}$$

Получили

$$\begin{aligned}
&PA \vdash \gamma \Rightarrow PA \vdash Pr([\gamma]) \\
&PA \vdash \gamma \Rightarrow PA \vdash \neg Pr([\gamma]) \\
&PA \vdash \neg\gamma \Rightarrow PA \vdash Pr([\neg\gamma]) \\
&PA \vdash \neg\gamma \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\gamma \Rightarrow \mathbb{N} \models Pr([\gamma]) \Rightarrow PA \vdash \gamma
\end{aligned}$$

Доказали первую теорему Гёделя о неполноте, т.е. $PA \nvdash \gamma, PA \nvdash \neg\gamma$.

Лекция 7

Гёделева теория

T - теория в языке арифметики. $PA \subseteq T$. $Th(\mathbb{N}) = \{\varphi - \text{замкнута} | \mathbb{N} \models \varphi\}$ полная.
Определение Гёделева теория $T \supseteq PA$:

1) правила вывода MP, Gen
2) аксиоматика T определяется Σ_1 - формулой $Ax_T(x)$:
   а) φ - аксиома $T \Rightarrow PA \vdash Ax_T([\varphi])$
   б) Если n не гёделев номер T, то $PA \vdash \neg Ax_T(\underline{n})$
   в) $PA \vdash \forall x(Ax_{PA}(x) \to Ax_T(x))$

$$\chi_{PA}(x) = \begin{cases} 1, x = [\varphi], \varphi - \text{аксиоматика } PA \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$
$$\chi_{T-PA}(x) = \begin{cases} 1, x = [\varphi], \varphi - \text{доп. аксиоматика } T \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$
$$\alpha_{PA}(x, y), \alpha^{'}(x, y) \in \Sigma_1$$
$$''y = \chi_{PA}(x)''$$
$$''y = \chi_{T-PA}(x)''$$
$$Ax_T(x) \lesseqgtr \alpha_{PA}(x, 1) \vee \alpha^{'}(x, 1)$$
$$Ax_{PA}(x) = \alpha_{PA}(x, 1)$$

Таким образом,

$$PA \vdash \alpha_{PA}(\underline{n}, 0) \wedge \alpha^{'}(\underline{n}, 0)$$
$$PA \vdash \neg\alpha_{PA}(\underline{n}, 1) \wedge \neg\alpha^{'}(\underline{n}, 1)$$

Предикат доказуемости $Prf_T(y, x) = Seq(y) \wedge \forall i < l(y)$.

$(Ax_T((y)_i)) \vee \exists j, k < i \ (y)_k = ([\to], (y)_j, (y)_i) \vee \exists j < i \exists q \ (y)_i = ([\forall], < [v_q], (y)_j >) \wedge$
$(y)_{l(y)-1} = x$
$PA \vdash \varphi(f(\overline{x})) \leftrightarrow \exists x(f(\overline{x}) = z \wedge \varphi(z)) \leftrightarrow \exists z(F(\overline{x}, z) \wedge \varphi(\overline{z}))$

Условия на доказуемость

$$Pr_T(x) = \exists y \ \ Prf_t(y, x)$$

Условия на Pr_T

$$\begin{aligned} GL-1: &T \vdash \varphi \Rightarrow PA \vdash Pr_T([\varphi]) \\ &T \vdash \varphi \\ &\mathbb{N} \models Pr_T(([\varphi]) \in \Sigma_1 \\ &PA \vdash Pr_T([\varphi]) \end{aligned}$$

Это следует из Σ_1 - полнота: $\sigma \in \Sigma_1, \sigma$ - замкнутая, $\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow PA \vdash \sigma$.

$$\begin{aligned} GL-2: &PA \vdash Pr_T([\varphi \to \psi]) \wedge Pr_T([\varphi]) \to Pr_T([\psi]) \\ GL-3: &PA \vdash Pr_T([\varphi]) \to Pr_T([Pr_T([\varphi])]) \\ &PA \vdash \sigma \to Pr_T([\sigma]) \end{aligned}$$

Теорема о неподвижной точке Пусть $\varphi(x)$ - арифметическая формула. Тогда существует замкнутая арифметическая формула ψ с свойством $PA \vdash \psi \leftrightarrow \varphi([\psi])$.

С помощью этого рассмотрим $PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg Pr_T([\gamma])$.

Вопрос Верно ли, что $\mathbb{N} \models \gamma, T = PA$?

Ответ γ истинна.

Введем обозначение $Pr_T([\varphi]) = \Box_T \varphi$. Тогда

$$PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \Box_T \gamma \tag{$*$}$$

Теорема (1-я теорема Гёделя) Пусть T - гёделева, $T \supseteq PA, N \models T$. Тогда $T \nvdash \gamma, T \nvdash \neg\gamma$.

Доказательство Пусть $T \vdash \gamma$. Тогда по (*) $T \vdash \neg \Box_T \gamma$. С другой стороны по $GL-1: T \vdash \Box_T\gamma$. Значит, T - противоречива $\Rightarrow \mathbb{N} \not\models T$.

Пусть $T \vdash \neg\gamma$. По (*) $T \vdash \Box_T\gamma \Rightarrow \mathbb{N} \models \Box_T\gamma \Rightarrow T \vdash \gamma, T$ противоречива.

Лемма $PA \vdash \gamma \leftrightarrow \underbrace{\neg\Box_T \perp}_{Con(T)}$ - гёделево утверждение о непротиворечивости.

Теорема (2-я теорема Гёделя о неполноте) Пусть T - непротиворечивая гёделева теория. Тогда $T \nvdash Con(T)$.

Доказательство $T \nvdash \gamma \Rightarrow T \nvdash Con(T)$.

Замечание Если $\mathbb{N} \models T$, то $T \nvdash \neg Con(T)$. Значит, $\mathbb{N} \models Con(T)$.

Задача Существует ли теория T гёделева, непротиворечивая и $T \vdash \neg Con(T)$?

Решение $T = PA + \neg Con(PA)$. Из $PA \vdash \neg Con(T)$ следует $\neg Con(T)$. Она непротиворечива, т.к.

$$\begin{aligned} &PA \vdash \neg Con(PA) \to \perp \\ &PA \vdash Con(PA) \end{aligned}$$

Доказательство леммы $\to$

Ведем рассуждение в PA:

$$\Box \perp$$

$$\Box (\perp \to \gamma)$$

По $GL-2 \Rightarrow \Box\gamma$.

$\leftarrow$

Докажем, что $\neg\gamma \to \Box\bot$.

$$\begin{aligned}
&\neg\gamma\\
&\neg\gamma \to \Box\gamma(*)\\
&\Box\gamma\\
&\Box\Box\gamma \ GL-3\\
&\Box(\gamma \to \neg\Box\gamma) \ GL-1 \text{ к } (*)\\
&\Box\neg\Box\gamma \ GL-2\\
&\Box\bot
\end{aligned}$$

Бывает, что T доказывает $\neg Con(T)$, $T \vdash \neg\gamma$.

Теорема Гёделя - Россера Пусть T - гёделева теория. Тогда существует $\rho : T \nvdash \rho, T \nvdash \neg\rho$.

<u>*Доказательство*</u> Определим альтернативный предикат доказуемости (Россеровский)$\widetilde{Pr_T}(x)$.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Pr_T}(x) = \exists y(Prf_T(y,x) \wedge \forall z < y \neg Prf_T(z, \hat{\neg}(x)))\\
&hat\neg(x)) =< [\to], < x, [\bot] >>\\
&PA \vdash \rho \leftrightarrow \neg\widetilde{Pr_T}([\rho]) \ (**)\\
&\mathbb{N} \models Pr_T(x) \leftrightarrow \widetilde{Pr_T}(x)
\end{aligned}$$

Утверждение Если k - гёделев номер доказательства формулы φ в T, то $PA \vdash Prf_T(\underline{k}, [\varphi])$. Если k - не гёделев номер доказательства формулы φ в T,то $PA \vdash \neg Prf_T(\underline{k}, [\varphi])$.

Упражнение $PA \vdash \neg Prf(y,x) \leftrightarrow \xi(y,x) \in \Sigma_1$ обладает свойством эквивалентности Σ_1 полноте.

Пусть $T \vdash \rho, m$ - номер доказательства. Тогда $PA \vdash Prf_T(\underline{m}, [\rho])$. Докажем, что $PA \vdash \widetilde{Pr_T([\rho]})$. Для этого необходимо проверить, что $\forall z < \underline{m} \ \neg Prf(z, [\rho])$. Это эквивалентно проверке $\neg Prf(0, [\rho]) \wedge \dots \wedge Prf(\underline{m-1}, [\neg\rho])$. Получаем, что это доказуемо. Получили, $PA \vdash \widetilde{Pr_T([\rho]})$. Значит, $T \vdash \neg\widetilde{Pr_t}(\rho)$.

Пусть $T \vdash \neg\rho$, $T \vdash \widetilde{Pr_T}([\rho])$. Докажем, $\neg\widetilde{Pr_T}([\rho]) = \forall y(\neg Prf_T(u, [\rho]) \vee \exists z < y \ Prf_T(z, [\neg\rho]))$.

$$T \vdash \neg\rho \Rightarrow PA \vdash Prf(\underline{k_0}, [\neg\rho])$$

При рассуждении на прямой относительно расположения точки k_0 получим необходимое в теореме Гёделя-Россера.

Задача $\widetilde{Con(T)} = \neg\widetilde{Pr_T}([\bot])$. Доказать, что $PA \vdash \widetilde{Con}(PA)$.

Задача Выполняются ли для $\widetilde{Pr}$ условия GL-1,2,3?

Теорема Лёба Пусть T - гёделева теория. Тогда если $T \vdash \square_T\varphi \to \varphi$, то $T \vdash \varphi$.
Вопрос Как из теоремы Лёба получиь 2-ю теорему Гёделя?
Доказательство

$$\begin{aligned}
&PA \vdash \lambda \leftrightarrow (\square_T\lambda \to \varphi)\\
&PA \vdash \square(\lambda \to (\square\lambda \to \varphi))\ GL-1\\
&PA \vdash \square\lambda \to (\square\,\square\,\lambda \to \square\varphi)\ GL-2\\
&PA \vdash \square\lambda \to \square\,\square\,\lambda\ GL-3\\
&T \vdash \square\varphi \to \varphi\\
&T \vdash \square\lambda \to \varphi\\
&PA \vdash \square(\square\lambda \to \varphi) \to \square\lambda\\
&PA \vdash \square(\square\lambda \to \varphi)\\
&PA \vdash \square\lambda\\
&T \vdash \varphi
\end{aligned}$$

Формализованная теорема Лёба $PA \vdash \square_T(\square_t\varphi \to \varphi) \to \square_T\varphi$.
Доказательство

$$\begin{aligned}
&PA \vdash \lambda \leftrightarrow (\square_T\lambda \to \varphi)\\
&PA \vdash \square(\lambda \to (\square\lambda \to \varphi))\ GL-1\\
&PA \vdash \square\lambda \to (\square\,\square\,\lambda \to \square\varphi)\ GL-2\\
&PA \vdash \square\lambda \to \square\,\square\,\lambda\ GL-3\\
&PA \vdash \square\lambda \to \square\varphi\\
&\square\,(\square\varphi \to \varphi)\\
&\square\,(\square\lambda \to \varphi)\\
&\square\,(\square\lambda \to \square\varphi) \wedge \square(\square\varphi \to \varphi) \to \square(\square\lambda \to \varphi)\\
&PA \vdash \square(\square\lambda \to \varphi) \to \square\lambda\\
&\square\,\lambda\\
&\square\,\varphi
\end{aligned}$$

Если $T \vdash \square\perp \to \perp$, то $T \vdash T\perp$.

Теорема Тарского Не существует $\tau(x)$, что $\mathbb{N} \models \tau([\varphi]) \leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi$.
Доказательство

$$\begin{aligned}
&PA \vdash \xi \leftrightarrow \neg\tau([\xi])\\
&\mathbb{N} \models \xi \leftrightarrow \mathbb{N} \models \tau([\xi]) \leftrightarrow \mathbb{N} \not\models \xi
\end{aligned}$$

Упражнение Существует ли $\tau'(x)$, то $\mathbb{N} \models \varphi \leftrightarrow PA \vdash \tau'([\varphi])$.
Теорема PA алгоритмически разрешима.

$$\mathrm{ch}_{PA}(x) = \begin{cases} 1, x - [\varphi], PA \vdash \varphi \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Предположим, что χ_{PA} вычислимы.

Задача Если f рекурсивная функция, то $\exists F \in \Sigma_1.\ f(\underline{n}) = m \leftrightarrow \mathbb{N} \vDash F(\overline{n}, \underline{m})$.

Доказательство теоремы $H(x, y)$ представляет χ_{PA}.

$$PA \vdash \zeta \leftrightarrow H([\zeta], 0)$$
$$PA \vdash \zeta \Rightarrow \mathbb{N} \vDash \zeta \Rightarrow \mathbb{N} \vDash H([\zeta], 0) \Rightarrow \chi_{PA}([\zeta]) = 0 \Rightarrow PA \nvdash \zeta$$
$$PA \nvdash \zeta \Rightarrow \chi_{PA}([\zeta]) = 0 \Rightarrow \mathbb{N} \vDash H([\zeta], 0)$$
$$PA \vdash H([\zeta], 0) \Rightarrow PA \vdash \zeta$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ