ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ 3

СОКОЛОВ
ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗФАКА МГУ

МИЛИЦИНУ АННУ АЛЕКСАНДРОВНУ

Оглавление

Лекция 1 ..... *5*

Векторный анализ. Скалярные и векторные поля 5

Свойства дифференцирования, свойства оператора набла со свойствами различных векторных операций 5

Ортогональные системы координат 6

Коэффициенты Ламе для простейших систем координат 8

Лекция 2 ..... *9*

Теория числовых рядов 9

Критерий Коши 9

Исследование на сходимость 9

Теорема Римана 10

Лекция 3 ..... *12*

Исследование на условную сходимость 12

Признак Дирихле-Абеля 12

Лекция 4 ..... *15*

Функциональные последовательности и ряды. 15

Равномерная сходимость 15

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов 15

Лекция 6 ..... *18*

Теорема Арцела 18

Несобственные интегралы 20

Интеграл в смысле главного значения 20

Лекция 7 ..... *21*

Признак Абеля 22

Лекция 8 ..... *24*

Кратные несобственные интегралы 24

Интегралы, зависящие от параметра 25

Лекция 9 ..... *28*

Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра 28

Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра 28

Критерий Коши 30

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Признак Вейерштрасса 30

Признак равномерной сходимости Абеля 30

Лекция 10 ..... ***33***

Интегралы Френеля 33

Эйлеровы интегралы 34

Метод Лапласа 35

Лекция 11 ..... ***37***

Кратные собственные/несобственные интегралы, зависящие от параметра 37

Теория потенциала 37

Признак Вейерштрассе 37

Ряды и интеграл Фурье 38

Лекция 12 ..... ***40***

Ряд Фурье 40

Коэффициенты разделены из-за четности/нечетности функций 42

Лекция 13 ..... ***43***

Общий ряд Фурье. Ортогональные системы функций 43

Свойства ряда Фурье 43

Лекция 14 ..... ***45***

Равномерная сходимость рядов Фурье 45

Аппроксимация функций 47

Лекция 15 ..... ***49***

Замкнутые и полные системы функций 49

Пространство функций 50

Лекция 16 ..... ***54***

Интеграл Фурье 54

Лекция 17 ..... ***57***

Физические приложения 57

Магнитное поле в проводящей среде 57

Лекция 18 ..... ***59***

Фурье-анализ и вейвлет-анализ 59

Лекция 1
Векторный анализ. Скалярные и векторные поля

Векторное поле – это такой объект, который характеризуется тем, что в каждой точке пространства, плоскости, области на плоскости задан вектор. Координаты этого вектора являются функциями двух или трех измерений.

Пусть задан вектор $a_i(x_1, x_2, x_3)$, *i=1,2,3.* В результате его дифференцирования получится объект, имеющий два индекса. Это тензор второго порядка. Дифференцируем пять раз – получаем тензор шестого порядка. Один индекс получаем от исходного векторного поля, а остальные – от дифференцирования. Возникают понятия:

1) Градиента скалярного поля $\vec{\nabla} f = grad f = (\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z})$
2) Дивергенции $(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = div\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
3) Ротора $[\vec{\nabla} \times \vec{a}] = rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$

Дивергенция ротора $\vec{a}$:

$$div\, rot\, \vec{a} = \left(\vec{\nabla}\, [\vec{\nabla} \times \vec{a}]\right) = 0$$

Ротор градиента f:

$$rot\, grad\, f = [\vec{\nabla}\, \vec{\nabla}\, f] = [\vec{\nabla}\, \vec{\nabla}\,] f = 0$$

Дивергенция градиента f:

$$div\, grad\, f = (\vec{\nabla}\, \vec{\nabla}\,) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Полученная величина называется - оператор Лапласа или Лапласиан.

Свойства дифференцирования, свойства оператора набла со свойствами различных векторных операций

$$rot\, [\, \vec{a} \times \vec{b}\,] = \left[\vec{\nabla}\, [\, \vec{a} \times \vec{b}\,]\right] = \left[\vec{\nabla_a}\, [\, \vec{a} \times \vec{b}\,]\right] + \left[\vec{\nabla_b}\, [\, \vec{a} \times \vec{b}\,]\right] =$$
$$= \vec{a}(\vec{\nabla_a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla_a} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{\nabla_b} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla_b} \cdot \vec{a}) =$$
$$= (\vec{b}\, \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b} div \vec{a} + \vec{a} div \vec{b} - (\vec{a}\, \vec{\nabla})\vec{b}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Ортогональные системы координат

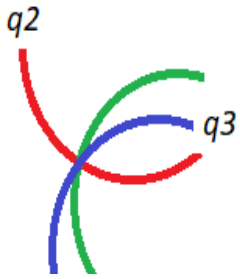

Рис. 1

Пусть были заданы декартовы системы координат (рис.1):

$$x_1=x_1(q_1, q_2, q_3)$$
$$x_2=x_2(q_1, q_2, q_3)$$
$$x_3=x_3(q_1, q_2, q_3)$$

Необходимо, чтобы формулы преобразования координат были обратимы, то есть якобиан должен быть равен нулю.

Зафиксируем q_2 и q_3.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot dq_1; \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot dq_1; \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot dq_1$$

Длина вектора вдоль линии q_1.

$$dl_1 = dq_1 \cdot \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_1})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_1})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_1})^2} = H_1 dq_1$$

$$dl_2 = dq_2 \cdot \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_2})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_2})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_2})^2} = H_2 dq_2$$

$$dl_3 = dq_3 \cdot \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_3})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_3})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_3})^2} = H_3 dq_3$$

H_1, H_2, H_3 – Коэффициенты Ламэ

При помощи этих коэффициентов можно построить выражение для ротора, градиента и дивергенции. Рассмотрим бесконечно малую площадку (рис.2):

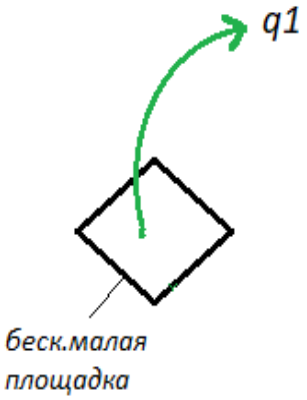

Рис. 2

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 \, dq_2 dq_3$$
$$d\sigma_2 = H_3 H_1 \, dq_3 dq_1$$
$$d\sigma_3 = H_1 H_2 \, dq_1 dq_2$$
$$dV = H_1 H_2 H_3 \, dq_1 \, dq_2 dq_3$$

$$(gradf \cdot \overrightarrow{e_1}) = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}$$

$$(gradf \cdot \overrightarrow{e_2}) = \lim_{\Delta q_2 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}$$

$$(gradf \cdot \overrightarrow{e_3}) = \lim_{\Delta 3 \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l_3} = \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3}$$

Тогда вектор градиента в криволинейной системе координат равен:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$grad\ f = \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_1}\cdot\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_2}\cdot\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{H_3}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_3}\cdot\overrightarrow{e_3}$$

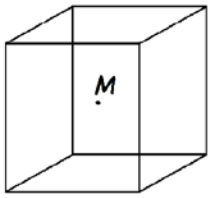

Рис. 3

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iint_{\Sigma}(\vec{a}\cdot dS) = \iiint_{\Omega} div\vec{a}\ dv$$

$$\boxed{\lim_{\Omega\to M}\frac{\iint_{\Sigma}(\vec{a}\cdot dS)}{V(\Omega)} = div\vec{a}}$$

Инвариантное определение дивергенции

$\Omega \to M$ обозначает, что область стягивается в точку M (рис. 3)

Вычислим, чему равняется поток векторного поля через маленький кубик (рис.4).

Поток через левую грань

$= (-\overrightarrow{e_1}\cdot a_1H_2H_3dq_2dq_3)$ в точке (q_1, q_2, q_3)

Поток через правую грань

$= (\overrightarrow{e_1}\cdot a_1H_2H_3dq_2dq_3)$ в точке (q_1+dq_1, q_2, q_3)

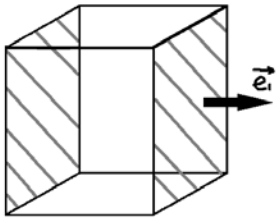

Рис. 4

$$\text{Разность этих потоков} = (\overrightarrow{e_1}\cdot a_1H_2H_3dq_2dq_3)\,|_{(q1,q2,q3)} + \underbrace{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}\ dq_1dq_2dq_3}_{\text{Вклад в поток}}$$

$$\text{Поток} = \frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}\ dq_1dq_2dq_3 + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}\ dq_1dq_2dq_3 + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\ dq_1dq_2dq_3$$

$$dV = H_1H_2H_3\ dq_1\ dq_2dq_3$$

$$\boxed{div\ \vec{a} = \frac{1}{H1, H2, H3}\left(\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right)}$$

$$\underbrace{\int_L(\vec{a}\cdot\overrightarrow{dl})}_{\text{Циркуляция потока}} = \underbrace{\iint_{\Sigma}(rot\vec{a}\cdot\overrightarrow{d\Sigma})}_{\text{Поток Ротора}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Инвариантное определение ротора:

$$(rot\,\vec{a})_{\vec{\sigma}} = \lim_{L\to M} \frac{\oint(\vec{a}\cdot\overrightarrow{dl})}{S(\Sigma)}$$

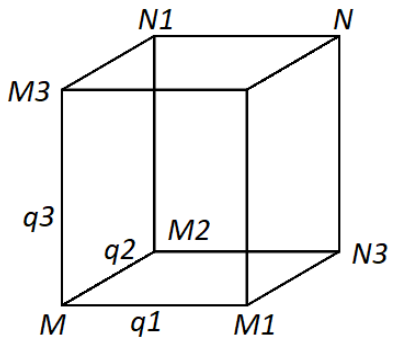

Рис. 5

Циркуляция векторного поля через маленький контур (рис.5):

N_1M_3: $(-a_2H_2)dq_2\,|_{(q1,q2,q3+dq3)}$

MM_2: $(a_2H_2)dq_2\,|_{(q1,q2,q3)}$

Итого:

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)dq_2dq_3$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3)dq_2dq_3$$

$$rot\,\vec{a} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right] + \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3H_3)\right] + \\ + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1H_1)\right]$$

Коэффициенты Ламе для простейших систем координат

I. Цилиндрическая СК

$$x = \rho\cos\varphi\,;\, y = \rho\sin\varphi\,;\, z = z$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2} = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{(\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2} = \rho$$

$$H_3 = 1$$

II. Сферическая СК

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta\,;\, y = \rho\sin\varphi\sin\theta\,;\, z = \rho\cos\theta$$

$$H_1 = \sqrt{(\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2 + (\rho\cos\varphi\sin\theta)^2} = \rho\sin\theta$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2

Теория числовых рядов

Ряд - символ, который является суммой бесконечного числа членов.

Критерий Коши

Теорема.
Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда, когда для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \text{ и } \forall p \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Следствие: $p=1$. Необходимо, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n \geq N \ \ |a_n| < \varepsilon$.
То есть, для того чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю.

1) Сходимость ряда НЕ зависит от первого конечного числа членов;
2) Сходимость ряда НЕ зависит от умножения каждого члена ряда на число.

Теорема.
Если сходится ряд, составленный из модулей, то ряд, составленный из самих чисел, тоже сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n=p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

Опр. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей a_n ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$).

Исследование на сходимость

1) Признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|, \quad |a_n| \leq |b_n|$$

Из сходимости $\Sigma|b_n| \Rightarrow$ сходимость $\Sigma|a_n|$
Из расходимости $\Sigma|a_n| \Rightarrow$ расходимость $\Sigma|b_n|$

2) Интегральный признак (Коши-Маклорена)

Теорема.
Пусть $a_n = f(n)$, при этом $f(n)$ монотонно не возрастает и стремится к нулю. При $n \geq m$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\int_m^n f(x)dx$ ограничена при $n \to \infty$.

Док-во: $k-1 \le x \le k$. Так как функция монотонна, то

$$f(k) \le f(x) \le f(k-1)$$

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k-1)$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$$

$$S_n - S_m \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le S_{n-1} - S_{m+1}$$

S_m и S_{m+1} – константы, n – переменный индекс.

$$n \to \infty$$

Тогда выражение $\int_{k-1}^{k} f(x)dx$ является ограниченным, а значит, S_n тоже ограниченна. То есть ряд является сходящимся. Теорема доказана.

3) Обобщенный гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\int_m^x \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}(1-p)}\Big|_m^{p\neq 1}$$

$$\begin{cases} p > 1 & \text{ряд сходится} \\ p < 1 & \text{ряд расходится} \\ p = 1 \int_m^x \frac{dx'}{x'} = lnx'|_m^x & ln \to \infty \end{cases}$$

Следовательно, ряд тоже расходится.

Опр. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если ряд сходится, а ряд, составленный из модулей ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$) расходится.

Теорема Римана

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, тогда для любого числа L, существует такая перестановка членов ряда, что сумма ряда с переставленными членами сходится к L или расходится ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Док-во: Введем $p_n = \begin{cases} a_n, \ a_n > 0 \\ 0, \ a_n \leq 0 \end{cases}$ $q_n = \begin{cases} |a_n|, \ a_n < 0 \\ 0, \ a_n \geq 0 \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

$$P_k = \sum_{n=1}^{k} p_n \qquad Q_k = \sum_{n=1}^{k} q_n$$

$$S_k = P_k - Q_k \to \text{c} \quad (P_k \to \infty \text{ и } Q_k \to \infty\,)$$

Общий член ряда $a_n \to 0$, поэтому $p_n \to 0$ и $p_n \to 0$.

Признак Дирихле-Абеля применим для рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}; \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

По признаку Коши-Маклорена эти ряды сходятся при $\alpha > 1$.

$$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \ ; \quad \left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

По признаку Дирихле-Абеля эти ряды сходятся при $\alpha > 0$.

Ряды такого типа называются рядами Фурье.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3

Исследование на условную сходимость

Свойство сходимости ряда.
Если ряд сходится $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то последовательность частичных сумм стремится к S.

$$S_k = \sum_{k=1}^{k} a_k \to S$$

Также это значит, что остаток ряда стремится к нулю при k⟶∞.

$$r_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \to 0$$

Признак Лейбница.
Ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}P_n = P_1 - P_2 + P_3 - \cdots$ называются знакочередующимися рядами.

Теорема.
Если последовательность $\{P_n\}$ монотонно убывая сходится к нулю, являясь бесконечно малой, то ряд сходится.

Док-во: если n – четное, то сумма представима в виде:

$$S_{2n} = (P_1 - P_2) + (P_3 - P_4) + \cdots + (P_{2n-1} - P_{2n})$$

В силу того, что $\{P_n\}$ монотонно не возрастает, выражения в скобках неотрицательны $\Rightarrow S_{2n} \to 0$ и монотонно не убывает.
Единственное, что необходимо, чтобы она сходилась, это наличие ограничения сверху.

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \cdots - p_{2n}$$

Следовательно, $S_{2n} \leq p_1$ и $S_{2n} \to S$.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1}$$

Для больших n эта сумма меньше любого наперед заданного ε. Значит, наша последовательность разбивается на две подпоследовательности, которые имеют одинаковый предел, следовательно, наша последовательность имеет предел.

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| \leq p_{2n+1} \text{ или } |S_{2n} - S| \leq p_{2n+1}$$

Признак Дирихле-Абеля

Теорема.
Пусть задан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ и 1) $v_k \to 0$; 2) $\exists M\ \forall n\ |\sum_{k=1}^{n} u_k| < M$. Тогда этот ряд сходится.

Док-во:
Лемма Тождество Абеля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n,$$

где $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$, так как $U_k = S_k - S_{k-1}$, то

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k$$

Произведём замену k=k-1, т.е сумма будет выглядеть так:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_{k+1} v_{k+1} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1}$$

Объединим две суммы, и получим:

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n$$

Докажем выполнение критерия Коши.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p: \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k\right| \leq \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} M(v_k - v_{k+1}) + Mv_{n+p} + Mv_n$$

Все члены последовательно сокращаются и всё, что остается, равно $2Mv_n$.

В силу того, что $v_n \to 0 \ \Rightarrow |v_n| < \frac{\varepsilon}{2M}\, v_n = \frac{1}{x^\alpha}$

Эти ряды не сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)$$

Но:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq M \ \text{ и } \ \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right| \leq M$$

От длины суммы оценка сверху не зависит.

$$u_k = \cos(kx)$$

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Суммируем это выражение по k до n, тогда оно примет вид:

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}cos(kx)\right)$$

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\text{где }\sin\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0, x\neq 2\pi m$$

$$|S_n|\leq\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4

Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость

Функциональные ряды - ряды, члены которых являются функциями.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Пусть $x \in X$. В каждой точке этого множества, функциональный ряд превращается в обычный численный ряд. Если этот ряд сходится, то это значение чисел ряда в этой точке. То, к чему сходится ряд – это сумма функционального ряда.

Пример:

$$f_n(x) \to f(x)$$

$$f_n(x) = x^n \to \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Опр. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$, если последовательность $\rho(f_n, f) = sup_{n\to\infty}|f_n(x) \to f(x)| \to 0$.

<u>Обозначение:</u> $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

Такое пространство функций называется пространством непрерывных функций и обозначается буквой С.

$C[a;b]$ - пространство непрерывных функций на сегменте $[a;b]$

$f_n(x) \to f(x)$ значит, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Признак Вейерштрасса.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим на этом множестве ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Опр. $\forall x\ \ |U_n(x)| \le a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим рядом по отношению к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Теорема. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ существует сходящий мажорирующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится равномерно (абсолютно).

<u>Док-во:</u>

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\right| < \varepsilon, \text{то есть что } \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_n(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^5}$ – равномерно сходящийся, так как $\left|\frac{\sin nx}{n^5}\right| \leq \frac{1}{n^5}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ – сходящийся

Критерий Коши.

Для того, чтобы функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходилась к $f(x)$ или функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходился бы равномерно, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие Коши: для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall x \in X \quad \forall n > N$ и $\forall p > 0$ выполняются неравенства:

$$sup\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

$$sup\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\right| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость:

$$sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ или } sup_{x\in X}\left|\sum_{k=1}^{n} U_k(x) - S(x)\right| \to 0$$

Признак Дирихле-Абеля.

Рассматривается числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Известно, что последовательность ограничена: $|S_n| \leq M$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Из того, что b_n монотонно сходится к 0, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ тоже сходится.

Для рядов то же самое, что и для последовательностей, только ограниченность частичных сумм была для всех x и сходимость последовательности была равномерной.

Признак Абеля.

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\,(x)\right| \leq M$$

M не зависит от n и x.

v_n монотонно стремится к 0, сходимость равномерна $\Rightarrow$ $v_n(x) \to 0$

$$v_n(x) \rightrightarrows 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) \rightrightarrows$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leq M\delta(\varepsilon) < \varepsilon$$

(аналогично доказательству из лекции 3)

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6

Теорема Арцела

Опр. Равномерная ограниченность
Семейство функций $\{f(x)\}$ называется равномерно ограниченным, если

$$\exists M: \forall x \in X \ \ \forall f \in \{f(x)\}, \qquad \text{выполняется } |f(x)| < M$$

Опр. Равностепенная непрерывность
Семейство функций $\{f(x)\}$ называется равностепенно-непрерывным, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) \ \ \forall x', x'' \in X \ \ \ \forall f \in \{f(x)\} \ \text{ выполняется}$$

$$(|x' - x''| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

Лемма Арцела.
Пусть $f_n(x)$ непрерывны и заданы на $[a, b]$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно сходится на $[a, b]$.

<u>Док-во:</u> 1) Выберем на отрезке (рис.6) бесконечное количество точек $x_i, i = 1,2, \ldots$С помощью этого набора точек можно приблизиться к любой точке отрезка сколь угодно близко. Это всюду плотное счетное множество – свойство сепарабельности.

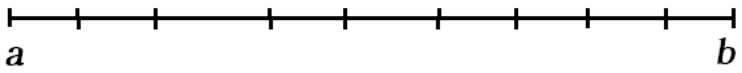

Рис. 6

2) Возьмем точку x_1. Необходимо получить подпоследовательность, которая сходится в точке x_1. Рассмотрим значения функции в точке: $f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1)$. По свойству равномерной ограниченности значения $x_1, x_2, \ldots x_n < M \ \Rightarrow$ $f_1(x_1), f_2(x_1), \ldots, f_n(x_1) < M$. Т.е. последовательность является ограниченное $\Rightarrow$ из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1) - \text{сходящаяся числовая последовательность}$$

$$f_{11}(x), f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x) - \text{сходящаяся к } x_1 \text{ функциональная последовательность}$$

Выбросим всё, что не сходится к x_1. Рассмотрим получившуюся бесконечную последовательность в точке x_2.

$$f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), \ldots, f_{1n}(x_2) - \text{ограниченная числовая последовательность}$$

Из нее тоже выделим сходящуюся последовательность:

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2) - \text{числовая последовательность}$$

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x) - \text{сходится в точках } x_1 \text{ и } x_2$$

Аналогично

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f_{31}(x), f_{32}(x), \dots, f_{3n}(x) - \text{ сходится в точках } x_1, x_2, x_3$$

С помощью диагонального процесса Кантора рассмотрим последовательность функций:

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x)$$

Эта последовательность сходится во всех точках всюду плотного множества x_i

3) Рассмотрим отрезок $[a; b]$ (рис.7).

Нужно доказать, что выполнен критерий Коши, то есть

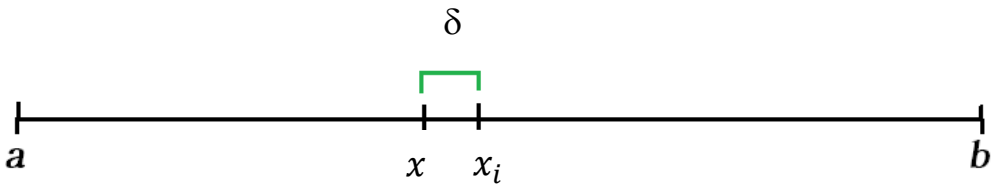

Рис. 7

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in [a, b]\ \exists N\ \ \forall n, m > N\ \ |f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| < \varepsilon$$

$$|x - x_i| < \delta$$

$$|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| = |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i) + f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i) + f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)| \leq$$
$$\leq |f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i)| + |f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i)| + |f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)|$$

$$|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i)| < \varepsilon/3$$

$$|f_{mm}(x_i) - f_{mm}(x)| < \varepsilon/3$$

По условию равностепенной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon)\ \ \forall x, x_i \in X\ \ \ \forall f \in \{f(x)\}\ \text{ выполняется}$$

$$(|x_i - x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_i) - f(x)| < \varepsilon/3)$$

В каждой точке множества мы можем выбрать такие $n,m>N$, что

$$|f_{nn}(x_i) - f_{mm}(x_i)| < \varepsilon/3$$

Т.е. в каждой точке x_i последовательность сходится ⇒ она фундаментальна ⇒ этих точек конечное множество ⇒ фундаментальность достигается сразу во всех точках этого конечного множества. Тогда $|f_{nn}(x) - f_{mm}(x)| < \varepsilon$.

Несобственные интегралы

1) Неограниченная область интегрирования (рис.8.1) – несобственный интеграл первого рода;

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

2) Неограниченная функция (рис.8.2) – несобственный интеграл второго рода.

$$\int_a^{b} f(x)dx$$

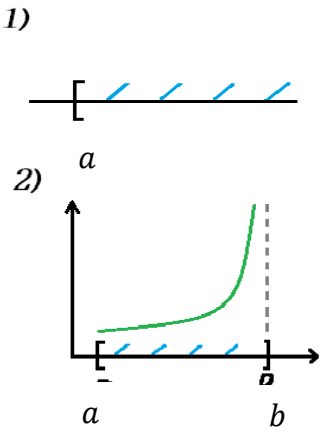

Рис. 8

Опр. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если существует $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$.

Зам. оба интеграла должны быть сходящимися, и переход при $b \to \infty,\ b' \to -\infty$ должен быть независимым.

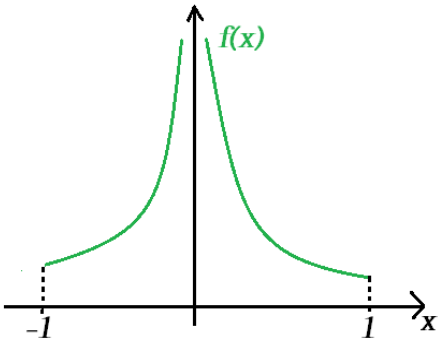

Рис. 9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)dx =$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ b'\to-\infty}} \int_{b'}^{b} f(x)dx$$

Пример: см. рис. 9

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+1} f(x)dx =$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0 \\ \varepsilon_2\to 0}} \left[\int_{-1}^{\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{\varepsilon_2}^{1} f(x)dx\right]$$

Интеграл в смысле главного значения

$$⨍_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

Может быть так, что интеграл в смысле главного значения существует, а интеграл вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ - нет. *(Пример: sin(x))*

Любая нечетная функция, заданная на прямой, имеет интеграл в смысле главного значения (он всегда равен нулю).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7

Теорема. Критерий Коши.
Для того, чтобы интеграл сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \quad \forall B', B'' > A \quad \left| \int_{B'}^{B''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Опр. Говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.
Теорема. Если интеграл абсолютно сходится, то он просто сходится.

Док-во:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)dx \right| \leq \int_{B'}^{B''} |f(x)|dx < \varepsilon$$

По критерию Коши интеграл сходится.

Признак сравнения.
Пусть есть две функции $f(x), g(x) \geq 0$ и $\exists M, \forall x > M \ |f(x)| \leq g(x)$ и известно, что $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится. Тогда сходятся и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
Док-во:

$$\int_a^B |f(x)|dx \leq \int_a^B g(x)dx$$

Нам дано, что функция $\int_a^B g(x)dx$ при $B \to \infty$ остается ограниченной. Тогда и функция $\int_a^B |f(x)|dx$ будет ограниченной. То есть это ограниченная монотонная функция (ограниченная сверху, монотонно неубывающая), следовательно, у нее есть предел и несобственный интеграл. Теорема доказана.

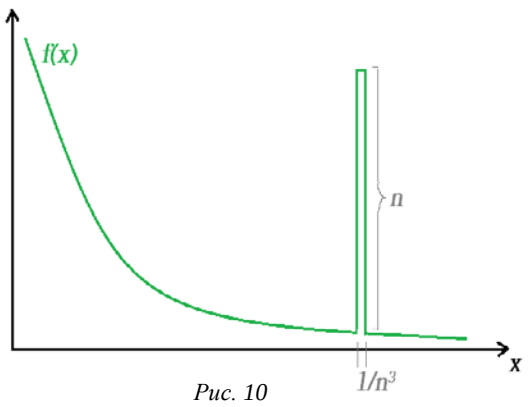

Рис. 10

Разница между абсолютной сходимостью рядов и интегралов:
Интеграл может сходиться, а его подынтегральная функция может быть неограниченной.

Т.е. при исследовании на сходимость интегралов нужно помнить, что подынтегральная функция может быть неограниченной при $x \to \infty$ (рис.10)

Пример

Ряд расходится	Интеграл сходится
$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$	$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$

Интеграл Пуассона.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Подынтегральная функция убывает быстрее любой степени x при $x \to \infty$ (экспонента сильнее чем любая степенная функция), по признаку сравнения этот интеграл сходится.

Признак Абеля

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

Если $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $|F(x)| \leq M, g(x) \in C^1, g(x)$ монотонно стремится к 0 и $g \geq 0$, то утверждается, что интеграл сходится.

<u>Док-во:</u> нужно доказать, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon$$

за счет выбора достаточно больших B' и B''.

$$\int_{B'}^{B''} f(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_{B'}^{B''} - \int_{B'}^{B''} F(x)g'(x)dx =$$

$$= F(B'')g(B'') - F(B')g(B') - F(\xi) \int_{B'}^{B''} g'(x)dx =$$

$$= F(B'')g(B'') - F(B')g(B') - F(\xi)[g(B'') - g(B')]$$

F – ограниченная функция, g – бесконечно малая. Тогда за счет выбора точек будет выполняться условие:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x)g(x)dx \right| < \varepsilon$$

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$$

Сделаем замену переменной:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$x^2 = t$$
$$2xdx = dt$$
$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

$\sin t$ – ограниченная функция, $\frac{1}{\sqrt{t}}$ – бесконечно малая. Тогда выполняется признак Абеля:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{B'\to+\infty \\ B''\to-\infty}} \int_{B''}^{B'} f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{B} f(x)dx$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8

Кратные несобственные интегралы

Опр. Исчерпывающая система областей - это такая система областей Ω_n - ограниченная, что $\forall P\ \exists N\ \forall n > N\ P \in \Omega_n$

$$I_n = \iint\limits_{\Omega_n} f(x;y)dxdy$$

Для любой исчерпывающей последовательнсоти $I_n \to I$, независимо от выбора I, где I – несобственный интеграл.

Опр. Последовательность областей Ω_n называется исчерпывающей, если для любого радиуса $R\ \ \exists N, \forall n > N$ область Ω_n содержит все точки p, такие что расстояния от 0 до p меньше R ($\rho(0;p) < R$).

Введем интеграл: $\iint_{\Omega_n} f(x)dxdy$. Устремим $n \to \infty$. Тогда $\iint_{\Omega_n} f(x)dxdy$ должны стремиться к пределу I, который не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности (лишь бы она была исчерпывающей). Этот предел называется несобственным интегралом.

Для кратных интегралов из сходимости следует абсолютная сходимость. То есть <u>ВСЕ сходящиеся интегралы сходятся абсолютно!</u>

$$\iint \frac{dxdy}{r^\alpha}$$

Рассмотрим, как ведёт себя $\frac{1}{r^{\alpha-1}}$:

$\alpha - 1 > 1$.

Следовательно, условие сходимости: $\alpha > 2$.

Если интеграл кратный:

$$\int \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{r^\alpha},$$

где r – расстояние в n-мерном пространстве.

$$\int \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_n}{r^\alpha} = \int \frac{r^{n-1}dr}{r^\alpha} \underbrace{\int \dots}_{n\text{-}1\ \text{сфере}}$$

Рассмотрим, как ведёт себя $\frac{1}{r^{\alpha-n+1}}$:

$\alpha - n + 1 > 1$.

Условие сходимости: $\alpha > n$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интеграл Пуассона $\int_{0 \text{ или } -\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится, так как e^{-x^2} быстро убывает.

Вычислим, чему равен интеграл Пуассона. Обозначим его I.

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint e^{-x^2-y^2} dxdy =$$

Необходимо перейти к полярным координатам:

$$= \iint e^{-r^2} dxdy = \iint dr\, d\varphi\, r\, e^{-r^2} = \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$t = r^2, \qquad rdr = \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot 2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} (-e^{-t}|_0^{+\infty}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Главное значение трехкратного несобственного интеграла, взятого по всему пространству (рис.11):

$$\iiint f(x,y,z) dxdydz = \lim_{R \to +\infty} \iiint f(x,y,z) dxdydz$$

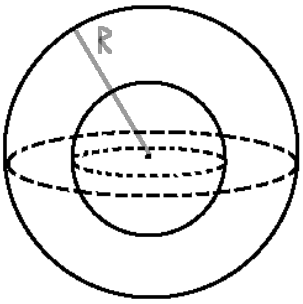

Рис. 11

Интегралы, зависящие от параметра

Введем функцию $J(y) = \int f(x,y) dx$.

1) Если интеграл собственный и подынтегральная функция непрерывная, то интеграл, зависящий от параметра, является непрерывной функцией $\Rightarrow$ можно интегрировать под знаком интеграла.
2) Если подынтегральная функция непрерывна и дифференцируема и её производная непрерывна, то можно дифференцировать под знаком интеграла.
3) Если интеграл несобственный, то необходимо воспользоваться понятием равномерной сходимости интеграла.

Теорема.

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$ $(a \le x \le b, c \le y \le d)$. Тогда $J = \int_a^b f(x,y) dx$ непрерывна на $y \in [c,d]$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Док-во: необходимо оценить, насколько отличаются интегралы при близких значениях параметра.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x' - x''| < \delta \text{ и } |y' - y''| < \delta$$
$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Пусть $x' = x'' = x$. Тогда сравним $J(y')$ и $J(y'')$:

$$|J(y') - J(y'')| = \left|\int_a^b \big(f(x, y') - f(x, y'')\big)dx\right| \leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')|dx \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Теорема доказана.

Теорема.

Пусть функция $f(x, y) \in C^1$ определена на $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$. $J(y) = \int f(x, y)dx$. Тогда J дифференцируема и $J' = \int_a^b f_y(x, y)dx$. То есть интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла.

Док-во:

$$\lim_{\Delta y} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y}$$

$$J(y + \Delta y) - J(y) = \int_a^b \big(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big)dx =* \int_a^b f_y(x, y + O\Delta y)\Delta y dx$$

(по формуле конечных приращений Лагранжа)

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x, y + O\Delta y)dx$$

$$\left|\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f_y(x, y)dx\right| = \left|\int_a^b \Big(f_y(x, y + O\Delta y) - f_y(x, y)\Big)\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_a^b \big|f_y(x, y + O\Delta y) - f_y(x, y)\big|dx$$

Точки с координатами y и $y + \Delta y$ близки друг к другу, поэтому в силу равномерной непрерывности мы можем сделать:

$$\big|f_y(x, y + O\Delta y) - f_y(x, y)\big| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$
$$\int_a^b \big|f_y(x, y + O\Delta y) - f_y(x, y)\big|dx \leq \varepsilon$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема.
Пусть функция $f(x,y)$ определена на $a \le x \le b, c \le y \le d$.

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Тогда J интегрируема и

$$\int_c^d J(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

<u>Док-во:</u>

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y) = \int_c^d dy \cdot J(y)$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9

Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра

Будем рассматривать $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $f(x,y)$ непрерывна на $c \le y \le d$.

Опр. Интеграл J называется равномерно сходящимся, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L(\varepsilon), \forall l > L, \forall y \in [c;d]$$

$$\left|\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{l} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_l^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$

Если мы рассмотрим дискретный набор чисел $l_k \to +\infty$, то получим функциональную последовательность $J_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)\,dx$. Если сам интеграл сходится, то $J_k(y)$ равномерно сходится к $J(y)$. И наоборот, если для $\forall l_k \to +\infty$ функциональная последовательность сходится, то интеграл тоже сходится равномерно.

Пример. Необходимо исследовать на равномерную сходимость

$$J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx\,, \quad 0 \le y \le 1.$$

$$\int_l^{+\infty} ye^{-xy}dx = \begin{cases} -e^{-xy}|_l^{+\infty}, y \ne 0 \\ 0, \quad y = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-ly}, y \ne 0 \\ 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

Нужно добиться того, чтобы $|e^{-ly}| < \varepsilon$ за счет выбора l.

Мы можем выбрать $y = \frac{1}{l}$, тогда $|e^{-1}| < \varepsilon$.

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx = \begin{cases} 1, & y \ne 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1.
С – равномерно сходящийся, $J(y)$ – непрерывная функция.

<u>Док-во:</u>

$$J_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx$$

непрерывны при $l_k \to +\infty$.

$$J_k(y) - \text{равномерно сходится к } J(y).$$

Равномерно сходящийся интеграл, зависящий от параметра и взятый от непрерывной функции, является тоже непрерывной функцией.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема доказана.

Теорема 2.
Пусть есть интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx, f(x,y) \in C_1 \text{ на } a \le x < +\infty, c \le y \le d,$$

$$J(y_0) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \text{ сходится,}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \text{ сходится равномерно.}$$

Тогда $\exists\, J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$.

То есть интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать под знаком интеграла при условии, что интеграл от производной существует и сходится равномерно.

<u>Док-во:</u> выберем последовательность $l_k \to +\infty$ такую, что $J_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx$.

$$J_k{}'(y) = \int_a^{l_k} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

Сделаем предельный переход при $k \to +\infty$. Мы его можем сделать, когда последовательность $J_k{}'(y)$ равномерно сходится. Это значит, что интеграл, составленный из производных, является равномерно сходящимся.
Теорема доказана.

Теорема.
Пусть $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx, f(x)$ непрерывна на $a \le x < +\infty, c \le y \le d$. Тогда:

1) $\int_c^d J(y)dy$;

2) $\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy.$

<u>Док-во:</u> выберем последовательность $l_k \to +\infty$ такую, что $J_k(y) = \int_a^{l_k} f(x,y)dx$.

Это собственный интеграл, поэтому можно переставлять порядок интегрирования. $J_k(y)$ −равномерно сходящийся $\Rightarrow$ функциональная последовательность равномерно сходится $\Rightarrow$ можно сделать предельный переход от $J_k(y)$ к $J(y)$.

$$J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{dJ}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y)$$

Теорема доказана.

Критерий Коши

$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ равномерно сходится тогда и только тогда, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists L(\varepsilon),\quad \forall l', l'',\ \ \forall y \in [c; d] \quad \left|\int_{l'}^{l''} f(x, y) dx\right| < \varepsilon.$$

Док-во: выберем последовательность $l_k \to +\infty$ такую, что $J_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx$
Из абсолютной сходимости следует сходимость.

$$\left|\int_{l'}^{l''} f(x, y) dx\right| \le \int_{l'}^{l''} |f(x, y) dx| < \varepsilon$$

Теорема доказана.

Признак Вейерштрасса

Если для $a \le x < +\infty, c \le y \le d$, и для $\forall y$ выполнено условие

$$|f(x, y)| \le g(x) \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ сходится,}$$

то $\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно.

То есть, если мы можем функцию $f(x, y)$ сверху «заможорировать» функцией $g(x)$, для которой интеграл сходится, то интеграл от функции с параметром сходится равномерно, кроме того, он сходится абсолютно.

Док-во:

$$\left|\int_{l'}^{l''} f(x, y) dx\right| \le \int_{l'}^{l''} |f(x, y) dx| \le \int_{l'}^{l''} g(x) dx < \varepsilon$$

Признак равномерной сходимости Абеля

Рассматриваем $\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y)\, dx$, известно что $\forall y \forall B\ \int_a^B f(x, y)\, dx \le M$ (равномерно ограничена), $g(x, y)$ равномерно и монотонно стремиться к 0. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y)\, dx$ сходится равномерно.

Док-во: нужно проверить, чтобы критерий Коши выполнялся для всех значений y (нужно преобразовать интеграл по формуле интегрирования по частям и проверить, какая получится разница). Док-во проводится не в общем случае, а для конкретного интеграла.

1 случай.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Разрывный множитель Дирихле:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

Если $\beta = 0$, то $I(\beta) = 0$.

Если $\beta \neq 0$, то интеграл существует по признаку Абеля (sin ограничен, а $1/_{\mathrm{x}} \to 0$). Кроме того

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{\beta x} d\beta x.$$

Если $\beta > 0$, то $I(\beta) = \mathrm{C}$.

Если $\beta < 0$, то $I(\beta) = -\mathrm{C}$.

То есть

$$I(\beta) = \begin{cases} \mathrm{C}, \beta > 0 \\ 0, \beta = 0 \\ -\mathrm{C}, \beta < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим

$$J(\alpha; \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin \beta x}{x} dx.$$

По α интеграл сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, где a >0.

Положим, что $\alpha > 0$ и продифференцируем по β:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = Re \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha + i\beta)x} dx = Re \frac{1}{-\alpha + i\beta} e^{(-\alpha + i\beta)x} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -Re \frac{1}{-\alpha + i\beta} = -Re \frac{-\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$J(\alpha; \beta) = \int \frac{\alpha \, d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + C = arctg \frac{\beta}{\alpha} + C$$

$$\text{При } \beta = 0 \quad J(\alpha; \beta) = 0 \implies \mathrm{C} = 0$$

$$J(\alpha; \beta) = arctg \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{Если } \alpha \to 0 \implies \frac{\beta}{\alpha} \to +\infty \implies arctg \frac{\beta}{\alpha} \to \frac{\pi}{2} \implies$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\Longrightarrow I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{\beta x} d\beta x = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \beta > 0 \\ 0, \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \beta < 0 \end{cases}$$

Лекция 10

Интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \qquad\qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx$$

$$\frac{I}{2}=\int_o^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} du\, e^{-tu^2}\sin t$$

Вместо интеграла *I* рассмотреть семейство интегралов *I(k)*, чтобы не было проблем с сходимостью:

$$I(k)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-kt}\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

При интегралах с $k\neq 0$ сходятся.

В силу признака Абеля, этот интеграл сходится по k от 0 до какого-то k_0

$$I(k)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} du\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt=Im\int_0^{+\infty} e^{[-(k+u^2)+i]t}dt=Im\frac{1}{-(k+u^2)+i}e^{[-(k+u^2)+i]t}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=Im\frac{1}{(k+u^2)-i}=Im\frac{k+u^2+i}{(k+u^2)^2+1}=\frac{1}{(k+u^2)^2+1}$$

Следовательно:

$$I(k)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(k+u^2)^2+1}\quad \text{тогда}$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}$$

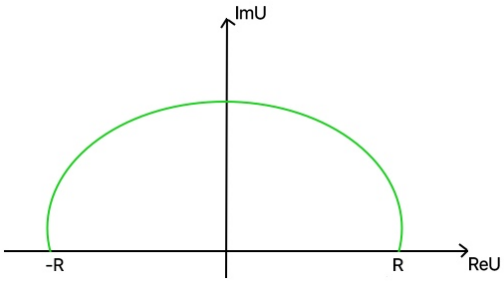

Рис. 12

Интеграл по дуге окружности (рис.12) будет стремиться к нулю, так как

$$\frac{R}{R^4}\sim\frac{1}{R^3}\to 0,$$

а по действительной оси интеграл стремиться несобственного интеграла, но поскольку интеграл сходя совпадает с самим интеграл.

Если у подынтегральной функции нет никаких особых интеграл равен нулю, так как функция аналитическая, а интегр равен нулю.

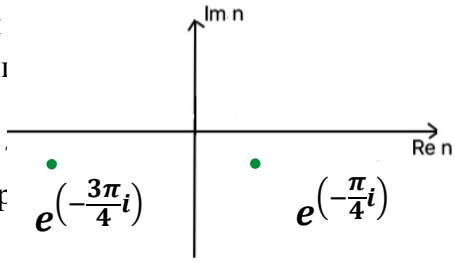

Рис. 13

У нашей подынтегральной функции есть две особые т должны вычислить.

Решим уравнение:

$$u^4+1=0 \quad u^4=-1 \;\; u^4=\left(e^{i\pi+2k\pi i}\right)^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}}$$

Интеграл можно преобразовать в два маленьких интеграла по окружности в окрестностях наших особых точек.

$$u=e^{i\frac{\pi}{4}}+\rho e^{i\varphi} \;\text{ и }\; u=e^{i\frac{3\pi}{4}}+\rho e^{i\varphi} \quad du=\rho i e^{i\varphi}d\varphi$$

$$I_1=\int\frac{\rho i e^{i\varphi}d\varphi}{1-1+4e^{i\frac{\pi}{4}}\rho e^{i\varphi}}=\frac{i2\pi}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} \quad I_2=\frac{i2\pi}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}}$$

$$I_1+I_2=\frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}+\frac{1}{e^{i\frac{9\pi}{4}}}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(e^{-\frac{3\pi}{4}i}+e^{-\frac{9\pi}{4}i}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad e^{-\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\pi}\,\sqrt{2} \qquad \int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Эйлеровы интегралы

Выведем формулу Стирлинга:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$p-1>-1\Rightarrow\begin{cases}p>0\\q>0\end{cases}$$

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$p\Gamma(p) = p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = x^p e^{-x}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx = \Gamma(p+1)$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1 \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Нужно представить факториал в виде функции вида $n! = f(n) * (1 + \bar{o}(1))$

Метод Лапласа

Работает для $\int \varphi(x)e^{\lambda f(x)}dx$. График $f(x)$ должен иметь максимум, который будет самым большим максимумом, и в этой точке функция должна аппроксимироваться параболой. Нам интересен этот интеграл при $\lambda \to +\infty$, а также при $\varphi(x_0) \neq 0$ $x_0 -$ точка максимума.

$$f(x) = f(x_0) - \frac{|f''(x_0)|}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$I = \int \varphi(x)e^{\lambda f(x)}dx =$$

$$= \varphi(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda f(x_0) - \frac{\lambda|f''(x_0)|}{2}(x-x_0)^2}dx =$$

$$= \varphi(x_0)e^{\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda|f''(x_0)|}{2}(x-x_0)^2}$$

Мы пришли к интегралу Пуассона.

$$t = \sqrt{\lambda|f''(x_0)|}(x - x_0)$$

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{\lambda|f''(x_0)|}}$$

$$I = \frac{\varphi(x_0)e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda|f''(x_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\int \varphi(x)e^{\lambda f(x)}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|f''(x_0)|}}\varphi(x_0)e^{\lambda f(x_0)}(1 + \bar{o}(1)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} u^t e^{-u} du$$

Сделаем замену переменной:

$$u = t(1+x)$$
$$x = -1 + \frac{u}{t}$$
$$du = tdx$$

$$\int_{-1}^{+\infty} dx e^{-t-tx} t^t (1+x)^t = t^t e^{-t} \int_{-1}^{+\infty} t e^{-tx+t\ln(1+x)}\, dx$$

$$\varphi(x) = 1\,, \quad f(x) = -x + \ln(1+x)$$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{1+x}\,, \quad x = 0 - \text{максимум}$$

$$f(0) = 0 \;\; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$t \to n \quad \boxed{n! = n^n e^{-n} n \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\big(1+\bar{o}(1)\big) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\big(1+\bar{o}(1)\big)} \; - \text{формула Стирлинга}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11

Кратные собственные/несобственные интегралы, зависящие от параметра

Теория потенциала

Дано $\rho(P)$, $\varphi(M)$, $\varphi(M) = \int \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d^3P$ (рис. 14),

где $r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

$$\Delta_M \frac{1}{r_{MP}} = \Delta_M \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = 0$$

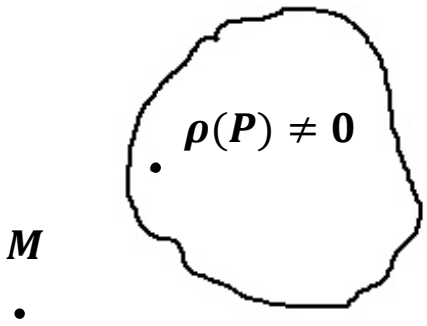

Рис. 14

Нам нужно найти вторую производную интеграла, но наличие критической точки (когда $x = x_0, y = y_0, z = z_0$) является проблемой, которую мы и должны решить.

Признак Вейерштрассе

Если подынтегральную функцию можно «замажорировать» функцией $\frac{1}{r^\alpha}$, где $\alpha < 3$. То мы имеем дело с равномерной сходимостью. Нам хотелось бы доказать, что интеграл непрерывная функция параметра.

$d^3P = r^2 \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \sin\theta$, так как элемент объема содержит r^2, то при интегрировании по малой сфере, интеграл сходится. Непрерывность потенциала сохраняется.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} =$$

$$= \frac{2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^2} =$$

$$= \frac{(x-x_0)}{r\text{^}3}$$

$$\frac{(x-x_0)}{r^3} d^3P \sim \frac{rr^2}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{(x-x_0)}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{2(x-x_0)^2}{3r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

$$d^3P \frac{1}{r^3} \sim \frac{r^2}{r^3} \sim \frac{1}{r}$$

Интеграл не является равномерно сходящимся. Нельзя написать оценку Вейерштрассе. Возникает вопрос, сходится ли этот интеграл вообще.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Получается два интеграла, собственный интеграл по большому шару за исключением маленького шарика и интеграл по маленькому шарику.

Собственный интеграл можно дифференцировать два раза и его лапласиан равен нулю. Интеграл по маленькому шарику рассмотрим отдельно.

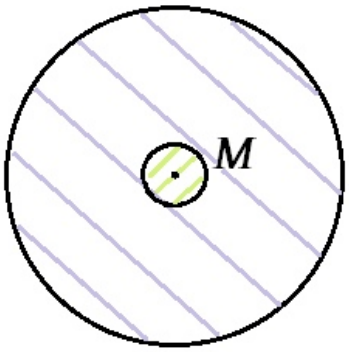

Рис. 15

$$\int \frac{\rho(P)d^3P}{r_{MP}} = \int\limits_{\Omega\setminus V_\varepsilon} \frac{\rho(P)d^3P}{r_{MP}} + \rho(M)\int\limits_{V_\varepsilon} \frac{d^3P}{r_{MP}} + \\ + \int\limits_{V_\varepsilon} \frac{(\vec{\nabla}\rho)\vec{r}}{r_{MP}} d^3P$$

Последний интеграл является сходящимся по признаку Вейерштрассе

$$\Delta\frac{1}{r} = \Delta_M \frac{1}{r_{MP}} = 4\pi\delta(M-P), \qquad \text{где} \int \delta(M-P)\rho(P)d^3P = \rho(M)$$

Ряды и интеграл Фурье

Периодическая функция $f(t)$ удовлетворяющая $\forall t\, f(t+T) = f(t)$, где T – наименьший период.

Будем вычитать T из нашей функции $f(t)$, пока она не попадет в пределы заданной функции. Это называется периодическим продолжением. Оно бывает как четным, так и нечетным.

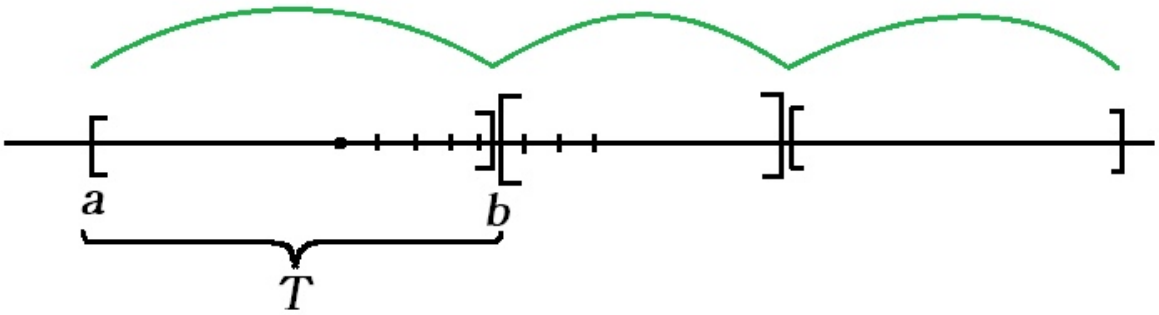

Рис. 16

$$\int\limits_a^{a+T} f(t)dt = \int\limits_a^T f(t)dt + \int\limits_T^{a+T} f(t)dt = \int\limits_a^T f(t)dt + \int\limits_0^a f(t)dt = \int\limits_0^T f(t)dt$$

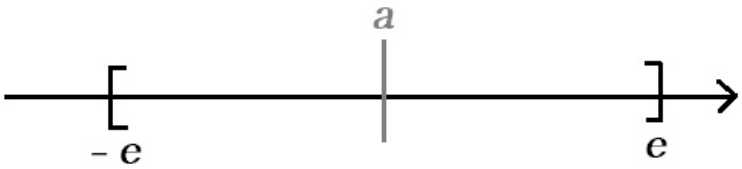

Рис. 17

$$A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\frac{k\pi x}{l} + \varphi_k) \quad f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

Фурье создал концепцию тригонометрического ряда для рассмотрения бесконечного количества гармоник, ряд выглядит так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \cos\frac{k\pi x}{l} dx = 0 \quad \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \cos\frac{k\pi x}{l} dx = 0$$

$$k \neq m \quad \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad \int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} = 0 \quad \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} 2l = l \quad \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} 2l = l$$

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\frac{1}{2} dx = \frac{1}{4} 2l = \frac{l}{2}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$

$$\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx = a_n \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l} dx \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx = b_n \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l} dx \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\int_{-l}^{l} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2l \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12

Ряд Фурье

Проблема периодического продолжения, которая сводится к разрыву функции в граничных точках. Возникает класс кусочно-гладких функций. Это функции, которые сами по себе непрерывны, за исключением конечного числа точек.

Мы считаем, что в точке разрыва существует такой предел:

$$\lim_{z\to -0}\frac{f(x_0-z)-f(x_0-0)}{z} \quad \lim_{z\to +0}\frac{f(x_0+z)-f(x_0+0)}{z}$$

Будем считать, что в остальных точках существуют первые производные.

Теорема. $f(x)$ кусочно-гладкая функция на $[-l;l]$, тогда её ряд Фурье сходится к $S(x)$

1) В точках непрерывности $S(x)=f(x)$;
2) В точках разрыва $S(x)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$;
3) В точках $l,-l$ $S(x)=\frac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}$.

<u>Док-во:</u> конструирование ядра Дирихле.

Рассмотрим частичную сумму: $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$

Подставим значения полученных коэффициентов:

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}+\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(\xi-x)}{l}\right]d\xi$$

$$z=\xi-x$$

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}\right]dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x+z)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}\right]dz$$

$$\sigma_n(z)=\frac{1}{l}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi z}{l}\right]=\frac{1}{l}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi x}{2l}}\right]\text{ такая, что }\int_{-l}^{l}\sigma_n(z)dz=1$$

Теорема доказана.

Основная лемма.
$f(x)$ – кусочно-гладкая функция.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$I_1(\alpha) = \int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\,dx$ $I_2(\alpha) = \int\limits_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx$, при $\alpha \to \infty$: $I_1(\alpha) \to 0$ и $I_2(\alpha) \to 0$

$[x_1; x_2]$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{f(x)\cos\alpha x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x_1}^{x_2} f'(x)\cos\alpha x\,dx\text{, то есть:}$$

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\alpha x\,dx\right| \le \frac{M}{\alpha}\ 0 \ \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)\sin\alpha x\,dx\right| \le \frac{N_1}{\alpha} \text{ и } \left|\int\limits_a^b f(x)\cos\alpha x\,dx\right| \le \frac{N_2}{\alpha}$$

По этой лемме, ядро Дирихле переходит в дельта-функцию, то есть интегралы по ядру Дирихле по любому отрезку, не содержащему ноль, равны нулю, а по любому отрезку, содержащему ноль, равны единице.

$$\int\limits_0^l \sigma_n(z)dz = \frac{1}{2} \qquad \int\limits_{-l}^0 \sigma_n(z)dz = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x+0)}{2} = \int\limits_0^l \sigma_n(x+z)f(x+0)dz \qquad \frac{f(x-0)}{2} = \int\limits_{-l}^0 \sigma_n(x+z)f(x-0)dz$$

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^0 [f(x+z) - f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\,dz$$

$$J_2 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l [f(x+z) - f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\,dz$$

Докажем, что при $n \to \infty$ $J_1 \to 0$ и $J_2 \to 0$ в силу однотипности, докажем для J_2

$$J_2 = \int\limits_0^l \ldots = \int\limits_0^\delta \ldots + \int\limits_\delta^l \ldots$$

Выбором n мы можем сделать второй интеграл $< \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\frac{1}{l}\int\limits_0^\delta 2l\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\frac{\pi z}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}dz$$

Этот интеграл можно сделать ограниченным за счёт выбора δ. Справедливо и для J_2. Отсюда следует, что наша разность стремится к нулю. Что и требовалось доказать. Функцию можно представить в виде как четной, так и нечетной функции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \leftarrow a_k \;\; f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \leftarrow b_k$$

Коэффициенты разделены из-за четности/нечетности функций

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \;\; a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Обычно используется комплексный вид ряда Фурье.

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}dx = 2\pi c_n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

c_n – коэффициент Фурье в комплексной форме

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13

Общий ряд Фурье. Ортогональные системы функций

Будем рассматривать ряд Фурье в комплексной форме.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{где } c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ilx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx \;\; I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx \;\; \text{при} \begin{cases} n \neq k \; I = 0 \\ n = k \; I = 2\pi \end{cases}$$

Скалярное произведение функций: $(f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$

Норма вектора: $\left|\left|f\right|\right|^2 = (f; f) = \int_a^b f(x)\bar{f}(x)dx$

$$\left|\left|e^{inx}\right|\right|^2 = 2\pi$$

Сходимость в среднем. Некоторая функциональная последовательность сходится в среднем, если:

$$\left|\left|f(x) - f_n(x)\right|\right| = \sqrt{\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx} \to 0, \text{где}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \pi kx + b_k \sin \pi kx)$$

Нужно доказать сходимость этих рядов.

Мы рассматриваем класс функций, все из которых кусочно-гладкие, что является неточным приближением из-за отсутствия знаний об интеграле Лебега.

Свойства ряда Фурье

Рассмотрим $[a; b]$ на котором заданы ортоганальные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ Такие, что

$$(\varphi_i; \varphi_j) = 0 \;\; \text{при } i \neq j \;\; \text{и} \;\; (\varphi_i; \varphi_i) = \left|\left|\varphi_i\right|\right|^2 \neq 0$$

$$\left|\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right|\right|^2 = min$$

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right)^2 dx =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_k\alpha_i \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx =$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} 2\alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \int_a^b \varphi_k(x)dx =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k||\varphi_k|| - \frac{(f;\varphi_k)}{||\varphi_k||}\right)^2 - \frac{(f;\varphi_k)^2}{||\varphi_k||^2} =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - C_k)^2||\varphi_k||^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2||\varphi_k||^2$$

Отклонение минимально при $\alpha_k = C_k$. Следовательно, многочлен Фурье имеет лучшее среднее квадратичное отклонение из возможных для функции.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x)$$

Равенство Бесселя:

$$\left|\left|f - \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k\right|\right|^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k^2||\varphi_k||^2$$

Неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2||\varphi_k||^2 \le ||f||^2$$

Мы можем утверждать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2||\varphi_k||^2 \le ||f||^2$$

В тригонометрической системе на отрезке:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx$$

В комплексной форме:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14

Равномерная сходимость рядов Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}$$

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k ik\, e^{ikx}$$

$$f''(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k i^2 k^2\, e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -C_k k^2\, e^{ikx}$$

$$f^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^n C_k\, e^{ikx},$$

где $C_k(ik)^n$ – коэффициент ряда Фурье для производной

$$C_k(ik)^n \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

$$\text{Тогда } C_k = o\left(\frac{1}{k^n}\right)$$

Общий член ряда убывает $\Rightarrow$ Выполнен признак Вейерштрасса для формальных рядов, составленных из производных. То есть ряды, составленные из производных, равномерно сходятся. Также мы доказали то, что скорость убывания ряда Фурье определяет гладкость функции.

Теорема.
Пусть $f(x)$ непрерывная и кусочно-гладкая на $[-l; l]$ и $f(l) = f(-l)$. Тогда ряд Фурье равномерно сходится на $[-l; l]$.

<u>Док-во:</u>

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$$

$f(x)$	$f'(x)$
a_k, b_k	a'_k, b'_k

Найдем связь между a_k и b_k.

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\frac{l}{k\pi} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

$$\text{Так как } f(l) = f(-l),\quad \frac{1}{l}\frac{l}{k\pi} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда $\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = b'_k\frac{l}{k\pi}$

$$a_k = -\frac{l}{k\pi}b'_k$$

$$b_k = \frac{l}{k\pi}a'_k$$

$$\frac{{a'_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)^2 dx < \infty$$

Эти ряды сходятся. Тогда

$$|a_k| + |b_k| = \frac{l}{\pi}\left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k}\right)$$

$$0 \le \left(|a_k| - \frac{1}{k}\right)^2 = |a_k|^2 - \frac{2|a_k|}{k} + \frac{1}{k^2}$$

$$0 \le \left(|a'_k| - \frac{1}{k}\right)^2 = |a'_k|^2 - \frac{2|a'_k|}{k} + \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{2|a'_k|}{k} \le |a'_k|^2 + \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{2|b'_k|}{k} \le |b'_k|^2 + \frac{1}{k^2}$$

Нужно доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k}\right) \le \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(|a'_k|^2 + |b'_k|^2)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$ нам дана (это неравенство Бесселя).

$\Downarrow$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ тоже сходится по интегральному признаку

$\Downarrow$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ сходится

$\Downarrow$

Ряд a_k сходится

$\Downarrow$

Равномерно сходится ряд Фурье

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема m раз, все её производные непрерывны, $f(l) = f(-l), f'(l) = f'(-l), f''(l) = f''(-l) \dots f'^{(m)}(l), f'^{(m)}(-l),\ f'^{(m+1)}(x)$ –кусочно непрерывная, коэффициенты ряда Фурье:

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ \ b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right)$$

$$\text{и ряды } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu}(|a_k| + |b_k|) < +\infty \quad \text{при } \nu = 0,1,\dots,m \text{ сходятся}$$

Если функция разрывна, то коэффициенты ряда Фурье очень медленно убывают. Тогда оказывается, что ряды разрывной функции очень медленно сходятся.

Пусть есть функция, периодическая по x и y (рис.18). Тогда мы можем её разложить в ряд по x:

$$f(x,y) = \sum_{n,k} C_{n,k} e^{inx} e^{iny}$$

Если $C_{n,k}$ убывает, то ряд является абсолютно сходящимся $\Rightarrow$ равномерно сходящимся

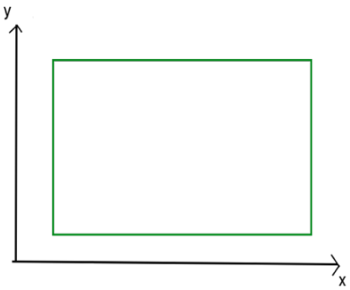

Рис. 18

Аппроксимация функций

Говорят, что функция $g(x)$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε, если

$$\forall x \in X \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Любую функцию, непрерывную на отрезке, можно аппроксимировать полиномом.

Лемма 1. Пусть *f(x)* непрерывна на *[a,b]*. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in [a,b]\ \exists$ непрерывная и кусочно-гладкая функция $g_\varepsilon(x)$: $|f(x) - g_\varepsilon(x)\ | < \varepsilon$.

<u>Док-во:</u> пусть $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \forall x', x''\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

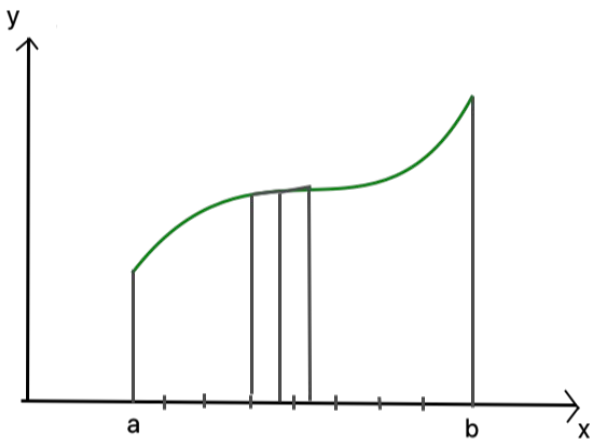

Рис. 19

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На рис. 19 изображен график непрерывной функции на $[a, b]$. Заменим её кусочно-линейной функцией. Разобьем отрезок $[a, b]$ так, чтобы расстояния $|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Заменим функцию на ломаные. Изменение нашей ломаной меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, функция тоже меняется на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ в силу равномерной непрерывности меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Итого:

$$|f(x) - g(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - g(x_i)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Первая теорема Вейерштрасса.
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a) = f(b)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in [a, b]$ существует тригонометрический поленом $T_N(x)$, аппроксимирующий $f(x)$ с точностью до ε ($|f(x) - T_N(x)| < \varepsilon$).

<u>Док-во:</u> любую функцию $f(x)$ можно аппроксимировать непрерывной и кусочно-гладкой функцией $g(x)$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По построению $f(a) = f(b)$, значит и $g(a) = g(b)$. Далее можно разложить функцию $g(x)$ в равномерно сходящийся ряд Фурье. То есть, взять от него частичную сумму и добиться того, чтобы

$$|g(x) - T_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - T_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15

Замкнутые и полные системы функций

Теорема.
Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall x\in[a,b]\ \ \exists P_N(x):\ \ |f(x)-P_N(x)|<\varepsilon$$

Док-во: *Случай 1:* Если отрезок симметричен относительно начала координат.

$$f(x)\in[-l;l]:\ \ f(l)=f(-l)$$

Любую функцию можно аппроксимировать тригонометрическим полиномом:

$$|f(x)-T_K(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Тригонометрический полином можно аппроксимировать алгебраическим:

$$|T_K(x)-P_N(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } |f(x)-P_N(x)|\le|f(x)-T_K(x)|+|T_K(x)-P_N(x)|<\varepsilon$$

Случай 2: Если отрезок не симметричен относительно начала координат (рис. 20), необходимо взять больший отрезок $[-l;l]$ и свести функцию в 0 в точках $-l$ и l. Получится непрерывная функция, заданная на большем отрезке. По первой части доказательства её можно аппроксимировать алгебраическим полиномом, стало быть, можно аппроксимировать и на маленьком отрезке.

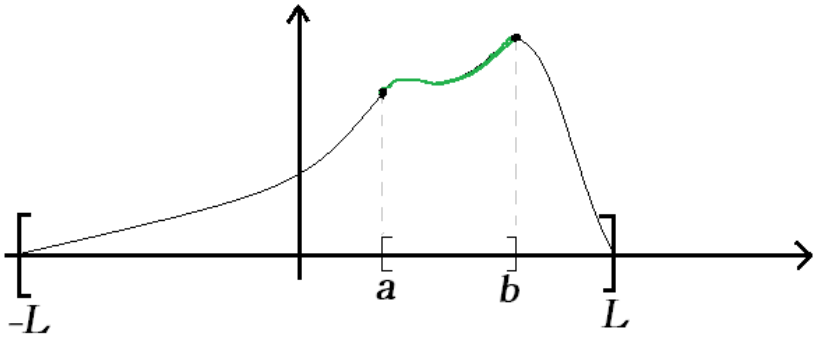

Рис. 20

Теорема доказана.

Теорема. $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[-l;l]$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists T_N(x):\ \ \sqrt{\int\left(f(x)-T_N(x)\right)^2dx}<\varepsilon$$

$$\text{То есть } \|f(x)-T_N(x)\|_{L2}<\varepsilon$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Док-во: $f(x)$ можно аппроксимировать в L_2 с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ непрерывной кусочно-гладкой функцией, которая удовлетворяет условию $f(l) = f(-l)$.

На рис. 21 изображен пример функции, у которой на разных концах отрезка $[-l; l]$ значения не совпадают. Нужно, чтобы нашлась непрерывная кусочно-гладкая функция $g(x)$, значения которой в конечных точках совпадают. Для этого нужно разбить функции на маленькие отрезки и соединить их.

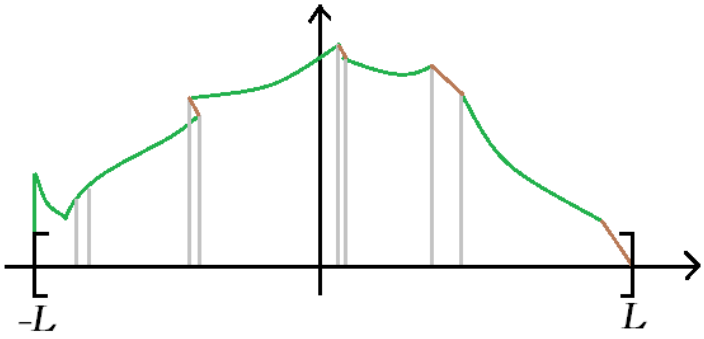

Рис. 21

$$\sqrt{\int_{-l}^{l} \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sqrt{\int_{-l}^{l} (f(x) - T_N(x))^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Применим неравенство треугольника для интегралов:

$$\|f - T_N\| \leq \|f - g\| + \|g - T_N\|$$

Функция ограничена, значит, суммарная длина тех отрезков может быть сколь угодно маленькой.

Пространство функций

Опр. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N$ выполнено условие:

$$\|f_n - f_m\| = \sqrt{\int_{-l}^{l} (f_n - f_m)^2 dx} < \varepsilon$$

Опр. Некоторая ортогональная система ψ_n называется замкнутой в пространстве, если

$$\forall f \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sum_n C_n \psi_n \Rightarrow \left\| f - \sum_n C_n \psi_n \right\| < \varepsilon$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

То есть каждую функцию можно аппроксимировать в пространстве с точностью до ε с помощью элементов получившейся системы.

Теорема. Тригонометрическая система замкнута в пространстве Q.

Док-во: пусть известно, что $\varepsilon > 0$. Тогда мы можем аппроксимировать $f(x)$ функцией $g(x)$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, так чтобы $g(x)$ была кусочно-гладкой и удовлетворяла условию $g(l) = g(-l)$.

$$\|f(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее функцию $g(x)$ можно аппроксимировать тригонометрическим полиномом:

$$\|g(x) - T_N(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это значит, что функцию также можно аппроксимировать тригонометрическим полиномом:

$$\|f(x) - T_N(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Когда степень полинома зафиксирована, её можно аппроксимировать полиномом Фурье:

$$\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right) \right) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Поэтому тригонометрическая система является замкнутой.

Для замкнутой системы в **неравенстве Бесселя** на самом деле стоит знак равенства, которое называется **равенством Парсеваля:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} {C_k}^2 \|\psi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx$$

Для тригонометрического ряда:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left({a_k}^2 + {b_k}^2 \right) = \frac{1}{l} \int_a^b f^2(x)dx$$

Это работает и в обратную сторону.

Теорема. $\forall f$ равенство Парсеваля $\Rightarrow \psi_n(x) -$ замкнута.

Док-во: если для каждого элемента имеет место равенство Парсеваля. Это значит, что при достаточно большом N

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{N} {C_k}^2 \|\psi_k\|^2 < \varepsilon$$

Это значит, что каждый элемент f можно аппроксимировать такой суммой:

$$\sum_{k=1}^{N} C_k \psi_k$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема доказана.

Теорема. Пусть $f(x) \in Q$, то ряд Фурье определяется однозначно.
То есть, если есть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\psi_k(x)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\psi_k(x),$$

то коэффициенты Фурье функции $\|h(x)\|$ равны:

$$\|h(x)\| = \|f(x) - g(x)\| = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - g_k(x))^2 = 0$$

Следовательно, $f_k(x) = g_k(x)$.

Опр. Ортогональная система ψ_n называется замкнутой, если из того, что все коэффициенты Фурье равны 0 ($f \perp \psi_n$), следует, что $f = 0$.

Теорема. Замкнутая система полна.

<u>Док-во:</u> пусть есть элемент $f(x) \perp \psi_k(x)$. Так как система замкнута, то выполнено равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} {C_k}^2 \|\psi_k(x)\|^2 = \int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \|f(x)\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} {C_k}^2 \|\psi_k(x)\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f(x)\|^2 = 0$$

Это означает, что система полна.
Теорема доказана.

Утв. Пусть есть функции $f(x)$ с коэффициентом Фурье f_k и $g(x)$ с коэффициентом Фурье g_k, ψ_k −замкнутая ортогональная система.

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k \|\psi_k\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k \|\psi_k\|^2 = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

<u>Док-во:</u> рассмотрим функции $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$. Они обе принадлежат пространству Q. Для них можно написать равенство Парсеваля:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\text{Для } f(x)+g(x):\quad \sum_{k=1}^{\infty}(f_k+g_k)^2\|\psi_k\|^2=\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)^2dx$$

$$\text{Для } f(x)-g(x):\quad \sum_{k=1}^{\infty}(f_k-g_k)^2\|\psi_k\|^2=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)^2dx$$

Раскроем квадраты и из первого равенства вычтем второе, получим:

$$4\sum_{k=1}^{\infty}f_kg_k\|\psi_k\|^2=4\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\|\psi_k\|=1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_kg_k=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

Теорема доказана.

Полное нормированное пространство, в котором норма порождена скалярным произведением, которое является сепарабельным, называется гильбертовым пространством. Комплексное гильбертово пространство – это пространство состояний квантовой механики по Шрёдингеру.

Пространство, которое состоит из последовательностей, для которых $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2<\infty$, обозначается l_2.

Пространство, которое состоит из функций, для которых $\int|f(x)|^2$, обозначается L_2.

Лекция 16

Интеграл Фурье

Теорема.
Пусть на $-\infty < x < +\infty$ задана $f(x)$ такая, что на $\forall\ [a; b]$ кусочно-гладкая, то есть на каждом конечном сегменте конечное число точек разрыва производной, и пусть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$.
Такие функции называются абсолютно интегрируемыми. Для них справедлива формула:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

Чтобы изучить сигнал, нужно представить, как сумму гармонических сигналов или разложить по комплексным экспонентам и представить в виде набора гармонических колебаний.

Прямое преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)$$

Эта операция помогает понять, какой вклад в сигнал вносит та или иная частота, для того чтобы по известному набору частот и фаз узнать, какой был сигнал.

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Для рис. 22:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\left(\frac{in\pi t}{l}\right)}dt$$

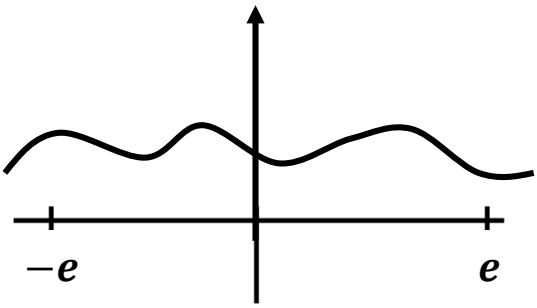

Рис. 22

Получаем преобразование Фурье для производной:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)iwe^{iwx}dx$$

$$f^{(n)}(x) = (i\omega)^n F(\omega)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(e^{-i\omega t}f(t))\right)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,dt+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)\,dt\right)$$

Второй интеграл равен нулю, так как интегрирование происходит по ω, а подынтегральный интеграл нечетный относительно ω, поэтому в симметричных пределах он равен нулю.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int\limits_{o}^{A}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,dt$$

$$S_A(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{A}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

Интеграл сходится, так как косинус ограничен, а функция абсолютно интегрируема. Т.е. $f(t)$ мажоранта нашего интеграла. В связи с этим мы можем переставлять порядок интегрирования.

$$S_A(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dtf(t)\int\limits_{0}^{A}\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dtf(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi,\text{где } \xi=t-x$$

$$S_A(x)=S_A^-(x)+S_A^+(x)\text{ , где :}$$

$$S_A^+(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi;\ S_A^-(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi$$

$$S_A^-(x)-f(x+0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x+\xi)\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi-\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin A\xi}{\xi}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin A\xi\,d\xi=J$$

Нам нужно доказать, что $J(x,A)\to 0$ при $A\to+\infty$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$J(x,A) = \frac{1}{\pi}\int_0^B \frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin A\xi\, d\xi + \frac{1}{\pi}\int_B^{+\infty} f(x+\xi)\sin A\xi\, d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_B^{+\infty} f(x+0)\sin A\xi\, d\xi = J_1 + J_2 + J_3$$

С помощью выбора каждый интеграл может быть $J_1, J_2, J_3 < \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично для $S_A^-(x)$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17

Физические приложения

Магнитное число Рейнольдса:

$$R_m = \frac{vl}{\vartheta_m}$$

$R_m \leq 1$ – большой вклад омической диссипации
$R_m \gg 1$ – важны индукционные эффекты

Магнитное поле в проводящей среде

$$\vec{\varepsilon} = \alpha\vec{B} + \cdots + rot\,\vec{B}$$

(если в задаче есть зеркальная асимметричность)

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = rot\,\alpha\vec{B} + \beta\Delta\vec{B}, \text{где } \Delta = -rot\,rot$$

$$\vec{B} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iiint b_k e^{i\vec{k}\vec{r}+\gamma t} d^3\vec{k}$$

По пространственным переменным преобразование Фурье, по временным Лапласа.

$$B(t,\vec{r}) = b(k)e^{i\vec{k}\vec{r}+\gamma t}$$

$$\left[\nabla; \alpha e^{ikr}\vec{b}\right] = \alpha i[\vec{k};\vec{b}]$$

$$\beta\Delta B = -\beta\,rot\,rot\,e^{ikr}\vec{b}$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 0 & k \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla} b e^{i\vec{k}\vec{r}}\right) = i\left(\vec{k}\vec{b}\right)e^{ikr} = 0$$

$$\left(\vec{k}\vec{b}\right) = 0$$

$$\gamma\vec{b} = i\alpha\left[\vec{k};\vec{b}\right] - k^2\beta^{\rightarrow}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{cases} \gamma b_x = -i\alpha k b_y - k^2\beta b_x \\ \gamma b_y = i\alpha k b_x - k^2\beta b_y \\ \gamma b_z = -k^2\beta b_z \end{cases}$$

Если отделить серию корней

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma = -k^2\beta$ – нефизические решения, то

третье уравнение можно отбросить

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\gamma + k^2\beta)b_x + i\alpha k b_y = 0 \\ -i\alpha k b_x + (\gamma + k^2\beta)b_y = 0 \end{cases}$$

Дисперсионное соотношение:

$$(\gamma + k^2\beta)^2 - \alpha^2 k^2 = 0$$

$$\gamma + k^2\beta = \pm\alpha k \;\; \gamma = \pm\alpha k - k^2\beta$$

$$\gamma > 0 \;\; \gamma = \alpha k - k^2\beta$$

$$\alpha - 2k\beta = 0 \;\; k^* = \frac{\alpha}{2\beta}$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\alpha^2}{4\beta}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18

Фурье-анализ и вейвлет-анализ

$$\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Нужно преобразовать функцию так, чтобы пределы интегрирования не были равны бесконечности.

$$\psi(t) = e^{-at+it}$$

$$W(a, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - t_0}{a}\right) dt$$

$$\int W(a, t_0) dt_0 \sim F(\omega) - \text{аналог спектра Фурье}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ