МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ. ЧАСТЬ 2

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЧУГРЕЕВУ ГАЛИНУ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Семинар 1. Свойства интегралов.

Интеграл Ньютона.

Обычно студенты полагают, что формула Лейбница выглядит следующим образом:

$$\int f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Что неверно, поскольку в данном случае из неопределенного интеграла получается определенный.

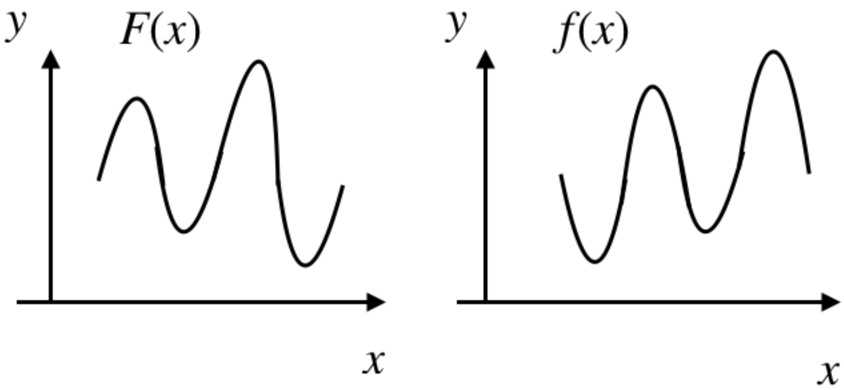

Рис. 1.1. Задача о нахождении траектории процесса $F(x)$ по заданной скорости $f(x)$.

Опр. Пусть $f(x)$ – некоторая заданная функция. Тогда ее интеграл Ньютона – функция $F(x)$ такая, что $F(x) \in D\ [a;b]$ и $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a;b]$, обозначается:

$$(N)\int f(x)dx = F(x)$$

Опр. Определенный интеграл Ньютона:

$$(N)\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Свойства интеграла.

1. **Единственность.**

Пусть $\int f(x)dx = F_1(x)$ и $\int f(x)dx = F_2(x)$, $F_1(x) \neq F_2(x)$.

Тогда $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x) \Longrightarrow \left(F_2 - F_1\right)'(x) = 0 = \Phi'$.

$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \Longrightarrow \Phi(x) = const.$

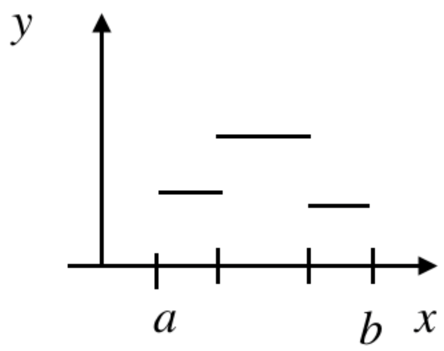

Рис. 1.2. К доказательству единственности.

Единственность не всегда можно установить. Некоторые приемы будут обсуждаться позже.

2. **Существование.**
3. **Непрерывность неопределенного интеграла.**
4. **Аддитивность.**
   4.1 если $f(x) \in N\,[a;b] \Longrightarrow f(x) \in N\,[a;c]\ \ \forall c \in [a;b]$
   4.2 если $f(x) \in N\,[a;c]$ и $f(x) \in N\,[c;b] \Longrightarrow f(x) \in N\,[a;b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Опр. Функция $f(x) \in N\,[a;b]$, если $\exists\, F(x):\ \exists$ некоторое конечное множество точек (счетное множество) $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что функция $F(x) \in D\,[a;b]$ дифференцируема всюду на отрезке $[a;b]$ за исключением $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $F(x) \in C\,[a;b]$. $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a;b] \setminus \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$(N)\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Рассмотрим подробнее свойство единственности.

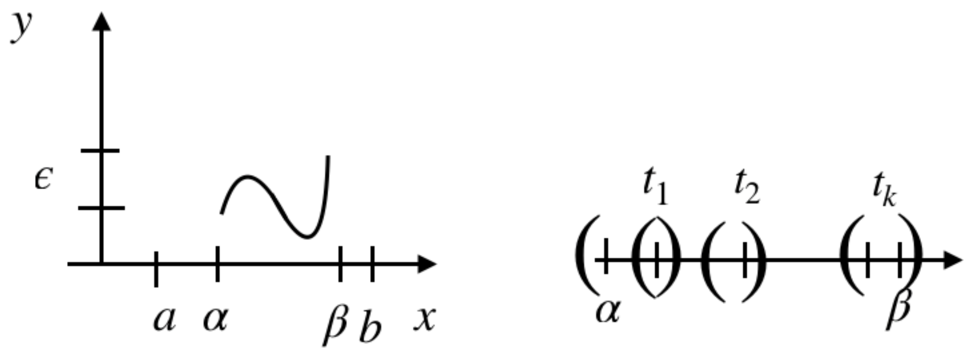

Рис. 1.3. К свойству единственности.

$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \varepsilon$, $\Phi \in D(x_0\ )$ и $F'(x_0\ ) = 0$.
Тогда $\exists\ \delta(x_0\ ):\ \forall x \in (x_0\ - \delta(x_0\ ), x_0\ + \delta(x_0\ ))\ |\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}|x - x_0\ |$
$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}|\beta - \alpha|$

Теорема для произвольного интеграла Ньютона.

Теорема: если $\Phi\ (x) \in D\ [a;b] \setminus \{x_k\ \}_{k=1}^{\infty}$, $\Phi(x)\ \in C\ [a;b]$, $\Phi'(x) = 0,\ \forall x \in [a;b]\ \setminus\ \{x_k\ \}_{k=1}^{\infty}$, тогда $\Phi(x) = const$

Доказательство: путь $\Phi \neq const$, тогда на некотором отрезке $[a;\ b]$ $|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| = \varepsilon > 0$. Тогда для $\forall t \in [a;b]\ \setminus\ \{x_k\ \}_{k=1}^{\infty}$, $\exists\ \delta(t):\ \forall x \in (t - \delta(t), t + \delta(t))\ |\Phi(x) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}|x - t|$.
$\forall k\ \exists\ \delta_k\ \ \forall x \in (x_k\ - \delta_k\ , x_k\ + \delta_k\ )\ |\Phi(x) - \Phi(x_k\ )| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
$|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| = \sum_{k=1}^{n}\left|\Phi(x_k\ ) - \Phi(x_{k-1})\right| \leq \sum'\left|\Phi(x_k\ ) - \Phi(x_{k-1})\right| + \sum''\left|\Phi(x_k\ ) - \Phi(x_{k-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\sum'\left|x_k - x_{k-1}\right| + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Существование интеграла

В основном будем интегрировать функции, когда первообразная понимается в прямом смысле, то есть функция дифференцируема всюду.

$(x^3)' = 3x^2 \Longrightarrow \int 3x^2 dx = x^3$

$(e^x)' = e^x \Longrightarrow \int e^x dx = e^x$

$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos x^2} \Longrightarrow \int \frac{1}{\cos x^2} dx = \operatorname{tg} x$

$(arctg\ x)' = \frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow \int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg\ x$

Выписав эту таблицу, установили факт существования приведенных интегралов.

Как с помощью этой таблицы вычислять другие интегралы?

Первый принцип: интегрирование линейной комбинации

$$\left(\lambda F(x) + \mu G(x)\right)' = \lambda f + \mu g$$

Пусть $f, g \in N\,[a;b] \Longrightarrow \lambda f + \mu g \in N\,[a;b]$, $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$

$$\int P_n\ (x) dx = Q_{n+1}(x)$$

№1. $\int tg^2\ (x) dx = \int (\frac{1}{cos^2\,(x)} - 1) dx = tg\ x - x$

$(F(ax+b))' = af(ax+b) \Longrightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b)$

№2. $\int (3x-7)^9\,dx = \frac{1}{30}(3x-7)^{10}$

№3. $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \frac{1}{4}arctg\,\frac{x}{2}$

Семинар 2. Интегрирование методом замены переменных.

Правило производной сложной функции.

$$\frac{d}{dt}F\big(\varphi(t)\big) = f\big(\varphi(t)\big)\frac{d\varphi}{dt} = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'\,(t)$$

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'\,(t)dt = F\big(\varphi(t)\big)$$

Преобразуем: $\int f\big(\varphi(t)\big)\,d\varphi(t) = \int f(x)dx = F(x)$

Нужно перегруппировать выражения так, чтобы слева и справа стояли две функции и все выражение в комплексе зависело от некоторого устойчивого выражения $\varphi(t)$.

№1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}} = \left|x^2 = t\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = \sqrt{t+1} = \sqrt{x^2+1}$

№2. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\, dln\, x = |\ln x = t| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$

№3. $\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\,\cos x}{\cos x} = |\cos x = t| = -\int \frac{d\,t}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$

№4. $\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{x^3\,(1+x^{-2})^{3/2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(1+x^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}dx^{-2} = \left|x^{-2} = t\right| =$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}dt = (t+1)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

№5. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{cos^2 x}dx = \int \frac{d\ \sin x}{cos^2 x} = |\sin x = t| = \int \frac{1}{1-t^2}dt =$
$\frac{1}{2}\ \ln\ |\frac{1+t}{1-t}| = \frac{1}{2}\ \ln\ |\frac{1+\sin x}{1-\sin x}|$

№6. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}}dx = \int \frac{d(x-x^{-1})}{(x\ \ -x^{-1})^2+2} = \left|x\ \ -x^{-1} = t\right| =$
$\int \frac{1}{2+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\ \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\ \frac{x\ \ -x^{-1}}{\sqrt{2}}$

№7. $\int \frac{x\ \ +1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left|x\ \ = t-\frac{1}{2}\right| = \int \frac{t-\frac{1}{2}+1}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t-\frac{1}{2}+1}}dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt =$
$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt = \sqrt{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}|$

№8. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}dx = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{2-x} \\ x=2-t^2 \end{matrix}\right| = \int \frac{(2-t^2)^3}{t}d(2-t^2) \quad = -2\int (2-t^2)^3\ dt$

№9. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = |x\ \ = a\sin t| = \int a\cos t\ \ da\sin t =$
$a^2\int cos^2 t\ \ dt = \frac{a^2}{2}\int(1+cos\ \ 2t)\ dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) =$
$\frac{a^2}{2}\ \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$

№10. $\int \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = |x\ \ = \operatorname{sh} t| = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{1+ch\,t}}{2}\ ch\ t\ \ dt =$

$$\sqrt{2}\ \int ch\ \frac{t}{2}\ ch\ t\ \ dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int (ch\ \frac{t}{2} +\ ch\ \frac{3t}{2})\ dt = \ \sqrt{2}\ sh\ \frac{t}{2} + \frac{1}{3}\ sh\ \frac{3t}{2}$$

Семинар 3. Метод интегрирования элементарных функций.

$$\int P_n\ (x)dx = \ Q_{n+1}(x)$$

№1. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \ \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x - arctg\ x$

№2. $\int \frac{x^2}{x+1}dx = \ \int \left(x - \ 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$

№3. $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \ \int \frac{dx}{(x\ \ +2)(x-1)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x\ \ +2} \right) dx = \ \frac{1}{3} \ln\left| \frac{x-1}{x+2} \right|$

№4. $\int (\sin x)^9\ \ dx = \ \int \sin x\ \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin x - \ \frac{1}{4}\ (\sin 3x - \sin x) \right) dx =$

$$\frac{1}{4}\int (3\sin x - \ \sin 3x) dx = \ -\frac{3}{4}\cos x + \ \frac{1}{12}\cos 3x$$

Формула Лейбница

$$\int d\ uv = \ \int \ u\ dv + \ \int \ v\ du$$

$$uv = \ \int \ u\ dv + \ \int \ v\ du$$

$$\int \ u\ dv = uv - \int \ v\ du$$

№5. $\int(x^7+x^5+x)e^x\,dx = \int(x^7+x^5+x)\,de^x = (x^7+x^5+x)e^x - \int e^x\,d(x^7+x^5+x) = (x^7+x^5+x)e^x - \int(7x^6+5x^4+1)\,e^x\,dx = e^x\,(x^7-7x^6+43x^5-215x^4+80x^3-60x^2+516x-121)$

$$\int P_n(x)Q_m(e^x)dx = P_n'(x)Q_m'(e^x)$$

$$\int P_n(x)Q_m(\cos x, \sin x)dx = P_n'(x)Q_m'(\sin x, \cos x)$$

№6. $\int(x^7+x^5+x)\ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\ln x - \int\left(\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\ln x - \left(\frac{x^8}{64}+\frac{x^6}{36}+\frac{x^2}{4}\right)$

$$(ln^k x)' = \frac{1}{x}\,k\,ln^{k-1}x$$
$$(arctg^k x)' = \frac{1}{x^2+1}\,k\,arctg^{k-1}x$$
$$(arcsin^k x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,k\,arcsin^{k-1}x$$

$\int P_n(x)\ln x\,dx -$ элементарная функция

$\int P_n(x) arctg\ \ x dx -$ элементарная функция

№7. $\int x\,(arctg\,x)^2\,dx = \int(arctg\,x)^2\,d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}(arctg\,x)^2 - \int\frac{x^2}{x^2+1}(arctg\,x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(arctg\,x)^2 - \int arctg\,x\,dx +$

$\int \frac{1}{x^2+1}\, arctg\, x\, dx$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, arctg\, x\, dx = \frac{1}{2}\,(arctg\, x)^2$$

№8. $\int (1+x)^2\, e^x\, arctg\, x\, dx =$

$$\int (1+x)^2\, e^x\, dx = \int (1+x)^2\, de^x = (1+x)^2\, e^x - 2\int (1+x)\, e^x\, dx$$
$$= (1+x)^2\, e^x - 2\int (1+x)\, de^x$$
$$= (1+x)^2\, e^x - 2(x+1)e^x + 2\int e^x\, dx$$

$= \int arctg\, x\, d((1+x)^2\, e^x) = (1+x^2)\, e^x\, arctg\, x - \int (1+x^2)\, e^x \frac{dx}{x^2+1} = (1+x^2)\, e^x\, arctg\, x - e^x$

№9. $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right)$$

№10. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{d\,\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \cos x\; d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\int \frac{dx}{\sin^3 x} + 2\int \frac{dx}{\sin\ x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\,\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}\right)$$

Семинар 4. Интегрирование рациональных функций.

$uv = \int u\,dv + \int v\,du \;\Rightarrow\; \int u\,dv = uv - \int v\,du$

№1. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - .\int x\,d\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$

№2. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}\int e^{ax} d\sin bx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}$

№3. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{x^2+1} = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + arctg\,x\right)$

№3. $\int \frac{x\,e^{arctg\,x}}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{arctg\,x}}{(x^2+1)^{3/2}}dx^2 = -\int e^{arctg\,x}\,d\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{e^{arctg\,x}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{e^{arctg\,x}}{x^3\,(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} -$

$\frac{1}{2}\int \frac{e^{arctg\,x}}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}dx^{-2} = -\frac{e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}\int e^{arctg\,x}\, d\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} +$
$-\frac{x\,e^{arctg\,x}}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{x\,e^{arctg\,x}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\,\frac{e^{arctg\,x}\,(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

№4. $\int (x+1)e^x \cos x\, dx = .\int (x+1) d\,\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2} = \frac{(x+1)\,e^x(\cos x+\sin x)}{2} -$
$\frac{1}{2}\int e^x(\cos x+\sin x)dx = \frac{(x+1)\,e^x(\cos x+\sin x)}{2} - \frac{1}{2}\,e^x \sin x$

Если интеграл – элементарная функция, то есть алгоритм, позволяющий его найти.

Теорема: интеграл от рациональной функции – элементарная функция.

Доказательство: представим

$$R\ \ (x) = Z(x) + R_1\ (x) = Z(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k\ \ (x)$$

$$\int Z(x)dx = Z^*\,(x)$$

1. $r(x) = \frac{1}{(x-x_0\,)^m} \Longrightarrow \int \frac{1}{(x-x_0\,)^m}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(m-1)}\frac{1}{(x-x_0\,)^{m-1}}, m > 1 \\ \ln|x-x_0\,|, m=1 \end{cases}$

Если есть действительные корни $R_1\ (x)$, то в разложении возникнут простейшие дроби типа $\frac{1}{(x-x_0\,)^m}$.

2. $r(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} \Longrightarrow \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} dx = \left| x = t - \frac{b}{2a} \right| =$

$$\int \frac{At+B-\frac{b}{2a}}{\left(at^2+c-\frac{b^2}{4a}\right)^m} dt = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^m} \int \frac{At+B-\frac{b}{2a}}{\left(1+\frac{4a^2}{4ac-b^2}t^2\right)^m} dt = \left| u = \frac{2at}{\sqrt{4ac-b^2}} \right| =$$

$$\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^m} \int \frac{Au\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}+B-\frac{b}{2a}}{(1+u^2)^m} du = \lambda \int \frac{u}{(1+u^2)^m} du + \mu \int \frac{du}{(1+u^2)^m}$$

$$u^2 = s \Longrightarrow \int \frac{ds}{(1+s)^m} = \begin{cases} \frac{-1}{(m-1)} \frac{1}{(1+s)^{m-1}}, m > 1 \\ \ln|s+1|, m = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{u}{\left(1+u^2\right)^m} du = \frac{u}{\left(1+u^2\right)^{m-1}} - \int u\, d\frac{1}{\left(1+u^2\right)^m}$$
$$= \frac{u}{\left(1+u^2\right)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{u^2}{\left(1+u^2\right)^m} du$$
$$= \frac{u}{\left(1+u^2\right)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{m-1}} -$$
$$-2(m-1)\int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^m}$$

$$\int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^m} = \frac{1}{2(m-1)} \left(\frac{u}{\left(1+u^2\right)^{m-1}} + (2m-3)\int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{m-1}}\right.$$

Итак, интеграл от рациональной функции – элементарная функция, которая состоит из линейной комбинации степенных функций, рациональных функций, в знаменателе которых стоят следующие выражения:

1. степени меньше, чем было, минимум на 1
2. логарифмы от $x - x_0$, где x_0 – действительный корень

3. логарифмы от неприводимых квадратных трехчленов
4. арктангенсы.

Если дробь правильная, то многочленов быть не может. Если у дроби только простые корни, то и рациональной составляющей быть не может. При интегрировании дроби, содержащей только простые корни, может быть только трансцедентная часть.

Семинар 5. Классы интегрируемых функций.

Теорема:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|\ln|x - x_k|\right| + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \ln|a_k x^2 + b_k x_k + c_k| + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \operatorname{arctg} \frac{2a_k x + b_k}{\sqrt{4a_k c_k - b_k^2}}$$

– элементарная функция при deg *P(x)* < deg *Q(x),* являющаяся линейной комбинацией дробей, которые являются интегралами от соответствующих простейших дробей, кратность корней которых в знаменателе на 1 меньше кратности корней *Q(x),* и трансцедентной части.

Возьмем производную от этого выражения:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x - x_k} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{2a_k x + b_k}{a_k x^2 + b_k x_k + c_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{2a_k x + b_k}{\sqrt{4a_k c_k - b_k^2}} \frac{1}{1 + \frac{(2a_k x + b_k)^2}{4a_k c_k - b_k^2}}$$

Приведя все члены суммы к одному знаменателю, заметим, что в знаменателе будет стоять многочлен с теми же корнями, что и $Q(x)$ с той лишь разницей, что все корни будут простыми.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$Q_1(x)$ – тот же многочлен, что и $Q(x)$, но с разницей в том, что кратность корней на 1 меньше, чем у $Q(x)$.

$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$$

$$\deg P_1(x) < \deg Q_1(x)$$

$$\deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$$

Поиск таких многочленов – линейная задача.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1^*(x)}{Q(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$$\deg P_1^*(x) < \deg Q(x)$$

$$P = P_1^*(x) + P_2(x)Q_1(x)$$

$$\deg Q_1(x) + \deg Q_2(x) = \deg Q(x)$$

Эта задача всегда имеет единственное решение.

Пример 1.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}dx = \int \left(\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^3}\right)dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^3}dx = \frac{P(x)}{Q(x)} =$$

$$= \frac{A'\ x^4\ +\ B'\ x^3\ + C'\ x^2\ + D'\ x\quad + E'}{(x+1)\ \ (x^2\ + x + 1)^2} + \int \frac{F'\ x^2\ + G'\ x\quad + H'}{(x+1)\ \ (x^2\ + x + 1)} dx$$

Решая линейную задачу, для произвольной правильной дроби получим

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1\ (x)}{Q_1\ (x)} + \int \frac{P_2\ (x)}{Q_2\ (x)} dx$$

$\int \frac{P_2\ (x)}{Q_2\ (x)} dx -$ та самая трансцедентная часть. Каким бы сложным ни был многочлен $Q\quad (x)$, всегда сможем разложить дробь $\frac{P\quad (x)}{Q\quad (x)}$ на алгебраическую и трансцедентную часть.

Пример 2. $\int \frac{-7x^7 + 5x^6 - 27x^5 + 31x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 3x + 5}{(x^5 - x^4 + x + 1)^3} dx = \frac{P_9^1(x)}{(x^5 - x^4 + x + 1)^2} + \int \frac{P_4^2(x)}{x^5 - x^4 + x + 1} dx$

Берем производную:

$$\frac{P(x)}{(x^5\ - x^4\ + x + 1)^3} = \frac{(P_9^1(x))'\ (x^5\ - x^4\ + x + 1)\quad - 2(x^5\ - x^4\ + x + 1)P_9^1(x)}{(x^5\ - x^4\ + x + 1)^3} + \frac{P_4^2(x)(x^5\ - x^4\ + x + 1)^2}{(x^5\ - x^4\ + x + 1)^3}$$

$$P_9^1(x) = x^3\ + 3x - 1, \qquad P_4^2(x) = 0$$

$$\int \frac{-7x^7\ + 5x^6\ - 27x^5\ + 31x^4\ - 7x^3\ + 3x^2\ - 3x + 5}{(x^5\ - x^4\ + x + 1)^3} dx = \frac{x^3\ + 3x - 1}{(x^5\ - x^4\ + x + 1)^2}$$

Теорема: пусть $R\ (x, y_1, \cdots, y_n), y_i = (\frac{ax+b}{cx+d})^{r_i}$, тогда $\int R\ (x, y_1, \cdots, y_n), dx$ - элементарный.

Доказательство: пусть N - общий знаменатель r_i, $t^N = \frac{ax+b}{cx+d}$ - подстановка. Тогда все y_i станут рациональными функциями переменной t, x будет выражаться относительно t^N. Поскольку $x -$ рациональная функция, то и производная от нее – тоже рациональная функция.

№1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2\ (x+1)^7}} = \int \frac{dx}{(x+1)^3} \sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2} = \left| \begin{matrix} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{1+t^3}{t^3-1} \end{matrix} \quad dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\ dt \right| =$
$\int \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\ dt \frac{(t^3-1)^3}{8t^9} t^2 = -\frac{3}{4} \int \frac{t^3-1}{t^5} dt$

Теорема: $\int R\ \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx -$ элементарная функция.

Пример: $\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ и $\int \sqrt[3]{x^2-1}\, dx$ не являются элементарными функциями.

Доказательство:

$$R\ \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R\ (x, y) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1\ (x) + P_2\ (x)y}{Q_1\ (x) + Q_2\ (x)y}$$
$$= \frac{P_3\ (x) + P_4\ (x)y}{Q_3\ (x)} = \frac{P_3\ (x)}{Q_3\ (x)} + \frac{P_5\ (x)}{Q_3\ (x)y}$$

$\frac{P_3\ (x)}{Q_3\ (x)} + \frac{P_5\ (x)}{Q_3\ (x)y} -$ сумма рациональных функций. $\frac{P_5\ (x)}{Q_3\ (x)y} = \frac{Z(x)}{y} + \sum \frac{r_k\ (x)}{y}$

$$\int \frac{Z(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\ dx \to \int \frac{S(t)}{\sqrt{at^2 + c}}\ dt$$

$$\int \frac{t^k}{\sqrt{at^2 + c}}\, dt = \frac{1}{a}\int t^{k-1} d\sqrt{at^2 + c}$$

$$= \frac{t^{k-1}}{a}\sqrt{at^2 + c} - \frac{k-1}{a}\int t^{k-2}\sqrt{at^2 + c}\, dt =$$

$$= \frac{t^{k-1}}{a}\sqrt{at^2 + c} - \frac{k-1}{a}\int \frac{at^k + ct^{k-2}}{\sqrt{at^2 + c}}\, dt$$

$$= \frac{t^{k-1}}{a}\sqrt{at^2 + c} - (k-1)\int \frac{t^k}{\sqrt{at^3 + c}}\, dt$$

$$- \frac{(k-1)c}{a}\int \frac{t^{k-2}}{\sqrt{at^2 + c}}\, dt$$

$$= \frac{1}{k}\,(\frac{t^{k-1}}{a}\sqrt{at^2 + c} - \frac{(k-1)c}{a}\int \frac{t^{k-2}}{\sqrt{at^2 + c}}\, dt$$

$\int \frac{t}{\sqrt{at^2 + c}}\, dt = \frac{\sqrt{at^2 + c}}{a}$, $\int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + c}}$ — трансцедентная функция.

Итак, $\int \frac{Z_k\,(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = Y_k\ (x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

$$\frac{Z_k\,(x)}{y} = \frac{Y'_{k-1}(x)y^2}{y} + \frac{Y_{k-1}(x)(ax + \frac{b}{2})}{y} + \frac{\lambda}{y}$$

Семинар 6. Техника интегрирования.

Дополнение к теореме прошлой лекции.

Разобьем рациональную функцию на сумму более простых слагаемых:

$$\int \left(R_1\ (x) + R_2\ (x)\right)\frac{1}{y}dx$$
$$= \int \left(Z_1\ (x) + \sum r_k\ (x)\right)dx + \int \left(Z_2\ (x) + \sum r_k^2(x)\right)\frac{1}{y}dx$$

Интегрирование простейших дробей.

$\int \frac{dx}{(x-x_0\ )^n \sqrt{ax^2\ +bx+c}}$ – элементарная функция.

$$\int \frac{dx}{(x-x_0\ )^n \sqrt{ax^2\ +bx+c}} = \left|t = x - x_0\ \right|$$
$$= -\int \frac{t^{n-2}dt}{\sqrt{ax_0^2 + bx_0\ \ + c + \frac{a}{t^2} + \frac{2ax_0\ \ + b}{t}}}$$
$$= -\int \frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{(ax_0^2 + bx_0\ \ + c)t^2\ + (2ax_0\ \ + b)t + a}}$$

Лемма (интегрирование простейшей дроби второго типа)

$$\int \frac{(Dx+E)dx}{(Ax^2+Bx+C)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left| \begin{gathered} x = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}, \\ Ax^2+Bx+C = \frac{A(\alpha t+\beta)^2+B(\alpha t+\beta)(\gamma t+\delta)+C(\gamma t+\delta)^2}{(\gamma t+\delta)^2}, \\ ax^2+bx+c = \frac{a(\alpha t+\beta)^2+b(\alpha t+\beta)(\gamma t+\delta)+c(\gamma t+\delta)^2}{(\gamma t+\delta)^2}, \\ Dx+E = \frac{D(\alpha t+\beta)+E(\gamma t+\delta)}{\gamma t+\delta}, \\ dx = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma t+\delta)^2}dt \end{gathered} \right|$$

$$= \int \frac{(D't+E')(\alpha\delta-\beta\gamma)(\gamma t+\delta)^{2(n-1)}dt}{(A't^2+B't+C')^n\sqrt{a't^2+b't+c'}}$$

Условие: $B' = b' = 0$

$$\begin{cases} 2A\alpha\beta + B(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2C\delta\gamma = 0 \\ 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2c\delta\gamma = 0 \end{cases}$$

Редуцировали интегрирование простейшей дроби с корнем общего вида к простейшей дроби, деленной на корень, общего вида.

$$\int \frac{(D''t+E'')dt}{(A't^2+C')^n\sqrt{a't^2+c'}} = D''\int \frac{tdt}{(A't^2+C')^n\sqrt{a't^2+c'}} + E''\int \frac{dt}{(A't^2+C')^n\sqrt{a't^2+c'}}$$

$$\frac{d\sqrt{a'\ t^2\ + c'}}{a'} \Rightarrow \sqrt{a'\ t^2\ + c'}\ = u, t^2\ = \frac{u^2\ - c'}{a'}$$

$$\int \frac{tdt}{(A'\ t^2\ + C'\ )^n \sqrt{a'\ t^2\ + c'}}\ = \frac{1}{a'} \int \frac{du}{(\frac{A'}{a'} u^2\ + C'\ -\ \frac{c'}{a'})^n}$$

$$\frac{d\sqrt{a'\ t^2\ + c'}}{dt} = u \Rightarrow \frac{a'\ t}{\sqrt{a'\ t^2\ + c'}} = u,\quad a'\ t = u\sqrt{a'\ t^2\ + c'}\ ,$$

$$t^2\ = \frac{c'\ u^2}{a'\ (a'\ - u^2\ )},\ a'\ dt = \sqrt{a'\ t^2\ + c'}\ du + u^2\ dt \Rightarrow \frac{dt}{\sqrt{a'\ t^2\ + c'}}$$

$$= \frac{du}{a'\ - u^2}$$

$$\int \frac{dt}{\left(A'\ t^2\ + C'\ \right)^n \sqrt{a'\ t^2\ + c'}}\ =$$

$$= \int \frac{a'^m \left(a'\ - u^2\ \right)^m du}{\left(a'\ - u^2\ \right)\left(A'\ c'\ u^2\ + C'\ \left(a'\ - u^2\ \right)\right)^m}$$

$$= a'^m \int \frac{(a'\ - u^2\ )^{m-1} du}{(\left(A'\ c'\ + a'\ C'\ \right)u^2\ + a'^2 C'\ )^m}$$

№1. $\int \frac{x^4}{(x^3+1)(x^3+1+(x^2-x+1)^{3/2})}dx = \int \frac{x^4}{(x+1)(x^2-x+1)^2\,(x+1+\sqrt{x^2-x+1})}dx =$

$\frac{1}{3}\int \frac{x^3\,(x+1+\sqrt{x^2-x+1})}{(x+1)(x^2-x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{(x^2-x+1)^2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)(x^2-x+1)^2}dx =$

$\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{(x^2-x+1)^2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx -$

$\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx + \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}dx +$

$\frac{1}{9}\int \frac{(x-2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}dx$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену: $x = t + \frac{1}{2}$

$$\int \frac{(x-2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt$$
$$= \int \frac{t}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}dt$$

$$= I_1 + I_2$$

1). $I_1 = \left| u = \sqrt{t^2+\frac{3}{4}} \right| = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}$

2). $I_2 = \left| u = \left(\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}},\ u^2\left(t^2+\frac{3}{4}\right) = t^2,\ t^2 = \frac{\frac{3}{4}u^2}{1-u^2},\right.$

$\left.\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}du + u^2\,dt = dt,\ \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}} = \frac{du}{1-u^2}\right| = \int \frac{1}{1-u^2}\frac{1}{\frac{\frac{3}{4}u^2}{1-u^2}+\frac{3}{4}}du = \frac{4}{3}\int du = \frac{4}{3}$

Для вычисления предпоследнего интеграла сделаем замену $x = -1 + \frac{1}{t}$

$$\int \frac{1}{(x \quad +1)\sqrt{x^2 \ - x + 1}} dx = \int \frac{t(-\frac{1}{t^2})}{\sqrt{3 - \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}}} dt$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{3t^2 \ - 3t + 1}} dt$$

Семинар 7. Нестандартные способы интегрирования.

Классы интегрируемых функций

Классы функций, интеграл от которых – элементарная функция:

1. $\int R(x)dx$ -интеграл от рациональной функции
2. $\int R\left(x, y_1^{r_1}, \cdots, y_n^{r_n}\right)dx, \quad y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$
3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$

Эти теоремы доказываются похожим образом: с помощью некоторых преобразований и подстановок сводим функцию к рациональной функции.

Теорема: $\int R(e^x)dx$ – элементарная функция.

Доказательство: сделаем замену $t = e^x, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$

$\int R(e^x)dx = \int \frac{1}{t}R(t)dt$ - элементарная функция.

Теорема доказана.

Теорема: $\int R(\cos x, \sin x)dx$ – элементарная функция.

Доказательство: сделаем замену $t = tg\ \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\, arctg\ t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int \frac{2}{1+t^2} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2dt}{1+t^2}\right)dt$$

Теорема доказана.

№1. $\int \frac{x^3}{x^8+1}dx = \left|x^4 = t\right| = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{4}\, arctg\, t = \frac{1}{4}\, arctg\, x^4$

№2. $\int \frac{1}{x(x^6+1)}dx = \int \frac{x^9}{x^{10}(x^6+1)}dx = \int \frac{1}{x^{11}(1+x^{-10})}dx =$

$$\frac{-1}{10}\int \frac{1}{(1+x^{-10})}dx^{-10} = \frac{-1}{10}\ln(1+x^{-10})$$

№3. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \int \frac{x^2+x^4+1-x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{x^2}{x^6+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$
$\frac{1}{3} arctg\, x^3 + arctg\, x$

№4. $\int \frac{(x^6+x^5)}{(3x^2+2x+1)^2\,(2x^2+2x+1)^2}dx = \left|\, x = \frac{1}{t}\right| =$

$\int \frac{(t^{-6}+t^{-5})}{(3t^{-2}+2t^{-1}+1)^2\,(2t^{-2}+2t^{-1}+1)^2}dt =$

$$\int \frac{(1+t)}{(t^2+2t+3)^2\,(t^2+2t^1+2)^2}dt = |s = t+1|$$

$$= \int \frac{s}{(s^2+2)^2\,(s^2+1)^2}ds = |u = s^2| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(u+2)^2\,(u+1)^2}du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)^2 du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{u+2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{u+1} * \frac{1}{u+2}\right) du$$

№5. $\int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)^2 du = \left| \begin{array}{c} z = \frac{u+2}{u+1} \\ u = \frac{z-2}{1-z} \\ du = \frac{-dz}{(1-z)^2} \\ u+2 = \frac{-z}{1-z}, \ u+1 = \frac{-1}{1-z} \end{array} \right| = -\int \frac{(1-z)^2}{z^2} dz =$

$$\frac{1}{z} + 2\ln|z| - z$$

Подстановки Эйлера:

1. $\sqrt{2x^2 + x + 1} = tx + 1$
   $2x^2 + x + 1 = t^2 x^2 + 2tx + 1$
   $x = \frac{2t-1}{2-t^2}$

2. $\sqrt{2x^2 + x + 1} = t + x\sqrt{2}$
   $2x^2 + x + 1 = t^2 + 2\sqrt{2}tx + 2x^2$
   $x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2\sqrt{2}t}$

3. $\sqrt{2x^2 + x + 1} - 1 = tx$

4. $\sqrt{2x^2 + x + 1} - x\sqrt{2} = t$

№6. $\int \frac{1}{x\left(x^6 + \sqrt{2x^2 + x + 1}\right)} dx = \left| x = \frac{1}{t} \right| =. -\int \frac{t^{-2}}{t^{-1}\left(t^{-1} + \sqrt{2t^{-2} + t^{-1} + 1}\right)} dt =$

$$. -\int \frac{dt}{1+\sqrt{t^2+t\quad+2}} = -\int \frac{\sqrt{t^2+t\quad+2}-1}{t^2+t\quad+1}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{t^2+t\quad+1}\,dt - \int \frac{t^2+t\quad+2}{\left(t^2+t\quad+1\right)\sqrt{t^2+t\quad+2}}\,dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+t\quad+2}}\,dt - \int \frac{1}{\left(t^2+t\quad+1\right)\sqrt{t^2+t\quad+2}}\,dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2\ +t\quad+2}\right| - \int \frac{1}{\left(s^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{s^2+\frac{7}{4}}}\,ds =$$

$$\left|\frac{d}{ds}\sqrt{s^2\ +\frac{7}{4}} = u = \frac{s}{\sqrt{s^2+\frac{7}{4}}}, s^2 = \frac{\frac{7}{4}\ u^2}{1-u^2}\ , \sqrt{s^2\ +\frac{7}{4}}du + u^2\,ds = ds,\right.$$

$$\left.\frac{ds}{\sqrt{s^2+\frac{7}{4}}} = \frac{du}{1-u^2}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln\left|t+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.\sqrt{t^2\ +t\quad+2}\right| - \int \frac{du}{1-u^2}\,\frac{1}{\frac{\frac{7}{4}\ u^2}{1-u^2}+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln\left|t+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.\sqrt{t^2\ +t\quad+2}\right| - \int \frac{du}{\frac{3}{4}+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} - \ln\left|t+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.\sqrt{t^2\ +t\quad+2}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}\sqrt{t^2+t\quad+2}}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ