МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 4

КОСУХИН
ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
ВЫПУСКНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ФИЛИППОВА ВЛАДИСЛАВА ИГОРЕВИЧА

Содержание

Семинар 1

В курсе преимущественно используется сборник задач и упражнений по математическому анализу Б. П. Демидовича (если написан номер задачи и не указан другой задачник).

Напоминание о построении интеграла

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ (для простоты положительную) на отрезке $[a, b]$. Требуется найти площадь под графиком этой функции (ограниченную осью x). Построим интеграл по Риману. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ следующего вида $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, а также отмеченные точки $\Sigma = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, где $x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_j$. Получили отмеченное разбиение. Теперь можем подменить криволинейную трапецию на «ступенчатую» фигуру, у которой «ступеньки» имеют ширину $(x_j - x_{j-1})$ и высоту $f(\xi_j)$.

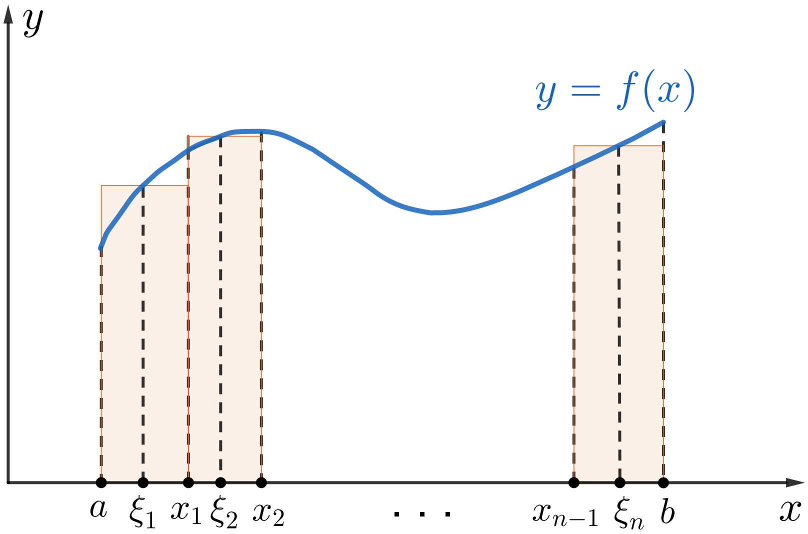

Рис. 1.1: Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью отмеченного разбиения

Определение 1.1. $\lambda(T) = \max |x_j - x_{j-1}|$ – *диаметр разбиения* T.

Определение 1.2. $\sigma = \sum\limits_j f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$ – *интегральная сумма.*

Определение 1.3. Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sigma = I$, то число I называется *интегралом Римана*, а функция f – *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a, b]$. Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $f \in R[a, b]$.

Утверждение 1.1. $f \in R[a, b] \;\Rightarrow\; f$ – *ограничена на* $[a, b]$.

Утверждение 1.2. $f \in C[a, b] \;\Rightarrow\; f \in R[a, b]$.

Утверждение 1.3. f *– монотонна на* $[a, b]$ $\Rightarrow$ $f \in R[a, b]$.

Определение 1.4.

Верхняя сумма Дарбу $S(f, T)$ – точная верхняя грань интегральных сумм.
Нижняя сумма Дарбу $s(f, T)$ – точная нижняя грань интегральных сумм.

Утверждение 1.4 (Критерий Дарбу)**.**

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists T: \ \ S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon.$$

Утверждение 1.5 (Критерий Лебега)**.**

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f \textit{ ограничена и почти всюду непрерывна.}$$

С помощью формулы Ньютона-Лейбница интеграл считать гораздо проще, чем по определению.

Кратный интеграл для двух переменных

Рассмотрим замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ (пусть для простоты она положительна на Ω). Задача состоит в том, чтобы посчитать объём тела, которое ограничено функцией $f(x, y)$ сверху и её «тенью» снизу.

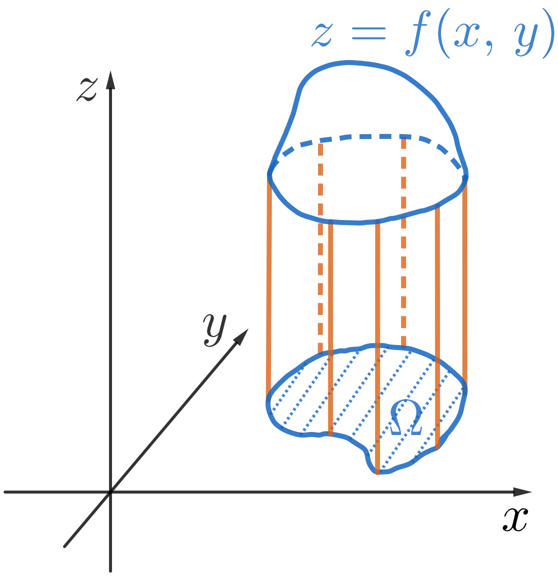

Рис. 1.2: Тело, ограниченное функцией $f(x, y)$ сверху и её «тенью» снизу

Рассмотрим построение интеграла Римана. Основной подход: начать с рассмотрения таких областей Ω, которые состоят из объединения конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Если прямоугольники пересекаются не только по границе, то их всегда можно представить в виде набора прямоугольников, которые могут пересекаться только по границе. Таким образом, $\Omega = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$ (подразумевается, что прямоугольники Ω_j могут пересекаться по границе). Значит, нам надо сперва научиться строить интеграл Римана для прямоугольника.

Разделим смежные стороны прямоугольника на некоторые части (по горизонтали пусть будут риски $x_0, \ldots, x_n$, а по вертикали – риски $y_0, \ldots, y_m$) и на основе этого разбиения построим сетку на прямоугольнике. В этой сетке будет $(n+1)(m+1)$ прямоугольников, причём площадь каждого из них будет равна $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Выберем внутри каждого прямоугольника некоторую точку ξ_{ij}.

Определение 1.5. $\lambda(T) = \max d_{ij}$ – *диаметр разбиения* T, где d_{ij} – диагональ прямоугольника с номером i, j.

Определение 1.6. $\sigma = \sum\limits_{i,j} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ – *интегральная сумма*, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Определение 1.7. Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то число I называется *интегралом Римана.* Обозначение: $I = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$.

Таким образом, мы определили интеграл по прямоугольнику и по конечному объединению прямоугольников.

Теперь рассмотрим некоторое конечное множество Ω произвольной формы с определённой на нём функцией $f(x, y)$. Доопределим функцию $f(x, y)$ снаружи множества Ω значением 0 и заключим множество Ω внутрь некоторого конечного объединения прямоугольников. Далее интегрируем доопределённую функцию $f(x, y)$ по этому множеству, состоящему из конечного объединения прямоугольников.

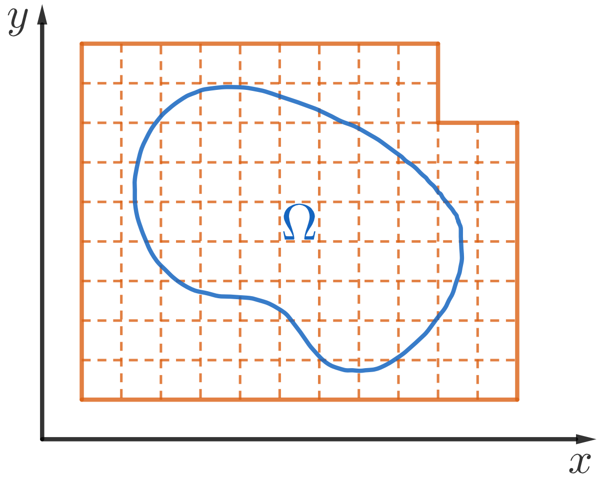

Рис. 1.3: Множество Ω, заключённое внутри конечного объединения прямоугольников, разбитых на прямоугольную сетку

Однако может возникнуть проблема. Например, рассмотрим $f(x, y) \equiv 1$ на Ω. При разбиении на прямоугольную сетку остаётся свобода выбора точек ξ_{ij}, и в тех прямоугольниках, которые попадают на границу Ω, функция может принимать значения 1 или 0. Тогда разность между верхней и нижней суммами Дарбу будет составлять

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum{}' 1 \cdot S_{ij},$$

где $\sum{}'$ – сумма только по тем прямоугольникам, которые попали на границу Ω, 1 – колебание функции на таких прямоугольниках, S_{ij} – площадь прямоугольника с номером i, j. Тогда по критерию Дарбу функция $f(x,y) \equiv 1$ будет интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum{}' S_{ij}$ может быть сделана сколь угодно малой при $\lambda(T) \to 0$.

Для простых областей эту площадь можно сделать сколь угодно малой, но для достаточно сложных областей это уже неверно. Рассмотрим в качестве примера так называемый ковёр Серпинского. Построение ковра Серпинского начнём с квадрата со стороной 1. Вырезаем из него центральную часть в некоторой пропорции от сторон квадрата. Далее мысленно делим квадрат с вырезанной центральной частью на 8 прямоугольников. В каждом из прямоугольников повторяем процедуру вырезания центральной части. И так далее до бесконечности.

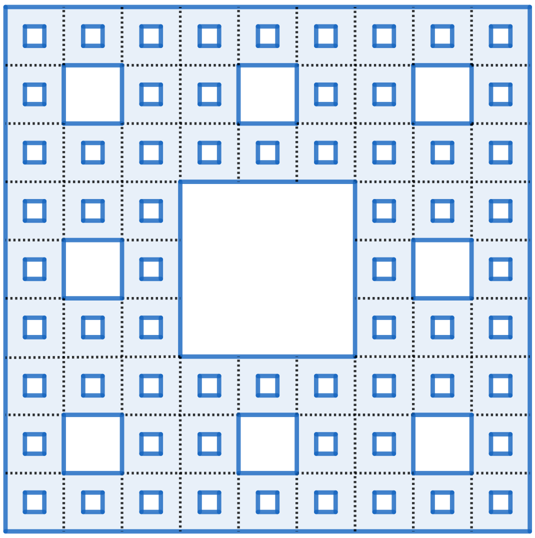

Рис. 1.4: Начало построения ковра Серпинского

Подбирая соответствующим образом размеры вырезанных частей, можно добиться того, чтобы их суммарная площадь была равна, например, $\frac{1}{2}$. Так как вырезанные части в ковре Серпинского всюду плотны, то граница $\partial\Omega$ множества совпадает с самим множеством Ω. Тогда $\sum{}' S_{ij} \geqslant \frac{1}{2}$, значит, $\sum{}' S_{ij}$ не может быть сделана сколь угодно малой при $\lambda(T) \to 0$.

Определение 1.8. Ω – *квадрируемая область* (*измеримая по Жордану*), если $\exists \iint\limits_{\Omega} 1\,dx\,dy$.

Утверждение 1.6. *Если область Ω ограничена кусочно гладкой кривой, то она квадрируемая.*

Утверждение 1.7 (Критерий квадрируемости)**.** *Область Ω квадрируема тогда и* *только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists$ *конечное количество прямоугольников с суммарной площадью меньше* ε*, такое что* $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_j P_j$.

Приведём ещё один пример неквадрируемой области. Рассмотрим множество точек внутри единичного квадрата, таких что обе их координаты являются рациональными числами. Границей этого множества будет весь единичный квадрат (то есть граница множества больше самого множества).

Утверждение 1.8. *На квадрируемых множествах интегрируемы все непрерывные функции.*

Альтернативный подход к построению интеграла Римана: покрывать область не прямоугольниками, а многоугольником, который затем разбивать треугольниками. Такой подход явным образом не зависит от выбора системы координаты. Основной подход также не зависит от выбора системы координат, но это требует доказательства.

Упражнение 1.1 (На дом)**.**

а) Доказать, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

б) Доказать, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники диагоналями.

Ещё один подход к построению интеграла Римана: разбивать область на какие-либо квадрируемые множества. При таком подходе интегрируемая функция может быть неограничена на интегрируемой области (но только на тех участках области, площадь которых 0).

Вычисление двойного интеграла по определению

Задача 3902. Составить нижнюю s верхнюю S интегральные суммы для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в области $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \qquad y = 1 + \frac{2j}{n}, \qquad (i,\, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Чему равны пределы этих сумм при $n \to +\infty$?

Решение:

Построим заданную область и разобьём её на прямоугольники.

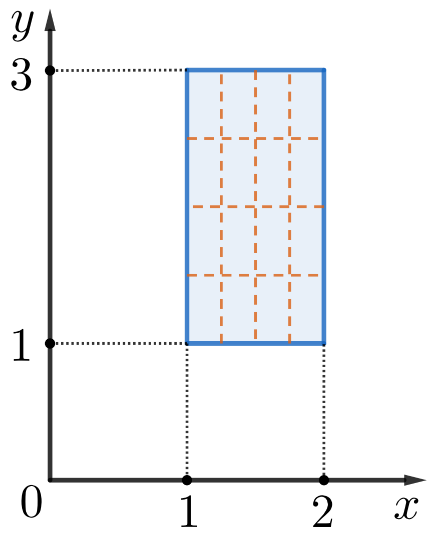

Рис. 1.5: Разбиение заданной области на прямоугольники

Функция $f(x, y)$ показывает расстояние от начала координат до точки с координатами (x, y). Тогда в каждом из прямоугольников эта функция будет принимать наименьшее значение в левом нижнем углу прямоугольника, а наибольшее – в правом верхнем.

$$s(f,T) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{n^2}\left(\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(\left(1+\frac{i'}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j'}{n}\right)^2\right) \tag{1.1}$$

Учитывая, что $\sum\limits_{i'=0}^{n-1} i' = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и $\sum\limits_{i'=1}^{k} i'^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, то есть $\sum\limits_{i'=0}^{n-1} i'^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, получаем:

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(1+\frac{i'}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\cdot n\sum_{i'=0}^{n-1}\left(1+\frac{2i'}{n}+\frac{i'^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{n}\left(n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = 2+\frac{2(n-1)}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2};$$
$$\frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(1+\frac{2j'}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\cdot n\sum_{i'=0}^{n-1}\left(1+\frac{4j'}{n}+\frac{4j'^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{n}\left(n+\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = 2+\frac{4(n-1)}{n}+\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}.$$

Продолжим вычисление нижней суммы Дарбу (1.1):

$$s(f,T) = 4 + \frac{6(n-1)}{n} + \frac{5(n-1)(2n-1)}{3n^2}.$$

По аналогии можно получить выражение для верхней суммы Дарбу (границы индексов суммирования увеличатся на 1):

$$S(f,T) = 4 + \frac{6(n+1)}{n} + \frac{5(n+1)(2n+1)}{3n^2}. \tag{1.2}$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,T) = \lim_{n\to+\infty} S(f,T) = 4 + 6 + \frac{10}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Так как нижняя и верхняя суммы Дарбу стремятся к одному значению, то по критерию Дарбу функция $f(x,y)$ интегрируема на заданном множестве, причём её интеграл равен $13\frac{1}{3}$. □

Сведение двойного интеграла к повторному

Более быстрый способ вычисления двойного интеграла: сведение его к повторному.

Определение 1.9. Будем называть область Ω *элементарной*, если она задаётся следующим образом:

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ (переменные можно поменять местами).

Утверждение 1.9. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$, *где Ω – элементарная область (переменные можно поменять местами и скобки можно не ставить).*

Вычисление повторного интеграла

Задача 3907. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

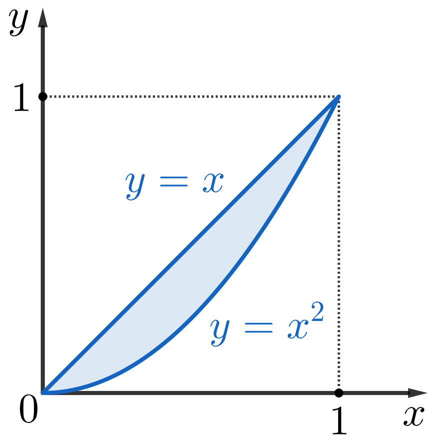

Рис. 1.6: Область интегрирования

Таким образом, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^x xy^2\,dy = \iint\limits_\Omega xy^2\,dx\,dy$, где Ω – область интегрирования.

$$\int\limits_{x^2}^x xy^2\,dy = x\int\limits_{x^2}^x y^2\,dy = x\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^x = x\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{3}\right) = \frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3};$$

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^x xy^2\,dy = \int\limits_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \left.\left(\frac{x^5}{15}-\frac{x^8}{24}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{15}-\frac{1}{24} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}.$$

$\square$

Семинар 2

Решение задач на двойные интегралы

Задача 3916. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

Решение:

Изобразим область Ω.

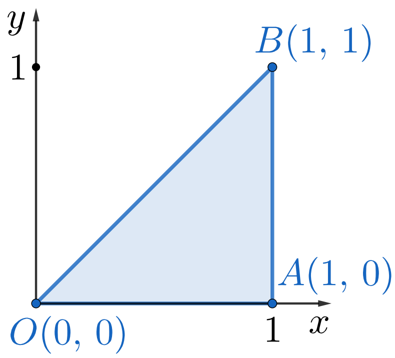

Рис. 2.1: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [0;\,1]$ имеем: $y \in [0;\,x]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,dy\,dx.$$

С другой стороны, при каждом фиксированном значении $y \in [0;\,1]$ имеем: $x \in [y;\,1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\square$

Задача 3918. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – трапеция с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$.

Решение:

Изобразим область Ω.

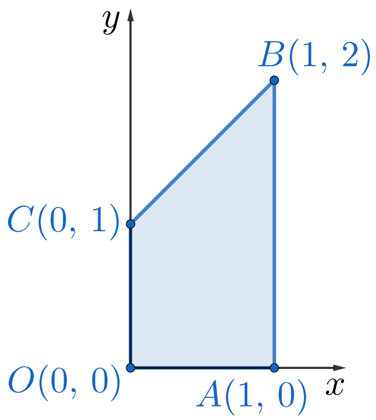

Рис. 2.2: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [0;\ \ x+1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx.$$

С другой стороны, при каждом фиксированном значении $y \in [0;\ 1]$ имеем: $x \in [0;\ 1]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [1;\ 2]$, то $x \in [y-1;\ \ 1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\square$

Задача 3922. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – круговое кольцо: $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$.

Решение:

Изобразим область Ω и разделим её на 4 части, как показано на рисунке.

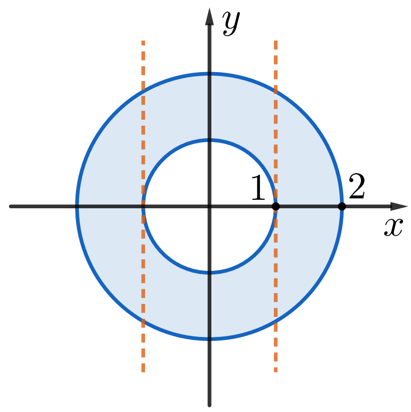

Рис. 2.3: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [-2;\ -1] \cup [1;\ 2]$ имеем: $y \in \left[-\sqrt{4-x^2};\ \sqrt{4-x^2}\right]$, а при каждом фиксированном значении $x \in [-1;\ 1]$ имеем: $y \in \left[-\sqrt{4-x^2};\ -\sqrt{1-x^2}\right] \cup \left[\sqrt{1-x^2};\ \sqrt{4-x^2}\right]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{-1} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Другой порядок переменных можно получить аналогично. При этом в результате везде, кроме аргументов функции, x и y поменяются местами. $\square$

Задача 3924. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования.

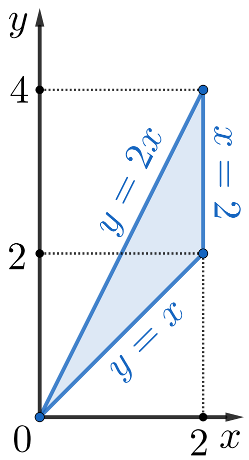

Рис. 2.4: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $y \in [0;\ 2]$ имеем: $x \in \left[\frac{y}{2};\ y\right]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [2;\ 4]$ имеем: $x \in \left[\frac{y}{2};\ 2\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_{0}^{2} \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{2}^{4} \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\square$

Задача 3929. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{2a}\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx \qquad (a>0).$$

Решение:

Заметим, что $y=\sqrt{2ax-x^2}$ эквивалентно $\begin{cases} y\geqslant 0\\ y^2=2ax-x^2\end{cases}$, причём вторая строка системы приводится к виду $(x-a)^2+y^2=a^2$. Таким образом, $y=\sqrt{2ax-x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность с центром $(a,0)$ и радиусом a. Также заметим, что $y=\sqrt{2ax}$ эквивалентно $\begin{cases} y\geqslant 0\\ y^2=2ax\end{cases}$. Таким образом, $y=\sqrt{2ax}$ задаёт верхнюю ветвь параболы, симметричной относительно оси x.

Изобразим область интегрирования и разделим её на 3 части, как показано на рисунке.

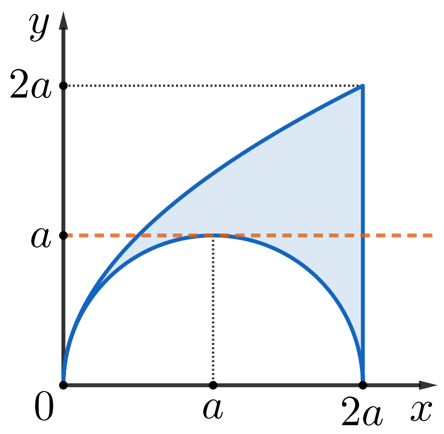

Рис. 2.5: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $y\in[0;\,a]$ имеем: $x\in\left[\dfrac{y^2}{2a};\ a-\sqrt{a^2-y^2}\right]\cup$ $\cup\left[a+\sqrt{a^2-y^2};\ 2a\right]$, а при каждом фиксированном значении $y\in[a;\,2a]$ имеем: $x\in\left[\dfrac{y^2}{2a};\ 2a\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_0^{2a}\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_0^{a}\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_0^{a}\int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy+\int\limits_a^{2a}\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Замена переменных в двойном интеграле

Сначала вспомним, как была устроена замена переменной в интеграле в случае одной переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ отображает отрезок $[\alpha;\,\beta]$ в отрезок $[a;\,b]$, причём $\varphi'(t) \in C[\alpha;\,\beta]$. Тогда формула замены переменной выглядит следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Рассмотрим сегменты $\Delta t \in [\alpha;\,\beta]$ и $\Delta\varphi(t) \in [a;\,b]$. Так как по теореме Лагранжа $\dfrac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(c)$ для некоторой точки c в сегменте длины Δt, то множитель $\varphi'(t)$ внутри интеграла отвечает за искажение длины элементарного отрезка при замене переменной.

Теорема 2.1. *Пусть $F : \mathbb{R}^2(x,y) \to \mathbb{R}^2(u,v)$ – биекция, для этого требуется, чтобы производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y были непрерывны и определитель $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$ сохранял знак, например, был всегда больше 0. Пусть $F : \Omega(x,y) \to \Omega'(u,v)$ – преобразование области интегрирования. Тогда формула замены переменных выглядит следующим образом:*

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v),\,y(u,v))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\,du\,dv,$$

где $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}^{-1}.$

Замечание 2.1. Множитель $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ внутри интеграла отвечает за искажение длины элементарного параллелограмма при замене переменных.

Задача 3935. Вычислить интеграл:

$$\iint\limits_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где Ω – параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$, где $a > 0$.

Решение:

Заметим, что область интегрирования задаётся следующей системой: $\begin{cases} a \leqslant y \leqslant 3a \\ -a \leqslant x - y \leqslant 0 \end{cases}$. Значит, можно сделать следующую замену переменных: $u = x - y$, $v = y$. Тогда $x = u + v$, $y = v$, поэтому $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. При такой замене переменных область Ω перейдёт в область Ω', которая задаётся следующей системой: $\begin{cases} -a \leqslant u \leqslant 0 \\ a \leqslant v \leqslant 3a \end{cases}$. Для интеграла получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} ((u+v)^2 + v^2)\, du\, dv = \int\limits_{-a}^{0} \int\limits_{a}^{3a} ((u+v)^2 + v^2)\, dv\, du.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

Семинар 3

Разбор домашнего задания

Задача 3909. Доказать равенство:

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

где R – прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$ и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

Решение:

Используя вынесение константы (относительно переменной интегрирования) за знак интеграла, получим:

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A \int\limits_b^B X(x)Y(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_a^A X(x) \int\limits_b^B Y(y)\,dy\,dx = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy.$$

$\square$

Полярная замена переменных

Определение 3.1. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ – *полярная замена переменных*, где $r \geqslant 0$.

Замечание 3.1. r – расстояние от начала координат до точки (x, y), φ – угол поворота радиус-вектора точки (x, y) относительно положительного направления оси абсцисс.

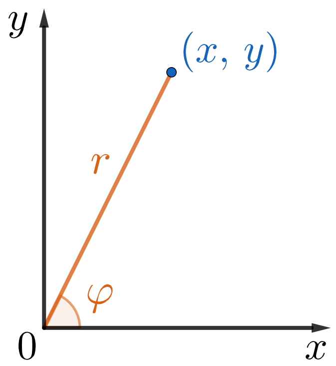

Рис. 3.1: Полярная замена переменных

Отображение прямоугольника на круг не является взаимно однозначным (см. рисунок).

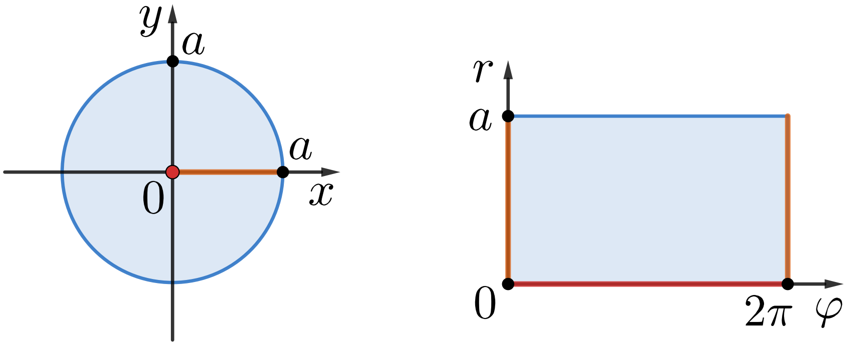

Рис. 3.2: Отображение прямоугольника на круг

Но можно сделать в круге разрез вдоль областей, где нарушается взаимная однозначность, затем применить отображение, а затем непрерывным образом продолжить формулы, вытекающие из замены переменных.

Задача 3937. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, где Ω – круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$, перейти к полярным координатам r и φ.

Решение:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r;$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

□

Задача 3954. Переходя к полярным координатам, вычислить следующий интеграл:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Решение:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant a \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^a r^2\,dr\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

□

Замечание 3.2. Найденный интеграл представляет собой объём тела под перевёрнутым конусом с высотой a и радиусом a и равен объёму половины шара радиуса

a. Это связано с тем, как Архимед находил объём шара: он использовал равенство площади сечения цилиндра и суммы площадей сечений половины шара и конуса. Действительно, $\pi a^2 = \pi r^2 + \pi(a^2 - r^2)$ (здесь r – расстояние от верха фигур до сечения, изображённого на рисунке).

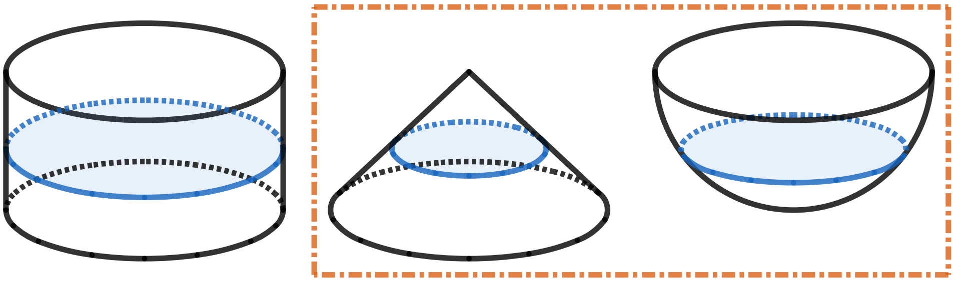

Рис. 3.3: Метод Архимеда вычисления объёма шара

Как итог, Архимед получил:

$$V_{\text{шара}} = 2(V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{конуса}}) = 2\left(\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\right) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Обобщённая полярная замена переменных

Сначала рассмотрим «немного» обобщённую полярную замену переменных.

Задача 3967. Вычислить следующий двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

где область Ω ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение:

Выполним замену переменных по следующим формулам: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$. Тогда прямоугольник будет «почти» взаимно однозначно отображаться на эллипс (с теми же оговорками, которые были в обычной полярной замене).

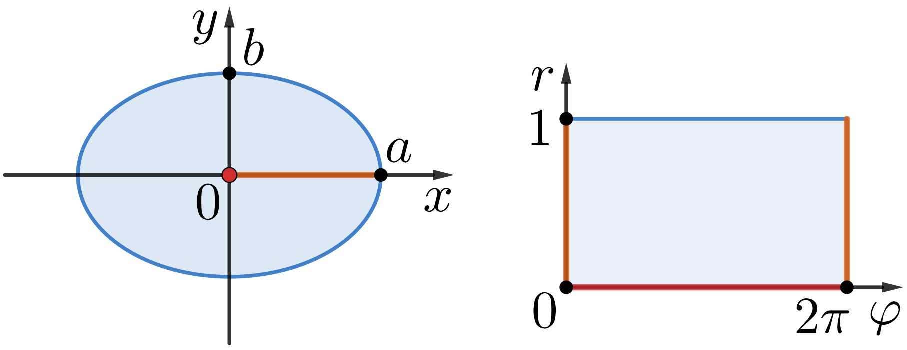

Рис. 3.4: Отображение прямоугольника на эллипс

Учитывая, что $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\cdot abr\,dr\,d\varphi = 2\pi ab\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= \pi ab\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(r^2) = \pi ab\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

□

Замечание 3.3. Так как $z = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ эквивалентно $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+z^2=1\\ z\geqslant 0\end{cases}$, то найденное значение интеграла представляет собой половину объёма эллипсоида с полуосями a, b, 1.

Определение 3.2. $\begin{cases}x = ar\cos^\alpha\varphi\\ y = br\sin^\alpha\varphi\end{cases}$ – *обобщённая полярная замена переменных*, где $r\geqslant 0$, и если α – произвольная степень, то $\varphi\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задача 3993. Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} \qquad (x>0,\quad y>0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha = 2$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4 \leqslant \dfrac{x^2}{h^2}+$ $+\dfrac{y^2}{k^2}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^4\leqslant \dfrac{a^2}{h^2}r^2\cos^4\varphi+\dfrac{b^2}{k^2}r^2\sin^4\varphi$, то есть $r^2\leqslant \dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\dfrac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi};\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\varphi & -\alpha ar\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\varphi & \alpha br\sin^{\alpha-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi = 2abr\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\, dr\, d\varphi.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. □

Семинар 4

Решение задач на замену переменных

Задача 3991. Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha = 1$ (также мы учитываем, что для упрощения хотим, чтобы после сокращения на r у переменной r был коэффициент 1, поэтому не берём $\alpha = 2$). Область Ω задаётся неравенством $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах ($x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$) область Ω будет задаваться неравенством $r^2 \leqslant \dfrac{a}{h} r\cos\varphi + \dfrac{b}{k} r\sin\varphi$, то есть $r \leqslant \dfrac{a}{h}\cos\varphi + \dfrac{b}{k}\sin\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi} abr\,dr\,d\varphi = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2 d\varphi =$$
$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi + 2\frac{ab}{hk}\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi.$$

В силу нечётности и периодичности функции $\sin\varphi\cos\varphi$ имеем: $\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi = 0$.

Тогда получим:

$$S = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right) d\varphi$$

Посчитаем $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi$, используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi \sin^n\varphi\,d\varphi =$

$= \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2}\right)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = 2B\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi.$$

Аналогично можно показать, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi = \pi$, в итоге для S получим:

$$S = \frac{ab\pi}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

□

Задача 3997. Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченные следующими кривыми:

$$xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x, \quad y = 2x \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Перепишем уравнения кривых следующим образом:

$$a^2 \leqslant xy \leqslant 2a^2, \quad 1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 2 \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Используем замену переменных: $\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$, тогда $a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2$, $1 \leqslant v \leqslant 2$.

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x};$$
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v};$$
$$S = \int\limits_1^2 \int\limits_{a^2}^{2a^2} \frac{du\,dv}{2v} = \frac{a^2}{2}\int\limits_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{a^2}{2}\ln 2.$$

□

Задача 3999 (1)**.** Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченные следующими кривыми:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Используем замену переменных: $\begin{cases} u = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \\ v = \frac{ay}{bx} \end{cases}$, тогда $1 \leqslant u \leqslant 4$, $1 \leqslant v \leqslant 8$.

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a} & \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{b} \\ -\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x^2} & \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{a} + \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{b}\right) = \frac{2}{3}x^{-2}ab^{-1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{2}{3}x^{-2}ab^{-1}u;$$

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right);$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{u^3}{\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}; \qquad x^{-2} = \frac{\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{a^2u^3};$$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{a^2u^3} \cdot \frac{au}{b} = \frac{2\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{3abu^2};$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{3abu^2}{2\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3};$$

$$S = \int\limits_1^4 \int\limits_1^8 \frac{3abu^2}{2\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}\,dv\,du = \frac{3ab}{2}\int\limits_1^4 u^2\,du \cdot \int\limits_1^8 \frac{dv}{\left(1 + v^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

Остаётся технический момент: досчитать интегралы, не будем это делать. □

Кратный интеграл для трёх переменных

Вкратце обсудим введение тройного интеграла. Рассмотрим брус и разделим его на маленькие брусы с объёмами $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Выберем в каждом маленьком брусе точку $\xi_{i,j,k}$. Тогда $\sigma = \sum\limits_{i,j,k} f(\xi_{i,j,k}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ – интегральная сумма. Если существует предел этих интегральных сумм, то он называется тройным интегралом. Если брус назвать P, то тройной интеграл записывают так: $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Далее определяются измеримые по Жордану области. Это области Ω, у которых можно корректно посчитать объём, то есть $\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz$. Пример неизмеримого по Жордану множества: множество точек внутри единичного куба, все координаты которых рациональны. Чтобы множество было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы объём его границы был равен 0, то есть граница должна помещаться к объединение брусов со сколь угодно малым объёмом.

Определение 4.1. Области следующего вида $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y) \end{cases}$ будем называть *элементарными.*

Утверждение 4.1. *$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, где Ω – элементарная область (переменные можно поменять местами).*

Задача 4082. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

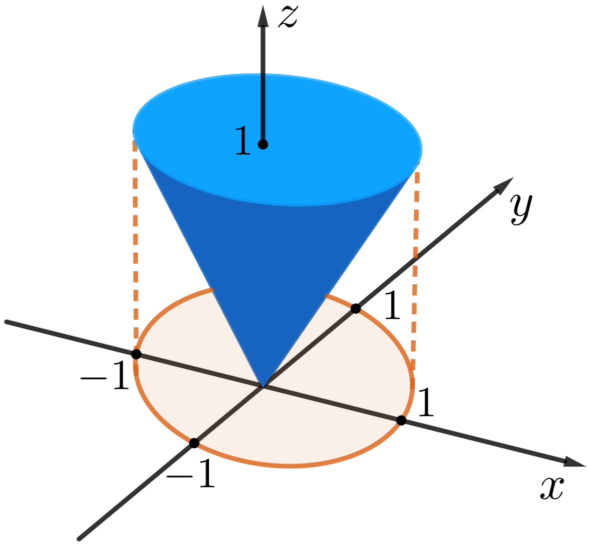

Рис. 4.1: Область интегрирования (синяя)

Поверхность конуса задаётся уравнением $z^2 = x^2 + y^2$. При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [-z;\ z]$, а при каждом фиксированном значении y из этого множества имеем: $x \in \left[-\sqrt{z^2 - y^2};\ \sqrt{z^2 - y^2}\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-z}^{z} \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$\square$

Семинар 5

Разбор домашнего задания

Задача 4081. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

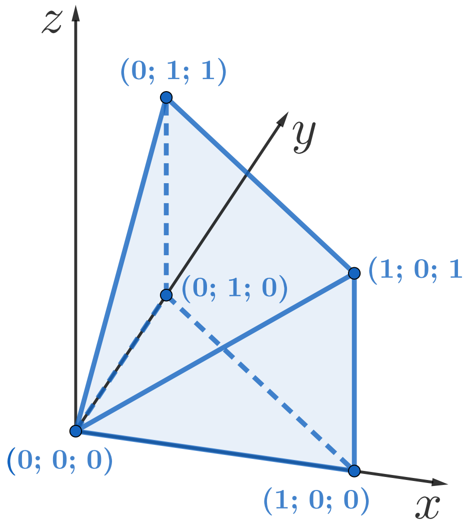

Рис. 5.1: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\,1]$ имеем: $y \in [0;\,1]$, причём при каждом фиксированном значении $y \in [0;\,z]$ имеем: $x \in [z-y;\ 1-y]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [z;\,1]$ имеем: $x \in [0;\ 1-y]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{z} \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int\limits_0^1 \int\limits_z^{1} \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

□

Задача 4083. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1} \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

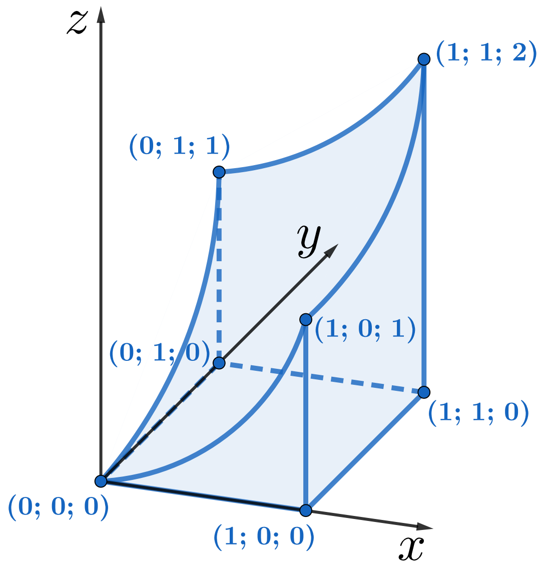

Рис. 5.2: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [0;\ 1]$, причём при каждом фиксированном значении $y \in [0;\ \sqrt{z}]$ имеем: $x \in \left[\sqrt{z-y^2};\ 1\right]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [\sqrt{z};\ 1]$ имеем: $x \in [0;\ 1]$.

При каждом фиксированном значении $z \in [1;\ 2]$ имеем: $y \in \left[\sqrt{z-1};\ 1\right]$, причём при каждом фиксированном значении y из этого множества имеем: $x \in \left[\sqrt{z-y^2};\ 1\right]$.

Значит, получаем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{z}} \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz +$$

$$+\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 \int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int\limits_1^2 \int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

□

Задача 3994 (1)**.** Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \qquad (x>0,\quad y>0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha = 2$, то есть $x = ar\cos^2\varphi$, $y = br\sin^2\varphi$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 \leqslant \frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^4 \leqslant \frac{a^2}{h^2}r^2\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}r^2\sin^4\varphi$, то есть $r^2 \leqslant \frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi$. Причём так как $r^2 \geqslant 0$, то $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \sqrt{\frac{ak}{bh}}$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi = 2abr\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$S = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} ab\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi\right)\,d\varphi$$

Получившийся интеграл можно досчитать, учитывая, что $\cos^4\varphi = \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2$ и $\sin^4\varphi = \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2$, и делая замену $t = \cos 2\varphi$ (тогда $dt = -2\sin 2\varphi\,d\varphi = -4\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$). Не будем проделывать эти дальнейшие технические выкладки. □

Задача на перестановку пределов интегрирования

Задача. Расставить пределы в противоположном порядке в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования.

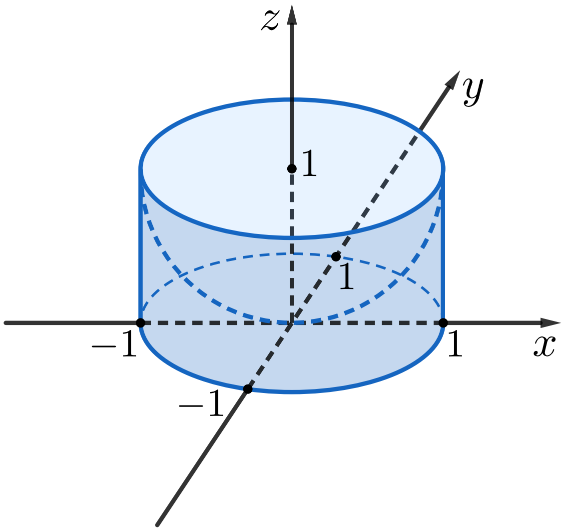

Рис. 5.3: Область интегрирования
(часть цилиндра под полусферой)

Уравнение полусферы будет иметь следующий вид: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, где $z \leqslant 1$. Уравнение цилиндра будет иметь следующий вид: $x^2 + y^2 = 1$.

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [-1;\ 1]$, причём:

· при каждом фиксированном значении $y \in \left[-1;\ -\sqrt{1-(z-1)^2}\right] \cup \cup \left[\sqrt{1-(z-1)^2};\ 1\right]$ имеем: $x \in \left[-\sqrt{1-y^2};\ \sqrt{1-y^2}\right]$;

· при каждом фиксированном значении $y \in \left[-\sqrt{1-(z-1)^2};\ \sqrt{1-(z-1)^2}\right]$ имеем: $x \in \left[-\sqrt{1-y^2};\ -\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}\right] \cup \left[\sqrt{1-y^2-(z-1)^2};\ \sqrt{1-y^2}\right]$.

Значит, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{0}^{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-(z-1)^2}} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-(z-1)^2}}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-(z-1)^2}}^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}} f(x,y,z)\,dx + \int\limits_{\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

$\square$

Сферическая замена переменных

Определение 5.1. $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$ – *сферическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Замечание 5.1. r – расстояние от начала координат до точки (x, y, z), ψ – угол поворота радиус-вектора точки (x, y, z) относительно плоскости Oxy, φ – угол поворота проекции радиус-вектора точки (x, y, z) на плоскость Oxy относительно положительного направления оси абсцисс.

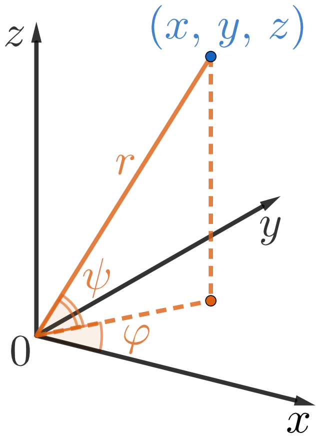

Рис. 5.4: Сферическая замена переменных

Замечание 5.2. В качестве альтернативы можно выбирать ψ как угол поворота радиус-вектора точка (x, y, z) относительно положительного направления оси аппликат, тогда $\psi \in [0;\, \pi]$.

Упражнение 5.1 (На дом)**.** Вычислить определитель сферической замены.

Семинар 6

Разбор домашнего задания

Задача 4098 (а)**.** Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где f – дифференцируемая функция.

Решение:

Сделаем сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$.

Тогда $x^2+y^2+z^2 = r^2 \leqslant t^2$, значит, $r \in [0;\, t]$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$F(t) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^t f(r^2)r^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi = 2\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^t f(r^2)r^2\cos\psi\,dr\,d\psi =$$

$$= 2\pi\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi \int\limits_0^t f(r^2)r^2\,dr = 4\pi\int\limits_0^t f(r^2)r^2\,dr;$$

$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

□

Цилиндрическая замена переменных

Определение 6.1. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$ – *цилиндрическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $h \in \mathbb{R}$.

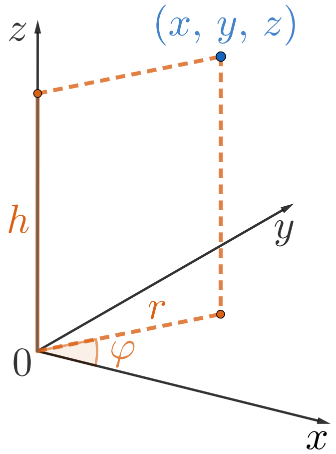

Рис. 6.1: Цилиндрическая замена переменных

Обобщённая сферическая замена переменных

Определение 6.2. $\begin{cases} x = ar\cos^{\alpha}\psi\cos^{\beta}\varphi \\ y = br\cos^{\alpha}\psi\sin^{\beta}\varphi \\ z = cr\sin^{\alpha}\psi \end{cases}$ – *обобщённая сферическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и если α и β – произвольные положительные степени, то $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\psi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^{\alpha}\psi\cos^{\beta}\varphi & -a\beta r\cos^{\alpha}\psi\sin\varphi\cos^{\beta-1}\varphi & -a\alpha r\sin\psi\cos^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta}\varphi \\ b\cos^{\alpha}\psi\sin^{\beta}\varphi & b\beta r\cos^{\alpha}\psi\cos\varphi\sin^{\beta-1}\varphi & -b\alpha r\sin\psi\cos^{\alpha-1}\psi\sin^{\beta}\varphi \\ c\sin^{\alpha}\psi & 0 & c\alpha r\cos\psi\sin^{\alpha-1}\psi \end{vmatrix} =$$

$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) =$$

$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi.$$

Задача 4116. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \qquad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0).$$

Решение:

$V = \displaystyle\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой сферической замене $\alpha = \beta = 2$, то есть $\begin{cases} x = ar\cos^2\psi\cos^2\varphi \\ y = br\cos^2\psi\sin^2\varphi \\ z = cr\sin^2\psi \end{cases}$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 \leqslant \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^2 \leqslant \frac{a}{h}r\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}r\cos^2\psi\sin^2\varphi$, то есть $r \leqslant \frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi +$ $+ \frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi =$$
$$= 4abcr^2\cos^3\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi;$$
$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi} 4abcr^2\cos^3\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$
$$= \frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3\cos^9\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$
$$= \frac{abc}{3}\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi\,d\psi\cdot\left(2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3\frac{a^2b}{h^2k}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi + \right.$$
$$\left. + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3\frac{ab^2}{hk^2}\cos^3\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi\,d\varphi\right).$$

Используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\psi\sin^n\psi\,d\psi = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2}\right)$, получим:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{abc}{3}\cdot B(5;\,1)\cdot\left(\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}\right)B(4;\,1)+3\left(\frac{a^2b}{h^2k}+\frac{ab^2}{hk^2}\right)B(3;\,2)\right)=\\
&=\frac{abc}{3}\cdot\frac{\Gamma(5)\Gamma(1)}{\Gamma(6)}\cdot\left(\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}\right)\frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)}+3\left(\frac{a^2b}{h^2k}+\frac{ab^2}{hk^2}\right)\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}\right)=\\
&=\frac{abc}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}\right)\frac{1}{4}+3\left(\frac{a^2b}{h^2k}+\frac{ab^2}{hk^2}\right)\frac{1}{12}\right)=\\
&=\frac{abc}{60}\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}+\frac{a^2b}{h^2k}+\frac{ab^2}{hk^2}\right).
\end{aligned}
$$

□

Задача 4118. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \qquad (x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0).$$

Решение:

$V=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой сферической замене $\alpha=1$ и $\beta=2$, то есть $\begin{cases}x=ar\cos\psi\cos^2\varphi\\ y=br\cos\psi\sin^2\varphi\\ z=cr\sin\psi\end{cases}$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqslant 1$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^2\leqslant 1$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0\leqslant r\leqslant 1;\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};\qquad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi=2abcr^2\cos\psi\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{1}2abcr^2\cos\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi=2abc\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\psi\sin^n\psi\,d\psi=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2}\right)$, получим:

$$V = \frac{2abc}{3} \cdot \frac{1}{2} B(1;\,1) = \frac{abc}{3} \cdot \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{abc}{3}.$$

$\square$

Центр масс плоской фигуры

Определение 6.3. Пусть Ω – плоская фигура с плотностью $\rho(x, y)$, тогда (x_0, y_0) – *центр масс* этой фигуры, где

$$x_0 = \frac{\iint\limits_{\Omega} x \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy}; \qquad y_0 = \frac{\iint\limits_{\Omega} y \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy}.$$

Задача 4054. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной следующими кривыми:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

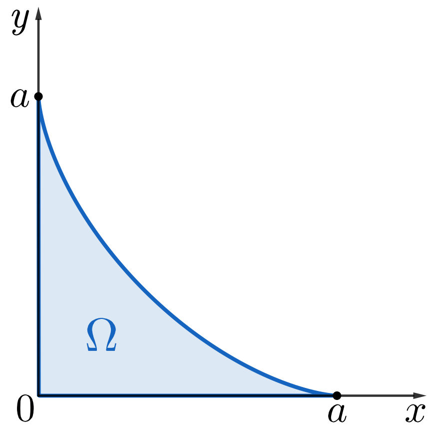

Рис. 6.2: Заданная пластинка Ω

Из соображений симметрии ясно, что $x_0 = y_0 = \dfrac{\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} dx\,dy}$.

Используем обобщённую полярную замену: $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$, тогда $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. В новых координатах граничная кривая задаётся следующим уравнением: $r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, то есть $r = a$.

$$\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r\cos^3\varphi\cdot 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{a} 3r^2\,dr\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(3;\ \frac{3}{2}\right) = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8a^3}{105};$$

$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{a} 3r\,dr\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right) = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi a^2}{32};$$

$$x_0 = y_0 = \frac{8a^3}{105} : \frac{3\pi a^2}{32} = \frac{256a}{315\pi}.$$

$\square$

Семинар 7

Центр масс плоской фигуры (продолжение)

Утверждение 7.1. *Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – массы, находящиеся в точках A_1, A_2, $\ldots$, A_n соответственно, и A – произвольная точка, тогда точка O – центр масс системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причём*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO} = \dfrac{m_1\overrightarrow{AA}_1 + m_2\overrightarrow{AA}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{AA}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ m_1\overrightarrow{OA}_1 + m_2\overrightarrow{OA}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{OA}_n = \vec{0} \end{cases}.$$

Утверждение 7.2. *Пусть дана пластинка Ω с плотностью $\rho(x,y)$, причём $\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy \neq 0$. Пусть точка O – центр масс Ω, точка $A(x,y)$ – произвольная точка, A_0 – некоторая фиксированная точка. Тогда*

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Omega} \overrightarrow{OA}(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy = \vec{0} \\ \dfrac{\iint\limits_{\Omega} \overrightarrow{A_0A}(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy} = \overrightarrow{A_0O} \end{cases}.$$

Задача 2506. Доказать *вторую теорему Гульдена*: объём тела, образованного вращением плоской фигуры Ω вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади Ω на длину окружности, описываемой центром масс этой фигуры.

Решение:

Назовём тело, получаемое вращением, Φ. Введём систему координат так, чтобы ось вращения была расположена вдоль оси Oz.

$V(\Phi) = \iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz$ – объём тела Φ.

Используем цилиндрическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r;$$

$$V(\Phi) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\iint\limits_{\Omega} r\,dr\,dh \right) d\varphi.$$

Так как ось вращения не пересекает плоскую фигуру Ω и совпадает с осью Oz, то для фигуры Ω, лежащей в плоскости Oxz, получаем: $\iint\limits_{\Omega} r\,dr\,dh = \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dz$.

Тогда, учитывая, что $x_0 = \dfrac{\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} dx\,dy}$, получаем:

$$V(\Phi) = 2\pi \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dz = 2\pi x_0 \iint\limits_{\Omega} dx\,dz = 2\pi x_0 \cdot S(\Omega),$$

где $2\pi x_0$ – длина окружности, описываемой центром масс Ω, и $S(\Omega)$ – площади Ω. $\square$

В качестве примера найдём объём тора с помощью второй теоремы Гульдена.

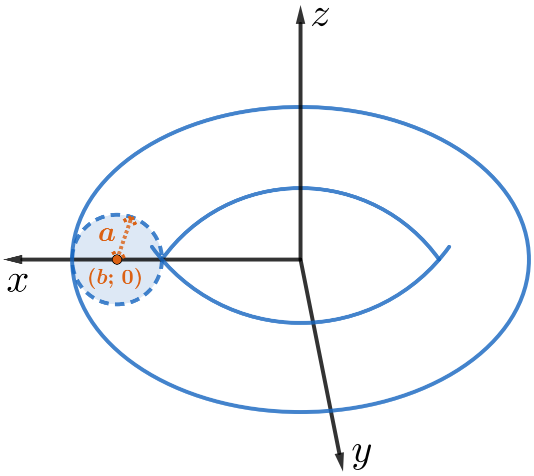

Рис. 7.1: Тор Φ и его сечение Ω

$x_0 = b$, $S(\Omega) = \pi a^2$, значит, $V(\Phi) = 2\pi b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$.

Центр масс объёмной фигуры

Определение 7.1. Пусть Φ – объёмная фигура с плотностью $\rho(x, y, z)$, тогда (x_0, y_0, z_0) – *центр масс* этой фигуры, где

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$y_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} y \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} z \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Задача 2506. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \qquad z = c.$$

Решение:

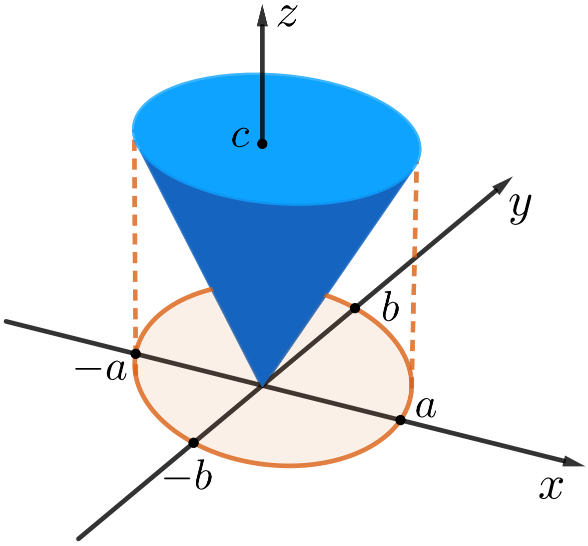

Рис. 7.2: Заданное тело (синее)

Пусть ρ – плотность заданного тела Φ.

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} x\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz} = \frac{\iiint\limits_{\Phi} x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz} = 0;$$

$$y_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} y\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz} = \frac{\iiint\limits_{\Phi} y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz} = 0,$$

так как в числителях интегрируются нечётные относительно соответственно плоскостей Oyz и Oxz функции по симметричному телу.

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} z\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz} = \frac{\iiint\limits_{\Phi} z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz}. \tag{7.1}$$

Используем обобщённую цилиндрическую замену переменных: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = ch \end{cases}$, где $r \in [0;\, h]$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $h \in [0;\, 1]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = abcr;$$

$$\iiint\limits_{\Phi} z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^h ch\cdot abcr\,dr\,dh\,d\varphi = 2\pi abc^2\int\limits_0^1 h\cdot\frac{h^2}{2}\,dh = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

Интеграл в знаменателе (7.1) $\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz$ представляет собой объём конуса с эллипсом в основании, поэтому он равен $\frac{1}{3}\pi abc$.

$$z_0 = \frac{\pi abc^2}{4} : \frac{\pi abc}{3} = \frac{3c}{4}.$$

Таким образом, $\left(0;\ 0;\ \dfrac{3c}{4}\right)$ – искомые координаты центр масс. □

Момент инерции

Рассмотрим тело Φ, вращающееся вокруг некоторой фиксированной оси l с постоянной угловой скоростью ω. Найдём кинетическую энергию этого тела. Для этого рассмотрим некоторую малую окрестность точки (x,y,z) этого тела. Будем считать, что рассматриваемая окрестность имеет массу Δm_j и скорость $v = r(x,y,z)\omega$, где $r(x,y,z)$ – расстояние от оси вращения l до точки (x,y,z). Тогда кинетическая энергия этой окрестности будет равна $\dfrac{\Delta m_j(r(x,y,z)\omega)^2}{2}$. Просуммируем кинетические энергии всех малых окрестностей, составляющих вращающееся тело Φ, получим:

$$\sum_j \frac{\Delta m_j(r(x,y,z)\omega)^2}{2} = \frac{\sum\limits_j \left(\Delta m_j r^2(x,y,z)\right)\omega^2}{2} = \frac{\sum\limits_j \left(\rho(x,y,z)\Delta V_j r^2(x,y,z)\right)\omega^2}{2},$$

где $\rho(x,y,z)$ – плотность тела в точке (x,y,z), ΔV_j – объём j-й малой окрестности вблизи точки (x,y,z). Заметим, что $\sum\limits_j \rho(x,y,z)\Delta V_j r^2(x,y,z)$ представляет собой интегральную сумму для следующего тройного интеграла: $\iiint\limits_{\Phi} r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Определение 7.2. Интеграл $J_l = \iiint\limits_{\Phi} r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ называется *моментом инерции* тела Φ относительно оси l.

Тогда кинетическая энергия вращения тела Φ относительно оси l равна $\dfrac{J_l\omega^2}{2}$.

Задача 4151 (Теорема Гюйгенса-Штейнера)**.** Доказать *теорему Гюйгенса-Штейнера*:

$$J_l = J_{l_0} + md^2,$$

где J_l – момент инерции тела относительно некоторой оси l, J_{l_0} – момент инерции относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр масс тела, d – расстояние между осями, m – масса тела.

Решение:

Обозначим тело Φ.

$$J_l = \iiint\limits_{\Phi} r_l^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$J_{l_0} = \iiint\limits_{\Phi} r_{l_0}^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Из определения момента инерции ясно, что он инвариантен относительно выбора системы координат. Тогда выберем удобную нам систему координат: пусть l_0 совпадает с Oz и $(0,0,0)$ – центр масс тела Φ, тогда l проходит через точку $(d,0,0)$ параллельно Oz.

$$r_{l_0}^2(x,y,z) = x^2 + y^2; \qquad r_l^2 = (x-d)^2 + y^2;$$

$$J_l = J_{l_0} - 2d\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + d^2\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Так как $\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = x_0\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, где $x_0 = 0$ – абсцисса центра масс, то $\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$. Тогда, учитывая, что $\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = m$, получаем:

$$J_l = J_{l_0} + md^2.$$

□

Задача 4144 (изменённая)**.** Определить моменты инерции относительно координатных осей однородного тела, ограниченного следующей поверхностью (параметры положительные):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение:

Для простоты будем считать $\rho \equiv 1$. Пусть l совпадает с Oz.

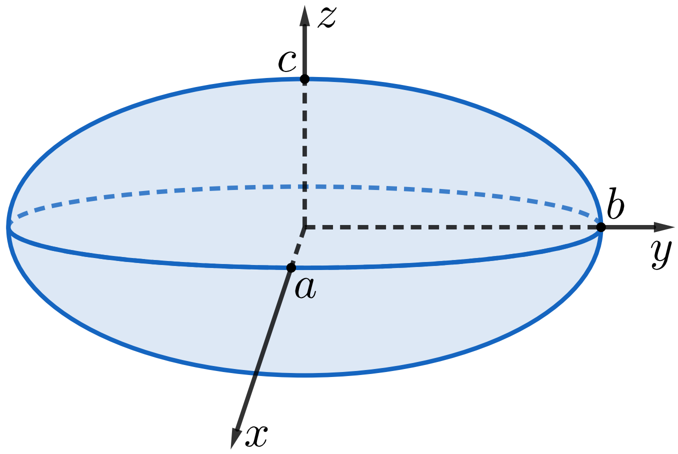

Рис. 7.3: Заданное тело

$$J_l = \iiint\limits_{\Phi} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Используем обобщённую сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = ar\cos\psi\cos\varphi \\ y = br\cos\psi\sin\varphi \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$,
где $r \in [0;\ 1]$ $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, $\psi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = abcr^2\cos\psi;$$

$$J_l = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 (a^2r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + b^2r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi)abcr^2\cos\psi\, dr\, d\psi\, d\varphi =$$

$$= a^3bc\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\, d\psi\int\limits_0^1 r^4\, dr + ab^3c\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\, d\psi\int\limits_0^1 r^4\, dr.$$

В силу того, что $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, и 2π-периодичности имеем: $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$ $= \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi$. Кроме того, $\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. Значит, $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$ $= \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi = B\left(2;\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3};$$

$$\int\limits_0^1 r^4\,dr = \frac{1}{5};$$

$$J_l = \frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2).$$

Мы нашли момент инерции относительно оси Oz. Из соображений симметрии ясно, что момент инерции относительно оси Ox будет равен $\frac{4\pi}{15}abc(b^2+c^2)$, а относительно оси Oy будет равен $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+c^2)$. $\square$

Семинар 8

Потенциал поля тяготения

Определение 8.1. *Потенциал поля тяготения* $u(x, y, z)$ тела V в точке (x, y, z) определяется следующей формулой:

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}.$$

Задача 4155 (изменённая)**.** Найти ньютонов потенциал в точке $(0, 0, 0)$ однородного шара $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant R^2$ плотности ρ_0, где $a > R > 0$.

Решение:

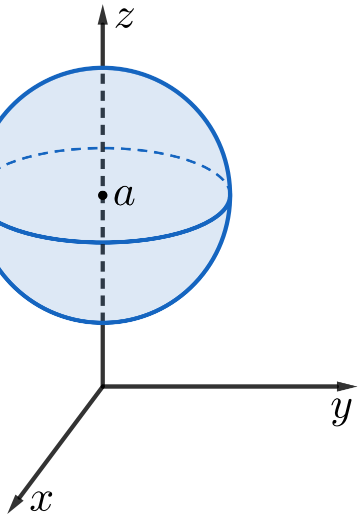

Рис. 8.1: Шар, создающий гравитационный потенциал

$$u(0, 0, 0) = \iiint\limits_V \rho_0 \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где $V:\ \ x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant R^2$.

Используем сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\psi,\varphi)} = r^2\cos\psi;$$
$$V:\quad r^2 - 2ar\sin\psi + a^2 \leqslant R^2;$$
$$V:\quad r^2 - 2ar\sin\psi + a^2\sin^2\psi + a^2\cos^2\psi \leqslant R^2;$$
$$V:\quad 0 \leqslant (r - a\sin\psi)^2 \leqslant R^2 - a^2\cos^2\psi;$$
$$\cos^2\psi \leqslant \frac{R^2}{a^2};\qquad \psi \in \left[\arccos\frac{R}{a};\ \frac{\pi}{2}\right];\qquad \varphi\in[0;\ 2\pi];$$
$$r \in \left[a\sin\psi - \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\psi};\ a\sin\psi + \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\psi}\right];$$
$$u(0,0,0) = 2\pi\rho_0 \int\limits_{\arccos\frac{R}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{a\sin\psi-\sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}}^{a\sin\psi+\sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}} r\cos\psi\,dr\,d\psi =$$
$$= 4\pi\rho_0 \int\limits_{\arccos\frac{R}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - a^2\cos^2\psi}\cdot a\sin\psi\cos\psi\,d\psi.$$

Используем замену переменной: $t = \cos^2\psi$, тогда $dt = -2\sin\psi\cos\psi\,d\psi$.

$$u(0,0,0) = 2\pi\rho_0 a\int\limits_0^{\frac{R^2}{a^2}} \sqrt{R^2 - a^2 t}\,dt = 2\pi\rho_0 a\cdot\left(-\frac{2}{3a^2}(R^2 - a^2t)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{R^2}{a^2}} =$$
$$= 2\pi\rho_0 a\cdot\frac{2R^3}{3a^2} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\cdot\frac{1}{a}.$$

□

Замечание 8.1. Полученный результат показывает, что однородный шар в точке за его границей создаёт такой же гравитационный потенциал, как и точка, обладающая массой шара и находящаяся в его центре.

Несобственные двойные и тройные интегралы

В случае одной переменной несобственные интегралы определялись следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b'\to+\infty}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx;\qquad \int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Перейдём к построению несобственного интеграла большей размерности. Рассмотрим некоторое множество Ω, на котором мы хотим построить несобственный интеграл. Рассмотрим исчерпание Ω замкнутыми квадрируемыми ограниченными множествами $\overline{\Omega}_k$, для которых выполняются следующие свойства:

$$1)\ \overline{\Omega}_k \subset \overline{\Omega}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}; \qquad 2)\ \bigcup_k \overline{\Omega}_k = \Omega.$$

Определение 8.2. Если $\forall \left\{\overline{\Omega}_k\right\}\ \ \exists \lim\limits_{k\to+\infty} \iint\limits_{\overline{\Omega}_k} f(x,y)\,dx\,dy$, причём значение предела не зависит от выбора исчерпания, то $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ *сходится.*

Для несобственных двойных интегралов и интегралов большей размерности не существует понятия условной сходимости, так как любой сходящийся интеграл необходимо будет абсолютно сходящимся. Вкратце покажем это. Предположим, что некоторый несобственный интеграл сходится условно. Тогда такой интеграл, взятый только по областям, в которых подынтегральная функция положительна, будет стремиться к $+\infty$, а только по областям, в которых подынтегральная функция отрицательна, – к $-\infty$. Но тогда исчерпывая положительные области достаточно большими исчерпаниями, а отрицательные области достаточно малыми исчерпаниями, всегда можно будет добиться того, чтобы интеграл расходился.

Выпишем полезные для решения задач свойства:

1) для непрерывных функций неважно, рассматривать

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{или} \qquad \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx\,dy;$$

2) для непрерывных функций $f(x,y) \geqslant 0$ верно следующее:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists \left\{\overline{\Omega}_k\right\}\colon\ \ \exists \lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{\overline{\Omega}_k} f(x,y)\,dx\,dy;$$

3) для непрерывных функций $f(x,y) \geqslant g(x,y) \geqslant 0$ верно следующее:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Rightarrow \quad \exists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy;$$
$$\nexists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy \quad \Rightarrow \quad \nexists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy;$$

4) если для непрерывных функций $\exists C_1, C_2 > 0\colon \quad C_1 g(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant C_2 g(x,y)$, то

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy.$$

Задача 4161. Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечной областью интегрирования:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy,$$

где $0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$.

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна, то можно заменить её на модуль, а так как её модуль слабо эквивалентен с функцией $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$, то можно исследовать интеграл от этой функции. Тогда для такого интеграла достаточно рассмотреть некоторое одно исчерпание заданной области интегрирования $x^2+y^2 \geqslant 1$. Рассмотрим следующее исчерпание: $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant n$.

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r \in \left[1 + \dfrac{1}{n};\ n\right]$ и $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{dr\,d\varphi}{r^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Полученный интеграл является табличным сходится тогда и только тогда, когда $2p-1 > 1$, то есть когда $p > 1$. □

Замечание 8.2. Заметим, что полученный результат можно переписать в таком виде: $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 2$. Вообще говоря, аналогичный интеграл для пространства размерности m сходится тогда и только тогда, когда $p > m$. А аналогичный интеграл по области $x^2+y^2 \leqslant 1$ (или аналогичной для пространства размерности m) сходится тогда и только тогда, когда $p < m$.

Рассмотрим «парадокс» покраски фигуры бесконечной площади. Так как $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ сходится, то в области $x^2+y^2 < 1$ в колбе формы $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ с бесконечным горлышком, сужающимся к оси Oz, помещается конечный объём краски.

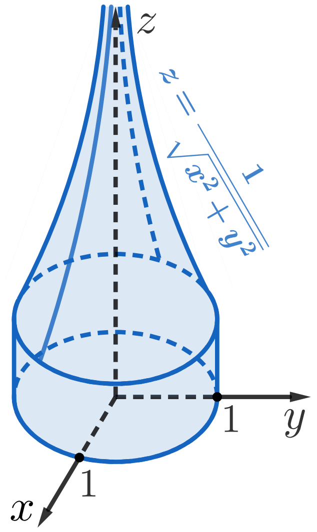

Рис. 8.2: Колба

Сечение этой колбы плоскостью Oyz задаёт плоскую фигуру в области $|y| < 1$, ограниченную функцией $z = \dfrac{1}{|y|}$. Эта фигура имеет бесконечную площадь, потому что интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dy}{|y|} = 2\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dy}{y}$ расходится. Таким образом, окрасить эту фигуру равномерным слоем конечного количества краски не получится, но её можно «окунуть» в колбу с краской, которой там конечное количество, и покрасить.

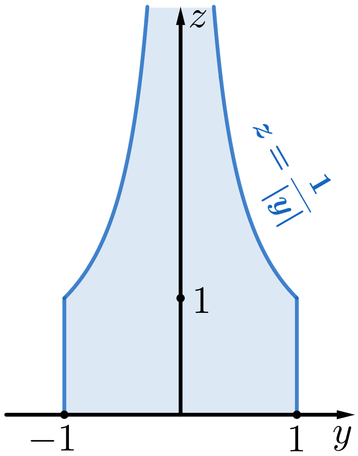

Рис. 8.3: Плоская фигура

Решение «парадокса» заключается в том, что в колбе краска распределена не равномерным слоем, а сужающимся при увеличении z.

Задача 4164. Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечной областью интегрирования:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q},$$

где $p > 0$, $q > 0$.

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена на любой области вида $|x|+|y| \geqslant \delta > 0$, то заданный интеграл будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\displaystyle\iint\limits_{|x|^p+|y|^q\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$.

Так как $\displaystyle\iint\limits_{|x|^p+|y|^q\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} = 4\iint\limits_{\substack{x^p+y^q\geqslant 1\\ x,\,y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$, то исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x^p+y^q\geqslant 1\\ x,\,y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$.

Используем обобщённую полярную замену координат: $\begin{cases} x = r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi \\ y = r^{\frac{1}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi \end{cases}$. Тогда $r \geqslant 1$ и $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p}\cdot r^{\frac{1}{p}-1}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & -\dfrac{2}{p}\cdot r^{\frac{1}{p}}\sin\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \\ \dfrac{1}{q}\cdot r^{\frac{1}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & \dfrac{2}{q}\cdot r^{\frac{1}{q}}\cos\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \end{vmatrix}.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. Подсказка: надо будет использовать слабую эквивалентность, чтобы упростить подынтегральное выражения после расчёта якобиана $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$. Затем останется проанализировать табличный интеграл от функции вида $\dfrac{1}{r^{f(p,q)}}$, где $f(p,q)$ – некоторый многочлен. $\square$

Семинар 9

Решение задач на несобственные двойные и тройные интегралы

Задача 4175. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна и положительна на $\mathbb{R}^2$, то достаточно рассмотреть некоторое одно исчерпание заданной области интегрирования $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующее исчерпание: $\overline{\Omega}_n = \{(x, y) \colon\ x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$.

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r \in [0;\ n]$ и $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

Для якобиана имеем: $\dfrac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$. Тогда получаем следующий интеграл: $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$. Используем замену: $t = r^2$, тогда $dt = 2r\,dr$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \lim_{n\to+\infty}\pi\int\limits_0^{n^2} e^{-t}\,dt = \pi\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \pi.$$

□

Замечание 9.1. Если для интеграла, данного в задаче (4175), рассмотреть исчерпание квадратами, то получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi$.

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Задача 4181. Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл от разрывной функции:

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ |y|\leqslant x^2}} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}.$$

Решение:

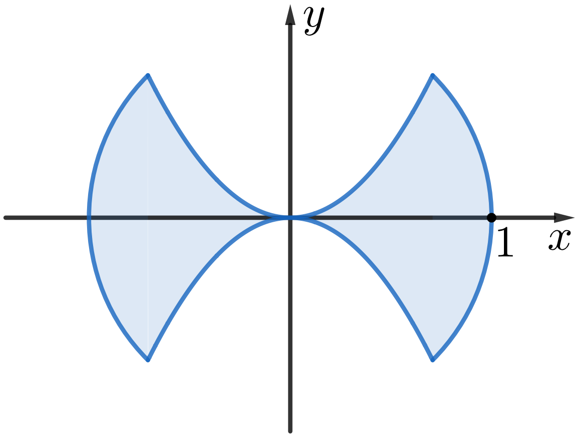

Рис. 9.1: Область интегрирования

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r^2 \leqslant 1$, $|r\sin\varphi| \leqslant \leqslant r^2\cos^2\varphi$. В силу симметрии несобственный интеграл только по 1-й четверти в 4 раза меньше исходного несобственного интеграла. Значит, исходный несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл только по 1-й четверти (далее будем рассматривать его).

Имеем: $\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \leqslant r \leqslant 1$. Значит, $\sin\varphi \leqslant \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$. Используем замену: $t = \sin\varphi$, где $t > 0$. Тогда $t^2 + t - 1 \leqslant 0$. Следовательно, $t \in \left[0;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. Таким образом, $\varphi \in \left[0;\ \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Для якобиана имеем: $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$. Тогда получаем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{1} \frac{dr\,d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\cos\varphi\,d\varphi - \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\,d\varphi.$$

Заметим, что $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\cos\varphi\,d\varphi$ существует, так как подынтегральная функция непрерывная и ограниченная на области интегрирования. Значит, исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\,d\varphi$.

Заметим, что $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\varphi\,d\varphi = (\varphi\ln\varphi - \varphi)\Big|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ существует. Теперь рассмотрим разность:

$$\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\,d\varphi - \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi.$$

Последний интеграл существует. Значит, $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\,d\varphi$ сходится, а тогда исходный интеграл тоже сходится. □

Задача 4195. Исследовать на сходимость несобственный тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{|x|,\,|y|,\,|z|\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}.$$

Решение:

Область интегрирования представляет собой куб, но подынтегральная функция не определена на плоскости $\alpha\colon\ x+y-z=0$.

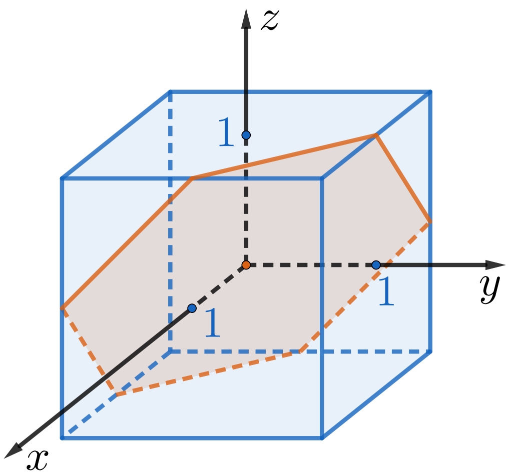

Рис. 9.2: Куб $|x|, |y|, |z| \leqslant 1$ (синий) и
его сечение плоскостью $x+y-z=0$ (оранжевое)

Повернём систему координат так, что ось Oz перешла в ось Oz', параллельную вектору нормали $\{1;\ 1;\ -1\}$ плоскости α. При этом получим новую ортогональную систему координат $Ox'y'z'$. В новой системе координат интеграл запишется следующим образом: $\iiint\limits_{\Omega'} \dfrac{dx'\,dy'\,dz'}{|z'|^p}$, где Ω' – исходная область интегрирования в новых координатах.

Построим в этой новой системе координат куб Q: $|x'|, |y'|, |z'| \leqslant a$, где $a > 0$. Выберем $a = a_1$ так, чтобы $Q = Q_1 \subset \Omega'$, где Q_1 – получившийся куб. Также выберем $a = a_2$ так, чтобы $Q = Q_2 \supset \Omega'$, где Q_2 – получившийся куб.

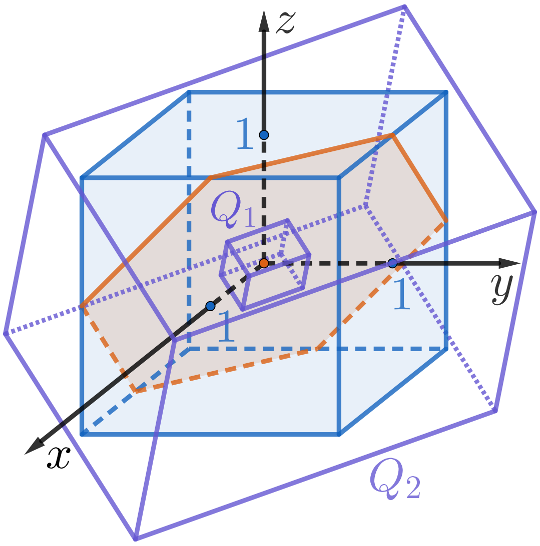

Рис. 9.3: Кубы Q_1 и Q_2

Рассмотрим следующие исчерпания:

$$|x'| \leqslant a, \qquad |y'| \leqslant a, \qquad \frac{1}{n} \leqslant |z'| \leqslant a.$$

Тогда получим следующий интеграл:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{\left[-a;\, -\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n};\, a\right]} \frac{dz'}{|z'|^p}\, dy'\, dx' = \lim_{n\to+\infty} 2 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dz'}{(z')^p}\, dy'\, dx' =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8a^2 \int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dz'}{(z')^p} = 8a^2 \int\limits_{0}^{a} \frac{dz'}{(z')^p}.$$

Полученный интеграл является табличным и сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. Значит, интеграл по кубам Q_1 и Q_2 сходится и расходится одновременно, причём сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. Значит, и исходный интеграл $\iiint\limits_{|x|,\,|y|,\,|z|\leqslant 1} \dfrac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. $\square$

Замечание 9.2. Заметим, что интеграл, данный в задаче (4195), сходится тогда и только тогда, когда $p < 1 = 3 - 2$, где 3 – размерность области интегрирования, а 2 – размерность области, в которой не существует подынтегральная функция.

Многократные интегралы

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В таком пространстве многократные интегралы строятся аналогично, как в пространствах $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Если область $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant x_1 \leqslant b \\ \varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \psi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant \psi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases},$$

то

$$\int \cdots \int\limits_{\overline{\Omega}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \cdots \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1.$$

Задача 4202. Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать равенство при $n \geqslant 2$:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_{n-1}} f\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\limits_0^x \int\limits_{x_n}^x \cdots \int\limits_{x_2}^x f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n.$$

Решение:

Область интегрирования $\overline{\Omega}$ задаётся следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant x \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \\ \vdots \\ 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \end{cases}.$$

Можно переписать эту систему следующим образом:

$$x \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0.$$

А это можно записать в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_n \leqslant x \\ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x \\ \vdots \\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant x \end{cases}.$$

Значит, получаем:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\limits_0^x \int\limits_{x_n}^x \ldots \int\limits_{x_2}^x f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n.$$

□

Задача 4204 (а)**.** Вычислить следующий многократный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Решение:

В силу симметрии имеем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = n \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 x_1^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{n}{3}.$$

□

Замечание 9.3. Значение интеграла, данного в задаче (4204), равно среднему квадрату расстояния от начала координат в n-мерном кубе, у которого вершина лежит в начале координат, а координатные оси направлены вдоль рёбер, исходящих из этой вершины.

Задача 4211. Найти объём n-мерного шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

Решение:

Проведём через центр n-мерного шара ось Ox с началом отсчёта в центре шара. Рассмотрим сечение этого шара гиперплоскостью размерности $n-1$, проходящей перпендикулярно оси Ox через координату x на оси. Тогда сечением будет шар размерности $n-1$, причём по теореме Пифагора его радиус будет равен $\sqrt{a^2 - x^2}$.

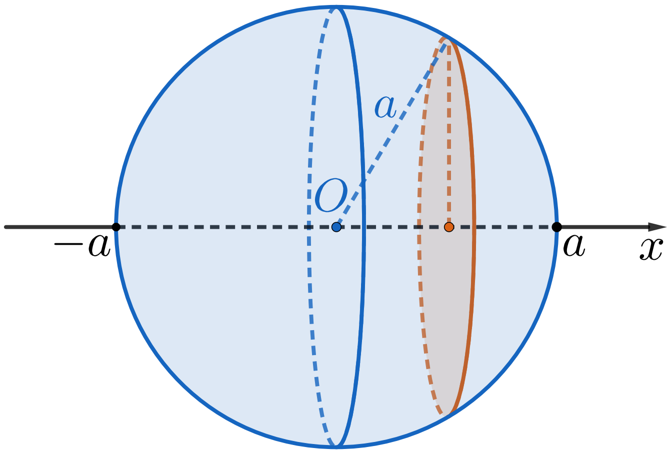

Рис. 9.4: Сечение n-мерного шара при $n = 3$

Пусть $V_n(a)$ – объём шара размерности n радиуса a. Получаем следующее соотношение:

$$V_n(a) = \int\limits_{-a}^{a} V_{n-1}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx. \tag{9.1}$$

Докажем по индукции, что $V_n(a) = c_n a^n$, где c_n – некоторая константа.

$$\begin{aligned}
&V_1(a) = 2a; \qquad c_1 = 2;\\
&V_2(a) = \pi a^2; \qquad c_2 = \pi;\\
&\vdots\\
&V_{n-1}(a) = c_{n-1}a^{n-1} \quad \text{(по предположению индукции)}.
\end{aligned}$$

Используем замену переменной: $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$. Из (9.1) с учётом предположения индукции получаем:

$$V_n(a) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_{n-1}(a\cos t)\cdot a\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c_{n-1}a^n\cos^n t\,dt = c_{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt\cdot a^n.$$

Таким образом, мы доказали предположение индукции $V_n = c_n a^n$, где

$$c_n = c_{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = B\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}\right)\cdot c_{n-1}.$$

Преобразуем формулу для коэффициентов c_n:

$$\begin{aligned}
c_n &= B\left(\frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n}{2};\ \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot B\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right) c_1 = \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma(2)} \cdot c_1 = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot 2 = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $V_n(a) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot a^n$ – объём n-мерного шара радиуса a. □

Замечание 9.4. Например, объём 4-мерного шара радиуса a равен $V_4(a) = \dfrac{\pi^2}{2} \cdot a^4$.

Упражнение 9.1 (На дом). Найти объём n-мерного шара, используя n-мерную сферическую замену переменных:

$$\begin{cases}
x_1 = r\cos\varphi_1 \\
x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
\vdots \\
x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\
x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{cases},$$

где $r \geqslant 0$, $\varphi_1 \in [0;\ \pi]$, $\ldots$, $\varphi_{n-2} \in [0;\ \pi]$, $\varphi_{n-1} \in [0;\ 2\pi]$.

В этом случае якобиан равен следующему выражению (при желании вывести):

$$\frac{D(x_1, x_2,\ \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1,\ \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}.$$

Семинар 10

Разбор домашнего задания

Задача 4167 (неполная)**.** Показать, что

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\pi,$$

где $n\in\mathbb{N}$.

Решение:

$$\lim_{n\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\|y|\leqslant n}}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n}\big(\sin(x^2)\cos(y^2)+\sin(y^2)\cos(x^2)\big)\,dx\,dy=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}2\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n}\sin(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy=\lim_{n\to+\infty}2\int\limits_{-n}^{n}\sin(x^2)\,dx\cdot\int\limits_{-n}^{n}\cos(y^2)\,dy=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(y^2)\,dy=\pi,$$

так как $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(y^2)\,dy=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ – интегралы Френеля. □

Упражнение 10.1 (На дом)**.** Используя формулу Стирлинга и формулу объёма n-мерного шара радиуса a

$$V_n(a)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}\cdot a^n,$$

найти асимптотику $V_n(1)$ при $n\to+\infty$, а также асимптотику a_n при $n\to+\infty$ при условии, что $V_n(a_n)=1$.

Решение задач на многократные интегралы

Задача 4209. Найти объём n-мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1,\qquad x_i\geqslant 0,\qquad a_i>0,$$

где $i=1,2,\,\ldots,n$.

Решение:

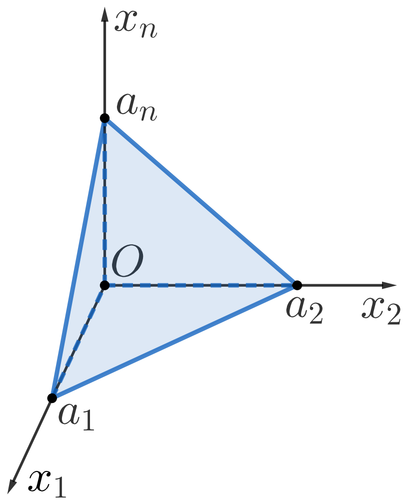

Рис. 10.1: n-мерная пирамида

Для 2-мерной пирамиды (прямоугольный треугольник) объём (площадь) равен $V_2 = \dfrac{a_1 a_2}{2}$. Предположим, что для n-мерной пирамиды объём равен $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$. Докажем это по индукции.

Рассмотрим пирамиду размерности $n+1$ и её сечение гиперплоскостью, проходящей перпендикулярно оси Ox_{n+1} через координату $x_{n+1} = b$ на этой оси.

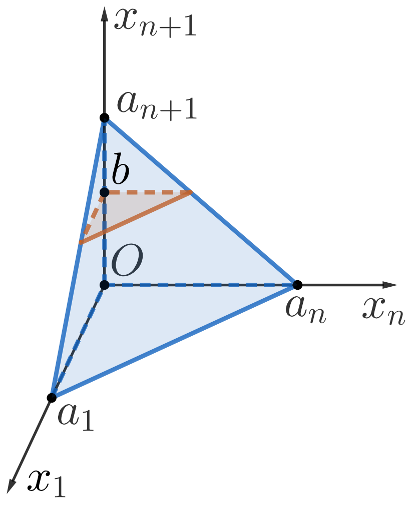

Рис. 10.2: Сечение $n+1$-мерной пирамиды

Тогда в гиперплоскости $Ox_1 \ldots x_n$ будет находиться n-мерный тетраэдр, объём которого равен $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$ (по предположению индукции), а в сечении будет находиться подобный ему тетраэдр с коэффициентом подобия $\dfrac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}$. Тогда объём тетраэдра в сечении будет равен $V_n \cdot \left(\dfrac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}\right)^n$.

$$V_{n+1} = \int\limits_0^{a_{n+1}} V_n \cdot \left(\frac{a_{n+1}-b}{a_{n+1}}\right)^n db = V_n \cdot \left(-\frac{a_{n+1}}{n+1}\left(\frac{a_{n+1}-b}{a_{n+1}}\right)^{n+1}\right)\Bigg|_0^{a_{n+1}} =$$
$$= \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot V_n = \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким образом, предположение индукции доказано. Значит, $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$ – объём n-мерной пирамиды. □

Замечание 10.1. Покажем ещё один способ нахождения объёма пирамиды из задачи (4209), только с единичными рёбрами. Для этого рассмотрим n-мерный единичный куб, у которого одна вершина находится в начале координат, а рёбра, исходящие из этой вершины, направлены вдоль координатных осей. То есть куб задаётся следующими неравенствами: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Объём такого куба равен 1. Теперь рассмотрим внутри этого куба пирамиды следующего вида: $0 \leqslant x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant 1$, где σ – некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

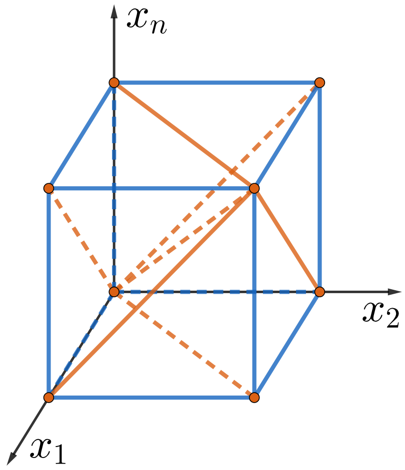

Рис. 10.3: Замощение куба пирамидами
(все оранжевые точки – вершины пирамид,
все оранжевые и синие отрезки – рёбра пирамид)

Всего таких пирамид будет $n!$, причём они могут иметь друг с другом общие точки только на границах, и объединение всех таких пирамид замащивает куб. При этом пирамиды движением переходят друг в друга, значит, их объёмы равны. Тогда объём каждой такой пирамиды равен $\dfrac{1}{n!}$.

Задача. Найти объём n-мерного октаэдра

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant a,$$

где $a > 0$.

Решение:

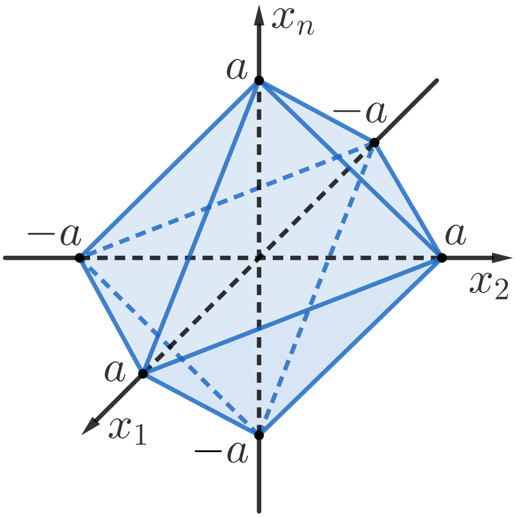

Рис. 10.4: n-мерный октаэдр

Заметим, что n-мерный октаэдр состоит из 2^n пирамид вида

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a} \leqslant 1,$$

где некоторые $x_i \geqslant 0$, а некоторые $x_j \leqslant 0$ (может быть, что все $x_i \geqslant 0$ или все $x_i \leqslant 0$). Объём такой пирамиды мы находили в задаче (4209), он равен $\dfrac{a^n}{n!}$. Тогда объём n-мерного октаэдра будет равен $2^n \cdot \dfrac{a^n}{n!}$. □

Задача 4214. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \ldots dx_2\,dx_1 = \int\limits_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du.$$

Решение:

Используя равенство, доказанное в задаче (4202), получаем:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \ldots dx_2\,dx_1 = \int\limits_0^x \int\limits_{x_n}^{x} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} f(x_n)\,dx_1 \ldots\, dx_{n-1}\,dx_n =$$

$$= \int\limits_0^x f(x_n) \int\limits_{x_n}^{x} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} dx_1 \ldots\, dx_{n-1}\,dx_n = \int\limits_0^x f(x_n)\frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx_n.$$

□

Задача 4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$.

Решение:

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \end{cases}$. Тогда область интегрированиях запишется следующим образом: $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1$.

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1;$$

$$\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1} \cdots \int y_1^{p_1-1} (y_2 - y_1)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (y_n - y_{n-1})^{p_n-1}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y_1}^1 \ldots \int\limits_{y_{n-2}}^1 y_1^{p_1-1} (y_2 - y_1)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_{n-2})^{p_{n-1}-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int\limits_{y_{n-1}}^1 (y_n - y_{n-1})^{p_n-1}\, dy_n\, dy_{n-1} \ldots dy_2 \right) dy_1.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения (возможно, замена неудачная). ☐

Семинар 11

Разбор домашнего задания

Задача 4216 (продолжение)**.** Доказать *формулу Дирихле*

$$\int\limits_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)},$$

где $p_1,p_2,\ldots,p_n>0$.

Решение:

На прошлом семинаре мы показали, что

$$\int\limits_{\substack{x_1,x_2,\ldots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}}\cdots\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y_1}^1\cdots\int\limits_{y_{n-2}}^1 y_1^{p_1-1}(y_2-y_1)^{p_2-1}\cdot\ldots\cdot(y_{n-1}-y_{n-2})^{p_{n-1}-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int\limits_{y_{n-1}}^1(y_n-y_{n-1})^{p_n-1}\,dy_n\,dy_{n-1}\ldots dy_2\right)dy_1.$$

Вычислим интегралы, начиная с внутреннего:

$$\int\limits_{y_{n-1}}^1(y_n-y_{n-1})^{p_n-1}\,dy_n=\frac{1}{p_n}(y_n-y_{n-1})^{p_n}\Bigg|_{y_{n-1}}^1=\frac{1}{p_n}(1-y_{n-1})^{p_n};$$

$$\int\limits_{y_{n-2}}^1(y_{n-1}-y_{n-2})^{p_{n-1}-1}\cdot\frac{1}{p_n}(1-y_{n-1})^{p_n}\,dy_{n-1}\ominus$$

Замена: $\quad z_{n-1}=\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{1-y_{n-2}}$

$$\ominus\frac{(1-y_{n-2})^{p_{n-1}+p_n}}{p_n}\int\limits_0^1 z_{n-1}^{p_{n-1}-1}(1-z_{n-1})^{p_n}\,dz_{n-1}=$$

$$=\frac{(1-y_{n-2})^{p_{n-1}+p_n}}{p_n}\cdot B_n(p_{n-1},p_n+1).$$

И так далее. В итоге для исходного интеграла получим следующее выражение:

$$\frac{1}{p_n}\cdot B(p_{n-1},p_n+1)B(p_{n-2},p_{n-1}+p_n+1)\cdot\ldots\cdot B(p_2,p_3+\ldots+p_n+1)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1 y_1^{p_1-1}(1-y_1)^{p_2+\ldots+p_n}\,dy_1=\frac{1}{p_n}\cdot B(p_{n-1},p_n+1)\cdot\ldots\cdot B(p_1,p_2+\ldots+p_n+1)=$$

$$=\frac{1}{p_n}\cdot\frac{\Gamma(p_{n-1})\Gamma(p_n+1)}{\Gamma(p_{n-1}+p_n+1)}\cdot\frac{\Gamma(p_{n-2})\Gamma(p_{n-1}+p_n+1)}{\Gamma(p_{n-2}+p_{n-1}+p_n+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2+\ldots+p_n+1)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)},$$

так как $\dfrac{1}{p_n}\cdot\Gamma(p_n+1)=\Gamma(p_n)$. $\square$

Кривая и её длина

Определение 11.1. Непрерывное отображение $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, где $t\in[a,b]$, называется *кривой* в $\mathbb{R}^n$.

Кривая может быть устроена достаточно сложно. Например, квадрат (с внутренней областью) может являться кривой (так называемая *кривая Пеано*). Покажем это: построим непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, отображающие отрезок $[0;\,1]$ на единичный квадрат.

Сначала рассмотрим функции $x_1(t)=t$, $y_1(t)=0$. Далее будем на каждом шаге делить квадрат на равные квадраты, меньшие в 4 раза, чем на предыдущем шаге, и строить кривую, проходящую по хотя бы одной стороне каждого «маленького» квадрата. Причём на каждом шаге начало и конец кривой внутри каждого «маленького» квадрата должны оставаться неизменными. А также каждый участок отрезка $[0;\,1]$, являющийся прообразом участка кривой, который находится в некотором одном «маленьком» квадрате, на следующем шаге должен являться прообразом участка кривой, не выходящей за пределы того же самого квадрата. При этом кривая может иметь самопересечения вдоль некоторых отрезков.

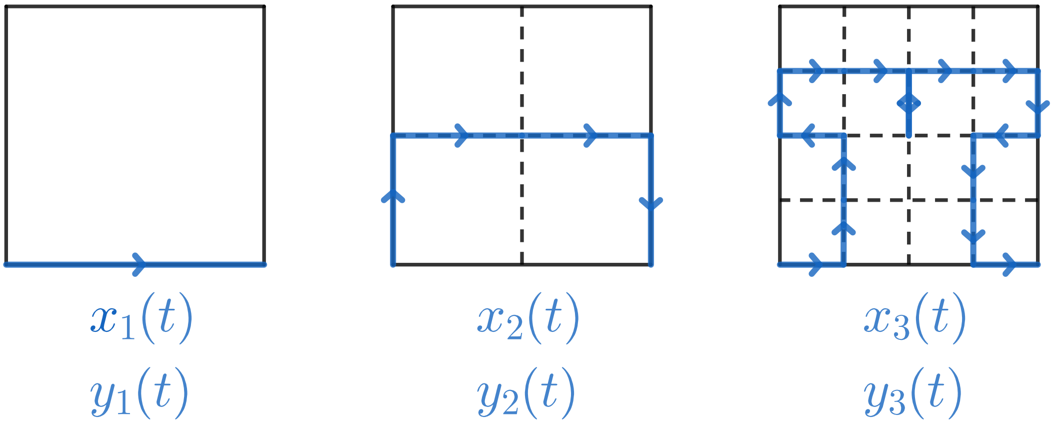

Рис. 11.1: Первые 3 шага построения кривой Пеано

Таким образом, мы построили последовательность равномерно сходящихся функций $x_n(t)$, $y_n(t)$, так как кривая оказывается зажата в последовательности уменьшающихся квадратов. Пусть $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$, $y_n(t) \rightrightarrows y(t)$.

Так как на каждом шаге функции $x_n(t)$ и $y_n(t)$ имели значения в отрезке $[0;\,1]$, то и предельные непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь значения в отрезке $[0;\,1]$, то есть их образ будет лежать внутри единичного квадрата.

Теперь рассмотрим некоторую произвольную точку (x_0, y_0), лежащую внутри единичного квадрата. Найдётся последовательность вложенных квадратов, стягивающихся к этой точке. На отрезке-прообразе $[0;\,1]$ этой последовательности квадратов будет соответствовать последовательность отрезков, стягивающихся к некоторому значению t_0. Тогда $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$. В силу произвольности выбора точки (x_0, y_0) получаем, что образом $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [0;\,1]$, является единичный квадрат (с внутренней областью).

Заметим, что построенная нами кривая Пеано имеет положительную площадь, но не является жордановой, так как имеет самопересечения.

Упражнение 11.1 (На дом)**.** Построить жорданову кривую положительной площади.

Построим теперь понятие длины кривой. Рассмотрим некоторое разбиение T точками отрезка $[a, b]$, являющегося прообразом кривой. Этой последовательности точек разбиения T на кривой будет также соответствовать некоторая последовательность точек. Соединим эти точки на кривой отрезками и получим ломанную $\Lambda(T)$, соответствующую разбиению T.

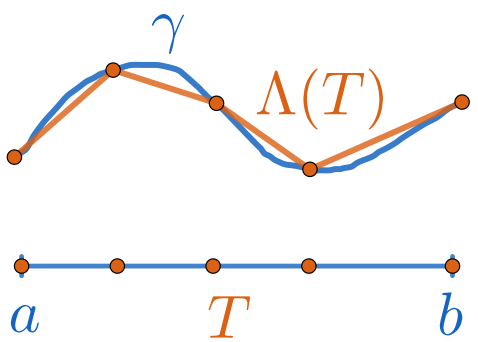

Рис. 11.2: Ломанная $\Lambda(T)$ на кривой γ,
соответствующая разбиению T отрезка $[a, b]$

Определение 11.2. $|\gamma| = \sup\limits_{T} |\Lambda(T)|$ – *длина кривой* γ.

Определение 11.3. Если $|\gamma| < +\infty$, то γ называется *спрямляемой кривой.*

Утверждение 11.1. *Если кривая является спрямляемой в некоторой параметризации, то она будет спрямляемой в любой параметризации.*

Пусть $a = t_0,\, t_1,\, \ldots,\, t_{n-1},\, t_n = b$ – точки некоторого разбиения T отрезка $[a, b]$.

Определение 11.4. Если $\sup\limits_{T} |x(t_1) - x(t_0)| + \ldots + |x(t_n) - x(t_{n-1})| < +\infty$, то $x(t)$ называется *функцией с ограниченной вариацией* (или *с ограниченным изменением*).

Утверждение 11.2. *Кривая $x(t)$, $y(t)$ является спрямляемой тогда и только тогда, когда функции $x(t)$, $y(t)$ имеют ограниченную вариацию.*

Криволинейный интеграл 1-го рода

Пусть задана некоторая спрямляемая кривая γ (на которой возможны самопересечения): $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [a, b]$. И пусть на γ задана функция $f(x, y)$. Рассмотрим некоторое разбиение T отрезка $[a, b]$ и выберем на каждом участке этого разбиения отмеченные точки ξ_j, получим отмеченное разбиение. Тогда на кривой γ помимо ломанной, соответствующей разбиению T, получим также образы $(x(\xi_j), y(\xi_j))$ отмеченных точек, которые будут лежать на дугах кривой, стягиваемых соответствующими отрезками ломанной (длины этих отрезков ломанной назовём Δ_j).

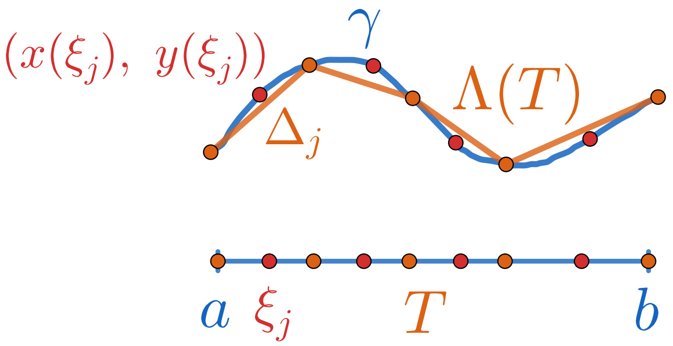

Рис. 11.3: Ломанная $\Lambda(T)$ и точки $(x(\xi_j), y(\xi_j))$ на кривой γ, соответствующие отмеченному разбиению T отрезка $[a, b]$

Построим интегральную сумму следующим образом:

$$\sigma = \sum_j f\left(x(\xi_j),\, y(\xi_j)\right) \cdot \Delta_j.$$

Определение 11.5. Если $\exists \lim\limits_{\Lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то I называется *криволинейным интегралом 1-го рода.*

Обозначение: $I = \displaystyle\int\limits_\gamma f(x, y)\, ds.$

Утверждение 11.3. *Если $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то криволинейный интеграл 1-го рода может быть вычислен по следующей формуле:*

$$I = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,$$

причём значение I не зависит от параметризации.

Задача 4222. Вычислить следующий криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int\limits_C y^2\, ds,$$

где C – арка циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Решение:

$$\int\limits_C y^2\, ds = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. □

Семинар 12

Решение задач на криволинейные интегралы 1-го рода

Задача 4225. Вычислить следующий криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,$$

где C – дуга астроиды:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Решение:

Будем понимать возведение в дробную степень как возведение в степень числителя и извлечения корня степени знаменателя, то есть, например, $x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$.

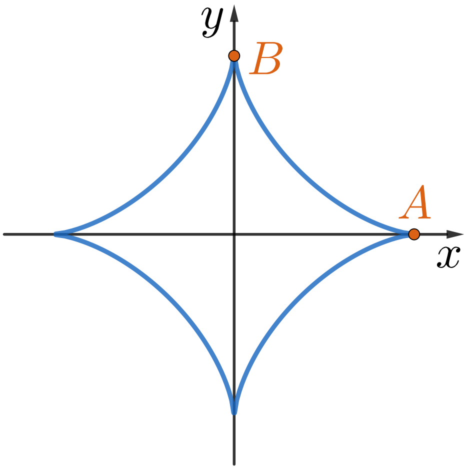

Рис. 12.1: Астроида

Заметим, что интегралы по каждой из четырёх ветвей астроиды равны, тогда

$$\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds = 4 \int\limits_{AB} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,$$

где AB – ветвь астроиды из 1-й четверти. Её можно параметризовать следующим образом:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{\frac{4}{3}} \cos^4 t + a^{\frac{4}{3}} \sin^4 t\right) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ominus$$

$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t; \qquad y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t;$

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$

$$\ominus\; 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t + a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t\right)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 12a^{\frac{7}{3}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\sin t\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^5 t\,dt\right) = 12a^{\frac{7}{3}}B(3;\,1) = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

$\square$

Задача 4238. Вычислить следующий криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int\limits_C x^2\,ds,$$

где C – окружность:

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x+y+z=0.$$

Решение:

Заметим, что в силу симметрии

$$\int\limits_C x^2\,ds = \int\limits_C y^2\,ds = \int\limits_C z^2\,ds,$$

тогда

$$\int\limits_C x^2\,ds = \frac{1}{3}\int\limits_C \left(x^2+y^2+z^2\right)ds = \frac{1}{3}\int\limits_C a^2\,ds = \frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

$\square$

Задача 4240 (исправлена опечатка)**.** Вычислить следующий криволинейный интеграл 1-го рода:

$$\int\limits_C z\,ds,$$

где C – дуга кривой

$$x^2+y^2=z^2, \qquad y^2=ax$$

от точки $O(0;\,0;\,0)$ до точки $A(a;\,a;\,a\sqrt{2})$.

Решение:

Для дуги C получаем следующую параметризацию:

$$x=x, \qquad y=\sqrt{ax}, \qquad z=\sqrt{x^2+ax} \qquad (0\leqslant x\leqslant a).$$

$$\int\limits_C z\,ds = \int\limits_0^a \sqrt{x^2+ax}\cdot\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dx \circleddash$$

$$x' = 1, \qquad y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}, \qquad z' = \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}}$$

$$\circleddash \int\limits_0^a \sqrt{x^2+ax}\cdot\sqrt{\frac{(2x+a)^2}{4x(x+a)}+\frac{a}{4x}+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^a \sqrt{x^2+ax}\cdot\sqrt{\frac{8x^2+9ax+2a^2}{4(x^2+ax)}}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^a \sqrt{\left(x+\frac{9}{16}a\right)^2-\frac{17}{16^2}a^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{x+\frac{9}{16}a}{2}\sqrt{\left(x+\frac{9}{16}a\right)^2-\frac{17}{16^2}a^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{17}{16^2\cdot 2}a^2\ln\left(x+\frac{9}{16}a+\sqrt{\left(x+\frac{9}{16}a\right)^2-\frac{17}{16^2}a^2}\right)\right)\right|_0^a.$$

$\square$

Криволинейный интеграл 2-го рода

Пусть задана некоторая спрямляемая кривая γ (на которой возможны самопересечения): $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [a,b]$. И пусть на γ задано векторное поле $\{P(x,y),\ Q(x,y)\}$. Рассмотрим некоторое разбиение T отрезка $[a,b]$ и выберем на каждом участке этого разбиения отмеченные точки ξ_j, получим отмеченное разбиение. Тогда на кривой γ помимо ломанной, соответствующей разбиению T, получим также образы $(x(\xi_j),\ y(\xi_j))$ отмеченных точек, которые будут лежать на дугах кривой, стягиваемых соответствующими отрезками ломанной (длины этих отрезков ломанной назовём Δ_j). Будем рассматривать векторы $\vec{\Delta}_j$, начало и конец которых совпадают с началом и концом отрезков Δ_j соответственно.

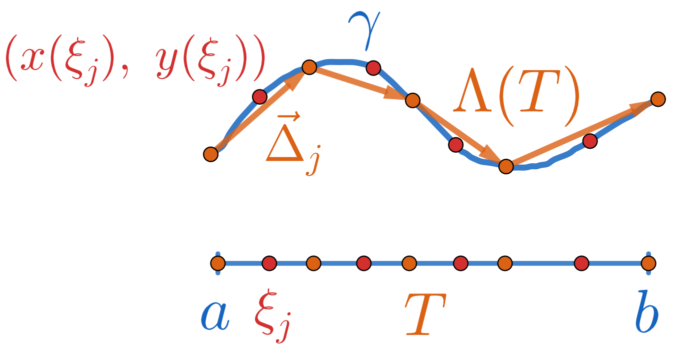

Рис. 12.2: Ломанная $\Lambda(T)$ и точки $(x(\xi_j),\, y(\xi_j))$ на кривой γ, соответствующие отмеченному разбиению T отрезка $[a, b]$

Построим интегральную сумму следующим образом:

$$\sigma = \sum_j \{P(x(\xi_j),\, y(\xi_j)),\, Q(x(\xi_j),\, y(\xi_j))\} \cdot \vec{\Delta}_j.$$

Определение 12.1. Если $\exists \lim\limits_{\Lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то I называется *криволинейным интегралом 2-го рода.*

Обозначение: $I = \int\limits_{\gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$

Утверждение 12.1. *Если $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то криволинейный интеграл 2-го рода может быть вычислен по следующей формуле:*

$$I = \int\limits_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t))\, dt,$$

причём модуль значения I не зависит от параметризации, а знак I зависит от направления прохождения кривой γ.

Задача 4248. Вычислить следующий криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int\limits_{OA} x\, dy - y\, dx,$$

где O – начало координат и точка A имеет координаты (1; 2), если:
а) OA – отрезок прямой линии;
б) OA – парабола, ось которой есть Oy;
в) OA – ломанная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA, параллельного оси Oy.

Решение:

а) Используем параметризацию $\begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases}$, где $x \in [0;\, 1]$.

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = \int\limits_0^1 (x \cdot 2 - 2x \cdot 1)\,dx = 0.$$

б) Используем параметризацию $\begin{cases} x = x \\ y = 2x^2 \end{cases}$, где $x \in [0;\,1]$.

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = \int\limits_0^1 (x \cdot 4x - 2x^2 \cdot 1)\,dx = \int\limits_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

в) Используем для отрезка OB параметризацию $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$, где $x \in [0;\,1]$, а для отрезка BA – параметризацию $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}$, где $y \in [0;\,2]$.

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx = \int\limits_{OB} x\,dy - y\,dx + \int\limits_{BA} x\,dy - y\,dx = \int\limits_0^1 0\,dx + \int\limits_0^2 (1 \cdot 1 - y \cdot 0)\,dy = 2.$$

$\square$

Замечание 12.1. Если $\{P, Q\}$ – вектор силы вдоль кривой γ, то криволинейный интеграл 2-го рода равен работе, совершаемой этой силой при перемещении вдоль кривой γ. Это физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.

Полный дифференциал. Потенциальное поле

Определение 12.2. Если $du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, то есть если $u'_x = P$ и $u'_y = Q$, то $u(x,y)$ называется *потенциалом* поля $\{P(x,y),\, Q(x,y)\}$, а поле $\{P(x,y),\, Q(x,y)\}$ называется *потенциальным.*

В этом случае имеем:

$$\int\limits_a^b (P(x(t),\, y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),\, y(t)) \cdot y'(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_a^b \frac{du}{dt}\,dt = \int\limits_{(x(a),\,y(a))}^{(x(b),\,y(b))} du = u(x(b),\, y(b)) - u(x(a),\, y(a)),$$

то есть криволинейный интеграл 2-го рода зависит только от начальной и конечной точек траектории, но не зависит от пути интегрирования.

Утверждение 12.2. *Если $P'_y = Q'_x$, то поле $\{P, Q\}$ потенциально.*

Задача 4258. Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующий криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy + y\,dx.$$

Решение:

$$\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy + y\,dx = \int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} = 6 - (-2) = 8.$$

□

Замечание 12.2. Если $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом, то сначала из условия $u'_x = P(x, y)$ получаем:

$$\int P(x, y)\,dx = F(x, y) + C(y) = u(x, y),$$

а затем из условия $u'_y = Q(x, y)$ получаем:

$$F'_y(x, y) + C'(y) = Q(x, y).$$

Таким образом можно найти потенциал $u(x, y)$, если его не получается угадать.

Задача 4263. Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующий криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int\limits_{(2;\,1)}^{(1;\,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$$

вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

Решение:

$$\int \frac{y}{x^2}\,dx = -\frac{y}{x} + C(y) = u(x, y);$$
$$-\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x}; \qquad C'(y) = 0; \qquad C(y) = \mathrm{const}\,.$$

Выберем $C = 0$, тогда $u(x, y) = -\dfrac{y}{x}$.

$$\int\limits_{(2;\,1)}^{(1;\,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = -\frac{y}{x}\Big|_{(2;\,1)}^{(1;\,2)} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$\square$

Приведём пример, иллюстрирующий разрыв потенциального поля. Рассмотрим функцию $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. Тогда:

$$u'_x = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2};\qquad u'_y = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2};\qquad du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Посчитаем криволинейный интеграл 2-го рода $\displaystyle\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, где C – единичная окружность: $x^2+y^2=1$, проходимая против часовой стрелки, начиная с точки $(1;\,0)$.

Используем следующую параметризацию:

$$x=\cos t,\qquad y=\sin t\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

$$\int\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Интеграл получился ненулевым, так как функция $u(x,y)$ имеет разрыв вдоль оси Oy.

Семинар 13

Разбор контрольной

Задача 1 (из контрольной)**.** Переставить в обратном порядке пределы интегрирования в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{2-\sqrt{x^2+y^2}}^{2-\frac{x^2+y^2}{2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования.

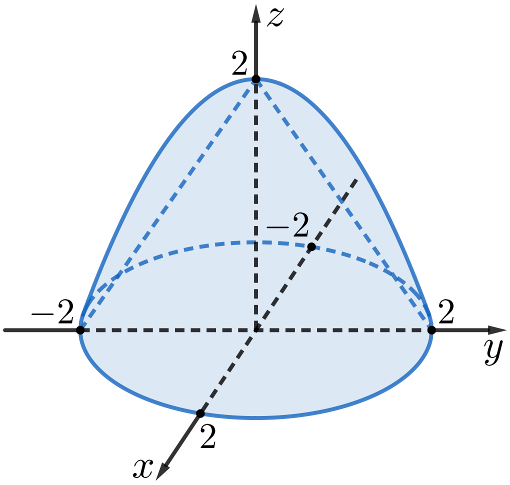

Рис. 13.1: Область интегрирования
(между конусом и парабалоидом)

Уравнения конуса и параболоида будут иметь следующий вид: $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ и $z = 2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ соответственно, где $z\in[0;\,2]$.

При каждом фиксированном значении $z\in[0;\,2]$ имеем: $y\in\left[-\sqrt{4-2z};\ \sqrt{4-2z}\right]$, причём:

· при каждом фиксированном значении $y\in\left[-\sqrt{4-2z};\ z-2\right]\cup\left[2-z;\ \sqrt{4-2z}\right]$ имеем: $x\in\left[-\sqrt{4-2z-y^2};\ \sqrt{4-2z-y^2}\right]$;

· при каждом фиксированном значении $y\in[z-2;\ 2-z]$ имеем: $x\in\left[-\sqrt{4-2z-y^2};\ -\sqrt{(2-z)^2-y^2}\right]\cup\left[\sqrt{(2-z)^2-y^2};\ \sqrt{4-2z-y^2}\right]$.

Значит, получаем:

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{2-\sqrt{x^2+y^2}}^{2-\frac{x^2+y^2}{2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-\sqrt{4-2z}}^{z-2}\int\limits_{-\sqrt{4-2z-y^2}}^{\sqrt{4-2z-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy + \int\limits_{2-z}^{\sqrt{4-2z}}\int\limits_{-\sqrt{4-2z-y^2}}^{\sqrt{4-2z-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz +$$

$$+ \int\limits_0^2\int\limits_{z-2}^{2-z} \left(\int\limits_{-\sqrt{4-2z-y^2}}^{-\sqrt{(2-z)^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx + \int\limits_{\sqrt{(2-z)^2-y^2}}^{\sqrt{4-2z-y^2}} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

$\square$

Задача 5 (из контрольной)**.** Определить момент инерции относительно оси Oz однородного тела с плотностью $\rho \equiv 1$, заданного следующими неравенствами:

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2, \qquad 2\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2R \qquad (R > 0).$$

Решение:

Обозначим заданное тело Ω.

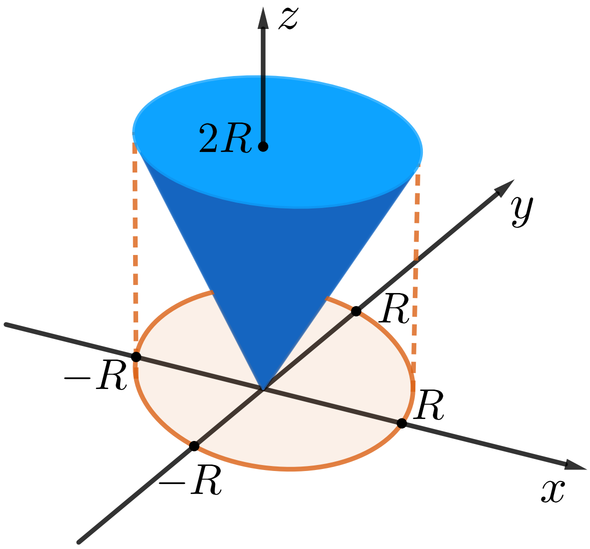

Рис. 13.2: Заданное тело (синее)

$$J_{Oz} = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Используем цилиндрическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$, где $r \in [0;\ R]$ $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, $h \in [2r;\ 2R]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r;$$

$$J_{Oz} = 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_{2r}^{2R} r^2 \cdot r\,dh\,dr = 4\pi \int\limits_0^R (R-r)r^3\,dr = 4\pi\left(\frac{R^5}{4} - \frac{R^5}{5}\right) = \frac{\pi R^5}{5}.$$

□

Решение задач на криволинейные интегралы 2-го рода

Задача 4279. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода, взятый вдоль пространственной кривой (координатная система предполагается правой):

$$\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz,$$

где C – кривая:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Решение:

$$\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz = \int\limits_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2)\,dt =$$
$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{5} = \frac{1}{35}.$$

□

Задача 4282. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода, взятый вдоль пространственной кривой (координатная система предполагается правой):

$$\int\limits_C x^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz,$$

где C – часть кривой Вивиани:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax, \qquad (z \geqslant 0, \quad a > 0),$$

пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части $(x > a)$ оси Ox.

Решение:

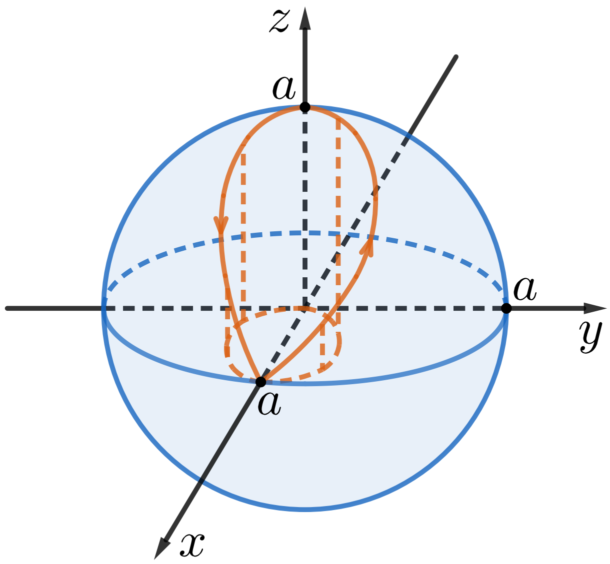

Рис. 13.3: Заданная кривая (сплошная оранжевая)

Используем следующую параметризацию:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi, \qquad y = \frac{a}{2}\sin\varphi,$$
$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 - ax} = a\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = a\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

$$\int\limits_C x^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4}\sin^2\varphi \cdot \frac{a}{2}(-\sin\varphi) + a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\varphi + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 \frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \ominus$$

Так как $\sin^3\varphi$ – 2π-периодическая и нечётная функция, то $\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi =$ $= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = 0.$

Так как $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$ и $\cos\frac{\varphi}{2} = -\cos\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)$, то $\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 \frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 \frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$ поэтому

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 \frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$\ominus\ \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$$
$$= -\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = -\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\pi a^3}{4}.$$

$\square$

Решение задач на полный дифференциал

Задача 4290. Найти первообразную функции u, если

$$du = (x^2 - 2yz)\, dx + (y^2 - 2xz)\, dy + (z^2 - 2xy)\, dz.$$

Решение:

$$u(x,y,z) = \int (x^2 - 2yz)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2xyz + f(y,z);$$
$$u'_y(x,y,z) = -2xz + f'_y(y,z) = y^2 - 2xz; \qquad f'_y(y,z) = y^2; \qquad f(y,z) = \frac{y^3}{3} + g(z);$$
$$u'_z(x,y,z) = -2xy + g'(z) = z^2 - 2xy; \qquad g'(z) = z^2; \qquad g(z) = \frac{z^3}{3} + \mathrm{const};$$
$$u(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz + \mathrm{const}.$$

$\square$

Задача 4293. Найти работу, производимую силой тяжести, когда точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) (ось Oz направлена вертикально вверх).

Решение:

$\vec{F} = \{0, 0, -mg\}$ – вектор силы тяжести, действующий на точку массы m вблизи поверхности земли.

$$A = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} (-mg)\, dz = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} d(-mgz) = -mgz\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} = mg(z_1 - z_2).$$

$\square$

Семинар 14

Формула Грина

Утверждение 14.1. *Если на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, то*

$$\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Утверждение 14.2. *Если $f \in C[a, b]$, $g, g' \in C[\alpha, \beta]$ и $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, причём $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

– формула замены переменной.

Утверждение 14.3. *Рассмотрим спрямляемую жорданову (простую) замкнутую кривую C и область Ω, ограниченную этой кривой. Пусть на $\overline{\Omega} = \Omega \cup C$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Если $P, Q, P'_x, Q'_x, P'_y, Q'_y \in C(\overline{\Omega})$, то*

$$\oint\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{\overline{\Omega}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

– формула Грина.

Замечание 14.1. $\oint\limits_C$ – интеграл по замкнутому контуру C (по умолчанию обход контура совершается против часовой стрелки, то есть так, что ограниченная им область остаётся слева).

Таким образом, формула Грина в некотором смысле является обобщением формулы Ньютона-Лейбница, так как связывает дифференциальные формы на границе области и внутри области.

Задача 4298. Применяя формулу Грина, вычислить следующий криволинейный интеграл:

$$\oint\limits_C xy^2\,dy - x^2y\,dx,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение:

$$\oint\limits_C xy^2\,dy - x^2y\,dx = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (y^2 - (-x^2))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a r^3\,dr\,d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

$\square$

Задача 4307. Вычислить следующий криволинейный интеграл:

$$I = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

где C – простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Рассмотреть два случая:

1) начало координат находится вне контура C;

2) контур C окружает начало координат.

Решение:

Пусть Ω – область, ограниченная контуром C.

Рассмотрим случай (1).

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad Q'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad P'_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$I = \iint\limits_{\overline{\Omega}} 0\,dx\,dy = 0.$$

Рассмотрим случай (2).

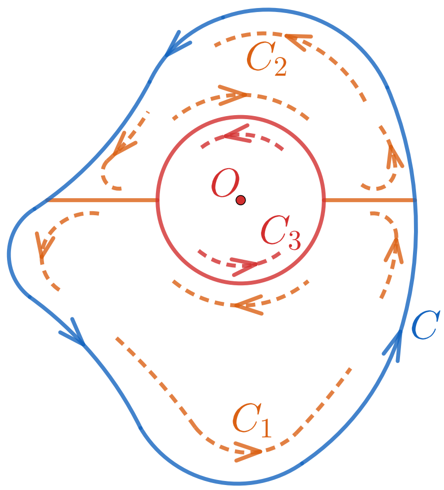

Рис. 14.1: Контуры для разбиения интеграла

Как видно из рисунка выше,

$$I = \oint\limits_{C_1} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + \oint\limits_{C_2} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + \oint\limits_{C_3} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

где C_3 – некоторая достаточно малая окружность (чтобы находиться целиком внутри контура C) с центром в начале координат.

В силу случая (1) $\oint\limits_{C_1} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \oint\limits_{C_2} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$, тогда имеем:

$$I = \oint\limits_{C_3} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Так как интеграл по достаточно большому замкнутому контуру (чтобы внутри него могла находиться единичная окружность с центром в начале координат) будет равен интегралу по этой окружности, а также по окружности C_3, то интеграл по единичной окружности с центром в начале координат равен интегралу по окружности C_3. Тогда получаем:

$$I = \oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \oint\limits_{x^2+y^2=1} x\,dy - y\,dx = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (1-(-1))\,dx\,dy = 2\pi.$$

□

Упражнение 14.1 (На дом)**.** Пусть C – замкнутая гладкая кривая, проходящая через начало координат. Пусть ε – достаточно малый радиус окружности с центром в начале координат (чтобы эта окружность пересекала контур C только в двух точках). Вычислить следующий криволинейный интеграл:

$$I = \oint\limits_{C_\varepsilon} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

где C_ε – часть кривой C, лежащая снаружи круга радиуса ε.

Вычисление площади с помощью формулы Грина

Так как $\oint\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\overline{\Omega}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$, то если подобрать такие P и Q, что $Q'_x - P'_y = 1$, то $\oint\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\overline{\Omega}} dx\,dy = S(\overline{\Omega})$ – площадь $\overline{\Omega}$. Например, можно взять $P = 0$ и $Q = x$, или $P = -y$ и $Q = 0$, или $P = -\frac{y}{2}$ и $Q = \frac{x}{2}$. В этих случаях получаем:

$$S(\overline{\Omega}) = \oint\limits_{\partial\Omega} x\,dy = -\oint\limits_{\partial\Omega} y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx.$$

Задача 4309. С помощью криволинейных интегралов вычислить площадь, ограниченную астроидой:

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = b\sin^3 t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Решение:

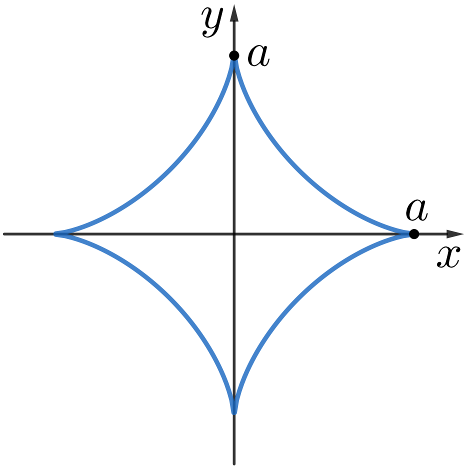

Рис. 14.2: Астроида

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 6a^2\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right) = 3a^2\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

$\square$

Интегрирование косинуса угла между заданным произвольным направлением и нормалью к замкнутому контуру

Задача 4323. Показать, что если C – замкнутый контур и $\vec{l}$ – произвольное направление, то

$$\oint\limits_C \cos\angle(\vec{l},\vec{n})\,ds = 0,$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к контуру C.

Решение:

Сначала установим связь между криволинейными интегралами 1-го рода и 2-го рода. Пусть $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [a,b]$, – некоторая параметризация кривой C, тогда:

$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt;$$

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (Px'(t)+Qy'(t))\,dt.$$

Заметим, что если

$$f(x(t),y(t)) \equiv \frac{Px'(t)+Qy'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} \equiv \{P,Q\}\cdot\vec{\tau}$$

при $t \in [a,b]$, где $\tau = \left\{\dfrac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}, \dfrac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}\right\}$ – единичный касательный вектор кривой C, то

$$\int\limits_C f(x,y)\,ds = \int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Без ограничения общности будем считать, что векторы $\vec{l}$ и $\vec{n}$ единичные (так как угол между ними не зависит от их длины, если они оба ненулевые). Заметим, что $\cos\angle(\vec{l},\vec{n}) = \vec{l}\cdot\vec{n} = \vec{l'}\cdot\vec{\tau}$, где $\vec{l'}$ – вектор, получаемый поворотом вектора $\vec{l}$ на $90°$ против часовой стрелки. Пусть $\vec{l'} = \{P_0, Q_0\}$, тогда P_0 и Q_0 – постоянные величины. Тогда получаем:

$$\oint\limits_C \cos\angle(\vec{l},\vec{n})\,ds = \oint\limits_C \{P_0,Q_0\}\cdot\vec{\tau} = \oint\limits_C P_0\,dx + Q_0\,dy = \oint\limits_C d(P_0x+Q_0y) = 0.$$

$\square$

Замечание 14.2. Физический смысл равенства $\oint\limits_C P_0\,dx + Q_0\,dy = 0$ в том, что если сила вдоль замкнутого контура постоянна, то её работа по этому контуру равна 0.

Гармонические функции

Определение 14.1. Пусть $u(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если в некоторой области Ω выполняется равенство

$$\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0,$$

то функция $u(x, y)$ называется *гармонической в области* Ω.

Утверждение 14.4. *Гармоническая в Ω функция является бесконечно дифференцируемой в Ω.*

Замечание 14.3. На прямой аналогом гармонических функций являются такие функции $u(x)$, для которых выполняется равенство $u''(x) \equiv 0$, то есть линейные функции. На плоскости гармонические функции представляют собой гораздо более широкий класс функций.

Задача 4331. Доказать, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0,$$

где C – произвольный гладкий замкнутый контур и $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ – производная по внешней нормали к этому контуру.

Решение:

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = \oint\limits_C \{u'_x, u'_y\} \cdot \vec{n}\,ds.$$

Если вектор $\{u'_x, u'_y\}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, то получится вектор $\{-u'_y,\, u'_x\}$. Тогда $\{u'_x, u'_y\} \cdot \vec{n} = \{-u'_y,\, u'_x\} \cdot \vec{\tau}$. Тогда получаем:

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = \oint\limits_C \{-u'_y, u'_x\} \cdot \vec{\tau}\,ds = \oint\limits_C -u'_y\,dx + u'_x\,dy =$$
$$= \iint\limits_\Omega (u''_{xx} + u''_{yy})\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega \Delta u\,dx\,dy.$$

Таким образом, имеем:

1) если функция u гармоническая, то $\Delta u \equiv 0$, поэтому $\oint\limits_C \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = 0$ для произвольного гладкого замкнутого контура C;

2) если $\oint\limits_C \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = 0$ для произвольного гладкого замкнутого контура C, то $\iint\limits_\Omega \Delta u\, dx\, dy = 0$ для произвольной области Ω, ограниченной гладким замкнутым контуром. Предположим, что $\Delta u = \varepsilon > 0$ в некоторой точке (x_0, y_0) (случай < 0 разбирается аналогично). В силу непрерывности функции u получаем: $\exists \delta > 0\colon\ \Delta u \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant \delta^2$, тогда $\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2} \Delta u\, dx\, dy > 0$ – противоречие. Значит, u – гармоническая функция. $\square$

Семинар 15

Разбор домашнего задания

Задача 4332. Доказать, что

$$\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy = -\iint\limits_S u\Delta u\,dx\,dy + \oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S.

Решение:

$$\oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = \oint\limits_C u\nabla u\cdot\vec{n}\,ds = \oint\limits_C u\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\}\cdot\vec{n}\,ds = \oint\limits_C \left\{-u\frac{\partial u}{\partial y}, u\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\cdot\vec{\tau}\,ds =$$

$$= \oint\limits_C -uu'_y\,dx + uu'_x\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial(uu'_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-uu'_y)}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_S \left((u'_x)^2 + uu''_{xx} + (u'_y)^2 + uu''_{yy}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy + \iint\limits_S u\Delta u\,dx\,dy.$$

□

Задача 4333. Доказать, что функция, гармоническая внутри конечной области S и на её границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C.

Решение:

Предположим, что существуют две различные гармонические функции u_1 и u_2, принимающие одинаковые значения на контуре C. Рассмотрим функцию $u = u_1 - u_2$. Эта функция является гармонической и на контуре C тождественно равна 0. Тогда имеем:

$$\iint\limits_S u\Delta u\,dx\,dy = 0, \qquad \oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0.$$

Значит, в силу равенства (4332), доказанного в задаче (4332) имеем:

$$\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy = 0,$$

из чего в силу неотрицательности и непрерывности подынтегрального выражения получаем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{S}.$$

Значит, $\operatorname{grad} u \equiv 0$ в S, поэтому функция u постоянна в $\overline{S}$. Тогда в силу того, что $u \equiv 0$ на C, получаем, что $u \equiv 0$ в $\overline{S}$, то есть $u_1 \equiv u_2$ в $\overline{S}$. Таким образом, наше предположение неверно. □

Задача 4325. Найти

$$\lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds,$$

где S – площадь, ограниченная контуром C, окружающим точку (x_0, y_0), $d(S)$ – диаметр области S, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали контура C, $\vec{F} = \{X, Y\}$ – вектор, непрерывно дифференцируемый в $S \cup C$.

Решение:

$$\oint\limits_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint\limits_C X\,dy - Y\,dx = \iint\limits_S (Y'_y + X'_x)\,dx\,dy.$$

Пусть $\alpha(x,y) = X'_x + Y'_y$. Заметим, что $\alpha(x,y)$ – непрерывная функция. Покажем, что $\lim\limits_{d(S)\to 0} \dfrac{1}{S} \iint\limits_S \alpha(x,y)\,dx\,dy = \alpha(x_0, y_0)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0\colon \ \forall x, y \in O_\delta(x_0, y_0) \cap S \quad |\alpha(x,y) - \alpha(x_0,y_0)| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{1}{S}\iint\limits_S \alpha(x,y)\,dx\,dy - \alpha(x_0,y_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{S}\iint\limits_S (\alpha(x,y) - \alpha(x_0,y_0))\,dx\,dy + \frac{1}{S}\iint\limits_S \alpha(x_0,y_0)\,dx\,dy - \alpha(x_0,y_0)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{S}\iint\limits_S (\alpha(x,y) - \alpha(x_0,y_0))\,dx\,dy\right| \leqslant \frac{1}{S}\iint\limits_S |\alpha(x,y) - \alpha(x_0,y_0)|\,dx\,dy <$$

$$< \frac{1}{S}\iint\limits_S \varepsilon\,dx\,dy = \varepsilon.$$

□

Решение задач на гармонические функции

Задача 4336. Доказать *теорему о среднем* для гармонической функции:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint\limits_C u(x,y)\,ds.$$

где C – окружность радиуса R с центром в точке (x_0, y_0).

Решение:

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = y_0 = 0$. Тогда надо доказать, что

$$u(0;\,0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} u(x,y)\,ds.$$

Используя параметризацию окружности $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, где $\varphi \in [0;\,2\pi]$, и учитывая, что $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = R$, получим:

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi} u(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi) R\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi)\,d\varphi = I(R);$$

$$I'(R) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi} (u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi) R\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0$$

(последнее равенство в силу задачи (4331)). Значит, $I(R) \equiv \text{const}$. При $R \to +0$ имеем: $u(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi) \rightrightarrows u(0;\,0)$, тогда $I(R) \to \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} u(0;\,0)\,d\varphi = u(0;\,0)$. Таким образом, $I(R) \equiv u(0;\,0)$. □

Упражнение 15.1 (На дом)**.** Доказать *теорему о среднем по кругу* для гармонической функции:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_S u(x,y)\,dx\,dy.$$

где S – круг радиуса R с центром в точке (x_0, y_0).

Упражнение 15.2 (На дом)**.** Пусть $u(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\Delta u = f(x,y)$ – непрерывная функция. Вывести формулу для значения функции $u(x_0, y_0)$ в некоторой точке.

Задача 4339. Пусть $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ – компоненты скорости установившегося потока жидкости. Определить скорость изменения количества жидкости в ограниченной контуром C области S. Какому уравнению удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и в области S отсутствуют источники и стоки?

Решение:

Рассмотрим достаточно малый участок Δs_j контура C, чтобы его можно было приближённо считать прямолинейным отрезком и скорость вдоль него была приближённо постоянным вектором $\{u_0, v_0\}$. Тогда за единицу времени через участок

Δs_j вытечет количество жидкости $\{u_j, v_j\} \cdot \vec{n} \cdot \Delta s_j$. Тогда за единицу времени через всю границу вытечет количество жидкости $\sum\limits_j \{u_j, v_j\} \cdot \vec{n} \cdot \Delta s_j$. Это интегральная сумма для следующего интеграла:

$$\oint\limits_C \{u, v\} \cdot \vec{n}\, ds = \iint\limits_S (u'_x + v'_y)\, dx\, dy$$

(равенство в силу задачи (4325)).

Теперь рассмотрим случай, когда жидкость несжимаема и в области S отсутствуют источники и стоки. Тогда скорость изменения количества жидкости равна 0, значит, $\iint\limits_S (u'_x + v'_y)\, dx\, dy = 0$, то есть $u'_x + v'_y \equiv 0$ в S. □

Задача из олимпиады: несимметричность ζ-функции относительно прямой $y = x$

Задача. Является ли дзета-функция $\zeta(x) = \dfrac{1}{1^x} + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} + \ldots$ при $x > 1$ симметричной относительно прямой $y = x$?

Решение:

Заметим, что при $\lim\limits_{x \to 1+0} \zeta(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{+\infty} \zeta(x) = 1$, то есть график похож на симметричный относительно прямой $y = x$.

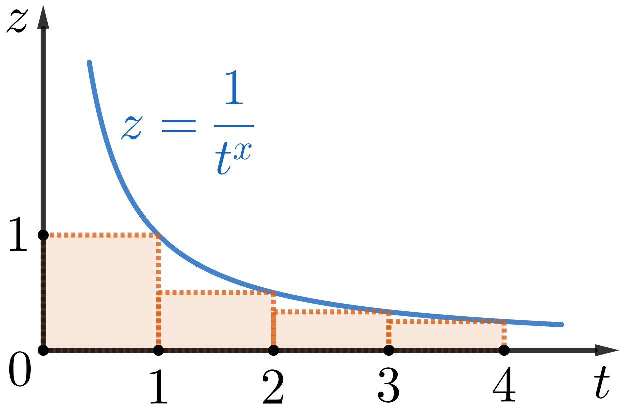

Рис. 15.1: Построения для оценки $\zeta(x)$ при $x > 1$ с помощью прямоугольников

Рассмотрим выражение $(y-1)(x-1)$, где $y = \zeta(x)$. Заметим, что:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} < \zeta(x) < 1 + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}; \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left. \frac{t^{1-x}}{1-x} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1};$$

$$\frac{1}{x-1} < y < 1 + \frac{1}{x-1}; \qquad \frac{1}{x-1} - 1 < y - 1 < \frac{1}{x-1};$$

$$1 - (x-1) < (y-1)(x-1) < 1; \qquad \lim_{x \to 1+0} (y-1)(x-1) = 1.$$

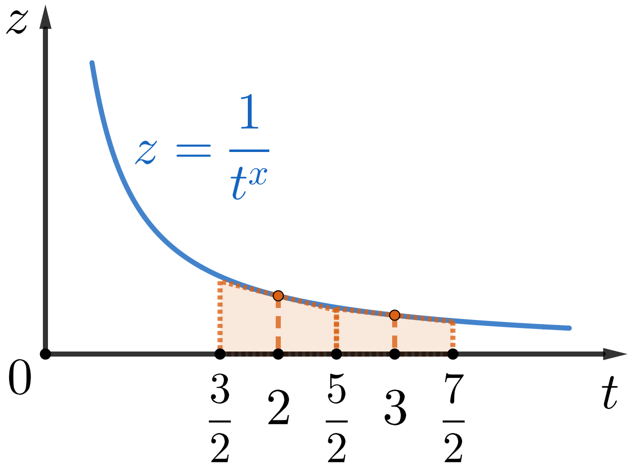

Рис. 15.2: Построения для оценки $\zeta(x) - 1$ при $x > 1$ с помощью трапеций

С другой стороны имеем:

$$y - 1 = \zeta(x) - 1 = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots < \int\limits_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left.\frac{t^{1-x}}{1-x}\right|_{\frac{3}{2}}^{+\infty} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}}{x-1};$$

$$0 < (y-1)(x-1) < \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}; \qquad \lim_{x\to+\infty}(y-1)(x-1) = 0.$$

Таким образом, $\zeta(x)$ при $x > 1$ несимметрична относительно прямой $y = x$, так как $\lim\limits_{x\to1+0}(y-1)(x-1) \neq \lim\limits_{x\to+\infty}(y-1)(x-1)$. □

Сапог Шварца

Пусть требуется найти площадь боковой поверхности цилиндра. Рассмотрим сечения цилиндра, проходящие на равном расстоянии друг от друга параллельно основаниям цилиндра (и два сечения будут совпадать с основаниями). Пусть между сечениями образовалось m цилиндрических «слоёв». В каждом сечении построим правильный n-угольник, вписанный в образовавшуюся окружность. Причём пусть вершины в каждом сечении (кроме самого верхнего) находятся ровно на середине дуги между соседними вершинами в соседнем сечении сверху. Соединим отрезками эти точки (а в самом нижнем сечении соединим отрезками все соседние вершины). Получим поверхность, называемую *сапогом Шварца*.

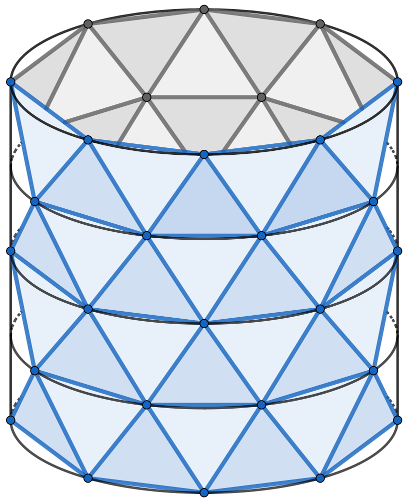

Рис. 15.3: Сапог Шварца

В каждом «слое» сапога Шварца находится $2n$ треугольников, тогда вся эта поверхность состоит из $2nm$ треугольников. Обозначим d основания треугольников, являющиеся хордами окружностей.

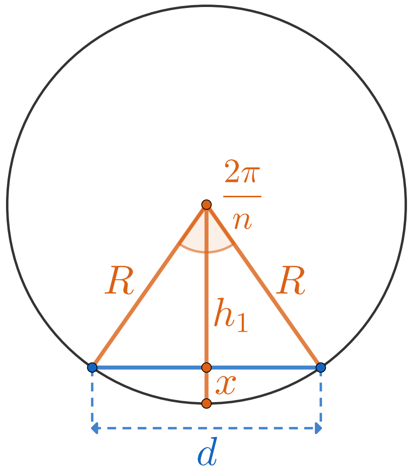

Рис. 15.4: Одно из сечений, используемых при построении сапога Шварца

Из рисунка получаем:

$$d = 2R\sin\frac{\pi}{n}; \qquad h_1 = R\cos\frac{\pi}{n}; \qquad x = R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Тогда для высоты h_2 треугольника из поверхности сапога Шварца по теореме Пифагора получаем:

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Значит, площадь всей поверхности сапога Шварца равна:

$$S = 2mn \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} =$$
$$= 2\pi R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \sqrt{h^2 + R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

При $m, n \to +\infty$ имеем: $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \to 1$, но $m\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ может стремиться к любому наперёд заданному неотрицательному числу (или к $+\infty$) в зависимости от относительного характера стремления m и n к $+\infty$. Таким образом, S может стремиться к любому наперёд заданному числу, не меньше $2\pi Rh$ (или к $+\infty$).

Так происходит из-за образующихся «складок» на сапоге Шварца. Эту проблему можно решить, если, например, запретить треугольникам на сапоге Шварца иметь угол больше $120°$ (тогда они не смогут вырождаться в «почти отрезки»).

Площадь поверхности

Рассмотрим некоторую поверхность, у которой в каждой точке существует касательная плоскость и эта касательная плоскость меняется непрерывно. Разделим поверхность на достаточно малые «ячейки». Выберем в каждой «ячейке» точку и проведём через неё касательную плоскость, а затем спроецируем «ячейку» на эту плоскость, получим плоскую фигуру, площадь которой можно вычислить. Тогда площадь поверхность можно приближённо считать как сумму площадей таких проекций от всех «ячеек».

Определение 15.1. Отображение $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, где функции непрерывно дифференцируемые и $u, v \in \Omega$, называется *гладкой поверхностью* в $\mathbb{R}^3$.

Утверждение 15.1. *Если* $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \equiv 2$ *на поверхности, то в каждой точке поверхности существует касательная плоскость.*

Обозначения: $\vec{r_u}' = \{x'_u, y'_u, z'_u\}$, $\vec{r_v}' = \{x'_v, y'_v, z'_v\}$.

Утверждение 15.2. *Площадь гладкой поверхности* Σ*, у которой в каждой точке существует касательная плоскость, равна:*

$$S(\Sigma) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где

$$E = \vec{r_u}' \cdot \vec{r_u}', \qquad G = \vec{r_v}' \cdot \vec{r_v}', \qquad F = \vec{r_u}' \cdot \vec{r_v}'.$$

Семинар 16

Определение поверхностного интеграла 1-го рода

Рассмотрим некоторую гладкую поверхность Σ, задаваемую отображением $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, где $u,v \in \Omega$, у которой в каждой точке существует касательная плоскость. Пусть на этой поверхности задана функция $f(x,y,z)$. Рассмотрим разбиение T области Ω на достаточно малые «ячейки», тогда на поверхности Σ возникнет её разбиение $\Lambda(T)$ на соответствующие малые «ячейки» Δ_j. Выберем в каждой «ячейке» Δ_j точку ξ_j и проведём через неё касательную плоскость, а затем спроецируем «ячейку» Δ_j на эту плоскость, получим плоскую фигуру, площадь $S(\Delta_j)$ которой можно вычислить. Тогда можно построить следующую интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_j f(\xi_j) S(\Delta_j).$$

Определение 16.1. Если $\exists \lim\limits_{\Lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то I называется *поверхностным интегралом 1-го рода.*

Обозначение: $I = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS.$

Утверждение 16.1. *Поверхностный интеграл 1-го рода может быть вычислен по следующей формуле:*

$$I = \iint\limits_{(u,v)\in\Omega} f(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

причём значение I не зависит от параметризации.

Здесь:

$$E = \vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_u{}', \qquad G = \vec{r}_v{}' \cdot \vec{r}_v{}', \qquad F = \vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_v{}',$$

а $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}$ *– корень из определителя матрицы Грама.*

Решение задач на поверхностные интегралы 1-го рода

Задача 4349. Вычислить следующий поверхностный интеграл 1-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2\,dS,$$

где Σ – часть поверхности конуса

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha, \qquad y = r\sin\varphi\sin\alpha, \qquad z = r\cos\alpha,$$

где $r \in [0;\, a]$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, α – постоянная, причём $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение:

$$\vec{r}_r{}' = \{\cos\varphi\sin\alpha,\ \sin\varphi\sin\alpha,\ \cos\alpha\};$$
$$\vec{r}_\varphi{}' = \{-r\sin\varphi\sin\alpha,\ r\cos\varphi\sin\alpha,\ 0\};$$
$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\alpha \end{vmatrix}} = r\sin\alpha;$$
$$\iint\limits_{\Sigma} z^2\,dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} r^2\cos^2\alpha\cdot r\sin\alpha\,dr\,d\varphi = 2\pi\cos^2\alpha\sin\alpha\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{2}a^4\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

□

Задача 4343. Вычислить следующий поверхностный интеграл 1-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dS,$$

где Σ – поверхность

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad z \geqslant 0.$$

Решение:

Будем считать, что $a>0$.

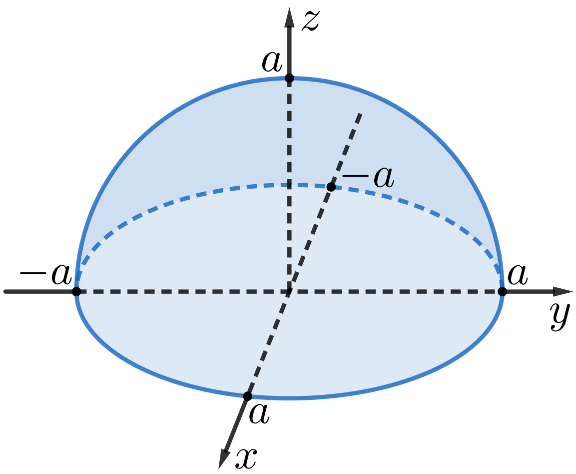

Рис. 16.1: Поверхность интегрирования

Используем следующую параметризацию:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \qquad y = a\sin\varphi\cos\psi, \qquad z = a\sin\psi,$$

где $\varphi\in[0;\,2\pi]$, $\psi\in\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

В силу симметрии $\iint\limits_{\Sigma} x\,dS = \iint\limits_{\Sigma} y\,dS = 0$, тогда $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} z\,dS.$

$$\vec{r}_\varphi{}' = \{-a\sin\varphi\cos\psi,\ a\cos\varphi\cos\psi,\ 0\};$$
$$\vec{r}_\psi{}' = \{-a\cos\varphi\sin\psi,\ -a\sin\varphi\sin\psi,\ a\cos\psi\};$$
$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2\cos^2\psi & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix}} = a^2\cos\psi;$$
$$\iint\limits_{\Sigma} (x+y+z)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} z\,dS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi} a\sin\psi\cdot a^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi =$$
$$= 2\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi\cos\psi\,d\psi = \pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\psi\,d\psi = \pi a^3\cdot\left(-\frac{\cos 2\psi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^3.$$

$\square$

Задача 4344. Вычислить следующий поверхностный интеграл 1-го рода:
$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,dS,$$
где Σ – граница тела
$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

Решение:

Назовём Σ_1 – боковую поверхность конуса, а Σ_2 – верхнюю (основание).

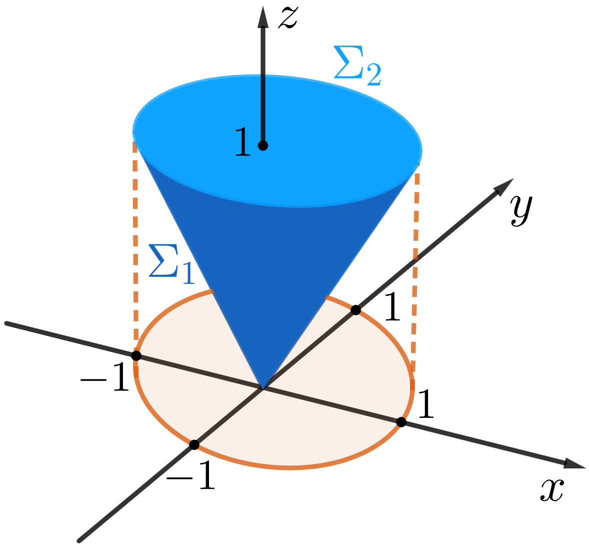

Рис. 16.2: Поверхность интегрирования (синяя)

Используем следующую параметризацию:
$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = z(x,y) \qquad (x^2+y^2 \leqslant 1).$$

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_x{}' = \{1,\, 0,\, z_x'\};\\
&\vec{r}_y{}' = \{0,\, 1,\, z_y'\};\\
&\sqrt{\begin{vmatrix} E & F\\ F & G\end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1+(z_x')^2 & z_x'z_y'\\ z_x'z_y' & 1+(z_y')^2\end{vmatrix}} = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}.
\end{aligned}$$

Для Σ_1 получим:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Для Σ_2 получим:

$$z = 1; \qquad z_x' = 0; \qquad z_y' = 0; \qquad \sqrt{EG-F^2} = 1$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, для исходного интеграла получаем:

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{\Sigma_1} (x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{\Sigma_2} (x^2+y^2)\,dS = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

$\square$

Задача 4351. Доказать *формулу Пуассона*:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

где Σ – поверхность сферы

$$x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Решение:

Заметим, что при $a=b=c=0$ формула верна, так как в обеих частях равенства получается $4\pi f(0)$. Далее будем рассматривать случай, когда a, b и c не равны 0 одновременно.

Рассмотрим ненулевой вектор $\{a, b, c\}$. Повернём систему координат относительно начала координат так, чтобы оси Ox, Oy и Oz перешли во взаимно ортогональные оси Ov, Ow, Ou соответственно, где $Ou \upuparrows \{a, b, c\}$. Тогда $u = \dfrac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Так как преобразование системы координат является поворотом, то сфера будет задаваться уравнением $v^2 + w^2 + u^2 = 1$. Запишем интеграл в новых координатах:

$$\iint\limits_{\Sigma} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) dS.$$

Параметризуем поверхность в новых координатах с помощью цилиндрической замены переменных (с радиусом $\sqrt{1 - u^2}$):

$$v = \sqrt{1 - u^2}\cos\varphi, \qquad w = \sqrt{1 - u^2}\sin\varphi, \qquad u = u,$$

где $u \in [-1;\ 1]$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

$$\vec{r_u}' = \left\{\frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}}\cos\varphi,\ \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}}\sin\varphi,\ 1\right\};$$
$$\vec{r_\varphi}' = \left\{-\sqrt{1 - u^2}\sin\varphi,\ \sqrt{1 - u^2}\cos\varphi,\ 0\right\};$$
$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1 - u^2} & 0 \\ 0 & 1 - u^2 \end{vmatrix}} = 1;$$
$$\iint\limits_{\Sigma} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du\, d\varphi =$$
$$= 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du.$$

$\square$

Замечание 16.1. Если взять $a = b = 0$ и $c = 1$, то получим формулу

$$\iint\limits_{\Sigma} f(z)\, dS = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f(z)\, dz$$

(для простоты в интеграле в правой части равенства переобозначили переменную).

Рассмотрим функцию $f(z) = \begin{cases} 1, & z \in [a, b] \\ 0, & z \notin [a, b] \end{cases}$, где $a, b \in [-1;\ 1]$. Для неё получим:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(z)\, dS = 2\pi\int\limits_a^b dz = 2\pi(b - a).$$

Таким образом, площадь «полоски» сферы зависит только от ширины этой «полоски», но не от её положения на сфере. Причём это специфика трёхмерного пространства.

Задача 4353 (изменённая)**.** Вычислить момент инерции однородной сферической оболочки

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

плотности ρ_0 относительно оси Oz.

Решение:

$$I_{Oz} = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\rho_0 \, dS.$$

Используем сферическую параметризацию:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \qquad y = a\sin\varphi\cos\psi, \qquad z = a\sin\psi,$$

где $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Как было показано в решении задачи (4343), $\sqrt{EG - F^2} = a^2\cos\psi$.

$$I_{Oz} = \rho_0 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\psi \cdot a^2\cos\psi \, d\psi \, d\varphi = 2\pi\rho_0 a^4 \cdot B\left(2;\ \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\pi\rho_0 a^4 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3}\pi\rho_0 a^4.$$

□

Семинар 17

Разбор домашнего задания

Задача 4337 (Принцип максимума)**.** Доказать, что функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной и замкнутой области и не являющаяся постоянной в этой области, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке этой области.

Решение:

Докажем, что если $\Delta u \equiv 0$ (где u дважды непрерывно дифференцируема) в $\overline{\Omega}$ и $(x_0, y_0) \in \Omega$ – точка (нестрогого) глобального экстремума функции u, то $u \equiv \text{const}$ в $\overline{\Omega}$.

По теореме о среднем для гармонической функции из задачи (4336):

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{\gamma_R} u(x, y)\, ds. \tag{17.1}$$

где γ_R – окружность радиуса R с центром в точке (x_0, y_0).

Для определённости без ограничения общности будем считать, что (x_0, y_0) – точка (нестрогого) глобального минимума, тогда $u(x_0, y_0) \leqslant u(x, y)$ для любых $(x, y) \in \Omega$. Выберем в формуле (17.1) значение R достаточно малым, чтобы для всех точек окружности γ_R выполнялось неравенство $u(x_0, y_0) \leqslant u(x, y)$. Тогда получим:

$$\frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{\gamma_R} u(x, y)\, ds \geqslant \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{\gamma_R} u(x_0, y_0)\, ds = u(x_0, y_0),$$

причём равенство возможно только при условии, что $u(x, y) \equiv u(x_0, y_0)$ на γ_R. Но это равенство верно в силу формулы (17.1). Значит, $u(x, y) \equiv u(x_0, y_0)$ на γ_R. В силу произвольности выбора достаточно малого значения R получаем, что $u(x, y) \equiv$ $\equiv u(x_0, y_0)$ в круге некоторого достаточно малого радиуса с центром в точке (x_0, y_0).

Таким образом, непустое подмножество, в котором $u(x, y) \equiv u(x_0, y_0)$ является в $\overline{\Omega}$ открытым (так как вместе с каждой точкой содержит её окрестность) и замкнутым (в силу непрерывности $u(x, y)$), а значит, это подмножество совпадает с $\overline{\Omega}$. □

Замечание 17.1. Более того, можно показать, что при тех же условиях в Ω не может достигаться даже локальный экстремум.

Задача 4340. Согласно закону Био-Савара электрический ток i, протекающий по элементу проводника $d\vec{s}$, создаёт в точке пространства $M(x, y, z)$ магнитное поле напряжённостью

$$d\vec{H} = ki\frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ – вектор, соединяющий элемент $d\vec{s}$ с точкой M, и k – коэффициент пропорциональности.

Найти проекции H_x, H_y, H_z напряжённости магнитного поля H в точке M для случая замкнутого проводника C.

Решение:

Пусть (ξ, η, ζ) – отмеченная точка на дуге проводника, соответствующей элементу $d\vec{s}$. Тогда получаем:

$$\vec{r} = \{x-\xi,\, y-\eta,\, z-\zeta\}, \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2};$$

$$\left(\frac{\vec{r}\times d\vec{s}}{r^3}\right)_x = \left(\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-\xi & y-\eta & z-\zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix}\right)_x = \frac{(y-\eta)\,d\zeta-(z-\zeta)\,d\eta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3};$$

$$H_x = ki\oint\limits_C \frac{(y-\eta)\,d\zeta-(z-\zeta)\,d\eta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}.$$

Аналогично можно получить:

$$H_y = ki\oint\limits_C \frac{(z-\zeta)\,d\xi-(x-\xi)\,d\zeta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3};$$

$$H_z = ki\oint\limits_C \frac{(x-\xi)\,d\eta-(y-\eta)\,d\xi}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}.$$

□

Решение задач на поверхностные интегралы 1-го рода

Задача 2505. Доказать *первую теорему Гульдена*: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей её оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром масс дуги C.

Решение:

Пусть $l(C)$ – длина дуги C, R – расстояние от центра масс дуги C до оси вращения. Введём систему координат так, чтобы ось вращения была расположена вдоль оси Oz.

Пусть при вращении дуги C получили поверхность Σ. Тогда $(x, y, z) \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда $\left(\sqrt{x^2+y^2},\, z\right) \in C$. Введём следующую параметризацию:

$$x = r(s)\cos\varphi, \qquad y = r(s)\sin\varphi, \qquad z = z(s),$$

где $r(s) = \sqrt{x^2+y^2},\ s \in [0;\, l(C)]$ – натуральный параметр на дуге $C,\ \varphi \in [0;\, 2\pi]$.

Найдём площадь $S(\Sigma)$ поверхности Σ. Учитывая, что $(r'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1$ – модуль вектора скорости в натуральной параметризации, получаем:

$$\vec{r}_s\,' = \{r'(s)\cos\varphi,\ r'(s)\sin\varphi,\ z'(s)\};$$
$$\vec{r}_\varphi\,' = \{-r(s)\sin\varphi,\ r(s)\cos\varphi,\ 0\};$$
$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2(s) \end{vmatrix}} = r(s);$$
$$S(\Sigma) = \iint\limits_{\Sigma} dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l(C)} r(s)\,ds\,d\varphi = 2\pi\int\limits_0^{l(C)} r(s)\,ds.$$

Учитывая, что $R = \dfrac{\int\limits_0^l r(s)\,ds}{\int\limits_0^l ds} = \dfrac{\int\limits_0^l r(s)\,ds}{l(C)}$, получаем:

$$S(\Sigma) = l(C)\cdot 2\pi R.$$

□

В качестве примера найдём площадь поверхности тора с помощью первой теоремы Гульдена.

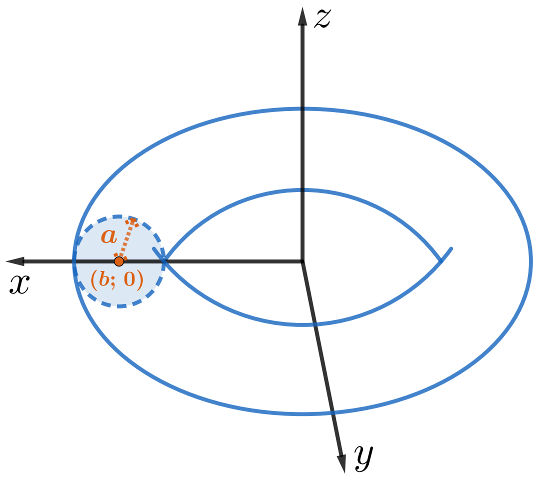

Рис. 17.1: Тор и его сечение

$l(C) = 2\pi a,\ R = b$, значит, $S(\Sigma) = 2\pi a\cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab$.

Определение поверхностного интеграла 2-го рода

Рассмотрим некоторую гладкую поверхность Σ, задаваемую отображением $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, где $u, v \in \Omega$, у которой в каждой точке существует касательная плоскость с единичным вектором нормали $\vec{n}$. Пусть на этой поверхности задано векторное поле $\{P, Q, R\}$. Рассмотрим разбиение T области Ω на достаточно малые «ячейки», тогда на поверхности Σ возникнет её разбиение $\Lambda(T)$ на соответствующие малые «ячейки» Δ_j. Выберем в каждой «ячейке» Δ_j точку ξ_j и проведём через неё касательную плоскость с единичным вектором нормали $\vec{n}(\xi_j)$, а затем спроецируем «ячейку» Δ_j на эту плоскость, получим плоскую фигуру, площадь $S(\Delta_j)$ которой можно вычислить. Тогда можно построить следующую интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_j \{P(\xi_j),\, Q(\xi_j),\, R(\xi_j)\} \cdot \vec{n}(\xi_j) \cdot S(\Delta_j).$$

Определение 17.1. Если $\exists \lim\limits_{\Lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то I называется *поверхностным интегралом 2-го рода.*

Обозначение:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dz\, dx + R(x,y,z)\, dx\, dy.$$

Рассмотрим случай $P \equiv Q \equiv 0$:

$$\iint\limits_{z=f(x,y)} R(x,y,z)\, dx\, dy = \iint\limits_{z=f(x,y)} \{0, 0, R(x,y,z)\} \cdot \frac{\{-f'_x,\ -f'_y,\ 1\}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}\, dS =$$
$$= \iint\limits_{z=f(x,y)} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}\, dS =$$
$$= \iint\limits_{(x,y)\in\Omega} \frac{R(x,\, y,\, f(x,y))}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \cdot \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_{(x,y)\in\Omega} R(x,\, y,\, f(x,y))\, dx\, dy.$$

Это объясняет смысл используемого обозначения поверхностного интеграла 2-го рода.

Семинар 18

Связь поверхностного интеграла 2-го рода с двойным интегралом

Утверждение 18.1. *Если на поверхности введена параметризация $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, то единичный вектор нормали будет иметь следующий вид:*

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|}$$

(выбор знака соответствует выбору направления вектора нормали).

Пусть для определённости выбран вектор нормали $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|}$. Учитывая, что $\sqrt{EG - F^2} = |\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|$ – коэффициент искажения площади, получаем:

$$\iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Omega} \{P, Q, R\} \cdot \frac{\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'}{|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|} \cdot |\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\, dv.$$

Рассмотрим, например, случай $u = y$, $v = z$.

$$\iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_y & 1 & 0 \\ x'_z & 0 & 1 \end{vmatrix} dy\, dz = \iint\limits_{\Omega} (P - Qx'_y - Rx'_z)\, dy\, dz.$$

Таким образом, если $\Sigma \parallel Oyz$ или $Q = R = 0$, то $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} P\, dy\, dz$.
Это поясняет смысл записи

$$\iint\limits_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

Решение задач на поверхностные интегралы 2-го рода

Задача (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Вычислить следующий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} (y^2 + z^2)\, dx\, dy,$$

где Σ – часть верхней стороны цилиндра

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Решение:

Будем считать, что $a > 0$.

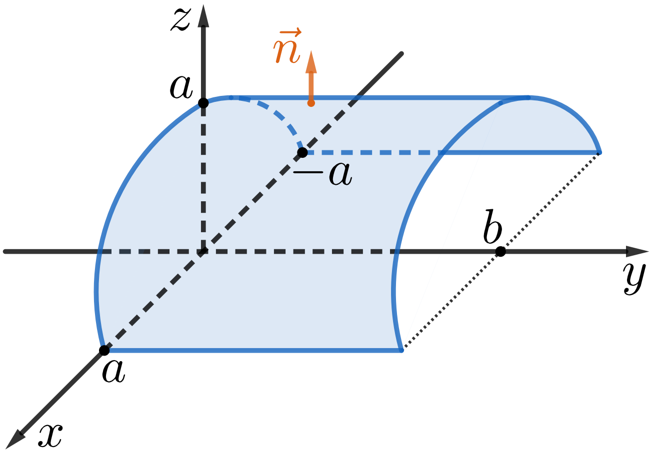

Рис. 18.1: Поверхность интегрирования Σ и вектор нормали $\vec{n}$

Уравнение поверхности цилиндра при $z \geqslant 0$ имеет вид $x^2 + z^2 = a^2$. Тогда вектор нормали равен $\{2x;\ 0;\ 2z\}$. Его длина равна $\sqrt{4x^2 + 4z^2} = 2a$, тогда вектор единичной нормали будет иметь вид $\vec{n} = \left\{\frac{x}{a};\ 0;\ \frac{z}{a}\right\}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} (y^2 + z^2)\, dx\, dy = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{0}^{b} (y^2 + a^2 - x^2)\, dy\, dx = \int\limits_{a}^{a} \left(\frac{b^3}{3} + a^2 b - x^2 b\right) dx =$$
$$= \frac{2ab^3}{3} + 2a^3 b - \frac{2a^3 b}{3} = \frac{2ab}{3}\left(2a^2 + b^2\right).$$

□

Утверждение 18.2. *Физический смысл поверхностного интеграла 2-го рода: поток вещества с вектором скорости $\{P, Q, R\}$ через поверхность Σ (то есть объём прошедшего через Σ вещества за единичное время).*

Задача (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Вычислить следующий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy,$$

где Σ – внутренняя сторона поверхности тела, задаваемого неравенствами

$$x + 2y + 3z \leqslant 1, \qquad x,\ y,\ z \geqslant 0.$$

Решение:

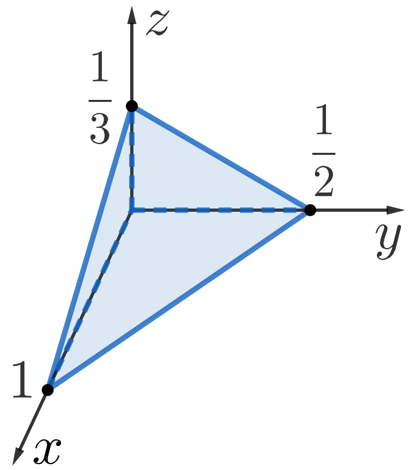

Рис. 18.2: Поверхность интегрирования Σ

Пусть $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$, где

$$\Sigma_1 \subset Oyz, \qquad \Sigma_2 \subset Ozx, \qquad \Sigma_3 \subset Oxy, \qquad \Sigma_4 \subset (x + 2y + 3z = 1),$$

причём пусть каждой поверхности Σ_i соответствует прообраз Ω_i.

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_1} x\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega_1} 0\,dy\,dz = 0;$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_2} y\,dz\,dx = \iint\limits_{\Omega_2} 0\,dz\,dx = 0;$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_3} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_3} 0\,dx\,dy = 0;$$

$$\iint\limits_{\Sigma_4} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma_4} \{x, y, z\} \cdot \left\{\frac{-1}{\sqrt{14}};\ \frac{-2}{\sqrt{14}};\ \frac{-3}{\sqrt{14}}\right\} dS =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_{\Sigma_4} (x + 2y + 3z)\,dS \ominus$$

$$\Omega_4: \quad x = x, \quad y = y, \quad z = \frac{1}{3}(1 - x - 2y), \quad \text{где} \quad y \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], \quad x \in [0;\ 1 - 2y];$$

$$\vec{r}_x{}' = \left\{1,\ 0,\ -\frac{1}{3}\right\}, \qquad \vec{r}_y{}' = \left\{0,\ 1,\ -\frac{2}{3}\right\};$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{13}{9} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{14}}{3};$$

$$\ominus -\frac{1}{\sqrt{14}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{1-2y}(x+2y+1-x-2y)\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{1-2y}dx\,dy =$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

□

Задача (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Вычислить следующий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где Σ – часть внутренней стороны гиперболоида:

$$x^2+y^2-z^2=1, \qquad 0\leqslant z\leqslant 3.$$

Решение:

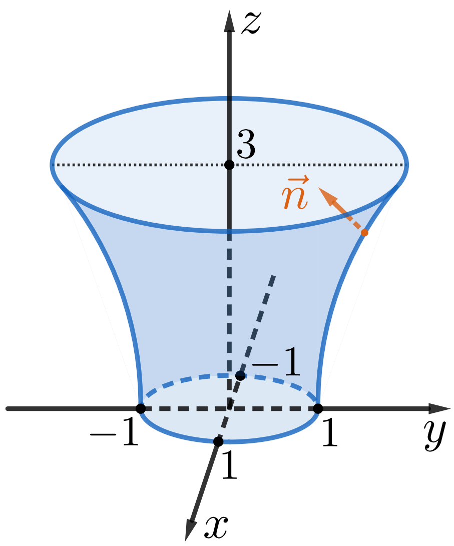

Рис. 18.3: Поверхность интегрирования Σ и вектор нормали $\vec{n}$

Введём параметризацию

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi, \qquad z=\sqrt{r^2-1},$$

где $r\in\left[1;\ \sqrt{10}\right]$, $\varphi\in[0;\,2\pi]$.

Сначала посчитаем заданный интеграл с произвольным выбором направления вектора нормали (обозначим поверхность $\tilde{\Sigma}$), а затем проверим, правильно ли мы выбрали это направление (если нет, то надо будет у полученного значения интеграла изменить знак).

$$\iint\limits_{\tilde{\Sigma}} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} r^2\cos^2\varphi & r^2\sin^2\varphi & \sqrt{r^2-1} \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}} \end{vmatrix} dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\sqrt{10}} \left(-r\sqrt{r^2-1} + \frac{r^4}{\sqrt{r^2-1}}\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)\right) dr\,d\varphi \ominus$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\sqrt{10}} \left(-r\sqrt{r^2-1}\right) dr\,d\varphi = -2\pi\cdot\frac{1}{3}\left(r^2-1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\sqrt{10}} = -18\pi;$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\,d\varphi = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = 0;$$

$$\ominus\ -18\pi.$$

Вектор нормали $\vec{\tilde{n}}$ (неединичный) в нашем выборе имеет следующий вид:

$$\vec{\tilde{n}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}} \end{vmatrix}.$$

Тогда $\tilde{n}_z = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r < 0$, но нормаль $\vec{n}$ к внутренней стороне гиперболоида, изображённая на рисунке (18.3), имеет положительную координату по оси Oz. Значит, направление вектора нормали надо изменить, а вместе с ним и знак найденного значения интеграла.

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 18\pi.$$

$\square$

Семинар 19

Формула Гаусса-Остроградского

Определение 19.1. *Дивергенцией векторного поля* $\{P, Q, R\}$ называется

$$\operatorname{div}\{P, Q, R\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \cdot \{P, Q, R\} = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Утверждение 19.1 (Формула Гаусса-Остроградского). *Рассмотрим выпуклое тело Ω с гладкой границей, внешнюю поверхность которой назовём Σ. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$ (то есть в некоторой объемлющей области, содержащей $\overline{\Omega}$). Тогда*

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\{P,\ Q,\ R\}\,dx\,dy\,dz.$$

Доказательство:

В силу линейности интегралов в обеих частях равенства (19.1) достаточно доказать, что

$$\iint\limits_{\Sigma} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{\Omega} R'_z\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть G – проекция Ω на Oxy, причём $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – соответственно нижняя и верхняя (по оси Oz) точки Σ, проецирующиеся в точку $(x, y) \in G$.

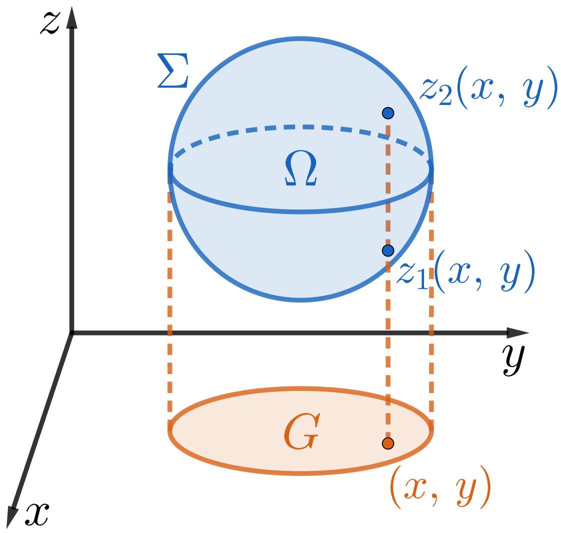

Рис. 19.1: Тело Ω с поверхностью Σ и проекция G тела Ω на плоскость Oxy

$$\iiint\limits_{\Omega} R'_z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{G}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} R'_z\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{G}(R(x,\,y,\,z_2(x,y)) - R(x,\,y,\,z_1(x,y)))\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} R\,dx\,dy.$$

■

Замечание 19.1. Несложно обобщить эту формулу на случай кусочно-гладкой границы и кусочно-выпуклой области.

Замечание 19.2. Заметим, что в процессе доказательства мы существенно не использовали размерность пространства, поэтому аналогичные формулы можно составить и для пространств других размерностей. Например, для двумерного пространства аналогом формулы Гаусса-Остроградского является формула Грина:

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\Omega}(Q'_x - P'_y)\,dx\,dy,$$

но в ней вместо знака плюс перед P'_y стоит знак минус. Здесь дело в том, что криволинейный интеграл 2-го рода строится с использованием касательного вектора к прямой, а поверхностный интеграл 2-го рода – с помощью нормального вектора к поверхности.

Решение задач на формулу Гаусса-Остроградского

Задача 4376. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, преобразовать следующий поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy,$$

где Σ – гладкая поверхность, ограничивающая конечный объём V.

Решение:

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = \iiint\limits_{\Omega}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

□

Оператор набла

Определение 19.2. $\nabla = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x},\,\dfrac{\partial}{\partial y},\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ – *оператор набла.*

Утверждение 19.2.

$\nabla u = \operatorname{grad} u$ – *отображение:* $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$;
$\nabla \cdot \{P, Q, R\} = \operatorname{div} u$ – *отображение:* $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$;
$\nabla \times \{P, Q, R\} = \operatorname{rot} u$ – *отображение:* $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$.

Решение задач на формулу Гаусса-Остроградского (продолжение)

Задача 4380. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, преобразовать следующий поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS,$$

где Σ – гладкая поверхность, ограничивающая конечный объём V, и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности Σ.

Решение:

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{rot}\{P, Q, R\}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz})\, dx\, dy\, dz \ominus$$

Будем считать, что векторное поле $\{P, Q, R\}$ дважды непрерывно дифференцируемо, тогда $R''_{yx} = R''_{xy}$, $Q''_{zx} = Q''_{xz}$, $P''_{zy} = P''_{yz}$.

$$\ominus \iiint\limits_{\Omega} 0\, dx\, dy\, dz = 0.$$

□

Замечание 19.3. Векторное поле $\{A, B, C\} = \operatorname{rot}\{P, Q, R\}$ называется соленоидальным. Таким образом, мы показали, что дивергенция соленоидального векторного поля равна 0.

Задача 4382. Доказать, что объём тела, ограниченного поверхностью Σ, равен

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности Σ.

Решение:

$$\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\{x, y, z\}\cdot\vec{n}\,dS =$$
$$= \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega}dx\,dy\,dz = V.$$

$\square$

Замечание 19.4. Вместо векторного поля $\left\{\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right\}$ можно брать любой другое векторное поле $\{P, Q, R\}$, для которого $\operatorname{div}\{P, Q, R\} = 1$.

Задача 4385 (1)**.** Найти объём тела, ограниченного тором:

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \qquad y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \qquad z = a\sin\psi \qquad (0 < a \leqslant b).$$

Решение:

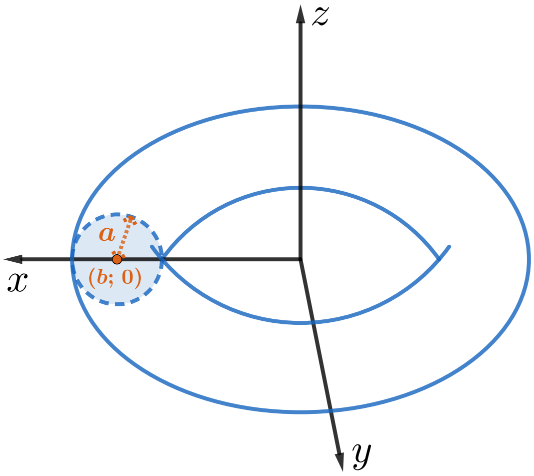

Рис. 19.2: Тор и его сечение

Заметим, что $\varphi \in [0;\, 2\pi]$ и $\psi \in [0;\, 2\pi]$.

Используем формулу, доказанную в задаче (4382) (будем ставить модули, так как не будем заранее проверять направление вектора нормали, а объём должен быть положителен):

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\{x, y, z\}\cdot\vec{n}\,dS =$$
$$= \frac{1}{3}\left|\iint\limits_{\substack{\varphi\in[0;\,2\pi]\\ \psi\in[0;\,2\pi]}}\begin{vmatrix}(b + a\cos\psi)\cos\varphi & (b + a\cos\psi)\sin\varphi & a\sin\psi\\ -(b + a\cos\psi)\sin\varphi & (b + a\cos\psi)\cos\varphi & 0\\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi\end{vmatrix}\,d\varphi\,d\psi\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2\psi(b+a\cos\psi)+a\cos\psi(b+a\cos\psi)^2\right)\,d\varphi\,d\psi\right| =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left|\int_0^{2\pi}(a^2b\sin^2\psi + a^3\sin^2\psi\cos\psi + ab^2\cos\psi + 2a^2b\cos^2\psi + a^3\cos^3\psi)\,d\psi\right| =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left|\int_0^{2\pi}(a^2b\sin^2\psi + ab^2\cos\psi + 2a^2b\cos^2\psi + a^3\cos\psi)\,d\psi\right| =$$

Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi = 0$, получаем:

$$= \frac{2\pi}{3}\left|\int_0^{2\pi}(a^2b\sin^2\psi + 2a^2b\cos^2\psi)\,d\psi\right| =$$

Учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\psi\,d\psi = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi$, получаем:

$$= \frac{2\pi}{3}\left|\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}a^2b\left(\sin^2\psi+\cos^2\psi\right)\,d\psi\right| = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{2}a^2b\left|\int_0^{2\pi}d\psi\right| = 2\pi^2a^2b.$$

$\square$

Семинар 20

Разбор домашнего задания

Задача 4383. Доказать, что объём конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S – площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, H – высота конуса.

Решение:

Введём систему координат с началом отсчёта в вершине конуса, тогда векторное поле $\{x, y, z\}$ будет «скользить» вдоль поверхности конуса. Значит, на $\Sigma_{\text{бок.}}$ имеем: $\{x, y, z\} \cdot \vec{n} = 0$, а на $\Sigma_{\text{осн.}}$ имеем: $\{x, y, z\} \cdot \vec{n} = H$.

Используем формулу, доказанную в задаче (4382):

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_{\text{полн.}}} \{x, y, z\} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_{\text{осн.}}} \{x, y, z\} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{3}SH.$$

□

Задача 4384 (исправлена опечатка)**.** Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = \pm c$ и

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v + b \sin u \sin v \\ y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v \\ z = c \sin u \end{cases}.$$

Решение:

Заметим, что

$$x^2 + y^2 = a^2 + \left(b^2 - a^2\right)\frac{z^2}{c^2}.$$

Значит, сечения, получаемые при рассечении тела секущими плоскостями вида $z = z_0$, являются сечениями, площадь $S(z)$ которых будет квадратичной функцией относительно z:

$$S(z) = \pi\left(a^2 + \left(b^2 - a^2\right)\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Вспомним *формулу Симпсона.* Если $P(x) = ax^3 + bx + cx + d$, то

$$\int\limits_{-h}^{h} P(x)\, dx = \frac{h}{3}\left(P(-h) + 4P(0) + P(-h)\right).$$

Применим эту формулу для расчёта искомого объёма тела:

$$V = \int\limits_{-c}^{c} S(z)\,dz = \frac{c}{3}\left(S(-c) + 4S(0) + S(c)\right) =$$
$$= \frac{c}{3}\left(\pi b^2 + 4\pi a^2 + \pi b^2\right) = \frac{2\pi}{3} c\left(2a^2 + b^2\right).$$

□

Задача 119 (Виноградова, Олехник, Садовничий). Вычислить следующий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\iint\limits_{\Sigma} (x + y^2)\,dy\,dz + (y + z^2)\,dz\,dx + (z + x^2)\,dx\,dy,$$

где Σ – внешняя поверхность цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h.$$

Решение:

Будем считать, что $a > 0$. Разобьём поверхность Σ на 3 части: верхняя Σ_1, боковая Σ_2 и нижняя Σ_3.

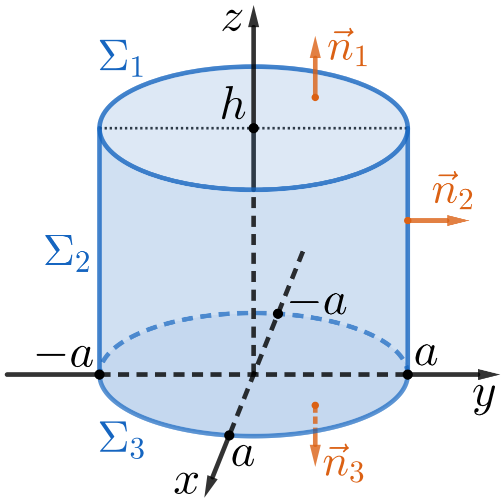

Рис. 20.1: Поверхность интегрирования и векторы нормали

Единичные векторы нормали на поверхностях Σ_1, Σ_2 и Σ_3 соответственно будут иметь следующий вид:

$$\vec{n}_1 = \{0;\ 0;\ 1\}, \qquad \vec{n}_2 = \left\{\frac{x}{a};\ \frac{y}{a};\ 0\right\}, \qquad \vec{n}_3 = \{0;\ 0;\ -1\}.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} (x+y^2)\,dy\,dz + (y+z^2)\,dz\,dx + (z+x^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (-x^2)\,dx\,dy =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a r^2\cos^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi = -\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{\pi a^4}{4};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} (x+y^2)\,dy\,dz + (y+z^2)\,dz\,dx + (z+x^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (h+x^2)\,dx\,dy =$$

$$= \pi a^2 h + \frac{\pi a^4}{4};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} (x+y^2)\,dy\,dz + (y+z^2)\,dz\,dx + (z+x^2)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_2} \left(\frac{x}{a}(x+y^2) + \frac{y}{a}(y+z^2)\right)\,dS =$$

$$x = a\cos\varphi,\qquad y = a\sin\varphi,\qquad z = z\qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant z\leqslant h);$$

$$\vec{r}_\varphi{}' = \{-a\sin\varphi,\, a\cos\varphi,\, 0\},\qquad \vec{r}_z{}' = \{0,\,0,\,1\};$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F\\ F & G\end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}} = a;$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h \left(a + a^2\cos^2\varphi\sin\varphi + z^2\sin\varphi\right)\cdot a\,dz\,d\varphi = a^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h dz\,d\varphi = 2\pi a^2 h;$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (x+y^2)\,dy\,dz + (y+z^2)\,dz\,dx + (z+x^2)\,dx\,dy =$$

$$= \pi a^2 h + \frac{\pi a^4}{4} + 2\pi a^2 h - \frac{\pi a^4}{4} = 3\pi a^2 h.$$

□

Замечание 20.1. Если применять формулу Гаусса-Остроградского (мы не применяли, потому что задача из более раннего домашнего задания), задачу можно решить значительно быстрее (Ω – цилиндр):

$$\iint\limits_{\Sigma} (x+y^2)\,dy\,dz + (y+z^2)\,dz\,dx + (z+x^2)\,dx\,dy =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)\,dx\,dy\,dz = 3\pi a^2 h.$$

Решение задач на формулу Гаусса-Остроградского

Задача 4392. Вычислить *интеграл Гаусса*:

$$I(x_0, y_0, z_0) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS,$$

где Σ – простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объём V, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности Σ в точке (x, y, z), $\vec{r}$ – радиус-вектор, соединяющий точку (x_0, y_0, z_0) с точкой (x, y, z), и $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

Рассмотреть два случая:

а) поверхность Σ не окружает точку (x_0, y_0, z_0);

б) поверхность Σ окружает точку (x_0, y_0, z_0).

Решение:

Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и $\vec{n}$ – единичный вектор. Обозначим $I = I(x_0, y_0, z_0)$.

Рассмотрим случай (а).

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS = \iint\limits_{\Sigma} \left\{\frac{x}{r^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{r^{\frac{3}{2}}},\ \frac{z}{r^{\frac{3}{2}}}\right\} \cdot \vec{n}\,dS =$$
$$= \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \left\{\frac{x}{r^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{r^{\frac{3}{2}}},\ \frac{z}{r^{\frac{3}{2}}}\right\} dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V} 0\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Рассмотрим случай (б).

Пусть B_ε – шар с центром в начале координат и радиусом ε, где ε достаточно мало, чтобы шар целиком находился внутри тела V. Обозначим: $V' = V \setminus B_\varepsilon$; Σ_- и Σ_+ – соответственно внутренняя и внешняя поверхности границы шара B_ε.

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS = \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS + \iint\limits_{\Sigma_-} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS - \iint\limits_{\Sigma_-} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS = \\
&= -\iint\limits_{\Sigma_-} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS = \iint\limits_{\Sigma_+} \frac{\cos\angle(\vec{r},\,\vec{n})}{r^2}\,dS = \iint\limits_{\Sigma_+} \frac{1}{\varepsilon^2}\,dS = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_+} dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

□

Гармонические функции в пространстве

Определение 20.1. Пусть $u(x,y,z)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если в некоторой области Ω выполняется равенство

$$\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} \equiv 0,$$

то функция $u(x,y,z)$ называется *гармонической в области* Ω.

Задача 4393. Доказать:

а) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS = \iiint\limits_{V} \Delta u\,dx\,dy\,dz;$

б) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS = \iiint\limits_{V} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{V} u\Delta u\,dx\,dy\,dz,$

где Σ – гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V, u – функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V+\Sigma$, $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ – производная по внешней нормали к поверхности Σ.

Решение:

$$\text{а)}\ \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS = \iint\limits_{\Sigma} \nabla u\cdot\vec{n}\,dS = \iiint\limits_{V} \nabla\cdot\nabla u\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V} \Delta u\,dx\,dy\,dz.$$

б) Применяя формулу из пункта (а) для функции $\dfrac{u^2}{2}$, получим формулу из пункта (б). □

Семинар 21

Формула Стокса

Утверждение 21.1. *Пусть на поверхности Σ задан замкнутый жорданов контур γ, ограничивающий область $\Omega \subset \Sigma$. Тогда справедлива формула Стокса (разные виды записи):*

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS;$$

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\,dS;$$

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.$$

Замечание 21.1. Формула Грина является частным случаем формулы Стокса в случае, когда $\Sigma \parallel Oxy$.

Замечание 21.2. Если циркуляция векторного поля $\{P, Q, R\}$ по любому замкнутому контуру на Σ равен 0, то по формуле Стокса получаем, что $\operatorname{rot}\{P, Q, R\} \equiv 0$ на Σ (то есть векторное поле потенциально на Σ).

Замечание 21.3. Так как циркуляция векторного поля $\{P, Q, R\}$ по некоторой окружности γ_r радиуса r инварианта относительно ортогональной замены координат, то по формуле Стокса получаем, что значение интеграла $\iint\limits_{\Omega_r} \operatorname{rot}\{P, Q, R\}\cdot\vec{n}\,dS$, где Ω_r – круг, ограниченный γ_r, тоже инвариантно. А так как $\lim\limits_{r\to+0} \dfrac{\iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}\,dS}{\pi r^2} = \operatorname{rot}\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}$, то значение выражения $\operatorname{rot}\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}$ тоже инвариантно. В силу произвольности выбора плоскости окружности с центром в заданной точке и, как следствие, произвольности выбора направления вектора $\vec{n}$ получаем, что вектор $\operatorname{rot}\{P, Q, R\}$ инвариантен относительно ортогональной замены координат.

Замечание 21.4. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$, то почти аналогично можно показать, что вектор ∇u инвариантен относительно ортогональной замены координат.

Решение задач на формулу Стокса

Задача 4367. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{C} y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

где C – окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x + y + z = 0,$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение:

Будем считать, что $a > 0$. Решим задачу двумя способами: 1) натягивая на окружность часть плоскости $x + y + z = 0$; 2) натягивая на окружность часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$1)\ \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dS = -\sqrt{3} \iint\limits_{\substack{x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}} dS = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

$$2)\ \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z\geqslant 0}} \begin{vmatrix} \dfrac{x}{a} & \dfrac{y}{a} & \dfrac{z}{a} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z\geqslant 0}} \frac{-(x+y+z)}{a}\, dS \ominus$$

Сделаем ортогональную замену координат так, чтобы полусфера, по которой мы интегрируем лежала в области $z \geqslant 0$, а ограничивающая её окружность лежала в плоскости Oxy. Тогда $z' = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$.

$$\ominus \iint\limits_{\substack{x'^2+y'^2\leqslant a^2\\ z'=\sqrt{a^2-x'^2-y'^2}}} \frac{-\sqrt{3}z'}{a}\, dS \ominus$$

$$x' = r\cos\varphi, \qquad y' = r\sin\varphi, \qquad z' = \sqrt{a^2 - r^2} \qquad (0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$

$$\vec{r}_r{}' = \left\{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}}\right\}, \qquad \vec{r}_\varphi{}' = \{-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0\};$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{a^2}{a^2-r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix}} = \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}};$$

$$\ominus \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \frac{-\sqrt{3}}{a}\cdot\sqrt{a^2-r^2}\cdot\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\varphi = -\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a r\,dr\,d\varphi =$$
$$= -\sqrt{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^2}{2} = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

□

Задача 4371 (исправлена опечатка)**.** Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz,$$

где C – эллипс

$$x^2+y^2=a^2, \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1, \qquad (a>0, \quad h>0),$$

пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение:

Натянем на контур C часть плоскости $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$. Вектор нормали (неединичный) к этой плоскости имеет вид $\left\{\frac{1}{a};\ 0;\ \frac{1}{h}\right\}$, его длина равна $\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{ah}$. Тогда единичный вектор нормали к этой плоскости будет иметь вид $\vec{n}=\left\{\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}};\ 0;\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\}$.

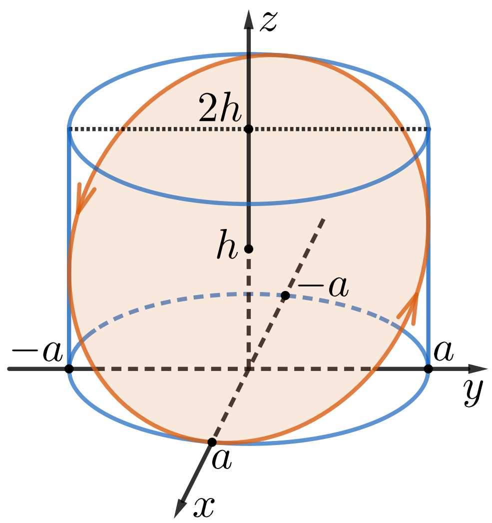

Рис. 21.1: Контур интегрирования и натянутая на него часть плоскости

$$\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = \iint\limits_{\substack{\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\\ x^2+y^2\leqslant a^2}} \operatorname{rot}\{y-z,\, z-x,\, x-y\}\cdot\vec{n}\,dS =$$

$$= \iint\limits_{\substack{\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\\ x^2+y^2\leqslant a^2}} \{-2;\ -2;\ -2\}\cdot\left\{\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}};\ 0;\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\} dS = \frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}} \iint\limits_{\substack{\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\\ x^2+y^2\leqslant a^2}} dS =$$

$$= \frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\frac{\pi a^2}{\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}} = -2\pi a(a+h)$$

(площадь эллипса нашли из площади круга, являющегося его проекцией на плоскость Oxy, и двугранного угла между плоскостями). $\square$

Задача 4373. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz,$$

где C – сечение поверхности куба

$$0\leqslant x\leqslant a,\qquad 0\leqslant y\leqslant a,\qquad 0\leqslant z\leqslant a$$

плоскостью $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение:

Натянем на контур C часть плоскости $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$. Единичный вектор нормали к этой плоскости будет иметь вид $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

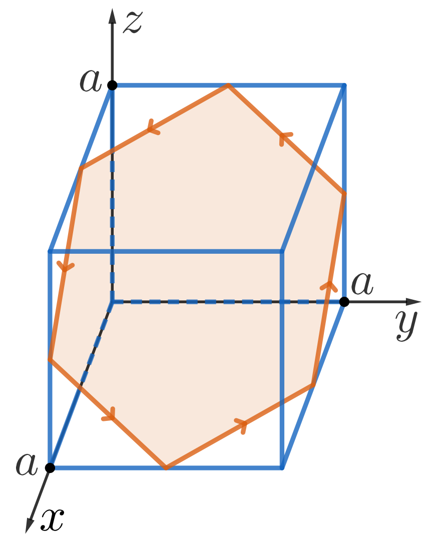

Рис. 21.2: Контур интегрирования и натянутая на него часть плоскости

$$\oint\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x+y+z=\frac{3}{2}a \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant a \\ 0\leqslant z\leqslant a}} \operatorname{rot}\{y^2 - z^2,\, z^2 - x^2,\, x^2 - y^2\} \cdot \vec{n}\,dS =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x+y+z=\frac{3}{2}a \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant a \\ 0\leqslant z\leqslant a}} \{-2y - 2z;\; -2z - 2x;\; -2x - 2y\} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\; \frac{1}{\sqrt{3}};\; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} dS =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\substack{x+y+z=\frac{3}{2}a \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant a \\ 0\leqslant z\leqslant a}} (x + y + z)\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\substack{x+y+z=\frac{3}{2}a \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant a \\ 0\leqslant z\leqslant a}} \frac{3a}{2}\,dS = -2\sqrt{3}a \iint\limits_{\substack{x+y+z=\frac{3}{2}a \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ 0\leqslant y\leqslant a \\ 0\leqslant z\leqslant a}} dS =$$

$$= -2\sqrt{3}a \cdot 6 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{9}{2}a^3.$$

$\Bigg($использовали формулу площади правильного шестиугольника со стороной $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\Bigg)$. $\square$

Физический смысл ротора

Задача 4440. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\vec{l} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротацию вектора линейной скорости $\vec{v}$ в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

Решение:

Будем считать, что ось $\vec{l}$ проходит через начало координат. Заметим, что $\vec{\omega} = \omega\vec{l}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \omega\{z\cos\beta - y\cos\gamma,\ x\cos\gamma - z\cos\alpha,\ y\cos\alpha - x\cos\beta\};$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \omega \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta - y\cos\gamma & x\cos\gamma - z\cos\alpha & y\cos\alpha - x\cos\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \omega\{2\cos\alpha,\ 2\cos\beta,\ 2\cos\gamma\} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}$. □

Семинар 22

Разбор домашнего задания

Задача 4399 (Закон Архимеда)**.** Тело V целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объёме тела и направлена вертикально вверх.

Решение:

Рассмотрим достаточно малую площадку ΔS_j на поверхности тела V. Сила, действующая на эту площадку, равна $\Delta\vec{F}_j = -p_j \Delta S_j \vec{n}_j$, где p_j – давление, действующее на площадку ΔS_j, $\vec{n}_j$ – вектор внешней нормали к площадке ΔS_j. Пусть Σ – внешняя поверхность тела V, $\vec{n}$ – вектор её нормали. Тогда суммарная сила, действующая на тело V, будет иметь следующий вид:

$$\vec{F} = \lim_{\operatorname{diam} S_j \to +0} \sum_j -p_j \Delta S_j \vec{n}_j = -\iint\limits_{\Sigma} p\vec{n}\, dS,$$

Пусть ось Oz направлена вертикально вниз и начало отсчёта находится на поверхности жидкости, тогда $p = \rho g z$ – давление жидкости на глубине z, где ρ – плотность жидкости.

Распишем выражение для силы $\vec{F}$ покоординатно:

$$F_x = -\iint\limits_{\Sigma} pn_x\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} \{p, 0, 0\} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} p\, dy\, dz = -\iint\limits_{\Sigma} \rho g z\, dy\, dz =$$

$$= -\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\{\rho g z,\, 0,\, 0\}\, dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_{V} 0\, dx\, dy\, dz = 0;$$

$$F_y = -\iint\limits_{\Sigma} pn_y\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} \{0, p, 0\} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} p\, dz\, dx = -\iint\limits_{\Sigma} \rho g z\, dz\, dx =$$

$$= -\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\{0,\, \rho g z,\, 0\}\, dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_{V} 0\, dx\, dy\, dz = 0;$$

$$F_z = -\iint\limits_{\Sigma} pn_z\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} \{0, 0, p\} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint\limits_{\Sigma} p\, dx\, dy = -\iint\limits_{\Sigma} \rho g z\, dx\, dy =$$

$$= -\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\{0,\, 0,\, \rho g z\}\, dx\, dy\, dz = -g\iiint\limits_{V} \rho\, dx\, dy\, dz = -m_{\text{ж.}} g,$$

где $m_{\text{ж.}}$ – масса жидкости в объёме тела.

Таким образом, $F = -m_{\text{ж.}} g \vec{e}_z = -\vec{P}_{\text{ж.}}$, где $\vec{P}_{\text{ж.}}$ – вес жидкости в объёме тела. $\square$

Задача 4398 (Принцип максимума)**.** Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}$ и гармоническая внутри неё, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественно постоянной.

Решение:

Предположим, что $(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ – точка (нестрогого) глобального максимума функции u (случай глобального минимума разбирается аналогично). Рассмотрим сферу Σ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) радиуса R, лежащую целиком внутри области Ω. По теореме о среднем для гармонической функции имеем:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} u(x, y, z)\, dS. \tag{22.1}$$

Так как (x_0, y_0, z_0) – точка (нестрогого) глобального максимума, то $u(x_0, y_0, z_0) \geqslant$ $\geqslant u(x, y, z)$ для любых $(x, y, z) \in \Omega$. Тогда получим:

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} u(x, y, z)\, dS \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Sigma} u(x_0, y_0, z_0)\, dS = u(x_0, y_0, z_0),$$

причём равенство возможно только при условии, что $u(x, y, z) \equiv u(x_0, y_0, z_0)$ на Σ. Но это равенство верно в силу формулы (22.1). Значит, $u(x, y, z) \equiv u(x_0, y_0, z_0)$ на Σ. В силу произвольности выбора достаточно малого значения R получаем, что $u(x, y, z) \equiv u(x_0, y_0, z_0)$ в круге некоторого достаточно малого радиуса с центром в точке (x_0, y_0, z_0).

Таким образом, непустое подмножество, в котором $u(x, y, z) \equiv u(x_0, y_0, z_0)$ является в $\overline{\Omega}$ открытым (так как вместе с каждой точкой содержит её окрестность) и замкнутым (в силу непрерывности $u(x, y, z)$), а значит, это подмножество совпадает с $\overline{\Omega}$. $\square$

Задача 4374 (изменённая)**.** Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{C} y^2 z^2\, dx + z^2 x^2\, dy + x^2 y^2\, dz,$$

где C – замкнутая кривая

$$x = a \sin t, \qquad y = a \sin 2t, \qquad z = a \sin 3t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

Решение:

Будем считать, что $a > 0$.

Заметим, что

$$x(x + z) = a \sin t \cdot a(\sin t + \sin 3t) = 2a^2 \sin t \sin 2t \cos t = a^2 \sin^2 2t = y^2.$$

Таким образом, часть поверхности Σ: $x(x + z) = y^2$ натянута на контур C. Из исходного вида задания контура можно понять, что в промежутке $t \in [0; \pi]$ при значениях t, достаточно близких к 0, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, а при значениях t, достаточно близких к π, $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$. Значит, контур пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Oz. Значит, вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности должен иметь положительную координату по оси Oz. Тогда вектор нормали к поверхности Σ: $x^2-y^2+xz=0$ будет иметь следующий вид: $\vec{n}=\{2x+z,\ -2y,\ x\}$.

$$\oint\limits_C y^2z^2\,dx+z^2x^2\,dy+x^2y^2\,dz=\iint\limits_\Sigma \operatorname{rot}\left\{y^2z^2,\ z^2x^2,\ x^2y^2\right\}\cdot\vec{n}\,dS=$$
$$=\iint\limits_\Sigma\left\{2x^2y-2x^2z;\ 2y^2z-2y^2x;\ 2z^2x-2z^2y\right\}\cdot\{2x+z,\ -2y,\ x\}\,dS.$$

Для поверхности Σ можно использовать следующую параметризацию:

$$x=u\sin t,\qquad y=u\sin 2t,\qquad z=u\sin 3t\qquad (0\leqslant t\leqslant\pi,\quad 0\leqslant u\leqslant a).$$

Дальше остаются технические действия, чтобы довести задачу до ответа, не будем это делать. □

Решение задач на элементы теории поля

Определение 22.1. *Циркуляция векторного поля* – криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутому контуру.

Определение 22.2. *Поток векторного поля* – поверхностный интеграл 2-го рода по замкнутой поверхности.

Задача 4422. Доказать, что

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS,$$

где S – замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объём V, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S, $d(S)$ – диаметр поверхности S.

Решение:

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iiint\limits_V\operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz=\operatorname{div}\vec{a}(M).$$

□

Обобщение интегральных формул на многомерные пространства

Пусть $dx\wedge dy$ – внешнее произведение, оно обладает свойством антикоммутативности $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$. Отсюда, например, легко получается, что $dx\wedge dx=0$.

$\omega=f_1(x_1,\,\ldots,x_n)\,dx_1+\ldots+f_n(x_1,\,\ldots,x_n)\,dx_n$ – дифференциальная форма.

$d\omega = (f'_{11}\,dx_1 + \ldots + f'_{1n}\,dx_n) \wedge dx_1 + \ldots + (f'_{n1}\,dx_1 + \ldots + f'_{nn}\,dx_n) \wedge dx_n$ – внешнее дифференцирование.

$\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \cdots \int \omega = \int\limits_{\Omega} \cdots \iint d\omega$ – общая формула Стокса.

Семинар 23

Решение задач на интегральные формулы в многомерном пространстве

Задача. Вычислить площадь поверхности n-мерного тора:

$$T = \left\{x_1^2 + x_2^2 = r_1^2\right\} \times \left\{x_3^2 + x_4^2 = r_2^2\right\} \times \ldots \times \left\{x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = r_n^2\right\}.$$

Решение:

Используем следующую параметризацию:

$$\begin{aligned}
&x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \qquad x_2 = r_1 \sin\varphi_1,\\
&x_3 = r_2 \cos\varphi_2, \qquad x_4 = r_2 \sin\varphi_2,\\
&\vdots\\
&x_{2n-1} = r_n \cos\varphi_n, \qquad x_{2n} = r_n \sin\varphi_n,
\end{aligned}$$

где $\Omega = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in [0;\, 2\pi]^n$.

$$\int\limits_T \cdots \int dS = \int\limits_\Omega \cdots \int r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = (2\pi)^n \cdot r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n.$$

□

Обобщение интегральных формул на многомерные пространства

$\int\limits_{\partial\Omega} \cdots \int \omega = \int\limits_{\Omega} \cdots \iint d\omega$ – общая формула Стокса.

Выведем из общей формулы Стокса формулу Грина. Пусть Ω – двумерная плоская область. Тогда получаем:

$$\oint\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\Omega} d(P\,dx + Q\,dy) =$$
$$= \iint\limits_{\Omega} (P'_x\,dx + P'_y\,dy) \wedge dx + (Q'_x\,dx + Q'_y\,dy) \wedge dy = \iint\limits_{\Omega} (Q'_x - P'_y)\,dx \wedge dy.$$

Теперь выведем из общей формулы Стокса формулу Гаусса-Остроградского. Пусть Ω – трёхмерная область. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\partial\Omega} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \\
&= \iiint\limits_{\Omega} d(P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy) = \\
&= \iiint\limits_{\Omega} P'_x\,dx\wedge dy\wedge dz + Q'_y\,dy\wedge dz\wedge dx + R'_z\,dz\wedge dx\wedge dy = \\
&= \iiint\limits_{\Omega} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Теперь выведем из общей формулы Стокса формулу Стокса. Пусть Ω – двумерная область в трёхмерном пространстве. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
&\oint\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Omega} d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \\
&= \iint\limits_{\Omega} P'_y\,dy\wedge dx + P'_z\,dz\wedge dx + Q'_x\,dx\wedge dy + Q'_z\,dz\wedge dy + R'_x\,dx\wedge dz + R'_y\,dy\wedge dz = \\
&= \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)\,dy\wedge dz + (P'_z - R'_x)\,dz\wedge dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

Упражнение 23.1 (На дом)**.** Пусть задан некоторый выпуклый n-мерный многогранник. Пусть S_j и $\vec{n}_j$ – соответственно площадь и единичный вектор внешней нормали j-й грани. Доказать, что

$$\sum_j S_j\vec{n}_j = \vec{0}.$$

Ряды Фурье

Рассмотрим некоторый отрезок $[-l,\ l]$ и пространство функций $L^2[-l,\ l]$. В этом пространстве можно задать скалярное произведение следующим образом: $\int\limits_{-l}^{l} f(x)g(x)\,dx$ (мы отождествляем функции, которые различаются только на множестве меры 0).

Можно ввести следующую ортогональную систему:

$$1, \quad \cos\frac{\pi x}{l}, \quad \sin\frac{\pi x}{l}, \quad \cos\frac{2\pi x}{l}, \quad \sin\frac{2\pi x}{l}, \quad \ldots,$$

причём

$$\|1\| = \sqrt{2l}, \qquad \left\|\cos\frac{\pi x}{l}\right\| = \left\|\sin\frac{\pi x}{l}\right\| = \left\|\cos\frac{2\pi x}{l}\right\| = \left\|\sin\frac{2\pi x}{l}\right\| = \ldots = \sqrt{l}.$$

Определение 23.1. Функции $f(x)$ на отрезке $[-l,\, l]$ можно сопоставить *тригонометрический ряд*, или *ряд Фурье*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты выражаются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Утверждение 23.1. *Ряд Фурье всегда сходится в смысле L^2, то есть*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-l}^{l}(S_n(x) - f(x))^2\,dx = 0,$$

где $S_n(x)$ – частичные суммы ряда Фурье.

Утверждение 23.2. *Если тригонометрический ряд сходится равномерно на отрезке $[-l,\, l]$, то функция, к которой он сходится будет иметь коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n $(n\in\mathbb{N})$.*

Утверждение 23.3 (Признак Дини)**.** *Если $\exists\delta > 0$ такое, что сходится интеграл*

$$\int\limits_0^{\delta}\frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2A|}{t},$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходятся к A:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_0) = A.$$

Замечание 23.1. Зачастую подходит значение $A = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$, если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют.

Замечание 23.2. Даже для непрерывной функции $f(x)$ ряд Фурье может расходиться в точке.

Задача (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Разложить функцию $f(x) = x\sin x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Решение:

На отрезке $[-\pi;\ \pi]$ получаем следующую ортогональную систему функций:

$$1, \qquad \cos x, \qquad \sin x, \qquad \cos 2x, \qquad \sin 2x, \qquad \ldots$$

Заметим, что функции $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots$ чётные, а функции $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots$ нечётные. Также заметим, что функция $f(x) = x\sin x$ чётная. Тогда коэффициенты, соответствующие нечётным функциям будут равны 0 (так как интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку равен 0). Таким образом, $b_n = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\left(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\right)dx \ominus$$

$$I_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad k = 0;$$

$$I_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = -\frac{\cos(kx)}{k}x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx = -2\frac{(-1)^k}{k}\pi =$$

$$= \frac{2\pi}{k}\cdot(-1)^{k+1}, \quad \text{если} \quad k \neq 0;$$

$$\ominus\ \frac{1}{2\pi}(I_{n+1} - I_{n-1});$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(2\pi + 2\pi) = 2;$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi}I_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot(-\pi) = -\frac{1}{2};$$

$$a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2}{n^2-1}\cdot(-1)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

Все коэффициенты найдены, выпишем ряд Фурье:

$$x\sin x \sim 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx).$$

$\square$

Замечание 23.3. Функция $f(x) = x\sin x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ дифференцируема и её производная ограничена, тогда функция $f(x)$ липшицева на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Значит, по признаку Дини ряд Фурье этой функции поточечно сходится к самой функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos(nx).$$

В частности, при $x = 0$ получаем:

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2 - 1};$$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n^2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Семинар 24

Сходимость ряда Фурье к функции, которая его породила

Утверждение 24.1. *Если функция из L^1, то её ряд Фурье не обязан сходиться к ней ни в каком смысле.*

Утверждение 24.2. *Если функция из L^2, то её ряд Фурье обязан сходиться к ней в смыслах L^2 и почти всюду, а в смыслах всюду и равномерно может не сходиться.*

Утверждение 24.3. *Если функция непрерывна, то её ряд Фурье обязан сходиться к ней в смыслах L^2 и почти всюду, а в смыслах всюду и равномерно может не сходиться.*

Утверждение 24.4. *Если функция имеет ограниченную вариацию, то её ряд Фурье обязан сходиться к ней в смыслах L^2, почти всюду и всюду (кроме, возможно, точек разрыва функции), а в смысле равномерно может не сходиться.*

Замечание 24.1. Если x_0 точка разрыва функции $f(x)$, имеющей ограниченную вариацию, то её ряд Фурье в этой точке сойдётся к значению $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Определение 24.1. Если $\exists C>0\colon\ |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|^\alpha$, то говорят, что функция $f(x)$ принадлежит *классу* $\operatorname{Lip}\alpha$.

Утверждение 24.5. *Если функция из $\operatorname{Lip}\alpha$, где $0<\alpha\leqslant 1$, то её ряд Фурье обязан сходиться к ней в смыслах L^2, почти всюду, всюду и равномерно.*

Замечание 24.2. В класс $\operatorname{Lip}1$ попадают дифференцируемые функции с ограниченной производной.

Утверждение 24.6. *Если производная функции принадлежит L^2, то её ряд Фурье обязан сходиться к ней равномерно.*

Решение задач на ряды Фурье

Задача 14.50 (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Разложить функцию $f(x)=\arcsin(\cos x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-10\pi;\ 10\pi]$.

Решение:

Функция $f(x)$ является 2π-периодической, поэтому её можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, причём ряд будет сходиться к ней в смысле L^2, а затем можно периодическим образом продолжить разложение на отрезок $[-10\pi;\ 10\pi]$. В силу единственности разложения по базису полученное разложение будет искомым.

Так как функция $f(x)$ является чётной, то $b_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$.

На отрезке $[0;\pi]$ имеем: $\arccos(\cos x)=x$ и $\arcsin t+\arccos t=\dfrac{\pi}{2}$, тогда $\arcsin(\cos x)=\dfrac{\pi}{2}-x$ при $x\in[0;\ \pi]$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \arcsin(\cos x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \pi - \pi = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,d(\sin nx) = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right);$$

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2}.$$

Все коэффициенты найдены, выпишем ряд Фурье:

$$\arcsin(\cos x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x).$$

$\square$

Замечание 24.3. Полученный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Так как ряд сходится к $f(x)$ в смысле L^2, то и равномерно он тоже сходится к $f(x)$. Также это можно было понять в силу того, что $f(x)$ из $\mathrm{Lip}\,1$.

Замечание 24.4. Исходная функция $f(x)$ была π-антипериодической, то есть $f(x+\pi) = -f(x)$, поэтому в разложении в ряд Фурье коэффициенты с чётными индексами занулились.

Упражнение 24.1 (На дом).

а) Доказать, что $f(x)$ является π-периодической функцией тогда и только тогда, когда в её разложении в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ выполняется $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

б) Доказать, что $f(x)$ является π-антипериодической функцией тогда и только тогда, когда в её разложении в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ выполняется $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Разложение функции по синусам или косинусам кратных дуг (углов)

Если функция $f(x)$ чётная, то её можно разложить по косинусам на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, а если нечётная, то по синусам на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Если функция задана на отрезке $[0; \pi]$, то её можно продолжить как чётным, так и нечётным образом. Для нечётного продолжения, если $f(0) \neq 0$, при $x = 0$ функцию необходимо переопределить значением 0. Это можно сделать, так как интеграл не различает функции, отличающиеся на множестве меры 0 (интеграл Римана может перестать существовать, а интеграл Лебега не различает совсем).

Задача 14.33 (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Разложить по косинусам кратных дуг функцию $f(x) = e^{ax}$, где $a > 0$, в ряд Фурье на отрезке $[0; \pi]$.

Решение:

Чтобы разложить по косинусам кратных дуг, продолжим заданную функцию $f(x)$ чётным образом.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{ax}\,dx = \frac{2}{a\pi}e^{ax}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi a}(e^{a\pi}-1) = \frac{4e^{\frac{a\pi}{2}}}{a\pi}\operatorname{sh}\frac{a\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{ax}\cos nx\,dx.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

Семинар 25

Тождество Парсеваля

Определение 25.1. Система функций называется *полной*, если линейными комбинациями этих функций можно с произвольной точностью в L^2 приблизить заданную функцию $f(x)$.

Определение 25.2. Система функций называется *замкнутой*, если из того, что заданная функция $f(x)$ ортогональна каждой функции из системы функций, следует, что $f(x) \equiv 0$.

Замечание 25.1. В L^2 система функций является полной тогда и только тогда, когда она является замкнутой.

Утверждение 25.1 (Тождество Парсеваля)**.** *Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[-l;\ l]$ следующее разложение в ряд Фурье:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

тогда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\, dx.$$

Замечание 25.2. Таким образом, для любой функции из L^2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$ будет сходиться.

Связь коэффициентов Фурье функции и её первообразной

Пусть функция $F(x)$ является 2π-периодической, непрерывной и кусочно-дифференцируемой (в том смысле, что на периоде функция может не быть дифференцируемой только в конечном количестве точек). Пусть $F'(x) = f(x)$ – кусочно непрерывная и ограниченная функция.

Пусть функции $F(x)$ и $f(x)$ имеют следующие разложения в ряд Фурье:

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \right);$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Выпишем выражения для коэффициентов:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx; \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}(F(\pi) - F(-\pi)) = 0;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi n}\sin(nx)F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = -\frac{b_n}{n};$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi n}\cos(nx)F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{a_n}{n}.$$

Утверждение 25.2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(|A_n| + |B_n|)$ *сходится.*

Доказательство:

По неравенству Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(|A_n| + |B_n|)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|}{k} + \frac{|b_k|}{k}\right)\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\cdot 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ сходится как ряд обратных квадратов. Из тождества Парсеваля следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ тоже сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(|A_n| + |B_n|)$ будет сходиться.

■

Замечание 25.3. Отсюда по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд Фурье для функции $F(x)$ сходится равномерно.

Решение задач на ряды Фурье

Задача 14.64 (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.**

а) Разложить функцию $F(x) = x^2 + 2x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

б) Разложить функцию $F(x) = x^3 + x^2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Указание: воспользоваться разложением функции $g(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Решение:

а) Функция x^2 на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ является 2π-периодической, так как $(-\pi)^2 = \pi^2$. Заметим, что $(x^2)' = 2x$, причём для этой функции ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$2x \sim 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Для коэффициентов получаем следующее:

$$\begin{aligned}
&a_n = 0, \qquad b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{n} \qquad (n \in \mathbb{N});\\
&A_n = -\frac{b_n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}, \qquad B_n = \frac{a_n}{n} = 0;\\
&A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Все коэффициенты найдены, выпишем ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
&x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}\cos(nx);\\
&x^2 + 2x \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}\cos(nx) + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) =\\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos(nx) - \sin(nx)\right).
\end{aligned}$$

б) Функция $x^3 - \pi^2 x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ является 2π-периодической, так как $(-\pi)^3 - \pi^2 \cdot (-\pi) = \pi^3 - \pi^3$. Заметим, что $(x^3 - \pi^2 x)' = 3x^2 - \pi^2$, причём для этой функции ряд Фурье выглядит следующим образом:

$$3x^2 - \pi^2 \sim 12\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Для коэффициентов получаем следующее:

$$\begin{aligned}
&a_n = (-1)^n \cdot \frac{12}{n^2}, \qquad b_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N});\\
&A_n = -\frac{b_n}{n} = 0, \qquad B_n = \frac{a_n}{n} = (-1)^n \cdot \frac{12}{n^3};\\
&A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^3 - \pi^2 x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Все коэффициенты найдены, выпишем ряд Фурье:

$$
\begin{aligned}
&x^3-\pi^2x \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{12}{n^3}\sin(nx);\\
&x^3+x^2=(x^3-\pi^2x)+\pi^2x+x^2\sim\\
&\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{12}{n^3}\sin(nx)+2\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)+\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cos(nx)=\\
&=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{n^2}\cos(nx)+\left(\frac{6}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\sin(nx)\right).
\end{aligned}
$$

□

Задача.

а) Вычислить $\zeta(4)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

б) Вычислить $\zeta(6)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

Решение:

а) Используем разложение x^2 на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, полученное в задаче (14.64):

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

Применим к этому разложению тождество Парсеваля из утверждения (25.1):

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f^2(x)\,dx;\\
&\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^5}{5}=\frac{2\pi^4}{5};\\
&\zeta(4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=16\left(\frac{2\pi^4}{5}-\frac{2\pi^2}{9}\right)=\frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}
$$

б) Используем разложение $x^3-\pi^2x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, полученное в задаче (14.64):

$$x^3-\pi^2x\sim\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{12}{n^3}\sin(nx).$$

Применим к этому разложению тождество Парсеваля из утверждения (25.1):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\, dx;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{144}{n^6} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 - \pi^2 x\right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(x^6 - 2\pi^2 x^4 + \pi^4 x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^7}{7} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^5}{5} + \pi^4 \cdot \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{16\pi^6}{105};$$

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{144} \cdot \frac{16\pi^6}{105} = \frac{\pi^6}{945}.$$

□

Задача 14.31 (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.** Разложить по косинусам кратных дуг функцию $y(x) = ch(ax)$, где $a > 0$, в ряд Фурье на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение:

Функция $y(x)$ является чётной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, поэтому её разложение по косинусам кратных дуг на отрезке $[0;\ \pi]$ является обычным её разложением на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(ax) \sin nx\, dx = 0;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(ax) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \operatorname{ch}(ax) \cos nx\, dx.$$

Функция $y = \operatorname{ch}(ax)$ является непрерывной и 2π-периодической на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, так как $y(-\pi) = y(\pi)$. Заметим, что $y'(x) = a \operatorname{sh}(ax)$ – нечётная функция. Выпишем разложение производной в ряд Фурье:

$$a \operatorname{sh}(ax) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(nx).$$

Теперь рассмотрим функцию $a \operatorname{sh}(ax) - \dfrac{a \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \cdot x$, она является непрерывной и 2π-периодической на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Используя разложение функции x в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx),$$

напишем разложение функции $a\operatorname{sh}(ax)-\dfrac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\cdot x$ в ряд Фурье на этом же отрезке:

$$a\operatorname{sh}(ax)-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\cdot x\sim\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\beta_n-\frac{2a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin(nx).$$

Ещё раз продифференцируем, получим: $a^2\operatorname{ch}(ax)-\dfrac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}$. Запишем разложение этой функции в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$a^2\operatorname{ch}(ax)-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\sim\hat{A}_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a^2A_n\cos(nx).$$

Рассмотрим функцию $F(x)=\operatorname{ch}(ax)-\dfrac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{2\pi}\cdot x^2$. Используя разложение функции $x:2$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cos(nx),$$

напишем разложение функции $F(x)$ в ряд Фурье на этом же отрезке:

$$\operatorname{ch}(ax)-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{2\pi}\cdot x^2\sim\tilde{A}_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{2\pi}\cdot\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\right)\cos(nx).$$

Пусть

$$\tilde{A}_n=A_n-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{2\pi}\cdot\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2},\qquad\hat{A}_n=a^2A_n,\qquad\tilde{b}_n=\beta_n-\frac{2a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

тогда по формулам связи коэффициентов Фурье функции и её первообразной получаем, что $\tilde{A}_n=-\dfrac{\tilde{b}_n}{n}$ и $\tilde{b}_n=\dfrac{\hat{A}_n}{n}$. Значит, получаем уравнение на A_n:

$$\begin{aligned}&A_n-\frac{a\operatorname{sh}(a\pi)}{2\pi}\cdot\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}=-\frac{1}{n^2}\cdot a^2A_n;\\&A_n=(-1)^n\cdot\frac{2a\operatorname{sh}(a\pi)}{\pi\left(n^2+a^2\right)}.\end{aligned}$$

Остаётся найти A_0. Это можно сделать, интегрируя по частям. □

Задача 14.81 (Виноградова, Олехник, Садовничий)**.**
а) Доказать равенство при $0<x<\pi$:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2kx)}{2k}.$$

б) Доказать равенство при $0 < x < \pi$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Указание: воспользоваться разложением функции $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0;\, 2\pi]$:

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Решение:

а) По признаку Дини (или по признаку Жордана) получаем при $0 < x < 2\pi$:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Сделаем замену переменной $x = 2t$, получим при $0 < t < \pi$:

$$\frac{\pi - 2t}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nt)}{n};$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kt)}{2k}.$$

б) Вычтем из равенства $\dfrac{\pi - x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ равенство $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kx)}{2k}$, получим при $0 < x < \pi$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

$\square$

Семинар 26

Доработанный пример Колмогорова всюду расходящегося ряда Фурье

Утверждение 26.1 (Доработанный пример Колмогорова)**.**
$\exists$ *функция из* $L^1[-\pi;\ \pi]$*, ряд Фурье которой расходится в каждой точке.*

Идея доказательства взята из следующей статьи:
В. М. Тихомиров и В. В. Успенский «Первые филдсовские лауреаты и советская математика 30-х годов», Мат. просв., 1998, выпуск 2, страницы 21-40.

Доказательство:

Пусть $p_k(x) \geqslant 0$ – тригонометрические многочлены (k – просто индекс, а не степень многочлена). Построим ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k(x)$. Мы построим такие $p_k(x)$, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} p_k(x)\,dx < +\infty$. Тогда по теореме Леви ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k(x)$ будет сходиться почти всюду и в смысле L^1 к некоторой функции $f(x)$. Значит, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} p_k(x)\,dx$.

Построим многочлены $p_k(x)$. Для этого запишем ядро Дирихле:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

(последнее равенство при $n \neq 0$).

Запишем частичные суммы ряда Фурье функции f на отрезке $[-\pi;\ \pi]$:

$$S_n(t, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x + t)\,dx. \tag{26.1}$$

Ядро Дирихле обладает следующим свойством:

$$1 = S_n(0;\ 1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx, \quad \text{но} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx \to +\infty.$$

Лемма 26.1. $\forall a > 0\ \ \exists P_a(x)$ – *тригонометрический многочлен (a – параметр, но не степень многочлена) такой, что* $\exists n \in \mathbb{N}\colon\ S_n(0;\ P_a) > a$*, причём* $|P_a(x)| \leqslant 1\ \ \forall x$.

Доказательство:

Так как $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx \to +\infty$, то $\exists n\colon\ \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx > a$.

Из формулы (26.1) при $t = 0$ получаем: $S_n(0;\ f) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(x)\,dx$.

Возьмём $f(x) = \operatorname{sgn} D_n(x)$. Тогда $S_n(0;\ f) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx > a$.

Изменим $f(x)$, заменив её в достаточно малых окрестностях точек разрыва непрерывным наклонными участками, тогда получим новую функцию $f(x)$, которая уже будет кусочно-линейной и для которой $S_n(0;\ f) > a$.

По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить тригонометрическим полиномом. Тогда получим новую функцию $f(x)$, которая уже будет тригонометрическим полиномом и для которой $S_n(0;\ f) > a$.

Чтобы не нарушилось условие $|P_a(x)| \leqslant 1\ \ \forall x$, нормируем тригонометрический полином $f(x)$, то есть поделим его на $1+\varepsilon$, где ε достаточно мало, чтобы выполнялись все условия леммы. ■

Лемма 26.2. $\forall a > 0\ \ \exists p_a(x) \geqslant 0$ *– тригонометрический многочлен (a – параметр, но не степень многочлена) такой, что* $p_a(x) = 1 + \ldots$ *(тогда* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} p_a(x)\,dx = 2\pi$*) и* $\forall x\ \ \exists n \in \mathbb{N}\colon\ S_n(x, p_a) > a$.

Лемму (26.2) оставим без доказательства.

Пусть $a = k^3$. Построим ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{p_{k^3}(x\cdot n_k)}{k^2}$, где $n_k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\dfrac{p_{k^3}(x\cdot n_k)}{k^2} \geqslant 0$, причём нормы таких функций образуют сходящийся ряд. Тогда по теореме Леви построенный ряд почти всюду сходится к некоторой функции $f(x)$. Множители n_k будем выбирать по индукции достаточно большими, чтобы общим членом полиномов $p_{k^3}(x\cdot n_k)$ была только единица. Члены, соответствующие единицам в полиномах p, в построенном нами ряде дадут сумму $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{6}$. Если её вычесть из ряда, то получится ряд Фурье. Этот ряд Фурье будет расходиться всюду по критерию Коши. Действительно, если бы этот ряд сходился для некоторого значения x, то выполнялось бы:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\colon\ \ \forall m, s > N \quad |S_m(x) - S_s(x)| < \varepsilon,$$

но это условие будет нарушаться, так как по лемме (26.2) можно подобрать такие номера m и n, чтобы выполнялось $|S_m(x) - S_s(x)| > k$. ■

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ