МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 4

КОСУХИН
ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Семинар 1

В курсе используется сборник задач и упражнений по математическому анализу Б. П. Демидовича.

Напоминание о построении интеграла

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ (для простоты положительную) на отрезке $[a, b]$. Требуется найти площадь под графиком этой функции (ограниченную осью x). Построим интеграл по Риману. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ следующего вида $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, а также отмеченные точки $\Sigma = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, где $x_{j-1} \leqslant \xi_j \leqslant x_j$. Получили отмеченное разбиение. Теперь можем подменить криволинейную трапецию на «ступенчатую» фигуру, у которой «ступеньки» имеют ширину $(x_j - x_{j-1})$ и высоту $f(\xi_j)$.

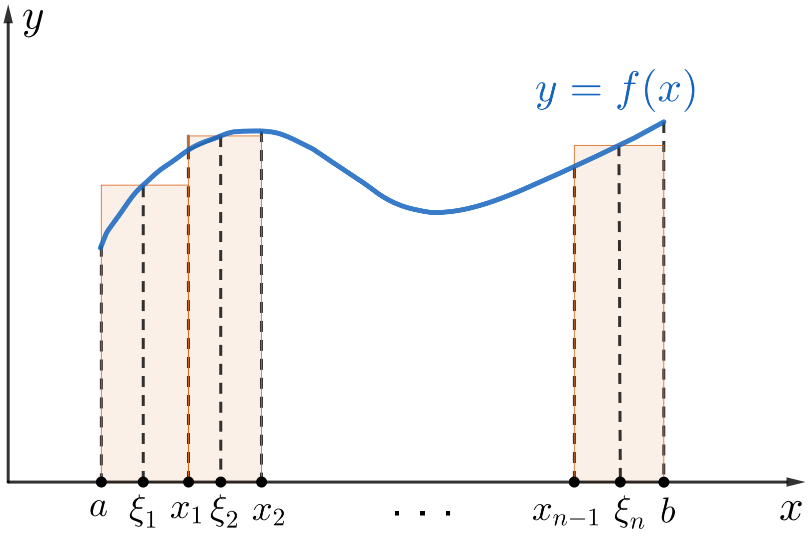

Рис. 1.1: Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью отмеченного разбиения

Определение 1.1. $\lambda(T) = \max |x_j - x_{j-1}|$ – *диаметр разбиения* T.

Определение 1.2. $\sigma = \sum\limits_j f(\xi_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$ – *интегральная сумма.*

Определение 1.3. Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то число I называется *интегралом Римана*, а функция f – *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a, b]$. Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $f \in R[a, b]$.

Утверждение 1.1. $f \in R[a, b] \;\Rightarrow\; f$ – *ограничена на* $[a, b]$.

Утверждение 1.2. $f \in C[a, b] \;\Rightarrow\; f \in R[a, b]$.

Утверждение 1.3. f – *монотонна на* $[a, b] \;\Rightarrow\; f \in R[a, b]$.

Определение 1.4.
Верхняя сумма Дарбу $S(f, T)$ – точная верхняя грань интегральных сумм.
Нижняя сумма Дарбу $s(f, T)$ – точная нижняя грань интегральных сумм.

Утверждение 1.4 (Критерий Дарбу)**.**

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists T\colon \ \ S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon.$$

Утверждение 1.5 (Критерий Лебега)**.**

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad f \ \textit{ограничена и почти всюду непрерывна.}$$

С помощью формулы Ньютона-Лейбница интеграл считать гораздо проще, чем по определению.

Кратный интеграл для двух переменных

Рассмотрим замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ (пусть для простоты она положительна на Ω). Задача состоит в том, чтобы посчитать объём тела, которое ограничено функцией $f(x, y)$ сверху и её «тенью» снизу.

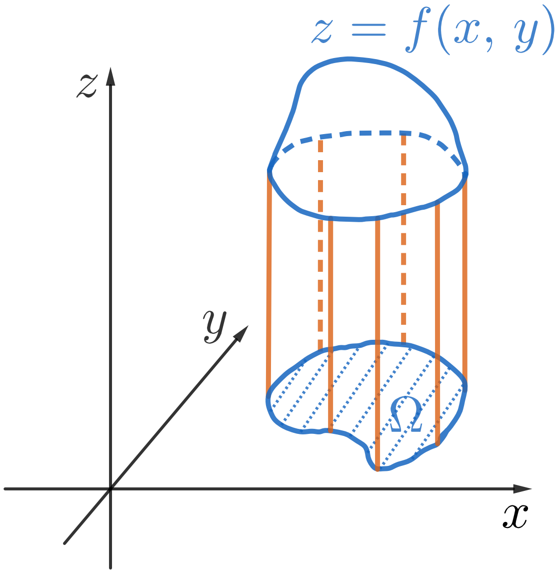

Рис. 1.2: Тело, ограниченное функцией $f(x, y)$ сверху и её «тенью» снизу

Рассмотрим построение интеграла Римана. Основной подход: начать с рассмотрения таких областей Ω, которые состоят из объединения конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Если прямоугольники пересекаются не только по границе, то их всегда можно представить в виде набора прямоугольников, которые могут пересекаться только по границе. Таким образом, $\Omega = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j$ (подразумевается, что прямоугольники Ω_j могут пересекаться по границе). Значит, нам надо сперва научиться строить интеграл Римана для прямоугольника.

Разделим смежные стороны прямоугольника на некоторые части (по горизонтали пусть будут риски $x_0, \ldots, x_n$, а по вертикали – риски $y_0, \ldots, y_m$) и на основе этого разбиения построим сетку на прямоугольнике. В этой сетке будет $(n+1)(m+1)$ прямоугольников, причём площадь каждого из них будет равна $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Выберем внутри каждого прямоугольника некоторую точку ξ_{ij}.

Определение 1.5. $\lambda(T) = \max d_{ij}$ – *диаметр разбиения* T, где d_{ij} – диагональ прямоугольника с номером i, j.

Определение 1.6. $\sigma = \sum\limits_{i,j} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ – *интегральная сумма*, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Определение 1.7. Если $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma = I$, то число I называется *интегралом Римана*.

Обозначение: $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy$.

Таким образом, мы определили интеграл по прямоугольнику и по конечному объединению прямоугольников.

Теперь рассмотрим некоторое конечное множество Ω произвольной формы с определённой на нём функцией $f(x,y)$. Доопределим функцию $f(x,y)$ снаружи множества Ω значением 0 и заключим множество Ω внутрь некоторого конечного объединения прямоугольников. Далее интегрируем доопределённую функцию $f(x,y)$ по этому множеству, состоящему из конечного объединения прямоугольников.

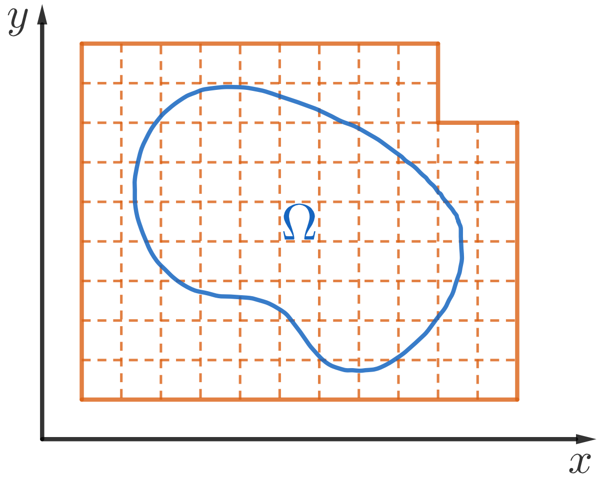

Рис. 1.3: Множество Ω, заключённое внутри конечного объединения прямоугольников, разбитых на прямоугольную сетку

Однако может возникнуть проблема. Например, рассмотрим $f(x,y) \equiv 1$ на Ω. При разбиении на прямоугольную сетку остаётся свобода выбора точек ξ_{ij}, и в тех прямоугольниках, которые попадают на границу Ω, функция может принимать значения 1 или 0. Тогда разность между верхней и нижней суммами Дарбу будет составлять

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum{}' 1 \cdot S_{ij},$$

где $\sum{}'$ – сумма только по тем прямоугольникам, которые попали на границу Ω, 1 – колебание функции на таких прямоугольниках, S_{ij} – площадь прямоугольника с номером i, j. Тогда по критерию Дарбу функция $f(x, y) \equiv 1$ будет интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum{}' S_{ij}$ может быть сделана сколь угодно малой при $\lambda(T) \to 0$.

Для простых областей эту площадь можно сделать сколь угодно малой, но для достаточно сложных областей это уже неверно. Рассмотрим в качестве примера так называемый ковёр Серпинского. Построение ковра Серпинского начнём с квадрата со стороной 1. Вырезаем из него центральную часть в некоторой пропорции от сторон квадрата. Далее мысленно делим квадрат с вырезанной центральной частью на 8 прямоугольников. В каждом из прямоугольников повторяем процедуру вырезания центральной части. И так далее до бесконечности.

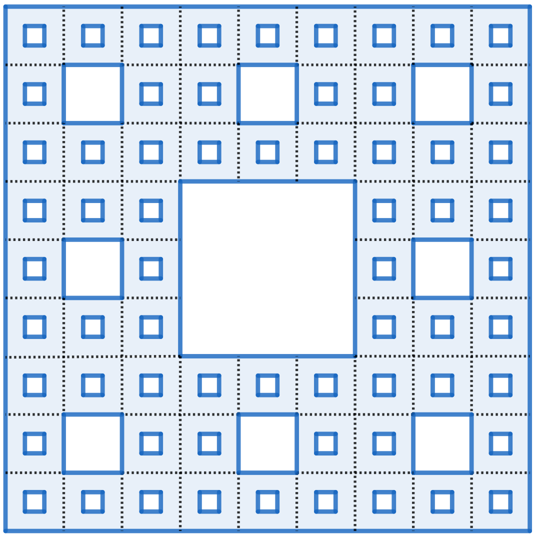

Рис. 1.4: Начало построения ковра Серпинского

Подбирая соответствующим образом размеры вырезанных частей, можно добиться того, чтобы их суммарная площадь была равна, например, $\frac{1}{2}$. Так как вырезанные части в ковре Серпинского всюду плотны, то граница $\partial\Omega$ множества совпадает с самим множеством Ω. Тогда $\sum{}' S_{ij} \geqslant \frac{1}{2}$, значит, $\sum{}' S_{ij}$ не может быть сделана сколь угодно малой при $\lambda(T) \to 0$.

Определение 1.8. Ω – *квадрируемая область* (*измеримая по Жордану*), если $\exists \iint\limits_{\Omega} 1\, dx\, dy$.

Утверждение 1.6. *Если область Ω ограничена кусочно гладкой кривой, то она квадрируемая.*

Утверждение 1.7 (Критерий квадрируемости)**.** *Область Ω квадрируема тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$ конечное количество прямоугольников с суммарной площадью меньше ε, такое что $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_j P_j$.*

Приведём ещё один пример неквадрируемой области. Рассмотрим множество точек внутри единичного квадрата, таких что обе их координаты являются рациональными числами. Границей этого множества будет весь единичный квадрат (то есть граница множества больше самого множества).

Утверждение 1.8. *На квадрируемых множествах интегрируемы все непрерывные функции.*

Альтернативный подход к построению интеграла Римана: покрывать область не прямоугольниками, а многоугольником, который затем разбивать треугольниками. Такой подход явным образом не зависит от выбора системы координаты. Основной подход также не зависит от выбора системы координат, но это требует доказательства.

Упражнение 1.1 (На дом)**.** а) Доказать, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники. б) Доказать, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники диагоналями.

Ещё один подход к построению интеграла Римана: разбивать область на какие-либо квадрируемые множества. При таком подходе интегрируемая функция может быть неограничена на интегрируемой области (но только на тех участках области, площадь которых 0).

Вычисление двойного интеграла по определению

Задача 3902. Составить нижнюю s верхнюю S интегральные суммы для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ в области $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \qquad y = 1 + \frac{2j}{n}, \qquad (i,\, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Чему равны пределы этих сумм при $n \to +\infty$?

Решение:

Построим заданную область и разобьём её на прямоугольники.

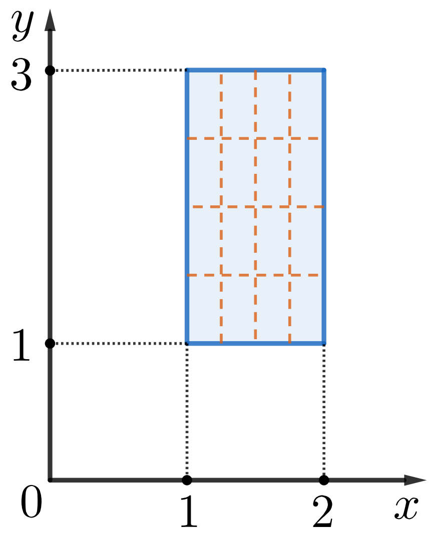

Рис. 1.5: Разбиение заданной области на прямоугольники

Функция $f(x,y)$ показывает расстояние от начала координат до точки с координатами (x,y). Тогда в каждом из прямоугольников эта функция будет принимать наименьшее значение в левом нижнем углу прямоугольника, а наибольшее – в правом верхнем.

$$s(f,T) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{2}{n^2}\left(\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2(j-1)}{n}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(\left(1+\frac{i'}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j'}{n}\right)^2\right) \tag{1.1}$$

Учитывая, что $\sum\limits_{i'=0}^{n-1} i' = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и $\sum\limits_{i'=1}^{k} i'^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, то есть $\sum\limits_{i'=0}^{n-1} i'^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, получаем:

$$\frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(1+\frac{i'}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\cdot n\sum_{i'=0}^{n-1}\left(1+\frac{2i'}{n}+\frac{i'^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{n}\left(n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = 2+\frac{2(n-1)}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2};$$
$$\frac{2}{n^2}\sum_{i'=0}^{n-1}\sum_{j'=0}^{n-1}\left(1+\frac{2j'}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^2}\cdot n\sum_{i'=0}^{n-1}\left(1+\frac{4j'}{n}+\frac{4j'^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{2}{n}\left(n+\frac{4}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{4}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = 2+\frac{4(n-1)}{n}+\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}.$$

Продолжим вычисление нижней суммы Дарбу (1.1):

$$s(f,T) = 4 + \frac{6(n-1)}{n} + \frac{5(n-1)(2n-1)}{3n^2}.$$

По аналогии можно получить выражение для верхней суммы Дарбу (границы индексов суммирования увеличатся на 1):

$$S(f,T) = 4 + \frac{6(n+1)}{n} + \frac{5(n+1)(2n+1)}{3n^2}. \tag{1.2}$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,T) = \lim_{n\to+\infty} S(f,T) = 4 + 6 + \frac{10}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Так как нижняя и верхняя суммы Дарбу стремятся к одному значению, то по критерию Дарбу функция $f(x,y)$ интегрируема на заданном множестве, причём её интеграл равен $13\frac{1}{3}$. □

Сведение двойного интеграла к повторному

Более быстрый способ вычисления двойного интеграла: сведение его к повторному.

Определение 1.9. Будем называть область Ω *элементарной*, если она задаётся следующим образом:

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ (переменные можно поменять местами).

Утверждение 1.9. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$, *где Ω – элементарная область (переменные можно поменять местами и скобки можно не ставить).*

Вычисление повторного интеграла

Задача 3907. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

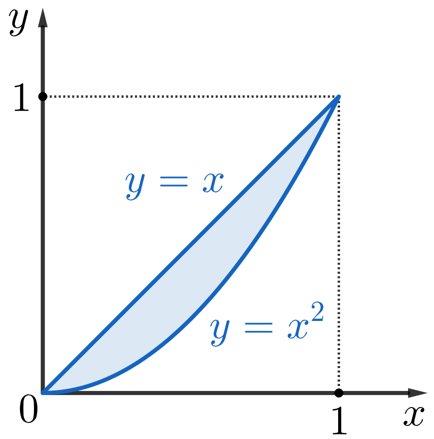

Рис. 1.6: Область интегрирования

Таким образом, $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy = \iint\limits_{\Omega} xy^2\,dx\,dy$, где Ω – область интегрирования.

$$\int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy = x\int\limits_{x^2}^{x} y^2\,dy = x \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{x} = x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3};$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\,dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx = \left(\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}.$$

$\square$

Семинар 2

Решение задач на двойные интегралы

Задача 3916. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

Решение:

Изобразим область Ω.

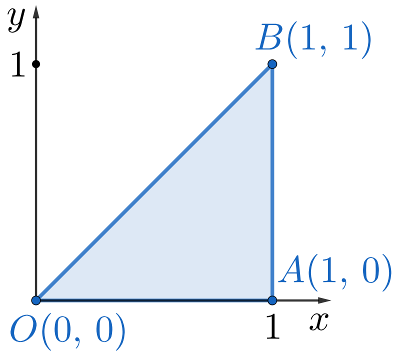

Рис. 2.1: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [0;\,1]$ имеем: $y \in [0;\,x]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,dy\,dx.$$

С другой стороны, при каждом фиксированном значении $y \in [0;\,1]$ имеем: $x \in [y;\,1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Задача 3918. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – трапеция с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$.

Решение:

Изобразим область Ω.

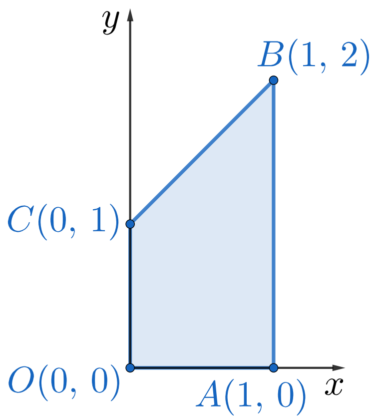

Рис. 2.2: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [0;\ x+1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx.$$

С другой стороны, при каждом фиксированном значении $y \in [0;\ 1]$ имеем: $x \in [0;\ 1]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [1;\ 2]$, то $x \in [y-1;\ 1]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_1^2 \int\limits_{y-1}^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Задача 3922. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где Ω – круговое кольцо: $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$.

Решение:

Изобразим область Ω и разделим её на 4 части, как показано на рисунке.

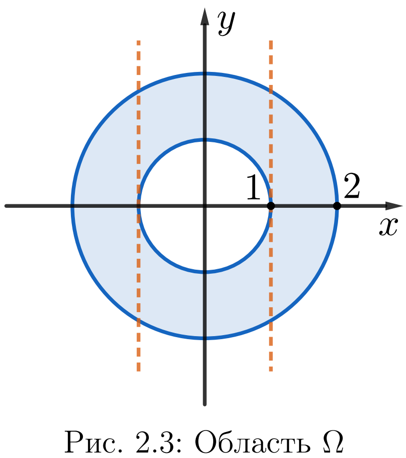

Рис. 2.3: Область Ω

При каждом фиксированном значении $x \in [-2;\ -1] \cup [1;\ 2]$ имеем: $y \in \left[-\sqrt{4-x^2};\ \sqrt{4-x^2}\right]$, а при каждом фиксированном значении $x \in [-1;\ 1]$ имеем: $y \in \left[-\sqrt{4-x^2};\ -\sqrt{1-x^2}\right] \cup \left[\sqrt{1-x^2};\ \sqrt{4-x^2}\right]$. Значит, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{-1}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx +$$
$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Другой порядок переменных можно получить аналогично. При этом в результате везде, кроме аргументов функции, x и y поменяются местами. □

Задача 3924. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования.

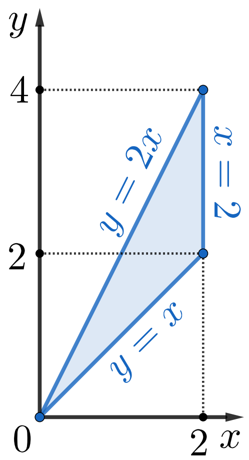

Рис. 2.4: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $y \in [0;\ 2]$ имеем: $x \in \left[\frac{y}{2};\ y\right]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [2;\ 4]$ имеем: $x \in \left[\frac{y}{2};\ 2\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{2}^{4}\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Задача 3929. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{2a}\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx \qquad (a>0).$$

Решение:

Заметим, что $y=\sqrt{2ax-x^2}$ эквивалентно $\begin{cases} y\geqslant 0\\ y^2=2ax-x^2\end{cases}$, причём вторая строка системы приводится к виду $(x-a)^2+y^2=a^2$. Таким образом, $y=\sqrt{2ax-x^2}$ задаёт верхнюю полуокружность с центром $(a,0)$ и радиусом a. Также заметим, что $y=\sqrt{2ax}$ эквивалентно $\begin{cases} y\geqslant 0\\ y^2=2ax\end{cases}$. Таким образом, $y=\sqrt{2ax}$ задаёт верхнюю ветвь параболы, симметричной относительно оси x.

Изобразим область интегрирования и разделим её на 3 части, как показано на рисунке.

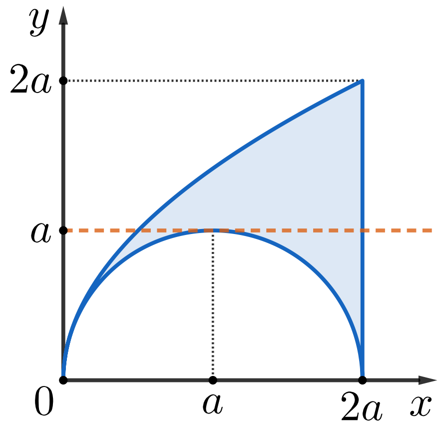

Рис. 2.5: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $y\in[0;\,a]$ имеем: $x\in\left[\dfrac{y^2}{2a};\ a-\sqrt{a^2-y^2}\right]\cup$ $\cup\left[a+\sqrt{a^2-y^2};\ 2a\right]$, а при каждом фиксированном значении $y\in[a;\,2a]$ имеем: $x\in\left[\dfrac{y^2}{2a};\ 2a\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_0^{2a}\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx=\int\limits_0^{a}\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\int\limits_0^{a}\int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy+\int\limits_a^{2a}\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Замена переменных в двойном интеграле

Сначала вспомним, как была устроена замена переменной в интеграле в случае одной переменной. Пусть функция $x = \varphi(t)$ отображает отрезок $[\alpha;\, \beta]$ в отрезок $[a;\, b]$, причём $\varphi'(t) \in C[\alpha;\, \beta]$. Тогда формула замены переменной выглядит следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Рассмотрим сегменты $\Delta t \in [\alpha;\, \beta]$ и $\Delta\varphi(t) \in [a;\, b]$. Так как по теореме Лагранжа $\dfrac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(c)$ для некоторой точки c в сегменте длины Δt, то множитель $\varphi'(t)$ внутри интеграла отвечает за искажение длины элементарного отрезка при замене переменной.

Теорема 2.1. *Пусть $F : \mathbb{R}^2(x, y) \to \mathbb{R}^2(u, v)$ – биекция, для этого требуется, чтобы производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y были непрерывны и определитель $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$ сохранял знак, например, был всегда больше 0. Пусть $F : \Omega(x, y) \to \Omega'(u, v)$ – преобразование области интегрирования. Тогда формула замены переменных выглядит следующим образом:*

$$\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v),\, y(u, v)) \cdot \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv,$$

где $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}^{-1}.$

Замечание 2.1. Множитель $\left|\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|$ внутри интеграла отвечает за искажение длины элементарного параллелограмма при замене переменных.

Задача 3935. Вычислить интеграл:

$$\iint\limits_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

где Ω – параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$, где $a > 0$.

Решение:

Заметим, что область интегрирования задаётся следующей системой: $\begin{cases} a \leqslant y \leqslant 3a \\ -a \leqslant x - y \leqslant 0 \end{cases}$. Значит, можно сделать следующую замену переменных: $u = x - y$, $v = y$. Тогда $x = u + v$, $y = v$, поэтому $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. При такой замене переменных область Ω перейдёт в область Ω', которая задаётся следующей системой: $\begin{cases} -a \leqslant u \leqslant 0 \\ a \leqslant v \leqslant 3a \end{cases}$. Для интеграла получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} ((u+v)^2 + v^2)\, du\, dv = \int\limits_{-a}^{0} \int\limits_{a}^{3a} ((u+v)^2 + v^2)\, dv\, du.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

Семинар 3

Разбор домашнего задания

Задача 3909. Доказать равенство:

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

где R – прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$ и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

Решение:

Используя вынесение константы (относительно переменной интегрирования) за знак интеграла, получим:

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A \int\limits_b^B X(x)Y(y)\,dy\,dx =$$
$$= \int\limits_a^A X(x) \int\limits_b^B Y(y)\,dy\,dx = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy.$$

$\square$

Полярная замена переменных

Определение 3.1. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ – *полярная замена переменных*, где $r \geqslant 0$.

Замечание 3.1. r – расстояние от начала координат до точки (x, y), φ – угол поворота радиус-вектора точки (x, y) относительно положительного направления оси абсцисс.

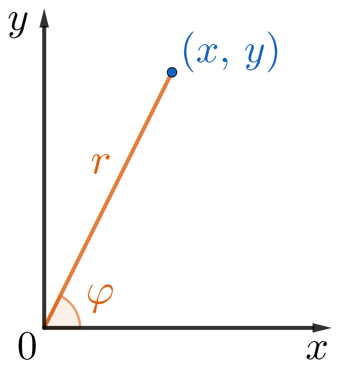

Рис. 3.1: Полярная замена переменных

Отображение прямоугольника на круг не является взаимно однозначным (см. рисунок).

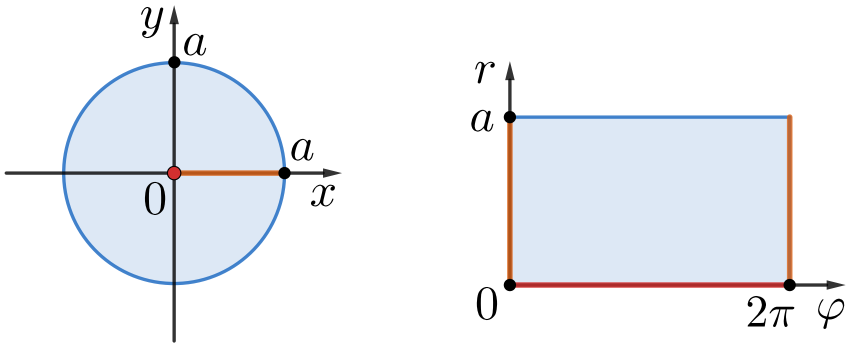

Рис. 3.2: Отображение прямоугольника на круг

Но можно сделать в круге разрез вдоль областей, где нарушается взаимная однозначность, затем применить отображение, а затем непрерывным образом продолжить формулы, вытекающие из замены переменных.

Задача 3937. В двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, где Ω – круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$, перейти к полярным координатам r и φ.

Решение:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r;$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

□

Задача 3954. Переходя к полярным координатам, вычислить следующий интеграл:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Решение:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^a r^2\,dr\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

□

Замечание 3.2. Найденный интеграл представляет собой объём тела под перевёрнутым конусом с высотой a и радиусом a и равен объёму половины шара радиуса

a. Это связано с тем, как Архимед находил объём шара: он использовал равенство площади сечения цилиндра и суммы площадей сечений половины шара и конуса. Действительно, $\pi a^2 = \pi r^2 + \pi(a^2 - r^2)$ (здесь r – расстояние от верха фигур до сечения, изображённого на рисунке).

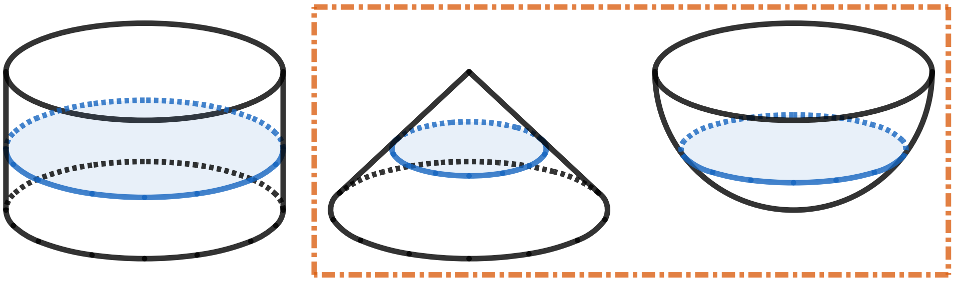

Рис. 3.3: Метод Архимеда вычисления объёма шара

Как итог, Архимед получил:

$$V_{\text{шара}} = 2(V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{конуса}}) = 2\left(\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\right) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Обобщённая полярная замена переменных

Сначала рассмотрим «немного» обобщённую полярную замену переменных.

Задача 3967. Вычислить следующий двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

где область Ω ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение:

Выполним замену переменных по следующим формулам: $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$. Тогда прямоугольник будет «почти» взаимно однозначно отображаться на эллипс (с теми же оговорками, которые были в обычной полярной замене).

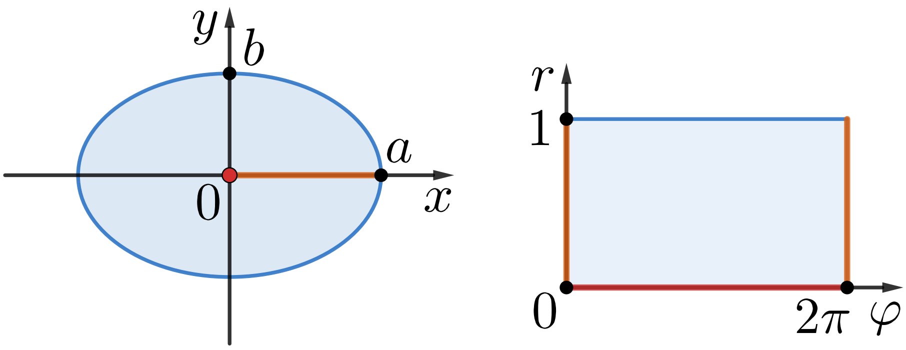

Рис. 3.4: Отображение прямоугольника на эллипс

Учитывая, что $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$, получаем:

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\cdot abr\,dr\,d\varphi = 2\pi ab\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= \pi ab\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(r^2) = \pi ab\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

□

Замечание 3.3. Так как $z = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ эквивалентно $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+z^2=1\\ z\geqslant 0\end{cases}$, то найденное значение интеграла представляет собой половину объёма эллипсоида с полуосями a, b, 1.

Определение 3.2. $\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\varphi\\ y = br\sin^\alpha\varphi\end{cases}$ – *обобщённая полярная замена переменных*, где $r\geqslant 0$, и если α – произвольная степень, то $\varphi\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задача 3993. Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2} \qquad (x>0,\quad y>0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha=2$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4\leqslant\dfrac{x^2}{h^2}+$ $+\dfrac{y^2}{k^2}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^4\leqslant\dfrac{a^2}{h^2}r^2\cos^4\varphi+\dfrac{b^2}{k^2}r^2\sin^4\varphi$, то есть $r^2\leqslant\dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\dfrac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi};\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\varphi & -\alpha ar\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\varphi & \alpha br\sin^{\alpha-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = \\
&= ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \\
&= ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi = 2abr\cos\varphi\sin\varphi; \\
&S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\, dr\, d\varphi.
\end{aligned}
$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

Семинар 4

Решение задач на замену переменных

Задача 3991. Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha = 1$ (также мы учитываем, что для упрощения хотим, чтобы после сокращения на r у переменной r был коэффициент 1, поэтому не берём $\alpha = 2$). Область Ω задаётся неравенством $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах ($x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$) область Ω будет задаваться неравенством $r^2 \leqslant \dfrac{a}{h}r\cos\varphi + \dfrac{b}{k}r\sin\varphi$, то есть $r \leqslant \dfrac{a}{h}\cos\varphi + \dfrac{b}{k}\sin\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

$$S = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi} abr\,dr\,d\varphi = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi + 2\frac{ab}{hk}\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi.$$

В силу нечётности и периодичности функции $\sin\varphi\cos\varphi$ имеем: $\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi = 0.$

Тогда получим:

$$S = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi + \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right) d\varphi$$

Посчитаем $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi$, используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi \sin^n\varphi\,d\varphi =$

$= \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2}\right)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 2B\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi.$$

Аналогично можно показать, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi = \pi$, в итоге для S получим:

$$S = \frac{ab\pi}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

□

Задача 3997. Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченные следующими кривыми:

$$xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x, \quad y = 2x \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\, dy$, где Ω – заданная область.

Перепишем уравнения кривых следующим образом:

$$a^2 \leqslant xy \leqslant 2a^2, \quad 1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 2 \quad (x > 0, \quad y > 0).$$

Используем замену переменных: $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$, тогда $a^2 \leqslant u \leqslant 2a^2$, $1 \leqslant v \leqslant 2$.

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x};$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v};$$

$$S = \int\limits_1^2 \int\limits_{a^2}^{2a^2} \frac{du\, dv}{2v} = \frac{a^2}{2}\int\limits_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{a^2}{2}\ln 2.$$

□

Задача 3999 (1)**.** Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченные следующими кривыми:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4,\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad 8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (x>0,\quad y>0).$$

Решение:

$S=\iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Используем замену переменных: $\begin{cases} u=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \\ v=\frac{ay}{bx}\end{cases}$, тогда $1\leqslant u\leqslant 4$, $1\leqslant v\leqslant 8$.

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{a} & \frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{b} \\ -\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x^2} & \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{a}+\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{b}\right)=\frac{2}{3}x^{-2}ab^{-1}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{2}{3}x^{-2}ab^{-1}u;$$

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right);$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2}=\frac{u^3}{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3};\qquad x^{-2}=\frac{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{a^2u^3};$$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{a^2u^3}\cdot\frac{au}{b}=\frac{2\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}{3abu^2};$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{3abu^2}{2\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3};$$

$$S=\int\limits_1^4\int\limits_1^8\frac{3abu^2}{2\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}\,dv\,du=\frac{3ab}{2}\int\limits_1^4 u^2\,du\cdot\int\limits_1^8\frac{dv}{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

Остаётся технический момент: досчитать интегралы, не будем это делать. □

Кратный интеграл для трёх переменных

Вкратце обсудим введение тройного интеграла. Рассмотрим брус и разделим его на маленькие брусы с объёмами $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Выберем в каждом маленьком брусе точку $\xi_{i,j,k}$. Тогда $\sigma = \sum\limits_{i,j,k} f(\xi_{i,j,k})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ – интегральная сумма. Если существует предел этих интегральных сумм, то он называется тройным интегралом. Если брус назвать P, то тройной интеграл записывают так: $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Далее определяются измеримые по Жордану области. Это области Ω, у которых можно корректно посчитать объём, то есть $\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz$. Пример неизмеримого по Жордану множества: множество точек внутри единичного куба, все координаты которых рациональны. Чтобы множество было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы объём его границы был равен 0, то есть граница должна помещаться к объединение брусов со сколь угодно малым объёмом.

Определение 4.1. Области следующего вида $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y) \end{cases}$ будем называть *элементарными.*

Утверждение 4.1. *$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, где Ω – элементарная область (переменные можно поменять местами).*

Задача 4082. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

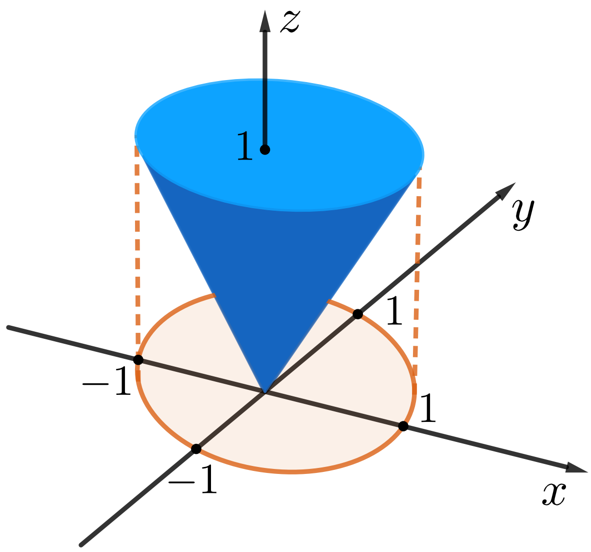

Рис. 4.1: Область интегрирования (синия)

Поверхность конуса задаётся уравнением $z^2 = x^2 + y^2$. При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [-z;\ z]$, а при каждом фиксированном значении y из этого множества имеем: $x \in \left[-\sqrt{z^2 - y^2};\ \sqrt{z^2 - y^2}\right]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-z}^{z} \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

$\square$

Семинар 5

Разбор домашнего задания

Задача 4081. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

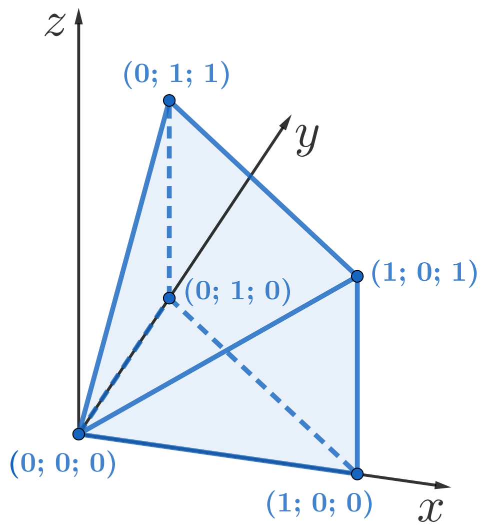

Рис. 5.1: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [0;\ 1]$, причём при каждом фиксированном значении $y \in [0;\ z]$ имеем: $x \in [z-y;\ 1-y]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [z;\ 1]$ имеем: $x \in [0;\ 1-y]$. Значит, получаем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{z} \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int\limits_0^1 \int\limits_z^{1} \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

□

Задача 4083. Различными способами расставить пределы в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1} \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Расставим пределы только в противоположном порядке.

Изобразим область интегрирования.

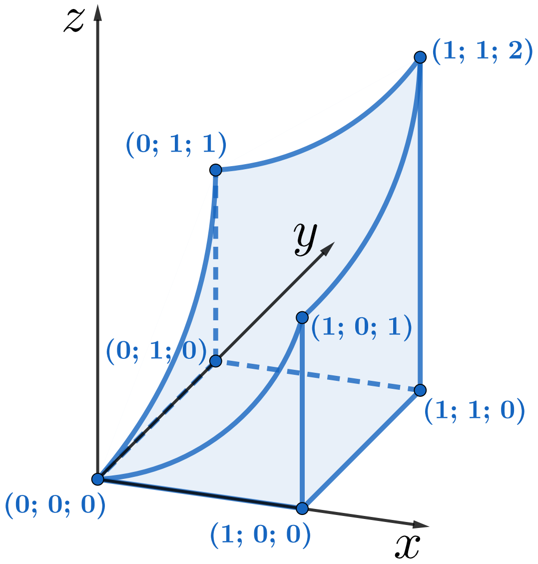

Рис. 5.2: Область интегрирования

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [0;\ 1]$, причём при каждом фиксированном значении $y \in [0;\ \sqrt{z}]$ имеем: $x \in \left[\sqrt{z-y^2};\ 1\right]$, а при каждом фиксированном значении $y \in [\sqrt{z};\ 1]$ имеем: $x \in [0;\ 1]$.

При каждом фиксированном значении $z \in [1;\ 2]$ имеем: $y \in \left[\sqrt{z-1};\ 1\right]$, причём при каждом фиксированном значении y из этого множества имеем: $x \in \left[\sqrt{z-y^2};\ 1\right]$.

Значит, получаем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{z}} \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{z}}^1 \int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \int\limits_1^2 \int\limits_{\sqrt{z-1}}^1 \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

□

Задача 3994 (1)**.** Найти площадь, ограниченную следующей кривой (параметры считаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \qquad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

$S = \iint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой полярной замене $\alpha = 2$, то есть $x = ar\cos^2\varphi$, $y = br\sin^2\varphi$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^4 \leqslant \dfrac{x^2}{h^2}-\dfrac{y^2}{k^2}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^4 \leqslant \dfrac{a^2}{h^2}r^2\cos^4\varphi - \dfrac{b^2}{k^2}r^2\sin^4\varphi$, то есть $r^2 \leqslant \dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \dfrac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi$. Причём так как $r^2 \geqslant 0$, то $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \sqrt{\dfrac{ak}{bh}}$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi = 2abr\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$S = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi}} 2abr\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}} ab\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi\right)d\varphi$$

Получившийся интеграл можно досчитать, учитывая, что $\cos^4\varphi = \left(\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2$ и $\sin^4\varphi = \left(\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2$, и делая замену $t = \cos 2\varphi$ (тогда $dt = -2\sin 2\varphi\,d\varphi = -4\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$). Не будем проделывать эти дальнейшие технические выкладки. □

Задача на перестановку пределов интегрирования

Задача. Расставить пределы в противоположном порядке в следующем тройном интеграле:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Решение:

Изобразим область интегрирования.

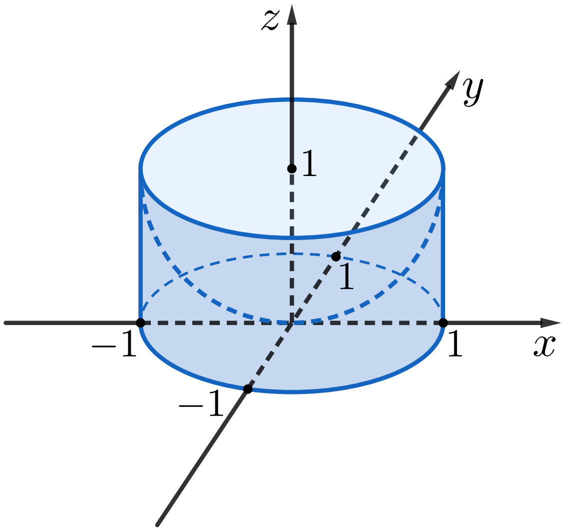

Рис. 5.3: Область интегрирования
(часть цилиндра под полусферой)

Уравнение полусферы будет иметь следующий вид: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, где $z \leqslant 1$. Уравнение цилиндра будет иметь следующий вид: $x^2 + y^2 = 1$.

При каждом фиксированном значении $z \in [0;\ 1]$ имеем: $y \in [-1;\ 1]$, причём:

· при каждом фиксированном значении $y \in \left[-1;\ -\sqrt{1-(z-1)^2}\right] \cup \cup \left[\sqrt{1-(z-1)^2};\ 1\right]$ имеем: $x \in \left[-\sqrt{1-y^2};\ \sqrt{1-y^2}\right]$;

· при каждом фиксированном значении $y \in \left[-\sqrt{1-(z-1)^2};\ \sqrt{1-(z-1)^2}\right]$ имеем: $x \in \left[-\sqrt{1-y^2};\ -\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}\right] \cup \left[\sqrt{1-y^2-(z-1)^2};\ \sqrt{1-y^2}\right]$.

Значит, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{0}^{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-(z-1)^2}} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-(z-1)^2}}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz +$$

$$+ \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-(z-1)^2}}^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \left(\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}} f(x,y,z)\,dx + \int\limits_{\sqrt{1-y^2-(z-1)^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

□

Сферическая замена переменных

Определение 5.1. $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$ – *сферическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Замечание 5.1. r – расстояние от начала координат до точки (x, y, z), ψ – угол поворота радиус-вектора точки (x, y, z) относительно плоскости Oxy, φ – угол поворота проекции радиус-вектора точки (x, y, z) на плоскость Oxy относительно положительного направления оси абсцисс.

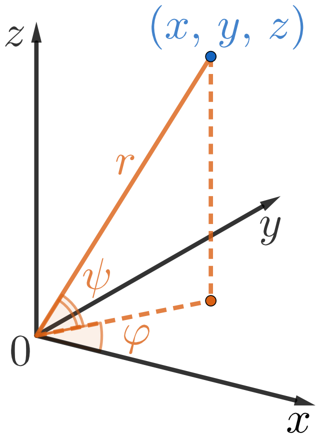

Рис. 5.4: Сферическая замена переменных

Замечание 5.2. В качестве альтернативы можно выбирать ψ как угол поворота радиус-вектора точка (x, y, z) относительно положительного направления оси аппликат, тогда $\psi \in [0;\, \pi]$.

Упражнение 5.1 (На дом)**.** Вычислить определитель сферической замены.

Семинар 6

Разбор домашнего задания

Задача 4098 (a)**.** Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где f – дифференцируемая функция.

Решение:

Сделаем сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}.$

Тогда $x^2+y^2+z^2 = r^2 \leqslant t^2$, значит, $r \in [0;\, t]$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$$F(t) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^t f(r^2)r^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi = 2\pi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^t f(r^2)r^2\cos\psi\,dr\,d\psi =$$

$$= 2\pi\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int\limits_0^t f(r^2)r^2\,dr = 4\pi\int\limits_0^t f(r^2)r^2\,dr;$$

$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

□

Цилиндрическая замена переменных

Определение 6.1. $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$ – *цилиндрическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $h \in \mathbb{R}$.

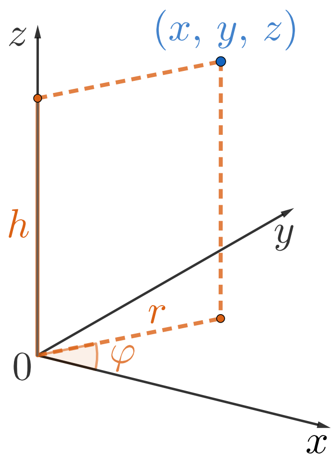

Рис. 6.1: Цилиндрическая замена переменных

Обобщённая сферическая замена переменных

Определение 6.2. $\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\psi\cos^\beta\varphi \\ y = br\cos^\alpha\psi\sin^\beta\varphi \\ z = cr\sin^\alpha\psi \end{cases}$ – *обобщённая сферическая замена переменных*, где $r \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и если α и β – произвольные положительные степени, то $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\psi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} =$$
$$= \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\psi\cos^\beta\varphi & -a\beta r\cos^\alpha\psi\sin\varphi\cos^{\beta-1}\varphi & -a\alpha r\sin\psi\cos^{\alpha-1}\psi\cos^\beta\varphi \\ b\cos^\alpha\psi\sin^\beta\varphi & b\beta r\cos^\alpha\psi\cos\varphi\sin^{\beta-1}\varphi & -b\alpha r\sin\psi\cos^{\alpha-1}\psi\sin^\beta\varphi \\ c\sin^\alpha\psi & 0 & c\alpha r\cos\psi\sin^{\alpha-1}\psi \end{vmatrix} =$$
$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{vmatrix} =$$
$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) =$$
$$= abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi.$$

Задача 4116. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \qquad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0).$$

Решение:

$V = \iiint\limits_\Omega dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой сферической замене $\alpha = \beta = 2$, то есть $\begin{cases} x = ar\cos^2\psi\cos^2\varphi \\ y = br\cos^2\psi\sin^2\varphi \\ z = cr\sin^2\psi \end{cases}$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^2 \leqslant \frac{a}{h}r\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}r\cos^2\psi\sin^2\varphi$, то есть $r \leqslant \frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi + \frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abc\alpha\beta r^2\cos^{2\alpha-1}\psi\sin^{\alpha-1}\psi\cos^{\beta-1}\varphi\sin^{\beta-1}\varphi =$$
$$= 4abcr^2\cos^3\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{a}{h}\cos^2\psi\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\cos^2\psi\sin^2\varphi} 4abcr^2\cos^3\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3\cos^9\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \frac{abc}{3}\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\psi\sin\psi\,d\psi\cdot\left(2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3}{h^3}\cos^7\varphi\sin\varphi\,d\varphi + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3\frac{a^2b}{h^2k}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi + \right.$$
$$\left. + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}3\frac{ab^2}{hk^2}\cos^3\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^3}{k^3}\cos\varphi\sin^7\varphi\,d\varphi\right).$$

Используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\psi\sin^n\psi\,d\psi = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2}\right)$, получим:

$$V = \frac{abc}{3} \cdot B(5;\,1) \cdot \left(\left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3} \right) B(4;\,1) + 3 \left(\frac{a^2 b}{h^2 k} + \frac{ab^2}{hk^2} \right) B(3;\,2) \right) =$$
$$= \frac{abc}{3} \cdot \frac{\Gamma(5)\Gamma(1)}{\Gamma(6)} \cdot \left(\left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3} \right) \frac{\Gamma(4)\Gamma(1)}{\Gamma(5)} + 3 \left(\frac{a^2 b}{h^2 k} + \frac{ab^2}{hk^2} \right) \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} \right) =$$
$$= \frac{abc}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3} \right) \frac{1}{4} + 3 \left(\frac{a^2 b}{h^2 k} + \frac{ab^2}{hk^2} \right) \frac{1}{12} \right) =$$
$$= \frac{abc}{60} \left(\frac{a^3}{h^3} + \frac{b^3}{k^3} + \frac{a^2 b}{h^2 k} + \frac{ab^2}{hk^2} \right).$$

□

Задача 4118. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями (параметры предполагаются положительными):

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \qquad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0).$$

Решение:

$V = \iiint\limits_{\Omega} dx\,dy$, где Ω – заданная область.

Чтобы задействовать основное тригонометрическое тождество, выберем в обобщённой сферической замене $\alpha = 1$ и $\beta = 2$, то есть $\begin{cases} x = ar\cos\psi\cos^2\varphi \\ y = br\cos\psi\sin^2\varphi \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$. Область Ω задаётся неравенством $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \leqslant 1$, так как для достаточно больших значений x и y, то есть для достаточно удалённой от начала координат точки, левая часть будет больше правой. В новых координатах область Ω будет задаваться неравенством $r^2 \leqslant 1$. Значит, в новых координатах имеем следующие границы области:

$$0 \leqslant r \leqslant 1; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abc\alpha\beta r^2 \cos^{2\alpha-1}\psi \sin^{\alpha-1}\psi \cos^{\beta-1}\varphi \sin^{\beta-1}\varphi = 2abcr^2 \cos\psi\cos\varphi\sin\varphi;$$
$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{1} 2abcr^2 \cos\psi\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi = 2abc \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$$

Используя формулу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\psi \sin^n\psi\,d\psi = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2};\ \frac{n+1}{2} \right)$, получим:

$$V = \frac{2abc}{3} \cdot \frac{1}{2} B(1;\, 1) = \frac{abc}{3} \cdot \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{abc}{3}.$$

$\square$

Центр масс плоской фигуры

Определение 6.3. Пусть Ω – плоская фигура с плотностью $\rho(x,y)$, тогда (x_0, y_0) – *центр масс* этой фигуры, где

$$x_0 = \frac{\iint\limits_{\Omega} x \cdot \rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\, dx\, dy}; \qquad y_0 = \frac{\iint\limits_{\Omega} y \cdot \rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\, dx\, dy}.$$

Задача 4054. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной следующими кривыми:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (x > 0, \quad y > 0).$$

Решение:

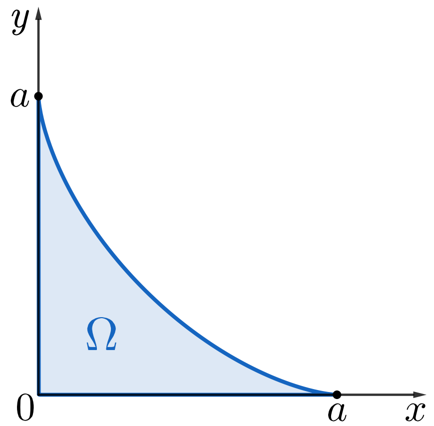

Рис. 6.2: Заданная пластинка Ω

Из соображений симметрии ясно, что $x_0 = y_0 = \dfrac{\iint\limits_{\Omega} x\, dx\, dy}{\iint\limits_{\Omega} dx\, dy}$.

Используем обобщённую полярную замену: $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$, тогда $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. В новых координатах граничная кривая задаётся следующим уравнением: $r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, то есть $r = a$.

$$\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a r\cos^3\varphi \cdot 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^a 3r^2\,dr \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= a^3\cdot\frac{1}{2}B\left(3;\ \frac{3}{2}\right) = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8a^3}{105};$$

$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^a 3r\,dr \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right) = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\pi a^2}{32};$$

$$x_0 = y_0 = \frac{8a^3}{105} : \frac{3\pi a^2}{32} = \frac{256a}{315\pi}.$$

$\square$

Семинар 7

Центр масс плоской фигуры (продолжение)

Утверждение 7.1. *Пусть m_1, m_2, …, m_n – массы, находящиеся в точках A_1, A_2, …, A_n соответственно, и A – произвольная точка, тогда точка O – центр масс системы точек A_1, A_2, …, A_n, причём*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO} = \dfrac{m_1\overrightarrow{AA}_1 + m_2\overrightarrow{AA}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{AA}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \\ m_1\overrightarrow{OA}_1 + m_2\overrightarrow{OA}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{OA}_n = \vec{0} \end{cases}.$$

Утверждение 7.2. *Пусть дана пластинка Ω с плотностью $\rho(x,y)$, причём $\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy \neq 0$. Пусть точка O – центр масс Ω, точка $A(x,y)$ – произвольная точка, A_0 – некоторая фиксированная точка. Тогда*

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Omega} \overrightarrow{OA}(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy = \vec{0} \\ \dfrac{\iint\limits_{\Omega} \overrightarrow{A_0A}(x,y)\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} \rho(x,y)\,dx\,dy} = \overrightarrow{A_0O} \end{cases}.$$

Задача 2506. Доказать *вторую теорему Гульдена*: объём тела, образованного вращением плоской фигуры Ω вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади Ω на длину окружности, описываемой центром масс этой фигуры.

Решение:

Назовём тело, получаемое вращением, Φ. Введём систему координат так, чтобы ось вращения была расположена вдоль оси Oz.

$V(\Phi) = \iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz$ – объём тела Φ.

Используем цилиндрическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r;$$

$$V(\Phi) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\iint\limits_{\Omega} r\,dr\,dh \right) d\varphi.$$

Так как ось вращения не пересекает плоскую фигуру Ω и совпадает с осью Oz, то для фигуры Ω, лежащей в плоскости Oxz, получаем: $\iint\limits_{\Omega} r\,dr\,dh = \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dz$.

Тогда, учитывая, что $x_0 = \dfrac{\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy}{\iint\limits_{\Omega} dx\,dy}$, получаем:

$$V(\Phi) = 2\pi \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dz = 2\pi x_0 \iint\limits_{\Omega} dx\,dz = 2\pi x_0 \cdot S(\Omega),$$

где $2\pi x_0$ – длина окружности, описываемой центром масс Ω, и $S(\Omega)$ – площади Ω. $\square$

В качестве примера найдём объём тора с помощью второй теоремы Гульдена.

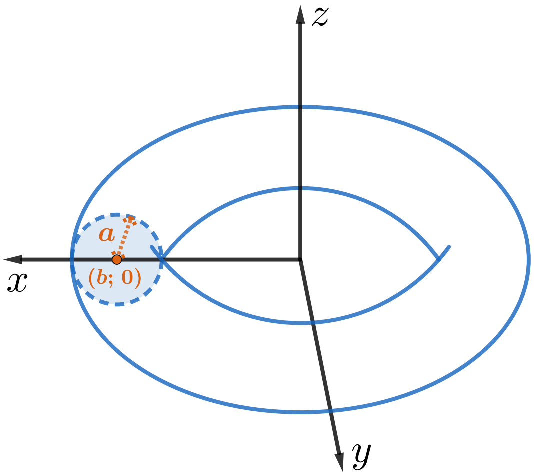

Рис. 7.1: Тор Φ и его сечение Ω

$x_0 = b$, $S(\Omega) = \pi a^2$, значит, $V(\Phi) = 2\pi b \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b$.

Центр масс объёмной фигуры

Определение 7.1. Пусть Φ – объёмная фигура с плотностью $\rho(x, y, z)$, тогда (x_0, y_0, z_0) – *центр масс* этой фигуры, где

$$x_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} x \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$y_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} y \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_0 = \frac{\iiint\limits_{\Phi} z \cdot \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Задача 2506. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \qquad z=c.$$

Решение:

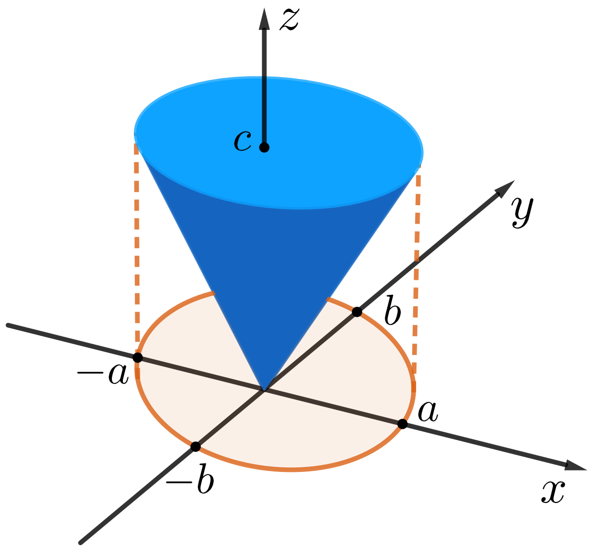

Рис. 7.2: Заданное тело (синее)

Пусть ρ – плотность заданного тела Φ.

$$x_0=\frac{\iiint\limits_{\Phi} x\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz}=\frac{\iiint\limits_{\Phi} x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz}=0;$$

$$y_0=\frac{\iiint\limits_{\Phi} y\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz}=\frac{\iiint\limits_{\Phi} y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz}=0,$$

так как в числителях интегрируются нечётные относительно соответственно плоскостей Oyz и Oxz функции по симметричному телу.

$$z_0=\frac{\iiint\limits_{\Phi} z\rho\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} \rho\,dx\,dy\,dz}=\frac{\iiint\limits_{\Phi} z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz}. \tag{7.1}$$

Используем обобщённую цилиндрическую замену переменных: $\begin{cases} x=ar\cos\varphi\\ y=br\sin\varphi\\ z=ch\end{cases}$, где $r\in[0;\,h]$, $\varphi\in[0;\,2\pi]$, $h\in[0;\,1]$.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = abcr;$$

$$\iiint\limits_{\Phi} z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{h} ch\cdot abcr\,dr\,dh\,d\varphi = 2\pi abc^2\int\limits_0^1 h\cdot\frac{h^2}{2}\,dh = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

Интеграл в знаменателе (7.1) $\iiint\limits_{\Phi} dx\,dy\,dz$ представляет собой объём конуса с эллипсом в основании, поэтому он равен $\frac{1}{3}\pi abc$.

$$z_0 = \frac{\pi abc^2}{4} : \frac{\pi abc}{3} = \frac{3c}{4}.$$

Таким образом, $\left(0;\ 0;\ \frac{3c}{4}\right)$ – искомые координаты центр масс. □

Момент инерции

Рассмотрим тело Φ, вращающееся вокруг некоторой фиксированной оси l с постоянной угловой скоростью ω. Найдём кинетическую энергию этого тела. Для этого рассмотрим некоторую малую окрестность точки (x,y,z) этого тела. Будем считать, что рассматриваемая окрестность имеет массу Δm_j и скорость $v = r(x,y,z)\omega$, где $r(x,y,z)$ – расстояние от оси вращения l до точки (x,y,z). Тогда кинетическая энергия этой окрестности будет равна $\frac{\Delta m_j(r(x,y,z)\omega)^2}{2}$. Просуммируем кинетические энергии всех малых окрестностей, составляющих вращающееся тело Φ, получим:

$$\sum_j \frac{\Delta m_j(r(x,y,z)\omega)^2}{2} = \frac{\sum\limits_j \left(\Delta m_j r^2(x,y,z)\right)\omega^2}{2} = \frac{\sum\limits_j \left(\rho(x,y,z)\Delta V_j r^2(x,y,z)\right)\omega^2}{2},$$

где $\rho(x,y,z)$ – плотность тела в точке (x,y,z), ΔV_j – объём j-й малой окрестности вблизи точки (x,y,z). Заметим, что $\sum\limits_j \rho(x,y,z)\Delta V_j r^2(x,y,z)$ представляет собой интегральную сумму для следующего тройного интеграла: $\iiint\limits_{\Phi} r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Определение 7.2. Интеграл $J_l = \iiint\limits_{\Phi} r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ называется *моментом инерции* тела Φ относительно оси l.

Тогда кинетическая энергия вращения тела Φ относительно оси l равна $\frac{J_l\omega^2}{2}$.

Задача 4151 (Теорема Гюйгенса-Штейнера)**.** Доказать *теорему Гюйгенса-Штейнера*:

$$J_l = J_{l_0} + md^2,$$

где J_l – момент инерции тела относительно некоторой оси l, J_{l_0} – момент инерции относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр масс тела, d – расстояние между осями, m – масса тела.

Решение:

Обозначим тело Φ.

$$J_l = \iiint\limits_{\Phi} r_l^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$
$$J_{l_0} = \iiint\limits_{\Phi} r_{l_0}^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Из определения момента инерции ясно, что он инвариантен относительно выбора системы координат. Тогда выберем удобную нам систему координат: пусть l_0 совпадает с Oz и $(0,0,0)$ – центр масс тела Φ, тогда l проходит через точку $(d,0,0)$ параллельно Oz.

$$r_{l_0}^2(x,y,z) = x^2+y^2; \qquad r_l^2 = (x-d)^2+y^2;$$
$$J_l = J_{l_0} - 2d\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + d^2\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Так как $\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = x_0\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, где $x_0 = 0$ – абсцисса центра масс, то $\iiint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$. Тогда, учитывая, что $\iiint\limits_{\Phi} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = m$, получаем:

$$J_l = J_{l_0} + md^2.$$

□

Задача 4144 (изменённая)**.** Определить моменты инерции относительно координатных осей однородного тела, ограниченного следующей поверхностью (параметры положительные):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение:

Для простоты будем считать $\rho \equiv 1$. Пусть l совпадает с Oz.

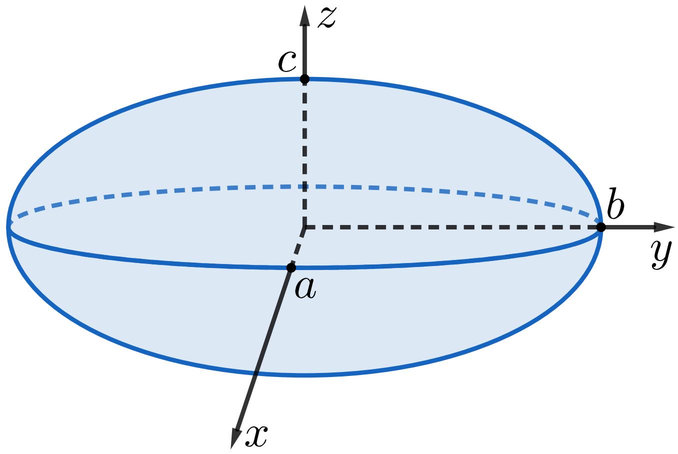

Рис. 7.3: Заданное тело

$$J_l = \iiint\limits_{\Phi} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Используем обобщённую сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = ar\cos\psi\cos\varphi \\ y = br\cos\psi\sin\varphi \\ z = cr\sin\psi \end{cases}$,

где $r \in [0;\, 1]$ $\varphi \in [0;\, 2\pi]$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = abcr^2\cos\psi;$$

$$J_l = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 (a^2r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + b^2r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi)abcr^2\cos\psi\, dr\, d\psi\, d\varphi =$$

$$= a^3bc\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\, d\psi\int\limits_0^1 r^4\, dr + ab^3c\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\, d\psi\int\limits_0^1 r^4\, dr.$$

В силу того, что $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, и 2π-периодичности имеем: $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$ $= \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi$. Кроме того, $\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. Значит, $\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi =$ $= \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi = B\left(2; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3};$$

$$\int\limits_0^1 r^4\, dr = \frac{1}{5};$$

$$J_l = \frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2).$$

Мы нашли момент инерции относительно оси Oz. Из соображений симметрии ясно, что момент инерции относительно оси Ox будет равен $\frac{4\pi}{15}abc(b^2+c^2)$, а относительно оси Oy будет равен $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+c^2)$. $\square$

Семинар 8

Потенциал поля тяготения

Определение 8.1. *Потенциал поля тяготения* $u(x, y, z)$ тела V в точке (x, y, z) определяется следующей формулой:

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}.$$

Задача 4155 (изменённая)**.** Найти ньютонов потенциал в точке $(0, 0, 0)$ однородного шара $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant R^2$ плотности ρ_0, где $a > R > 0$.

Решение:

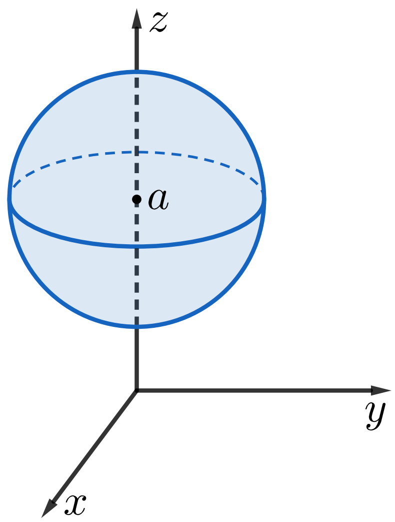

Рис. 8.1: Шар, создающий гравитационный потенциал

$$u(0, 0, 0) = \iiint\limits_V \rho_0 \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где $V\colon \quad x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant R^2$.

Используем сферическую замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\psi,\varphi)} = r^2\cos\psi;$$
$$V:\quad r^2 - 2ar\sin\psi + a^2 \leqslant R^2;$$
$$V:\quad r^2 - 2ar\sin\psi + a^2\sin^2\psi + a^2\cos^2\psi \leqslant R^2;$$
$$V:\quad 0 \leqslant (r - a\sin\psi)^2 \leqslant R^2 - a^2\cos^2\psi;$$
$$\cos^2\psi \leqslant \frac{R^2}{a^2};\qquad \psi\in\left[\arccos\frac{R}{a};\ \frac{\pi}{2}\right];\qquad \varphi\in[0;\,2\pi];$$
$$r \in \left[a\sin\psi - \sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi};\ a\sin\psi + \sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}\right];$$
$$u(0,0,0) = 2\pi\rho_0 \int\limits_{\arccos\frac{R}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{a\sin\psi-\sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}}^{a\sin\psi+\sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}} r\cos\psi\,dr\,d\psi =$$
$$= 4\pi\rho_0 \int\limits_{\arccos\frac{R}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-a^2\cos^2\psi}\cdot a\sin\psi\cos\psi\,d\psi.$$

Используем замену переменной: $t = \cos^2\psi$, тогда $dt = -2\sin\psi\cos\psi\,d\psi$.

$$u(0,0,0) = 2\pi\rho_0 a\int\limits_0^{\frac{R^2}{a^2}} \sqrt{R^2-a^2t}\,dt = 2\pi\rho_0 a\cdot\left(-\frac{2}{3a^2}(R^2-a^2t)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{R^2}{a^2}} =$$
$$= 2\pi\rho_0 a\cdot\frac{2R^3}{3a^2} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\cdot\frac{1}{a}.$$

□

Замечание 8.1. Полученный результат показывает, что однородный шар в точке за его границей создаёт такой же гравитационный потенциал, как и точка, обладающая массой шара и находящаяся в его центре.

Несобственные двойные и тройные интегралы

В случае одной переменной несобственные интегралы определялись следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b'\to+\infty}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx;\qquad \int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-0}\int\limits_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Перейдём к построению несобственного интеграла большей размерности. Рассмотрим некоторое множество Ω, на котором мы хотим построить несобственный интеграл. Рассмотрим исчерпание Ω замкнутыми квадрируемыми ограниченными множествами $\overline{\Omega}_k$, для которых выполняются следующие свойства:

$$1)\ \ \overline{\Omega}_k \subset \overline{\Omega}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}; \qquad 2)\ \ \bigcup_k \overline{\Omega}_k = \Omega.$$

Определение 8.2. Если $\forall \left\{\overline{\Omega}_k\right\}\ \ \exists \lim\limits_{k\to+\infty} \iint\limits_{\overline{\Omega}_k} f(x,y)\,dx\,dy$, причём значение предела не зависит от выбора исчерпания, то $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ *сходится.*

Для несобственных двойных интегралов и интегралов большей размерности не существует понятия условной сходимости, так как любой сходящийся интеграл необходимо будет абсолютно сходящимся. Вкратце покажем это. Предположим, что некоторый несобственный интеграл сходится условно. Тогда такой интеграл, взятый только по областям, в которых подынтегральная функция положительна, будет стремиться к $+\infty$, а только по областям, в которых подынтегральная функция отрицательна, – к $-\infty$. Но тогда исчерпывая положительные области достаточно большими исчерпаниями, а отрицательные области достаточно малыми исчерпаниями, всегда можно будет добиться того, чтобы интеграл расходился.

Выпишем полезные для решения задач свойства:

1) для непрерывных функций неважно, рассматривать

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{или} \qquad \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dx\,dy;$$

2) для непрерывных функций $f(x,y) \geqslant 0$ верно следующее:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists \left\{\overline{\Omega}_k\right\}\colon\ \ \exists \lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{\overline{\Omega}_k} f(x,y)\,dx\,dy;$$

3) для непрерывных функций $f(x,y) \geqslant g(x,y) \geqslant 0$ верно следующее:

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Rightarrow \quad \exists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy;$$
$$\nexists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy \quad \Rightarrow \quad \nexists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy;$$

4) если для непрерывных функций $\exists C_1, C_2 > 0\colon\quad C_1 g(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant C_2 g(x,y)$, то

$$\exists \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \Leftrightarrow \quad \exists \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy.$$

Задача 4161. Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечной областью интегрирования:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy,$$

где $0 < m \leqslant |\varphi(x,y)| \leqslant M$.

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна, то можно заменить её на модуль, а так как её модуль слабо эквивалентен с функцией $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$, то можно исследовать интеграл от этой функции. Тогда для такого интеграла достаточно рассмотреть некоторое одно исчерпание заданной области интегрирования $x^2+y^2 \geqslant 1$. Рассмотрим следующее исчерпание: $1+\dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant n$.

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r \in \left[1+\dfrac{1}{n};\ n\right]$ и $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{dr\,d\varphi}{r^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Полученный интеграл является табличным сходится тогда и только тогда, когда $2p-1>1$, то есть когда $p>1$. □

Замечание 8.2. Заметим, что полученный результат можно переписать в таком виде: $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p>2$. Вообще говоря, аналогичный интеграл для пространства размерности m сходится тогда и только тогда, когда $p>m$. А аналогичный интеграл по области $x^2+y^2 \leqslant 1$ (или аналогичной для пространства размерности m) сходится тогда и только тогда, когда $p<m$.

Рассмотрим «парадокс» покраски фигуры бесконечной площади. Так как $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ сходится, то в области $x^2+y^2<1$ в колбе формы $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ с бесконечным горлышком, сужающимся к оси Oz, помещается конечный объём краски.

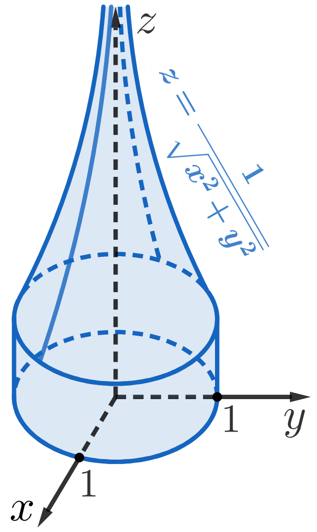

Рис. 8.2: Колба

Сечение этой колбы плоскостью Oyz задаёт плоскую фигуру в области $|y| < 1$, ограниченную функцией $z = \dfrac{1}{|y|}$. Эта фигура имеет бесконечную площадь, потому что интеграл $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{|y|} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{y}$ расходится. Таким образом, окрасить эту фигуру равномерным слоем конечного количества краски не получится, но её можно «окунуть» в колбу с краской, которой там конечное количество, и покрасить.

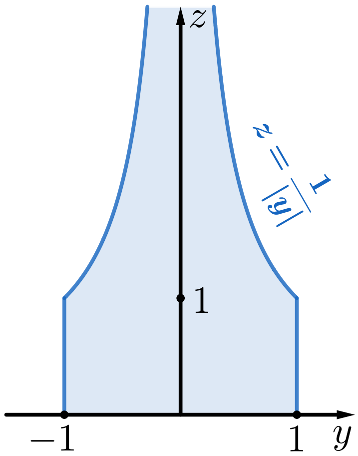

Рис. 8.3: Плоская фигура

Решение «парадокса» заключается в том, что в колбе краска распределена не равномерным слоем, а сужающимся при увеличении z.

Задача 4164. Исследовать на сходимость несобственный интеграл с бесконечной областью интегрирования:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q},$$

где $p > 0$, $q > 0$.

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена на любой области вида $|x| + |y| \geqslant \delta > 0$, то заданный интеграл будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\displaystyle\iint\limits_{|x|^p+|y|^q\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$.

Так как $\displaystyle\iint\limits_{|x|^p+|y|^q\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} = 4 \iint\limits_{\substack{x^p+y^q\geqslant 1\\ x,\,y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$, то исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x^p+y^q\geqslant 1\\ x,\,y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$.

Используем обобщённую полярную замену координат: $\begin{cases} x = r^{\frac{1}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \\ y = r^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \end{cases}$. Тогда $r \geqslant 1$ и $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p} \cdot r^{\frac{1}{p}-1} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi & -\dfrac{2}{p} \cdot r^{\frac{1}{p}} \sin\varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi \\ \dfrac{1}{q} \cdot r^{\frac{1}{q}-1} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi & \dfrac{2}{q} \cdot r^{\frac{1}{q}} \cos\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \end{vmatrix}.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. Подсказка: надо будет использовать слабую эквивалентность, чтобы упростить подынтегральное выражения после расчёта якобиана $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$. Затем останется проанализировать табличный интеграл от функции вида $\dfrac{1}{r^{f(p,q)}}$, где $f(p,q)$ – некоторый многочлен. $\square$

Семинар 9

Решение задач на несобственные двойные и тройные интегралы

Задача 4175. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Решение:

Так как подынтегральная функция непрерывна и положительна на $\mathbb{R}^2$, то достаточно рассмотреть некоторое одно исчерпание заданной области интегрирования $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим следующее исчерпание: $\overline{\Omega}_n = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leqslant n^2\}$.

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r \in [0;\ n]$ и $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

Для якобиана имеем: $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$. Тогда получаем следующий интеграл: $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi$. Используем замену: $t = r^2$, тогда $dt = 2r\,dr$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{n} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \lim_{n\to+\infty}\pi\int\limits_0^{n^2} e^{-t}\,dt = \pi\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \pi.$$

$\square$

Замечание 9.1. Если для интеграла, данного в задаче (4175), рассмотреть исчерпание квадратами, то получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi$.

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Задача 4181. Исследовать на сходимость несобственный двойной интеграл от разрывной функции:

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ |y|\leqslant x^2}} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}.$$

Решение:

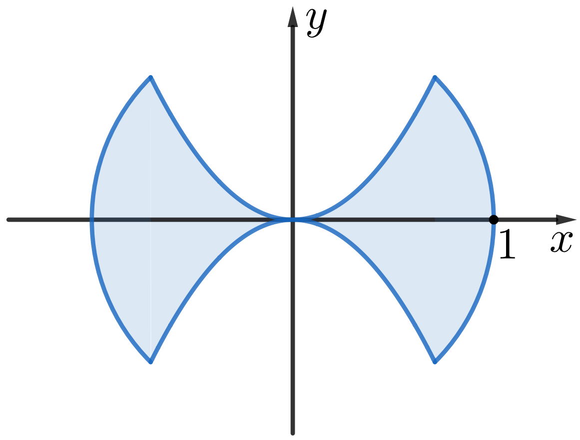

Рис. 9.1: Область интегрирования

Используем полярную замену координат: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$. Тогда $r^2 \leqslant 1$, $|r\sin\varphi| \leqslant \leqslant r^2\cos^2\varphi$. В силу симметрии несобственный интеграл только по 1-й четверти в 4 раза меньше исходного несобственного интеграла. Значит, исходный несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл только по 1-й четверти (далее будем рассматривать его).

Имеем: $\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \leqslant r \leqslant 1$. Значит, $\sin\varphi \leqslant \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$. Используем замену: $t = \sin\varphi$, где $t > 0$. Тогда $t^2 + t - 1 \leqslant 0$. Следовательно, $t \in \left[0;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$. Таким образом, $\varphi \in \left[0;\ \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Для якобиана имеем: $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$. Тогда получаем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{1} \frac{dr\,d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\cos\varphi\,d\varphi - \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\,d\varphi.$$

Заметим, что $\displaystyle\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\cos\varphi\,d\varphi$ существует, так как подынтегральная функция непрерывная и ограниченная на области интегрирования. Значит, исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\, d\varphi$.

Заметим, что $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\varphi\, d\varphi = (\varphi\ln\varphi - \varphi)\Big|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ существует. Теперь рассмотрим разность:

$$\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\, d\varphi - \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}\, d\varphi.$$

Последний интеграл существует. Значит, $\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \ln\sin\varphi\, d\varphi$ сходится, а тогда исходный интеграл тоже сходится. $\square$

Задача 4195. Исследовать на сходимость несобственный тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{|x|,\,|y|,\,|z|\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}.$$

Решение:

Область интегрирования представляет собой куб, но подынтегральная функция не определена на плоскости $\alpha\colon\ x+y-z=0$.

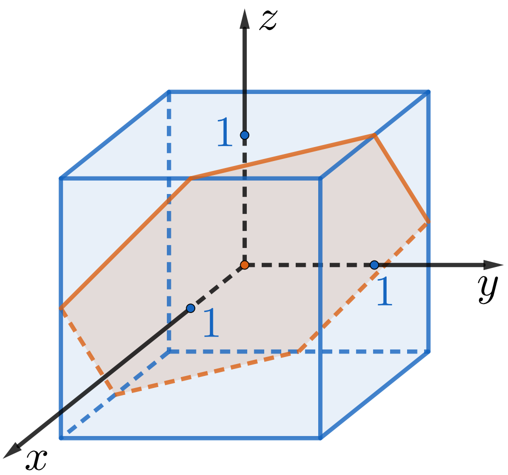

Рис. 9.2: Куб $|x|, |y|, |z| \leqslant 1$ (синий) и
его сечение плоскостью $x+y-z=0$ (оранжевое)

Повернём систему координат так, что ось Oz перешла в ось Oz', параллельную вектору нормали $\{1;\ 1;\ -1\}$ плоскости α. При этом получим новую ортогональную систему координат $Ox'y'z'$. В новой системе координат интеграл запишется следующим образом: $\iiint\limits_{\Omega'} \dfrac{dx'\,dy'\,dz'}{|z'|^p}$, где Ω' – исходная область интегрирования в новых координатах.

Построим в этой новой системе координат куб Q: $|x'|, |y'|, |z'| \leqslant a$, где $a > 0$. Выберем $a = a_1$ так, чтобы $Q = Q_1 \subset \Omega'$, где Q_1 – получившийся куб. Также выберем $a = a_2$ так, чтобы $Q = Q_2 \supset \Omega'$, где Q_2 – получившийся куб.

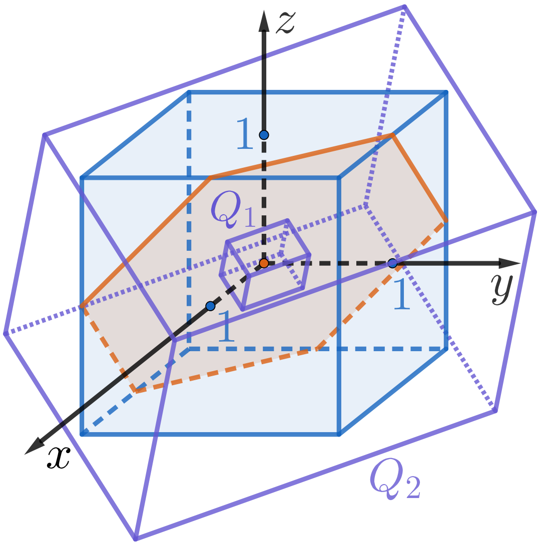

Рис. 9.3: Кубы Q_1 и Q_2

Рассмотрим следующие исчерпания:

$$|x'| \leqslant a, \qquad |y'| \leqslant a, \qquad \frac{1}{n} \leqslant |z'| \leqslant a.$$

Тогда получим следующий интеграл:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{\left[-a;\,-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n};\,a\right]} \frac{dz'}{|z'|^p}\,dy'\,dx' = \lim_{n\to+\infty} 2\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dz'}{(z')^p}\,dy'\,dx' =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 8a^2 \int\limits_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{dz'}{(z')^p} = 8a^2 \int\limits_{0}^{a} \frac{dz'}{(z')^p}.$$

Полученный интеграл является табличным и сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. Значит, интеграл по кубам Q_1 и Q_2 сходится и расходится одновременно, причём сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. Значит, и исходный интеграл $\iiint\limits_{|x|,\,|y|,\,|z|\leqslant 1} \dfrac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$. $\square$

Замечание 9.2. Заметим, что интеграл, данный в задаче (4195), сходится тогда и только тогда, когда $p < 1 = 3 - 2$, где 3 – размерность области интегрирования, а 2 – размерность области, в которой не существует подынтегральная функция.

Многократные интегралы

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В таком пространстве многократные интегралы строятся аналогично, как в пространствах $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Если область $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant x_1 \leqslant b \\ \varphi_1(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \psi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant \psi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{cases},$$

то

$$\int \cdots \int_{\overline{\Omega}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1.$$

Задача 4202. Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать равенство при $n \geqslant 2$:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} f\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int_0^x \int_{x_n}^x \ldots \int_{x_2}^x f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n.$$

Решение:

Область интегрирования $\overline{\Omega}$ задаётся следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 \leqslant x \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \\ \vdots \\ 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \end{cases}.$$

Можно переписать эту систему следующим образом:

$$x \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0.$$

А это можно записать в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_n \leqslant x \\ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x \\ \vdots \\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant x \end{cases}.$$

Значит, получаем:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\limits_0^x \int\limits_{x_n}^x \ldots \int\limits_{x_2}^x f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n.$$

□

Задача 4204 (a)**.** Вычислить следующий многократный интеграл:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Решение:

В силу симметрии имеем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = n \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 x_1^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{n}{3}.$$

□

Замечание 9.3. Значение интеграла, данного в задаче (4204), равно среднему квадрату расстояния от начала координат в n-мерном кубе, у которого вершина лежит в начале координат, а координатные оси направлены вдоль рёбер, исходящих из этой вершины.

Задача 4211. Найти объём n-мерного шара

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

Решение:

Проведём через центр n-мерного шара ось Ox с началом отсчёта в центре шара. Рассмотрим сечение этого шара гиперплоскостью размерности $n-1$, проходящей перпендикулярно оси Ox через координату x на оси. Тогда сечением будет шар размерности $n-1$, причём по теореме Пифагора его радиус будет равен $\sqrt{a^2 - x^2}$.

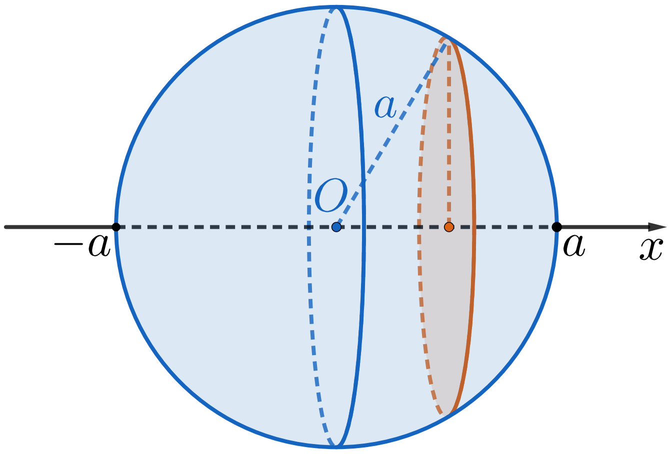

Рис. 9.4: Сечение n-мерного шара при $n = 3$

Пусть $V_n(a)$ – объём шара размерности n радиуса a. Получаем следующее соотношение:

$$V_n(a) = \int\limits_{-a}^{a} V_{n-1}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx. \tag{9.1}$$

Докажем по индукции, что $V_n(a) = c_n a^n$, где c_n – некоторая константа.

$$\begin{aligned}
&V_1(a) = 2a; \qquad c_1 = 2;\\
&V_2(a) = \pi a^2; \qquad c_2 = \pi;\\
&\vdots\\
&V_{n-1}(a) = c_{n-1}a^{n-1} \quad \text{(по предположению индукции).}
\end{aligned}$$

Используем замену переменной: $x = a\sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$. Из (9.1) с учётом предположения индукции получаем:

$$V_n(a) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_{n-1}(a\cos t)\cdot a\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c_{n-1}a^n\cos^n t\,dt = c_{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt\cdot a^n.$$

Таким образом, мы доказали предположение индукции $V_n = c_n a^n$, где

$$c_n = c_{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = B\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}\right)\cdot c_{n-1}.$$

Преобразуем формулу для коэффициентов c_n:

$$c_n = B\left(\frac{n+1}{2};\ \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot B\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right) c_1 =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma(2)}\cdot c_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot 2 = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Таким образом, $V_n(a) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot a^n$ – объём n-мерного шара радиуса a. $\square$

Замечание 9.4. Например, объём 4-мерного шара радиуса a равен $V_4(a) = \dfrac{\pi^2}{2}\cdot a^4$.

Упражнение 9.1 (На дом). Найти объём n-мерного шара, используя n-мерную сферическую замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases},$$

где $r \geqslant 0$, $\varphi_1 \in [0;\ \pi]$, …, $\varphi_{n-2} \in [0;\ \pi]$, $\varphi_{n-1} \in [0;\ 2\pi]$.

В этом случае якобиан равен следующему выражению (при желании вывести):

$$\frac{D(x_1, x_2,\ \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1,\ \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2}.$$

Семинар 10

Разбор домашнего задания

Задача 4167 (неполная)**.** Показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Решение:

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} \big(\sin(x^2)\cos(y^2)+\sin(y^2)\cos(x^2)\big)\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} \sin(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} 2\int\limits_{-n}^{n} \sin(x^2)\,dx \cdot \int\limits_{-n}^{n} \cos(y^2)\,dy =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(y^2)\,dy = \pi,$$

так как $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(y^2)\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ – интегралы Френеля. □

Упражнение 10.1 (На дом)**.** Используя формулу Стирлинга и формулу объёма n-мерного шара радиуса a

$$V_n(a) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot a^n,$$

найти асимптотику $V_n(1)$ при $n \to +\infty$, а также асимптотику a_n при $n \to +\infty$ при условии, что $V_n(a_n) = 1$.

Решение задач на многократные интегралы

Задача 4209. Найти объём n-мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \qquad x_i \geqslant 0, \qquad a_i > 0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Решение:

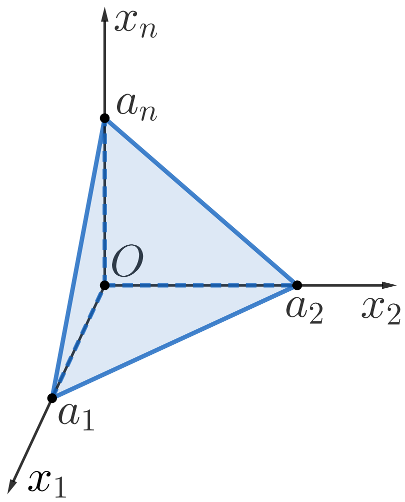

Рис. 10.1: n-мерная пирамида

Для 2-мерной пирамиды (прямоугольный треугольник) объём (площадь) равен $V_2 = \dfrac{a_1 a_2}{2}$. Предположим, что для n-мерной пирамиды объём равен $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$. Докажем это по индукции.

Рассмотрим пирамиду размерности $n+1$ и её сечение гиперплоскостью, проходящей перпендикулярно оси Ox_{n+1} через координату $x_{n+1} = b$ на этой оси.

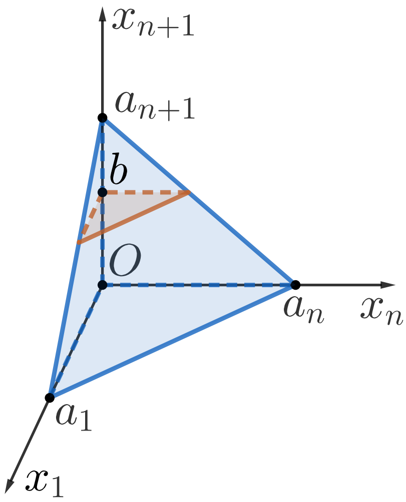

Рис. 10.2: Сечение $n+1$-мерной пирамиды

Тогда в гиперплоскости $Ox_1 \ldots x_n$ будет находиться n-мерный тетраэдр, объём которого равен $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$ (по предположению индукции), а в сечении будет находиться подобный ему тетраэдр с коэффициентом подобия $\dfrac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}$. Тогда объём тетраэдра в сечении будет равен $V_n \cdot \left(\dfrac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}\right)^n$.

$$V_{n+1} = \int\limits_0^{a_{n+1}} V_n \cdot \left(\frac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}\right)^n db = V_n \cdot \left(-\frac{a_{n+1}}{n+1}\left(\frac{a_{n+1} - b}{a_{n+1}}\right)^{n+1}\right)\Bigg|_0^{a_{n+1}} =$$
$$= \frac{a_{n+1}}{n+1} \cdot V_n = \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким образом, предположение индукции доказано. Значит, $V_n = \dfrac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$ – объём n-мерной пирамиды. $\square$

Замечание 10.1. Покажем ещё один способ нахождения объёма пирамиды из задачи (4209), только с единичными рёбрами. Для этого рассмотрим n-мерный единичный куб, у которого одна вершина находится в начале координат, а рёбра, исходящие из этой вершины, направлены вдоль координатных осей. То есть куб задаётся следующими неравенствами: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Объём такого куба равен 1. Теперь рассмотрим внутри этого куба пирамиды следующего вида: $0 \leqslant x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant 1$, где σ – некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

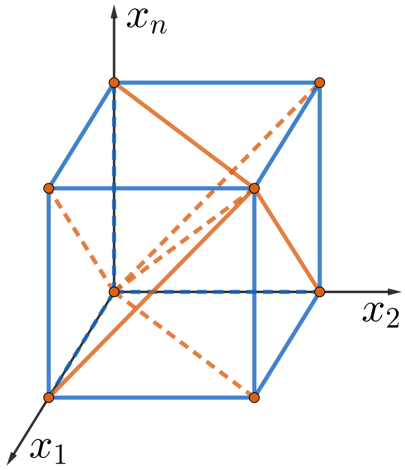

Рис. 10.3: Замощение куба пирамидами
(все оранжевые точки – вершины пирамид,
все оранжевые и синие отрезки – рёбра пирамид)

Всего таких пирамид будет $n!$, причём они могут иметь друг с другом общие точки только на границах, и объединение всех таких пирамид замащивает куб. При этом пирамиды движением переходят друг в друга, значит, их объёмы равны. Тогда объём каждой такой пирамиды равен $\dfrac{1}{n!}$.

Задача. Найти объём n-мерного октаэдра

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant a,$$

где $a > 0$.

Решение:

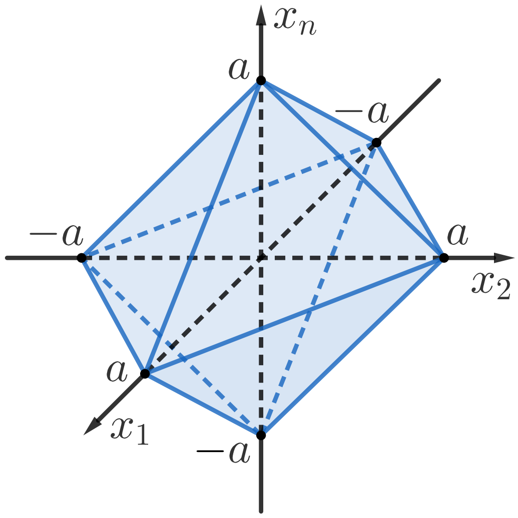

Рис. 10.4: n-мерный октаэдр

Заметим, что n-мерный октаэдр состоит из 2^n пирамид вида

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a} \leqslant 1,$$

где некоторые $x_i \geqslant 0$, а некоторые $x_j \leqslant 0$ (может быть, что все $x_i \geqslant 0$ или все $x_i \leqslant 0$). Объём такой пирамиды мы находили в задаче (4209), он равен $\frac{a^n}{n!}$. Тогда объём n-мерного октаэдра будет равен $2^n \cdot \frac{a^n}{n!}$. $\square$

Задача 4214. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\limits_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du.$$

Решение:

Используя равенство, доказанное в задаче (4202), получаем:

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\limits_0^x \int\limits_{x_n}^{x} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n =$$

$$= \int\limits_0^x f(x_n) \int\limits_{x_n}^{x} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n = \int\limits_0^x f(x_n) \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_n.$$

$\square$

Задача 4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$.

Решение:

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \end{cases}$. Тогда область интегрированиях запишется следующим образом: $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1$.

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1;$$

$$\int\limits_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}} \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant 1} \cdots \int y_1^{p_1-1} (y_2 - y_1)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (y_n - y_{n-1})^{p_n-1}\, dy_1\, dy_2 \ldots\, dy_n =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y_1}^1 \ldots \int\limits_{y_{n-2}}^1 y_1^{p_1-1} (y_2 - y_1)^{p_2-1} \cdot \ldots \cdot (y_{n-1} - y_{n-2})^{p_{n-1}-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int\limits_{y_{n-1}}^1 (y_n - y_{n-1})^{p_n-1}\, dy_n\, dy_{n-1} \ldots\, dy_2 \right) dy_1.$$

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения (возможно, замена неудачная). □

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ