МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 3

КОСУХИН
ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Семинар 1

В курсе используется сборник задач и упражнений по математическому анализу Б. П. Демидовича.

Разбор домашнего задания

Задача 2563. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Решение:

Рассмотрим вспомогательный ряд:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} =$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}\cdot 2\sqrt{n}} =$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Вспомогательный ряд является телескопическим, поэтому он сходится. Значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. $\square$

Табличные ряды и методы, которые обсуждали ранее в курсе

Бесконечная геометрическая прогрессия: $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$, где $b_n = n_{n-1}q \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $q \neq 0$, $q \neq 1$. Этот ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ (это верно и для комплексных чисел). Сумма этого ряда равна $\frac{b_0}{1-q}$.

Гармонический ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. Этот ряд расходится к $+\infty$ (доказывается, например, по критерию Коши).

Телескопический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n)$. Этот ряд сходится (и его сумма равна $b - b_1$) тогда и только тогда, когда $b_n \to b$ при $n \to +\infty$.

Ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ сходится, причём его сумма меньше 2.

Необходимое условие сходимости ряда: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

Критерий Коши сходимости ряда (без формулировки).

Признак сравнения: пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ и $a_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тогда их сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, а из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Обобщим признак сравнения. Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда из неравенства

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

получаем: $\dfrac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_1}$. Осталось применить к рядам с членами $\dfrac{a_{n+1}}{a_1}$ и $\dfrac{b_{n+1}}{b_1}$ прежний признак сравнения.

Обобщённый признак сравнения: пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тогда их сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, а из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Признак Даламбера

Пусть $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = q^n$, она сходится, так как $0 < q < 1$. Тогда по обобщённому признаку сравнения $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится (конечное начальное количество членов ряда не влияет на сходимость).

Если $\dfrac{1}{1} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$, то по обобщённому признаку сравнения $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ расходится, так как ряд $1 + 1 + 1 + \ldots$ расходится (конечное начальное количество членов ряда не влияет на сходимость).

Утверждение 1.1 (Признак Даламбера)**.**

1) Если $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

2) Если $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

В виде следствия дадим предельную формул признака Даламбера.

Утверждение 1.2 (Признак Даламбера (предельная форма))**.** *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, *то из* $\lambda < 1$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, *а из* $\lambda > 1$ *следует расходимость*

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

В случае $\lambda = 1$ утверждать что-либо про сходимость ряда на основании предельной формы признака Даламбера нельзя.

Также существует усиленный вариант признака Даламбера, который формулируется с использованием верхнего и нижнего пределов (на этом семинаре формулировать его не будем).

Задача 2578. Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots + \frac{1000^n}{n!} + \ldots.$$

Решение:

$a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$ и $a_{n+1} = \dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1000}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, по признаку Даламбера ряд сходится. $\square$

Задача 2582. Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \ldots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \ldots.$$

Решение:

В признаке Даламбера можно проверять предел $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ вместо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, так как сдвиг индекса не влияет на сходимость ряда.

$a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ и $a_{n-1} = \dfrac{((n-1)!)^2}{2^{(n-1)^2}}$, тогда $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n^2}{2^{n^2-(n-1)^2}} = \dfrac{n^2}{2^{2n-1}} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, по признаку Даламбера ряд сходится. $\square$

Признак Коши

Утверждение 1.3 (Признак Коши (радикальный))**.**

1) Пусть $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$, *где* $a_n > 0$. *Тогда* $a_n \leqslant q^n < 1$. *Значит,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

2) Пусть $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0$, *где* $a_n > 0$. *Тогда* $a_n \geqslant 1$. *Значит,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

В виде следствия дадим предельную формул признака Коши.

Утверждение 1.4 (Признак Коши (предельная форма))**.** *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, *то из* $\lambda < 1$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, *а из* $\lambda > 1$ *следует расходимость* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

В случае $\lambda = 1$ утверждать что-либо про сходимость ряда на основании предельной формы признака Коши нельзя.

Задача 2586. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

Решение:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$, то $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to +\infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, значит, ряд сходится по признаку Коши. □

Задача 2589 (2)**.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Решение:

$\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{-(n-1)} = \left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^{-(n-1)} \to e^{-2} < 1$, значит, ряд сходится по признаку Коши. □

Сформулируем усиленную предельную формул признака Коши.

Утверждение 1.5 (Признак Коши (усиленная предельная форма))**.** *Если* $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, *то из* $\lambda < 1$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, *а из* $\lambda > 1$ *следует расходимость* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

В случае $\lambda = 1$ утверждать что-либо про сходимость ряда на основании усиленной предельной формы признака Коши нельзя.

Задача 2589 (1)**.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^5}{2^n+3^n}$.

Решение:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2^n+3^n}}$. Так как $\sqrt[n]{n^5} \to 1$ при $n \to +\infty$ и $\sqrt[n]{2^n+3^n} = 3\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} \to 3$ при $n \to +\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{3} < 1$, значит, ряд сходится по признаку Коши.

Другой способ: $\sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2^n+3^n}} \leqslant \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{2\cdot 2^n}} \to \dfrac{1}{2}$ при $n \to +\infty$, тогда ряд сходится по усиленному признаку Коши. □

Задача 2593. Пусть $a_n > 0$. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$.

Решение:

Докажем, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n} = b$ (теорема Коши).

$$\frac{b_1+\ldots+b_n}{n} = \frac{b_1+\ldots+b_m}{n} + \frac{b_{m+1}+\ldots+b_n}{n}.$$

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N\colon\ \ \forall k > N\ \ b-\varepsilon < b_k < b+\varepsilon$. Положим $m = N$, тогда:

$$\frac{b_1+\ldots+b_m}{n} + \frac{(n-m)(b-\varepsilon)}{n} \leqslant \frac{b_1+\ldots+b_n}{n} \leqslant \frac{b_1+\ldots+b_m}{n} + \frac{(n-m)(b+\varepsilon)}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_1+\ldots+b_m}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-m)(b-\varepsilon)}{n} = b-\varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-m)(b+\varepsilon)}{n} = b+\varepsilon$, то:

$$b-\varepsilon \leqslant \frac{b_1+\ldots+b_n}{n} \leqslant b+\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное, то у последовательности $\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n}$ есть только один частичный предел, причём он равен b. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n} = b$.

Теперь докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$.

Из $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \ln q$. Надо показать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln a_n}{n} = \ln q$. Это несложно показать с помощью доказанной только что теоремы Коши о пределе среднего арифметического (упражнение на дом). $\square$

Таким образом, если признак Даламбера «срабатывает», то «срабатывает» и признак Коши. Обратное, вообще говоря, неверно.

Семинар 2

Разбор домашнего задания

Задача 2593. Пусть $a_n > 0$. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Решение:

Продолжим решение задачи, оставленной на дом на прошлом семинаре.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) = \ln q$. Надо показать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln a_n}{n} = \ln q$.

Пусть $b_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$, тогда по теореме Коши о пределе среднего арифметического $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \ln q$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln a_{n+1} - \ln a_1}{n} = \ln q$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln a_n}{n} = \ln q$. $\square$

Несобственный интеграл

Пусть $f(x)$ определена на промежутке $[a;\ +\infty)$ и $\forall b > a \quad \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ – несобственный интеграл.

Рассмотрим пример. Найдём, при каких значениях p существует $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$.

1) Заметим, что при $p = 0$ получаем: $\int\limits_1^b 1\,dx = b - 1 \to +\infty$ при $b \to +\infty$.

2) Далее рассмотрим случай $p \neq 0$ и $p \neq 1$: так как $\int\limits_1^b \dfrac{dx}{x^p} = \dfrac{b^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p}$, то интеграл расходится при $p < 1$, а при $p > 1$ интеграл сходится к значению $\dfrac{1}{p-1}$.

3) Теперь рассмотрим случай $p = 1$: $\int\limits_1^b \dfrac{dx}{x} = \ln b \to +\infty$ при $b \to +\infty$.

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ существует тогда и только тогда, когда $p > 1$, при этом $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p} = \dfrac{1}{p-1}$.

Пусть $f(x)$ определена при $x > 0$, интегрируема по Риману на отрезке $[a;\, b]$ $\forall a, b$: $0 < a < b$, является монотонно невозрастающей на промежутке $(0;\ +\infty)$ и $f(x) \to 0$

при $x \to +\infty$.

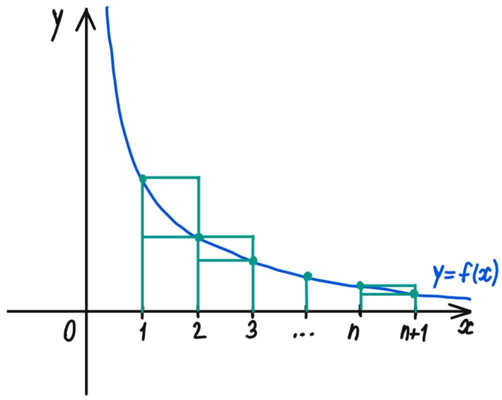

Рис. 2.1: Эскиз графика функции и дополнительные построения

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. Геометрически он означает площадь под графиком функции $f(x)$. Так как эта площадь больше суммы площадей «низких» прямоугольников, то $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k)$. С другой стороны, так как площадь под графиком меньше суммы площадей «высоких» прямоугольников, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \geqslant$ $\geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$. В итоге получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=2}^{n+1} f(k).$$

Заметим, что величина $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ является монотонно неубывающей.

Теорема 2.1 (Интегральный признак Коши)**.**

1) Если при вышеперечисленных условиях $\exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *сходится.*

2) Если при вышеперечисленных условиях $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *расходится.*

Доказательство:

1) Если при вышеперечисленных условиях $\exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, то $\exists C > 0\colon \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < C \quad \forall n$. Тогда $\sum\limits_{k=2}^{n+1} f(k) < C \quad \forall n$. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ сходится.

2) Если при вышеперечисленных условиях $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, то последовательность $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ неограничена. Тогда последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ неограничена. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ расходится. ∎

Приведём пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$. Этому ряду соответствует функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Для этой функции выполнены условия теоремы (2.1). Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$. Но как мы показали выше, этот интеграл расходится, значит, и ряд расходится.

Приведём ещё пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$, где $p > 0$ (при $p \leqslant 0$ расходимость ряда очевидна). По интегральному признаку Коши $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$. Но как мы показали выше, этот интеграл сходится только при $p > 1$, значит, и ряд сходится только при $p > 1$.

В интегральном признаке Коши нижнюю границу можно «отодвинуть» в бо́льшую сторону, так как на сходимость это не влияет.

Задача 2619. Исследовать ряд на сходимость: $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$, где $n > 1$.

Решение:

Если $p < 0$, то $\ln^p n \to 0$ при $n \to +\infty$, тогда $\dfrac{1}{n \ln^p n} > \dfrac{1}{n}$, начиная с некоторого значения n. Так как ряд $b_n = \dfrac{1}{n}$ расходится, то и ряд $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$ расходится.

При $p = 0$ получаем ряд $a_n = \dfrac{1}{n}$, который расходится.

Если $p > 0$, то рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}$. При $x > 1$ эта функция интегрируема на любом отрезке и является монотонно убывающей. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_e^{b} \frac{dx}{x\ln^p x}$. Сделаем замену переменной: $t = \ln x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$. Получаем: $\displaystyle\int\limits_e^{b} \frac{dx}{x\ln^p x} = \int\limits_1^{\ln b}\frac{dt}{t^p} \to \int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^p}$ при $b\to+\infty$. Как мы показали выше, этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$. Таким образом, по интегральному признаку Коши ряд $a_n = \dfrac{1}{n\ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. □

Упражнение 2.1 (Задание на дом)**.** Исследовать ряд на сходимость:

$$a_n = \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q}.$$

Задача 2622 (с исправленной опечаткой)**.** Пусть $a_n > 0$ и последовательность $\{a_n\}$ является монотонно убывающей. Доказать, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$.

Решение:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots = a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + \ldots \geqslant$$
$$\geqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots = \frac{1}{2}a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Таким образом, $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$. Значит, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$. □

Вообще говоря, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ можно заменить на $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n a_{q^n}$, где $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$.

Приведём пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ является монотонно убывающей. Тогда ряд, соответствующий гармоническому ряду, будет иметь вид $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^n\dfrac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}1$. Этот ряд расходится, значит, и гармонический ряд расходится.

Приведём ещё пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\log_2 n}$. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n\log_2 n}\right\}$ является монотонно убывающей. Тогда ряд, соответствующий исходному ряду, будет иметь вид $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\dfrac{1}{2^n\log_2 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$. Этот ряд расходится (так как гармонический), значит, и исходный ряд расходится.

Признак Куммера

Утверждение 2.1 (Признак Куммера)**.** *Пусть* $a_n>0$, $c_n>0$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{c_n}=+\infty$.

а) Если $\exists\delta>0\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0\quad c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant\delta$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *сходится.*

б) Если $\forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0\quad c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\leqslant 0$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *расходится.*

Доказательство:

а)

$$\begin{gathered}c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant\delta\quad\Big|\cdot a_{n+1};\\ c_na_n-c_{n+1}a_{n+1}\geqslant\delta a_{n+1}>0.\end{gathered}$$

Значит, $\{c_na_n\}$ – монотонно убывающая последовательность, начиная с некоторого значения n. Кроме этого, $c_na_n>0$. Таким образом, $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}c_na_n\geqslant 0$ (назовём этот предел c).

Ряд $c_na_n-c_{n+1}a_{n+1}$ – телескопический. Тогда он сходится, так как $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}c_na_n$. Значит, ряд δa_{n+1} тоже сходится, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится.

б)

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant c_{n+1} \quad \Big| : c_n \quad \Big|\hat{}(-1);$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}}}{\dfrac{1}{c_n}}.$$

Значит, по обобщённому признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится, так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty$. ■

Признак Раабе

Подставим $c_n = n$ в признак Куммера.

Утверждение 2.2 (Признак Раабе)**.** *Пусть* $a_n > 0$.

а) Если $\exists \delta > 0\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant 1 + \delta$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

б) Если $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

В виде следствия дадим предельную формул признака Раабе.

Утверждение 2.3 (Признак Раабе (предельная форма))**.** *Пусть* $a_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$.

Если $p > 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится.*

Если $p < 1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

В случае $p = 1$ утверждать что-либо про сходимость ряда на основании предельной формы признака Раабе нельзя.

Семинар 3

Разбор домашнего задания

Задача 2626. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$.

Решение:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}=$$
$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

Таким образом, $a_n=\dfrac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$ – общий член ряда. Сравним его с $b_n=\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Выполним оценку, начиная с достаточно больших значений n ($\forall n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$):

$$\frac{4}{3n^\alpha\sqrt{n}}<a_n<\frac{4}{n^\alpha\sqrt{n}};$$
$$\frac{4}{3}b_n<a_n<4b_n.$$

Таким образом, последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ слабо эквивалентны: $a_n\asymp b_n$ при $n\to+\infty$. Значит, ряд a_n сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд b_n. Как мы показывали раньше, ряд b_n сходится тогда и только тогда, когда $\alpha+\dfrac{1}{2}>1$. Значит, ряд a_n сходится тогда и только тогда, когда $\alpha>\dfrac{1}{2}$. $\square$

Задача 2632. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$.

Решение:

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^p}{e^x}=0$ при $p>0$, то при $p>0$ имеем: $\dfrac{(\sqrt{n})^p}{e^{\sqrt{n}}}=\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^{-p}}\to0$ при $n\to+\infty$. Значит, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$ $\;e^{-\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ при $p>0$. Следовательно, при $p>0$ имеем: $n^2e^{-\sqrt{n}}<n^{2-\frac{p}{2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$. Пусть $p=8$, тогда $n^2e^{-\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>n_0$. Так как ряд $\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$ сходится. $\square$

Признак Раабе (продолжение)

Приведём пример. Исследуем на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ с помощью признака Раабе.

$a_n = \frac{1}{n^p}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^p - 1\right).$$

Так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, то получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(p + \frac{p(p-1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = p.$$

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$.

Задача 2604. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

Решение:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+2)^p}{(2n+1)^p} \cdot \frac{(n+1)^q}{n^q};$$

$$\frac{(n+1)^q}{n^q} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ при } n\to+\infty;$$

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to+\infty;$$

$$\frac{p}{2n+1} = \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to+\infty;$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{q + \frac{p}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to+\infty;$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n\to+\infty;$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q + \frac{p}{2}.$$

Таким образом, по признаку Раабе $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n^q}$ сходится при $q+\dfrac{p}{2}>1$ и расходится при $q+\dfrac{p}{2}<1$. $\square$

Признак Гаусса

Утверждение 3.1 (Признак Гаусса)**.**

Пусть $\exists\varepsilon>0\colon\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *при* $n\to+\infty$.

Если $\lambda>1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *сходится.*

Если $\lambda<1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *расходится.*

Если $\lambda=1$ *и* $\mu>1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *сходится.*

Если $\lambda=1$ *и* $\mu\leqslant1$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ *расходится.*

Задача 2604 (продолжение)**.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}.$$

Решение:

Ранее мы получили, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{q+\frac{p}{2}}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $n\to+\infty$. Также мы показали, что ряд сходится при $q+\dfrac{p}{2}>1$ и расходится при $q+\dfrac{p}{2}<1$. Остаётся исследовать случай $q+\dfrac{p}{2}=1$.

По признаку Гаусса $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n^q}$ сходится при $q+\dfrac{p}{2}>1$ и расходится при $q+\dfrac{p}{2}\leqslant1$. $\square$

Логарифмический признак

Задача 2615. Пусть $a_n>0$ и $\alpha>0$. Доказать:

1) если $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant1+\alpha\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится;

2) если $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_0$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится.

Решение:

1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1+\alpha \quad \Big| \cdot \ln n;\\
&\ln \frac{1}{a_n} \geqslant (1+\alpha)\ln n;\\
&\frac{1}{a_n} \geqslant n^{1+\alpha};\\
&a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}}
\end{aligned}$$

Таким образом, по признаку сравнения ряд a_n сходится.

2) Аналогичным образом получаем: $a_n \geqslant \dfrac{1}{n}$. Значит, по признаку сравнения ряд a_n расходится. □

Задача 2617 (с исправленной опечаткой)**.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{1}{a_n} = \ln\left((\ln\ln n)^{\ln n}\right) = \ln n \cdot \ln\ln\ln n;\\
&\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln\ln\ln n \to +\infty \text{ при } n \to +\infty;\\
&\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 2 \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, по логарифмическому признаку $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ сходится. □

Решение задач на исследование рядов с положительными членами

Задача 2637. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

Решение:

Вспомним:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6);\\
&\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6);\\
&(1+t)^p = 1 + pt + O(t^2);\\
&\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3).
\end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}} = \frac{1 + \dfrac{\pi^2}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}{1 - \dfrac{\pi^2}{2n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)} = \left(1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\left(1 + \frac{\pi^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) =\\
&= 1 + \frac{\pi^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ при } n \to +\infty;\\
&\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right) = \frac{\pi^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{ при } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Так как $\pi^2 < 10$, то $\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right) < \dfrac{10}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0$. Тогда по признаку сравнения $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$ сходится. □

Задача 2641. Исследовать ряд на сходимость: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{n^\alpha} - 1\right)$.

Решение:

Чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы $n^{n^\alpha} - 1 \to 0$ при $n \to +\infty$, то есть $n^{n^\alpha} \to$ $\to 1$ при $n \to +\infty$. Так как $n^{n^\alpha} = e^{n^\alpha \ln n}$, то чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы $n^\alpha \ln n \to 0$ при $n \to +\infty$. Таким образом, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\alpha < 0$. То есть при $\alpha \geqslant 0$ ряд расходится. Далее будем рассматривать случай $\alpha < 0$.

$$\begin{aligned}
&n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \ln n} - 1 = 1 + n^\alpha \ln n + O(n^{2\alpha}\ln^2 n) - 1 =\\
&= n^\alpha \ln n + O(n^{2\alpha}\ln^2 n) \text{ при } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, $n^{n^\alpha} - 1 \asymp n^\alpha \ln n$ (последовательности слабо эквивалентны). Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(n^{n^\alpha} - 1\right)$ при $\alpha < 0$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \ln n$.

Для исследования $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \ln n$ воспользуемся логарифмическим признаком.

$$\frac{\ln\left(n^{-\alpha}\ln^{-1} n\right)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n^{-\alpha}\right) + \ln\left(\ln^{-1} n\right)}{\ln n} = \frac{-\alpha \ln n - \ln\ln n}{\ln n} \to -\alpha \text{ при } n \to +\infty.$$

По логарифмическому признаку $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \ln n$ расходится при $-\alpha < 1$ и сходится при $-\alpha > 1$, то есть расходится при $\alpha > -1$ и сходится при $\alpha < -1$.

Если $\alpha = -1$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \ln n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Так как $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$ при $n \geqslant 3$ и гармонический ряд расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ расходится.

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(n^{n^\alpha} - 1\right)$ расходится при $\alpha \geqslant -1$ и сходится при $\alpha < -1$. $\square$

Семинар 4

Разбор домашнего задания

Задача 2606. Пусть $a_n > 0$ и $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{p}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$. Доказать, что $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to +\infty$.

Решение:

При $n \to +\infty$ имеем: $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right) \iff a_n n^{p-\varepsilon} = o(1)$. Рассмотрим последовательность $b_n = a_n n^{p-\varepsilon}$.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n n^{p-\varepsilon}}{a_{n+1}(n+1)^{p-\varepsilon}} = \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(p-\varepsilon)} =$$
$$= \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{p-\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \text{ при } n \to +\infty;$$
$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n}\right) \text{ при } n \to +\infty.$$

Используем то, что $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$ (так как в 0 эти функции совпадают, а при $x > 0$ производная функции $\ln(1+x)$ не меньше производной функции $x - \dfrac{x^2}{2}$). Получим:

$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2n} - \frac{\varepsilon^2}{8n^2} \text{ при } n \to +\infty;$$
$$\ln b_n - \ln b_{n+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2n} - \frac{\varepsilon^2}{8n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0;$$
$$(\ln b_{n_0} - \ln b_{n_0+1}) + \ldots + (\ln b_n - \ln b_{n+1}) = \ln b_{n_0} - \ln b_{n+1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{1}{n_0^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0;$$
$$\ln b_{n+1} \leqslant \ln b_{n_0} + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{1}{n_0^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Введём обозначения: $\ln b_{n_0} = C$ и $\dfrac{\varepsilon^2}{8}\left(\dfrac{1}{n_0^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}\right) < C_1$, где C_1 – некоторая константа, ограничивающая частичную сумму сходящегося ряда. Тогда получим:

$$b_{n+1} \leqslant e^{C + C_1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \ldots + \frac{1}{n}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Так как $\left(\frac{1}{n_0}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ – частичная сумма расходящегося ряда, то $C+C_1-$ $-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\to-\infty$ при $n\to+\infty$. Тогда получаем:

$$b_{n+1}\leqslant e^{C+C_1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\to 0 \text{ при } n\to+\infty.$$

Тогда $b_n=o(1)$, то есть $a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$. □

Ряды со знакопеременными членами

Утверждение 4.1 (Необходимое условие сходимости ряда). *Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.*

Утверждение 4.2 (Критерий Коши). *$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):$ $\forall n>N\ \forall p\in\mathbb{N}_0\quad |a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$.*

Определение 4.1. Так как $|a_n+\ldots+a_{n+p}|\leqslant|a_n|+\ldots+|a_{n+p}|$, то из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. В этом случае говорят, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится *абсолютно.*

Таким образом, любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 4.2. Если же $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ расходится, то говорят, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится *условно.*

Теорема 4.1 (Теорема Коши). *Пусть $\sigma(n)$ – некоторая перестановка всех натуральных чисел. Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится абсолютно и $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, то $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{\sigma(n)}$.*

Теорема 4.2 (Теорема Римана). *Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ сходится условно, то $\forall x\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup$ $\cup\{\pm\infty\}$ $\exists\sigma$ – перестановка всех натуральных чисел такая, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{\sigma(n)}=x$.*

Но даже для условно сходящихся рядов от перестановки конечного количества слагаемых сумма не меняется.

Утверждение 4.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *– ряд, полученный из* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *некоторой группировкой слагаемых.*

Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, то и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится к тому же значению.*

Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, *то и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство:

Пусть S_n – последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, S'_n – последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Тогда S'_n – подпоследовательность последовательности S_n. Значит, если S_n сходится, то и S'_n сходится к тому же значению. А если S'_n расходится, то и S_n расходится. ■

Обратное, вообще говоря, неверно. Например, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, а ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ сходится к 0.

Утверждение 4.4. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и выполним группировку по знакам (то есть в каждую скобку будем заключать последовательно идущие слагаемые, имеющие при этом одинаковые знаки). Получим знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *(то есть знаки последовательных слагаемых в этом ряду чередуются). В этом случае* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, *причём сходятся они к одному значению.*

Классы o (о малое) и O (О большое)

О классах о малое и О большое имеет смысл говорить, если сказано, о каком пределе идёт речь.

$a_n = o(1)$ при $n \to +\infty$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\colon\ \forall n > n_0\quad |a_n| < \varepsilon$.

$f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, $o(1)$ – класс бесконечно малых последовательностей или функций.

$o(g(x)) = \{f\colon\ f(x) = \alpha(x)g(x),\ \alpha(x) = o(1)\}$.

Так как $o(1)$ и $o(g(x))$ – это множества функций, то правильнее было бы писать, например, $f(x) \in o(1)$, но по традиции пишут $f(x) = o(1)$. Однако запись $o(1) = f(x)$ некорректна.

$b_n = O(1)$ при $n \to +\infty$ означает, что $\exists C > 0\colon\ \forall n \in \mathbb{N}\quad |b_n| < C$.

$f = O(1)$ при $x \to x_0$ означает, что $\exists C > 0\ \exists \delta > 0\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)| < C$.

Таким образом, $o(1) \subset O(1)$. Опять же по традиции может быть написано $o(1) = O(1)$.

$O(g(x)) = \{f\colon\ f(x) = \beta(x)g(x),\ \beta(x) = O(1)\}$.

Разберём арифметические свойства этих классов.

$o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ – сумма множеств по Минковскому ($\alpha_1(x)g(x) + \alpha_2(x)g(x) = \alpha(x)g(x)$, где α_1, α_2, α – бесконечно малые функции).

Задача 646 (б)**.** Доказать: $O(o(f(x))) = o(f(x))$.

Решение:

Класс $O(o(f(x)))$ состоит из функций вида $\gamma(x)\alpha(x)f(x)$, где $\gamma(x)$ – ограниченная функция, $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция. Но $\gamma(x)\alpha(x)f(x) = (\gamma(x)\alpha(x))f(x)$, а $\gamma(x)\alpha(x)$ – бесконечно малая функция.

Теперь докажем в обратную сторону. Класс $o(f(x))$ состоит из функций вида $\alpha_1(x)f(x)$, где $\alpha_1(x)$ – бесконечно малая функция. Но $\alpha(x)f(x) = 1 \cdot \alpha(x)f(x)$, а 1 – ограниченная функция. $\square$

Легко показать, что $o(g(x)) = o(1) \cdot g(x)$ и $O(g(x)) = O(1) \cdot g(x)$.

$O(g(x)) + O(g(x)) = O(g(x))$ – сумма множеств по Минковскому.

Эквивалентность и слабая эквивалентность

Определение 4.3. Пусть $x \to x_0$. Если:

1) $f(x) = \theta(x)g(x)$ в проколотой окрестности точки x_0;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \theta(x) = 1$,

то говорят, что $f \sim g$ (f *эквивалентна* g) при $x \to x_0$.

Если $g(x) \neq 0$ в проколотой окрестности точки x_0, то определение эквивалентности функций можно переписать в виде $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Определение 4.4. Пусть $x \to x_0$. Если $f = O(g)$ и $g = O(f)$, то $f \asymp g$ (f *слабо эквивалентна* g) при $x \to x_0$.

Если $f \sim g$, то $f \asymp g$ при $x \to x_0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 4.5 (Аналогичное определение слабой эквивалентности)**.** $f \asymp g$ (f *слабо эквивалентна* g) при $x \to x_0$, если

$$\exists C_1 > 0,\ \exists C_2 > 0,\ \exists \delta > 0\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ C_1|f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant C_2|f(x)|.$$

Если $a_n > 0$, $b_n > 0$ и $a_n \asymp b_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Признак Лейбница

Теорема 4.3 (Признак Лейбница)**.** *Пусть* $b_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n$, *где* $\{a_n\}$ *– монотонно невозрастающая последовательность, стремящаяся к 0, и* $a_n \geqslant 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится. Причём, если* $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, *то* $S - S_n = b_{n+1} \cdot \theta_{n+1}$, *где* $0 \leqslant \theta_{n+1} \leqslant 1$.

Задача 2669. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$.

Решение:

$|b_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{n+100} \to 0$ при $n \to +\infty$. Пусть $x = \sqrt{n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2+100}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+100 - x \cdot 2x}{(x^2+100)^2} = \frac{100-x^2}{(x^2+100)^2} < 0 \text{ при } x > 10.$$

Значит, $|b_n|$ убывает при $n > 100$. Тогда по признаку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$ сходится (так как начальное конечное количество членов ряда не влияет на сходимость). □

Задача 2670 (подсказки к решению)**.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Решение:

По признаку Лейбница можно показать, что $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится.

Далее можно рассмотреть разность рядов: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Полученный ряд можно будет исследовать на сходимость. Исходный ряд из задания будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится ряд, получаемый разностью выше. □

Семинар 5

Разбор домашнего задания

Задача 2671. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$.

Решение:

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) = \sin\left(\pi n + \pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right) =$$
$$= (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}.$$

$\dfrac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \to +0$ при $x \to +\infty$. Значит, $\exists n_0\colon \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0$ $\left\{(-1)^n \sin\dfrac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right\}$ является знакочередующейся последовательностью, а $\left\{\sin\dfrac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right\}$ монотонно стремится к 0. Таким образом, по признаку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$ сходится. □

Задача 2670. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Решение:
(*Способ 1*)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

По признаку Лейбница $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится, так как это знакочередующийся ряд, члены которого монотонно стремятся к 0.

Так как

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n}-(\sqrt{n}+(-1)^n)\right)}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)},$$

то получаем:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}.$$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ – знакопостоянный расходящийся ряд, так как $\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} \sim \dfrac{1}{n}$, а гармонический ряд расходится.

Таким образом, получаем:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

причём если б $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ сходился бы, то и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ сходился бы как разность двух сходящихся рядов. Но мы показали, что $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)}$ расходится, значит, и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ расходится. □

Замечание 5.1. Заметим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1$, значит, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, но ряд $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ расходится, а ряд $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится. Дело в том, что признак сравнения работает только для рядов со знакопостоянными членами (по крайней мере, начиная с некоторого номера).

Решение:

(*Способ 2*)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}.$$

По признаку Лейбница $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ сходится, так как это знакочередующийся ряд, члены которого монотонно стремятся к 0 (начиная с некоторого номера).

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1}$ расходится как гармонический ряд.

Таким образом, получаем:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

причём если б $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ сходился бы, то и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1}$ сходился бы как разность двух сходящихся рядов. Но мы показали, что $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n-1}$ расходится, значит, и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ расходится. □

Решение:

(*Способ 3*)

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)+\ldots=$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}+1}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2k+1}-1-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}.$$

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$ – знакопостоянный ряд, причём $\dfrac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\sim\dfrac{1}{k}$, значит, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$ расходится, так как гармонический ряд расходится.

Так как

$$\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}=\frac{1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k})}\asymp\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}},$$

то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$ сходится по признаку сравнения.

Таким образом, получаем:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

причём если б $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ сходился бы, то и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$ сходился бы как разность двух сходящихся рядов. Но мы показали, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$ расходится, значит, и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ расходится. □

Группировка и перестановка членов в знакопеременных рядах

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Группировкой последовательно идущих слагаемых получим новый ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Пусть S_n – частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, S'_n – частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Тогда $\{S'_n\}$ – подпоследовательность последовательности $\{S_n\}$. Значит, если $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = S$. Но, вообще говоря, из того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = S$, не следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Чтобы последнее выполнялось, достаточно выполнения двух условий: 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; 2) в каждой скобке ограниченное число слагаемых.

Чтобы сумма ряда не изменилась, члены ряда можно переставлять так, чтобы старый номер этого члена отличался от нового на некоторое ограниченное значение.

Утверждение 5.1. *Ещё одно достаточное условие группировки, чтобы сумма ряда не изменилась: в каждой скобке слагаемые должны иметь одинаковые знаки. В этом случае ограниченность количества членов в каждой скобке не требуется.*

Доказательство:

Пусть S_n – частичные суммы исходного ряда, а S'_k – частичные суммы ряда, полученного группировкой слагаемых с одинаковыми знаками. Пусть n_k – количество членов исходного ряда, участвующих после группировки в частичной сумме S'_k. Тогда $S'_k = S_{n_k}$.

Заметим, что $S_n \in [S_{n_{k-1}};\ S_{n_k}]$ (концы отрезка могут меняться местами).

Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{n_k} = S$, тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 = k_0(\varepsilon)\colon\ \forall k > k_0\quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$. Рассмотрим $k-1 > k_0$. Тогда в силу $S_n \in [S_{n_{k-1}};\ S_{n_k}]$ получаем, что и $|S_n - S| < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.

А если $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то и $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{n_k} = S$ как предел подпоследовательности. ■

Задача 2672. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, где $[\cdot]$ – целая часть.

Решение:

Заметим, что $(-1)^{[\sqrt{n}]}$ меняет знак членов ряда в те моменты, когда n становится полным квадратом. Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{k^2+2k}\right)+\ldots$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k$, где $b_k = \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{k^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{k^2+2k}$, полученный группировкой членов исходного ряда, является знакочередующимся.

Заметим, что $0 < \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{k^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{k^2+2k} - \displaystyle\int\limits_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k^2}$ (это ясно видно из графика кривой $\dfrac{1}{x}$ при $x \in [k^2;\ (k+1)^2]$, изображённого ниже).

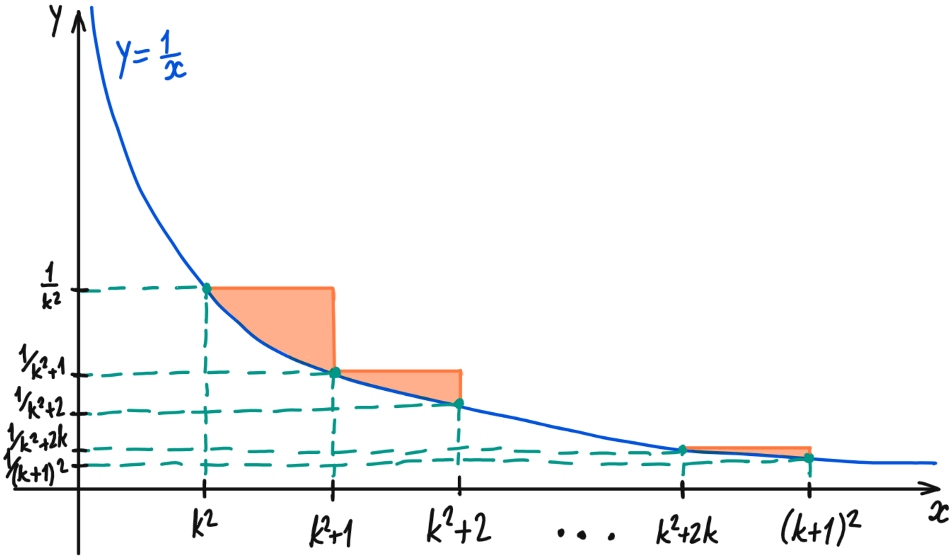

Рис. 5.1: Оранжевые участки представляют собой разность, оцениваемую выше, и их суммарная площадь меньше площади прямоугольного столбика с высотой $\dfrac{1}{k^2}$ и шириной 1

Тогда, вводя обозначение $C_k = \displaystyle\int\limits_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x}$, получаем:

$$b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k} = C_k + \frac{\theta_k}{k^2}, \quad \text{где} \;\; \theta_k \in [0;\ 1];$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(C_k + \frac{\theta_k}{k^2}\right).$$

Так как $\left|\dfrac{(-1)^k\theta_k}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k\theta_k}{k^2}$ сходится абсолютно. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k C_k$.

$$C_k = \int\limits_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x} = \ln(k+1)^2 - \ln k^2 = 2\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Видим, что C_k монотонно стремится к 0. Значит, по признаку Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k C_k$ сходится. Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится. □

Задача 2673. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

Решение:

Заметим, что $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \not\to 0$ при $n \to +\infty$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ расходится. □

Задача 2661. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение:

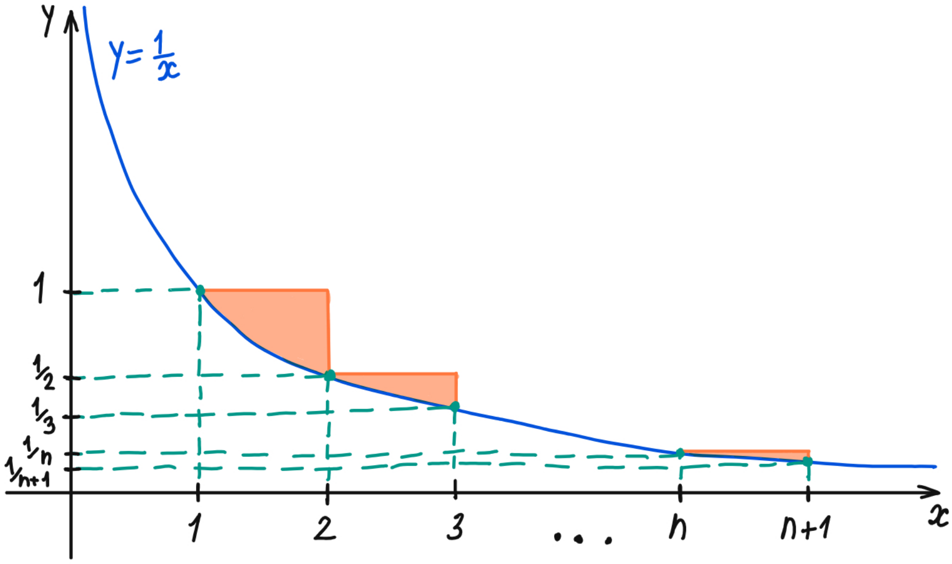

Рис. 5.2: Оранжевые участки представляют собой разность, оцениваемую ниже, и их суммарная площадь меньше площади прямоугольного столбика с высотой 1 и шириной 1

Из рисунка видно, что

$$0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \int\limits_1^{n+1}\frac{dx}{x} = b_n,$$

где $0 < b_n < b_{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\{b_n\}$ – монотонно возрастающая ограниченная последовательность, значит, у неё есть некоторый предел C. Тогда, учитывая, что $\int\limits_1^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, имеем:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + o(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь учтём, что $\ln(n+1) = \ln n + o(1)$ при $n \to +\infty$, так как $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = o(1)$ при $n \to +\infty$. Получим:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + o(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Рассмотрим частичную сумму исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ с чётным количеством слагаемых:

$$\begin{aligned} S_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) = \\ &= (\ln(2k) + C + o(1)) - (\ln k + C + o(1)) = \\ &= \ln(2k) - \ln k + o(1) = \ln 2 + o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k} = \ln 2$. Так как $\lim\limits_{k\to+\infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = 0$, то $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k-1} = \ln 2$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to+\infty} S_k = \ln 2$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. □

Задача 2675. В зависимости от значения параметра p определить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ абсолютно, условно или же расходится.

Решение:

Для исследования на абсолютную сходимость надо рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Ранее мы его уже исследовали: он сходится при $p > 1$. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$.

При $0 < p \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится условно по признаку Лейбница.

При $p \leqslant 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ расходится по необходимому условию сходимости. □

Семинар 6

Разбор домашнего задания

Задача 2688. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n},$$

где $[\cdot]$ – целая часть.

Решение:

Так как $\left|\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ и гармонический ряд расходится, то исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$ не сходится абсолютно.

Заметим, что $(-1)^{[\ln n]}$ меняет знак членов ряда в те моменты, когда n «переходит» через степень числа e. Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$

Ряд $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} (-1)^m b_m$, где $b_0 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{7}$, …, полученный группировкой членов исходного ряда, является знакочередующимся. Таким образом, $b_m = \sum\limits_{e^n \leqslant m < e^{n+1}} \frac{1}{m}$.

Рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$\int\limits_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{dx}{x} = \ln e^{n+1} - \ln e^n = 1.$$

Пусть a – наименьшее из значений m, участвующих в b_m, а b – наибольшее. Изобразим на координатной плоскости b_m в виде суммы и подынтегральную функцию вспомогательного интеграла.

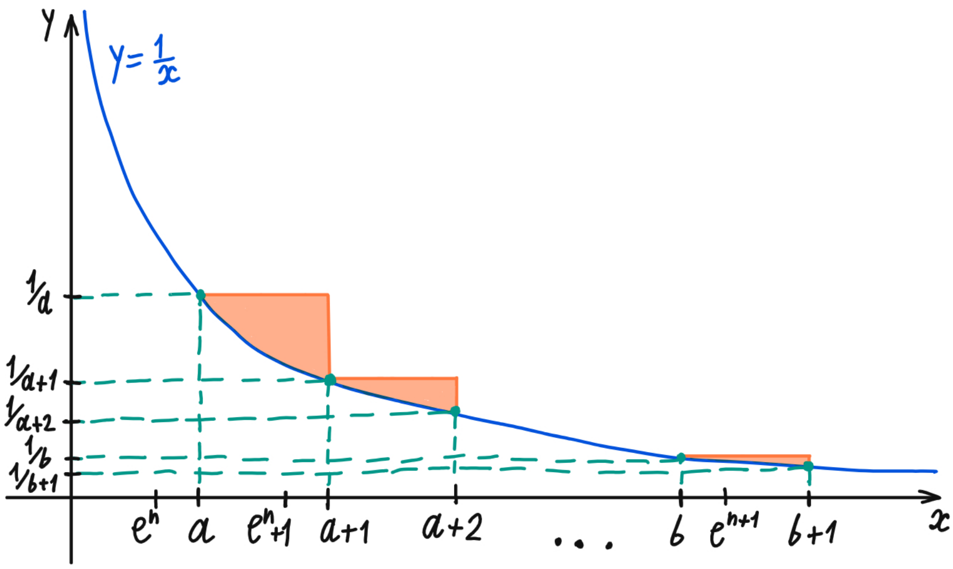

Рис. 6.1: Подынтегральная функция в виде кривой и b_m в виде суммы прямоугольных столбиков

Из рисунка видно, что

$$b_m = \sum_{m=a}^{b} \frac{1}{m} > \int\limits_a^{b+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{b+1}{a}.$$

Так как $a < e^n + 1$ и $b+1 > e^{n+1}$, то $\ln \frac{b+1}{a} > \ln \frac{e^{n+1}}{e^n+1} \to 1$. При этом $\ln \frac{e^{n+1}}{e^n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\exists \varepsilon > 0\colon \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \ln \frac{e^{n+1}}{e^n+1} > \varepsilon$.

Значит, $b_m > \varepsilon > 0$. Таким образом, члены ряда $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} (-1)^m b_m$ не стремятся к 0. Следовательно, этот ряд расходится, а значит, и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$ расходится. $\square$

Усиленный признак Лейбница

Определение 6.1. Последовательность $\{x_n\}$ имеет *ограниченную вариацию* (или *ограниченное изменение*), если суммы вида $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_{n+1}|$ ограничены в совокупности, то есть если

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_{n+1}|\} < +\infty.$$

По-другому можно сказать, что должен сходиться ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n|$.

Многие признаки сходимости, в которых фигурирует монотонность, можно расширить, если заменить требование монотонности на требование ограниченной вариации последовательности. Так получается, потому что последовательности ограниченной вариации можно описать как последовательности, которые представляются в виде разности двух монотонно неубывающих ограниченных последовательностей.

Теорема 6.1. *Последовательность $\{x_n\}$ имеет ограниченную вариацию (ограниченное изменение) тогда и только тогда, когда она является разностью двух монотонно неубывающих ограниченных последовательностей.*

Доказательство:

Построим по данной последовательности $\{x_n\}$ с ограниченной вариацией вспомогательную последовательность: x_1, $x_1 + |x_2 - x_1|$, $x_1 + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$, $\ldots$. Эта последовательность монотонно неубывающая. Заметим, например, что

$$x_1 + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| \geqslant x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$$

(и аналогично для каждого члена). Назовём новую последовательность $\{y_n\}$. Тогда имеем:

$$y_n \geqslant x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

В итоге получаем:

$$\begin{aligned}
&y_n = x_1 + |x_2 - x_1| + \ldots + |x_n - x_{n-1}|;\\
&x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1});\\
&y_n - x_n = (|x_2 - x_1| - (x_2 - x_1)) + \ldots + (|x_n - x_{n-1}| - (x_n - x_{n-1})).
\end{aligned}$$

Пусть $z_n = y_n - x_n$. Видим, что последовательность $\{z_n\}$ монотонно неубывающая и $z_n \geqslant 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, $x_n = y_n - z_n$, где $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ – монотонно неубывающие ограниченные последовательности (пусть $s = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_{n+1}|\} < +\infty$, тогда последовательности ограничены значениями s и $2s$ соответственно).

Теперь докажем в обратную сторону. $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют ограниченные вариации как монотонные ограниченные последовательности. Так как модуль суммы меньше либо равен сумме модулей, то вариация последовательности вида $x_n = y_n - z_n$ меньше либо равна сумме вариаций последовательностей $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$. ■

Утверждение 6.1 (Усиленный признак Лейбница)**.** *Если $\{b_n\}$ имеет ограниченную вариацию и $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ сходится.*

Доказательство:

Пусть $\{b_n\}$ обладает требуемыми свойствами. Тогда по теореме (6.1) $b_n = y_n - z_n$, где $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ – монотонные ограниченные последовательности. Значит, существуют пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, то $y = z$. Учитывая это, сделаем следующее преобразование: $b_n = (y_n - y) - (z_n - z) = (z - z_n) - (y - y_n)$, где $\{z - z_n\}$ и $\{y - y_n\}$ – монотонно невозрастающие последовательности, стремящиеся к 0.

Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(z-z_n) - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(y-y_n).$$

Заметим, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(z-z_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(y-y_n)$ сходятся по (обычному) признаку Лейбница. Значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$ сходится. ■

Разбор домашнего задания (продолжение)

Задача 2668. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Решение:

Используя формулу понижения степени $\sin^2 n = \dfrac{1-2\cos 2n}{2}$, получим:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}$ сходится по признаку Лейбница. А ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos 2n}{2n}$ сходится по признаку Дирихле (но этот признак мы ещё не проходили). Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ сходится. □

Задача 2662 (а)**.** Известно, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. Найти сумму ряда

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

Решение:

$$S_{3k} = \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}\right).$$

В задаче (2661), в которой мы показали, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = \ln 2$, мы получили, что $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где ε_n – бесконечно малая последовательность.

Применим это:

$$\begin{aligned}S_{3k} &= \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{4k}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)= \\ &= \ln(4k)+C+\varepsilon_{4k}-\frac{1}{2}(\ln(2k)+C+\varepsilon_{2k})-\frac{1}{2}(\ln k+C+\varepsilon_k)= \\ &= \ln 4-\frac{1}{2}\ln 2+\varepsilon_{4k}-\frac{1}{2}\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_{4k}-\frac{1}{2}\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k$ – бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{3k} = = \ln 4-\frac{1}{2}\ln 2$, то есть $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots = \ln 4-\frac{1}{2}\ln 2$. $\square$

Вообще говоря, если в ряде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ переставить слагаемые в таком порядке, чтобы брать по p последовательно идущих положительных членов и затем по q последовательно идущих отрицательных членов, то полученный ряд будет сходиться к $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$ (задача 2704). Причём $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$ задаёт всюду плотное множество на действительных числах.

Задача 2683. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt[100]{n}}= \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}.\end{aligned}$$

Полученные ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt[100]{n}}$ сходятся по признаку Лейбница. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ сходится. $\square$

Задача 2663. Переставить члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ так, чтобы полученный ряд расходился.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\ldots.$$

Рассмотрим сумму положительных членов: $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots$.

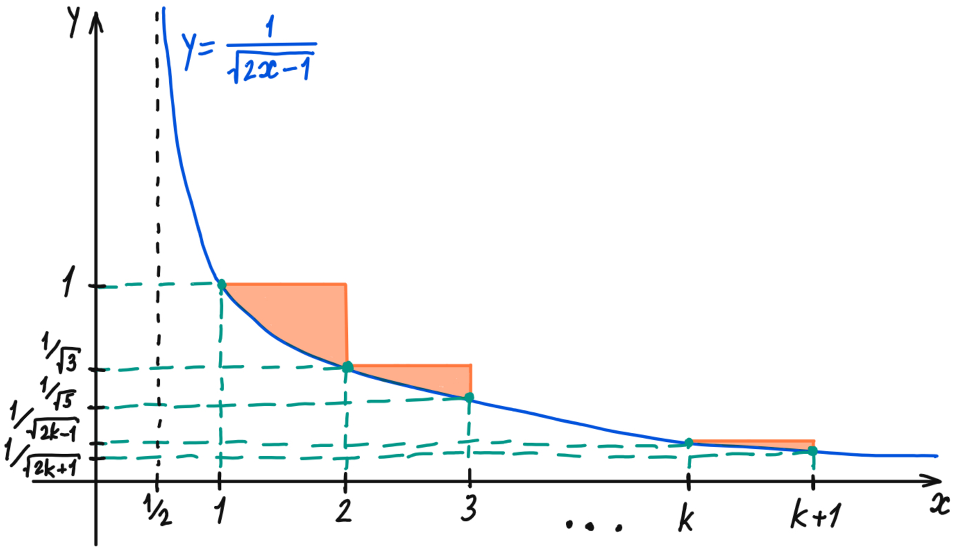

Рис. 6.2: «Метод столбиков» для суммы положительных членов

Из рисунка видно, что:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2k-1}} > \int\limits_1^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} =$$
$$= \sqrt{2x-1}\,\Big|_1^{k+1} = \sqrt{2k+1} - 1$$

Заметим, что каждый из отрицательных членов исходного ряда меньше 1. Тогда возьмём k, соответствующее условию $\sqrt{2k+1} - 1 > 2$, то есть $k > 4$. Тогда получаем: $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$. Действуя аналогичным образом и дальше, получим такую перестановку членов исходного ряда, что полученный ряд будет расходиться к $+\infty$. $\square$

Задача 2686. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

Решение:

$$S_{24k} = \sin\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 14} + \frac{1}{\ln 26} - \ldots - \frac{1}{\ln(24k-22)}\right) +$$
$$+ \sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 15} + \ldots\right) + \ldots.$$

Содержимое скобок представляет собой частичные суммы рядов, сходящихся по признаку Лейбница. Значит, $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} S_{24k} = S$.

Так как $S_n = S_{24\cdot[n/24]} + r$, где r – ограниченное ($\leqslant 23$) количество слагаемых, причём $r \leqslant \dfrac{23}{\ln\left(24\cdot\left[\dfrac{n}{24}\right]\right)}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то есть $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$ сходится.

Чтобы исследовать ряд на абсолютную сходимость, оценим ряд и модулей членов исходного ряда снизу рядом, содержащим только слены исходного ряда с номерами вида $24k-18$ (при этом синус равен 1).

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left|\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|}{\ln n} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(24k-18)}.$$

Так как $\ln(24k-18) < k \quad \forall k\in\mathbb{N},\ k > k_0$, то $\dfrac{\left|\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|}{\ln n} > \dfrac{1}{k} \quad \forall k\in\mathbb{N},\ k > k_0$. Значит, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|}{\ln n}$ расходится. Таким образом, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$ сходится условно. $\square$

Семинар 7

Признаки Абеля и Дирихле

Утверждение 7.1 (Признак Абеля). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ *и последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена, то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Утверждение 7.2 (Признак Дирихле). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если последовательность* $\{A_n\}$ *ограничена и последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно стремится к 0, то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Утверждение 7.3 (Усиленный признак Абеля). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ *и последовательность* $\{b_n\}$ *имеет ограниченную вариацию, то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Утверждение 7.4 (Усиленный признак Дирихле). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если последовательность* $\{A_n\}$ *ограничена и последовательность* $\{b_n\}$ *имеет ограниченную вариацию, а также* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Решение задач на исследование рядов

Задача 2683. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} \cdot \frac{n-1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n,$$

где $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ и $b_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ сходится по признаку Лейбница. $b_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$, значит, последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена. Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ сходится по признаку Абеля. $\square$

Задача 2697 (а)**.** Пусть $x \in (0;\, \pi)$. Доказать, что ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(nx)}{n} + \ldots$$

сходится условно.

Решение:

Пусть $a_n = \sin(nx)$ и $b_n = \dfrac{1}{n}$. Последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0. Используя формулу $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, получим:

$$\begin{aligned}
A_n &= \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \\
&= (\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)) \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \\
&= \left(\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \right. \\
&\left. + \left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \\
&= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right) \cdot \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \\
&= \frac{2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

При каждом фиксированном значении x получаем: $|A_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$. Тогда $\forall x \in (0;\, \pi)$ $\exists C = \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} > 0:$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|A_n| < C$. Значит, последовательность $\{A_n\}$ ограничена.

Таким образом, ряд $\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots+\dfrac{\sin(nx)}{n}+\ldots$ сходится по признаку Дирихле.

Для исследования на абсолютную сходимость рассмотрим ряд $|\sin x|+\dfrac{|\sin 2x|}{2}+$ $+\ldots+\dfrac{|\sin(nx)|}{n}+\ldots$. Так как $|\sin(kx)|\geqslant \sin^2(kx)=\dfrac{1-\cos(2kx)}{2}$, то получаем:

$$|\sin x|+\frac{|\sin 2x|}{2}+\ldots+\frac{|\sin(nx)|}{n}+\ldots\geqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(2kx)}{2k}=$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{2k}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{2k}$ сходится по признаку Дирихле (доказывается аналогично тому, что мы проделывали выше), а $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}$ расходится как гармонический. Тогда ряд $|\sin x|+$ $+\dfrac{|\sin 2x|}{2}+\ldots+\dfrac{|\sin(nx)|}{n}+\ldots$ расходится.

Таким образом, ряд $\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots+\dfrac{\sin(nx)}{n}+\ldots$ сходится условно.

□

Задача 2698 (1б)**.** Исследовать ряд на сходимость: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

Решение:

(*Неподходящий метод решения*)

Рассмотрим вспомогательный ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}$. Пусть $a_n=\sin n$ и $b_n=\dfrac{1}{\ln(\ln n)}$. Из решения предыдущей задачи имеем: $|\sin 1+\ldots+\sin n|<\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$. Тогда последовательность $\{A_n\}$ ограничена, где $A_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k$. Последовательность b_n монотонно убывает к 0 при $n>2$. Тогда $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}$ сходится по признаку Дирихле (конечное количество начальных членов ряда на сходимость не влияет).

Рассмотрим разность исходного ряда и вспомогательного:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)-\sin n}{\ln(\ln n)}.$$

Тогда исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)-\sin n}{\ln(\ln n)}$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)-\sin n}{\ln(\ln n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\sin\dfrac{1}{2n}\cos\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)}{\ln(\ln n)}.$$

Дальше стало ясно, что этот метод решения не сработает. $\square$

Решение:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n\cos\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{1}{n}\cos n}{\ln(\ln n)} =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln(\ln n)}\cdot\cos\frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \cos n\cdot\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\ln(\ln n)}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{\ln(\ln n)}$ сходится по признаку Дирихле. Последовательность $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$ монотонна и ограничена. Значит, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{\ln(\ln n)}\cdot\cos\dfrac{1}{n}$ сходится по признаку Абеля.

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cos n\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$ сходится по признаку Дирихле.

Таким образом, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$ сходится как сумма двух сходящихся рядов. $\square$

Задача 2682. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}}.$$

Решение:

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p}$.

Рассмотрим случай $p \leqslant 0$. При $n_k = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p} \not\to 0$ при $k \to +\infty$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ при $p \leqslant 0$ расходится.

Рассмотрим случай $p > 0$. Пусть $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$, тогда $|a_1 + \ldots + a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$ (по аналогии с решением задачи 2697(a)). Кроме этого, $\dfrac{1}{n^p}$ монотонно стремится к 0. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ при $p > 0$ сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$. Так как $\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \leqslant \dfrac{1}{n^p}$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ сходится при $p > 1$. При $p \leqslant 0$ ряд из модулей расходится, так как расходится ряд без модулей.

Рассмотрим $p \in (0;\, 1]$. Оценим ряд снизу, оставив только слагаемые с номерами $n_k = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+8k)^p}.$$

Так как $\dfrac{1}{(2+8k)^p} \asymp \dfrac{1}{k^p}$ и гармонический ряд расходится, то $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2+8k)^p}$ расходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ расходится.

Таким образом, вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ при $p \leqslant 0$ расходится, при $p \in (0;\, 1]$ сходится условно, при $p > 1$ сходится абсолютно.

Теперь рассмотрим разность между исходным рядом и вспомогательным:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)}.$$

Рассмотрим исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$ при $p \leqslant 0$. При $n_k = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p + 1} \not\to 0$ при $k \to +\infty$.

Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$ при $p \leqslant 0$ расходится.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)}$, полученный разностью, при $p > 0$. Заметим, что $\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)\cdot n^p} \leqslant \dfrac{1}{n^p(n^p-1)} \asymp \dfrac{1}{n^{2p}}$. Ряд $\dfrac{1}{n^{2p}}$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$. Значит, и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)}$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)}$, полученный разностью, при $p \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]$. При $n_k = 4\cdot\left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p((2+8k)^p+1)} \not\to 0$ при $k \to +\infty$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)}$ при $p \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]$ расходится.

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$ расходится при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ и сходится при $p > \dfrac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим ряд из модулей для исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$. Заметим, что $\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}} \sim \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \leqslant \dfrac{1}{n^p}$. Ряд $\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, поэтому и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$ сходится при $p > 1$. Рассмотрим $p \in (0;\ 1]$. При $n_k = 4\cdot\left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, для последовательности $\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p} \not\to 0$ при $k \to +\infty$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$ при $p \in (0;\ 1]$ расходится.

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}}$ при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ расходится, при $p \in \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]$ сходится условно, при $p > 1$ сходится абсолютно. □

Задача 2701. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, то можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ также сходится? Рассмотреть примеры:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right).$$

Решение:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится как гармонический, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$ расходится как сумма сходящегося и расходящегося рядов. □

Задача 2703. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ для каждого $p > 0$ лежит между $\dfrac{1}{2}$ и 1.

Решение:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \ldots.$$

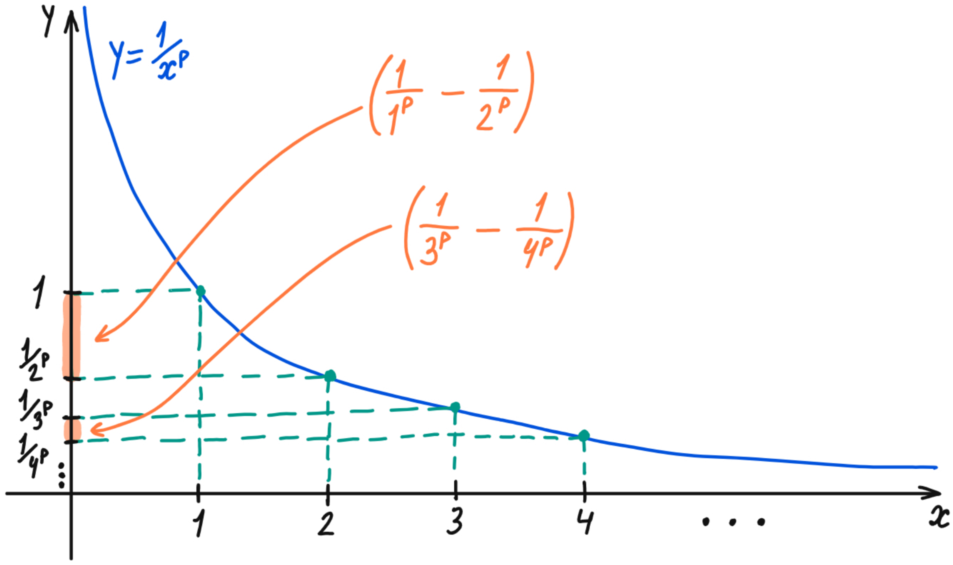

Рис. 7.1: Представление ряда в виде сумм длин оранжевых отрезков

Как видно из рисунка, отрезки, сумма длин которых представляет собой ряд, без наложения друг на друга лежат внутри отрезка $[0;\,1]$, причём внутри отрезка $[0;\,1]$ остаются конечные длины, не занятые отрезками, представляющими члены ряда. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} < 1$.

Теперь покажем, что

$$\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} > \frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p}.$$

Нам надо это показать, потому что в таком случае выйдет, что

$$\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \ldots > \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) + \ldots,$$

но так как

$$\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) + \ldots = 1,$$

то получим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} > \dfrac{1}{2}$.

Чтобы показать, что

$$\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} > \frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n+1)^p},$$

надо показать, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p}\right) > \frac{1}{(2n)^p}.$$

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ это означает, что $\dfrac{f(2n-1)+f(2n+1)}{2} > f(2n)$, то есть означает выпуклость вниз функции $f(x)$. Проверим, что эта функция выпуклая с помощью второй производной: $f''(x) = \dfrac{p(p+1)}{x^{p+2}} > 0 \quad \forall p > 0$.

Таким образом, $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} < 1$. □

Семинар 8

Формула Стирлинга

Утверждение 8.1 (Формула Стирлинга)**.** $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, *где* $0 < \theta_n < 1$.

Доказательство:

В нашем доказательстве формула окажется слабее.

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n.$$

Так как выражение $\int\limits_k^{k+1} \ln x\, dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции под функцией $\ln x$ и эта функция является выпуклой вверх $\Big($так как $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ при $x > 0\Big)$, то оно больше площади обычной трапеции, построенной на прямолинейных сторонах криволинейной трапеции и равной $\dfrac{\ln k + \ln(k+1)}{2}$, то есть получаем:

$$\int\limits_k^{k+1} \ln x\, dx > \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2};$$

$$\int\limits_k^{k+1} \ln x\, dx - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} > 0. \tag{8.1}$$

Левая часть неравенства (8.1) представляет собой площадь зазора между криволинейной и прямолинейной трапециями.

Рассмотрим числовую последовательность:

$$a_n = \left(\int\limits_1^2 \ln x\, dx - \left(\frac{\ln 1 + \ln 2}{2}\right)\right) + \left(\int\limits_2^3 \ln x\, dx - \left(\frac{\ln 2 + \ln 3}{2}\right)\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\int\limits_k^{k+1} \ln x\, dx - \left(\frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}\right)\right) + \left(\int\limits_{n-1}^{n} \ln x\, dx - \left(\frac{\ln(n-1) + \ln n}{2}\right)\right),$$

где $n \geqslant 2$. В силу неравенства (8.1) получаем, что $a_{n+1} > a_n$.

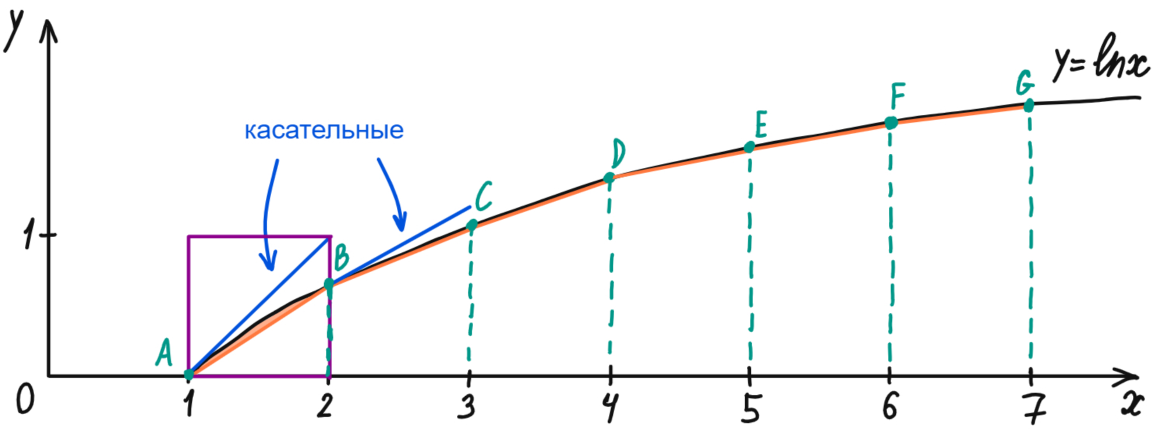

Рис. 8.1: Функция $y = \ln x$ и дополнительные построения

Так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ монотонно стремится к 0, то касательные к функции $y = \ln x$ в точках A, B, C, D, E, F, G, $\ldots$ проходят с уменьшающимся наклоном при увеличении абсциссы точки касания. По теореме Лагранжа тангенс угла наклона секущей AB равен значению производной функции $y = \ln x$ в некоторой точке из промежутка $(1;\, 2)$. Значит, наклон секущей AB находится между наклонами касательных, проведённых из точек A и B. Оранжевыми участками показаны зазоры между криволинейной и прямолинейной трапециями, построенными на соседних целочисленных значениях x. Построим на отрезке $x \in [1;\, 2]$ единичный квадрат, как показано на рисунке. Перенесём оранжевый зазор между точками B и C в квадрат так, чтобы точка B перешла в точку A. В силу того, что наклон касательной в точке B меньше наклона секущей между точками A и B, получаем, что перенесённый в квадрат оранжевый зазор будет с уже имеющимся в квадрате оранжевым зазором иметь ровно одну общую точку A. Аналогично перенесём все оранжевые зазор в единичный квадрат. Получим, что все оранжевые зазоры займут в единичном квадрате меньше половины квадрата без самопересечений, не считая единственную точку A. Значит, $a_n < \dfrac{1}{2} \quad \forall n \geqslant 2$.

Таким образом, $\{a_n\}$ – монотонно возрастающая ограниченная последовательность. Значит, по теореме Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, назовём его C.

Преобразуем a_n, учитывая, что $\ln 1 = 0$, получим:

$$a_n = \int\limits_1^n \ln x\, dx - (\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln(n-1)) - \frac{1}{2}\ln n =$$
$$= (x\ln x - x)\Big|_1^n + \frac{1}{2}\ln n - \ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n - \ln(n!).$$

Так как a_n монотонно возрастает к $C > 0$, то

$$n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n - \ln(n!) = C - \varepsilon_n,$$

где ε_n монотонно убывает к 0.

$$\frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n - \ln(n!) = C - 1 - \varepsilon_n;$$
$$\frac{\sqrt{n}\cdot n^n \cdot e^{-n}}{n!} = e^{C-1-\varepsilon_n};$$
$$n! = M\cdot\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot(1+o(1)), \tag{8.2}$$

где $M = e^{1-C}$ и $o(1) > 0$.

По формуле Валлиса

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{8.3}$$

Преобразуем выражение под пределом:

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2\cdot(2n+1)}{((2n+1)!!)^2};$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot\ldots 2n} = \frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2^n\cdot n!};$$
$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2\cdot(2n+1)}{\left(\frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{2^n\cdot n!}\right)^2} =$$
$$= \frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{(2n+1)\cdot((2n)!)^2}. \tag{8.4}$$

Подставим (8.2) в (8.4), получим:

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{2^{4n}M^4n^2\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(1+o(1))}{M^2\cdot 2n\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(1+o(1))(2n+1)} =$$
$$= \frac{M^2 n(1+o(1))}{2(2n+1)(1+o(1))}. \tag{8.5}$$

Подставим (8.5) в (8.3), получим:

$$\frac{M^2}{4} = \frac{\pi}{2}; \qquad M = \sqrt{2\pi}. \tag{8.6}$$

Подставим (8.6) в (8.2), получим:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot(1+o(1)).$$

■

Задачи на формулу Стирлинга

Задача 3111. Пользуясь формулой Стирлинга, приближённо вычислить $\lg 100!$.

Решение:

$$\lg(100!) = \lg\left(\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\cdot e^{\frac{\theta_{100}}{1200}}\right) = \lg\left(\sqrt{2\pi}\cdot 10\cdot 10^{200}\cdot e^{-100+\frac{\theta_{100}}{1200}}\right) =$$

$$= 201 + \lg\left(\sqrt{2\pi}\cdot e^{-100+\frac{\theta_{100}}{1200}}\right) = 201 + \frac{1}{\ln 10}\cdot\left(-100 + \frac{\theta_{100}}{1200} + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right) \approx$$

$$\approx 201 - \frac{100}{\ln 10} \approx 158.$$

□

Задача 3119. Приближённо вычислить C_{2n}^n, если n велико.

Решение:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}(1+o(1))}{2\pi n\cdot\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}(1+o(1))} = 2^{2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot(1+o(1)).$$

□

Действия над рядами

Рассмотрим ряд как вектор в бесконечномерном пространстве, координаты которого являются членами ряда. Введём операцию произведения (по Коши) двух рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$, в результате которой получается новый ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$, где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$. Такая операция мотивирована произведением многочленов: если перемножить многочлены $\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} b_kx^k$, то получится многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} c_kx^k$ (причём коэффициенты c_k не зависят от более старших членов исходных многочленов).

Теорема 8.1 (Теорема Мертенса)**.** *Если $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится абсолютно, а $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ сходится, то их произведение $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится. Причём если $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, то $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = A\cdot B$.*

Задача 2711. Доказать, что $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = 1.$

Решение:

Заметим, что $c_0 = 1 \cdot 1 = 1$.

При $n \geqslant 1$, используя бином Ньютона, получим:

$$c_n = 1 \cdot \frac{(-1)^n}{n!} + 1 \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot 1 =$$
$$= \frac{1}{n!} \cdot (1 + (-1))^n = 0.$$

Таким образом, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = 1.$ □

Семинар 9

Разбор домашнего задания

Теорема 9.1 (Теорема Коши)**.** *Если* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно и* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *сходится абсолютно, то их произведение* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *сходится абсолютно. Причём если* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = A \cdot B$.

Теорема 9.2. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *и их произведение* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *сходятся, то если* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = A \cdot B$.

Теорема 9.3. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ *сходятся, а их произведение* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *расходится, то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ *сходится по Чезаро.*

Задача 2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся.

Решение:

Будем считать, что нулевой член ряда равен 0.

$$c_n = 0 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot 0 =$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1 \cdot (n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot 1}} \right);$$
$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot (n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k \cdot (n-k)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1) \cdot 1}} =$$
$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}} \right). \tag{9.1}$$

Заметим, что выражение (9.1) для $|c_n|$ представляет собой интегральную сумму для функции $\frac{1}{x(1-x)}$, взятую в пределах от 0 до 1. Тогда получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}|c_n| = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Этот интеграл связан с бета-функцией Эйлера, вычислять его мы сейчас не будем.

Заметим, что для каждого слагаемого в выражении (9.1) можно сделать следующую оценку:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{n}.$$

Тогда для $|c_n|$, имеющего в выражении (9.1) $n-1$ слагаемых, получаем следующую оценку:

$$|c_n| \geqslant \frac{(n-1)\cdot 2}{n} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Значит, квадрат ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ расходится. □

Задача 3118. Вывести асимптотическую формулу для произведения

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

Решение:

Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, преобразуем исходное выражение:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} = \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{2^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}} =$$

$$= 2^{n+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\alpha_n}{24}}, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \theta_{2n}-2\theta_n \in (-1;\ 1).$$

□

Бесконечные произведения

Определение 9.1. Пусть дана последовательность $\{p_n\}$, где $n\in\mathbb{N}$. Тогда *бесконечным произведением* называют $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = \lim\limits_{N\to+\infty}\prod\limits_{n=1}^{N} p_n$.

Произведения, имеющие значения ∞ или 0, считаются расходящимися. Сходиться могут только бесконечные произведения, все члены которых, начиная с некоторого номера, положительны. Поэтому без ограничения общности можно исследовать только бесконечные произведения со всеми положительными членами (так как конечное количество начальных членов не влияет на сходимость).

По аналогии с частичной суммой рассмотрим частичное произведение и прологарифмируем его, тогда получим:

$$P_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \to P > 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \qquad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \qquad \ln P_n = \ln p_1 + \ldots + \ln p_n \to \ln P \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ (мы считаем, что $p_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Задача 3051. Доказать, что $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} =$$
$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1) \cdot \ldots \cdot (n-1)(n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot n} =$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n-1)(n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n \cdot n} = \frac{n+1}{2n};$$
$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

□

Вспомним, что необходимым условием сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ является $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Возьмём $a_n = \ln p_n$. Тогда необходимым условием сходимости бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ будет $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

Задача 3056. Доказать, что $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \neq 0$.

Решение:

$$P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} \quad \Big| \cdot 2\sin\frac{x}{2^n};$$
$$2\sin\frac{x}{2^n} \cdot P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin\frac{x}{2^{n-1}} \quad \Big| \cdot 2^{n-1};$$
$$2^n \sin\frac{x}{2^n} \cdot P_n = \sin x.$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$. Значит, $\exists N(x):\quad -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{2^n} < \dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{x}{2^n} \neq 0$. Тогда $\sin \dfrac{x}{2^n} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > N$. Далее рассматриваем $n > N$.

Используя первый замечательный предел, получаем:

$$P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \cos \dfrac{x}{2^n} = \dfrac{\sin x}{x} \quad \forall x \neq 0$. □

Задача 3066. Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Решение:
$\dfrac{1}{n} \not\to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. □

Задача 3069. Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Решение:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Значит, $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ расходится (к 0). □

Так как $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right)$, то с помощью задачи 3069 мы простым способом доказали расходимость гармонического ряда.

Семинар 10

Разбор домашнего задания

Задача 3071. Исследовать бесконечное произведение на сходимость:

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b},$$

где $n^2+an+b>0$ при $n \geqslant n_0$.

Решение:

$\prod\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$, где $N_0 \geqslant n_0$. Сделаем преобразование подлогарифмического выражения: $\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b} = 1 + \frac{(a_1-a)n+b_1-b}{n^2+an+b} = 1+x_n$, где $x_n = \frac{(a_1-a)n+b_1-b}{n^2+an+b}$.

Рассмотрим случай $a_1-a>0$. Тогда $x_n>0$, начиная с некоторого значения n. Так как $\ln(1+x_n) \sim x_n$ при $n \to +\infty$, то получаем:

$$\sum_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right) \sim \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{(a_1-a)n+b_1-b}{n^2+an+b} \sim \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{a_1-a}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$ при $a_1>a$.

Рассмотрим случай $a_1-a<0$. Тогда $x_n<0$, начиная с некоторого значения n. Далее размышления аналогичны предыдущему случаю. Значит, $\sum\limits_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$ расходится при $a_1<a$.

Рассмотрим случай $a_1-a=0$. Тогда $x_n = \frac{b_1-b}{n^2+an+b}$.

Если $b_1-b=0$, то ряд $\sum\limits_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$ сходится, так как все его члены равны 0.

Если $b_1-b>0$, то $x_n>0$. Так как $\ln(1+x_n) \sim x_n$ при $n \to +\infty$, то получаем:

$$\sum_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right) \sim \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{b_1-b}{n^2+an+b} \sim \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{b_1-b}{n^2}.$$

Значит, $\displaystyle\sum_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$ при $a_1 = a$ и $b_1 > b$.

Рассмотрим случай $b_1 - b < 0$. Тогда $x_n < 0$. Далее размышления аналогичны предыдущему случаю. Значит, $\displaystyle\sum_{n=N_0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}\right)$ сходится при $a_1 = a$ и $b_1 < b$.

Таким образом, $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$ сходится при $a_1 = a$ и расходится при $a_1 \neq a$.

$\square$

Задача 2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

Решение:

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1-k}\left(2^{n-k}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right) + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(2+\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} - 2^{n-1} - \frac{1}{2^n} - \ldots - 2^{n-k} - \frac{1}{2^{n-k+1}} - \ldots - 2 - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right).$$

Используя, что $\dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}$ и $2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2 - 1 = 1$, получаем:

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-k+1}} - \ldots - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + 1\right).$$

Используя, что $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$, получаем:

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Таким образом, произведение двух заданных рядов есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\dfrac{3}{4} < 1$, поэтому есть абсолютно сходящийся ряд. □

Сведение бесконечного произведения к рядам

На прошлом семинаре мы показали, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$, где $p_n > 0$. Для сходимости этого ряда необходимо выполнение условия $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. Тогда дальше будем рассматривать случай $p_n = 1 + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая последовательность.

Если все члены последовательности α_n одного знака, то и все члены ряда $\ln(1+\alpha_n)$ того же знака. Тогда в этом случае в силу того, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\alpha_n) \sim \sim \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$, получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$.

Теперь рассмотрим случай, когда члены последовательности α_n имеют разные знаки. Будем применять формулу Тейлора для логарифма:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член. Например, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, где θ находится между 0 и x. Оставим в формуле Тейлора только первый член, получим:

$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{1}{2(1+\theta_n)^2} \cdot \alpha_n^2,$$

где θ_n находится между 0 и α_n. Тогда θ_n – бесконечно малая последовательность. В таком случае получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\alpha_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n^2}{2(1+\theta_n)^2},$$

причём $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha_n^2}{2(1+\theta_n)^2} \asymp \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$ сходятся, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ сходится. Если один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$ сходится, а другой расходится, то

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ расходится. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$ расходятся, то о сходимости $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ ничего сказать нельзя.

Решение задач на сведение бесконечного произведения к рядам

Задача 3074. Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Решение:

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} < 0,$$

значит, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})} \asymp -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то и $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ сходится. □

Определение 10.1. Говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ *сходится абсолютно*, если ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln p_n$ сходится абсолютно. Если же ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln p_n$ сходится условно, то говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ *сходится условно.*

Если бесконечное произведение сходится абсолютно, то его множители можно переставлять в произвольном порядке. Если же бесконечное произведение сходится условно, то перестановка его множителей может привести к изменению сходимости или значения бесконечного произведения.

Задача 3088. Исследовать бесконечное произведение на абсолютную и условную сходимости: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$.

Решение:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ – знакопеременный сходящийся ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд.

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ сходится.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right| \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right|$ расходится, так как расходится гармонический ряд.

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ сходится условно. □

Задача 3089. Исследовать бесконечное произведение на абсолютную и условную сходимости: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение:

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ – знакопеременный сходящийся ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ – расходящийся ряд.

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ расходится. □

Задача 3077. Исследовать бесконечное произведение на сходимость:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Решение:

Заметим, что при $x = 0$ все члены бесконечного произведения равны 1, поэтому $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$ сходится при $x = 0$.

Далее рассмотрим случай $x \neq 0$. Используя формулу Тейлора для логарифма с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем:

$$\ln p_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} = \frac{x}{n} - \frac{1}{2(1 + \theta(n,x))^2} \cdot \frac{x^2}{n^2} - \frac{x}{n} = -\frac{1}{2(1 + \theta(n,x))^2} \cdot \frac{x^2}{n^2},$$

где $\theta(n,x)$ лежит между 0 и $\dfrac{x}{n}$. Тогда $\ln p_n \asymp \dfrac{1}{n^2}$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то и $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$ сходится.

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$ сходится при всех значениях x. $\square$

Задача 3081. Исследовать бесконечное произведение на сходимость:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right).$$

Решение:

$\alpha_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$. Заметим, что $x \neq 0$.

Рассмотрим случай $x > 0$. Тогда $\alpha_n > 0$. Значит, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$. Заметим, что $\sqrt[n]{\alpha_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{x} \to \dfrac{e}{x}$ при $n \to +\infty$. По радикальному признаку Коши при $\dfrac{e}{x} > 1$, то есть при $x \in (0; e)$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ расходится, а при $\dfrac{e}{x} < 1$, то есть при $x > e$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ сходится.

Рассмотрим случай $x = e$. Тогда $\alpha_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n}$. Используя, что $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, получаем: $\alpha_n = e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ при $n \to +\infty$. Значит, при $x = e$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ расходится.

Теперь рассмотрим случай $x < 0$.

При $x \in (-\infty;\ -e)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{|x|^n}$ сходится, так как этот случай мы уже рассматривали выше.

При $x = -e$ имеем: $|\alpha_n| = \left|\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{(-e)^n}\right| \to e^{\frac{1}{2}} \neq 0$ при $n \to +\infty$, значит, при $x = e$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ расходится. И $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$ тоже расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

При $x \in (-e;\ 0)$ имеем: $|\alpha_n| > \left|\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{(-e)^n}\right| \to e^{\frac{1}{2}} \neq 0$ при $n \to +\infty$, значит, при $x \in (-e;\ 0)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ расходится. И $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$ тоже расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Так как при $x < -e$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ является знакочередующимся, то необходимо исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$. Так как $\sqrt[n]{\alpha_n^2} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{x^2}$, то по радикальному признаку Коши при $\dfrac{e^2}{x^2} < 1$, то есть при $x < -e$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2$ сходится.

Приходим к следующему выводу: бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right)$ сходитя при $x \in (-\infty;\ -e) \cup (e;\ +\infty)$, расходится при $x \in [-e;\ 0) \cup (0;\ e]$, не определено при $x = 0$. $\square$

Семинар 11

Решение задач на сведение бесконечного произведения к рядам (продолжение)

Задача 3084. Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

Решение:

Заметим, что при $p=0$ все члены исходного бесконечного произведения равны 1, поэтому оно сходится. Дальше будем рассматривать случай $p\neq 0$.

$$P_n=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p=\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)\right)^p,$$

поэтому исходное бесконечное произведение сходится тогда и только тогда, когда сходится $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$. Дальше будем исследовать на сходимость это бесконечное произведение.

Заметим, что $x\neq 0$. Используя, что $\sin t=t-\dfrac{t^3}{3!}+O(t^5)$, получаем:

$$\tilde{p}_n=\frac{\frac{x}{n}-\frac{x^3}{6n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\frac{x}{n}}=1-\frac{x^2}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right);$$

$$\tilde{\alpha}_n=-\frac{x^2}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Значит, $\tilde{\alpha}_n<0\quad\forall n\in\mathbb{N},\ n>n_0$ и $|\alpha_n|\asymp\dfrac{1}{n^2}$. Тогда $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$ сходится.

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$ сходится при всех значениях p. □

Задача 3092. Исследовать бесконечное произведение на абсолютную и условную сходимости: $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Решение:

$$\alpha_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}-1=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Так как ряд $\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ сходится, то ряд α_n сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\alpha_n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha_n - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + (-1)^n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + (-1)^n)} \sim \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то и ряд $\alpha_n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ расходится, а значит, ряд α_n тоже расходится.

Так как ряд α_n знакопеременный, то надо исследовать на сходимость ряд α_n^2.

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{(\sqrt{n} + (-1)^n)^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Так как гармонический ряд расходится, то и ряд α_n^2 расходится. Значит, мы ещё не понимаем, сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ или расходится.

Заметим, что $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)^{-1}$. Исследуем на сходимость это бесконечное произведение.

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)^{-1} = \prod_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n}} = \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Ряд $\tilde{\alpha}_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – знакопеременный сходящийся, а ряд $\tilde{\alpha}_n^2 = \dfrac{1}{n}$ – расходящийся.

Значит, $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)^{-1}$ расходится, тогда и $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ расходится. □

Задача 3099 (с исправленной опечаткой)**.**

Показать, что произведение $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}(1 + \alpha_n)$, где

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k - 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k \end{cases}$$

сходится, хотя оба ряда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \alpha_n^2$ расходятся.

Решение:

Исследуем $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}(1+\alpha_n)$.

$$\prod_{n=2}^{+\infty}(1+\alpha_n) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\ldots;$$
$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) = \left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right) =$$
$$= \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1-\frac{1}{k^2};$$
$$P_{2k-1} = 4\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 4\prod_{n=2}^{k}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Ясно, что $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} P_{2k-1} = P$. Так как $P_{2k} = P_{2k-1}\cdot(1+\alpha_{2k})$, то также $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} P_{2k} = P$. Тогда $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} P_k = P$, то есть $\prod\limits_{n=2}^{+\infty}(1+\alpha_n)$ сходится.

Исследуем $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\alpha_n$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\alpha_n = 3-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots;$$
$$S_{2k} = 3-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{k}}+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) =$$
$$= 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

Так как гармонический ряд расходится, а $\sum\limits_{n=2}^{k}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\alpha_n$ расходится.

Исследуем $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\alpha_n^2$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\alpha_n^2 = 9+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)^2+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots.$$

Так как гармонический ряд расходится, то и $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\alpha_n^2$ расходится. □

Решение задач на дзета-функцию и на гамма-функцию

Задача 3100. Пусть $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (дзета-функция Римана), где $x > 1$, и p_n ($n = 1, 2, \ldots$) – последовательные простые числа. Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

Решение:

Так как $\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то $\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$, где $q = \frac{1}{p_n^x}$. Тогда получаем:

$$P_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{2^{kx}} + \ldots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{3^{kx}} + \ldots\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n^x} + \ldots + \frac{1}{p_n^{kx}} + \ldots\right).$$

Так как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия сходится абсолютно, то можно в выражении для $P_n(x)$ перемножать скобки и складывать слагаемые в произвольном порядке. Тогда получим: $P_n = \sum\limits_m \frac{1}{m^x}$, где $m = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, где k_1 – номер слагаемого в 1-й скобке с рядом из бесконечной геометрической прогрессии, k_2 – номер слагаемого во 2-й скобке, …, k_n – номер слагаемого в n-й скобке, которые участвовали в произведении, результат которого равен $\frac{1}{m^x}$.

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} > \sum\limits_m \frac{1}{m^x} > \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x}$, то есть $\zeta(x) > P_n(x) > \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x}$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x} = \zeta(x)$, то при $n \to +\infty$ получаем: $\zeta(x) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) \geqslant \zeta(x)$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \zeta(x)$, то есть $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$. □

Задача 3105 (а)**.** $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n! n^x}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$ – гамма-функция. Представить функцию $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения.

Решение:

Пусть $a_n = \dfrac{n! n^x}{x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)} \cdot \frac{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{n!n^x} = \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \cdot \frac{n+1}{x+n+1}; \\
&a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \\
&= \frac{1}{x(x+1)} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{x+2}\right) \cdot \ldots \left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \cdot \frac{n}{x+n}\right)
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} = \frac{1}{x(x+1)} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^x \cdot \frac{k+1}{x+k+1}.$$

$\square$

Семинар 12

Разбор домашнего задания

Задача 3105 (б (с исправленной опечаткой))**.**

$\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$ – гамма-функция.

б) Показать, что $\Gamma(x)$ имеет смысл для всех действительных x, не равных целому отрицательному числу или 0.

Решение:

На прошлом семинаре мы показали, что $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \cdot \dfrac{n+1}{x+n+1}$.

б) Заметим, что при $x \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ гамма-функция не имеет смысла, так как происходит деление на 0.

$\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \cdot \dfrac{n+1}{x+n+1}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \cdot \dfrac{n+1}{x+n+1}\right)$.

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \cdot \frac{n+1}{x+n+1}\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\frac{n+1}{x+n+1}\right) =$$
$$= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{x+n+1}\right)\right) =$$
$$= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как ряд $\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то и $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \cdot \dfrac{n+1}{x+n+1}\right)$ сходится.

Таким образом, гамма-функция имеет смысл для всех действительных x, не равных целому отрицательному числу или 0. $\square$

Задача 3086 (с исправленной опечаткой)**.**

Доказать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \cos x_n$ сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2$.

Решение:

Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

$\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \cos x_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln(\cos x_n)$.

$$\ln(\cos x_n) = \ln\left(1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right) = -\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2).$$

Ряд $-\dfrac{x_n^2}{2}$ сходится по условию, а ряд $o(x_n^2)$ сходится, так как ряд $\delta_n x_n^2$, где δ_n – бесконечно малая последовательность, сходится абсолютно. Таким образом, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \ln(\cos x_n)$ сходится, а значит, и $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \cos x_n$ сходится. □

Функциональные ряды

Задача 2717. Определить области абсолютной и условной сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$

Решение:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}.$$

Замена: $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Заметим, что $y \neq -1$. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1}$.

При $|y| > 1$ имеем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1} \neq 0$. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1}$ расходится при $|y| > 1$.

При $|y| < 1$ имеем, что $\left|\dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1}\right| < |y|^n$. Так как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия сходится абсолютно, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1}$ сходится абсолютно при $|y| < 1$.

При $y = 1$ имеем, что $\dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1} = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$. Тогда по признаку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot y^n}{2n-1}$ сходится при $y = 1$. При этом абсолютной сходимости нет, так как гармонический ряд расходится.

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ сходится абсолютно при $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1$, то есть при $x \in (0;\ +\infty)$, и сходится условно при $\dfrac{1-x}{1+x} = 1$, то есть при $x = 0$. □

Задача 2734. Определить области абсолютной и условной сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$$

Решение:

Рассмотрим случай $|x| \geqslant |y|$.

$$\sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} = |x|^n \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n^2}}.$$

Так как $1 \leqslant \sqrt[n]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n^2}} \leqslant \sqrt[n]{2}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{n^2}} = 1$. Значит, $\sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} \sim |x|^n$ при $n \to +\infty$. Так как бесконечная геометрическая прогрессия сходится тогда и только тогда, когда её знаменатель меньше 1, то получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$ сходится при $|x| < 1$.

Случай $|y| \leqslant |x|$ рассматривается аналогично. Получим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$ сходится при $|y| < 1$.

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$ сходится при $|x| < 1$ и $|y| < 1$ (в координатах xOy это единичный квадрат). □

Сходимость функциональной последовательности

Определение 12.1. Функциональная последовательность $f_n(x)$ *(поточечно) сходится* к функции $f(x)$ на множестве $\mathbb{X}$, если

$$\forall x \in \mathbb{X}\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon, x)\colon\ \ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пишут: $f_n(x) \to f(x)$.

Определение 12.2. Функциональная последовательность $f_n(x)$ *равномерно сходится* к функции $f(x)$ на множестве $\mathbb{X}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon)\colon\ \ \forall x \in \mathbb{X}\ \ \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пишут: $f_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} f(x)$.

Из равномерной сходимости следует, что

$$\sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

А из

$$\sup_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

следует, что

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

При этом в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ в определении равномерной сходимости можно $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ заменить на $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. И опять же в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ можно условие $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ заменить на $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Утверждение 12.1 (sup-критерий)**.** $f_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} f(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon)\colon \ \ \forall n > N \quad |r_n| < \varepsilon,$$

где $r_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)|$. *Это означает, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Приведём пример.

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на множестве $\mathbb{X} = [0;\,1]$. Тогда $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;\,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Значит, $f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0;\,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| = 1$. Значит, нет равномерной сходимости на $\mathbb{X} = [0;\,1]$.

Заметим, что на множестве $\mathbb{X} = [0;\,1)$ тоже $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| = 1$, то есть нет равномерной сходимости.

Теперь рассмотрим множество $\mathbb{X} = [0;\ 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| = (1-\varepsilon)^n \to 0$ при $n \to +\infty$, то есть равномерная сходимость есть.

Если $f_n(x) \overset{\mathbb{X}_1}{\rightrightarrows} f(x)$ и $f_n(x) \overset{\mathbb{X}_2}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f_n(x) \overset{\mathbb{X}_1\cup\mathbb{X}_2}{\rightrightarrows} f(x)$. В случае бесконечного объединения множеств это, вообще говоря, неверно. В примере выше была равномерная сходимость на отрезках вида $[0;\ 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, но не было равномерной сходимости на объединении всех таких отрезков, то есть на полуинтервале $[0;\,1)$.

Задача 2747. Исследовать на равномерную сходимость:

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \quad \text{на} \quad \mathbb{X} = [0;\,1].$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
&f_n(x) \to 0;\\
&r_n = \sup_{x\in\mathbb{X}} f_n(x);\\
&f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x).
\end{aligned}
$$

$f_n'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение при $x = \dfrac{n}{n+1}$. Значит, это точка максимума.

$$
r_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.
$$

Таким образом, $f_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} 0$. □

Задача 2748. Исследовать на равномерную сходимость:

$$
f_n(x) = x^n - x^{2n} \quad \text{на} \quad \mathbb{X} = [0;\, 1].
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
&f_n(x) \to 0;\\
&r_n = \sup_{x\in\mathbb{X}} f_n(x);\\
&f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n).
\end{aligned}
$$

$f_n'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение при $x = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$. Значит, это точка максимума.

$$
r_n = f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
$$

Таким образом, равномерной сходимости нет. □

Задача 2752. Исследовать на равномерную сходимость:

$$
f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad \text{на} \quad \mathbb{X},
$$

где а) $\mathbb{X} = [0;\, 1]$; б) $\mathbb{X} = (1;\ +\infty)$.

Решение:

Заметим, что $f_n(0) = 0 \to 0$ при $n \to +\infty$. А если $x \neq 0$, то тоже $f_n(x) = 0 \to 0$ при $n \to +\infty$. Таким образом, $f_n(x) \to f(x) = 0$.

$r_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{X}} f_n(x)$. Так как $(1-nx)^2 \geqslant 0$, то $1+n^2x^2 \geqslant 2nx$, то есть $1 \geqslant \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, причём равенство достигается только при $x = \dfrac{1}{n}$.

а) $r_n = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \not\to 0$, значит, равномерной сходимости на $\mathbb{X} = [0;\ 1]$ нет.

б) $f_n'(x) = \dfrac{2n\cdot(1+n^2x^2) - 2nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \dfrac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} < 0$ при $x > 1$. Тогда $r_n = f_n(1) = \dfrac{2n}{1+n^2} \to 0$ при $n\to+\infty$. Значит, $f_n(x) \overset{(1;\ +\infty)}{\rightrightarrows} 0$. □

Задача 2760. Исследовать на равномерную сходимость:

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{на} \quad \mathbb{X},$$

где а) $\mathbb{X}$ – конечный интервал $(a;\ b)$; б) $\mathbb{X} = (-\infty;\ +\infty)$.

Решение:

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$. Тогда $r_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{X}}\left|\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - e^x\right|$. Учитывая, что $\ln(1+t) \leqslant t$ при $t \geqslant 0$, получаем:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \leqslant e^n.$$

Значит, $r_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{X}}\left(e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$.

а) Остаётся в качестве упражнения на дом.

б) Так как при $x\to+\infty$ имеем, что $\dfrac{e^x}{P_n(x)} = +\infty$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. Значит, равномерной сходимости на $\mathbb{X} = (-\infty;\ +\infty)$ нет. □

Семинар 13

Разбор домашнего задания. Признак Дини

Утверждение 13.1 (Признак Дини). *Пусть* $\mathbb{X} = [a;\, b]$, $f_n \in C[a;\, b]$, $f \in C[a;\, b]$ *и* $\forall x \in [a;\, b]$ *последовательность* $\{f_n(x) - f(x)\}$ *монотонно стремится к 0. Тогда* $f_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} f(x)$.

Задача 2760 (а). Исследовать на равномерную сходимость:

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{на} \quad \mathbb{X},$$

где $\mathbb{X}$ – конечный интервал $(a;\, b)$.

Решение:

Рассмотрим отрезок $[a;\, b]$. Если мы докажем равномерную сходимость на этом отрезке, то получим также и равномерную сходимость на интервале $(a;\, b)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$, то есть $f(x) = e^x$. Заметим, что $f_n \in C[a;\, b]$, $f \in C[a;\, b]$ и $\forall x \in$ $\in [a;\, b]$ последовательность $\{f_n(x) - f(x)\}$ стремится к 0. Для применения признака Дини остаётся доказать, что это стремление к 0 монотонное. Так как при каждом фиксированном значении x значение $f(x)$ является константой, то надо доказать монотонность последовательности $\{f_n(x)\}$.

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{\dfrac{x+n+1}{n+1}}{\dfrac{x+n}{n}}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) =$$
$$= \left(\frac{(x+n+1)\cdot n}{(x+n)(n+1)}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = \left(\frac{xn + n^2 + n}{xn + n^2 + n + x}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{x}{(x+n)(n+1)}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$

Хотим использовать неравенство Бернулли: $(1+t)^n \geqslant 1 + nt$ при $t > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Для этого потребуем выполнения неравенства $-\dfrac{x}{(x+n)(n+1)} > -1$. Для простоты выбора n потребуем выполнения неравенств $n + a > 1$ и $\dfrac{|x|}{|x+n|\cdot|n+1|} < 1$. Учитывая, что

$$\frac{|x|}{|x+n|\cdot|n+1|} < \frac{|x|}{|n+1|} \leqslant \frac{\max\{|a|,\, |b|\}}{n+1},$$

получаем, что n можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $n + a > 1$ и $\dfrac{\max\{|a|,\, |b|\}}{n+1} < 1$. То есть $n > \max\{1 - a,\ \max\{|a|,\, |b|\} - 1\}$. Можно для упрощения записи усилить это неравенство: $n > \max\{|a|,\ |b|\} + 1$. Пусть

$$N = [\max\{|a|,\ |b|\} + 1],$$

тогда будем далее рассматривать случай $n > N$.

Применяем неравенство Бернулли:

$$\begin{aligned}
&\frac{f_{n+1}}{f_n} = \left(1 - \frac{x}{(x+n)(n+1)}\right)^n \cdot \frac{x+n+1}{n+1} \geqslant \\
&\geqslant \left(1 - \frac{nx}{(x+n)(n+1)}\right)\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = \\
&= 1 - \frac{nx}{(x+n)(n+1)} + \frac{x}{n+1} - \frac{nx^2}{(x+n)(n+1)^2} = \\
&= 1 + \frac{x^2}{(x+n)(n+1)} - \frac{nx^2}{(x+n)(n+1)^2} = 1 + \frac{x^2}{(x+n)(n+1)^2} > 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}$ является монотонной при $n > N$. Значит, по признаку Дини $f_n(x) \overset{[a;\,b]}{\rightrightarrows} e^x$ (конечное количество начальных членов функциональной последовательности не влияет на равномерную сходимость). Тогда $f_n(x) \overset{(a;\,b)}{\rightrightarrows} e^x$. □

Решение задач на функциональные последовательности

Задача 2765. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Доказать, что $f_n(x) \overset{[\alpha;\,\beta]}{\rightrightarrows} f'(x)$, где $a < \alpha < \beta < b$.

Решение:

По теореме Лагранжа, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c;\ d]$ и дифференцируема на интервале $(c;\ d)$, то $\exists \theta \in (c;\ d)\colon\ f'(\theta) = \dfrac{f(d) - f(c)}{d - c}$.

Тогда $f_n(x) = \dfrac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(\theta)$, где $\theta \in \left(x;\ x + \dfrac{1}{n}\right)$.

По теореме Кантора, если некоторая функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке. Это значит, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(g, \delta) = 0$, где $\omega(g, \delta)$ – модуль непрерывности:

$$\omega(g, \delta) = \sup\{|g(x_1) - g(x_2)|\colon\ \ x_1, x_2 \in [\alpha, \beta],\ \ |x_1 - x_2| < \delta\}.$$

По-другому определение равномерной непрерывности можно сформулировать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0\colon \ \forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

Тогда функция $f_n(x) = f'(\theta)$ равномерно непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, значит,

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(\theta) - f'(x)| \leqslant \omega\left(f', \frac{1}{n}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, $r_n = \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x) - f'(x)| \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, $f_n(x) \overset{[\alpha;\beta]}{\rightrightarrows} f'(x)$. □

Критерий Коши. Признак Вейерштрасса

Утверждение 13.2 (Критерий Коши для равномерной сходимости функциональных последовательностей)**.**

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $\mathbb{X}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon)\colon \ \forall m, n > N \ \ \forall x \in \mathbb{X} \ \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Определение 13.1. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{X}$, если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно на $\mathbb{X}$.

Утверждение 13.3 (Критерий Коши для равномерной сходимости функциональных рядов)**.**

Функциональная ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{X}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon)\colon \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{X} \ \ |a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Утверждение 13.4 (Признак Вейерштрасса)**.**

Если в функциональном ряде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$:

1) $|a_n(x)| \leqslant \alpha_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{X}$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ сходится,

то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{X}$.

Доказательство:

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ сходится, то по критерию Коши получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon): \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \ |\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon.$$

Так как $\forall x \in \mathbb{X}$ выполнено

$$|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)| + \ldots + |a_{n+p}(x)| \leqslant |\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}|,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon): \ \ \forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{X} \ \ \ |a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{X}$. ■

Решение задач на равномерную сходимость функциональных рядов

Задача 2767. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

на интервале:
а) $|x| < q$, где $q < 1$;
б) $|x| < 1$.

Решение:

а) $|x^n| = |x|^n \leqslant q^n$. Пусть $\alpha_n = q^n$.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Значит, по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ сходится равномерно на интервале $|x| < q$, где $q < 1$.

б) Если ряд сходится, то $S_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} S(x)$ и $S_{n-1}(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} S(x)$, тогда $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} 0$. Тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{X}} |a_n(x)| \to 0$ – необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

$\sup\limits_{|x|<1} |x^n| = 1 \not\to 0$. Значит, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ не сходится равномерно на интервале $|x| < 1$. □

Задача 2768 (1)**.** Исследовать характер сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

на интервале $(0;\ +\infty)$.

Решение:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, по признаку Даламбера $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится поточечно на интервале $(0;\ +\infty)$.

$\displaystyle\sup_{x\in(0;\ +\infty)} \frac{x^n}{n!} = +\infty \not\to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, по необходимому условию равномерно сходящегося ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ не сходится равномерно на интервале $(0;\ +\infty)$.

$\square$

Задача 2769. Исследовать характер сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$$

на сегменте $[0;\ 1]$.

Решение:

$$S_n(x) = (1-x) + (1-x)x + \ldots + (1-x)x^n = 1 - x^{n+1} \to \begin{cases} 1, & x \in [0;\ 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Так как предельная функция имеет разрыв, то равномерной сходимости ряда не будет.

Таким образом, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ сходится только поточечно к $S(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;\ 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

$\square$

Задача 2769 (изменённая)**.** Исследовать характер сходимости функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^2 x^n$$

на сегменте $[0;\ 1]$.

Решение:

$$\begin{aligned} a_n'(x) = \big((1-x)^2x^n\big)' = -2(1-x)x^n + n(1-x)^2x^{n-1} = \\ = (1-x)x^{n-1}(n(1-x)-2x) = (1-x)x^{n-1}(n-(n+2)x). \end{aligned}$$

На сегменте $[0;\,1]$ производная $a_n'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение в точке $\dfrac{n}{n+2}$ и обращается в 0 в точке 1. Значит, получаем:

$$\sup_{x\in[0;\,1]} a_n(x) = a_n\left(\frac{n}{n+2}\right) = a_n\left(1-\frac{2}{n+2}\right) = \frac{4}{(n+2)^2}\cdot\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n \leqslant \frac{4}{(n+2)^2}.$$

Пусть $\alpha_n = \dfrac{4}{(n+2)^2}$. Так как $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)^2x^n$ сходится равномерно на сегменте $[0;\,1]$. $\square$

Семинар 14

Разбор домашнего задания

Задача 2774 (в)**.** Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Решение:

1-й способ:

Используем неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим: $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Получим: $1+n^4x^2 \geqslant 2\sqrt{n^4x^2} = 2n^2|x|$. Тогда

$$\frac{x}{1+n^4x^2} \leqslant \frac{|x|}{2n^2|x|} = \frac{1}{2n^2}.$$

Заметим, что при $x=0$ эта оценка тоже работает.

Пусть $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$.

2-й способ:

Пусть $f(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$. Тогда

$$f'(x) = \frac{(1+n^4x^2) - 2n^4x \cdot x}{(1+n^4x^2)^2} = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}.$$

Эта производная при $x \geqslant 0$ меняет свой знак с плюса на минуса, переходя через нулевое значение в точке $x = \dfrac{1}{n^2}$. Значит, при $x \geqslant 0$ получаем:

$$\frac{x}{1+n^4x^2} \leqslant \sup_{x \geqslant 0} \frac{x}{1+n^4x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+1} = \frac{1}{2n^2}.$$

Пусть $a_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$. $\square$

Признаки Абеля и Дирихле

Утверждение 14.1 (Признак Абеля). *Пусть* $A_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{X}$ *и* $\{b_n(x)\}$ *– монотонная последовательность* $\forall x \in \mathbb{X}$. *Также пусть последовательность* $\{b_n(x)\}$ *ограничена в совокупности, то есть*

$$\exists C > 0\colon\ |b_n(x)| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{X}$.

Утверждение 14.2 (Признак Дирихле). *Пусть* $A_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ *ограничена в совокупности, то есть*

$$\exists C > 0\colon\ |A_k(x)| \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Также пусть $\{b_n(x)\}$ *– монотонная последовательность* $\forall x \in \mathbb{X}$ *и* $b_n(x) \overset{\mathbb{X}}{\rightrightarrows} 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{X}$.

Задача 2775 (а). Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x}$$

на сегменте а) $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \pi$; б) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Решение:

а) Используя формулу $2 \sin kx \sin \dfrac{x}{2} = \cos\left(\left(k - \dfrac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)x\right)$, получаем:

$$(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)\cdot 2\sin\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) +$$
$$+ \ldots + \left(\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) =$$
$$= 2\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Пусть $A_n(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$, тогда $A_n(x) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

Значит, при $x \in [\varepsilon;\ 2\pi - \varepsilon]$ получаем: $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\dfrac{\varepsilon}{2}}$.

Пусть $b_n(x) = \dfrac{1}{n}$. Последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0. При этом члены последовательности не зависят от x, тогда их стремления к 0 следует равномерная сходимость к 0 на сегменте $[\varepsilon;\ 2\pi - \varepsilon]$.

Таким образом, по признаку Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{x}$ сходится равномерно на сегменте $[\varepsilon;\ 2\pi - \varepsilon]$.

б) Будем доказывать отрицание критерия Коши: функциональная ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ не сходится равномерно на $\mathbb{X}$ тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0\colon\ \ \forall N\ \ \exists n > N\ \ \exists p \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in \mathbb{X}\colon\ \ |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \geqslant \varepsilon.$$

В нашем случае $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$. Подберём такое ε, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \dfrac{\sin(n+p)x}{n+p} \geqslant \varepsilon$ для некоторых значений p и x (тогда и неравенство с модулем будет выполнено). Выберем значение $p = n$. Найдём такое значение x, чтобы выполнялось неравенство $\sin(n+k)x \geqslant \dfrac{1}{2}\ \ \forall k = 1, \ldots, n$. Для этого достаточно, чтобы $(n+k)x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$. А для этого достаточно, чтобы $nx \geqslant \dfrac{\pi}{6}$ и $2nx \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$, то есть $x \in \left[\dfrac{\pi}{6n};\ \dfrac{5\pi}{12n}\right]$. Выберем, например, значение $x = \dfrac{\pi}{6n}$. Так как при $p = n$ имеем: $\dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+p} \geqslant \dfrac{1}{2}$, то при $p = n$ и при $x = \dfrac{\pi}{6n}$ имеем:

$$\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{n+p} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Тогда получаем:

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{4}\colon\ \ \forall N\ \ \exists n = [N] + 1\ \ \exists p = [N] + 1\ \ \exists x = \frac{\pi}{6n}\colon$$
$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{n+p}\right| \geqslant \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, по отрицанию критерия Коши $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{x}$ не сходится равномерно на сегменте $[0;\ 2\pi]$ (а поточечная сходимость есть). $\square$

Задача 2782. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Решение:

Как мы показали при решении задачи (2672), ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится. Пусть $a_n(x) = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, тогда $A_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

Пусть $b_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. Последовательность $\{b_n\}$ является неубывающей $\forall x \geqslant 0$. Заметим также, что $|b_n(x)| \leqslant 1 \quad \forall x \geqslant 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, по признаку Абеля $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$. $\square$

Задача 2781. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; \qquad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Решение:

Пусть $a_n(x) \sin x \sin nx$, тогда

$$A_k(x) = \sin x(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx) = \sin x \cdot \frac{\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{k}{2}x\right).$$

Отдельно можно убедиться, что эта формула работает и для случая $\sin\frac{x}{2} = 0$.

Тогда получаем: $|A_k(x)| \leqslant 2$.

Пусть $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$. Последовательность $\{b_n\}$ является монотонной последовательностью $\forall x \geqslant 0$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $x \geqslant 0$ и последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ стремится к 0, то последовательность $\{b_n\}$ равномерно стремится к 0 при $x \geqslant 0$.

Таким образом, по признаку Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ сходится равномерно при $x\geqslant 0$. □

Свойства функциональных рядов

Утверждение 14.3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ *сходится равномерно на любом отрезке* $[\alpha;\ \beta]\subset(a;\ b)$ *и* $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=A_n$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$ *сходится и*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

При этом x_0 *может быть только значением из промежутка* $(a;\ b)$.

Приведём пример. В задаче (2775) мы показали, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на любом отрезке вида $[\varepsilon;\ 2\pi-\varepsilon]$, где $\varepsilon\in(0;\ \pi)$. Так как функции $\dfrac{\sin nx}{n}$ непрерывны в интервале $x\in(0;\ 2\pi)\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{\sin nx_0}{n}=A_n$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$ сходится. Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx_0}{n}=f(x_0)$. Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(0;\ 2\pi)$.

Утверждение 14.4. *Пусть функции* $u_n(x)$ *непрерывны (интегрируемы по Риману) на отрезке* $[a;\ b]$ *и ряд* $u(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a;\ b]$. *Тогда* $u(x)$ *непрерывна на* $[a;\ b]$ *(интегрируема по Риману соответственно) и*

$$\int\limits_a^b u(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx.$$

Задача 2802. Определить, при каких значениях параметра α:

а) последовательность $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}\ \ (n=1,2,\ldots)$ сходится на сегменте $[0;\ 1]$;

б) последовательность $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}\ \ (n=1,2,\ldots)$ сходится равномерно на сегменте $[0;\ 1]$;

в) возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$.

Решение:

а) Заметим, что $f_n(0)$ сходится. При $x \in (0;\,1]$ получаем:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} = 0.$$

Таким образом, $\forall\alpha\ \ f_n(x) \to f(x) = 0$ на сегменте $[0;\,1]$.

б) Пусть $r_n = \sup\limits_{x\in[0;\,1]} f_n(x) = \sup\limits_{x\in[0;\,1]} n^\alpha x e^{-nx}$.

$$f_n'(x) = n^\alpha(e^{-nx} - nxe^{-nx}) = n^\alpha e^{-nx}(1-nx).$$

Производная $f_n'(x)$ на отрезке $[0;\,1]$ меняется свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение в точке $x = \dfrac{1}{n}$. Тогда получаем:

$$r_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

$r_n \to 0$ при $n \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$. Значит, $f_n(x) \overset{[0;\,1]}{\rightrightarrows} 0$ только при $\alpha < 1$.

в) Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_0^1 n^\alpha x e^{-nx}\,dx = n^\alpha\left(\left(-\frac{1}{n}xe^{-nx}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{n}\int\limits_0^1 e^{-nx}\,dx\right) =$$
$$= n^\alpha\left(-\frac{1}{n}e^{-n} - \frac{1}{n^2}e^{-n} + \frac{1}{n^2}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty \quad \text{при} \quad \alpha < 2.$$

Таким образом, при $\alpha < 2$ возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$. $\square$

Семинар 15

Разбор домашнего задания

Задача 2777. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; \qquad 0 < x < +\infty.$$

Указание: оценить остаток ряда.

Решение:

По признаку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится при $x > 0$. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ и $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ будет сходиться равномерно при $x > 0$ тогда и только тогда, когда будет выполнено, что $|f(x) - S_n(x)| \overset{(0;\ +\infty)}{\rightrightarrows} 0$.

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} =$$
$$= (-1)^{n+1} \left(\left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2} \right) + \left(\frac{1}{x+n+3} - \frac{1}{x+n+4} \right) + \ldots \right).$$

Заметим, что $\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2} > 0$, $\frac{1}{x+n+3} - \frac{1}{x+n+4} > 0$, …, поэтому получаем:

$$|f(x) - S_n(x)| = \left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2} \right) + \left(\frac{1}{x+n+3} - \frac{1}{x+n+4} \right) + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \left(\left(\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2} \right) + \left(\frac{1}{x+n+2} - \frac{1}{x+n+3} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{x+n+3} - \frac{1}{x+n+4} \right) + \left(\frac{1}{x+n+4} - \frac{1}{x+n+5} \right) + \ldots \right) =$$
$$= \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n+1} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Так как $\frac{1}{n+1} \to 0$, то $|f(x) - S_n(x)| \overset{(0;\ +\infty)}{\rightrightarrows} 0$ (по sup-критерию). Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится равномерно при $x > 0$. □

Задача 2803. Показать, что последовательность $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на сегменте $[0, 1]$, но

$$\int\limits_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Решение:

$$f_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty;$$

$$\int\limits_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int\limits_0^1 0\, dx = 0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-nx^2}\Big|_1^0\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

□

Свойства функциональных рядов (продолжение)

Утверждение 15.1.

Пусть:

1) $f_n(x_0) \to A$ при $n \to +\infty$, где $x_0 \in [a;\, b]$;

2) $f_n'(x) \overset{[a;\, b]}{\rightrightarrows} g(x)$ при $n \to +\infty$;

3) $f_n'(x) \in C[a;\, b]$.

Тогда

$$\exists f(x)\colon\ \ f(x_0) = A \ \ \text{и} \ \ f'(x) = g(x) \ \ \forall x \in [a;\, b],$$

а также $f_n(x) \overset{[a;\, b]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to +\infty$.

Аналогично и для рядов.

Задача 2798. Доказать, что тэта-функция $\theta(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Решение:

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi (-k)^2 x}.$$

Так как при $x > 0$ имеем, что $(e^{-\pi x})^{n^2} \leqslant (e^{-\pi x})^n$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 0$, и сумма геометрической прогрессии $\{(e^{-\pi x})^n\}$ сходится, то и ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi(-k)^2 x}$ сходятся $\forall x > 0$. Значит, $\theta(x)$ определена при $x > 0$.

Теперь рассмотрим тэта-функцию на множестве $\mathbb{X}_\varepsilon = [\varepsilon;\ +\infty)$, где $\varepsilon > 0$.

$$\sup_{x\in\mathbb{X}_\varepsilon} e^{-\pi n^2 x} = e^{-\pi n^2 \varepsilon}.$$

Так как $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 \varepsilon}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\theta(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ сходится равномерно на $\mathbb{X}_\varepsilon$. Так как ещё при этом члены ряды являются непрерывными функциями, то и $\theta(x)$ будет непрерывна на $\mathbb{X}_\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ – произвольное, то $\theta(x)$ непрерывна при $x > 0$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ из продифференцированных членов ряда тэта-функции на отрезке $[a;\ b]$, где $0 < a < b < +\infty$. При $x \in [a;\ b]$ имеем: $\left|-\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}\right| \leqslant \pi n^2 e^{-\pi n^2 a}$. Так как $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 a}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ сходится равномерно на $[a;\ b]$. Причём частичные суммы ряда из производных являются непрерывными функциями на $[a;\ b]$.

Таким образом, по утверждению (15.1) $\exists \theta'(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} -\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ на отрезке $[a;\ b]$. Так как значения a и b произвольны из множества $0 < a < b < +\infty$, то тэта-функция дифференцируема при $x > 0$.

Предположим, что формула

$$\theta^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x}$$

верна на любом отрезке $[a;\ b] \subset (0;\ +\infty)$, причём ряд сходится равномерно. Рассмотрим формулу

$$\theta^{(k+1)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-\pi n^2)^{k+1} e^{-\pi n^2 x}.$$

Тогда по утверждению (15.1) эта формула верна. Таким образом, мы по индукции доказали, что тэта-функция бесконечно дифференцируема на любом отрезке $[a;\ b] \subset (0;\ +\infty)$, а значит, и при $x > 0$. $\square$

Задача 2801. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin\left(n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty;\ +\infty)$, но

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

Решение:

Заметим, $f_n(x) \to x^2$ при $n \to +\infty$ при $x \in \mathbb{R}$. Так как $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$, то $f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x^2$ при $n \to +\infty$. Обозначим $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}
&f_n'(x) = 2x + \cos\left(n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right);\\
&f'(x) = 2x;\\
&f_n'(x) - f'(x) = \cos\left(n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Обозначим $t_n = \cos\left(n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Предположим, что $\exists x\colon\ t_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда $t_{2n} = \cos\left(2n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2t_n^2 - 1 \to -1$ при $n \to +\infty$. Но должно быть верно, что $t_{2n} \to 0$ при $n \to +\infty$, так как $t_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}(f_n'(x) - f'(x)) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R};\\
&\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Семинар 16

Разбор домашнего задания

Задача 2799. Определить области существования функции $f(x)$ и исследовать её на дифференцируемость, если:

$$\text{а)}\ \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \qquad \text{б)}\ \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

Решение:

а) Заметим, что функция $f(x)$ не определена при $x = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. Также заметим, что $f(0) = 0$. При остальных значениях x, начиная с некоторого члена, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x}{n+x}$ является знакочередующимся и его члены монотонно стремятся к 0, значит, по признаку Лейбница ряд будет сходиться. Таким образом, областью существования функции является $x \neq -n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим ряд на отрезке $[a;\, b] \subset \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$.

$$\left(\frac{(-1)^n x}{n+x}\right)' = (-1)^n \cdot \frac{n+x-x}{(n+x)^2} = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}.$$

Проверим, верно ли, что «хвост» ряда из формально взятых производных $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n k}{(k+x)^2}$ равномерно сходится к 0 на $[a;\, b]$. По признаку Лейбница этот ряд сходится. При $x \in [a;\, b]$ имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n k}{(k+x)^2}\right| \leqslant \frac{n+1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{n+1}{(n+1+a)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Значит, по sup-критерию $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n k}{(k+x)^2} \overset{[a;\, b]}{\rightrightarrows} 0$. Тогда ряд из производных равномерно сходится на $[a;\, b]$.

Кроме этого, производные членов исходного ряда непрерывны на $[a;\, b]$, поэтому и частичные суммы этих производных тоже не прерывны на $[a;\, b]$.

Таким образом, по утверждению (15.1) получаем, что $f(x)$ дифференцируема на $[a;\, b]$. Значит, $f(x)$ дифференцируема на всём множестве $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, на котором она существует.

б) Так как $\dfrac{|x|}{n^2+x^2} \leqslant \dfrac{|x|}{n^2}$ и ряд $\dfrac{|x|}{n^2}$ сходится $\forall x$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ сходится $\forall x$, то есть функция $f(x)$ существует $\forall x$.

Рассмотрим отрезок $[a;\, b] \subset \mathbb{R}$. На этом отрезке $|x| \leqslant \max\{|a|,\, |b|\} = M$. Тогда $\dfrac{|x|}{n^2+x^2} \leqslant \dfrac{M}{n^2}$ на $[a;\, b]$. Значит, по признаку Вейерштрасса $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ равномерно сходится на $[a;\, b]$.

Теперь рассмотрим отрезок $[a;\, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На этом отрезке имеем:

$$\left(\frac{|x|}{n^2+x^2}\right)' = \pm\frac{n^2+x^2-2x\cdot x}{(n^2+x^2)^2} = \pm\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

(здесь знак «+» выбирается при $x > 0$, а знак «−» – при $x < 0$). Тогда получаем:

$$\left|\left(\frac{|x|}{n^2+x^2}\right)'\right| = \left|\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{n^2+x^2}{(n^2+x^2)^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, по признаку Вейерштрасса продифференцированный ряд сходится равномерно на $[a;\, b]$. Значит, $f(x)$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}, & x > 0 \\ -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}, & x < 0 \end{cases};$$

$$\lim_{x\to+0} f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\lim_{x\to-0} f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\pm0} f'(x) = f'(\pm0)$, то $f'(+0) = \dfrac{\pi^2}{6}$, а $f'(-0) = -\dfrac{\pi^2}{6}$. Значит, $\nexists f'(0)$. $\square$

Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара

Определение 16.1.

Степенной ряд – это ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $z \in \mathbb{C}$, или $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$, где $x \in \mathbb{R}$.

z_0 или x_0 – *центр степенного ряда.*

c_n – *коэффициенты степенного ряда.*

Определение 16.2. $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ – *радиус сходимости*, причём здесь считаем, что $\dfrac{1}{0} = +\infty$ и $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Теорема 16.1 (Теорема Коши-Адамара)**.** *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ *сходится* *при* $|z - z_0| < R$ *и расходится при* $|z - z_0| > R$.

Также заметим, что при $z = z_0$ степенной ряд сходится, а при $|z - z_0| = R$ он может сходиться или расходиться.

Приведём примеры.

1) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$. Имеем: $c_n = 1$, тогда $\sqrt[n]{|c_n|} = 1 \to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $R = 1$. Таким образом, при $|z| < 1$ ряд сходится, а при $|z| > 1$ – расходится. При $|z| = 1$ ряд расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда: $|z^n| \not\to 0$ при $n \to +\infty$.

2) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$. Имеем: $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, тогда $\sqrt[n]{|c_n|} = n^{-\frac{2}{n}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $R = 1$. Таким образом, при $|z| < 1$ ряд сходится, а при $|z| > 1$ – расходится. При $|z| = 1$ имеем: $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, значит, по признаку Вейерштрасса ряд сходится.

3) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$. Имеем: $c_n = \dfrac{1}{n}$, тогда $\sqrt[n]{|c_n|} = n^{-\frac{1}{n}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $R = 1$. Таким образом, при $|z| < 1$ ряд сходится, а при $|z| > 1$ – расходится. При $|z| = 1$ имеем: если $z = 1$, то ряд расходится как гармонический, а если $z = -1$, то ряд сходится по признаку Лейбница. Вообще говоря, при $z = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0;\ 2\pi)$, ряд будет сходиться по признаку Дирихле.

Задача 2800 (Задание на дом)**.** Придумать пример степенного ряда, который на границе круга сходимости ограниченно расходится в единственной точке (а в остальных точках сходится).

Задача 2813. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

Решение:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \varlimsup_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{\frac{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{n}} = 3.$$

Таким образом, $R = \dfrac{1}{3}$ – радиус сходимости, $x \in \left(-\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{2}{3}\right)$ – интервал сходимости.

Рассмотрим случай $x = -\dfrac{2}{3}$. Тогда получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Значит, исходный ряд при $x = -\frac{2}{3}$ расходится.

Теперь рассмотрим случай $x = -\frac{4}{3}$. Тогда получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ сходится по признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Значит, исходный ряд при $x = -\frac{4}{3}$ сходится.

Таким образом, промежутком сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$ является $x \in \left[-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. $\square$

Задача 2828. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n}\, x^n.$$

Решение:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Таким образом, $R = \frac{1}{4}$ – радиус сходимости, $x \in \left(-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$ – интервал сходимости.

Рассмотрим случай $x = \frac{1}{4}$. Тогда получаем следующие члены ряда:

$$\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}=\begin{cases}\frac{1}{2k}, & n=2k\\ \frac{1}{(2k-1)2^{2k-1}}, & n=2k-1\end{cases}.$$

Частичная сумма S_{2k} складывается из k слагаемых с чётными номерами и k слагаемых с нечётными номерами. Но ряд, состоящий только из слагаемых с чётными номерами, расходится (как гармонический), а ряд, состоящий только из слагаемых с нечётными номерами, сходится (по признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией), значит, $\nexists \lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k}$. Таким образом, исходный ряд при $x=\frac{1}{4}$ расходится.

Рассмотрим случай $x=-\frac{1}{4}$. Тогда получаем следующие члены ряда:

$$\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\begin{cases}\frac{1}{2k}, & n=2k\\ \frac{-1}{(2k-1)2^{2k-1}}, & n=2k-1\end{cases}.$$

Частичная сумма S_{2k} складывается из k слагаемых с чётными номерами и k слагаемых с нечётными номерами. Но ряд, состоящий только из слагаемых с чётными номерами, расходится (как гармонический), а ряд, состоящий только из слагаемых с нечётными номерами, сходится (по признаку сравнения с бесконечно убывающей геометрической прогрессией), значит, $\nexists \lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k}$. Таким образом, исходный ряд при $x=-\frac{1}{4}$ расходится.

Таким образом, промежутком сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$ является $x\in\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$. □

Признак Даламбера для степенного ряда

Утверждение 16.1 (Признак Даламбера для степенного ряда)**.**

$R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ *– радиус сходимости, если этот предел существует.*

Замечание 16.1. Можно эту формулу переписать в следующем виде: $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|$ – радиус сходимости, если этот предел существует.

Замечание 16.2. Если $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|=l$ и $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|=L$, то $l\leqslant R\leqslant L$.

Задача 2820. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}\, x^n.$$

Решение:

Заметим, что при $m \in \mathbb{N}_0$ получаем: $c_n = 0 \;\; \forall n \geqslant m+1$, значит, ряд сходится при $x \in \mathbb{R}$. Далее рассмотрим случай $m \notin \mathbb{N}_0$.

$$\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right| = \left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+2)}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+2)(m-n+1)}\right| =$$
$$= \left|\frac{n}{m-n+1}\right| = \frac{n}{n-m-1} \qquad \forall n > m+1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right| = 1$, то по признаку Даламбера $R = 1$ – радиус сходимости. Значит, $x \in (-1;\ 1)$ – интервал сходимости.

Рассмотрим случай $x = 1$. Получим следующий ряд: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}$. Тогда получаем:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{m-n+1} = -\frac{n}{n-m-1}.$$

Значит, начиная с некоторого номера n ряд является знакочередующимся. Заметим, что при $n > n-m-1$, то есть при $m > -1$ модули членов ряда являются монотонно убывающими, при этом можно показать, что они стремятся к 0 (например, по признаку Гаусса). Следовательно, по признаку Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}$ сходится при $m > -1$. При $m \leqslant -1$ имеем: $\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right| \geqslant$ $\geqslant 1$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \neq 0$, значит, ряд расходится по необходимому условию сходимости.

Рассмотрим случай $x = -1$. Получим следующий ряд: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}\cdot(-1)^n$. Тогда получаем:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{n-m-1} = 1 + \frac{m+1}{n-m-1} = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Значит, по признаку Гаусса $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}\cdot(-1)^n$ сходится при $m+1 > 1$, то есть при $m > 0$, а при $m \leqslant 0$ расходится. □

Задача 2830. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

Решение:

Заметим, что $c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$. Тогда получаем:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{c_{n^2}} = \varlimsup_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, $R = 1$ – радиус сходимости, $x \in (-1;\ 1)$ – интервал сходимости.

Несложно показать, что при $x = \pm 1$ ряд сходится. Значит, $x \in [-1;\ 1]$ – промежуток сходимости. $\square$

Семинар 17

Обобщённый степенной ряд

Задача 2837. Найти область сходимости обобщённого степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x.$$

Решение:

Найдём область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} y^n$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{3(n-1)}((n-1)!)^3}{(3(n-1))!}\cdot\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3^3n^3} = 1.$$

Таким образом, по признаку Даламбера получаем: $R = 1$ – радиус сходимости, то есть $y \in (-1;\ 1)$ – интервал сходимости.

Теперь рассмотрим случаи $y = \pm 1$.

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3^3n^3} = \frac{3^3n^3 - 3^3n^2 + O(n)}{3^3n^3} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Как видно, при достаточно больших значениях n модуль следующего члена ряда будет больше модуля предыдущего члена ряда, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \neq 0$. Значит, по необходимому условию сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} y^n$ расходится при $y = \pm 1$. Таким образом, $y \in (-1;\ 1)$ – область сходимости этого ряда.

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$ сходится тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} x \in (-1;\ 1)$, то есть когда $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$. $\square$

Разложение функций в степенные ряды

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (равномерно на любом отрезке);

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (равномерно на любом отрезке);

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (равномерно на любом отрезке);

Эти ряды сходятся на всей комплексной плоскости, поэтому их можно принять за определения соответствующих функций на всей комплексной плоскости. Тогда несложно получить формулу Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

$(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \quad \forall x \in \in (-1;\ 1)$;

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1]$;

$\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad \forall x \in [-1;\ 1]$;

$\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (равномерно на любом отрезке);

$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (равномерно на любом отрезке).

Теорема 17.1 (Теорема единственности степенных рядов)**.**

Если $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n = f(x)$ *при* $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$ *– ряд Тейлора для функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Решение задач на разложение функций в степенные ряды

Задача 2851. Разложить функцию e^{-x^2} в степенной ряд относительно x.

Решение:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots \quad \forall t \in \mathbb{R};$$
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Задача 2852. Разложить функцию $\cos^2 x$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

1-й способ:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Умножим по Коши ряд для косинуса на такой же ряд для косинуса. Коэффициенты у перемножающихся рядов будут следующие:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2!}, \quad \ldots;$$
$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2!}, \quad \ldots.$$

Коэффициенты в ряду, полученном при произведении двух рядов, будут следующие:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
&c_{2k+1} = 0;\\
&c_{2k} = 1 \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!} + \ldots =\\
&= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(1 + \frac{(2k)!}{2!(2k-2)!} + \frac{(2k)!}{4!(2k-4)!} + \ldots + \frac{(2k)!}{2k! \cdot 1}\right) =\\
&= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(C_{2k}^0 + C_{2k}^2 + \ldots + C_{2k}^{2k}\right).
\end{aligned}$$

Из треугольника Паскаля можно понять, что

$$\begin{aligned}
&C_0^0 = 1;\\
&C_{2k}^0 + C_{2k}^2 + \ldots + C_{2k}^{2k} = C_{2k-1}^0 + C_{2k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \ldots + C_{2k-1}^{2k-1} = 2^{2k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Значит, $c_0 = 1$, $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда получаем искомое разложение:

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2-й способ:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, можно получить следующие разложения:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \quad \forall |x| < 1;$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

Задача 2854. Разложить функцию $\dfrac{x^{10}}{1-x}$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$\frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} + x^{11} + x^{12} + \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

□

Задача 2860. Разложить функцию $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \ldots \quad \forall |x| < 1;$$
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

Перемножим по Коши оба ряда. Коэффициенты у перемножающихся рядов будут следующие:

$$a_0 = 0, \quad a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N};$$
$$b_{2k} = 1, \quad b_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Коэффициенты в ряду, полученном при произведении двух рядов, будут следующие:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Тогда получим:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad c_3 = c_4 = 2, \quad c_5 = c_6 = 3, \quad \ldots.$$

Тогда получаем искомое разложение:

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

□

Семинар 18

Разбор домашнего задания

Задача 2862 (а)**.** Разложить функцию $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3};\\
&\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + (x^3)^2 + \ldots;\\
&(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} = (1-x)(1+x^3+x^6+\ldots) =\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(x^{3n} - x^{3n+1}) = 1 - x + x^3 - x^4 + \ldots.
\end{aligned}$$

$\square$

Задача 2839 (а)**.** Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$, где $a \neq 0$, в степенной ряд по степеням бинома $x-b$, где $b \neq a$. Указать область сходимости.

Решение:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-b-(x-b)} = \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-b}{a-b}} =\\
&= \frac{1}{a-b}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ряд будет сходиться, если $|x-b| < |a-b|$. При $|x-b| > |a-b|$ ряд будет расходиться.

$$(x-b)^2 - (a-b)^2 = (x-a)(x+a-2b) < 0.$$

Таким образом, ряд сходиться, если значение x находится между a и $2b-a$. Несложно проверить, что при $x = a$ или при $x = 2b-a$ ряд расходится. Таким образом, область сходимость ряда – это интервал между a и $2b-a$. $\square$

Решение задач на разложение функций в степенные ряды (продолжение)

Задача 2850 (1)**.** Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$

а) по степеням x;

б) по степеням бинома $x-5$, не производя самого разложения.

Решение:

а)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)};$$
$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=0 \end{cases};$$
$$\begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases};$$
$$f(x) = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{1-\dfrac{x}{3}}.$$

У разложения по степеням x дробей $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$ и $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$ как сумм бесконечно убывающих геометрических прогрессий интервалы сходимости будут $x \in (-2;\ 2)$ и $x \in (-3;\ 3)$ соответственно. Значит, по свойствам степенного ряда интервал сходимости разложения $f(x)$ по степеням x будет $x \in (-2;\ 2)$.

б) Используя решение задачи (2839) и пунта (а) этой задачи, получаем, что у разложения по степеням бинома $x-5$ дробей $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$ и $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}$ как сумм бесконечно убывающих геометрических прогрессий интервалы сходимости будут $x-5 \in (-3;\ 3)$ и $x-5 \in (-2;\ 2)$ соответственно. Значит, по свойствам степенного ряда интервал сходимости разложения $f(x)$ по степеням x будет $x \in (3;\ 7)$. □

Задача 2861. Разложить функцию $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

1-й способ:

Найдём корни знаменателя: $1-x-x^2=0$, получим: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{-1}{(x-x_1)(x-x_2)} =$$
$$= \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{(A+B)x-(Ax_2+Bx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)};$$
$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ax_2+Bx_1=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases};$$

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1 - x} - \frac{1}{x_2 - x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{x}{x_1} + \left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \ldots\right) - \frac{1}{x_2}\left(1 + \frac{x}{x_2} + \left(\frac{x}{x_2}\right)^2 + \ldots\right)\right).$$

2-й способ:

Можно понять, что функция $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ имеет некоторое разложение в ряд:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;$$
$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(1 - x - x^2) = 1.$$

Коэффициенты 2-го из перемножающихся рядов следующие:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_k = 0 \quad \forall k \geqslant 3.$$

Тогда коэффициенты ряда, получающегося при произведении, будут следующие:

$$\begin{aligned} &c_0 = a_0 b_0 = a_0; \\ &c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = a_1 - a_0; \\ &c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = a_2 - a_1 - a_0; \\ &\vdots \\ &c_n = a_n - a_{n-1} - a_{n-2}. \end{aligned}$$

Так как произведение рядов равно 1, то $c_0 = 1$, $c_k = 0 \quad \forall k \geqslant 1$. Тогда находим коэффициенты 1-го из перемножающихся рядов:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Получились числа Фибоначчи.

Используя результат из 1-го способа, получаем формулу для чисел Фибоначчи:

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1}{x_2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Заметим, что $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ – золотое сечение, а $\dfrac{1}{x_2} = -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = -\varphi^{-1}$. Тогда можем преобразовать формулу для чисел Фибоначчи:

$$a_n = \frac{\varphi^{n+1} + (-1)^n\varphi^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}.$$

Так как $|\varphi^{-1}| < 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-(n+1)} = 0$, причём стремление происходит быстро. Поэтому числа Фибоначчи можно считать так: сначала вычислять значение $\dfrac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$ и затем округлять его до ближайшего целого (так как числа Фибоначчи целые). $\square$

Задача 2864. Разложить функцию $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ в степенной ряд относительно x.

Решение:

Используем формулы $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ и $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$. Для упрощения записей будем использовать переменную $q = e^{i\alpha}$, тогда $q^{-1} = \overline{q} = e^{-i\alpha}$.

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{x\cdot\dfrac{q-\overline{q}}{2i}}{q\cdot\overline{q} - x(q+\overline{q}) + x^2} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{x(q-\overline{q})}{(x-q)(x-\overline{q})} =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{q}{x-q} - \frac{\overline{q}}{x-\overline{q}}\right) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{1-\dfrac{x}{q}} + \frac{1}{1-\dfrac{x}{\overline{q}}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(-\left(1+\frac{x}{q}+\frac{x^2}{q^2}+\ldots\right) + \left(1+\frac{x}{\overline{q}}+\frac{x^2}{\overline{q}^2}+\ldots\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(x(q-\overline{q}) + x^2(q-\overline{q}^2)+\ldots\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)\cdot x^n.$$

$\square$

Почленное дифференцирование степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. Выполнив почленное дифференцирование, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)c_{k+1}x^k$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|}$, то по формуле Коши-Адамара получаем, что радиус сходимости почленно продифференцированного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда. Но промежуток сходимости может измениться.

Задача 2906. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots.$$

Решение:

Пусть $f(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$. Можно показать, что $R = 1$ – радиус сходимости.

Выполним почленное дифференцирование ряда, получим:

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} + \ldots = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall |x| < 1.$$

Теперь можем найти $f(x)$:

$$\begin{aligned}
&f(x) \in \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\
&= -\frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C; \\
&f(0) = C = 0; \\
&f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \operatorname{th}^{-1} x \quad \forall |x| < 1.
\end{aligned}$$

□

Задача 2910. Применяя почленное дифференцирование, вычислить сумму ряда:

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots.$$

Указание: производную ряда умножить на $1 - x$.

Решение:

Пусть $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots + \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}x^n + \ldots$. По формуле Даламбера можно показать, что $R = 1$ – радиус сходимости.

Выполним почленное дифференцирование ряда, получим:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot nx^{n-1} + \ldots \quad \forall |x| < 1.$$

Умножим производную на $(1 - x)$, получим:

$$(1-x)f'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot nx^{n-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\cdot(n+1)x^n + \ldots\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x^2 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot nx^n + \ldots\right);$$
$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\cdot(n+1) - \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot n =$$
$$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\left(\frac{2n+1}{2n+2}(n+1) - n\right) = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2};$$
$$(1-x)f'(x) = \frac{1}{2}f(x) \quad \forall |x| < 1;$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(1-x)};$$
$$\ln|f(x)| = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + C_1;$$
$$f(x) = C\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \forall |x| < 1;$$
$$f(0) = C = 1;$$
$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall |x| < 1.$$

□

Почленное интегрирование степенного ряда

Задача 2912. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда:

$$x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots.$$

Решение:

Пусть $f(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2x^n + \ldots$.

Поделим функцию на x и выполним почленное интегрирование:

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n^2x^{n-1};$$
$$g(x) = \int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^n.$$

Аналогично поступим с функцией $g(x)$:

$$\frac{g(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1};$$
$$\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \quad \forall |x| < 1.$$

Теперь выполним дифференцирование:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{(1+x)^2};$$
$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Ещё раз выполним дифференцирование:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(1+x)^2 - x\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3};$$
$$f(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad \forall |x| < 1.$$

□

Семинар 19

Решение задач на разложение функций в степенные ряды (продолжение)

Задача 2873 (а)**.** Найти разложение в степенной ряд функции

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x).$$

Решение:

1-й способ:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$
$$(1+x)\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \ldots\right) =$$
$$= x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)x^4 - \ldots =$$
$$= x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

2-й способ:

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$
$$f(x) = C + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} - \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$
$$f(0) = C = 0;$$
$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} - \ldots \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

□

Задача 2873 (ж)**.** Найти разложение в степенной ряд функции

$$f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Решение:

Сначала найдём разложение функции $\arcsin x$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$
$$(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \ldots + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}t^k + \ldots \quad \forall t \in (-1;\ 1);$$

$$(\arcsin x)' = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2}x^4 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2}}{k!}x^{2k} + \ldots =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Выполним почленное интегрирование:

$$\arcsin x = C + x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$
$$\arcsin 0 = C = 0;$$
$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Теперь найдём разложение функции $f(x)$.

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x =$$
$$= x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Выполним почленное интегрирование:

$$f(x) = C + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!(2k+1)}\,x^{2k+2} \quad \forall x \in (-1;\ 1);$$
$$f(0) = C = 1;$$
$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!(2k+1)}\,x^{2k+2} \quad \forall x \in (-1;\ 1).$$

$\square$

Вычисление числа π с помощью степенных рядов

$\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$ – формула Мэчина. Если в этой формуле разложить арктангенсы в ряды, то сходимость будет довольно быстрая.

Проверим, что эта формула верна. Число $(5+i)$ имеет аргумент $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$, тогда число $(5+i)^4$ имеет аргумент $4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$. Число $(239+i)$ имеем аргумент $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
&4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\arg\frac{(5+i)^4}{239+i};\\
&\frac{(5+i)^4}{239+i}=\frac{(5+i)^4(239-i)}{239^2+1}=\\
&=\frac{(5^4+4\cdot5^3\cdot i+6\cdot5^2\cdot i^2+4\cdot5\cdot i^3+i^4)(239-i)}{239^2+1}=\\
&=\frac{((5^4-6\cdot5^2+1)+i(4\cdot5^3-4\cdot5))\cdot(239-i)}{239^2+1}=\\
&=\frac{(239(5^4-6\cdot5^2+1)+4\cdot5^3-4\cdot5)+i(239(4\cdot5^3-4\cdot5)-5^4+6\cdot5^2-1)}{239^2+1}
\end{aligned}$$

Если у комплексного числа в предыдущей строке действительная часть равна мнимой, то его аргумент будет равен $\dfrac{\pi}{4}$ (так как действительная и мнимая части положительны). Проверим, так ли это:

$$\begin{aligned}
&239(5^4-6\cdot5^2+1)+4\cdot5^3-4\cdot5\overset{?}{=}239(4\cdot5^3-4\cdot5)-5^4+6\cdot5^2-1;\\
&239(5^4-4\cdot5^3-6\cdot5^2+4\cdot5+1)\overset{?}{=}-5^4-4\cdot5^3+6\cdot5^2+4\cdot5-1;\\
&239(625-500-150+20+1)\overset{?}{=}-625-500+150+20-1;\\
&239\cdot(-4)\overset{?}{=}-956;\\
&-956=-956.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что действительно верна формула Мэчина:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Решение задачи на дифференциальное уравнение для степенного ряда

Задача 2914. Показать, что ряд $y=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)}=y$.

Решение:

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)}{(4n)!}\,x^{4n-4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4(n-1)}}{(4(n-1))!}=y.$$

□

Решение задач на суммирование рядов

Задача 2995. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$.

Решение:

1-й способ:

Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}$. Теперь рассмотрим функцию $f(x)$, равную сумме ряда, получающегося из исходного умножением каждого члена на x^{n-1}:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}\,x^{n-1};$$
$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} = xe^x \qquad \forall x\in\mathbb{R};$$
$$f(x) = (xe^x)' = e^x(x+1) \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = f(1) = 2e.$$

2-й способ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} =$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 2e.$$

□

Задача 3014. Найти сумму ряда: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$.

Решение:

Запишем исходный ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$. Теперь рассмотрим функцию $f(x)$, равную сумме ряда, получающегося из исходного умножением каждого члена на x^{3n-2}:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\, x^{3n-2} \qquad \forall x \in (-1;\ 1);$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{3n-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 3^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \qquad \forall x \in (-1;\ 1);$$

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)\, dt = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^3}.$$

Разложим дробь из подынтегрального выражения на простейшие дроби:

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} =$$
$$= \frac{A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{(A+B)t^2+(B+C-A)t+A+C}{(t-1)(t^2-t+1)};$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \\ C=\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Подставим это разложение в подынтегральное выражение:

$$f(x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\, dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{\frac{1}{2}(2t-1)-\frac{3}{2}}{t^2-t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int\limits_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}\right)\right|_0^x =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \qquad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\, x^{3n-2}$ сходится к функции $f(x)$ на полуинтервале $[0;\ 1)$. Кроме этого, ряд сходится в точке $x = 1$ по признаку Лейбница. Тогда по теореме Абеля этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0;\ 1]$. Значит, при $x = 1$ ряд

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\, x^{3n-2}$ тоже сходится к функции $f(x)$. Теперь можем посчитать сумму исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = f(1) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$\square$

Задача 3017. Найти сумму ряда: $1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5} + \ldots$.

Решение:

Запишем исходный ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$.

Ранее мы нашли разложение для арксинуса:

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Ранее мы показывали, что $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \asymp \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда при $x = 1$ получаем, что $\dfrac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1} \asymp \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ сходится при $x = 1$. Тогда по теореме Абеля этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0;\, 1]$. Значит, при $x = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ тоже сходится к функции $\arcsin x$. Теперь можем посчитать сумму исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Тригонометрические ряды

Определение 19.1. $T_n(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, где $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, – *тригонометрический многочлен степени* n.

Так как $\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx})$ и $\sin kx = \mathrm{Re}(-ie^{ikx})$, то $T_n(x) = \mathrm{Re}(P_n(e^{ix}))$, где P_n – многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Таким образом, изучение тригонометрических многочленов связано с изучением обычных многочленов на единичной окружности.

Также можно рассмотреть тригонометрический ряд: $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$.

Семинар 20

Разбор задач с контрольной

Задача 1. Найти сумму ряда: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^4 - 2n^2 + 1}$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^4 - 2n^2 + 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2(n+1)^2} = \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right); \\
&S_n = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \ldots + \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{(n-2)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \to \frac{5}{16} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}
$$

$\square$

Задача 2. Исследовать ряд на сходимость в зависимости от параметра p:

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{ch} 1 - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}\right)^p.
$$

Решение:

$$
\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}\right)^p.
$$

Используя формулы

$$
\begin{aligned}
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{при} \quad x \to 0; \\
&\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6) \quad \text{при} \quad t \to 0,
\end{aligned}
$$

получаем:

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}{\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{24n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}\right)^p = \left(\frac{1 - \dfrac{1}{4n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{1 + \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)^p =$$
$$= \left(1 - \frac{p}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{p}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{p}{4} + \frac{p}{12}\right)\cdot\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{p}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

По признаку Гаусса исходный ряд сходится при $-\dfrac{p}{3} > 1$, то есть при $p < -3$, и расходится при $p \geqslant -3$. $\square$

Задача 3. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}}.$$

Решение:

Заметим, что $\left|\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}}\right| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ при нечётных значениях n, то есть при $n = 2k+1$. Так как $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+1}+1}$ расходится, то по признаку сравнения $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}}\right|$ расходится.

Рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}}$. Заметим, что последовательность $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2}$ ограничена. Тогда по признаку Дирихле $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}}$ сходится. Теперь вычтем этот ряд из исходного ряда, получим:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}\cdot\left(\sqrt{n} - \sqrt{n} - \sin\dfrac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\sin^2\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}\right)}.$$

Заметим, что $\left|\dfrac{-\sin^2\dfrac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sin\dfrac{\pi n}{2}\right)}\right| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ при нечётных значениях n, то есть при $n = 2k+1$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}(\sqrt{2k+1}+1)}$ расходится, то по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-\sin^2\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}$ расходится.

Таким образом, получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}+\sin\frac{\pi n}{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\sin^2\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sin\frac{\pi n}{2}\right)},$$

причём в правой части первый ряд сходится, а второй расходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}+\sin\frac{\pi n}{2}}$ расходится. □

Задача 4. Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение:

$\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$.

Пусть $\alpha_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$. В семинаре 10 мы показали, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\alpha_n)$ сходится, если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2$ сходятся, а если один из этих двух рядов сходится, а другой расходится, то ряд из логарифмов расходится.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Дирихле.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}$. В получившейся разности первый ряд расходится как гармонический, а второй сходится по признаку Дирихле. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2$ расходится.

Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$ расходится. Значит, и $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$ расходится. □

Задача 5. Исследовать ряд на равномерную сходимость при $x > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx-\frac{1}{nx}}.$$

Решение:

Заметим, что $e^{-2nx-\frac{1}{nx}}$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда показатель $-2nx - \dfrac{1}{nx}$ принимает наибольшее значение. Пусть $f_n(x) = -2nx - \dfrac{1}{nx}$. Тогда $f_n'(x) = -2n + \dfrac{1}{nx^2} = \dfrac{1-2n^2x^2}{nx^2}$. При $x > 0$ эта производная меняет свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение, в точке $x = \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$. Тогда получаем:

$$\sup_{x>0} e^{-2nx-\frac{1}{nx}} = e^{-2nx-\frac{1}{nx}}\bigg|_{nx=\frac{1}{\sqrt{2}}} = e^{-2\sqrt{2}}.$$

Чтобы $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx-\frac{1}{nx}}$ сходился равномерно при $x > 0$, необходимо, чтобы $e^{-2nx-\frac{1}{nx}} \underset{x>0}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to +\infty$. Но так как $\sup\limits_{x>0} e^{-2nx-\frac{1}{nx}} = e^{-2\sqrt{2}}$, то по sup-критерию последовательность $e^{-2nx-\frac{1}{nx}}$ не стремится равномерно к 0 при $x > 0$. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx-\frac{1}{nx}}$ не сходится равномерно при $x > 0$. □

Использование степенных рядов на комплексной плоскости

Выпишем определения экспоненты, синуса и косинуса на всей комплексной плоскости:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots;$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots;$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

Для действительной экспоненты существует свойство: $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$. Проверим, что аналогичное свойство сохраняется и для комплексной экспоненты, определённой в виде ряда. Для этого надо перемножить ряды $e^{z_1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z_1^n}{n!}$ и $e^{z_2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z_2^n}{n!}$. Пусть $a_n = \dfrac{z_1^n}{n!}$ и $b_n = \dfrac{z_2^n}{n!}$. Тогда коэффициенты ряда, получающегося при произведении, будут иметь следующий вид:

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k} z_2^k}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Таким образом, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$.

Проверим формулу Эйлера:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Более того, на месте x может стоять комплексное число z. Тогда получаем формулу: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Из формулы Эйлера можно понять, что экспонента с мнимой степенью отвечает за повороты на комплексной плоскости.

Так как $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, то получаем:

$$|e^z| = e^x \quad \text{и} \quad \operatorname{Arg} z = \{y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рассмотрим теперь обратную к экспоненте функцию. Пусть $w = e^z$. Тогда $z = \operatorname{Ln} w = x + iy$, где $x = \ln|w|$ и $y \in \operatorname{Arg} w$.

Теперь рассмотрим ряд для логарифма:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad \forall |z| < 1.$$

Пусть $z = e^{-a} e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – фиксированный аргумент, а $a \in (0;\ +\infty)$. Рассмотрим следующий ряд:

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-an} e^{in\varphi}}{n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-an}\cos n\varphi}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-an}\sin n\varphi}{n}.$$

Пусть $f(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-an}\cos n\varphi}{n}$ и $g(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-an}\sin n\varphi}{n}$. Заметим, что $f(a)$ и $g(a)$, а также $f'(a)$ и $g'(a)$, сходятся равномерно на отрезках вида $\left[\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right] \subset (0;\ +\infty)$. Тогда дальнейшие преобразования будут справедливы на любом отрезке вида $\left[\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right] \subset$

$\subset (0;\ +\infty)$, а значит, и на луче $[0; +\infty)$.

$$f'(a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-an}\cos n\varphi; \qquad g'(a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-an}\sin n\varphi;$$

$$f'(a) + ig'(a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n(-a+i\varphi)} = -\frac{e^{-a+i\varphi}}{1-e^{-a+i\varphi}};$$

$$f'(a) = \mathrm{Re}\left(-\frac{e^{-a+i\varphi}}{1-e^{-a+i\varphi}}\right); \qquad g'(a) = \mathrm{Im}\left(-\frac{e^{-a+i\varphi}}{1-e^{-a+i\varphi}}\right).$$

В качестве домашнего упражнения:

1) найти выражения для $f'(a)$ и $f(a)$ при $a \in (0;\ +\infty)$;

2) найти выражения для $g'(a)$ и $g(a)$ при $a \in (0;\ +\infty)$.

Подсказка: для нахождения неопределённой константы интегрирования воспользоваться тем, что $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a} = 0$.

Семинар 21

Использование степенных рядов на комплексной плоскости (продолжение)

Проанализируем результат для $g(a)$.

$$g(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{e^a - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) \quad \text{при} \quad \varphi \in (0;\, \pi);$$
$$g(a) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{e^a - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) \quad \text{при} \quad \varphi \in (-\pi;\, 0);$$
$$\lim_{a\to+0} g(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi-\varphi}{2} \quad \text{при} \quad \varphi \in (0;\, \pi);$$
$$\lim_{a\to+0} g(a) = \frac{-\pi-\varphi}{2} \quad \text{при} \quad \varphi \in (-\pi;\, 0).$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{a\to+0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}e^{-an} = \begin{cases} \dfrac{\pi-\varphi}{2}, & \varphi \in (0;\, \pi) \\ \dfrac{-\pi-\varphi}{2}, & \varphi \in (-\pi;\, 0) \end{cases}.$$

Заметим, что в точках 0, $\pm\pi$ имеем: $\sin n\varphi = 0$. Тогда, используя метод Абеля, получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\varphi}{n} = \begin{cases} \dfrac{\pi-\varphi}{2}, & \varphi \in (0;\, \pi] \\ 0, & \varphi = 0 \\ \dfrac{-\pi-\varphi}{2}, & \varphi \in [-\pi;\, 0) \end{cases}.$$

Теперь проанализируем результат для $f(a)$.

$$f(a) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2e^{-a}\cos\varphi + e^{-2a});$$
$$\lim_{a\to+0} f(a) = -\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\varphi) = -\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| \quad \text{при} \quad \varphi \in (0;\, \pi]$$

Таким образом, используя чётность, получаем:

$$\lim_{a\to+0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}e^{-an}=-\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| \quad \text{при} \quad \varphi\in[-\pi;\,0)\cup(0;\,\pi].$$

Заметим, что в точке 0 предельный ряд расходится как гармонический. Тогда, используя метод Абеля, получаем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| \quad \text{при} \quad \varphi\in[-\pi;\,0)\cup(0;\,\pi].$$

Так как $-\ln(1-z)=f(a)+g(a)$, то при $a\to+0$ получаем:

$$-\ln(1-e^{i\varphi})=-\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|+i\left(\frac{\pi-|\varphi|}{2}\cdot\operatorname{sgn}\varphi\right) \quad \text{при} \quad \varphi\in[-\pi;\,0)\cup(0;\,\pi].$$

Разбор домашнего задания

Задача 3026. Найти сумму ряда: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

Решение:

1-й способ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2\cdot n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{-ix})^n}{n!}=\frac{1}{2}e^{e^{ix}}+\frac{1}{2}e^{e^{-ix}}.$$

2-й способ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n!}=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\right)=\operatorname{Re}\left(e^{e^{ix}}\right)=\operatorname{Re}\left(e^{\cos x+i\sin x}\right)=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x).$$

$\square$

Ряды и интегралы

Задача 3044. Доказать равенство: $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Решение:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int\limits_0^1 e^{-x\ln x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2!} - \frac{x^3\ln^3 x}{3!} + \ldots\right) dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^1 x^n \ln^n x\,dx.$$

Объясним, почему можно менять местами бесконечное суммирование и интегрирование в данном случае. $\lim\limits_{x\to 0}(-x\ln x) = 0$. Так как $(-x\ln x)' = -\ln x - 1$, то в точке $x = \dfrac{1}{e}$ функция $(-x\ln x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[0;\,1]$. Причём $(-x\ln x)\big|_{x=1} = 0$. Таким образом, функция $-x\ln x$ на отрезке $[0;\,1]$ сначала возрастает от 0 в точке $x = 0$ до некоторого наибольшего значения C в точке $x = \dfrac{1}{e}$, а затем убывает до 0 в точке $x = 1$. То есть функция $-x\ln x$ ограничена значением C на отрезке $[0;\,1]$. Тогда $\left|\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}\right| \leqslant \dfrac{C^n}{n!}$. Так как $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{C^n}{n!}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$ сходится равномерно на отрезке $[0;\,1]$. Таким образом, перестановка ряда и интеграла обоснована.

Далее надо посчитать интеграл $\int\limits_0^1 x^n\ln^n x\,dx$. Мы это сделаем позже, когда пройдём тему «Дифференцирование интегралов по параметру». □

Непрерывность интегралов, зависящих от параметра

Будем рассматривать функции, выражающиеся через интегралы, зависящие от параметра. Например, $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ или $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$, где $y \in [c;\,d]$, $a \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y) \leqslant b$ и $f \in C([a;\,b]\times[c;\,d])$.

Утверждение 21.1. $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *непрерывна на* $[c;\,d]$.

Утверждение 21.2. *Если* $\varphi, \psi \in C[c;\,d]$, *то* $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$ *непрерывна на* $[c;\,d]$.

Задача 3713 (а)**.** Найти: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Решение:

Пусть $\alpha \in [-1;\,1]$, тогда $1+\alpha \in [0;\,2]$. Пусть $a=-1$, $b=2$, $f(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$. Заметим, что $f\in C([-1;\,2]\times[-1;\,1])$. Пусть $\varphi(\alpha)=\alpha$, $\psi(\alpha)=1+\alpha$. Заметим, что $-1\leqslant\varphi(\alpha)<\psi(\alpha)\leqslant 2$. Тогда по утверждению (21.2) получаем, что функция $F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывна. Теперь, учитывая непрерывность $F(\alpha)$, получаем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Теорема 21.1. *Если $f(x,y)$ непрерывна по y $\forall x\in[a;\,b]$ и липшицева по x $\forall y\in[c;\,d]$ (то есть $|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leqslant C|x_1-x_2|$), то $f(x,y)\in C([a;\,b]\times[c;\,d])$.*

Теорема 21.2 (Теорема Юнга)**.** *Если $f(x,y)$ непрерывна по x и по y в прямоугольнике $[a;\,b]\times[c;\,d]$ и монотонна по x или по y, то $f(x,y)\in C([a;\,b]\times[c;\,d])$.*

Задача 3713 (г)**.** Найти: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$.

Решение:

$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\to e^x$ при $n\to+\infty$. Тогда покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^x}.$$

Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}$, где $x\in[0;\,1]$ и $y\in(0;\,1]$. Эта функция непрерывна по y. Тогда $\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=\dfrac{1}{1+e^x}$. Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & x\in[0;\,1],\ \ y\in(0;\,1]\\[2ex] \dfrac{1}{1+e^x}, & x\in[0;\,1],\ \ y=0\end{cases}.$$

Эта функция непрерывна по x и по y, а также монотонна по x. Тогда по теореме Юнга (21.2) получаем, что $f(x, y) \in C([0;\ 1] \times [0;\ 1])$. Значит, функция

$$F(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + xy)^{\frac{1}{y}}}$$

непрерывна на отрезке $[0;\ 1]$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to +\infty} F\left(\dfrac{1}{n}\right) = F(0)$.

Пусть $t = e^x$, тогда $x = \ln t$ и $dx = \dfrac{dt}{t}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = \int\limits_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \int\limits_1^e \frac{dt}{t} - \int\limits_1^e \frac{dt}{1+t} =$$
$$= (\ln t - \ln(1+t))\Big|_{t=1}^{e} = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = 1 + \ln\frac{2}{1+e}.$$

$\square$

Семинар 22

Дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

Продолжаем рассматривать функции, выражающиеся через интегралы, зависящие от параметра. Например, $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ или $F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$, где $y \in [c;\,d]$, $a \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y) \leqslant b$ и $f \in C([a;\,b]\times[c;\,d])$. Дополнительно потребуем $f'_y \in C([a;\,b]\times[c;\,d])$ и $\varphi, \psi \in D[c;\,d]$ (дифференцируемы на отрезке $[c;\,d]$, в концах отрезка подразумеваются односторонние производные).

Утверждение 22.1. $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \in D[c;\,d]$, *причём*

$$F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Утверждение 22.2 (Правило Лейбница дифференцирования интегралов, зависящих от параметров)**.**

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \in D[c;\,d], \text{ причём}$$

$$F'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y).$$

Задача 3718 (б)**.** Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$

Решение:

Пусть $f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$. Тогда $f(x,\alpha)$ непрерывна по x и липшицева по α. Тогда $f(x,\alpha)$ непрерывна в любом прямоугольнике, например, в $[a+\alpha_0-1;\ b+\alpha_0+1]\times[\alpha_0-1;\ \alpha_0+1]$.

Заметим, что $f'_\alpha = \begin{cases} \cos\alpha x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, то есть $f'_\alpha = \cos\alpha x$ – непрерывная функция.

Кроме этого, $f(x,\alpha)$ и f'_α дифференцируемы.

Таким образом, по утверждению (22.2) получаем:

$$F'(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \cos\alpha x\,dx + \frac{\sin(\alpha(b+\alpha))}{b+\alpha} - \frac{\sin(\alpha(a+\alpha))}{a+\alpha} =$$
$$= \frac{\sin(\alpha(b+\alpha)) - \sin(\alpha(a+\alpha))}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha(b+\alpha))}{b+\alpha} - \frac{\sin(\alpha(a+\alpha))}{a+\alpha}.$$

□

Задача 3719. Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \int\limits_0^x (x+y)g(y)\,dy,$$

где $g(x)$ – дифференцируемая функция.

Решение:

Пусть $f(x,y) = (x+y)g(y)$, эта функция непрерывна на любом прямоугольнике. Тогда $f'_x(x,y) = g(y)$, эта функция тоже непрерывна на любом прямоугольнике. Таким образом, по утверждению (22.2) получаем:

$$F'(x) = \int\limits_0^x g(y)\,dy + (x+x)g(x);$$
$$F''(x) = g(x) + 2g(x) + 2xg'(x) = 3g(x) + 2xg'(x).$$

□

Задача 3730. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ – дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$$

удовлетворяет уравнению колебания струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальным условиям: $u(x,0) = f(x)$, $u'_t(x,0) = F(x)$.

Решение:

Заметим, что начальное условие $u(x,0) = f(x)$ выполнено.

По утверждению (22.2) получаем:

$$u'_t(x,t) = -a\cdot\frac{1}{2}f'(x-at) + a\cdot\frac{1}{2}f'(x+at) + \frac{1}{2a}(F(x+at)\cdot a + F(x-at)\cdot a).$$

Заметим, что начальное условие $u'_t(x,0) = F(x)$ выполнено.

$$u''_{tt}(x,t) = \frac{a^2}{2}(f''(x-at) + f''(x+at)) + \frac{a}{2}(F'(x+at) - F'(x-at)).$$

По утверждению (22.2) получаем:

$$u'_x(x,t) = \frac{1}{2}(f'(x-at) + f'(x+at)) + \frac{1}{2a}(F(x+at) - F(x-at));$$
$$u''_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}(f''(x-at) + f''(x+at)) + \frac{1}{2a}(F'(x+at) - F'(x-at)).$$

Заметим, что уравнение колебания струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ выполнено. □

Задача 3733. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx.$$

Решение:

Заметим, что $1 - 2a\cos x + a^2 = (a - \cos x)^2 + \sin^2 x \geqslant 0$, причём равенство на отрезке $x \in [0;\pi]$ достигается только в случаях, когда $a = 1$, $x = 0$ или $a = -1$, $x = \pi$. Значит, при $a = \pm 1$ исходный интеграл является несобственным, а в остальных случаях – собственным. Рассмотрим случай, когда $a \neq \pm 1$.

Пусть $a \in [\alpha;\beta]$, причём $1 \notin [\alpha;\beta]$. Пусть $f(a) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ и $F(a) = \int\limits_0^\pi \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx$.

$$f'_a = \frac{2a - 2\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

Эта производная непрерывна при $x \in [0;\pi]$, $a \in [\alpha;\beta]$. Тогда по утверждению (22.2) получаем:

$$F'(a) = \int\limits_0^\pi \frac{2a - 2\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{2a - 2\cos x}{(a-\cos x)^2 + \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^\pi \frac{2a - (e^{ix} + e^{-ix})}{(a - \cos x - i\sin x)(a - \cos x + i\sin x)}\,dx = \int\limits_0^\pi \frac{(a - e^{ix}) + (a - e^{-ix})}{(a - e^{ix})(a - e^{-ix})}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{a - e^{ix}} + \frac{1}{a - e^{-ix}}\right)dx.$$

Рассмотрим случай $|a| > 1$. Тогда получаем:

$$\frac{1}{a-e^{ix}}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{e^{ix}}{a}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{e^{ix}}{a}+\frac{e^{2ix}}{a^2}+\ldots\right);$$

$$\frac{1}{a-e^{-ix}}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{e^{-ix}}{a}}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{e^{-ix}}{a}+\frac{e^{-2ix}}{a^2}+\ldots\right);$$

$$F'(a)=\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{a}\left(2+\frac{2\cos x}{a}+\frac{2\cos 2x}{a^2}+\ldots+\frac{2\cos nx}{a^n}+\ldots\right)dx.$$

При $|a|>1$ по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд в подынтегральном выражении сходится равномерно на отрезке $x\in[0;\pi]$. Тогда получаем:

$$F'(a)=\frac{2}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos nx}{a^n}\,dx.$$

Так как при $n\geqslant 1$ верно равенство $\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx=\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}=0$, то получаем:

$$F'(a)=\frac{2}{a}\int\limits_0^{\pi}dx=\frac{2\pi}{a};$$

$$F(a)=2\pi\ln|a|+C.$$

Теперь рассмотрим случай $0<|a|<1$.

$$F(a)=\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx=\int\limits_0^{\pi}\ln\left(a^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(2\ln|a|+\ln\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos x+1\right)\right)dx=2\pi\ln|a|+F\left(\frac{1}{a}\right)=$$

$$=2\pi\ln|a|+2\pi\ln\frac{1}{|a|}+C=C.$$

Теперь рассмотрим случай $a=0$.

$$F(0)=\int\limits_0^{\pi}\ln 1\,dx=0.$$

Так как $F(a)$ непрерывна при $|a|<1$, то $C=0$. Таким образом, получаем:

$$F(a) = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ 2\pi \ln |a|, & |a| > 1 \end{cases}.$$

Теперь рассмотрим случай $a = 1$.

$$F(1) = \int\limits_0^\pi \ln(2 - 2\cos x)\,dx = \int\limits_0^\pi \ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)dx = \int\limits_0^\pi \left(2\ln 2 + 2\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right)dx.$$

Замена: $t = \dfrac{x}{2}$.

$$F(1) = 2\pi\ln 2 + 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt.$$

Так как графики $\sin t$ и $\cos t$ симметричны по отношению друг к другу относительно $t = \dfrac{\pi}{4}$, то получаем:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt;$$

$$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t\cos t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t)\,dt - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Обратная замена: $x = 2t$.

$$2I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Так как график $\sin x$ симметричен относительно $t = \dfrac{\pi}{2}$, то получаем:

$$2I = \frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 = I - \frac{\pi}{2}\ln 2;$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Тогда получаем $F(1)$:

$$F(1) = 2\pi \ln 2 + 4I = 2\pi \ln 2 - 2\pi \ln 2 = 0.$$

Аналогично можно показать, что $F(-1) = 0$.
Таким образом, получаем:

$$F(a) = \begin{cases} 0, & |a| \leqslant 1 \\ 2\pi \ln |a|, & |a| > 1 \end{cases}.$$

□

Интегрируемость интегралов, зависящих от параметра

Утверждение 22.3. *Пусть $f \in C([a;\, b] \times [c;\, d])$. Тогда $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывна и интегрируема на отрезке $[c;\, d]$ и*

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

Задача 3737. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx,$$

где $a > 0$ и $b > 0$.

Решение:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \int\limits_a^b x^y\,dy\,dx.$$

Заметим, что $x^y = e^{y \ln x} \in C([\varepsilon;\, 1] \times [a;\, b])$. Тогда по утверждению (22.3) получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^b \int\limits_\varepsilon^1 x^y\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^b \left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_{x=\varepsilon}^1 dy =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} - \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^b \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}\,dy = \ln|y+1|\Big|_a^b - 0 = \ln\left|\frac{b+1}{a+1}\right|.$$

□

Дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра (продолжение)

Задача 3734. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx.$$

Решение:

Так как $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\operatorname{arctg}(at)}{t} = a$, то можно доопределить эту функцию до непрерывной на отрезке $[0;\, +\infty]$. Заметим, что $\operatorname{tg} x$ производит непрерывное отображение $\left[0;\, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0;\, +\infty]$. Тогда подынтегральная функция является непрерывной функцией двух переменных как композиция непрерывных функций. Производная подынтегральной функции равна $\dfrac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}$ и тоже может быть доопределена до непрерывной. Пусть $F(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$ Тогда по утверждению (22.1) получаем:

$$F'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}.$$

Замена: $t = \operatorname{tg} x$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$, значит, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$F'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}.$$

Завершение решения этой задачи остаётся в качестве домашнего упражнения.

□

Семинар 23

Разбор домашнего задания

Задача 3718 (г)**.** Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha f(x+\alpha,\, x-\alpha)\,dx$.

Решение:

Пусть $g(x,\alpha) = f(x+\alpha,\, x-\alpha)$. Тогда получаем:

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^\alpha g'_\alpha(x,\alpha)\,dx + g(\alpha,\alpha) =$$

$$= \int\limits_0^\alpha \left(\frac{\partial f(x+\alpha,\, x-\alpha)}{\partial(x+\alpha)} + \frac{\partial f(x+\alpha,\, x-\alpha)}{\partial(x-\alpha)}\right) dx + f(2\alpha, 0).$$

□

Задача 3721 (2)**.** Найти $F^{(n)}(x)$, если $F(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$.

Решение:

Рассмотрим случай $n > 1$:

$$F'(x) = \int\limits_0^x f(t)(n-1)(x-t)^{n-2}\,dt.$$

Рассмотрим случай $n = 1$:

$$F'(x) = f(x).$$

Сделаем предположение индукции: $F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$. При $n = 1$ предположение индукции выполнено. Примем предположение индукции при $n = k$ и рассмотрим его при $n = k+1$:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)(x-t)^k\,dt;$$

$$F'(x) = k\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{k-1}\,dt = k\cdot(k-1)!f(x) = k!f(x).$$

Таким образом, предположение индукции выполнено и при $n = k+1$. Значит, предположение индукции доказано, то есть $F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$. □

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем рассматривать следующие типы несобственных интегралов, зависящих от параметра:

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx;$$

$$F(y) = \int\limits_a^{b} f(x,y)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x,y)\,dx.$$

Аналогично можно рассматривать особенность на нижнем пределе интегрирования.

Определение 23.1. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ существует. Тогда этот интеграл сходится равномерно на множестве $y \in \mathbb{Y}$, если

$$\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \underset{b\to+\infty}{\overset{y\in\mathbb{Y}}{\rightrightarrows}} 0,$$

то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists B(\varepsilon)\colon \ \ \forall b > B \ \ \forall y \in \mathbb{Y} \quad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Утверждение 23.1 (sup-критерий)**.**

Пусть $r(b) = \sup\limits_{y\in\mathbb{Y}} \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|$. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $y \in \mathbb{Y}$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{b\to+\infty} r(b) = 0$.

Задача 3755 (2)**.** Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,dx$ в следующих промежутках:

а) $p \in [p_0;\ +\infty)$, где $p_0 > 1$;

б) $p \in (1;\ +\infty)$.

Решение:

$$\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_b^{+\infty} = \frac{b^{1-p}}{p-1}.$$

а)

$$r(b) = \sup_{p \geqslant p_0} \frac{b^{1-p}}{p-1} = \frac{b^{1-p_0}}{p_0 - 1} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\, dx$ сходится равномерно на множестве $p \in [p_0;\ +\infty)$, где $p_0 > 1$.

б)

$$r(b) = \sup_{p \geqslant p_0} \frac{b^{1-p}}{p-1} \to +\infty \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\, dx$ не сходится равномерно на множестве $p \in (1;\ +\infty)$. $\square$

Утверждение 23.2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Если* $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ *при* $x \geqslant a$ *и* $y \in \mathbb{Y}$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\, dx$ *сходится равномерно при* $y \in \mathbb{Y}$.

Задача 3753. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \qquad (0 < y < 1)$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

Решение:

Предположим, что $e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} \leqslant g(x) \quad \forall y \in (0;\ 1)$. Тогда $g(x) \geqslant \sup\limits_{y \in (0;\,1)} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}$. Супремум показательной функции с основанием e достигается тогда и только тогда, когда достигается супремум показателя $\sup\limits_{y \in (0;\,1)} \left(-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right)$.

$$\sup_{y \in (0;\,1)} \left(-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2\right) = \inf_{y \in (0;\,1)} \frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 \geqslant 0,$$

причём равенство достигается только при $y = \dfrac{1}{x}$ или $y \to \dfrac{1}{x}$. И это достижимо $\forall x \in [1;\ +\infty)$. Значит, $\inf\limits_{y \in (0;\,1)} \frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$. Тогда $\sup\limits_{y \in (0;\,1)} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} = 1$.

Таким образом, $g(x) \geqslant 1 \quad \forall x \in [1;\ +\infty)$. Значит, функция $g(x)$ неинтегрируема на луче $x \in [1;\ +\infty)$.

Чтобы показать, что исходный интеграл сходится равномерно при $y \in (0;1)$, можно сделать замену $t = \dfrac{x - \frac{1}{y}}{y}$. Тогда «хвост» исходного интеграла примет следующий вид: $y \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Затем можно показать, что

$$r(b) = \sup_{y \in (0;1)} y \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty.$$

Доделать это остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

Семинар 24

Разбор домашнего задания

Задача 3753 (продолжение)**.** Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,dx \qquad (0 < y < 1)$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

Решение:

В конце прошлого семинара мы поняли, что для того, чтобы показать, что исходный интеграл сходится равномерно при $y \in (0;\,1)$, надо показать, что

$$r(b) = \sup_{y\in(0;\,1)} y \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty.$$

Пусть $\varepsilon \in (0;\,1)$. Рассмотрим случай $y \in (0;\,\varepsilon)$. Используя значение интеграла Эйлера-Пуассона, получаем:

$$y \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = y\sqrt{\pi} < \varepsilon\sqrt{\pi}.$$

Теперь рассмотрим случай $y \in [\varepsilon;\,1)$.

$$y \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Последний интеграл будет тем больше, чем меньше нижний предел интегрирования. Проанализируем поведение функции $\dfrac{1}{y}\left(b-\dfrac{1}{y}\right)$ при $y \in [\varepsilon;\,1)$. Производная равна $-\dfrac{b}{y^2}+\dfrac{2}{y^3} = \dfrac{2-by}{y^3}$, она меняет свой знак с плюса на минус, переходя через нулевое значение в точке $y = \dfrac{2}{b}$ (рассматриваем $y > 0$, $b > 0$). Будем считать, что $b > 2$, и выберем $\varepsilon = \dfrac{2}{b}$. Тогда нижний предел интегрирования $\dfrac{1}{y}\left(b-\dfrac{1}{y}\right)$ при $y \in [\varepsilon;\,1)$ является монотонно убывающей функцией. Тогда получаем:

$$y\int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \int\limits_{b-1}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Таким образом, при $y \in \left(0;\ \dfrac{2}{b}\right)$ имеем: $y\displaystyle\int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \dfrac{2\sqrt{\pi}}{b}$, а при $y \in \left[\dfrac{2}{b};\ 1\right)$ имеем: $y\displaystyle\int\limits_{\frac{b-\frac{1}{y}}{y}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \int\limits_{b-1}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. При $b \to +\infty$ имеем: $\dfrac{2\sqrt{\pi}}{b} \to 0$ и $\displaystyle\int\limits_{b-1}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \to 0$ (последнее как «хвост» сходящегося интеграла). Тогда получаем:

$$r(b) \leqslant \max\left\{\frac{2\sqrt{\pi}}{b};\ \int\limits_{b-1}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty.$$

Значит, $\lim\limits_{b\to+\infty} r(b) = 0$, поэтому исходный интеграл $I = \displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\,dx$ сходится равномерно при $y \in (0;\ 1)$. $\square$

Критерий Коши. Признаки Абеля и Дирихле

Утверждение 24.1 (Критерий Коши).

$\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $y \in \mathbb{Y}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists B(\varepsilon)\colon \ \ \forall b_1, b_2 > B \ \ \forall y \in \mathbb{Y} \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Утверждение 24.2 (Признак Дирихле).

Пусть $F(t,y) = \displaystyle\int\limits_{a}^{t} f(x,y)\,dx$. *Тогда* $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $y \in \mathbb{Y}$, *если выполнены следующие условия:*

1) $f, g \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$;

2) $F(t, y)$ ограничена в совокупности, то есть

$$\exists C > 0\colon\ \ |F(t,y)| \leqslant C \ \ \forall t \in [a;\ +\infty),\ y \in \mathbb{Y};$$

3) $\forall y \in \mathbb{Y}$ $g(x, y)$ монотонна и $g(x,y) \overset{y\in\mathbb{Y}}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to +\infty$.

Утверждение 24.3 (Признак Абеля)**.**

Пусть $F(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве $y \in \mathbb{Y}$, если выполнены следующие условия:

1) $f, g \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$;

2) $F(t, y)$ сходится равномерно на множестве $y \in \mathbb{Y}$ при $t \to +\infty$;

3) $\forall y \in \mathbb{Y}$ $g(x, y)$ монотонна и $g(x, y)$ ограничена в совокупности, то есть

$$\exists C > 0\colon\ \ |g(x,y)| \leqslant C \ \ \forall x \in [a;\ +\infty),\ y \in \mathbb{Y}.$$

Теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости несобственных интегралов с параметром

Теорема 24.1.

Если:

1) $f(x,y) \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$;

2) $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $\mathbb{Y}$,

то $F(y) \in C(\mathbb{Y})$.

Теорема 24.2.

Если:

1) $f(x,y) \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$;

2) $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $\mathbb{Y} = [c;\, d]$,

то $\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_a^{+\infty}\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx$.

Теорема 24.3.

Если:

1) $f(x,y) \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$;

2) $f'_y(x,y) \in C([a;\ +\infty) \times \mathbb{Y})$, где $\mathbb{Y} = (c;\, d)$;

3) $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ *сходится при некотором* $y_0 \in \mathbb{Y}$*;*

4) $g(y) = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $\mathbb{Y}$*,*

то $F(y)$ *сходится равномерно на* $\mathbb{Y}$ *и* $F'(y) = g(y) \quad \forall y \in \mathbb{Y}$*.*

Интеграл Дирихле

Вычислим интеграл Дирихле $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x}\,dx$.

Заметим, что $I(0) = 0$ и $I(a) = -I(-a)$. Этот интеграл существует при любом значении a по признаку Дирихле для «обычной» сходимости несобственного интеграла.

Зафиксируем некоторое значение параметра a (для определённости положительное) и рассмотрим интеграл $F(b) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x} e^{-bx}\,dx$, где $b \in [0;\ +\infty)$. Так как $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin ax}{x}\,dx$ сходится и не зависит от параметра b, то он сходится равномерно по параметру b на множестве $b \in [0;\ +\infty)$. Функция e^{-bx} монотонна при каждом фиксированном значении b и ограничена в совокупности значениями 0 снизу и 1 сверху. Тогда по признаку Абеля (утверждение (24.3)) $F(b)$ сходится равномерно на множестве $b \geqslant 0$. Значит, по теореме (24.1) о непрерывности несобственного интеграла с параметром функция $F(b)$ непрерывна на множестве $b \geqslant 0$ (подынтегральную функцию при $x = 0$ можно доопределить по непрерывности, используя первый замечательный предел).

Формально продифференцируем подынтегральное выражение в функции $F(b)$ по переменной b, получим: $g(b) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-bx} \sin ax\,dx$. Рассмотрим теперь множество $b \in \left(\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, где $0 < \varepsilon < 1$. Получившаяся подынтегральная функция является непрерывной. Для применения теоремы (24.3) о дифференцировании несобственного интеграла с параметром остаётся проверить, что $g(b)$ сходится равномерно на множестве $b \in \left(\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Так как $|e^{-bx}\sin ax| \leqslant e^{-\varepsilon x}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x}\,dx$ сходится, то $g(b)$ сходится равномерно на множестве $b \in \left(\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Тогда по теореме (24.3) получаем, что $F'(b) = g(b) \ \ \forall b \in \left(\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0;\ 1)$ можем утверждать, что $F'(b) = g(b) \ \ \forall b \in (0;\ +\infty)$.

Вычислим интеграл $g(b)$, интегрируя по частям:

$$g(b) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-bx}\sin ax\,dx = \left.\frac{e^{-bx}}{b}\sin ax\right|_0^{+\infty} - \frac{a}{b}\int\limits_0^{+\infty} e^{-bx}\cos ax\,dx =$$

$$= \left.\frac{a}{b^2}e^{-bx}\cos ax\right|_0^{+\infty} + \frac{a^2}{b^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-bx}\sin ax\,dx = -\frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}g(b);$$

$$g(b) = -\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Таким образом, $F(b) \in C([0;\ +\infty)) \cap D((0;\ +\infty))$ и $F'(b) = -\dfrac{a}{a^2+b^2}$. Тогда $F(b) = C - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Так как

$$|F(b)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}e^{-bx}\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\sin ax}{x}\right| e^{-bx}\,dx \leqslant \int\limits_0^{+\infty} ae^{-bx}\,dx = -\left.\frac{a}{b}e^{-bx}\right|_0^{+\infty} = \frac{a}{b},$$

то $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = 0$. С другой стороны, $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(C - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right) = C - \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $C - \dfrac{\pi}{2} = 0$, то есть $C = \dfrac{\pi}{2}$. Значит, $F(b) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Так как при $a > 0$ имеем $I(a) = F(0)$, то $I(a) = \dfrac{\pi}{2}$ при $a > 0$. Так как $I(0) = 0$ и $I(a) = -I(-a)$, то для произвольного значение $a \in \mathbb{R}$ получаем: $I(a) = \dfrac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} a$.

Таким образом, мы вычислили интеграл Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sgn} a.$$

Семинар 25

Интеграл Дирихле (продолжение)

Задача 3755 (1)**.** Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

сходится: а) равномерно на каждом сегменте $[a;\, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$; б) неравномерно на каждом сегменте $[a;\, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

Решение:

1) Для определённости рассмотрим случай $b > a > 0$ (так как функция $I(\alpha)$ является нечётной, то это не ограничивает общность). Используя замену $t = \alpha x$, получим:

$$\int\limits_{\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int\limits_{\alpha\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \hat{b} \to +\infty \quad \forall \alpha \in [a;\, b]$$

как «хвост» сходящегося интеграла. Тогда получаем:

$$r(\hat{b}) = \sup_{\alpha \in [a;\, b]} \left| \int\limits_{\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| \to 0 \quad \text{при} \quad \hat{b} \to +\infty.$$

Значит, интеграл I сходится равномерно на множестве $\alpha \in [a;\, b]$.

2) *1-й способ:*

Если бы интеграл I сходился равномерно на множестве $\alpha \in [a;\, b]$, то по теореме (24.1) он сходился бы к непрерывной функции. Но $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} \alpha$ – разрывная функция на множестве $\alpha \in [a;\, b]$. Значит, интеграл I не сходится равномерно на множестве $\alpha \in [a;\, b]$.

2-й способ:

Так как $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ сходится и не равен 0, то можно подобрать такое значение $\varepsilon > 0$, что $\displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = C \neq 0$. Так как $\displaystyle\int\limits_{\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int\limits_{\alpha\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, то

$$\forall \hat{b} \geqslant \frac{\varepsilon}{b} \;\; \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{\hat{b}} \in [a;\, b]\colon \;\; \int\limits_{\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = C \neq 0.$$

Тогда получаем:

$$r(\hat{b}) = \sup_{\alpha \in [a;\, b]} \left| \int\limits_{\hat{b}}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| \geqslant |C| \not\to 0 \quad \text{при} \quad \hat{b} \to +\infty.$$

Значит, интеграл I сходится равномерно на множестве $\alpha \in [a;\, b]$. □

Решение задач на несобственные интегралы с параметром

Задача 3758. Исследовать на равномерную сходимость на множестве $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл Лапласа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Решение:

Так как подынтегральное выражение является чётным относительно x, то получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Так как $\left|\dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$ сходится равномерно при $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$ сходится равномерно при $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Задача 3762. Исследовать на равномерную сходимость на множестве $\alpha \geqslant 0$ интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx.$$

Решение:

Используя замену $t = x\sqrt{\alpha}$, получим:

$$r(b) = \sup_{\alpha \geqslant 0} \int\limits_{b}^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sup_{\alpha \geqslant 0} \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \not\to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty.$$

Значит, $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2}\, dx$ не сходится равномерно на множестве $\alpha \geqslant 0$. $\square$

Задача 3762 (изменённая)**.** Исследовать на равномерную сходимость на множестве $\alpha \geqslant 0$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \alpha^p e^{-\alpha x^2}\, dx, \quad p > \frac{1}{2}.$$

Решение:

Используя замену $t = x\sqrt{\alpha}$, получим:

$$r(b) = \sup_{\alpha \geqslant 0} \int\limits_b^{+\infty} \alpha^p e^{-\alpha x^2}\, dx = \sup_{\alpha \geqslant 0} \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-t^2}\, dt.$$

Рассмотрим случай $\alpha \in [0;\, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, и $p > \dfrac{1}{2}$. Тогда получим:

$$\int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-t^2}\, dt < \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \alpha^{p-\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \varepsilon^{p-\frac{1}{2}}.$$

Теперь рассмотрим случай $\alpha \in [\varepsilon;\ +\infty)$, где $\varepsilon > 0$, и $p > \dfrac{1}{2}$. Тогда получим:

$$\int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-t^2}\, dt \leqslant \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-b\sqrt{\alpha} t}\, dt = \alpha^{p-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{e^{-b\sqrt{\alpha} t}}{b\sqrt{\alpha}} \right) \Bigg|_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} =$$

$$= \alpha^{p-\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-b^2\alpha}}{b\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha^{p-1}}{b} e^{-b^2\alpha};$$

$$\sup_{\alpha \geqslant 0} \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \alpha^{p-\frac{1}{2}} e^{-t^2}\, dt = \sup_{\alpha \geqslant 0} \frac{\alpha^{p-1}}{b} e^{-b^2\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$r(b) \to 0 \quad \text{при} \quad b \to +\infty, \quad \alpha \geqslant 0, \quad p > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} \alpha^p e^{-\alpha x^2}\, dx$ сходится равномерно на множестве $\alpha \geqslant 0$ при $p > \dfrac{1}{2}$.

$\square$

Задача 3781. Исследовать на непрерывность на множестве $\alpha \in (0;\,2)$ функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx.$$

Решение:

Заметим, что подынтегральное выражение симметрично относительно $x = \dfrac{\pi}{2}$, тогда получаем:

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx.$$

Таким образом, $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно.

Рассмотрим случай $\alpha \in [\delta;\ 2 - \delta]$, где $\delta \in (0;\,1)$. Так как

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$$

и $\displaystyle\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$ – собственный интеграл, то $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно. При $x \in (0;\,1]$ имеем:

$$\sin x < x; \qquad \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{2-\delta}}; \qquad \frac{1}{(\pi - x)^\alpha} \leqslant 1.$$

Тогда получаем:

$$\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx < \int\limits_0^{1} \frac{x}{x^{2-\delta}}\,dx = \int\limits_0^{1} x^{\delta-1}\,dx = \frac{x^\delta}{\delta}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\delta}.$$

Таким образом, по признаку Вейерштрасса $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно на множестве $\alpha \in [\delta;\ 2-\delta]$, где $\delta \in (0;\,1)$. Тогда $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$ сходится равномерно на множестве $\alpha \in [\delta;\ 2-\delta]$, где $\delta \in (0;\,1)$. Значит, по теореме (24.1) получаем, что $F(\alpha)$ непрерывна на множестве $\alpha \in [\delta;\ 2-\delta]$, где $\delta \in (0;\,1)$. В силу произвольности выбора $\delta \in (0;\,1)$ получаем, что $F(\alpha)$ непрерывна на множестве $\alpha \in (0;\,2)$. $\square$

Задача 3044 (продолжение)**.** Доказать равенство: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Решение:

В семинаре 21 мы показали, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^1 x^n \ln^n x\,dx. \tag{25.1}$$

и остановились на том, что надо посчитать интеграл $\int\limits_0^1 x^n \ln^n x\,dx$. Теперь можем это сделать.

Вычислим интеграл $I(m,n) = \int\limits_0^1 x^m \ln^n x\,dx$, где $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Рассмотрим случай $n = 0$:

$$I(m,0) = \int\limits_0^1 x^m\,dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

Пусть $f(x,m) = x^m$. Тогда $f(x,m) = e^{m\ln x}$, значит, $f \in C((0;\,1]\times[0;\ +\infty))$. Кроме этого, $f'_m(x,m) = x^m \ln x = e^{m\ln x}\ln x \in C((0;\,1]\times[0;\ +\infty))$. Рассмотрим интеграл от производной, учитывая, что $m \geqslant 0$:

$$\left|\int\limits_0^1 f'_m(x,m)\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^1 |f'_m(x,m)|\,dx = \int\limits_0^1 |x^m \ln x|\,dx \leqslant \int\limits_0^1 |\ln x|\,dx.$$

Так как $\int\limits_0^1 |\ln x|\,dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\int\limits_0^1 f'_m(x,m)\,dx$ сходится равномерно на множестве $m \geqslant 0$.

Таким образом, по теореме, аналогичной теореме (24.3), но с особенностью в 0, а не на бесконечности, получаем, что функция $I(m,0)$ дифференцируема, причём

$$I'(m,0) = \int\limits_0^1 f'_m(x,m)\,dx;$$

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)' = \int\limits_0^1 x^m \ln x\,dx = I(m,1).$$

Действуя аналогичным образом, по методу математической индукции получаем:

$$I(m,n) = I^{(n)}(m,0) = \left(\frac{1}{m+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Тогда для того интеграла, на вычислении которого мы остановились, получаем:

$$\int\limits_0^1 x^n \ln^n x\,dx = I(n,n) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Подставим это значение интеграла в равенство (25.1), получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$\square$

Формула Фруллани

Задача 3789. Доказать формулу Фруллани:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a},$$

где $a>0$, $b>0$, $f(x)$ – непрерывная функция и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ имеет смысл $\forall A>0$.

Решение:

Пусть $\varepsilon>0$. Тогда получим:

$$\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx.$$

В правой части в первом интеграле сделаем замену $t = ax$, а во втором интеграле – замену $t = bx$, получим:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Теперь оба интеграла в правой части имеют смысл по условию, тогда и интеграл в левой части имеет смысл. Значит, для исходного интеграла получаем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int\limits_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt \right) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Применяя теорему о среднем, получаем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} f(c) \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t},$$

где $c \in (a\varepsilon;\ b\varepsilon)$. Продолжим вычисления:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(f(c) \cdot \ln t \Big|_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(c) \ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

$\square$

Задача 3790. Применяя формулу Фруллани, вычислить интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Решение:

$\cos x$ – непрерывная функция, $\displaystyle\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ сходится $\forall A > 0$ по признаку Дирихле.

Тогда по формуле Фруллани получаем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \cos 0 \cdot \ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}.$$

$\square$

Задача 3792. Применяя формулу Фруллани, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Решение:

$\int\limits_A^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$ не сходится $\forall A > 0$, так как подынтегральная функция на бесконечности ведёт себя как $\frac{\pi}{2x}$, поэтому сразу применять формулу Фруллани нельзя.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} ax\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} bx\right)}{x}\, dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} bx - \operatorname{arcctg} ax}{x}\, dx.$$

$\operatorname{arcctg} x$ – непрерывная функция, $\int\limits_A^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{x}\, dx$ сходится $\forall A > 0$, так как подынтегральная функция на бесконечности ведёт себя как $\frac{1}{x^2}$. Тогда по формуле Фруллани получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} bx - \operatorname{arcctg} ax}{x}\, dx = \operatorname{arcctg} 0 \cdot \ln \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

$\square$

Семинар 26

Решение задач на интеграл Дирихле и формулы Фруллани

Утверждение 26.1 (Интеграл Дирихле).

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} a.$$

Утверждение 26.2 (Первая формула Фруллани).

Пусть $f \in C[0;\ +\infty)$ *и* $\exists \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \quad \forall A > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Утверждение 26.3 (Вторая формула Фруллани).

Пусть $f \in C[0;\ +\infty)$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} = (f(0) - f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

Утверждение 26.4 (Третья формула Фруллани).

Пусть $f \in C(0;\ +\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ *и* $\exists \int\limits_0^{A} \frac{f(x)}{x}\,dx \quad \forall A > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} = f(+\infty)\ln\frac{a}{b}.$$

Задача 3817. Используя интеграл Дирихле или Фруллани, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx.$$

Решение:

Пусть $f(x,a) = \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$. Тогда по первому замечательному пределу получаем: $\lim\limits_{x\to+0} f(x,a) = a^2$. Значит, можно доопределить функцию по непрерывности по x: $f(0,a) = a^2$. Так как доопределённая функция $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ непрерывна, а также функция ax непрерывна как функция двух переменных, то и функция $f(x,a) = \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)^2 \cdot a^2$ непрерывна как функция двух переменных на множестве $[0;\ +\infty)\times[0;\ +\infty)$.

$$f'_a(x,a) = \begin{cases} 2a, & x = 0 \\ \dfrac{2x\sin ax\cos ax}{x^2} = \dfrac{\sin 2ax}{x}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Аналогично можно показать, что $f'_a(x,a)$ непрерывна как функция двух переменных на множестве $[0;\ +\infty)\times[0;\ +\infty)$.

По признаку Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} f'_a(x,a)\,dx$ сходится равномерно на множестве $a \in \left[\varepsilon;\ \dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\varepsilon \in (0;\ 1)$.

Заметим, что при $a = 1$ исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ существует, так как в 0 подынтегральное выражение стремится к 1, а на бесконечности мажорируется интегрируемой функцией $\dfrac{1}{x^2}$.

Пусть $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin ax}{x}\right)^2 dx$. Тогда в силу всего, написанного выше, по теореме (24.3) получаем, что функция $F(a)$ дифференцируема на множестве $a > 0$ (в силу произвольности выбора $\varepsilon \in (0;\ 1)$), причём

$$F'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x}\,dx.$$

Используя интеграл Дирихле, получаем: $F'(a) = \dfrac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(2a)$ при $a > 0$, то есть $F'(a) = \dfrac{\pi}{2}$ при $a > 0$. Значит, при $a > 0$ получаем: $F(a) = \dfrac{\pi}{2}a + C$.

Рассмотрим случай $a \in [0;\ \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Так как

$$\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 \leqslant a^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

то можно подынтегральную функцию исходного интеграла $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx$ мажорировать следующей интегрируемой функцией:

$$g(x) = \begin{cases} \varepsilon^2, & x \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса $F(a)$ сходится равномерно на множестве $[0; \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Тогда по теореме (24.1) $F(a)$ непрерывна при $a \geqslant 0$ (в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$).

Таким образом, $\lim\limits_{a\to+0} F(a) = \lim\limits_{a\to+0} \left(\frac{\pi}{2}a + C\right) = C$, а с другой стороны, $\lim\limits_{a\to+0} F(a) = \lim\limits_{a\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = 0$. Значит, $C = 0$, тогда $F(a) = \frac{\pi}{2}a$ при $a \geqslant 0$.

Так как исходный интеграл $F(a)$ является чётной функцией относительно a, то $F(a) = \frac{\pi}{2}|a|$ при $a \in \mathbb{R}$. □

Задача 3815. Используя интеграл Дирихле или Фруллани, вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx.$$

Решение:

Используя тригонометрическую формулу произведения синуса и косинуса, а затем интеграл Дирихле, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((a+b)x)}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin((a-b)x)}{x}\, dx = \\ = \frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn}(a+b) + \operatorname{sgn}(a-b)).$$

При $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$ получаем $\frac{\pi}{2}$. При $a > 0$, $b > 0$, $|a| = |b|$ получаем $\frac{\pi}{4}$. При $a < 0$, $b < 0$, $|a| > |b|$ получаем $-\frac{\pi}{2}$. При $a < 0$, $b < 0$, $|a| = |b|$ получаем $-\frac{\pi}{4}$. При $|a| < |b|$ получаем 0. □

Интеграл Эйлера-Пуассона

Задача 3803. Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

исходя из формулы

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\,dy.$$

Решение:

Пусть $F(x) = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\,dy$. Тогда $F(0) = 0$. При $x > 0$ сделаем замену $t = xy$, получим:

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = I.$$

Так как интеграл не зависит от значения функции в отдельной точке, то

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}\,dy = I \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I^2.$$

Таким образом, проверили формулу, данную в условии.

Покажем, что интегралы можно переставить следующим образом:

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2}\,dy\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2}\,dx\,dy.$$

Воспользуемся теоремой, что если подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и один из повторных интегралов существует, то и второй повторный интеграл существует и равен первому. Значит, перестановка интегралов, записанная выше, действительно верная.

Найдём теперь значение внутреннего интеграла после перестановки, используя замену $t = x^2$, а затем замену $w = (1+y^2)t$:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)t}\,dt = \frac{1}{2(1+y^2)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-w}\,dw = \frac{1}{2(1+y^2)}.$$

Подставим это значение внутреннего интеграла в формулу для I^2:

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} xe^{-(1+y^2)x^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как в интеграле I подынтегральная функция положительна, то $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\square$

Легко показать, что $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Решение задач на интеграл Эйлера-Пуассона

Задача 3806. Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx,$$

где $a > 0$.

Решение:

Используя определение гиперболического косинуса $\operatorname{ch} bx = \dfrac{e^{bx}+e^{-bx}}{2}$, получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,dx. \tag{26.1}$$

Во втором интеграле в правой части равенства (26.1) сделаем замену $t = \sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$. Тогда $t^2 = ax^2 + bx + \dfrac{b^2}{4a}$. Получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Аналогично можно получить, что первый интеграл в правой части равенства (26.1) тоже равен $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{ch} bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

$\square$

Задача 3807. Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx,$$

где $a > 0$.

Решение:

Сделаем замену $t = \dfrac{a}{x}$. Тогда $t^2 + \dfrac{a^2}{t^2} = x^2 + \dfrac{a^2}{x^2}$. Теперь рассмотрим такой интеграл (он существует, так как в 0 и на бесконечности подынтегральная функция достаточно быстро стремится к 0):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{a}{t^2} e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\,dt = -\int\limits_{t=0}^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\,d\left(\frac{a}{t}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx.$$

Таким образом,

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{a}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx.$$

Используя замену $w = x - \dfrac{a}{x}$ в интеграле Эйлера-Пуассона, получим:

$$\sqrt{\pi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}\,dw = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}-2a\right)}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)dx = e^{2a}(I+I) = 2e^{2a}I.$$

Таким образом, $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. □

Задача 3809. Пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона, найти интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx,$$

где $a > 0$.

Решение:

Пусть $F(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$. По признаку Вейерштрасса этот интеграл сходится равномерно на множестве $[\varepsilon;\ +\infty)\times[A;\ B]$, где $\varepsilon > 0$ и $A < B$. Тогда получаем:

$$F_b'(a,b) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}F(a,b);$$

$$\frac{F_b'(a,b)}{F(a,b)} = -\frac{b}{2a};$$

$$F(a,b) = C(a)\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Так как $F(a,b)$ непрерывна по b в 0, то $F(a,0) = C(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$. Используя в интеграле замену $t = \sqrt{a}x$, с помощью интеграла Эйлера-Пуассона получаем: $C(a) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

Таким образом, $F(a,b) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. $\square$

Семинар 27

Эйлеровы интегралы

Определение 27.1. $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ – *гамма-функция*, где $x > 0$.

Несложно показать, что при $x > 0$ гамма-функция непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка.

Свойства гамма-функции:

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ – функциональное уравнение, или рекуррентное соотношение, или формула понижения;

$\Gamma(n) = (n-1)!\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ – следствие из предыдущей формулы, обобщение факториала;

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ – формула дополнения

Пользуясь формулой понижения, можно доопределить гамма-функцию для отрицательных нецелых значений аргумента.

Определение 27.2. $\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ – *бета-функция*, где $x, y > 0$.

Бета-функция в некотором смысле является обобщением обратных биномиальных коэффициентов.

Задача 3853. Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx,$$

где $a, b, n > 0$.

Решение:

Сделаем замену $t = x^n$. Тогда $x = t^{\frac{1}{n}}$ и $dx = \dfrac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(a+bt)^p}\,dt.$$

Теперь сделаем замену $\dfrac{bt}{a+bt} = y$. Тогда $t = \dfrac{ay}{b(1-y)}$ и $dt = \dfrac{a}{b(1-y)^2}\,dy$. Также $1 - y = \dfrac{a}{a+bt}$, значит, $a + bt = \dfrac{a}{1-y}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx = \frac{a}{nb}\int_0^1 \frac{\left(\dfrac{ay}{b(1-y)}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}}{\left(\dfrac{a}{1-y}\right)^p (1-y)^2}\,dy =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \cdot a^{-p} \cdot \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{m+1}{n}-1}(1-y)^{p-\frac{m+1}{n}-1}\,dy =$$

$$= \frac{a^{\frac{m+1}{n}-p} \cdot b^{-\frac{m+1}{n}}}{n} \cdot \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)$$

при $m > -1$ и $p > \dfrac{m+1}{n}$. □

Утверждение 27.1. *Связь между бета-функцией и гамма-функцией:*

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Задача 3845. С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующий интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Решение:

Из решения предыдущей задачи (3853) при $a = b = n = 1$, $m = \dfrac{1}{4}$, $n = 2$ получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \mathrm{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1!} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

Задача 3861. Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующий интеграл:

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx.$$

Решение:

Сделаем замену $t = \ln \frac{1}{x}$. Тогда $x = e^{-t}$ и $dx = -e^{-t}\,dt$.

$$\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt = \Gamma(p+1).$$

$\square$

Задача 3860. Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx.$$

Решение:

Считая, что $n > 0$, сделаем замену $t = x^n$. Тогда $x = t^{\frac{1}{n}}$ и $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$.

$$\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

$\square$

Задача 3856. Определить область существования и выразить через эйлеровы интегралы следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx.$$

Решение:

Сделаем замену $t = \sin^2 x$. Тогда $dt = 2\sin x\cos x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2\sin x\cos x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

$\square$

Семинар 28

Разбор домашнего задания

Задача 3797. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

где $|\alpha| \leqslant 1$.

Решение:

Пусть $f(x,\alpha) = \dfrac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $f(x,\alpha),\ f'_\alpha(x,\alpha) \in C([0;\ 1) \times [-1;\ 1])$.

Заметим, что при $\alpha = 0$ исходный интеграл сходится.

$$\int\limits_0^1 f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Получившееся подынтегральное выражение на множестве $\alpha \in [-1+\varepsilon;\ 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0;\ 1)$, мажорируется интегрируемой функцией $\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$, где $C > 0$ – некоторая константа.

Таким образом, по признаку Вейерштрасса $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ сходится равномерно при $\alpha \in (-1;\ 1)$ (в силу произвольности выбора $\varepsilon \in (0;\ 1)$). Пусть $F(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Тогда по теореме, аналогичной теореме (24.3), получаем:

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{при} \quad \alpha \in (-1;\ 1).$$

Так как при $\alpha \in [-1;\ 1]$ имеем, что $\left|\dfrac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \left|\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \quad \forall x \in (0;1)$, и функция $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ интегрируема на отрезке $x \in [0;1]$, то по признаку Вейерштрасса интеграл $F(\alpha)$ равномерно сходится на множестве $\alpha \in [-1;\ 1]$. Тогда по теореме, аналогичной теореме (24.1), функция $F(a)$ непрерывна при $\alpha \in [-1;\ 1]$.

Вычислим интеграл для производной $F'(\alpha)$ при $\alpha \in (-1;\ 1)$, используя замену $x = \sin t$, а затем замену $u = \operatorname{ctg} t$:

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{-2\alpha}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\alpha\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1-\alpha^2\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}}\,dt =$$

$$= -2\alpha\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t} = -2\alpha\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1-\alpha^2+u^2} = \frac{-2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{-2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{-\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Таким образом, $F(\alpha) = \pi\sqrt{1-\alpha^2} + C$ при $\alpha \in [-1;\ 1]$ (в силу непрерывности $F(\alpha)$ на отрезке $[-1;\ 1]$). При $\alpha = 0$ получаем: $F(0) = \pi + C = 0$, значит, $C = -\pi$. Следовательно, $F(\alpha) = \pi(\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$ при $\alpha \in [-1;\ 1]$. $\square$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ