МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 2

КОСУХИН
ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Семинар 1 11

1. Неопределенный интеграл 11
Обзор курса . . . 11
Определение первообразной . . . 11
Множество всех первообразных . . . 12
Первообразная степенной функции . . . 12
Первообразная для показателя степени, равного -1 . . . 13
Таблица первообразных . . . 14
Показательные функции . . . 14
Тригонометрические функции . . . 14
Обратные тригонометрические функции . . . 15
Гиперболические функции . . . 15
Обратные гиперболические функции . . . 16
Способы приведения интегралов к табличному виду . . . 18
Задача №1633 . . . 19
Задача №1642 . . . 19
Задача №1648 . . . 20
Обощенная первообразная . . . 21
Задача . . . 22

Семинар 2 23

2. Неопределенный интеграл: продолжение 23
Замена переменной в неопределенном интеграле . . . 23
Задача №1674 . . . 24
Задача №1680 . . . 24
Задача №1697 . . . 25
Задача №1766 . . . 25
Задача №1776 . . . 25
Задача №1778 . . . 26
Задача №1784 . . . 27
Задача №1786 . . . 28
Интегрирование по частям . . . 29
Задача №1791 . . . 29
Задача №1796 . . . 29
Задача №1828 . . . 30

Семинар 3 32

3. Неопределенный интеграл: интегрирование рациональных функций 32
Задача №1790 . . . 32
Случай I из таблицы . . . 33
Случай VII из таблицы . . . 33

Задача №1803 34
Задача №1834 34
Интегрирование рациональных функций 35
Задача №1866 37
Задача №1869 38
Задача №1877 39

Семинар 4 **41**

4. Неопределенный интеграл: интегрирование рациональных функций **41**
Задача №1884 42
Задача №1868 44
Метод Остроградского 45
Задача №1891 46
Задача №1892 48

Семинар 5 **50**

5. Интегрирование рациональных функций **50**
Задача №1898 50
Задача №1929 52
Задача №1931 52
Случай рационального выражения с квадратным корнем 53
Задача №1946 53
Задача №1948 55
Задача №1951 56

Семинар 6 **57**

6. Подстановки Эйлера и интегрирование тригонометрических функций **57**
Задача №1935 57
Задача №1949 57
Задача №1980 58
Подстановки Эйлера 58
Задача №1966 59
Задача №1994 59
Задача №2011 60
Интегрирование тригонометрических функций 60
Задача №2026 61
Задача №2028 61
Задача №2035 62
Задача №2123 63
Задача №2042 64

Семинар 7 **65**

7. Интегрирование трансцендентных функций **65**
Задача №2066 . . . 65
Задача №2067 . . . 65
Задача №2068 . . . 66
Задача №2076 . . . 66
Напоминание про комплексные числа . . . 66
Задача №2073 . . . 67
Задача №2082 . . . 67
Задача №2087 . . . 68
Задача №2091 . . . 68
Задача №2098 . . . 68
Задача №2110 . . . 69
Задача №2113 . . . 69
Задача №2165 . . . 69

Семинар 8 **71**

8. Определенный интеграл Римана **71**
Задача №2003 . . . 71
Задача №2077 . . . 71
Задача №2165 . . . 71
Определенный интеграл Римана . . . 72
Задача №2197 . . . 73
Задача №2182 а) . . . 73
Задача №2193.1 . . . 74
Формула Ньютона-Лейбница . . . 74
Задача №2216 а) . . . 75
Задача №2216 б) . . . 75

Семинар 9 **77**

9. Интегрирование по частям **77**
Задача №2217 . . . 77
Задача №2219 . . . 77
Задача №2221 . . . 78
Задача №2227 . . . 78
Задача №2230 . . . 79
Задача №2231 . . . 79
Задача №2233 . . . 80
Формула интегрирования по частям . . . 80
Задача №2240 . . . 80
Задача №2242 . . . 81
Формула замены переменной . . . 81
Задача №2249 . . . 82
Задача №2257 а) . . . 82

Семинар 10 84

10. Вычисление определенных интегралов 84
- Задача №2205 . . . 84
- Задача №2193(2) . . . 85
- Задача №2228 . . . 86
- Задача №2257(б) . . . 87
- Задача №2282 . . . 87
- Задача №2309 . . . 87
- Теорема о среднем . . . 88
- Задача №2316(б) . . . 89
- Задача №2324 . . . 89

Семинар 11 91

11. Несобственный интеграл 91
- Задача №2282 . . . 91
- Вторая теорема о среднем . . . 92
- Задача №2328 . . . 93
- Модификация теоремы о среднем . . . 93
- Задача №2330 . . . 94
- Неравенство Коши-Буняковского в интегральном виде . . . 94
- Несобственный интеграл . . . 95
- Интеграл от $\frac{1}{x^p}$ на отрезке $[0,1]$ . . . 96
- Интеграл от $\frac{1}{x^p}$ на луче $(1;+\infty)$ . . . 96
- Признак сравнения . . . 96
- Задача №2359 . . . 96

Семинар 12 98

12. Признаки Абеля и Дирихле 98
- Задача №2346 . . . 98
- Задача №2348 . . . 98
- Задача №2363 . . . 99
- Задача №2369 . . . 99
- Задача №2374 . . . 99
- Задача №2378 . . . 100

Семинар 13 102

13. Вычисление площади с помощью интеграла Римана 102
- Задача №2350 . . . 102
- Задача №2370.1 . . . 103
- Задача №2379 . . . 103
- Задача №2371 . . . 104
- Задача №2390 а) . . . 104
- Задача №2390 в) . . . 105

Задача №2392 105
Вычисление площади 105
Задача №2392 106
Задача №2419 106

Семинар 14 **107**

14. Вычисление площади с помощью интеграла Римана **107**
Задача №2419 107
Формула длины гладкой кривой 107
Задача №2431 108
Задача №2433 108
Задача №2443 108
Задача №2446 109
Задача №2429 109
Домашнее задание 109

Семинар 15 **110**

15. Квадратурная формула Симпсона **110**
Задача №2437 110
Задача №2453 110
Задача №2453 111
Задача из олимпиады по мат.анализу 111
Вычисление площадей и объемов 112
Задача №2459 112
Задача №2464 113
Квадратурная формула Симпсона 113
Задача №2460 113

Семинар 16 **115**

16. Функции нескольких переменных **115**
Задача №2478 115
Задача №3151 115
Задача №3159 а) 115
Задача №3159.2 116
Задача №3167 116
Задача №3170 117
Задача №3181 117
Метрика 118
Норма 119
Задача №3181 119
Задача №3182 119

Семинар 17 **120**

17. Предел и непрерывность функции двух переменных 120
Задача №2471 . . . 120
Задача №2469 . . . 120
Задача №3172 . . . 121
Задача №3183.2 . . . 121
Задача №3184 а) . . . 122
Задача №3185 . . . 122
Задача №3187 . . . 122
Задача №3196 . . . 123
Задача №3202 . . . 123
Задача №3207 . . . 124
Дифференцирование функции двух переменных . . . 124
Задача №3213 . . . 124
Задача №3223 . . . 125

Семинар 18 126

18. Производная по направлению 126
Задача №3283 . . . 126
Задача №3285 . . . 126
Задача №3301 . . . 126
Задача №3341 . . . 127

Семинар 19 128

19. Производные высших порядков 128
Задача №3343 . . . 128
Задача №3321 . . . 128
Частные производные при замене переменных . . . 130
Задача №3352 . . . 130
Производные высокого порядка . . . 131
Дифференциал высокого порядка . . . 131
Задача №3213 . . . 132
Сравнение первого и второго дифференциалов . . . 132
Задача №3230 . . . 132
Задача №3259 . . . 133
Дифференциал второго порядка не инвариантен . . . 134

Семинар 20 135

20. Дифференцирование неявных функций 135
Задача №3290 . . . 135
Задача №3308 . . . 135
Задача №3326 . . . 136
Задача №3337 . . . 137
Теорема о неявной функции . . . 137

Задача №3383 . . . 138
Теорема о неявной функции на плоскости . . . 138
Задача №3371 . . . 139

Семинар 21 **140**

21. Теорема о неявном отображении **140**
Задача №3230.1 . . . 140
Задача №3351(а) . . . 140
Задача №3375 . . . 141
Задача №3389 . . . 141
Задача №3395 . . . 142
Задача №3400 . . . 142
Теорема о неявном отображении . . . 143
Задача №3403.1 . . . 144
Задача №3407.2 . . . 144

Семинар 22 **146**

22. Замена переменной в выражениях, содержащих производные функции одной переменной **146**
Разбор контрольной: задача 1 . . . 146
Разбор контрольной: задача 2 . . . 147
Разбор контрольной: задача 3 . . . 147
Разбор контрольной: задача 4 . . . 148
Разбор контрольной: задача 5 . . . 149
Замена одной переменной . . . 150
Задача №3434 . . . 150
Задача №3436 . . . 151
Замена двух переменных . . . 152
Задача №3439 . . . 152

Семинар 23 **154**

23. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные **154**
Задача №3407 . . . 154
Задача №3391 . . . 155
Задача №3444 . . . 155
Задача №3407.2 . . . 156
Задача №3433 . . . 157
Задача №3458 . . . 158
Задача №3460 . . . 158
Задача №3474 . . . 159
Задача №3488 . . . 160

Семинар 24 **162**

24. Геометрический смысл производной 162
Геометрический смысл производной: касательная к кривой 162
Задача №3528 163
Геометрический смысл производной в случае плоскости 164
Задача №3539 165
Касательная плоскость для неявной функции 166
Задача №3550 166
Задача №3548 167
Задача №3532 168
Задача о побеге из тюрьмы 169
Задача №3570 169

Семинар 25 171

25. Экстремум функций нескольких переменных 171
Задача №3553 171
Задача №3501 171
Задача №3556 172
Экстремум функций нескольких переменных 173
Необходимое условие локального экстремума 173
Задача №3621 174
Задача №3622 174
Задача №3623 174
Формула Тейлора для двух переменных 175
Точки минимума и максимума, квадратичная форма 175
Задача №3625 175
Задача №3643 177
Задача №3651 178

Семинар 1

1. Неопределенный интеграл

Обзор курса

В этом курсе будут рассмотрены следующие темы:

1) Неопределенный интеграл

2) Определенный интеграл

3) Функции нескольких переменных

Определение первообразной

Рассмотрим функцию $F(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$ (вместо треугольных скобок могут быть как круглые, так и квадратные, т.е. промежуток может быть отрезком, интервалом, полуинтервалом и т.д.); в качестве a и b можно рассматривать $\pm\infty$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообра́зной для функции $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$.

Замечание 1. Первообразная существует не для всех функций (подробнее об этом будет в следующих семинарах).

Понятно, что нахождение первообразной — это обратная операция для дифференцирования.

Если для функции заданы две первообразные, что тогда можно сказать про их соотношение?

Теорема 1. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для $f(x)$ на промежутке $\langle a, b\rangle$. Тогда*

$$F_1(x) - F_2(x) = \mathrm{const}, \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

То есть разность двух первообразных одной функции на промежутке — это постоянная функция, не зависящая от x.

Доказательство. Пусть $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Продифференцируем это равенство

$$F'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Заметим, что $F'(x) = 0$ для всякого x из выбранного промежутка.

Теперь рассмотрим любые две точки x_1 и x_2 из нашего промежутка. Тогда по теореме Лагранжа о промежуточном значении имеем

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c)(x_2 - x_1) = 0,$$

где c лежит между x_1 и x_2. В силу произвольности выбора точек x_1 и x_2 получаем, что функция $F = \mathrm{const}$, т.е.

$$F = F_1 - F_2 = \mathrm{const},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Комментарий 1. Эта теорема показывает, как устроено множество всех первообразных для функции $f(x)$.

Множество всех первообразных

Итак, рассмотрим множество всех первообразных

$$M = \{F(x) \mid F \text{ — первообразная для } f \text{ на } \langle a, b\rangle\}.$$

Вообще говоря, это множество, согласно теореме 1 имеет следующий вид:

$$M = \{F_0(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Действительно, мы доказали, что если есть две первообразные, то они отличаются на константу, т.е. если фиксируем одну первообразную $F_0(x)$, то всякая другая первообразная получается прибавлением некоторой константы к $F_0(x)$. В другую сторону: при дифференцировании функции вида $F_0(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$, мы получим $f(x)$. Итак, мы получили точное писание всего множества первообразных функций.

Определение 2. Множество всех первообразных называется *неопределенным интегралом*:

$$M = \{F_0(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \int f(x)dx.$$

Значок $\int$ произошел от слова «square» — «площадь». Более подробно об этом поговорим далее.

В записанном обозначении интеграла нигде не фигурирует промежуток $\langle a, b\rangle$. Он подразумевается из контекста задачи.

Первообразная степенной функции

Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$. По таблице производных знаем, что

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Тогда можем сказать, что

$$\int nx^{n-1}dx = x^n + c.$$

Вообще говоря, это соотношение линейно, т.е. при умножении на константу функции, ее производная тоже умножается на константу. Поэтому для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + c.$$

При $n = 1$ получаем

$$\int 1dx = x + c.$$

Эти равенства верны для всякого $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь $p \in \mathbb{R}$ и $f(x) = x^p$. Промежуток в данном случае будет $(0; +\infty)$. Тогда имеем

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1.$$

Первообразная для показателя степени, равного -1

Из таблицы производных мы знаем, что

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Для $x > 0$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c.$$

Кроме того, для $x < 0$

$$(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

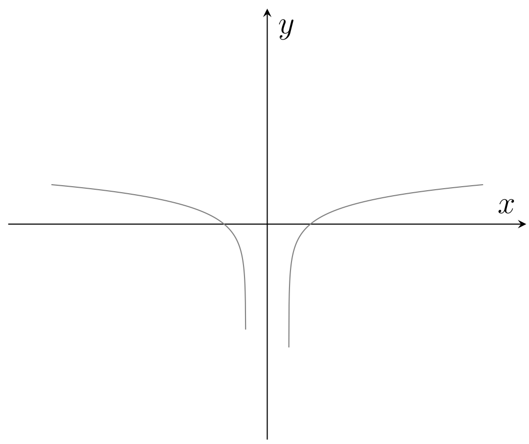
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + c.$$

Известно равенство

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad x \neq 0.}$$

В этой записи собраны два равенства: для промежутка $(0; +\infty)$ и для промежутка $(-\infty; 0)$. Однако неверно будет утверждать, что множество всех первообразных для функции $\frac{1}{x}$ на объединении $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ совпадает с тем, что было записано в выделенной формуле.

Две ветви $\ln(-x)$ и $\ln(x)$



Дело в том, что константы прибавляются к двум ветвям функции $ln|x|$, однако к каждой ветви могут быть добавлены разные постоянные. Т.е. обе ветви могут быть сдвинуты на разные величины. Итак, первообразная принимает вид

$$\begin{cases} \ln(x) + c_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + c_2, & x < 0. \end{cases}$$

Таблица первообразных

Показательные функции

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + c}$$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0.}$$

Для этих двух случаев промежуток будет $x \in (-\infty; \infty)$.

Тригонометрические функции

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c.}$$

Замечание 2. Строго говоря, выражение после равенства должно быть заключено в фигурные скобки, так как оно описывает все множество, а не конкретную функцию, но по сложившейся традиции они опускаются.

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x + c.}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} dx = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x + c.}$$

На каком промежутке определено последнее равенство? На таком, на котором определена функция $1/\cos^2 x$, т.е. $\cos^2 x \neq 0$. Решим уравнение

$$\cos^2 x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

То есть рассматриваемое равенство определено на промежутках

$$(a, b) \subset \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi(k+1)\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично для функции $1/\sin^2 x$:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c.}$$

Замечание 3. При записи интеграла функции роль скобок для подынтегрального выражения играют символы $\int$ и dx, поэтому скобки можно опускать.

Обратные тригонометрические функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Возникает вопрос, чему равен следующий интеграл на промежутке $(-1;1)$:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \text{ или } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x + c?}$$

Оказывается, что можно записать и так, и так. То есть оба ответы будут верны: в каждом из случаев записан один из представителей множества всех первообразных данной функции. Однако надо понимать, что первообразная в первом ответе не совпадает с первообразной во втором ответе: совпадают множества, которые они порождают

$$\{\arcsin x + c \mid c \in \mathbb{R}\} = \{-\arccos x + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2}dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + c. \end{array}\right.}$$

Замечание 4. Из теоремы 1 следует замечательный факт: так как первообразные $\arcsin x$ и $-\arccos x$ являются первообразными для одной и той же функции, то они отличаются на константу. Получается, что

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

Гиперболические функции

Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

и гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Их производные:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Следовательно,

$$\boxed{\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c;}$$

$$\boxed{\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c.}$$

Рассмотрим гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c}.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c}.$$

Аналогия с тригонометрическими функциями очевидна.

Обратные гиперболические функции

Рассмотрим гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

и гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Чтобы построить обратные к ним функции, найдем их область определения. Построим эскизы:

График $y = \operatorname{sh} x$ — нечетная функция

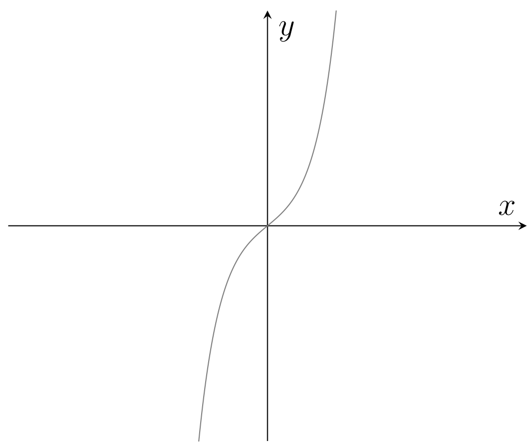
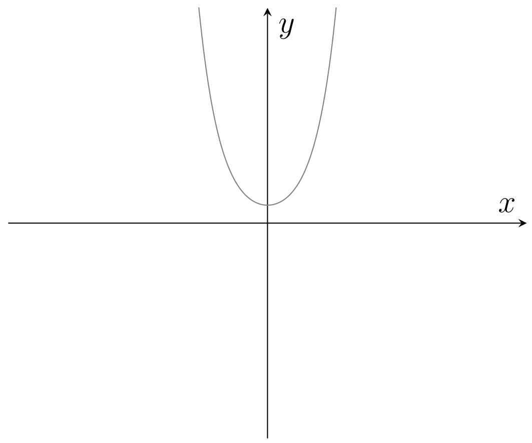


График $y = \operatorname{ch} x$ — четная функция



Отсюда видно, что обратная функций для гиперболического синуса существует для всех точек $\mathbb{R}$:

$$x = \operatorname{sh}^{-1} y$$

Обратная функций для гиперболического косинуса определена не везде, а только при $y \geq 1$:

$$x = \operatorname{ch}^{-1} y,$$

а кроме того, нужно выбирать одну из ветвей этой функции. Как правило выбирают положительную часть, т.е. $x \geq 0$.

Как устроены формулы для рассматриваемых обратных функций? Чтобы это понять, нужно, вообще говоря, решить уравнение

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

для нахождения обратной функции для гиперболического синуса. Введем новую переменную:

$$t = e^x > 0 \Longrightarrow t - \frac{1}{t} = 2y \mid \cdot t,$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 1$$

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Так как $t > 0$, то

$$t = y + \sqrt{y^2 + 1} \Longrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\boxed{x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).}$$

Это так называемый «длинный логарифм».

Аналогично для гиперболического косинуса:

$$t = e^x > 0 \Longrightarrow t + \frac{1}{t} = 2y \mid \cdot t,$$

$$t^2 - 2yt + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 - 1$$

$$t = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Так как мы договорились, что подбираем функцию так, что $x \geq 0$, то t должно быть > 1. По теореме Виета произведение $t_1 t_2 = 1 \Longrightarrow$ выбираем больший корень.

$$t = y + \sqrt{y^2 - 1} \Longrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\boxed{x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).}$$

Рассмотрим теперь некоторый параметр p и функцию

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + p}).$$

Посчитаем производную

$$(\ln(y + \sqrt{y^2 + p}))' = \frac{1 + \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + p}}}{y + \sqrt{y^2 + p}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + p}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + p}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + p}) + c}.$$

Способы приведения интегралов к табличному виду

1) Очевидный способ: смена обозначения у переменной

$$\int f(x)dx = F(x) + c \longleftrightarrow \int f(u)du = F(u) + c$$

2) Линейность. Для производных было: если известно, что

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x),$$

$$(AF(x) + BG(x))' = Af(x) + Bg(x),$$

где $A, B = \text{const}$.

Поэтому для интегралов тоже имеет место свойство линейности:

$$\int Af(x) + Bg(x)dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx.$$

Интеграл от линейной комбинации может быть представлен как линейная комбинация интегралов. И наоборот.

3) Пусть $F'(x) = f(x)$. Подставим внутрь линейную функцию:

$$(F(at+b))' = af(at+b),$$

где a и b — некоторые константы, t — новая переменная. Следовательно,

$$\int af(at+b)dt = F(at+b) + C.$$

$$\int f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(at+b) + C.$$

Задача №1633

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = ?$$

Понятно, что подразумевается промежуток $x > 0$.

Решение. На промежутке $x > 0$ верно, что $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$. Тогда получим

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$
$$= \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + c.$$

□

Задача №1642

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = ?$$

Подразумевается промежуток $x \in (-1;1)$.

Решение. На промежутке $(-1;1)$ верно, что

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}.$$

Тогда получим

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$
$$= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c.$$

□

Задача №1648

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = ?$$

Промежуток $x \in [0; \pi]$.

Решение. Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Формула двойного угла:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

Перепишем подынтегральное выражение:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2.$$

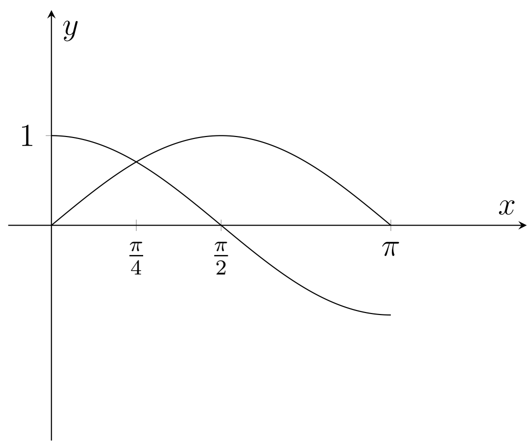
Тогда получим

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int |\cos x - \sin x|dx = \begin{cases} \int \cos x - \sin x dx, & x \in [0; \frac{\pi}{4}] \\ \int \sin x - \cos x dx, & x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sin x + \cos x + c_1, & x \in [0; \frac{\pi}{4}] \\ -\cos x - \sin x + c_2, & x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Объединить две эти функции нельзя, так как мы ищем дифференцируемую, а значит, и непрерывную функцию на указанном промежутке. При объединении в точке $\frac{\pi}{4}$ возникает условие на константы $\sqrt{2} + c_1 = -\sqrt{2} + c_2$. Тогда, если c_1 выбираем произвольно, то $c_2 = c_1 + 2\sqrt{2}$.

Графики $y = \sin x$ и $y = \cos x$



Итак, у нас появился «кандидат» на ответ:

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + c, & x \in [0; \frac{\pi}{4}] \\ -\sin x - \cos x + c + 2\sqrt{2}, & x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Пока мы проверили условие непрерывности в точке $\frac{\pi}{4}$ (пределы слева и справа совпадают). Осталось проверить, что $F(x)$ дифференцируема в точке $\frac{\pi}{4}$. Используем теорему.

Теорема 2. *Если есть непрерывная функция $F(x)$ в точке $\frac{\pi}{4}$ (например) такая, что*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} F'(x),$$

тогда существует $F'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$.

В нашем случае при $x \longrightarrow \frac{\pi}{4}\pm$

$$(\sin x + \cos x + c)' = \cos x - \sin x \longrightarrow 0,$$

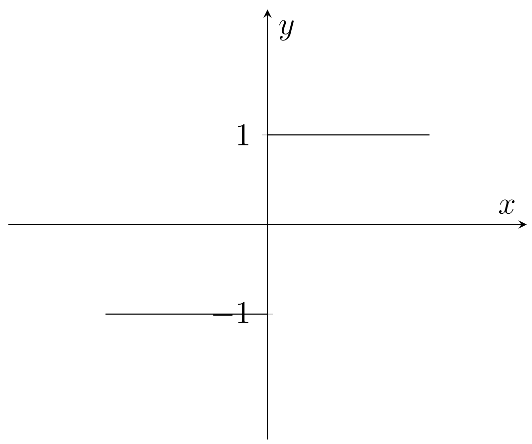
$$(-\sin x - \cos x + c + 2\sqrt{2})' = \sin x - \cos x \longrightarrow 0,$$

следовательно, $\exists F'(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = 0$. □

Обощенная первообразная

Пример 1. Для функции $\operatorname{sgn} x$ не существует первообразной в окрестности точки 0, так как предел справа равен 1, а предел слева равен -1, т.е. они не равны.

Графики $y = \sin x$ и $y = \cos x$



Рассмотрим промежуток $I = \langle a, b\rangle$ и функцию $f(x)$ на нем.

Определение 3. Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* для $f(x)$, если

1) $F(x) \in C\langle a, b\rangle$;

2) существует такое конечное (иногда рассматривают счетное) множество $E = \{x_1, \dots x_n\} \subset I$, что $\forall x \in I/E$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Пример 2. Получается, что функция $= |x|$ является обобщенной первообразной для функции $y = \operatorname{sgn} x$ на $\mathbb{R}$. В этом случае $E = \{x = 0\}$.

Замечание 5. Если функция является первообразной, то она является и обобщенной первообразной. В обратную сторону неверно (пример — $y = |x|$).

Для обобщенных первообразных верна теорема

Теорема 3. *Все первообразные одной функции отличаются друг от друга на некоторую константу.*

Задача

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx =?$$

Подразумевается любой промежуток, что $x \neq \pm 1$.

Решение. На промежутке $(-1; 1)$ верно, что

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Разложим на простейшие дроби

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)},$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -1 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c = \frac{1}{2}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}.$$

□

Семинар 2

2. Неопределенный интеграл: продолжение

Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть у нас есть функция $F'(x) = f(x)$. Тогда мы знаем, что вместо x можно подставить внутрь другую функцию, например $x = g(t)$. Тогда

$$(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t).$$

по формуле для производной сложной функции. Следовательно, мы знаем, чем равен интеграл

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C.$$

Получается, что можно сначала посчитать интеграл следующего вида:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а затем подставить вместо x функцию $g(t)$. Получаем формулу для замены переменной:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt}.$$

На каком промежутке проводится интегрирование? Если изначально мы интегрировали функцию $f(x)$ на $\langle a, b\rangle$, то функция $g(t)$ должна принимать значения из того же промежутка $\langle a, b\rangle$.

В случае линейной функции, которую мы рассматривали на прошлом семинаре, получаем:

$$\int f(at+b) \cdot adt = F(at+b) + C.$$

Замечание 6. Зачем мы пишем «dx» при интегрировании? Одно из объяснений состоит в том, что при написании

$$\int f(x)$$

формула замены переменной будет выглядеть неестественно: получится либо неверное равенство, либо будет неясна природа множителя $g'(t)$. Однако при добавлении dx и dt соответственно, формулу можно будет переписать так, что она становится очевидной:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))dg(t) = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Другое объяснение мы обсудим, когда будем говорить об определенных интегралах.

Задача №1674

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =?$$

Понятно, что подразумевается промежуток $-1 < x < 1$.

Решение. Сделаем замену переменных. Для начала сменим буквы $x \longrightarrow t$, чтобы запись соответствовала формуле замены переменных в рамке:

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} =?$$

Попробуем заметить в подынтегральной функции выражение вида $f(g(t))g'(t)$. В качестве $g(t)$ предлагается взять функцию $g(t) = 1 - t^2$. Тогда $g'(t) = -2t$. Сделаем преобразование интеграла:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{g(t)}}g'(t)dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy; \quad y = g(t).$$

Вычислим интеграл

$$-\frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = -\frac{1}{2}(2y^{1/2} + C) = -y^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

сделав в конце обратную замену. □

Задача №1680

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} =?$$

Понятно, что подразумевается промежуток, где $x \neq -1; 0$.

Подсказка из задачника:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}).$$

Решение. Сделаем замену: $y = \sqrt{x} \Longrightarrow x = y^2$. Тогда $dy = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Получаем

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2dy}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

□

Задача №1697

$$\int \operatorname{tg} x dx = ?$$

Решение. Вспомним, что

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Вспомним соотношение между функциями: $(\cos x)' = -\sin x$. Если $y = \cos x$, то $dy = -\sin x dx$. Следовательно,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

□

Задача №1766

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx = ?$$

Решение. Применим формулу замены переменных в «обратную» сторону: подставим вместо x некоторое выражение. Действует «правило»: если вам что–то не нравится в интеграле, выберите это в качестве новой переменной. Пусть в нашем случае

$$y = \sqrt[3]{1-x}, \quad x = 1 - y^3, \quad dx = -3y^2 dy.$$

Тогда

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx = \int (1-y^3)^2 \cdot y \cdot (-3y^2) dy = -3 \int (1 - 2y^3 + y^6) y^3 dy =$$
$$= -3\left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^7}{7} + \frac{y^{10}}{10}\right) + C = -3\left(\frac{(\sqrt[3]{1-x})^4}{4} - \frac{2(\sqrt[3]{1-x})^7}{7} + \frac{(\sqrt[3]{1-x})^{10}}{10}\right) + C.$$

□

Задача №1776

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} dx = ?$$

Решение. Введем новую переменную:

$$y = \sqrt{1+e^x}.$$

Тогда

$$y^2 = 1 + e^x \Longrightarrow e^x = y^2 - 1 \Longrightarrow x = \ln(y^2 - 1).$$

Замечание 7. Вообще говоря, при введении новой переменной подразумевается не только преобразование подынтегральной функции, но и промежутка интегрирования.

Исходный интеграл был определен на всей $\mathbb{R}$. Но при замене $y = \sqrt{1+e^x}$ получаем, что $y > 1$ (т.е. на $(1, +\infty)$. На этом промежутке замена будет корректной. Найдем dx:

$$dx = \frac{2y}{y^2-1}dy.$$

Итак, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{2\cancel{y}}{\cancel{y}(y^2-1)}dy = \int \frac{2}{y^2-1}dy = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C, \quad y = \sqrt{1+e^x}.$$

□

Задача №1778

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}dx = ?$$

Решение. Если сделаем преобразование «напрямую», т.е.:

$$\sqrt{1-x^2} = y,$$

то от корня мы не избавимся:

$$y^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow 1 - y^2 = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{1-y^2}.$$

Исходное подынтегральное выражение определено при $-1 < x < 1$. Пусть тогда $x = \sin t$. Тогда

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t,$$

из которого легко извлекается корень: $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$, но так как мы сами выбираем значения t, учитывая, что $-1 < x < 1$, рассмотрим промежуток $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\sin t$ будет пробегать все значения $(-1; 1)$, а $\cos t > 0$. Итак,

$$dx = \cos t dt.$$

Подставим в исходный интеграл:

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t}dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t}dt = \operatorname{tg} t + C.$$

Вспомним формулу

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

□

Замечание 8. Если в подынтегральном выражении присутствует $\sqrt{1-x^2}$, то при подсчете интеграла могут помочь замены $x = \sin t$ или $x = \cos t$, так как они «убирают корень».

Если есть выражение $\sqrt{a^2 - x^2}$, то при подсчете интеграла могут помочь замены $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$.

Задача №1784

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = ?$$

Подсказка из учебника: подстановка

$$x - a = (b-a)\sin^2 t, \quad a < b.$$

Решение. Поймем, почему подсказка из задачника окажется полезной. Выражение $x - a$ у нас есть в интеграле, поэтому замену будет легко провести. Рассмотрим выражение $b - x$:

$$b - x = (b-a) - (x-a) = (b-a) - (b-a)\sin^2 t = (b-a)\cos^2 t.$$

Итак,

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{(b-a)\sin^2 t (b-a)\cos^2 t}.$$

Так как мы работаем на интервале $(a; b)$, то корень примет вид

$$(b-a)\sin t \cos t.$$

Поймем теперь, почему мы можем сделать такую замену? Если выберем следующие значения t: $t \in (0; \frac{\pi}{2})$. Тогда $\sin^2 t \in (0; 1)$. Следовательно, значения x, который равен

$$x = a + (b-a)\sin t,$$

будут все в промежутке от a до b, не включая концы, что нам подходит.

Найдем t:

$$t = \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$$

Найдем dx:

$$dx = (b-a) \cdot 2 \sin t \cos t dt.$$

Вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = \int \frac{(b-a) \cdot 2 \sin t \cos t}{(b-a)\sin t \cos t} dt = 2 \int dt =$$

$$= 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

□

Задача №1786

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = ?$$

Решение. В данном случае мы будем проводить замены с помощью гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Вспомним гиперболическое тождество, которое нам понадобится:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

и формулу

$$\operatorname{ch}(2t) = 2 \operatorname{ch}^2 - 1$$

Сделаем замену

$$x = a \operatorname{sh} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

Тогда

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t = a^2 \operatorname{ch}^2 t,$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t} = a \operatorname{ch} t.$$

Подставим в интеграл:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \int a \operatorname{ch} t a \operatorname{ch} t dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt.$$

Понизим степень с помощью формулы двойного аргумента:

$$a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int \operatorname{ch}(2t) + 1 dt = \frac{a^2}{2} (\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) + t) + C.$$

Сделаем обратную замену:

$$t = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{sh}(2t) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{x}{a} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Итак, ответ:

$$\frac{a^2}{2} (\frac{1}{2} 2 \frac{x}{a} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2} + \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1} \right)) + C.$$

□

Замечание 9. Если в подынтегральном выражении присутствует $\sqrt{x^2 - a^2}$, то поможет замена $x = a \operatorname{ch} t$.

Интегрирование по частям

Этот метод основывается на правиле Лейбница производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Тогда

$$\int u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) + C.$$

Кроме того, по свойству линейности интеграла

$$\int u'(t)v(t)dt + \int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) + C,$$

$$\boxed{\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt}.$$

Константа c исчезло из формулы в рамке, так как записано равенство двух множеств (интегралов).

Задача №1791

$$\int \ln x dx = ?$$

Решение. В качестве функции u' рассмотрим функцию–константу 1, в качестве функции v — $\ln x$. Тогда в качестве $u(x) = x$. Итак,

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c.$$

□

Замечание 10. Когда стоит применять интегрирование по частям?

1) Если есть обратная функция: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ и т.д. Если мы будем брать производные от таких функций, то они изменят свой тип: перестанут быть логарифмическими, тригонометрическими и т.д.

2) Присутствуют два разнородных множителя: полином и тригонометрическая функция и т.д.

Задача №1796

$$\int x^2 e^{-2x} dx = ?$$

Решение. Мы хотим «избавиться» от одного из множителей. От эспоненты избавиться нельзя, поэтому $v(x) = x^2$, $e^{-2x} = u'(x)$. Тогда

$$u(x) = \frac{-e^{-2x}}{2}.$$

Тогда по формуле

$$\int x^2 e^{-2x} = \frac{-x^2 e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} 2x dx.$$

Снова применим формулу: $u'(x) = e^{-2x}$, $v(x) = x$.

Получим

$$\frac{-x^2e^{-2x}}{2} + \frac{-x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = \frac{-x^2e^{-2x}}{2} + \frac{-x}{2}e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4} + C =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + C.$$

□

Задача №1828

$$\int e^{ax}\cos bx dx = ?, \quad a, b \neq 0.$$

Решение. Пусть $u'(x) = e^{ax}$, $v(x) = \cos bx$. Тогда

$$u(x) = \frac{1}{a}e^{ax}, \quad v'(x) = -b\sin bx.$$

Получаем

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

Пусть теперь $u'(x) = e^{ax}$, $v(x) = \sin bx$.

$$\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx\right).$$

Видим, что интегралы повторяются. Введем обозначение

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx.$$

Получаем некоторое соотношение

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I,$$

$$I + \frac{b^2}{a^2}I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx + C,$$

$$I(1 + \frac{b^2}{a^2}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx + C,$$
$$I = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}\sin bx\right)e^{ax} + C.$$

□

Семинар 3

3. Неопределенный интеграл: интегрирование рациональных функций

Задача №1790

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx = ?$$

Подсказка из задачника: замена $x + a = (b - a)\operatorname{sh}^2 t$.

Нам нужно, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. Следовательно, подынтегральная функция определена на промежутке $(-\infty; -a) \cup (-b; \infty)$.

Какому промежутку принадлежит t из предложенной замены? Можно проверить, что при $t \geq 0$ все значения x достигаются.

Решение. Имеем

$$x + b = x + a + (b - a) = (b - a)\operatorname{sh}^2 t + (b - a) = (b - a)(\operatorname{sh}^2 t + 1) = (b - a)\operatorname{ch}^2 t.$$

Делаем замену:

$$sqrt(b - a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t = (b - a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t.$$

$$dx = d(x + a) = 2(b - a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt.$$

Подставляем полученные выражения в интеграл

$$2\int (b - a)^2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt.$$

Вспомним формулу двойного угла

$$\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t.$$

Преобразуем подынтегральное выражение с помощью этой формулы

$$\frac{(b - a)^2}{2}\int \operatorname{sh}^2 2t dt.$$

Рассмотрим следующие формулы

$$\operatorname{ch} 4t = \frac{e^{4t} + e^{-4t}}{2},$$

$$\operatorname{sh} 2t = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2},$$

$$\operatorname{sh}^2 2t = \frac{1}{4}(e^{4t} + e^{4t} - 2),$$

$$\Longrightarrow \operatorname{ch} 4t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 t.$$

Следовательно, интеграл имеет вид

$$\frac{(b-a)^2}{4}\int \operatorname{ch} 4t - 1dt = \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(4t) - t\right) + C.$$

Сделаем обратную замену

$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{x+a}{b-a} \Longrightarrow t = \operatorname{sh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\right).$$

Кроме того, упростим полученное выражение:

$$\operatorname{sh}(4t) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t)\operatorname{ch}(2t) = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \operatorname{ch}(2t).$$

□

Случай I из таблицы

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}dx = ?$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a^2}\frac{dx}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a}\frac{d(x/a)}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + C.$$

□

Случай VII из таблицы

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = ?$$

Решение. Сделаем замену $x = a\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Мы рассмотрим такой отрезок, чтобы $\cos t \geq 0$.

Выполним преобразования:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2\cos^2 t,$$

$$dx = a\cos t dt.$$

Подставим полученные выражения в интеграл:

$$\int a^2\cos^2 t dt = a^2\int \frac{\cos 2t + 1}{2}dt = \frac{a^2}{2}(\frac{1}{2}\sin 2t + t) + C.$$

Сделаем обратную замену. Имеем

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Итак, ответ имеет вид

$$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin(\frac{x}{a}) + C.$$

□

Задача №1803

$$\int \arcsin x dx = ?$$

Решение. Добавим искусственно множитель в подынтегральной функции: $1 \cdot \arcsin x$. Обозначим $u'(x) = 1 \Longrightarrow u(x) = x$. Тогда $v(x) = \arcsin x$. Мы хотим избавиться от обратной функции: перебросим производную на $v(x)$ и получим выражение без обратной тригонометрической функции.

Имеем

$$\int 1 \cdot \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Возьмем теперь в качестве новой переменной $1 - x^2 = y$, потому что у этого выражения «удобная» производная: $1 - x^2 = -2x$.

$$\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C.$$

Подставляем в исходный интеграл, сделав обратную замену. Получим в ответе

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

□

Задача №1834

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = ?$$

Решение. В подынтегральном выражении представлены разнородные функции. Выполним преобразование

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Обозначим

$$v(x) = x;$$

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow u(x) = \operatorname{tg} x.$$

Тогда

$$\int x \frac{1}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx.$$

Интеграл от тангенса мы уже считали:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Получим

$$\int x \frac{1}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

□

Интегрирование рациональных функций

Почему интегрирование рациональных функций — важная задача для вычисления неопределенных интегралов? Дело в том, что не все интегралы «берутся».

Определение 4. *Элементарные функции* — некоторый набор начальных базовых функций: const, x, sin, cos, tg, ctg, $e^{\cdot}$, ln, arcsin, arctg ... и набор привычных операций: умножение, вычитание, сложение, деление и операция композиции ($\sin e^x$).

Когда мы говорили о производных, получалось, что производная элементарной функции тоже является элементарной функцией. То есть мы не выходили за пределы данного множества функций. Иными словами, оператор дифференцирования переводил пространство элементарных функций в его подмножество. Однако обратная операция, интегрирование, может вывести за функцию пределы множества элементарных — оказывается, существуют элементарные функции, интеграл от которых не выражается через элементарные функции. Такие интегралы называются «*неберущиеся*».

Например,

$$\int e^{-x^2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x},$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Однако есть «исключение». Есть класс функций, интеграл от которых мы всегда сможем посчитать. Это рациональные функции. Поэтому если путем замены переменных, интегрирования по частям и т. д. удалось свести подынтегральное выражение к рациональной функции, т. е. к отношению двух многочленов

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

то тогда такой интеграл посчитать удастся.

Итак, скажем несколько слов об интегрирование рациональных функций.

Рассмотрим многочлен и разрешим подставлять в него в том числе и комплексные числа: $P(z)$. Пусть $\deg P < n$. Тогда по известной теореме количество его корней $< n$. Рассмотрим n различных комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots z_n,$$

для которых построим вспомогательный многочлен

$$P_1(z) = \frac{(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_n)}.$$

Этот многочлен, как мы видим, имеет степень $n - 1$. Кроме того,

$$P(z_1) = 1, \quad P(z_i) = 0, \ \forall i = 2, \dots, n.$$

Аналогично можно построить многочлен P_2:

$$P_2(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\dots(z_2-z_n)},$$

$$P(z_2) = 1, \quad P(z_i) = 0, \ \forall i = 1, 3\dots, n.$$

Итак, строим такие многочлены $P_i(z)$, где $i = 1, \dots, n$. У каждого из этих многочленов $\deg P_i = n-1$. Они будут образовывать базис среди всех многочленов степени $\leq n-1$, т. е. в пространстве

$$\{P : \deg P < n\}.$$

Получается, что любой многочлен из этого пространства может быть представлен линейной комбинацией рассмотренных выше многочленов P_i. А именно,

$$P(z) = P(z_1)P_1(z) + P(z_2)P_2(z) + \dots + P(z_n)P_n(z). \tag{1}$$

Поймем, почему это действительно так. Подставляя последовательно значения

$$z_1, z_2, \dots z_n$$

в левую часть получим набор $P(z_1), P(z_2), \dots, P(z_n)$. Подставляя эти значения в левую часть получим набор

$$P(z_1)\cdot 1 + P(z_2)\cdot 0 + \dots + P(z_n)\cdot 0,$$
$$P(z_1)\cdot 0 + P(z_2)\cdot 1 + \dots + P(z_n)\cdot 0,$$
$$\dots$$
$$P(z_1)\cdot 0 + P(z_2)\cdot 0 + \dots + P(z_n)\cdot 1.$$

То есть значения слева и справа совпадают. Значит, разность левой и правой части равна нулю в n различных точках. Однако степень этого многочлена (этой разности) меньше $n \Longrightarrow$ по следствию из основной теоремы алгебры этот многочлен (эта разность) будет тождественно равна нулю. Следовательно, записанное разложение верно.

Формула разложения

$$\boxed{\widetilde{P} = P(z_1)P_1(z) + P(z_2)P_2(z) + \dots + P(z_n)P_n(z)}$$

называется *интерполяционный многочлен Лагранжа*. В качестве P можно брать любую функцию f. Тогда построенный «агрегат» $\widetilde{P}$ «предложит» многочлен, который в точках z_i будет принимать ровно те же самые значения, что и функция f: $f(z_j) = \widetilde{P}(z_j)$.

Теперь объясним, зачем мы вводили эти вспомогательные определения. Пусть $Q(z) = (z-z_1)\dots(z-z_n)$ и $\deg P < \deg Q = n$. Поделим равенство (1) на $Q(z)$:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_n)}\cdot\frac{1}{z-z_1} +$$
$$+ \frac{P(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\dots(z_2-z_n)}\cdot\frac{1}{z-z_2} + \dots$$

Итак, коэффициент при $\frac{1}{z-z_j}$ будет равен

$$\frac{P(z_j)}{(z_j-z_1)\dots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\dots(z_j-z_n)}.$$

Теперь обсудим, как нам представлять знаменатель. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, где

$$f(x) = g(x) + ih(x).$$

Тогда при $x \to x_0$ получаем предел

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + i\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = g'(x) + ih'(x).$$

Кроме того, все правила дифференцирования вещественнозначных функций переносятся на комплекснозначные.

Пусть

$$Q(x) = (x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n),$$

тогда

$$Q'(x) = (x-z_2)\dots(x-z_n) + (x-z_1)(x-z_3)\dots(x-z_n) + \dots$$

Утверждается, что

$$Q'(z_j) = (z_j-z_1)\dots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\dots(z_j-z_n).$$

Это легко проверить непосредственной подстановкой точек z_j в выражение $Q'(x)$.

Итак, мы научились раскладывать рациональное выражение на простейшие дроби, не решая систему уравнений, и получили в явном виде формулу для коэффициентов.

Итак, мы доказали следующее равенство

$$\frac{P(x)}{(x-z_1)\dots(x-z_n)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot\frac{1}{x-z_1} + \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}\cdot\frac{1}{x-z_2} + \dots + \frac{P(z_n)}{Q'(z_n)}\cdot\frac{1}{x-z_n}.$$

Задача №1866

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = ?$$

Решение. Во–первых, нужно проверить, что степень числителя меньше степени знаменателя. Действительно, степень числителя равна 1<2 (степени знаменателя).

В качестве $z_1 = 2$, $z_2 = -5$. Следовательно, при подстановке получим $P(z_1) = 2\cdot 2 + 3 = 7$, $P(z_2) = -2\cdot 5 + 3 = -7$. Кроме того,

$$Q'(x) = (x+5) + (x-2) = 2x+3.$$

По формуле имеем

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int\frac{7}{7}\frac{1}{x-2} + \frac{-7}{-7}\frac{1}{x+5}dx = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

□

Задача №1869

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = ?$$

Решение. Понизим степень числителя. Для этого вычтем и прибавим знаменатель к числителю. Получим

$$\frac{x^3+1-x^3+5x^2-6x+x^3-5x^2+6x}{x^3-5x^2+6x} = 1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3).$$

Производная знаменателя равна

$$3x^2-10x+6.$$

Обозначим через

$$P(x) = 5x^2-6x+1, \quad Q'(x) = 3x^2-10x+6.$$

Подставим точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$:

$$P(z_1) = 1, \quad Q'(z_1) = 6,$$

$$P(z_2) = 9, \quad Q'(z_2) = -2,$$
$$P(z_3) = 28, \quad Q'(z_3) = 3.$$

Таким образом, получили три коэффициента

$$\frac{1}{6}, \quad -\frac{9}{2}, \quad \frac{28}{3}.$$

Итак,

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{9}{2}\frac{dx}{x-2}+\frac{28}{3}\frac{dx}{x-3} =$$
$$= x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

□

Задача №1877

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = ?$$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на множители

$$\frac{1}{(x+1)(x+i)(x-i)}.$$

Тогда $P(x) = 1$,

$$Q(x) = (x+1)(x^2+1)$$

$$Q'(x) = x^2 + 1 + 2x(x+1) = 3x^2 + 2x + 1.$$

Подставим точки $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $z_3 = i$:

$$P(z_1) = 1, \quad Q'(z_1) = 2,$$

$$P(z_2) = 1, \quad Q'(z_2) = -2 - 2i,$$

$$P(z_3) = 1, \quad Q'(z_3) = -2 + 2i.$$

Таким образом, получили три коэффициента

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{-2-2i}, \quad \frac{1}{-2+2i}.$$

Итак,

$$\frac{1}{(x+1)(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{-2-2i} \cdot \frac{1}{x+i} + \frac{1}{-2+2i} \cdot \frac{1}{x-i}.$$

Вычислить в явном виде такой интеграл мы не можем, поэтому соберем два сопряженных слагаемых в одно.

$$\frac{(-2+2i)(x-i) + (-2-2i)(x+i)}{(x+i)(x-i)(-2-2i)(-2+2i)} = \frac{2(-2x+2)}{8(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Итак, получаем ответ

$$\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C.$$

Для сравнения проведем вычисления методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} =$$
$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx + C)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C)}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Получим систему

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 0 = B + C, \\ 1 = A + C, \end{cases} \implies \begin{cases} A = -B, \\ C = -B, \\ A = C = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Можно подвести итог: если корни комплексные, то лучше использовать второй метод. □

Семинар 4

4. Неопределенный интеграл: интегрирование рациональных функций

Как было сказано на прошлом семинаре, если функция имеет вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-z_1)\dots(x-z_m)}, \quad \deg P < n,$$

то не только можно разложить на простейшие дроби, но и вывести явный вид коэффициентов:

$$\frac{P(x)}{(x-z_1)\dots(x-z_m)} = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}\cdot\frac{1}{x-z_1}+\dots+\frac{P(z_n)}{Q'(z_n)}\cdot\frac{1}{x-z_n}.$$

Кроме того, возник вопрос, можно ли интегрировать функцию

$$\frac{1}{x-z_j},$$

если она принимает комплексные, а не действительные значения. Мы привыкли, что

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$

$$\int\frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|+C.$$

Тогда хотелось бы сказать, что

$$\int\frac{1}{x-ai}dx ?=? \ln|x-ai|+C.$$

Оказывается, что это не так. Конечно, мы можем придать смысл выражению $|x-ai|$, а именно,

$$|x-ai| = \sqrt{x^2+a^2}.$$

Однако

$$(\ln(\sqrt{x^2+a^2}))' = (\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2))' = \frac{x}{x^2+a^2} \neq \frac{1}{x-ai} = \frac{x+ai}{x^2+a^2}.$$

Откуда появляется «лишнее» слагаемое?

$$(\operatorname{arctg}\frac{x}{a})' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{x^2+a^2},$$

$$a^2 i(\operatorname{arctg}\frac{x}{a})' = \frac{ai}{x^2+a^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{1}{x-ai}dx = \ln|x-ai| + i\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Задача №1884

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = ?$$

Решение. У этого многочлена нет действительных корней. Напрашивается вывод о том, что на множители разложить не получится. Однако такой вывод ошибочен.

Рассмотрим формулу для суммы квадратов

$$a^2+b^2 = a^2+b^2+2ab-2ab = (a+b)^2-c^2 = (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab}),$$

где $c = 2ab \geq 0$. Пусть $a = x^2$, $b = 1$. Тогда

$$x^4+1 = (x^2+1+|x|\sqrt{2})(x^2+1-|x|\sqrt{2}).$$

Однако на самом деле в силу симметричности и коммутативности умножения модуль раскрывается однозначным образом:

$$(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2}).$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})} = \int \frac{Ax+B}{x^2+1+x\sqrt{2}} + \frac{Cx+D}{x^2+1-x\sqrt{2}}dx.$$

Приводим к общему знаменателю и составляем систему

$$(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1) = 1.$$

Получаем

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D-A\sqrt{2}+C\sqrt{2}=0, \\ A+C-B\sqrt{2}+D\sqrt{2}=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+C=0, \\ 1-A\sqrt{2}+C\sqrt{2}=0, \\ -B\sqrt{2}+D\sqrt{2}=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+C=0, \\ \sqrt{2}(C-A)=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}(D-B)=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C, \\ 2\sqrt{2}=-1 \Longrightarrow C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} B=D, \\ B=D=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Комментарий 2. Доказать, что число 4^p+p^4, где p — простое, является составным.

Итак, получились следующие интегралы

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx = I_1+I_2.$$

Что делать дальше? Легко будут считаться интегралы вида

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C,$$

где $f(x)=ax^2+bx+c$. Такого вида производные называются *логарифмическими*. Поэтому найдем

$$(x^2+x\sqrt{2}+1)'=2x+\sqrt{2}.$$

Выделим эту производную из числителя

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}=af'(x)+b=\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}.$$

Итак,

$$I_1=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Для подсчета второго интеграла нужно выделить полный квадрат

$$x^2+x\sqrt{2}+1=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}(x+\sqrt{2}/2))+C.$$

Итак,

$$I_1=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+C.$$

По симметричности, если первое подынтегральную функцию обозначить $T(x)$, то вторая будет равна $T(-x)$. Мы уже нашли $F'(x)=T(x)$. Тогда $(-F(-x))'=T(-x)$. Следовательно,

$$I_2=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(-\sqrt{2}x+1)+C.$$

$\square$

Задача №1868

$$\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2} =?$$

Решение. Степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. Поэтому сначала поделим числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l}
x^{10} & \quad x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
x^{10}+x^9-2x^8 & x^8-x^7+3x^6+\ldots \\ \cline{1-1}
\quad -x^9+2x^8 & \\
\quad -x^9-x^8+2x^7 & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x^8-2x^7 &
\end{array}$$

Другой способ: x^2+x-2 легко раскладывается на множители

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

Далее по схеме Горнера:

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Итак, вторая строка дает $(x^9+x^8+x^7+x^6+\ldots+1)(x-1)+1=x^{10}$.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-2	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85	171	-341

Итак,

$$x^{10}=1+(x-1)[(x+2)(x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171)-341].$$

Тогда

$$\frac{x^{10}}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}+ \\ +(x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171)-\frac{341}{x+2},$$

где

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

Далее, каждое слагаемое в отдельности легко проинтегрировать. $\square$

Метод Остроградского

Этот метод применяется тогда, когда у знаменателя есть кратные корни.

Пусть у нас есть подынтегральная рациональная функция

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Тогда в силу наличия кратных корней многочлен $Q(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$Q(x) = \prod_j (x-a_j)^{k_j} \prod_m (x^2+p_m x+q_m)^{l_m}.$$

Построим вспомогательные многочлены

$$Q_1(x) = \prod_j (x-a_j) \prod_m (x^2+p_m x+q_m),$$

$$Q_2(x) = \prod_j (x-a_j)^{k_j-1} \prod_m (x^2+p_m x+q_m)^{l_m-1},$$

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x).$$

Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,$$

$$\deg P_2 < \deg Q_2, \quad \deg P_1 < \deg Q_1.$$

Теорема 4 (Остроградский)**.** *Существуют многочлены такие многочлены P_1 и P_2 с*

$$\deg P_2 < \deg Q_2, \quad \deg P_1 < \deg Q_1,$$

что

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx.$$

Найдем производную от этого равенства:

$$\frac{\boxed{P(x)}}{\boxed{Q(x)}} = \frac{P_2'(x)\boxed{Q_2(x)} - P_2(x)\boxed{Q_2'(x)}}{\boxed{Q_2^2(x)}} + \frac{P_1(x)}{\boxed{Q_1(x)}},$$

где в рамку заключены известные многочлены.

Для того, чтобы составить удобное уравнение, умножим левую и правую части на $Q_1Q_2^2$:

$$\boxed{PQ_2 = \underline{P_2'}Q - \underline{P_2}Q_2'Q_1 + \underline{P_1}Q_2^2}. \tag{2}$$

Здесь подчеркнуты неизвестные коэффициенты. Оказывается, что из этого равенства их всегда можно однозначно восстановить.

Задача №1891

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = ?$$

Решение. В обозначениях теоремы 4 имеем

$$Q_1 = (x-1)(x+1)$$

$$Q_2 = (x-1)(x+1)^2$$

$$Q_2' = (x+1)^2 + 2(x-1)(x+1) = (x+1)(3x-1).$$

Тогда по теореме 4 существуют такие коэффициенты A, B, C, D, E, что

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Запишем уравнение (2) из рамки:

$$x(x-1)(x+1)^2 = (2Ax+B)(x-1)^2(x+1)^3 - \\ -(Ax^2+Bx+C)(x+1)^2(3x-1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)^2(x+1)^4.$$

Сократим на $x-1$:

$$x(x+1)^2 = (2Ax+B)(x-1)(x+1)^3 - (Ax^2+Bx+C)(x+1)^2(3x-1) + \\ +(Dx+E)(x-1)(x+1)^4.$$

Сократим на $(x+1)^2$:

$$x = (2Ax+B)(x-1)(x+1) - (Ax^2+Bx+C)(3x-1) + (Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

Найдем неизвестные коэффициенты методом подстановки значений. Пусть сначала $x=1$:

$$1 = 0 - 2(A+B+C) + 0 \Longrightarrow A+B+C = -\frac{1}{2}.$$

Пусть $x=-1$:

$$-1 = 4(A-B+C) \Longrightarrow A-B+C = -\frac{1}{4}.$$

Пусть $x=0$:

$$0 = -B+C-E \Longrightarrow C = B+E.$$

Посмотрим теперь на коэффициент перед четвертой степенью

$$0 = D.$$

Посмотрим на коэффициент перед третьей степенью

$$0 = 2A - 3A + E.$$

Получили систему из 4–х уравнений:

$$\begin{cases} A+B+C=-\frac{1}{2}, \\ A-B+C=-\frac{1}{4}, \\ C=B+E, \\ E=A. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$2B=-\frac{1}{4}\Longrightarrow B=-\frac{1}{8}$$

$$\Longrightarrow A+C=-\frac{3}{8}.$$

Используем четвертое уравнение в третьем. Получим

$$C-A=-\frac{1}{8}.$$

Итак, сложим два новых уравнения на A и C:

$$2C=-\frac{1}{2}\Longrightarrow C=-\frac{1}{4}.$$

$$\Longrightarrow A=C+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}=E.$$

Перепишем значение интеграла, используя полученные значения коэффициентов:

$$\frac{-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}}{(x-1)(x+1)^2}+\int\frac{-\frac{1}{8}}{(x-1)(x+1)}dx.$$

Подынтегральное выражение легко переписывается в следующем виде

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})\right).$$

Итак, окончательно получаем

$$\frac{-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}}{(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{16}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C.$$

□

Из теоремы Остроградского следует, что любая рациональная функция интегрируема. Первое слагаемое

$$\frac{P_2}{Q_2},$$

которое называется *алгебраической частью интеграла* I, интегрировать не надо, а вторая часть, которую называют *трансцендентной частью интеграла* I, интегрируется: получается сумма логарифмов и арктангенсов. Логарифм — если есть линейные множители в знаменателе Q_1, арктангенсы — если есть квадратичные множители.

Имеет смысл решить задачу на отыскание только алгебраической части, так как на бесконечности трансцендентная часть, состоящая из логарифмов и арктангенсов — это o–малое от алгебраической.

Задача №1892

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = ?$$

Решение. В данном случае

$$Q(x) = (x^3+1)^2.$$

Однако у x^3+1 нет кратных корней.

В курсе алгебры рассматривается теорема о том, что у производной многочлена кратность корня уменьшается на 1.

Утверждение 1. *Если a является корнем многочлена $f(x)$ кратности $r > 1$, то для производной $f'(x)$ это число является корнем кратности $r-1$.*

Как понять по произвольному многочлену, что у него есть кратные корни? Надо посмотреть, есть ли у многочлена и у его производной общие корни. Очевидно, что у системы

$$\begin{cases} x^3+1=0 \\ 3x^2=0 \end{cases}$$

нет решений. Тогда

$$Q_1(x) = Q_2(x) = x^3+1.$$

По теореме получаем

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1} dx.$$

Запишем уравнение

$$1(x^3+1) = (2Ax+B)(x^3+1)^2 - \\ -(Ax^2+Bx+C)\cdot 3x^2 \cdot (x^3+1) + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1)^2.$$

Сократим на x^3+1:

$$1 = (2Ax+B)(x^3+1) - (Ax^2+Bx+C)\cdot 3x^2 + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

Подставим такое комплексное число z, что $z^3+1=0$. Могут подойти

$$z_1 = -1, \quad z_2 = e^{\pi i/3}, \quad z_3 = e^{-\pi i/3}.$$

Тогда получим

$$1 = -(Az^2+Bz+C)\cdot 3z^2 = -3Az^4 - 3Bz^3 - 3Cz^2.$$

Условие $z^3 = -1$ дает $z^4 = -z$. Тогда

$$1 = 3Az + 3B - 3Cz^2.$$

Получили многочлен степени ≥ 2, который в трех разных точках принимает одно и то же значение. Следовательно, этот многочлен тождественно равен 1. Тогда

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, алгебраическая часть равна

$$\frac{\frac{1}{3}x}{x^3+1} = \frac{x}{3(x^3+1)}.$$

□

Семинар 5

5. Интегрирование рациональных функций

Задача №1898

Найти алгебраическую часть интеграла

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx.$$

Решение. Напомним формулу Остроградского

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx,$$

$$\deg P_2 < \deg Q_2, \quad \deg P_1 < \deg Q_1,$$

где Q_1 и Q_2 определяются по знаменателю подынтегральной функции.

Имеем:

$$Q(x) = (x^4+x^2+1)^2.$$

Так как $Q(x)$ представляет собой квадрат некоторого другого многочлена, то все корни у него четной кратности и находятся из уравнения $x^4+x^2+1=0$. Действительных корней нет, корни только комплексные. Имеет место равенство

$$(z^2-1)(z^4+z^2+1) = z^6-1.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы получить корни нашего многочлена, нужно взять множество корней многочлена z^6-1 и убрать из него корни многочлена z^2-1. Корни многочлена z^6-1 имеют вид $e^{2\pi i\cdot k/6}$, где $k=0,1,2,3,4,5$. Выбрасывая корни многочлена z^2-1 из этого множества, получим значения $e^{2\pi i\cdot k/6}$ при $k=1,2,4,5$:

$$e^{\frac{\pi i}{3}},\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{\frac{4\pi i}{3}},\ e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$

Другой способ: если бы у многочлена x^4+x^2+1 были бы кратные корни, то у системы

$$\begin{cases} f(x) = x^4+x^2+1 = 0,\\ f'(x) = 4x^3+2x = 0 \end{cases}$$

было бы решение, что в данном случае не так.

Найдем теперь Q_1 и Q_2. Напомним общую формулы:

$$Q(z) = (z-z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m},$$

$$Q_2(z) = (z-z_1)^{k_1-1}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m-1},$$

$$Q_1(z) = (z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_m).$$

В нашей ситуации $k_1=\ldots=k_m=2$. Следовательно, в данной ситуации

$$Q_1(x) = Q_2(x) = x^2+x^2+1.$$

Следовательно, $\deg P_1, P_2 \leq 3$, так как $\deg Q_1, Q_2 = 4$.

Теперь продифференцируем левую и правую части в формуле Остроградского:

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{P_2'(x^4+x^2+1) - P_2(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2} + \frac{P_1(x)}{x^4+x^2+1}. \tag{3}$$

Найдем многочлен P_2, что позволит нам найти алгебраическую часть. Он имеет вид

$$P_2(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Умножим левую и правую часть выражения (3) на $(x^4+x^2+1)^2$:

$$x^2+1 = (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1) - (Ax^3+Bx^2+Cx+D)(4x^3+2x) + P_1(x)(x^4+x^2+1).$$

Будем подставлять такие значения x, чтобы последнее слагаемое обращалось в ноль (а именно, множитель x^4+x^2+1). Мы это будем делать для того, чтобы получить уравнения на коэффициенты, минуя многочлен P_1. В этом случае пропадет и первое слагаемое. Итак, подставляем числа, которые удовлетворяют равенству

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Тогда

$$z^4 = -z^2 - 1, \quad z^5 = -z^3 - z, \quad z^6 = -z^4 - z^2 = 1.$$

Итак, подставляем указанные выше значения:

$$\begin{gathered}
z^2+1 = -(Az^3+Bz^2+Cz+D)(4z^3+2z) = \\
= -(4Az^6 + 4Bz^5 + 4Cz^4 + 4Dz^3 + 2Az^4 + 2Bz^3 + 2Cz^2 + 2Dz) = \\
= -(4A + 4B(-z^3-z) + 4C(-z^2-1) + 4Dz^3 + 2A(-z^2-1) + 2Bz^3 + 2Cz^2 + 2Dz).
\end{gathered}$$

$$z^2+1 = -(z^3(-4B+4D+2B) + z^2(-4C-2A+2C) + z(-4B+2D) + 4A - 4C - 2A)$$

Слева написан многочлен второй степени, справа многочлен степени не выше третьей. Они совпадают в четырех точках, а значит, они совпадают всюду. Следовательно, коэффициенты у них равны. Тогда получим систему

$$\begin{cases} -4B+4D+2B = 0, \\ 4C+2A-2C = 1, \\ -4B+2D = 0, \\ -4A+4C+2A = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 2D = 0, \\ 2C+2A = 1, \\ D = 2B = 0, \\ -2A+4C = 1. \end{cases}$$

$$C = \frac{1}{3}, \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = D = 0.$$

Итак, алгебраическая часть выглядит следующим образом:

$$\frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x}{x^4+x^2+1}.$$

Кроме того, то, что коэффициенты B и D равны нулю, можно понять из свойства четности: если f, как в нашем случае, четная, то f' нечетная. И наоборот. $\square$

Задача №1929

Вычислить интеграл

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = ?$$

Решение. Хотим свести подсчет этого интеграла к интегрированию рациональной функции. Для этого нам нужно избавиться от корня. Заметим, что оба корня в данной подынтегральной функции являются степенями относительно корня шестой степени. Сделаем замену

$$t = \sqrt[6]{x+1} \iff x = t^6 - 1 \iff dx = 6t^5 dt.$$

Кроме того,

$$\sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3, \quad \sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2.$$

Исходный интеграл примет вид

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}dx = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5 dt.$$

Далее используем стандартный метод:

$$\int \frac{6t^5 - 6t^8}{1+t^2}dt = -6\int \frac{t^8-t^5}{1+t^2}dt.$$

С помощью деления в столбик можно установить, что

$$t^8 - t^5 = (t^2+1)(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1) + (-t+1).$$

Тогда получим

$$-6\int t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 dt - 6\int \frac{-t+1}{1+t^2}dt = (-6)\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) +$$
$$+ 6\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 6\operatorname{arctg} t + C, \quad t = \sqrt[6]{x+1}.$$

где

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C.$$

□

Задача №1931

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = ?$$

Решение. Домножим подынтегральную функцию на сопряженный:

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}=\frac{1}{2}\left(x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1\right).$$

Итак,

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\frac{1}{2}\int 2xdx-\int\sqrt{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{x^2-1}dx.$$

Воспользуемся таблицей интегралов (пункт VIII):

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

Получаем ответ:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

□

Случай рационального выражения с квадратным корнем

Пусть P_n — некоторый многочлен степени n, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тогда верна формула

$$\int\frac{P_n}{y}dx=Q_{n-1}(x)\cdot y+\lambda\cdot\int\frac{dx}{y},\tag{4}$$

где λ — некоторое число из $\mathbb{R}$, Q_{n-1} — многочлен степени $\deg Q_{n-1}\leq n-1$.

Задача №1946

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=?$$

Решение. Согласно формуле имеем

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=(Ax^2+Bx+C)y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

где $y=\sqrt{x^2+4x+3}$.

Продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}=(2Ax+B)y+(Ax^2+Bx+C)\cdot\frac{x+2}{y}+\frac{\lambda}{y},$$

так как

$$y'=\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{y}.$$

Умножим левую и правую часть на y:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C) \cdot (x + 2) + \lambda.$$

Подставим $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$. Посмотрим на коэффициенты перед x^3:

$$1 = 3A \Longrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Подставим -1:

$$-1 - 6 - 11 - 6 = -24 = (A - B + C) + \lambda.$$

Подставим -2:

$$-8 - 24 - 22 - 6 = -60 = (-4A + B) \cdot (-1) + \lambda.$$

Подставим -3:

$$-27 - 54 - 33 - 9 = -123 = (9A - 3B + C) \cdot (-1) + \lambda.$$

Итак, получили систему

$$\begin{cases} A - B + C + \lambda = -24, \\ 4A - B + \lambda = -60. \end{cases} \Longrightarrow B = 60 + \frac{4}{3} + \lambda$$

Подставим выражение для B в первое уравнение:

$$\frac{1}{3} - 60 - \frac{4}{3} + C = -24 \Longrightarrow C = 61 - 24 = 37.$$

Тогда

$$3(60 + \frac{4}{3} + \lambda) + 74 + \lambda = -6 \Longrightarrow 4\lambda = -6 - 180 - 4 - 74 \Longrightarrow \lambda = -66.$$

Тогда

$$B = 60 + \frac{4}{3} - 66 = -\frac{14}{3}.$$

Итак, выражение примет вид:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37)y - 66 \int \frac{dx}{y}.$$

Посчитаем последний интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}}.$$

Сделаем замену $x + 2 = \operatorname{ch} t$. Тогда

$$(x+2)^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t, \quad dx = \operatorname{sh} t dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh} t} = \int 1 dt = t + C = \operatorname{ch}^{-1}(x + 2) + C,$$

где

$$\operatorname{ch}^{-1}(x+2) = \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}).$$

□

Задача №1948

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = ?$$

Решение. Сделаем замену

$$t = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt,$$

$$x^2-1 = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2}, \quad \sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Получим

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int t^4 \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int \frac{t^3dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Теперь воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$\int \frac{-t^3dt}{\sqrt{1-t^2}} = (At^2+Bt+C)y + \lambda \int \frac{dx}{y}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{-t^3}{y} = (2At+B)y + (At^2+Bt+C)\frac{-t}{y} + \frac{\lambda}{y},$$

где

$$y' = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-t}{y}.$$

Домножим полученное выражение на y:

$$-t^3 = (2At+B)(1-t^2) - t(At^2+Bt+C) + \lambda.$$

Запишем коэффициенты по степеням:

$$t^3: \quad -1 = -2A - A \Longrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

$$t^2: \quad 0 = -B - B \Longrightarrow B = 0.$$

$$t: \quad 0 = 2A - C \Longrightarrow C = 2A = \frac{2}{3}.$$

$$1: \quad 0 = B + \lambda \Longrightarrow \lambda = -B = 0.$$

Итак, ответ имеет вид

$$\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-t^2} + C.$$

□

Задача №1951

Когда интеграл

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

представляет собой только алгебраическую функцию (т.е. когда в формуле (4) $\lambda = 0$)?

Решение. В задаче спрашивается, когда данный интеграл имеет следующий вид

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = (Ax+B)y + C.$$

Продифференцируем и умножим на y:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = Ay^2 + (Ax+B)(ax + \frac{b}{2}),$$

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = A(ax^2+bx+c) + (Ax+B)(ax + \frac{b}{2}).$$

Иными словами, нужно, чтобы существовали такие константы A и B, чтобы указанное выше равенство было выполнено. Посмотрим на коэффициенты при степенях:

$$x^2: \quad a_1 = 2aA \Longrightarrow A = \frac{a_1}{2a}.$$

$$x: \quad c_1 = Ac + B\frac{b}{2} \Longrightarrow B = (c_1 - \frac{a_1}{2a}c)\frac{2}{b}.$$

$$x: \quad b_1 = Ab + Ba + A\frac{b}{2} = \frac{3}{2}b \cdot \frac{a_1}{2a} + \frac{a}{b}(2c_1 - \frac{a_1c}{a}).$$

Таким образом, получили нужные условия на коэффициенты. □

Семинар 6

6. Подстановки Эйлера и интегрирование тригонометрических функций

Задача №1935

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =?$$

Решение. Сделаем замену:

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \quad \sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t}$$

$$x=\frac{t^4+1-2t^2}{4t^2}, \quad dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt.$$

Тогда получим

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{t^4-1}{2t^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2-1}{2t}+\frac{t^2+1}{2t}}dt = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt = \frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C.$$

□

Задача №1949

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} =?$$

Решение. Сделаем замену:

$$x-1=\frac{1}{t}, \quad (x-1)^3=\frac{1}{t^3},$$

$$x=\frac{t+1}{t}, \quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+3x+1}=\sqrt{\frac{(t+1)^2}{t^2}+3\frac{t+1}{t}+1}.$$

Получим

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = \int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt.$$

Напомним формулу

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(ax+\frac{b}{2}) + \lambda,$$

где $P = t^2$, $Q_{n-1} = At+B$, $y = \sqrt{5t^2+5t+1}$, $Q'_{n-1} = A$. По методу неопределенных коэффициентов получим значения

$$\begin{cases} A = \frac{1}{10}, \\ B = -\frac{3}{20}, \\ \lambda = \frac{11}{40}. \end{cases}$$

Получим ответ

$$(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20})\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{11}{40}\int \frac{1}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt,$$

где последний интеграл считается по таблице. □

Задача №1980

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx.$$

Доказать, что интеграл такого вида всегда можно свести к интегрированию рациональных функций.

Замечание: подынтегральная функция — это рациональное выражение от указанных в скобках функций. Их можно складывать, вычитать, умножать и делить, а результат и будет обозначен за R.

Схема решения. В задачах №1795 и №1790 рассказывалось, как сделать замены так, чтобы корни $\sqrt{x+a}$, $\sqrt{x+b}$ в первом случае и $\sqrt{x-a}$, $\sqrt{b-x}$ во втором одновременно исчезли при тригонометрических или гиперболических подстановках. Если у a и c знаки одинаковые, то следует использовать гиперболическую замену, если разные, то тригонометрическую. В замене для dx корни также будут отсутствовать.

Сведение тригонометрических и гиперболических функций к рациональным выражениям мы разберем далее. □

Подстановки Эйлера

Рассмотрим подынтегральную функцию $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тогда возможны следующие замены:

1) если $a > 0$, то $\sqrt{\ldots} = \pm x\sqrt{a} + z$;

2) если $c > 0$, то $\sqrt{\ldots} = xz \pm \sqrt{c}$;

3) если есть два действительных корня: $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$.

Задача №1966

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = ?$$

Решение. Рассмотрим первый случай подстановки Эйлера:

Если $a>0$, то $\sqrt{x^2+x+1} = \pm x + z$; тогда имеем

$$\cancel{x}^2 + x + 1 = \cancel{x}^2 \pm 2zx + z^2.$$

$$x(1 \mp 2z) = z^2 - 1 \Longrightarrow x = \frac{z^2-1}{1 \mp 2z}.$$

$$dx = \frac{2z(1\mp 2z) - (z^2-1)\cdot(\mp 2)}{(1\mp 2z)^2} = \frac{2z \mp 2z^2 \mp 2}{(1\mp 2z)^2}dz.$$

Тогда получим интеграл (выбираем нижний знак)

$$\int \frac{1}{z} \cdot \frac{2z^2+2z+2}{(2z+1)^2}dz.$$

Далее интегрируем стандартным способом. □

Задача №1994

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = ?$$

Решение. Основная идея: понизить степени с помощью формул двойного угла.

Вспомним формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Получим

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$\frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx.$$

Аналогичным способом считаем первый интеграл:

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\int 1 - \cos 4x dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$$

Второй интеграл: сделаем замену $y = \sin 2x$, $dy = 2\cos 2x dx$. Тогда

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int y^2 dy = \frac{y^3}{48} + C = \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Ответ:

$$\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

□

Задача №2011

$$\int \cos^n x dx = ?, \quad n > 2$$

Решение. Обозначим $K_n = \int \cos^n x dx$, где $n > 2$. Получим

$$K_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x dx = \int \cos^{n-1} x d\sin x =$$
$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx =$$
$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \cdot (1-\cos^2 x) dx.$$

Получили соотношения на множества функций

$$K_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)(K_{n-2} - K_n).$$

$$\boxed{K_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}}.$$

Посчитаем теперь

$$\int \cos^8 x dx = K_8 = \frac{1}{8}\cos^7 x \cdot \sin x +$$
$$+ \frac{7}{8}\left(\frac{1}{6}\cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x \cdot \sin x + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\right)\right) + C,$$

так как

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

□

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим подынтегральную функцию вида $R(\sin x, \cos x)$, которая получается из $\sin x$ и $\cos x$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления. Как интегрировать такого рода функции?

1) С помощью *универсальной тригонометрической подстановки*: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Однако ее желательно избегать, так как скорее всего степень выражения будет удваиваться.

2) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ или $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то помогают замены $t = \cos x$ и $t = \sin x$ соответственно.

3) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то помогают замены $t = \operatorname{tg} x$ и $t = \operatorname{ctg} x$.

Задача №2026

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = ?$$

Решение. В нашей ситуации подходит случай $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Тогда сделаем замену

$$t = \cos x, \quad dt = -sinxdx.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} dx = -\int \frac{-\sin x dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = -\int \frac{-\sin x dx}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)} =$$
$$= -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)(t+2)}.$$

Используем формулу Остроградского

$$\int \frac{dt}{(t+1)(t-1)(t+2)} = \frac{1}{(1+1)(1+2)}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(-1-1)(-1+2)}\frac{1}{t+1} +$$
$$+ \frac{1}{(-2-1)(-2+1)}\frac{1}{t+2} = \frac{1}{6}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{t+2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dt}{(t+1)(t-1)(t+2)} = \frac{1}{6}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\ln|t+2| + C,$$

где $t = \cos x$. □

Задача №2028

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = ?$$

Решение. Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Вспомним формулы половинного угла

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

так как

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t.$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Применим все вышеизложенное к интегралу:

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2tdt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{(1+t^2)+\varepsilon(1-t^2)} =$$
$$= 2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} =$$
$$= \frac{2}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right).$$

□

Задача №2035

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} =?$$

Решение. Легко видеть, что наша подынтегральная функция удовлетворяет равенству $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Поэтому используем замену $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin^2 x+\cos^2 x} = \star.$$

Сделаем замены

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Получаем

$$\star = \int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}} = \int\frac{t^2+1}{t^4+1}dt.$$

Разложим на множители знаменатель

$$t^4+2t^2+1-2t^2 = (t^2+1+\sqrt{2}t)(t^2+1-\sqrt{2}t).$$

Тогда

$$\int\frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \int\frac{At+B}{t^2+1+\sqrt{2}t}+\frac{Ct+D}{t^2+1-\sqrt{2}t}dt.$$

При замене $t \longrightarrow -t$ можно заметить, что $A=-C$, $B=D$. Преобразуем выражение, домножив на (t^4+1):

$$t^2+1 = (At+B)(t^2+1-\sqrt{2}t)+(Ct+D)(t^2+1+\sqrt{2}t).$$

Из коэффициента при свободном слагаемом:

$$B + D = 1 \Longrightarrow B = D = \frac{1}{2}.$$

Из коэффициента при t^2:

$$B - A\sqrt{2} + D + C\sqrt{2} = 1 \Longrightarrow A = C = -C = 0.$$

Итак, получили

$$\int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1+\sqrt{2}t} + \frac{1}{t^2+1-\sqrt{2}t}dt.$$

Далее нужно выделить полный квадрат и получить табличный интеграл:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg}(1-t\sqrt{2})\Big) + C.$$

□

Задача №2123

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x} = ?$$

Решение. Рассмотрим формулы

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}, \quad 1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}.$$

$$\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = 2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ch} x = 2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1-t^2} - 1 = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}(\operatorname{th}^2\frac{x}{2} - 1)dx,$$

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Сделаем замену в интеграле

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2} + 2\frac{1+t^2}{1-t^2}} \cdot \frac{2}{1-t^2}dt = \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}) + C.$$

□

Задача №2042

Доказать, что существуют такие коэффициенты A и B, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |f(x)| + C.$$

Решение. Обозначим через $f(x) = a \sin x + b \cos x$. Рассмотрим

$$f'(x) = -b \sin x + a \cos x.$$

Получается, что $f(x)$ и $f'(x)$ можно воспринимать как элементы одного и того же векторного пространства ($\sin x$ и $\cos x$ — векторы, их линейная комбинация — линейное двумерное пространство)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0,$$

если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Значит, вектор сверху можно выразить через $f(x)$ и $f'(x)$:

$$k \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int l dx = k \ln |f(x)| + lx + C.$$

Что и требовалось. $\square$

Семинар 7

7. Интегрирование трансцендентных функций

Задача №2066

$$\int P(x)e^{ax}dx =?$$

Решение. Заметим, что $e^{ax} = \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'$. Проинтегрируем по частям

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\frac{P(x)}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx.$$

По индукции можно доказать формулу

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \ldots + \frac{(-1)^n P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} + C.$$

□

Рассмотрим $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Имеют место формулы:

$$F(x) = f(x) + ig(x),$$

$$F'(x) = f'(x) + ig'(x),$$

$$\int F(x)dx = \int f(x)dx + i\int g(x)dx.$$

Рассмотрим пример:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$(e^{(\alpha+i\beta)x})' = (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

Задача №2067

$$\int P(x)\cos(ax)dx =?$$

Решение. Сначала проинтегрируем по частям:

$$\int P(x)\cos(ax)dx = \sin(ax)\cdot\frac{P(x)}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)\sin axdx = *.$$

Заметим, что $\sin ax = \left(\frac{-\cos ax}{a}\right)'$. Проинтегрируем по частям снова:

$$* = \sin(ax)\cdot\frac{P(x)}{a} + \cos(ax)\frac{P'(x)}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos(ax)dx.$$

Формула, которая получается в итоге (здесь $k = [n/2]$, $m = [(n-1)/2]$):

$$\frac{\sin(ax)}{a}(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)(x)}}{a^4} - \ldots + (-1)^k \frac{P^{(2k)}(x)}{a^{2k}}) +$$
$$+ \frac{\cos(ax)}{a}(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)(x)}}{a^4} - \ldots + (-1)^m \frac{P^{(2m+1)}(x)}{a^{2m}}) + C.$$

□

Задача №2068

$$\int x^3 e^{3x} dx = ?$$

Решение. Применим формулу из задачи выше:

$$\int x^3 e^{3x} dx = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{3^2} + \frac{6x}{3^3} - \frac{6}{3^4}\right) + c.$$

□

Задача №2076

$$\int x e^x \sin x dx = ?$$

Решение.

$$\int x e^x \sin x dx = \mathrm{Im}(\int x e^{(1+i)x} dx) = \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\left(\frac{x}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\right) + C\right) =$$
$$= e^x \cos x \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + e^x \frac{x}{2} \sin x + C.$$

□

Напоминание про комплексные числа

Комплексное число имеет вид $z = x + iy$, где $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$,

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Для любого действительного x верно

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Для комплексных числе верно аналогичное

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Кроме того, если рассмотреть ряды

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

и сложить их с соответствующими коэффициентами, то получим ряд для экспоненты.

Задача №2073

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = ?$$

Решение. Сделаем замену

$$t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow dx = 2tdt.$$

$$\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t^5 e^t dt = 2e^t(t^5 - 5t^4 + 20t^3 - 60t^2 + 120t - 120) + C.$$

□

Задача №2082

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = ?$$

Решение. Сделаем замену

$$t = e^x \Longrightarrow x = \ln t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}.$$

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{dt}{t(1+t^2} = \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} dt$$

$$A(t+1)^2 + B(t^2+t) + Ct.$$

Коэффициенты:

$$t^2: \quad A + B = 0,$$

$$t: \quad 2A + B + C = 0,$$

$$t^0: \quad A = 1,$$

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1.$$

Ответ:

$$\ln t - \ln(t+1) - \frac{1}{t+1} + C.$$

□

Задача №2087

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = ?$$

Решение. Сделаем замену

$$t = \sqrt{e^x - 1} \Longrightarrow t^2 = e^x - 1 \Longrightarrow x = \ln(t^2 + 1) \Longrightarrow dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{2t}{t(t^2 + 1)} dt = 2 \operatorname{arctg} t + C.$$

□

Задача №2091

$$\int R(x) e^{ax} dx = ?$$

Решение. Пусть

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m}} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}}.$$

$$\int \frac{e^{ax}}{(x - b)^k} dx = \frac{1}{1 - k} \frac{e^{ax}}{(x - b)^{k-1}} - \frac{1}{k - 1} \int \frac{e^{ax}}{(x - b)^{k-1}} dx.$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x - b} dx = \int \frac{e^{a(t+b)}}{t} dt = e^{ab} \int \frac{a^{at}}{t} dt = e^{ab} \int \frac{y}{\frac{1}{a} \ln y} \frac{1}{ay} dy = e^{ab} \int \frac{dy}{\ln y},$$

где

$$y = e^{at} \Longrightarrow t = \frac{1}{a} \ln y \Longrightarrow dt = \frac{1}{ay} dy$$

□

Задача №2098

$$\int \ln^n x dx = ?$$

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$\int \ln^n x dx = \int 1 \cdot \ln^n x dx = x \ln^n x - \int x \cdot n \ln^{n-1} x \frac{1}{x} dx,$$

$$I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$$

$$I_n = x \ln^n x - n(x \cdot n \ln^{n-1} x - (n - 1)(x \ln^{n-2} x - \dots$$

$$x \ln^n x - nx \ln^{n-1} x + n(n - 1) x \ln^{n-2} x - \dots + (-1)^n n! x + C.$$

□

Задача №2110

$$\int \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx?$$

Решение.

$$\int \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)dx = x\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) - \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = \int 2 - \frac{2}{1+t^2}dt = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C.$$

□

Задача №2113

$$\int x\operatorname{arctg} x\ln(1+x^2)dx = ?$$

Решение. Посчитаем сначала следующий интеграл:

$$\int x\operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Получаем

$$(\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\int((x^2+1)\operatorname{arctg} x - x)\frac{2x}{1+x^2}dx -$$
$$- \int x\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

□

Задача №2165

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = ?$$

Решение. Вспомним формулы

$$1+\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1.$$

Проинтегрируем по частям

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x - \int \frac{1+\sin x+\cos x}{(1+\cos x)^2}e^x dx =$$
$$= \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x - \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx + \int \frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}e^x dx$$

$$\int \frac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2}e^x dx = -\int \frac{tdt}{(1+t)^2} = \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\ln(1+t) - \frac{1}{1+t} + C.$$

□

Семинар 8

8. Определенный интеграл Римана

Задача №2003

$$\int \left(\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = ?$$

Решение. Имеем

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2 e^x = \left(1 = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x.$$

$$\int \left(\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = e^x - 4\int \frac{e^x}{x}dx + 4\int \frac{e^x}{x^2}dx = e^x - 4\frac{e^x}{x} + C.$$

Были использовано равенство

$$-\int \frac{e^x}{x^2}dx = -\left(\frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x}dx\right).$$

□

Задача №2077

$$\int x^2 e^x \cos x dx = ?$$

Решение. Имеем

$$\int x^2 e^x \cos x dx = \mathrm{Re} \int x^2 \cdot e^{(1+i)x} dx = \mathrm{Re}\big(e^{(1+i)x}(\frac{1}{2}x^2(1-i) - \frac{2}{4}x(1-i)^2 + \frac{2}{8}(1-i)^3)\big) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^x(\cos x + i\sin x)\big(\frac{1}{2}x^2(1-i) + xi - \frac{1}{2}(1+i)\big)\right) =$$

$$= e^x \cos x \cdot \frac{1}{2}x^2 + e^x \sin x \cdot \frac{1}{2}x^2 - e^x \sin x \cdot x - \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C.$$

□

Задача №2165

$$\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = ?$$

Решение. Имеем

$$\int e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int e^x \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}dx = \star.$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2} =$$
$$= \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} + \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)'.$$

$$\star = e^x \cdot \frac{1+\sin x}{1+\cos x} - \int \left(e^x \frac{1}{1+\cos x}\right)' dx = e^x \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} + C.$$

□

Определенный интеграл Римана

Пусть у нас есть отрезок $[a, b]$ и непрерывная функция на нем. Хотим определить площадь под графиком функции — это площадь между графиком и осью ox. Поговорим о подходе Римана, который он предложил в середине XIX века.

Зададим разбиение T: «порежем на части» наш отрезок и получим набор точек

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n = b.$$

Мы задали разбиение, чтобы подменить сложную фигуру на более простую, состоящую из конечного числа прямоугольников. Какую ширину прямоугольника выбрать? Выберем точку в отрезке разбиения и по ней построим ширину. Так сделаем в каждом отрезке — будет набор отмеченных точек $\{\xi\}$. Получили, как и хотели, конечный набор прямоугольников

$$\sigma(f, T, \{\xi\}) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Определение 5. База $\mathcal{B}$:

1) Если $B \in \mathcal{B}$, то $B \neq \varnothing$.

2) Если $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, то существует $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Обозначим $\lambda(T)$ — диаметр разбиения:

$$\lambda(T) = \max_j |x_j - x_{j-1}|.$$

В данном случае базой будет набор

$$B_\varepsilon = \{T : \lambda(T) < \varepsilon\},$$

и получим

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma = I.$$

Определение 6. Верхняя сумма Дарбу

$$\underline{\underline{S}}(f,T) = \sum_j \sup_{\Delta_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}),$$

$$\overline{\overline{S}}(f,T) = \sum_j \inf_{\Delta_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Разность сумм Дарбу называют омега-суммой:

$$\underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{S}}(f,T) = \Omega(T).$$

Для интеграла верно

$$\inf \underline{\underline{S}}(f,T) = \sup \overline{\overline{S}}(f,T).$$

Теорема 5 (Критерий Дарбу)**.** *Интеграл существует, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое T, что $\Omega(T) < \varepsilon$.*

Если функция не ограничена, то она не интегрируема.

Задача №2197

Найти определенный интеграл

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\sup = 1, \quad \inf = 0,$$

следовательно,

$$\Omega = 1,$$

и критерий Дарбу не выполнен. □

Задача №2182 а)

Найти определенный интеграл

$$f(x) = x^3, \quad [-2;3]$$

при разбиении на n равных частей.

Решение. Имеем $\lambda(T) = \frac{5}{n}$.

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -2 + \frac{5}{n}, \ldots, x_j = -2 + \frac{5}{n}j, \ldots, x_n = 3.$$

$$\underline{S}(T) = f(x_1)\frac{5}{n} + f(x_2)\frac{5}{n} + \ldots + f(x_n)\frac{5}{n},$$

$$\overline{S}(T) = f(x_0)\frac{5}{n} + f(x_1)\frac{5}{n} + \ldots + f(x_{n-1})\frac{5}{n}.$$

$$\Omega(T) = (f(b) - f(a))\frac{5}{n} \longrightarrow 0.$$

$$\frac{5}{n}((-2)^3 + (-2+\frac{5}{n})^3 + \ldots + (-2+\frac{5(n-1)}{n})^3)$$

$$\frac{5}{n}((-2)^3 + 3(-2)^2(\frac{5}{n} + 2\cdot\frac{5}{n} + \ldots + (n-1)\frac{5}{n}) + 3\cdot(-2)((\frac{5}{n})^2 + \ldots + (\frac{n-1}{n}5)^2) + \ldots)$$

□

Задача №2193.1

Доказать, что

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underline{\underline{O}}(),$$

где f — монотонная на $[0;1]$ функция.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что функция возрастающая. Порежем отрезок $[0;1]$ на n равных частей. Легко заметить, что

$$\underline{\underline{S}}(f,T) - \overline{\overline{S}}(f,T) = (f(1) - f(0))\cdot\frac{1}{n}.$$

Кроме того,

$$|I - \underline{\underline{S}}(f,T)| \leq \underline{\underline{S}}(T) - \overline{\overline{S}}(f,T) = (f(1) - f(0))\cdot\frac{1}{n},$$

то есть

$$0 \leq n\cdot|I - \underline{\underline{S}}(f,T)| \leq f(1) - f(0).$$

□

Формула Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$F'(x) = f(x).$$

Существует такое конечное множество E, что для всякого $x \in [a,b] \setminus E$ верно

$$F'(x) \equiv f(x), \quad F(x)ßC[a,b].$$

Пример 3. Для лестницы Кантора интеграл определен везде, кроме точек множества Кантора.

Пример 4. Вычислим

$$\int_2^3 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}.$$

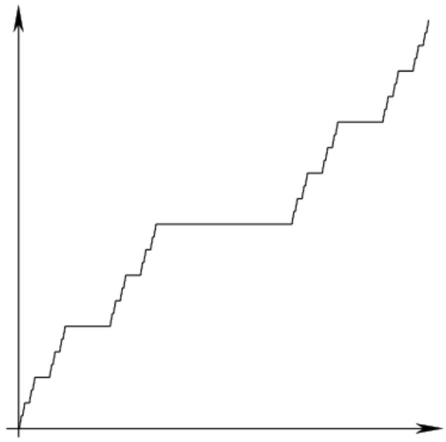


Рис. 8.1: Лестница Кантора

Задача №2216 а)

Найти значение

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ?$$

Решение. Интеграл Римана не существует, так как функция не ограничена. □

Задача №2216 б)

Найти значение

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\operatorname{tg}^2 x} dx = ?$$

Решение. Разберем ситуации, в которых возникают особенности: в точках $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$: допустим точка приближается слева к $\frac{\pi}{2}$:

$$x \to \frac{\pi}{2}-,$$

тогда

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \longrightarrow +\infty,$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

А в случае, когда

$$x \to \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \longrightarrow -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Она не является непрерывной, поэтому для нее не применима формула Ньютона-Лейбница.

Однако разрывы можно устранить: прибавим ко второй ветви $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, к третьей — $\pi\sqrt{2}$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right), & (0; \frac{\pi}{2}), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + \pi\sqrt{2}, & (\frac{3\pi}{2}; 2\pi). \end{cases}$$

Получим обобщенную первообразную.

Итак,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \pi\sqrt{2}.$$

$\square$

Семинар 9

9. Интегрирование по частям

Задача №2217

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx =?$$

Решение. Имеем

$$\left.\frac{1}{1+2^{1/x}}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2^{-1}}.$$

Получаем первообразную

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}}, & x \in [-1;0), \\ \frac{1}{1+2^{1/x}} + 1, & x \in (0;1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx = F(1) - F(-1) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

Задача №2219

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right).$$

Решение. Если мы рассмотрим функцию $y = x$ и разобьем отрезок $[0;1]$ на n равных частей, то

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \int\limits_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

□

Задача №2221

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=?$$

Решение. Имеет место очевидное равенство

$$\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}.$$

Следовательно, последовательность можно записать в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(k/n)^2}.$$

Итак, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

□

Задача №2227

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+(1+\frac{n-1}{n})\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)=?$$

Решение. Оставим в нашем выражении только аргументы

$$\left((1+\frac{1}{n})\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+(1+\frac{n-1}{n})\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right).$$

Тогда можно выделить $\frac{1}{n}$ и записать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n}\longrightarrow\int_0^1(1+x)\pi x dx,$$

$$\left(\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5\pi}{6}.$$

Здесь $\sin x\approx x$, потому что есть стремление к нулю. Если бы в знаменателе аргумента стояло бы n, то такую замену мы бы провести не смогли. Итак, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+(1+\frac{n-1}{n})\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

□

Задача №2230

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=?$$

Решение. Поделим это выражение на n, получим

$$\frac{1}{n}\cdot 2^{1/n}+\frac{1}{n}\cdot 2^{2/n}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot 2^{n/2}.$$

Получили интегральную сумму для 2^x на отрезке $[0;1]$:

$$\int_0^1 2^x=\frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_0^1=\frac{1}{\ln 2}.$$

Сравним слагаемые из нашей суммы и из новой суммы

$$\frac{1}{n}\cdot 2^{k/n}-\frac{1}{n+1/k}\cdot 2^{k/n}=2^{k/n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1/k}\right)=2^{k/n}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n(n+1/k)}\leq 2\cdot 1\cdot\frac{1}{n^2+1}.$$

Получили неравенство

$$0\leq b_n-a_n\leq\frac{2n}{n^2+1}\longrightarrow 0,$$

следовательно

$$\lim b_n=\lim a_n.$$

□

Задача №2231

Посчитать интегралы

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right),\quad\frac{d}{da}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right),\quad\frac{d}{db}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right).$$

Решение. Рассмотрим интегралы по порядку:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right)=0,$$

потому что выражение в скобках не зависит от x. Другие два интеграла вычисляются напрямую (по формуле):

$$\frac{d}{da}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right)=-\sin(a^2),$$

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b\sin(x^2)dx\right)=\sin(b^2).$$

□

Задача №2233

Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos(t^2)dt}{x} = ?$$

Решение. Используем правило Лопиталя, но прежде проверим, что действительно имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$:

$$\left|\int_0^x \cos(x^2)dx\right| \leq 1\cdot|x| \to 0.$$

Продифференцируем дробь:

$$\frac{\cos(x^2)}{1}\to 1$$

при $x\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos(x^2)dx}{x} = 1.$$

□

Формула интегрирования по частям

Пусть нам нужно посчитать интеграл

$$\int_a^b u'(t)v(t)+u(t)v'(t)dt.$$

Можно сказать так:

$$\int_a^b u'(t)v(t)+u(t)v'(t)dt = (u(t)v(t))\Big|_a^b.$$

Однако мы знаем, что если функции-слагаемые непрерывны, то существуют два интеграла и второй мы можем перенести в другую часть

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = (u(t)v(t))\Big|_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}.$$

Задача №2240

Найти

$$\int_0^\pi x\sin x dx = ?$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Хотим убрать x, то есть перебросить производную с синуса на x. Будем считать, что $v(x) = x$, $u'(x) = \sin x$, тогда $u(x) = \cos x$. Получим

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

□

Задача №2242

Найти

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx = ?$$

Решение. Раскроем модуль:

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx - \int_{1/e}^{1} \ln x dx.$$

Вычислим сначала интеграл от $\ln x$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Сделаем подстановку:

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx = (x \ln x - x)\Big|_1^e - 1 + \frac{2}{e} = 1 - 1 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}.$$

□

Формула замены переменной

Если известно, что $F'(t) = f(t)$. Рассмотрим теперь сложную функцию:

$$(F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Можно проводить замены переменных таким образом: от интеграла

$$\int_a^b f(t) dt$$

переходить к

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) g'(x) dx,$$

а функция g должна отвечать следующим требованиям

$$\begin{cases} g' \in C[\alpha, \beta], \\ g : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b], \\ g(\alpha) = a, \\ g(\beta) = b. \end{cases}$$

Получаем

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

Более того,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(g(x))\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

Задача №2249

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = ?$$

Решение. Вспомним формулу

$$\int_0^1 f(t)f'(t)dt = \left(\frac{f^2(t)}{2}\right)\Bigg|_0^1.$$

Примем за $f(t) = \arcsin t$.

Сделаем замену

$$t = \sqrt{x}, \quad x = t^2.$$

Если $t \in [0; 1]$, то и $x \in [0; 1]$. Получим

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}} 2tdt = \frac{(\arcsin t)^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

Задача №2257 а)

Доказать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

Решение. По формуле приведения имеем

$$f(\sin x) = f\left(\cos(\frac{\pi}{2} - x)\right).$$

Сделаем замену переменных:

$$x = \frac{\pi}{2} - t,$$

$$dx = -dt.$$

Получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt.$$

Что и требовалось. □

Семинар 10

10. Вычисление определенных интегралов

Задача №2205

Доказать, что для любого x (в точках непрерывности)

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) \equiv 0.$$

Решение: Замечание: понятно, что $f^2(x) \geq 0$ для всяких $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

Рассмотрим какую-то точку непрерывности x_0. В ней верно

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Докажем от противного. Пусть $f(x_0) > 0$. По непрерывности $\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$, что

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}.$$

(в качестве ε рассмотрели $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$).

Тогда

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx \geq 2\delta \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2}\right)^2 > 0.$$

Противоречие с тем, что интеграл должен быть равен нулю.

Докажем в обратную сторону. Если существует такая точка x_0, что $f(x_0) > 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx > 0.$$

Если $f(x) = 0$ в любой точке непрерывности, то

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Нам известно, что $f(x) = 0$ в любой точке непрерывности, а по критерию Лебега нам известно, что если функция интегрируема, то она непрерывна почти всюду.

Следовательно, $f(x) = 0$ почти всюду. Значит, для любого разбиения T существует набор отмеченных точек $\{\xi_j\}$, что

$$\sigma(f, T, \{\xi_j\}) = 0 \longrightarrow \int_a^b f^2(x)dx$$

при $\lambda(T) \to 0$. Следовательно,

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

$\square$

Определение 7. Говорят, что E — множество меры ноль по Лебегу, если $\forall\varepsilon$ существует не более чем счетное число интервалов I_j, таких что

$$\bigcup_j I_j \supset E,$$

$$\sum_j |I_j| \leq \varepsilon.$$

Пример 5. Множество Кантора — множество меры ноль.

Задача №2193(2)

Доказать, что

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx,$$

если f ограничена и выпукла сверху.

Решение: Изобразим на графике то, что у нас есть. Нужно показать, что площадь

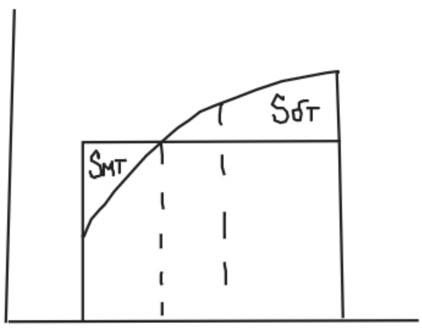


Рис. 10.2: Рисунок к задаче №2193(2)

криволинейной трапеции больше площади прямоугольника, тогда задача будет решена.

У прямоугольника и интеграла есть общая часть. Из рисунка понятно, что

$$S_{\text{м.кр.}} < S_{\text{м.тр.}},$$

$$S_{\text{б.тр.}} < S_{\text{б.кр.}}.$$

Осталось сравнить площади $S_{\text{м.тр.}}$ и $S_{\text{б.тр.}}$. Имеем

$$S_{\text{м.тр.}} = (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{2},$$

$$S_{\text{б.тр.}} = (b-c)\frac{f(b)-f(a)}{2}.$$

Как соотносятся $c-a$ и $b-c$? Можно показать, что $c \leq \frac{a+b}{2}$. От противного: покажем, что $c > \frac{a+b}{2}$. В силу условия задачи

$$f(c) > f(\frac{a+b}{2})$$

— противоречие с выпуклостью. Итак, $c-a < b-c$.

Другое решение: без ограничения общности можно считать, что функция положительна. Далее можно сравнивать площади криволинейной и прямолинейной трапеций. □

Задача №2228

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} =?$$

Решение: Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = b_n.$$

Имеем

$$b_n \to \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} \to \int_0^1 \frac{\pi}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

□

Задача №2257(б)

Доказать, что

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

Решение: Сделаем замену

$$x = t + \frac{\pi}{2},$$
$$x = \pi, \quad t = \frac{\pi}{2},$$
$$x = 0, \quad t = -\frac{\pi}{2}.$$

Получаем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) f(\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\cos t)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} f(\cos t)dt.$$

Первый интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку, поэтому он равен 0:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) f(\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} f(\cos t)dt.$$

□

Задача №2282

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = ?$$

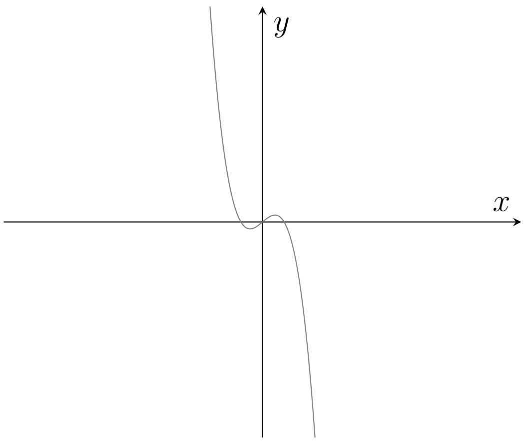
Эта задача связана с объемом n-мерного шара и формулой Валлиса.

Задача №2309

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx = ?$$

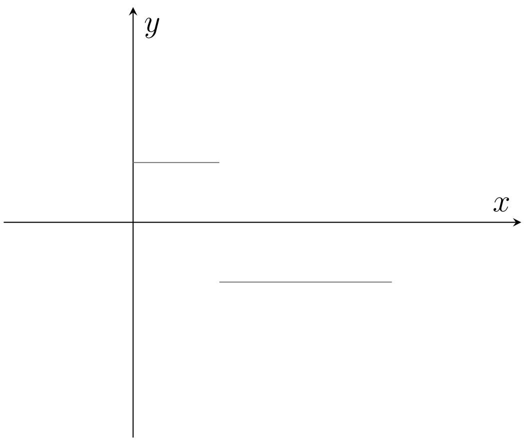
Решение: Построим график функции $x - x^3$ и проанализируем знаки ее значений на выбранном отрезке.

График $x - x^3$



Получаем график $\operatorname{sgn}(x - x^3)$:

График $\operatorname{sgn}(x - x^3)$



Далее можно посчитать площадь под графиком:

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx = 1 + (-2) = -1.$$

□

Теорема о среднем

1) Пусть $f, g \in R[a, b]$ (интегрируемы на отрезке $[a, b]$);

2) g не меняет знака на $[a, b]$ ($g \geq 0\ \forall x$ или $g \leq 0\ \forall x$).

Тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$
$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Если дополнительно известно, что

3) $f \in C([a,b])$, $\mu = f(c)$, $c \in (a,b)$,

тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Задача №2316(б)

Определить знак интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение: Разделим отрезок $[0, 2\pi]$ на два: $[0;\pi]$ и на $[\pi, 2\pi]$. Получаем

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Сделаем замену $x = t + \pi$. Тогда $t \in [0, \pi]$,

$$dx = dt,$$

$$\sin x = -\sin t.$$

Итак, получились интегралы

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi} dt > 0.$$

Следовательно, ответ

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0.$$

□

Задача №2324

Оценить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Решение: Пусть

$$f(x) = x^9, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Применяем теорему о среднем с некоторой константой c:

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx = c^9 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(1+x)^{1/2}|_0^1 = c^9(2\sqrt{2} - 2).$$

Итак, получилось

$$0 < I < 2(\sqrt{2} - 1).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+c}}\int_0^1 x^9dx = \frac{1}{\sqrt{1+c}} \cdot \frac{1}{10}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}.$$

$\square$

Семинар 11

11. Несобственный интеграл

Задача №2282

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =?$$

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \cos x dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \cdot \sin^2 x dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Итак,

$$nI_n = (n-1)I_{n-2},$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Отдельно сосчитаем

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Итак,

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2(k-1)} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2(k-2)} = \ldots = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Для нечетных получаем

$$I_{2k-1} = \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \frac{(2k-2)(2k-4)}{(2k-1)(2k-3)} I_{2k-5} = \ldots = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

□

Замечание 11. Рассмотрим интеграл

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} dx,$$

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n (1 - \cos x) dx > 0$$

Следовательно, последовательность I_n монотонно убывает. В частности, выполнено

$$I_{2k-1} > I_{2k} > I_{2k+1},$$

$$\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} > \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2} > \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Рассмотрим следующее произведение:

$$P_n = \frac{2^3}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Можно записать неравенства

$$\frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!(2k)!!}{((2k-1)!!)^2} = P_k\frac{2k+1}{2k},$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{((2k)!!)^2}{(2k-1)!!(2k+1)!!} = P_k,$$

тогда

$$\frac{\pi}{2} \longleftarrow \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1} < P_k < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2},$$

следовательно, по теореме о зажатой последовательности имеем

$$P_k \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Итак, мы получили формулу Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^3}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Вторая теорема о среднем

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

1) Пусть $f, g \in R[a,b]$.

2) Пусть g — монотонна.

Тогда оказывается, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx + g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Задача №2328

Оценить интеграл
$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение. Пусть
$$f(x) = \sin x,$$
$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Примерим вторую теорему о среднем
$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx + \frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x dx.$$

Здесь
$$\frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx = \frac{1}{100\pi} \left(\cos(100\pi) - \cos\xi\right) = \frac{1}{100\pi} \left(1 - \cos\xi\right),$$
$$\frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x dx = \frac{1}{200\pi} (\cos\xi - \cos 200\pi) = \frac{1}{200\pi} (\cos\xi - 1).$$

Итак,
$$\frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx + \frac{1}{200\pi} \int_{\xi}^{200\pi} \sin x dx = \frac{1}{200\pi} (1 - \cos\xi).$$

Очевидно, что в таком случае
$$0 \le I \le \frac{1}{100\pi}.$$

□

Модификация теоремы о среднем

Рассмотрим интеграл
$$\int_a^b f(x) g(x) dx.$$

1) Пусть $f, g \in R[a, b]$.

2) Пусть g — монотонна.

3) Пусть $g(x)$ монотонно убывает, и $g(x) \ge 0$.

Тогда оказывается, что
$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a+0) \int_a^{\xi'} f(x) dx.$$

1) Пусть $f, g \in R[a, b]$.

2) Пусть g — монотонна.

3) Пусть $g(x)$ монотонно возрастает, и $g(x) \geq 0$.

Тогда оказывается, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_{\xi''}^b f(x)dx.$$

Задача №2330

Пусть $0 < a < b$. Оценить интеграл

$$\int_a^b \sin(x^2)dx.$$

Решение. Сделаем замену $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$:

$$\int_a^b \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

Можно применить модифицированную теорему о среднем, где $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$:

$$\int_a^b \sin(x^2)dx = \frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi} \sin t dt = \frac{\cos(a^2) - \cos\xi}{2a}.$$

Итак, получаем оценку

$$|I| \leq \frac{1}{a}.$$

□

Неравенство Коши-Буняковского в интегральном виде

Неравенство Коши-Буняковского в числовом виде выглядит так:

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

В интегральном виде:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Неравенство Гельдера в интегральном виде

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{1/q}.$$

Пример 6. Утверждается, что

$$\int_a^b (f(x)t - g(x))^2 \geq 0.$$

Раскроем скобки

$$\int_a^b (f(x)t - g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx \cdot t^2 - 2\int_a^b f(x)g(x)dx \cdot t + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

Рассмотрим случаи:

1) Пусть

$$\int_a^b f^2(x)dx \cdot t^2 = 0.$$

В этом случае неравенство выполняется.

2) Если

$$\int_a^b f^2(x)dx \cdot t^2 \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0.$$

В этом случае неравенство тоже выполнено.

Несобственный интеграл

Если функция не ограничена, то проинтегрировать по Риману не получится. Аналогично не получится найти интеграл на неограниченном промежутке. Здесь нам помогает предельный переход.

Нужно отступить от особой точки или от бесконечности — рассмотреть такую точку c, что $f \in R[a, c]$, $c < b$. Тогда можно рассмотреть интеграл

$$\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Если такой предел есть, то он называется *несобственным интегралом Римана.*

Аналогично

$$\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Это тоже *несобственный интеграл Римана.*

Аналогично действуем, если есть неограниченность в точке a:

$$\lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл от $\frac{1}{x^p}$ на отрезке $[0,1]$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 x^{-p}dx.$$

При $p = 0$

$$\int_0^1 1dx = 1.$$

При $p < 0$

$$\int x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_0^1 = \frac{1}{1-p}.$$

Интеграл от $\frac{1}{x^p}$ на луче x больше 1

Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{dx}{x^p}.$$

При $p \neq 1$

$$I = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^c = \frac{c^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p},$$

для $p > 1$ сходится.

При $p = 1$

$$I = \ln x\bigg|_1^c = \ln c - \ln 1 \to +\infty$$

При $p < 1$ расходится.

Признак сравнения

$f(x) \geq g(x) \geq 0$ для всяких $x \geq a$.

$$M > \int_a^c f(x)dx \geq \int_a^c g(x)dx \geq 0.$$

Существует

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Задача №2359

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

Решение. Оценим интеграл сверху. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{5/3}}.$$

Интеграл от такой функции существует, следовательно, существует интеграл и от меньшей функции. $\square$

Семинар 12

12. Признаки Абеля и Дирихле

Задача №2346

Найти интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = ?$$

Решение. Поймем при каких a и b этот интеграл существует:

$$\int e^{-ax}\cos bx dx.$$

$$e^{-ax}(A\cos bx + B\sin bx$$

$$-bA\sin bx + bB\cos bx$$

$$e^{-ax}((bB - aA)\cos bx - (bA + aB)\sin bx)$$

$$\begin{cases} bB - aA = 1, \\ bA + aB = 0. \end{cases}$$

Получаем

$$\int e^{-ax}\cos bx dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\cos bx + b\sin bx).$$

$$\lim_{c\to+\infty}\left(\int_0^c e^{-ax}\cos bx dx\right) = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\cos bx + b\sin bx)|_0^c$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = 0 - \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(-a) = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

□

Задача №2348

Найти интеграл

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = ?$$

Решение.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = (-e^{-x})|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1.$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = x^n(-e^{-x})|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx.$$

Итак, $I_n = nI_{n-1}$, $I_0 = I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3!$, $I_n = n!$.

□

Задача №2363

Найти интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = ?, \quad n \geq 0.$$

Решение. □

Задача №2369

Исследовать интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^p x} = ?$$

Решение. Рассмотрим интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^p x}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^p x}.$$

$$1 \geq \cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^p x}.$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad x \to 0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x^p}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^p x}.$$

Тогда $p < 1$.

Теперь второй интеграл. Замена $t = \frac{\pi}{2} - x$ приводит нас к предыдущему интегралу. Следовательно, $q < 1$.

□

Задача №2374

Исследовать интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

Решение.

$$1^p \leq x^p \leq 2^p$$

или наоборот.

$$\ln^p(1 + (x-1)) \sim (x-1)^p.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^q}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^q}$$

Итак, $q < 1$. Далее,

$$\frac{\ln^q x}{x^\varepsilon} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} = \frac{1}{x^{p+\varepsilon}} \cdot \frac{x^\varepsilon}{\ln^q x} \geq \frac{1}{x^{p+\varepsilon}},$$

$p + \varepsilon \leq 1$, $p < 1$ — расходится.

$$\frac{1}{x^{p-\varepsilon} x^\varepsilon \ln^q x} \leq \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}.$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x},$$

$t = \ln x$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^q},$$

$q < 1$

$$\left[\begin{array}{l} p > 1, \\ p = 1, q > 1. \end{array}\right.$$

$$p > 1 > q.$$

$\square$

Задача №2378

Сходится ли интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}?$$

Решение. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Рассмотрим их разность

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}.$$

Пусть $f(x) = \sin x$, тогда

$$F(x) = \int_1^x \sin t dt = \cos 1 - \cos x.$$

Получилась ограниченная функция. Кроме того, функция $g(x) = \frac{1}{x}$ — монотонно убывает и стремится к нулю. Таким образом, признак Дирихле выполнен.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Семинар 13

13. Вычисление площади с помощью интеграла Римана

Задача №2350

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n — натуральное число):

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}$$

Докажем, что

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(\frac{1}{x+k}\right).$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\int \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(\frac{1}{x+k}\right)dx = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ln(x+k).$$

Получаем

$$I_n = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\Big|_1^a = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k\ln(a+h) + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\ln(1+k).$$

Если $n = 2C$, то

$$\frac{1}{n!}(-1)^k C_n^k \ln(a+h) = \ln\left(\frac{a^{C_{2c}^0}(a+2)^{C_{2c}^2}\dots(a+2c)^{C_{2c}^{2c}}}{(a+1)^{C_{2c}^1}(a+3)^{C_{2c}^3}\dots(a+2c-1)^{C_{2c}^{2c-1}}}\right).$$

Здесь

$$C_{2c}^0 + C_{2c}^2 + C_{2c}^4 + \dots = C_{2c}^1 + C_{2c}^3 + \dots + C_{2c}^{2c-1} = \frac{2^{2c}}{2}.$$

Пусть теперь $n = 2c+1$. Получаем аналогично. Итак, ответ

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ln(1+k).$$

□

Задача №2370.1

Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$$

Решение. У нас две точки, где возникают особенности — 0 и $+\infty$. Разрезаем наш луч на две части:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$$

В первом случае

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \asymp \frac{1}{\sqrt{x}},$$

во втором

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \asymp \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Каждый из этих интегралов будет сходиться, значит, и исходный интеграл будет сходиться. □

Задача №2379

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующий интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \cos x dx.$$

Решение. Пусть $f(x) = \cos x$,

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}.$$

Интеграл

$$\int_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \cos x dx$$

сходится, так как функция $g(x)$ здесь монотонна и убывает к нулю, а первообразная $f(x)$ ограничена. Прибавим к нему сходящийся (в обычном смысле, так как функция непрерывна) интеграл

$$\int_0^{100} \frac{\sqrt{x}}{x+100} \cos x dx$$

□

Задача №2371

Исследовать сходимость интеграла

$$I_{=}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}.$$

Решение. 1) Пусть $p = q$. Имеем

$$I=\int_0^1\frac{dx}{2x^p}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^p}.$$

Первый интеграл существует при $p<1$, а второй при $p>1$. Пересечения нет, следовательно, I в этом случае никогда не сходится.

2) Пусть $p\neq q$, без ограничения общности положим $p>q$. Итак,

$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}.$$

Имеем

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}\longrightarrow\int_0^1\frac{dx}{x^q},$$

так как

$$\frac{1}{x^p+x^q}\asymp\frac{1}{x^q},\quad x\to 0.$$

Этот интеграл существует при $q<1$.

В другом случае

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}\longrightarrow\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p},$$

так как

$$\frac{1}{x^p+x^q}\asymp\frac{1}{x^p},\quad x\to +\infty.$$

Этот интеграл существует при $p>1$.

□

Задача №2390 а)

$$v.p.\int_{-1}^1\frac{dx}{x}=0$$

Решение.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=0.$$

□

Задача №2390 в)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$$

Решение.

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \sin x dx = 0.$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{2\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{2\varepsilon}^{1}.$$

□

Задача №2392

$$v.p. \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

Решение.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \ldots dx + \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \ldots dx + \int_{2+\varepsilon}^{+\infty} \ldots dx.$$

$$\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C.$$

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \ldots dx = \ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon - \ln 2.$$

$$\int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \ldots dx = \ln\varepsilon - \ln(1-\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon) - \ln\varepsilon = 0$$

$$\int_{2+\varepsilon}^{+\infty} \ldots dx = 0 - \ln\varepsilon + \ln(1+\varepsilon).$$

$$\boxed{2\ln(1+\varepsilon) - 2\ln(1-\varepsilon) - \ln 2}.$$

□

Вычисление площади

$$S = \int_{a}^{b} f(x) f x = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \Sigma).$$

$$S = \int_{a}^{b} \varphi_2(x) - \varphi_1(x) dx.$$

Задача №2392

Найти площадь между графиками

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y + x = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y + x = 0. \end{cases} \Longrightarrow 3x - x^2 = 0.$$

Точки пересечения графиков — $(0,0)$ и $(3,3)$.

$$S = \int_0^3 3x - x^2 dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

□

В полярных координатах

$$S \simeq \sum_j \frac{\Delta\varphi_j}{2} r^2(\xi_j)$$

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi.$$

Задача №2419

Найти площадь

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Решение.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2(1+\cos\varphi)^2}{2} d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^\pi 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^\pi = \frac{3a^2\pi}{2}$$

□

Семинар 14

14. Вычисление площади с помощью интеграла Римана

Задача №2419

Найти площадь, ограниченную циклоидой

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

Решение: При $t \in [2\pi, 4\pi]$

$$x = (4\pi - t)a$$

$$y = 0.$$

$$s = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} a^2 - 2a^2 \cos t + \frac{a^2}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{3a^2}{2}.$$

□

Формула длины гладкой кривой

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Если $t = x$

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2} dx$$

Если $t = \varphi$, $r = r(\varphi)$,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2(\varphi)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Задача №2431

Найти длину кривой $y = x^{3/2}$ при $x \in [0; 4]$.

Решение: Используем формулу

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1).$$

□

Задача №2433

Найти длину цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от $A(0, a)$ до $B(b, h)$.

Решение:

$$|\gamma| = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}dx = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a}dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}\Bigg|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

□

Задача №2443

Найти длину кривой

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение: Используем формулу

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Рассмотрим производные

$$\begin{cases} x' = a(1 - \cos t) \\ y' = a \sin t \end{cases}.$$

$$a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2 - 2a^2 \cos t = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Итак, по формуле получаем

$$|\gamma| = \int_a^b 2a \sin \frac{t}{2}dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

Ответ: $8a$. □

Задача №2446

Найти длину кривой $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение:

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} d\varphi = a\left(\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1} + \frac{1}{2}\ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}|\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a(\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})).$$

□

Задача №2429

Найти длину кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Решение:

$$s = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{2\pi}.$$

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} 3a|\sin t\cos t|dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t dt = 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

□

Домашнее задание

Домашнее задание: №2414, №2437, №2442, №2448, №2453.

Семинар 15

15. Квадратурная формула Симпсона

Задача №2437

Найти
$$\int_0^\alpha \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx.$$

Решение: По формуле
$$\int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$
получим
$$\int_0^\alpha \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\cos x}dx.$$
Сделаем замену
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
Получим
$$\int_0^\alpha \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\cos x}dx = 2\int_0^{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{1}{1+t^2}dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\right|.$$

□

Задача №2453

Доказать, что длина дуги эллипса
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$
равна длине одной волны синусоиды
$$y = c\sin\frac{x}{b},$$
где $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

Решение: По формуле
$$|\gamma| = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2+\cos^2(b^2-a^2)}dt.$$

Сделаем замену $t = \frac{x}{b}$.

$$|\gamma| = 2\int_0^{\pi b} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\cdot\cos\frac{x}{b}\right)^2+1}dx = 2\int_0^{\pi b}\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\cos^2\frac{x}{b}+1}dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\cos^2 t+1}dt\cdot b = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2 t+b^2}dt =$$
$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t}dt =$$
$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 z}dz.$$

Здесь была сделана замена $z = \frac{\pi}{2} - t$. □

Задача №2442

Найти длины дуг следующей кривой

$$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t.$$

Решение: В промежутке $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ нет совпадений точек. Если рассмотреть точки

$$t = \frac{\pi}{2} - x, \quad t = \frac{\pi}{2} + x,$$

то легко видеть, что они переходят в одну точку вследствие формул

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

□

Задача из олимпиады по мат.анализу

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots, \quad x > 1$$
$$y = \zeta(x), \quad y = x.$$
$$x \to 1+0, \quad \zeta(x) \to +\infty$$
$$x \to +\infty, \quad \zeta(x) \to 1.$$

Тогда

$$(y-1)(x-1)\begin{cases}\longrightarrow 1, & x \to 1+0\\ \longrightarrow 0, & x \to +\infty\end{cases}$$

$$\zeta(x)-1=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots>\int_2^{+\infty}t^{-x}dt=\left.\frac{t^{1-x}}{1-x}\right|_2^{+\infty}=\frac{2^{1-x}}{x-1}$$

По формуле

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int_a^b f(x)dx<\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

$$\xi(x)-1<\int_{3/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^x}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}}{x-1}.$$

Получаем

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}>(y-1)(x-1)>2^{1-x}.$$

Вычисление площадей и объемов

Свойства площади:

1) $S(\Phi)\geq 0$,

2) $S(\Phi_1\bigsqcup\Phi_2)=S(\Phi_1)+S(\Phi_2)$,

3) $\Phi_1=\Phi_2\Longrightarrow S(\Phi_1)=S(\Phi_2)$,

4) $S(\square)=1$.

Задача №2459

Найти объем параболоида вращения $y=kx^2$.

Решение: Знаем, что $S=\pi a^2$, $H=ka^2$, тогда

$$k=\frac{H}{a^2}=\frac{\pi H}{S},$$

и

$$a=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

По формуле

$$V=\int_0^H\frac{\pi}{k}\cdot ydy=\left.\frac{\pi}{2k}y^2\right|_0^H=\frac{\pi H^2}{2k}=\frac{\pi H^2}{\frac{2\pi H}{S}}=\frac{SH}{2}.$$

$\square$

Задача №2464

Найти объем объём однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=\pm c.$$

Решение: Перенесем одну дробь в другую сторону и фиксируем значение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0^2}{c^2}.$$

После преобразований получим

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{z_0^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{z_0^2}{c^2})}=1.$$

Итак, по формуле получаем ответ

$$V=\int_{-c}^{c}\pi ab(1+\frac{z^2}{c^2})dz=\pi ab(z+\frac{z^3}{c^2})\Big|_{-c}^{c}=2\pi ab(c+\frac{c}{3})=\frac{8\pi abc}{3}.$$

$\square$

Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=1}^{n} f(x_j)c_j.$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))\simeq\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\simeq f(\frac{a+b}{2})(b-a).$$

Задача №2460

Доказать формулу

$$\int_{-c}^{c}f(x)dx=\frac{c}{3}(f(-c)+4f(0)+f(c)).$$

Решение: Запишем функцию $f(x)$ в следующей форме

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

По формуле Симпсона имеем

$$\int_{-c}^{c}g(x)dx=\frac{c}{3}(g(-c)+4g(0)+g(c)).$$

Запишем коэффициенты при степенях

$$1: \quad 2c=\frac{c}{3}(1+4+1)$$

$$x: \quad 0 = 0$$

$$x^2: \quad 2\frac{c^3}{3} = \frac{c}{3}(c^2 + 0^2 + c^2)$$

$$x^3: \quad 0 = 0$$

Таким образом, получаем

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

$$V = \frac{d}{6}(0 + ab\sin\varphi + 0) = \frac{abd\sin\varphi}{6}.$$

$\square$

Семинар 16

16. Функции нескольких переменных

Задача №2478

Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении отрезков следующей линии $x^2 - xy + y^2 = a^2$

Решение:

$$y^2 - xy + x^2 - a^2, \quad x^2 = a^2$$

$$D = x^2 - 4(x^2 - a^2) = 4a^2 - 3x^2 \geq 0$$

$$|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

$$y = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}).$$

$$\int_0^a \frac{\pi}{4}(x^2 + (4a^2 - x^2) + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2})dx$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{x^3}{3} + 4a^2x - x^3 - \frac{2}{9}(4a^2 - 3x^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$\int_a^{2a/\sqrt{3}} \pi(y_2^2 - y_1^2)dx = \pi\int_a^{2a/\sqrt{3}} x(4a^2 - 3x^2)^{1/2}dx = \frac{1}{9}(4a^2 - 3x^2)^{3/2}\Bigg|_a^{2a/\sqrt{3}}.$$

□

Задача №3151

Построить линии уровня функции

$$z = x + y.$$

Решение: Нам нужно изобразить набор прямых $x + y = c$. □

Задача №3159 а)

Построить линии уровня функции

$$z = |x| + |y| - |x + y|.$$

Решение: Раскроем модули. Рассмотрим первую четверть: здесь функция равна 0. Далее в верхнем треугольнике второй четверти будет функция $-2x$, а в нижнем — $2y$. В верхнем треугольнике четвертой четверти функция получается $-2y$, а в нижнем — $2x$. В третьей четверти получаем 0. Можно изобразить линии уровня.
□

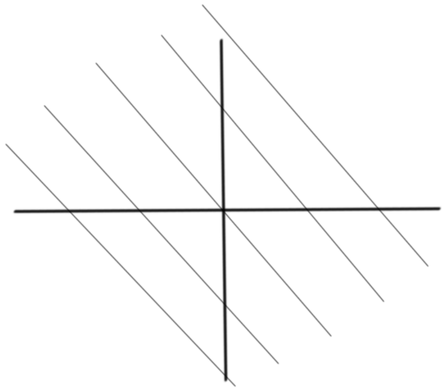


Рис. 16.3: Рисунок к задаче №3151

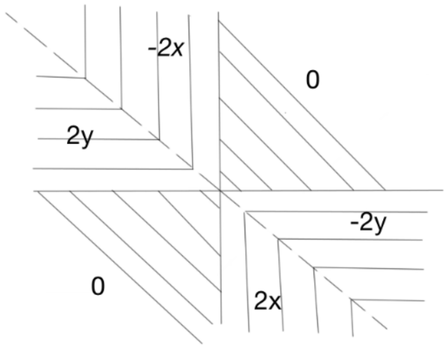


Рис. 16.4: Рисунок к задаче №3159 а)

Задача №3159.2

Найти линии уровня $z = \max\{|x|, |y|\} = c$.

Решение: Рассмотрим первую четверть: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Поэтому модули можно опустить. Далее нужно понять, кто кого больше. У нас есть прямая $y = x$. Если отступим от нее вправо, то получим $x > y$, а если влево, то $y > x$. В первом случае множество будет $x = C$. В втором случае множество будет $y = C$. □

Задача №3167

Найти поверхности уровня функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Решение: Функция в условии неотрицательная, поэтому мы не будем подставлять туда отрицательные числа. При увеличении c, где

$$c = x^2 + y^2 + z^2,$$

получаются сферы с радиусом $\sqrt{c}$.

□

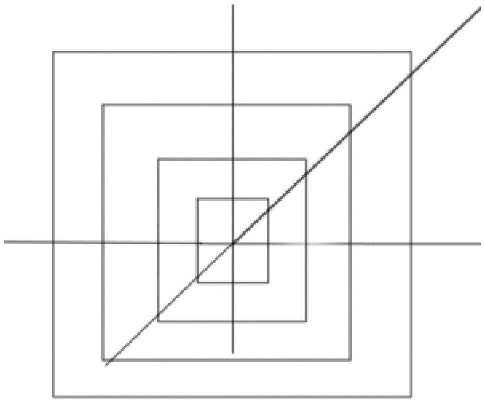


Рис. 16.5: Рисунок к задаче №31592

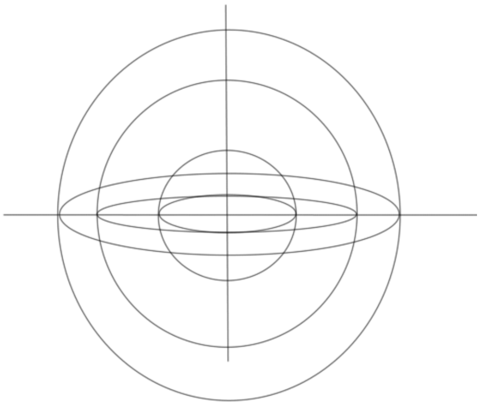


Рис. 16.6: Рисунок к задаче №3167

Задача №3170

Найти поверхности уровня функции

$$u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2).$$

Решение: □

Задача №3181

Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

имеем:

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) = 1,$$

$$\lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y)) = -1,$$

Непустыми получаются поверхности, где $c = 0, 1, -1$, где

$$c = \operatorname{sgn}\sin(x^2 + y^2 + z^2).$$

Функция $\operatorname{sgn} = 0$, когда $\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, а это будет так, когда

$$x^2 + y^2 + z^2 = \pi n,$$

то есть набор сфер с радиусами $\sqrt{\pi n}$.
Между началом координат и первой сферой будет положительное значение sin. Между следующими сферами будет отрицательный знак. И так далее.

В итоге все пространство разбивается на три множества.

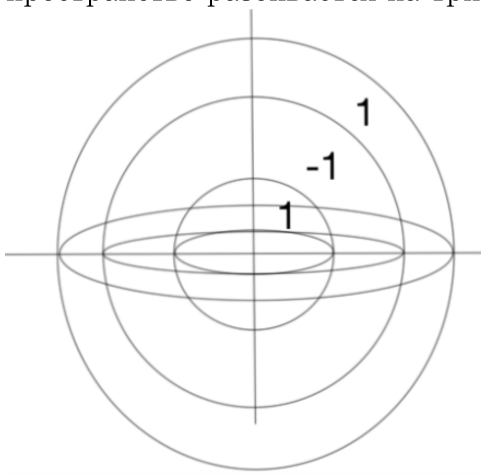


Рис. 16.7: Рисунок к задаче №3170

в то время как

$$\lim_{x\to 0 y\to 0} f(x, y)$$

не существует.

Решение: Имеем

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) \to h(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to}(\lim_{x\to 0} \frac{x - y}{x + y})$$

$$\lim_{x\to}(\lim_{y\to 0} \frac{y - x}{x + y}) = -1$$

□

Метрика

1) $d(A_1, A_2) \geq 0$, $d(A_1, A_2) = 0 \iff A_1 = A_2$.

2) $d(A_1, A_2) = d(A_2, A_1)$.

3) $d(A_1, A_3) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3)$.

Норма

1) $||\vec{x}|| \geq 0$, $||\vec{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x}$.

2) $||k \cdot \vec{x}|| = |k| \cdot ||\vec{x}||$.

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Задача №3181

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Решение:

$$\lim_{x \to 0}(\lim_{y \to 0} f(x, y)) = \lim_{y \to 0}(\lim_{x \to 0} f(x, y)) = 0$$

$$k = 1 \quad y = kx$$

$$y = x \quad f(x, y) = 1$$

$$\frac{k^2 x^4}{k^2 x^4 + (1 - k)^2 x^2} = \frac{k^2 x^2}{k^2 x^2 + (1 - k)^2} \to 0$$

$$x = 0 \quad 0$$

$$x_0 \neq 0 \quad \frac{x_0^2 y}{x_0^2 y (x_0 - y)^2} \to 0.$$

□

Задача №3182

Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

имеем

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0,$$

тем не менее $\lim_{x \to 0 y \to 0}$ не существует.

Решение: Пусть $y = kx$. Подставим это в функцию, получим

$$\frac{x^4 k^2}{x^4 k^2 + x^2 (1 - k)^2} = \frac{x^2 k^2}{x^2 k^2 + (1 - k)^2} \longrightarrow 0,$$

но при $k = 1$ будет $y = x$, и тогда $f(x, y) = 1$, то есть предела нет.

Пусть $x = 0$. Тогда функция будет равна нулю. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0.$$

Пусть $x_0 \neq 0$, тогда имеем

$$\frac{x_0^2y^2}{x_0^2y^2 + (x_0 - y)^2} \longrightarrow 0.$$

Доказали равенство повторных пределов. $\square$

Семинар 17

17. Предел и непрерывность функции двух переменных

Задача №2471

Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Решение: Зададим некоторое разбиение. Запишем риманову сумму

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} y\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)\pi(x_j^2 - x_{j-1}^2) =$$

$$= \sum_{j} 2\pi \frac{x_{j-1} + x_j}{2} \cdot y\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)\Delta x \longrightarrow 2\pi \int_a^b x \cdot y(x)dx$$

□

Задача №2469

Найти объемы тел, ограниченных следующей поверхностью

$$x + y + z^2 = 1,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Решение: Положим $z = \text{const}$. Тогда

$$S(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^2.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2}(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5)\Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

□

Задача №3172

Исследовать характер поверхности по данным ее уравнения

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Решение: Выражение $\sqrt{x^2+y^2}$ задает радиус окружности. Следовательно, мы можем находить значения

$$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(r).$$

Получается, что наша поверхность выглядит следующим образом: мы берем график наше функции f и вращаем его вокруг оси Oz. Получается поверхность вращения.

$\square$

Задача №3183.2

Чем равен передел функции

$$f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y^2)}$$

вдоль любого луча

$$x = t\cos\alpha,$$

$$y = t\sin\alpha,$$

где $0 \le t < +\infty$ при $t \to +\infty$.

Решение: Сделаем подстановку

$$t^2\cos^2\alpha e^{-t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}.$$

Разберем случаи:

1) Если $\cos\alpha = 0$, то в показателе не будет квадратного трехчлена. Тогда $f(x,y) = 0$.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

2) Пусть теперь $\cos\alpha \neq 0$. Получается выражение вида

$$\frac{t^2\cos^2\alpha}{e^{t^2\cos^2\alpha - t\sin\alpha}} \longrightarrow 0.$$

$\square$

Задача №3184 а)

Найти $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$ и $\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$, если

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}.$$

Решение: Имеем

$$\lim_{x\to\infty}(\lim_{y\to\infty} f(x,y)) = 0$$

$$y = 0 \qquad f(x,0) \to 1$$

$$x = 0 \qquad f(0,y) \to 0$$

$$\lim_{y\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f(x,y)) = 1$$

□

Задача №3185

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

Решение: Так как по неравенству о средних

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

то, если $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$x^2-xy+y^2 = r^2 - xy \ge r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

$$|f(x,y)| \le \frac{2\sqrt{2}}{r} \to 0.$$

□

Задача №3187

$$\lim_{(x,y)\to(0,a} \frac{\sin(xy)}{xy} y = ?$$

Решение: Если $xy \to 0$

$$\frac{\sin(xy)}{xy} \to 1, \quad y \to a.$$

$$\frac{\sin t}{t} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\sin t}{t}, & t \ne 0 \end{cases}$$

□

Задача №3196

Найти точки разрыва следующих функций

$$u = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

Решение: Функция не определена в точках, где

$$x^3+y^3=0,$$

то есть когда

$$y=-x.$$

В числителе сумма двух непрерывных функций, в знаменателе аналогично. Получается, что мы рассматриваем отношение двух непрерывных функций. Значит, она является непрерывной. Следовательно, она определена всюду, где она определена.

Рассмотрим подробнее вырождающиеся точки на прямой. Имеет место формула

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Получим

$$\frac{x+y}{x^3+y^3}=\frac{1}{x^2-xy+y^2}.$$

$$\frac{3}{2}r^2 \geq |x^2-xy+y^2| \geq \frac{x^2+y^2}{2},$$

$$x^2-xy+y^2 \leq x^2+y^2+|xy| \leq x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}.$$

□

Задача №3202

Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

Решение: Фиксируем точку y_0:

$$f(x,y_0)=\frac{2xy_0}{x^2+y_0^2},$$

пусть $y_0=0$, тогда $f(x,0)=0$.

Пусть тогда $y=kx$, получим

$$\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Образуется складка при

$$k=\frac{1}{2}.$$

□

Задача №3207

Теорема 6 (Теорема Юнга). *Если f непрерывна по x, непрерывна по y и монотонна по x (или по y), то $f(x,y)$ будет непрерывна как функция двух переменных.*

Дифференцирование функции двух переменных

Напомним, что функция называлась дифференцируемой в точке x_0, если ее можно было представить как

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \bar{\bar{o}}(x - x_0),$$

где $x \to x_0$. Это выполнено тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Определение 8. Функция от двух переменных $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \bar{\bar{o}}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}),$$

где $(x,y) \to (x_0, y_0)$. Отсюда следует, что

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = A + \bar{\bar{o}}(1),$$

следовательно,

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \longrightarrow A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Из существования частных производных не следует дифференцируемость функции по двум переменным.

Однако если обе частные производные f'_x и f'_y непрерывны на области G, то тогда из этого следует, что функция дифференцируема.

Дифференциалом функции в точке называется

$$df(dx, dy) = Adx + Bdy = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Задача №3213

Найти частные производные первого и второго порядков от следующей функции:

$$u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$$

Решение: Продифференцируем по x:

$$u'_x = 4x^3 - 8xy^2,$$

$$u'_y = 4y^3 - 8yx^2.$$

□

Задача №3223

Найти частные производные первого и второго порядков от следующей функции:

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Решение: Производную внутренней функции умножаем на производную внешней

$$u'_x = \frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} =$$

$$= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

Семинар 18

18. Производная по направлению

Задача №3283

$$u = f(x^2+y^2+z^2), \quad t = x^2+y^2+z^2.$$

Решение:

$$\frac{du}{dt} = f'(t).$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y.$$

□

Задача №3285

$$u = f(x, xy, xyz),$$

Решение: Пусть $p = x$, $s = xy$, $t = xyz$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = f'_p\cdot 1 + f'_s\cdot y + f'_t\cdot yz.$$

□

Задача №3301

$$u = f(\xi,\eta,\zeta),$$
$$\xi = x^2+y^2, \quad \eta = x^2-y^2, \quad \zeta = 2xy.$$

Решение: У нас есть функция $u = f(\xi,\eta,\zeta) = u(x,y)$. Рассмотрим дифференциал

$$du = u'_x dx + u'_y dy = (f'_\xi\cdot 2x + f'_\eta\cdot 2x + f'_\zeta\cdot 2y)dx + (f'_\xi\cdot 2y + f'_\eta\cdot(-2y) + f'_\zeta\cdot 2x)dy.$$

$$du = u'_\xi d\xi + u'_\eta d\eta + u'_\zeta d\zeta = u'_\xi(\xi'_x dx + \xi'_y dy) + u'_\eta(\eta'_x dx + \eta'_y dy) + u'_\zeta(\zeta'_x dx + \zeta'_y dy).$$

□

Задача №3341

$$z = x^2 - y^2, \quad M(1,1).$$

Решение: Имеем векторы

$$\vec{l} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\nabla u = (2x, -2y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (2; -2) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \sqrt{3} < 0.$$

$\square$

Семинар 19

19. Производные высших порядков

Задача №3343

Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

Решение: Рассмотрим градиент, то есть вектор, перпендикулярный линии уровня:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Нужно подобрать коэффициент a, чтобы получился единичный вектор:

$$a \cdot \nabla u = a \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = a \cdot \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Найдем длину данного вектора в точке $M(x_0, y_0)$:

$$a^2\left(\frac{4x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} + \frac{4y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}\right) = 1.$$

Получаем, что

$$a^2 = \frac{x_0^2+y_0^2}{4},$$

$$a = \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}.$$

Таким образом, получаем семейство единичных векторов, направленных от начала координат

$$\vec{l} = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right).$$

$$\nabla u|_M \cdot \vec{l} = \frac{2x_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}(x_0^2+y_0^2)} + \frac{2y_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}(x_0^2+y_0^2)} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

□

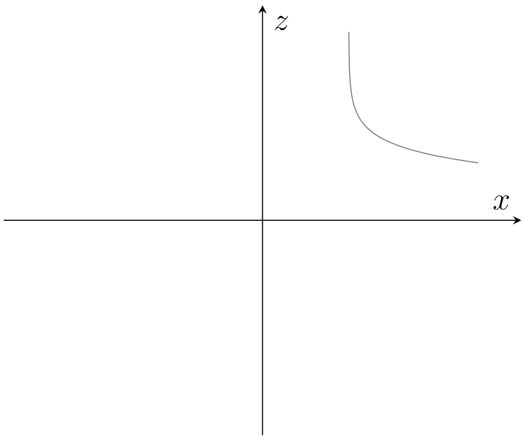
Задача №3321

Доказать, если функция имеет вид $z = \varphi(x^2+y^2)$, то она удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение: На графике функции вида $z = \varphi(x^2 + y^2)$ — это поверхность вращения. А именно, строим график $z = \varphi(x^2)$.

График $z = \varphi(x^2)$



А затем нужно вращать его вокруг оси z.

Симметрию, скрытую внутри функции можно использовать в дифференциальном уравнении. Найдем производные

$$z'_x = 2x\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$z'_y = 2y\varphi'(x^2 + y^2).$$

Теперь получим

$$yz'_x = 2xy\varphi'(x^2 + y^2) = xz'_y.$$

Следовательно,

$$yz'_x - xz'_y = 0.$$

Дополнительно: пусть $z(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет соотношению $yz'_x - xz'_y = 0$. Сделаем подстановку

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Получим функцию $g(\varphi) = z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Найдем производную

$$g'(\varphi) = -r\sin\varphi \cdot z'_x + r\cos\varphi \cdot z'_y = -yz'_x + xz'_y.$$

И если функция, которая нам была дана, удовлетворяет уравнению, то

$$g'(\varphi) = 0.$$

Функция $g(\varphi)$ принимает одно и то же значение на окружности с радиусом r, а функция $z(x, y)$ — на окружности с радиусом $x^2 + y^2 = r^2$. $\square$

Частные производные при замене переменных

Рассмотрим функцию $u(x, y) = x + y$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1.$$

Сделаем теперь замену переменных:

$$x = x,$$

$$z = x + y \Longrightarrow y = z - x.$$

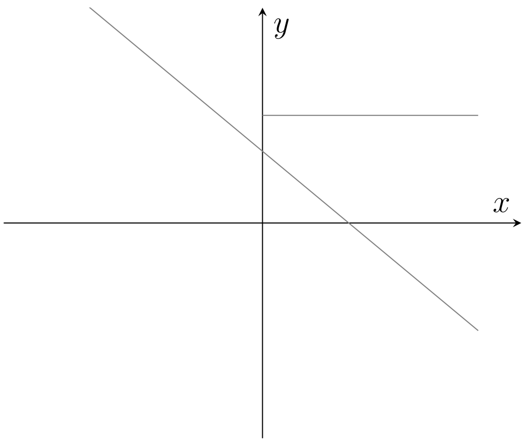
Тогда

$$u(x, y(z)) = x + z - x = z = \hat{u}(x, z).$$

В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Почему так получилось? Потому что при поиске частной производной мы учитываем и вторую переменную тоже. Например, в первом случае мы искали частную производную при учете, что $y = \mathrm{const}$. А во втором — что $z = \mathrm{const}$. То есть в первом случае мы движемся по горизонтальной прямой, а второй раз по наклонной. Поэтому и результат получился другой.



Задача №3352

Пусть $u = u(x, y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем:

$$u(x, y) \equiv 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

Решение: Из равенства $u(x,y) \equiv 1$ при $y = x^2$ получаем, что

$$u(x,x^2) = u(x) \equiv 1.$$

Тогда

$$\frac{du}{dx} \equiv 0,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 2x \equiv 0,$$

$$x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 2x \equiv 0.$$

Если $x \neq 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$$

$\square$

Производные высокого порядка

Рассмотрим гладкую функцию $u(x,y)$. Пусть ее производная $u'_x(x,y)$ существует в окрестности Ω. Тогда с ней можно работать как с обычной функцией, кроме того, может так оказаться, что от нее можно брать производную

$$(u'_x)'_x = u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2},$$

$$(u'_x)'_y = u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

$$(u'_y)'_x = u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$(u'_y)'_y = u''_{yy} = \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}.$$

Дифференциал высокого порядка

Напомним, что

$$du = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy.$$

Как теперь найти второй дифференциал?

1) Объявим dx и dy константами.

2) Дифференцируем:

$$d(du) = (u''_{xx}(x,y) \cdot dx + u''_{xy}(x,y) \cdot dy)dx + (u''_{yx}(x,y) \cdot dx + u''_{yy}(x,y) \cdot dy)dy,$$

$$d^2u(x,y,dx,dy) = u''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}(x,y)(dy)^2.$$

Определение дифференциала n-го порядка происходит по индукции.

Задача №3213

Найти дифференциал второго порядка

$$u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$$

Решение: Найдем производные, связанные с переменной x:

$$u'_x = 4x^3 - 8xy^2,$$

$$u''_{xy} = -16xy,$$

$$u''_{xx} = 12x^2 - 8y^2.$$

Далее из соображений симметрии по x и y можно найти следующие производные

$$u'_y = 4y^3 - 8yx^2,$$

$$u''_{yx} = -16yx,$$

$$u''_{yy} = 12y^2 - 8x^2.$$

В итоге дифференциал имеет вид

$$d^2u = (12x^2 - 8y^2)(dx)^2 - 32xydxdy + (12y^2 - 8x^2)(dy)^2.$$

□

Сравнение первого и второго дифференциалов

Второй дифференциал — это первый дифференциал от первого дифференциала. Однако первый дифференциал — это линейная функция. Казалось бы, тогда второй дифференциал должен быть константой, а третий — нулем.

Действительно, первый дифференциал — функция линейная, но от переменных dx и dy, а не от x и y (по ним функция нелинейная), по которым и берется второй дифференциал. Поэтому он не будет постоянным.

Задача №3230

Пусть

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$. Показать, что

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Решение: Найдем f''_{xy} в точке $(0, 0)$. Чтобы это сделать, нам нужно, чтобы функция f'_x была определена на прямой $(0, y)$, так как

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y.$$

Итак, найдем $f'_x(0, y)$. Для начала найдем в начале координат

$$f(x, 0) \equiv 0 \Longrightarrow f'_x(x, 0) = 0.$$

Пусть теперь $y \neq 0$. Заметим, что

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Имеем

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$f'_x(0, y) = -y \Longrightarrow f''_{xy} = -1.$$

Теперь в обратном порядке. Заметим, что при замене x на y и y на x в исходной функции поменяется знак. Следовательно, поменяются знаки и у производных. То есть

$$f''_{yx} = 1.$$

□

Задача №3259

Найти u'''_{xyz} функции

$$u = \operatorname{arctg} \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}.$$

Решение: Найдем производную

$$u'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)^2} \cdot \frac{(1 - yz)(1 - xy - xz - yz) + (y + z)(x + y + z - xyz)}{(1 - xy - xz - yz)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{1 - xy - xz - 2yz + xy^2z + xyz^2 + y^2z^2 + xy + y^2 + yz - xy^2z + xz + yz + z^2}{(1 - xy - xz - yz)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)^2} \cdot \frac{1 + y^2z^2 + y^2 + z^2}{(1 - xy - xz - yz)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right)^2} \cdot \frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{(1 - xy - xz - yz)^2}.$$

Преобразуем знаменатель первой дроби:

$$(x + y + z - xyz)^2 + (1 - xy - xz - yz)^2 =$$
$$= x^2y^2 + x^2z^2 + x^2 +$$
$$+ x^2y^2z^2 + 2x^2yz - 2x^2yz - 2xy - 2xz + 2x(y + z) - 2xyz(y + z) + 2yz(xy + xz) =$$
$$= (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2).$$

Итак,

$$u'_x = \frac{1}{1+x^2},$$
$$u''_{xy} = 0.$$

□

Дифференциал второго порядка не инвариантен

Пусть у нас есть функция $z(x,y)$. Сделаем замену переменных и подставим в нее $x(u,v)$ и $y(u,v)$. Имеем

$$z'_u = z'_x(x(u,v),y(u,v))\cdot x'_u + z'_y(x(u,v),y(u,v))\cdot y'_u.$$

$$\begin{aligned}z''_{uu} &= z''_{xx}(x(u,v),y(u,v))(x'_u)^2 + z''_{xy}(x(u,v),y(u,v))\cdot(x'_u\cdot y'_u)+\\ &+ z''_{xy}(x(u,v),y(u,v))\cdot(x'_u\cdot y'_u) + z''_{yy}(x(u,v),y(u,v))(y'_u)^2 + z'_x(x(u,v),y(u,v))x''_{uu}+\\ &+ z'_y(x(u,v),y(u,v))y''_{uu}.\end{aligned}$$

Итак,

$$d^2(z(x(u,v),y(u,v))) = z''_{uu}(du)^2 + 2z''_{uv}dudv + z''_{vv}(dv)^2.$$

Это не то же самое, что

$$d^2z(x,y) = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2.$$

Если теперь сюда подставить $x(u,v)$ и $y(u,v)$, то не получим выражение выше. Второй дифференциал не инвариантен.

Семинар 20

20. Дифференцирование неявных функций

Задача №3290

Найти первый и второй дифференциал функции

$$u = f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Решение: Имеем

$$u'_x = f'(t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$u'_y = f'(t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тогда

$$du = \frac{f'(t)}{\sqrt{x^2+y^2}}(xdx+ydy).$$

Вторые производные

$$u''_{xx} = \frac{(f'(t)+f''(t)\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}})\sqrt{x^2+y^2} - xf'(t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\frac{f'(t)y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + f''(t)x^2}{x^2+y^2}.$$

$$u''_{yy} = \frac{\frac{f'(t)x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + f''(t)y^2}{x^2+y^2}.$$

$$u''_{xy} = \frac{f''(t)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2} - f'(t)\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

Получаем, что

$$d^u = \frac{(f'(t)y^2+f''(t)x^2t)(dx)^2 + 2(f''(t)xyt - f'(t)xy)dxdy + (f'(t)x^2+f''(t)y^2t)(dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$\square$

Задача №3308

Доказать, что если функция $u = u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

то функция

$$v = u(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Решение: Функции, для которых верно $\Delta u = 0$ называются гармоническими. Для прямой это линейные функции.

Преобразование, данное в условии задачи, называется *инверсия* (симметрия относительно окружности). Обозначим

$$p = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Найдем производные

$$v'_x = u'_p \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - u'_q \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} v''_{xx} = \left(u''_{pp}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - u''_{qp}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \\ - \left(u''_{pq}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - u''_{qq}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} + \\ + u'_p\frac{(-2x)(x^2+y^2)^2 - 2(y^2-x^2)(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} - \\ - u'_q\frac{2y(x^2+y^2)^2 - 2yx\cdot 4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \\ = \left(u''_{pp}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - u''_{qp}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \\ - \left(u''_{pq}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - u''_{qq}\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} + u'_p\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} - u'_q\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Вторую производную по yy можно получить, заменив x на y. В итоге

$$v''_{xx} + v''_{yy} = \frac{u''_{pp} + u''_{qq}}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

так как изначальная функция была гармонической.

$\square$

Задача №3326

Проверить равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

если

$$u = \varphi(x-at) + \psi(x+at).$$

Решение: Уравнение из условие называется волновым, а в данном случае это уравнение описывает колебания струны.

Найдем производные

$$u'_t = -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at),$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x-at) + a^2\psi''(x+at),$$
$$u'_x = \varphi'(x-at) + \psi'(x+at),$$
$$u''_{xx} = \varphi''(x-at) + \psi''(x+at).$$

Из них очевидно, что равенство выполнено. □

Задача №3337

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ:

$$z = \varphi(x)\psi(y).$$

Решение: Иными словами, требуется придумать уравнение для данной функции.

Найдем производные

$$z'_x = \varphi'(x)\psi(y),$$
$$z'_y = \varphi(x)\psi'(y),$$
$$z''_{xx} = \varphi''(x)\psi(y),$$
$$z''_{yy} = \varphi(x)\psi''(y),$$
$$z''_{xy} = \varphi'(x)\psi'(y).$$

Можно заметить, что

$$z''_{xy} \cdot z = z'_x z'_y.$$

□

Теорема о неявной функции

Пусть дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Например, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ задает сферу.

Определение 9. Говорят, что над областью задана неявная функция $z(x, y)$, если при ее подстановке в равенство $F(x, y, z) = 0$, оно превращается в верное тождество.

Например, в случае сферы

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Всего можно придумать 2 неявных функций.

Теорема 7. *1) Пусть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.*

2) Функции $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в окрестности точки $A(x_0, y_0, z_0)$.

3) Выполнено $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки A_0 (ортогональная проекция точки A на Oxy) существует единственная непрерывная в этой окрестности функция $z = z(x, y)$:

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$$

и $z(x_0, y_0) = z_0$.

Теорема 8. *1) Пусть $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.*

2) Функции $F(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в окрестности точки $A(x_0, y_0, z_0)$.

3) Выполнено $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

4) Пусть функция F дифференцируема в окрестности точки A.

Тогда в некоторой окрестности точки A_0 (ортогональная проекция точки A на Oxy) существует единственная дифференцируемая в этой окрестности функция $z = z(x, y)$:

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$$

и $z(x_0, y_0) = z_0$.

Ее производные могут быть найдены так: $dF = 0$, то есть

$$\begin{cases} F'_x + F'_z z'_x = 0, \\ F'_y + F'_z z'_y = 0. \end{cases}$$

А именно

$$d(F(x, y, z(x, y)) = F'_x dx + F'_y dy + F'_z(z'_x dx + z'_y dy).$$

Задача №3383

Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Решение: Под условие теоремы нам не подходит только экваториальная окружность. Используем систему

$$\begin{cases} 2x + 2zz'_x = 0, \\ 2y + 2zz'_y = 0. \end{cases}$$

Итак,

$$z'_x = -\frac{x}{z},$$

$$z'_y = -\frac{y}{z}.$$

□

Теорема о неявной функции на плоскости

Пусть $F(x, y) = C$, $F(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и $F(x_0, y_0) = C$. И пусть F'_y непрерывна в окрестности точки A и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда

$$dF = 0 \iff F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Задача №3371

Для функции $y = y(x)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$$

Решение: По условию теоремы $F'_y = 2x - 2y \neq 0$, то есть $x \neq y$. Тогда

$$y'(x) = -\frac{2x+2y}{2x-2y} = \frac{x+y(x)}{y(x)-x}.$$

$$y''_{xx} = \frac{(1+y'(x))(y-x) - (y'(x)-1)(x+y)}{(y(x)-x)^2} = \frac{(1+\frac{x+y(x)}{y(x)-x})(y-x) - (\frac{x+y(x)}{y(x)-x}-1)(x+y)}{(y(x)-x)^2}.$$

$\square$

Семинар 21

21. Теорема о неявном отображении

Задача №3230.1

Существует ли $f''_{xy}(0,0)$, если

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

Решение: При $x^2+y^2=0$

$$f'_x(0,0)=0.$$

При $x^2+y^2>0$

$$f'_x(x,y)=\frac{2y(x^2+y^2)-2xy2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_x(0,y)=\frac{2}{y}.$$

Очевидно, что производной не существует. □

Задача №3351(а)

Пусть $u=f(x,y,z)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\},\ l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\},\ l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$$

— три взаимно перпендикулярных направления. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Решение: По сути нужно доказать, что при ортогональной замене длина вектора-градиента не изменится:

$$|\nabla(x,y,z)|^2=|\nabla(a,b,c)|^2,$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

Найдем производные

$$\frac{\partial u}{\partial a}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_1+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_2+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_2+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_3+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_3+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_3.$$

□

Задача №3375

Найти y' и y'' для функции

$$y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Решение: Пусть $\frac{y}{x} \neq 1$.

$$2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \cdot y = 0.$$

$$F'_y = 2x \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1 = -\frac{y^2}{x^2 + y^2} \neq 0$$

$$F'_x = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 2x \frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 2 \cdot \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \frac{y^3}{x(x^2 + y^2)}.$$

$$y'(x) = \frac{F'_x}{F'_y} = \frac{y}{x}.$$

$$y''(x) = \frac{y'(x) \cdot x - y(x)}{x^2} = 0.$$

□

Задача №3389

Найти вторые производные функции $z(x, y)$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$, если

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

Решение: Найдем производные

$$F'_z = 6z - 1 \neq 0,$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x + y}{6z - 1},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{4y + z}{6z - 1}.$$

$$z''_{xx} = \left(-\frac{2x + y}{6z(x, y) - 1}\right)'_x = -\frac{2(6z - 1) - (2x + y) \cdot 6z'_x}{(6z - 1)^2}.$$

Теперь подставим значения:

$$z'_x(1, -2)|_{z=1} = 0,$$

$$z''_{xx}(1, -2)|_{z=1} = -\frac{2}{5}.$$

Теперь найдем смешанную производную

$$z''_{xy} = \left(-\frac{2x + y}{6z(x, y) - 1}\right)'_y = -\frac{(6z - 1) - (2x + y) \cdot 6z'_y}{(6z - 1)^2},$$

$$z'_y = \frac{7}{5},$$
$$z''_{xy} = -\frac{1}{5}.$$
$$z''_{yy}|_A = \left(-\frac{4y+z}{6z-1}\right)'_y\bigg|_A = -\frac{4(6z-1)-(4y+x)\cdot 6z'_y}{(6z-1)^2}\bigg|_A = \frac{394}{125}.$$

□

Задача №3395

Найти z''_{xy}, если
$$F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Решение: Сделаем замену:
$$u = x+y+z, \quad v = x^2+y^2+z^2.$$
$$F'_z = F'_u \cdot 1 + F'_v \cdot 2z \neq 0.$$

Найдем производную
$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_u + F'_v \cdot 2x}{F'_u + F'_v \cdot 2z}.$$

Тогда
$$(F'_u(x+y+z, x^2+y^2+z^2))'_y = F''_{uu} + F''_{uv}\cdot 2y.$$
$$z''_{xy} = -\frac{(F''_{uu} + F''_{uv}\cdot 2y + (F''_{vu} + F''_{vv}\cdot 2y)\cdot 2x)(F'_u + F'_v\cdot 2z) - (\ldots)(F'_u + F'_v \cdot 2z)'_y}{(F'_u + F'_v \cdot 2z)^2}.$$

□

Задача №3400

Пусть $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x,y,z) = 0$. Доказать, что
$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Решение: Из
$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$$
получаем
$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy.$$

Аналогично можно поступить с двумя другими переменными. Перепишем равенство, которое нужно доказать в терминах функции F:
$$\left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)\cdot\left(\frac{F'_z}{F'_y}\right)\cdot\left(\frac{F'_x}{F'_z}\right) = -1,$$

что и требовалось. □

Теорема о неявном отображении

Теорема 9. *Пусть*

1) *имеют место равенства*

$$* \begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n)=0,\\ F_2(x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n)=0,\\ \vdots\\ F_n(x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_n)=0. \end{cases}$$

То есть $F=(F_1,\ldots,F_n):\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$, $F=\vec{0}$.

2) *Рассмотрим точку* $A(x_1^0,\ldots,x_m^0;y_1^0,\ldots,y_n^0)$, $F(A)=\vec{0}$.

3) $F_1,\ldots,F_n$ *дифференцируемы в окрестности точки* A.

4) $\left.\frac{F(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|_A \neq 0$, *то есть*

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1} & \cdots & (F_1)'_{y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (F_n)'_{y_1} & \cdots & (F_n)'_{y_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда

1) *в окрестности точки* A_0 *существует единственный набор непрерывных функций*

$$\left.\begin{pmatrix} y_1(x_1,\ldots,x_m)\\ \vdots\\ y_n(x_1,\ldots,x_m) \end{pmatrix}\right|_{A_0} = \begin{pmatrix} y_1^0\\ \vdots\\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

2) *система* $(*)$ *тождественно верна в окрестности точки* A_0.

3) *дифференциалы* $dy_1,\ldots,dy_n$ *можно найти из*

$$\begin{cases} (F_1)'_{x_1}dx_1+\ldots+(F_1)'_{x_m}dx_m+(F_1)'_{y_1}dy_1+\ldots+(F_1)'_{x_n}dx_n=0,\\ \vdots\\ (F_n)'_{x_1}dx_1+\ldots+(F_n)'_{x_m}dx_m+(F_n)'_{y_1}dy_1+\ldots+(F_n)'_{x_n}dx_n=0. \end{cases}$$

Задача №3403.1

Система уравнений

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

определяет дифференцируемые функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ такие, что $u(1, 2) = 0$ и $v(1, 2) = 0$. Найти $du(1, 2)$ и $dv(1, 2)$.

Решение: Найдем дифференциалы

$$\begin{cases} e^{u+v}dx + (xe^{u+v} + 2v)du + (xe^{u+v} + 2u)dv = 0, \\ -2dx + e^{u-v}dy + (ye^{u-v} - \frac{1}{1+v})du + (-ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2})dv = 0. \end{cases}$$

Подставим значения. Получим

$$\begin{cases} dx + du + dv = 0, \\ -2dx + dy + du - 2dv = 0. \end{cases}$$

Эта система разрешима.

$$dv = -dx + \frac{1}{3}dy.$$

$$du = -dv - dx = -\frac{1}{3}dy,$$

$$v'_y(1, 2) = \frac{1}{3},$$

$$u'_x(1, 2) = 0,$$

$$u'_y(1, 2) = \frac{1}{3}.$$

□

Задача №3407.2

Найти z''_{xy} в точке $u = 2$, $v = 1$, если

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3 \\ z = 2uv. \end{cases}$$

Решение: Подставим точки

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$$

Найдем дифференциалы

$$\begin{cases} dx = du + 2vdv, \\ dy = 2udu - 3v^2dv \\ dz = 2vdu + 2udv. \end{cases}$$

Получились векторы

$$A(1, 2v) + B(2u, -2v) = (2v, 2u).$$

Итак,

$$\begin{cases} A + 2Bu = 2v, \\ 2Av - 2Bv = 2u. \end{cases}$$

$$4uvB + 2Bv = 2v^2 - 2u.$$

$$B = \frac{2v^2 - u}{2uv + v}.$$

$$A = \frac{2(u^2 + v^2)}{v + 2uv}.$$

Найдем производные

$$(z'_x)'_y = \left(\frac{2(u^2 + v^2)}{v + 2uv}\right)'_y.$$

$\square$

Семинар 22

22. Замена переменной в выражениях, содержащих производные функции одной переменной

Разбор контрольной: задача 1

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\sin\frac{k}{n}=?$$

Решение: В таких задачах заменять нужно (как правило) ту часть, где есть n^2. Посчитаем сумму

$$b_n = sum_{j=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\longrightarrow\int_0^1 x\sin x dx,$$

где $f(x)=x\sin x$.

$$\int_0^1 x\sin x dx = -x\cos x|_0^1+\int_0^1\cos x dx = -\cos 1+\sin 1$$

Таким образом,

$$b_n=\sin 1-\cos 1.$$

Теперь поделим слагаемые исходной суммы на слагаемые суммы b_n:

$$\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n}}=\frac{\ln(1+t)}{t}\le 1,\quad t\le\frac{1}{n}.$$

Так как $t\le\frac{1}{n}$, имеют место неравенства

$$c_n=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\le\frac{\ln(1+t)}{t}\le 1.$$

Последовательность $c_n\longrightarrow 1$. Следовательно, по теореме о зажатой последовательности

$$c_nb_n\le a_n\le b_n,$$

и

$$a_n\longrightarrow\sin 1-\cos 1.$$

□

Разбор контрольной: задача 2

Оценить интеграл
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{x}\cos x dx.$$

Решение: Проинтегрируем по частям
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{x}\cos x dx=\sqrt{x}\sin x|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=-\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x+\pi}}dx<0.$$
Можно сделать другим способом. Заметим, что
$$\cos x=\cos(2\pi-x)=-\cos(\pi-x)=-\cos(\pi+x).$$
Тогда
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{x}\cos x dx=\int_0^{\pi/2}\cos x(\sqrt{x}+\sqrt{2\pi-x}-\sqrt{\pi-x}-\sqrt{\pi+x})dx.$$
Здесь $\cos x>0$, поэтому осталось сравнить значения в скобках. Если
$$f(x)=\sqrt{\pi-x}+\sqrt{\pi+x}$$
— убывающая функция, то выражение в скобках примет вид ($\pi-x>x$)
$$f(\pi-x)-f(x)<0.$$
Следовательно, исходный интеграл меньше нуля. □

Разбор контрольной: задача 3

Найти длину кривой $r=\sin\varphi+\cos\varphi$, $r\geq 0$.

Решение: Перейдем к декартовым координатам
$$r^2=r\sin\varphi+r\cos\varphi,$$
$$x^2+y^2=x+y,$$
$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$
— окружность. Итак, условие на неотрицательность r
$$\sin\varphi+\cos\varphi\geq 0.$$
$$\sqrt{2}(\sin\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})\geq 0,$$
$$\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})\geq 0.$$
Вычислим длину кривой:
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi=\pi\sqrt{2}.$$
□

Разбор контрольной: задача 4

Найти объем области, ограниченной поверхностями

$$|z| = (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Решение: С помощью подстановки понимаем, что $|z| = 4^2$. Следовательно,

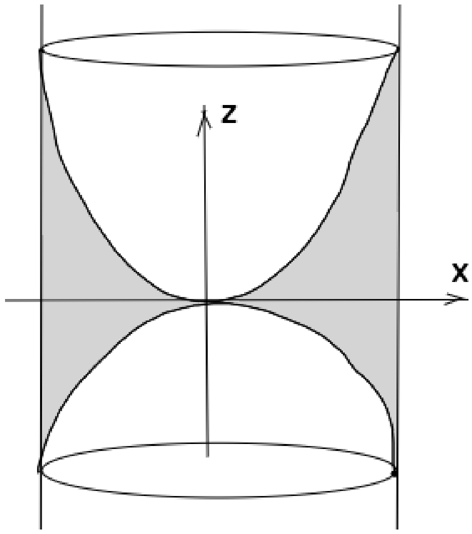


Рис. 22.8: Две поверхности

$$V = 2\int_0^{16} S(z)dz.$$

Итак, у нас две окружности

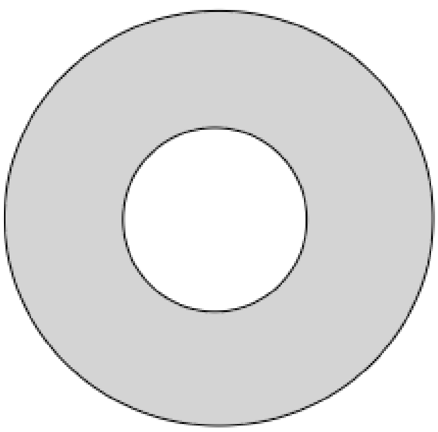


Рис. 22.9: Две окружности

$$x^2 + y^2 = \sqrt{|z|},$$

$$x^2 + y^2 = 4,$$

и нас интересует область между ними:

$$4\pi - \pi\sqrt{z}.$$

Итак,

$$V = 2\int_0^{16} S(z)dz = 2\pi\int_0^{16} 4 - \sqrt{z}dz = 2\pi(64 - \frac{2}{3}z^{3/2})\Big|_0^{16}.$$

□

Разбор контрольной: задача 5

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x + x^p}dx$$

Решение: Если $0 \le f(x) \le g(x)$, то если существует интеграл от $g(x)$, то существует интеграл и от $f(x)$. Если есть эквивалентность $f(x) \sim g(x)$, то интегралы от этих функций существуют одновременно.

Разобьем исходный интеграл на два:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x + x^p}dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x + x^p}dx.$$

В случае первого интеграла имеет место эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$. Исследуем интеграл

$$\int_0^1 \frac{x}{x + x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^{p-1}}dx$$

— здесь никаких особенностей нет, и интеграл сходится всегда.

Второй интеграл: имеют место неравенства при некотором $x > x_0$ и для $x > x_\varepsilon$

$$\frac{x^\varepsilon}{x + x^p} \ge \frac{\ln(1+x)}{x + x^p} \ge \frac{1}{x + x^p},$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon} \longrightarrow 0,$$

$$1 > \frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon}.$$

Теперь надо разобрать случаи.

1) При $p > 1$

$$\frac{1}{x + x^p} \asymp \frac{1}{x^p},$$

в этом случае интеграл существует.

2) $p = 1$, получаем $\frac{1}{2x}$, интеграл расходится.

3) $p < 1$, получаем
$$\frac{1}{x+x^p} \asymp \frac{1}{x}$$
— расходится.

По признаку сравнения получаем, что при $p \leq 1$ интеграл
$$\frac{\ln(1+x)}{x+x^p}$$
тоже будет расходится. Однако у нас есть оценка сверху
$$\frac{1}{x^{1-\varepsilon}+x^{p-\varepsilon}},$$
если $p-\varepsilon > 1$, то интеграл будет сходится. □

Замена одной переменной

Прежде, чем исследовать дифференциальные уравнения, можно преобразовывать координаты, чтобы было удобно искать решение.

Пусть $y(x)$ — некоторая функция. Мы хотим сделать преобразование, то есть перейти к другой функции — $x(t)$, то есть получим
$$y(t) = y(x(t)).$$
Обозначение: производную по t будем обозначать точкой — $\dot{y}$.

Задача №3434

Вводя новые переменные, преобразовать следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:
$$x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x = e^t.$$
Решение: Найдем
$$\dot{y} = y' \cdot e^t.$$
Тогда
$$y' = \frac{\dot{y}}{e^t}.$$
Найдем вторую производную
$$y'' = (y')' = \left(\frac{\dot{y}}{e^t}\right)' = \frac{\left(\frac{\dot{y}}{e^t}\right)^{\cdot}}{e^t} = \frac{\frac{\ddot{y}e^t-\dot{y}e^t}{(e^t)^2}}{e^t} = \frac{\ddot{y}}{e^{2t}} - \frac{\dot{y}}{e^{2t}}.$$
В операторной форме это будет выглядеть следующим образом
$$\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{d}{dt}\right).$$

Начинаем преобразовывать уравнение:

$$x = e^t,$$

$$x^2 = e^{2t},$$

$$y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Итак,

$$(\ddot{y} - \dot{y}) + \dot{y} + y = 0,$$

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Получилось уравнение колебаний. Решение имеет вид

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

а при обратной замене

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x).$$

$\square$

Задача №3436

Вводя новые переменные, преобразовать следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad x = \cos t.$$

Решение: У нас была функция $y(x)$, а мы хотим перейти к функции $y(x(t))$. Найдем производные:

$$\dot{y} = y' \cdot (-\sin t),$$

$$y' = -\frac{\dot{y}}{\sin t},$$

$$y'' = (y')' = -\frac{\left(-\frac{\dot{y}}{\sin t}\right)^{\cdot}}{\sin t} = \frac{\frac{\ddot{y}\sin t - \dot{y}\cos t}{\sin^2 t}}{\sin t}.$$

Делаем замены

$$1 - x^2 = \sin^2 t,$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\sin t - \dot{y}\cos t}{\sin^3 t}.$$

Итак, уравнение преобразуется так

$$(\ddot{y} - \dot{y}\operatorname{ctg} t) + \dot{y}\operatorname{ctg} t + n^2 y = 0,$$

$$\ddot{y} + n^2 y = 0.$$

Решение имеет вид

$$y = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt,$$

$$y = c_1 \cos(n \arccos t) + c_2 \sin(n \arccos t)$$

— многочлен Чебышева. $\square$

Замена двух переменных

Пусть теперь в уравнении мы меняем две функции

$$\begin{cases} x = f(t,u), \\ y = g(t,u). \end{cases}$$

Должна действовать теорема о неявном отображении, которая была разобрана в прошлом семинаре. Применим дифференциал к системе

$$\begin{cases} dx = f'_t dt + f'_u du, \\ dy = g'_t dt + g'_u du. \end{cases}$$

Получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'_t dt + g'_u du}{f'_t dt + f'_u du} = \frac{g'_t + g'_u \dot{u}}{f'_t + f'_u \dot{u}}.$$

Задача №3439

Вводя новые переменные, преобразовать следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0,$$

если

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = u(t)e^{2t}. \end{cases}$$

Решение: В данном случае

$$\begin{cases} x = f(t,u) = e^t, \\ y = g(t,u) = u(t)e^{2t}. \end{cases}$$

Тогда по формуле

$$y' = \frac{2ue^{2t} + e^{2t}\dot{u}}{e^t} = e^t(2u + \dot{u}) = z.$$

Нужно найти $y'' = z'$. Сделаем замену

$$\begin{cases} x = e^t, \\ z = e^t(2u + \dot{u}(t)) = g(t,u). \end{cases}$$

По формуле

$$z' = \frac{e^t(2u + \dot{u}) + e^t\ddot{u} + 2e^t\dot{u}'}{e^t}.$$

Итак,

$$y'' = z' = 2u + 3\dot{u} + \ddot{u}.$$

Сделаем замену в уравнении:

$$e^{4t}(\ddot{u} + 3\dot{u} + 2u) + e^t \cdot u \cdot e^{2t} \cdot e^t \cdot (2u + \dot{u}) - 2u^2 e^{4t} = 0,$$

$$\ddot{u} + 3\dot{u} + 2u + 2u^2 + \dot{u}u - 2u^2 = 0,$$
$$\ddot{u} + 3\dot{u} + 2u + \dot{u}u = 0.$$

$\square$

Семинар 23

23. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные

Задача №3407

В какой области плоскости Oxy система уравнений

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, \\ z = u^3 + v^3, \end{cases}$$

где параметры u и v принимают всевозможные вещественные значения, определяет z как функцию от переменных x и y? Найти производные z'_x и z'_y.

Решение: Применим дифференциал к системе

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2udu + 2vdv, \\ dz = 3u^2du + 3v^2dv. \end{cases}$$

Если определитель не равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow u \neq v,$$

то однозначно можно выразить u и v через dx и dy $(y > x^2/2)$.

Далее

$$\begin{cases} A + 2u \cdot B = 3u^2, \\ A + 2v \cdot B = 3v^2. \end{cases}$$

Найдем значение B, а именно

$$B = \frac{3u^2 - 3v^2}{2u - 2v} = \frac{3}{2}(u + v).$$

Следовательно,

$$A = 3u^2 - 3(u + v)u = -3uv.$$

Итак,

$$dz = -3uvdx + \frac{3}{2}(u + v)dy.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u + v).$$

□

Задача №3391

Найти dz и d^2z, если
$$xyz = x + y + z.$$

Решение: Обозначим
$$F(x, y, z) = xyz - x - y - z = 0.$$

Найдем дифференциал dF
$$(yz - 1)dx + (xz - 1)dy + (yx - 1)dz = 0.$$

Выразим отсюда dz:
$$dz = \frac{1 - yz}{xy - 1}dx + \frac{1 - xz}{xy - 1}dy = z'_x dx + z'_y dy.$$

Найдем второй дифференциал
$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

Найдем частные производные:
$$\left(\frac{1 - yz}{xy - 1}\right)'_y = \frac{\left(-z - y\frac{1-xz}{xy-1}\right)(xy - 1) - x(1 - yz)}{(xy - 1)^2} = \frac{z - y - x + xyz}{(xy - 1)^2}$$
$$\left(\frac{1 - xz}{xy - 1}\right)'_y = \frac{-2x(1 - xz)}{(xy - 1)^2},$$
$$\left(\frac{1 - yz}{xy - 1}\right)'_x = \frac{-2y(1 - yz)}{(xy - 1)^2}.$$

□

Задача №3444

Преобразовать уравнение Стокса
$$y'' = \frac{Ay}{(x - a)^2(x - b)^2},$$

полагая
$$u = \frac{y}{x - b}, \quad t = \ln\left|\frac{x - a}{x - b}\right|$$

и принимая u за функцию переменной t.

Решение: Найдем производные
$$\frac{dt}{dx} = \frac{a - b}{(x - a)(x - b)},$$

$$y' = \frac{du}{dx}(x-b) + u = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}(x-b) + u = \dot{u}\left(\frac{a-b}{x-a}\right) + u.$$

Найдем производную второго порядка

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\ddot{u}\frac{a-b}{x-a} + \dot{u} - \dot{u}\frac{a-b}{(x-a)^2}\frac{dx}{dt}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2(x-b)}(\ddot{u}(a-b)^2 - \dot{u}(a-b)^2) = \frac{A(x-b)u}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

Итак,

$$\ddot{u} - \dot{u} = \frac{Au}{(a-b)^2}.$$

□

Задача №3407.2

Найти z''_{xy} в точке $u = 2$, $v = 1$, если

$$\begin{cases} x = u + v^2, \\ y = u^2 - v^3, \\ z = 2uv. \end{cases}$$

Решение: Найдем dz:

$$dz = \frac{2(v^2+u^2)}{2uv+v}dx + \frac{2v^2-u}{2uv+v}dy.$$

Найдем смешанные производные

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 2\left(\frac{v^2+u^2}{2uv+v}\right)'_y = 2\frac{(2vv'_y + 2uu'_y)(2uv+v) - (v^2+u^2)(2u'_y v + 2v'_y u + u'_y)}{(2uv+v)^2}.$$

Подставим в дифференциалы значения $u = 2$, $v = 1$:

$$\begin{cases} dx = du + 2dv, \\ dy = 4du - 2dv. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} du = \frac{1}{5}dx + \frac{1}{5}dy, \\ dv = \frac{4}{10}dx - \frac{1}{10}dy. \end{cases}$$

Тогда

$$z''_{xy} = \frac{7}{25}.$$

□

Задача №3433

Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв за x функцию и $t = xy$ — за независимую переменную.

Решение: Найдем дифференциал

$$dt = ydx + xdy,$$

следовательно,

$$\frac{dt}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}.$$

Найдем производные

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dot{x}x} - \frac{y}{x},$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \left(\frac{-\ddot{x}x - (\dot{x})^2}{\dot{x}^2x^2} - \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{\dot{x}},$$

где

$$\dot{y} = y'\dot{x} = \frac{1}{x} - \frac{y\dot{x}}{x}.$$

Подставляем:

$$y'' = \frac{-\ddot{x}x - (\dot{x})^2 - \dot{y}x\dot{x}^2 + y\dot{x}^3}{\dot{x}^3x^2},$$

где

$$\dot{y}\dot{x}^2 = \frac{(\dot{x})^2 - y(\dot{x})^3}{x}.$$

Получаем

$$y'' = \frac{-\ddot{x}x - (\dot{x})^2 - (\dot{x})^2 + y(\dot{x})^3 + y\dot{x}^3}{\dot{x}^3x^2},$$

$$\frac{2}{x}y' = \frac{2(1 - y\dot{x}}{\dot{x}x^2}, \quad y = \frac{t}{x}.$$

Умножим всю сумму сразу на $\dot{x}^3x^2$:

$$-\ddot{x}x - (\dot{x})^2 - (\dot{x})^2 + 2y(\dot{x})^3 + 2(1 - y\dot{x})\dot{x}^2 + tx\dot{x}^3 = 0,$$

$$\ddot{x} = t\dot{x}^3,$$

$$\dot{f} = tf^3.$$

Здесь мы считали, что $x \neq 0$. □

Задача №3458

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующее уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

если

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y.$$

Решение: Найдем дифференциалы

$$d\xi = dx + dy,$$

$$d\eta = dx - dy,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta.$$

Подставим первые два выражения в третье:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}(dx + dy) + \frac{\partial z}{\partial \eta}(dx - dy) = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) dy.$$

Следовательно,

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Следовательно,

$$z = f(\xi) = f(x + y).$$

□

Задача №3460

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующее уравнение

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1, \quad a \neq 0,$$

если

$$\xi = x, \quad \eta = y - bz.$$

Решение: Запишем соотношение на дифференциалы:

$$d\xi = dx,$$

$$d\eta = dy - bdz,$$

$$dz = z'_\xi d\xi + z'_\eta d\eta.$$

Подставим первые два выражения в третье:

$$dz = z'_\xi dx + z'_\eta dy - bz'_\eta dz,$$

$$dz = \frac{z'_\xi}{1 + bz'_\eta} dx + \frac{z'_\eta}{1 + bz'_\eta} dy.$$

Подставляем в уравнение

$$\frac{az'_\xi}{1 + bz'_\eta} + \frac{bz'_\eta}{1 + bz'_\eta} = 1,$$

$$az'_\xi = 1,$$

$$z'_\xi = \frac{1}{a},$$

$$z = \frac{1}{a}\xi + f(\eta) = \frac{1}{a}x + f(y - bz).$$

□

Задача №3474

Перейти к новым переменным u, v, w, где $w = w(u, v)$, в следующем уравнении:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z,$$

если

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

$$w = \ln z - (x + y).$$

Решение: Найдем дифференциалы

$$du = 2xdx + 2ydy,$$

$$dv = -\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy,$$

$$dw = \frac{1}{z}dz - dx - dy,$$

$$dw = w'_u du + w'_v dv.$$

Подставляем три выражения в последнее

$$\frac{1}{z}dz - dx - dy = w'_u(2xdx + 2ydy) + w'_v\left(-\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy\right),$$

$$dz = z \cdot \left(\left(2xw'_u - \frac{1}{x^2}w'_v + 1\right)dx + \left(2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v + 1\right)dy\right).$$

Подставляем в уравнение

$$2xyw'_u - \frac{y}{x^2}w'_v + y - 2xyw'_u + \frac{x}{y^2}w'_v - x = y - x,$$

$$-(x^3 + y^3)w'_v = 0,$$
$$w'_v = 0,$$
$$w = f(u) = f(x^2 + y^2) = \ln z - (x + y),$$
$$z = e^{x+y}e^{f(x^2+y^2)}.$$

□

Задача №3488

Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

введя новые независимые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Решение: По теореме о производной сложной функции получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_\xi \cdot 1 + u'_\eta \cdot 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u'_\xi \cdot (-a) + u'_\eta \cdot a.$$

Продифференцируем суммы

$$u'_\xi(\xi(x,t), \eta(x,t)) + u'_\eta(\xi(x,t), \eta(x,t))$$

и

$$-au'_\xi(\xi(x,t), \eta(x,t)) + au'_\eta(\xi(x,t), \eta(x,t)).$$

Получим

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$
$$u''_{tt} = u''_{\xi\xi}a^2 - u''_{\xi\eta}a^2 - u''_{\xi\eta}a^2 + u''_{\eta\eta}a^2.$$

Подставляем в уравнение:

$$a^2u''_{\xi\xi} + a^2u''_{\xi\eta} + a^2u''_{\xi\eta} + a^2u''_{\eta\eta} = u''_{\xi\xi}a^2 - u''_{\xi\eta}a^2 - u''_{\xi\eta}a^2 + u''_{\eta\eta}a^2,$$

$$4a^2u''_{\xi\eta} = 0.$$

Так как по условию $a \neq 0$, имеем

$$u'_\xi = f(\xi).$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$u = F(\xi) + g(\eta).$$

Подстановка замен из условия дает ответ

$$u = f(x - at) + g(x + at).$$

□

Семинар 24

24. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной: касательная к кривой

Пусть у нас задана гладкая кривая $(x(t), y(t), z(t))$, а именно отображение из отрезка в пространство с условием

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0.$$

Для этой кривой появляется объект — касательная прямая к этой кривой. Эта прямая однозначно определяется точкой касания $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ и направляющим вектором $(x'(t), y'(t), z'(t))$.

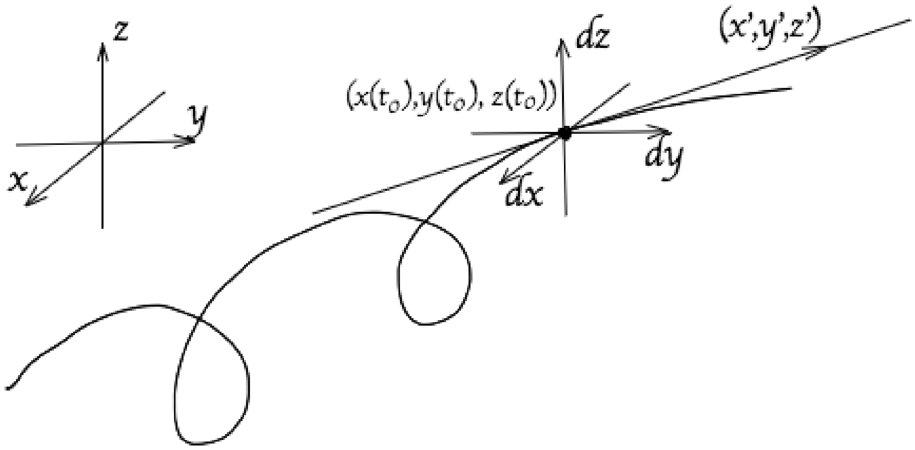


Рис. 24.10: Касательная к кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

Если мы немного отступим от точки касания рассмотрим некоторую точку $t = t_0 + \Delta t$. В общем случае мы будем двигаться по кривой, но теперь допустим, что мы движемся по касательной прямой. Как объяснить, что такое dx, dy и dz? Мы рассматриваем точку касания $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ и строим в ней новую систему координат так, что оси параллельны старым осям. Новые оси и будут dx, dy и dz. Получаем закон для движения по прямой

$$\begin{cases} x - x_0 = x'(t_0)\Delta t, \\ y - y_0 = y'(t_0)\Delta t, \\ z - z_0 = z'(t_0)\Delta t. \end{cases}$$

Теперь пусть точка (x, y, z) — точка на кривой, а (x_1, y_1, z_1) — на касательной прямой l. Оказывается,

$$\rho((x_1, y_1, z_1), (x, y, z)) = \bar{\bar{o}}(\Delta t).$$

Вообще говоря,

$$\rho(l,(x,y,z)) = \bar{\bar{o}}(\Delta t).$$

Уравнение касательной в канонической форме имеет вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}}.$$

Это следует из определения дифференцируемой функции.

Задача №3528

Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в данной точке к следующей кривой:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha\cos t, \\ y = a\sin\alpha\cos t, \\ z = a\sin t \end{cases}$$

в точке $t = t_0$.

Решение: Заметим, что

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0,$$

то есть кривая лежит в некоторой вертикальной плоскости. Кроме того, заметим, что

$$x^2+y^2 = a^2\cos^2 t,$$

$$z^2 = a^2\sin^2 t,$$

$$x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

Получили сферу. Пересечение сферы и плоскости дает окружность. Нам теперь нужно понять траекторию, по которой движется точка (в случае прямой).

Найдем производные по t, подставляя точку t_0:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\cos\alpha\sin t_0, \\ \dot{y} = -a\sin\alpha\sin t_0 \\ \dot{z} = a\cos t_0. \end{cases}$$

Это направляющий вектор касательной прямой. Запишем каноническое уравнение этой прямой

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}} = \frac{y-y_0}{\dot{y}} = \frac{z-z_0}{\dot{z}}.$$

Рассмотрим какой-то конкретный пример: пусть $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\cos\alpha, \\ \dot{y} = -a\sin\alpha \\ \dot{z} = 0, \end{cases}$$

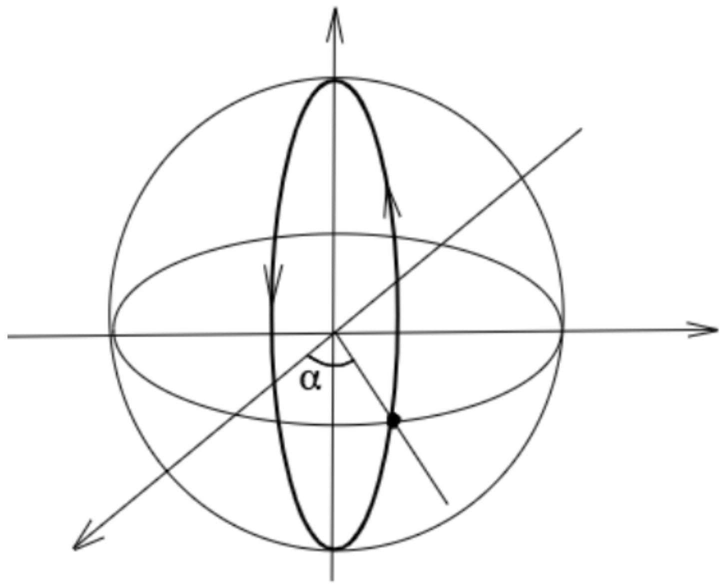


Рис. 24.11: Рисунок к задаче №3528

а уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{-a\cos\alpha} = \frac{y}{-a\sin\alpha}, \quad z = a.$$

Уравнение нормальной плоскости строится следующим образом:

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0.$$

В нашем случае это будет вертикальная плоскость

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0.$$

□

Геометрический смысл производной в случае плоскости

Пусть теперь поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$.

Определение 10. Функция от двух переменных называется *дифференцируемой*, если

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \bar{\bar{o}}\left(\rho((x,y),(x_0,y_0))\right).$$

Касательная плоскость имеет вид

$$\boxed{z_1 - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)}.$$

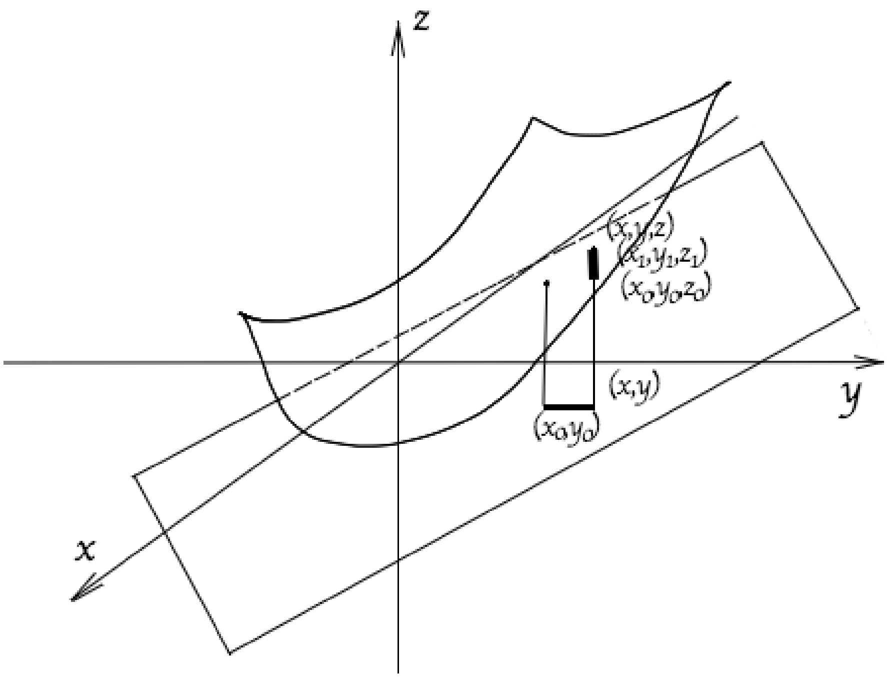


Рис. 24.12: Касательная плоскость

Задача №3539

Написать уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке к следующей поверхности:

$$z = x^2 + y^2$$

в точке $M_0(1, 2, 5)$.

Решение: Это параболоид вращения. Найдем дифференциал

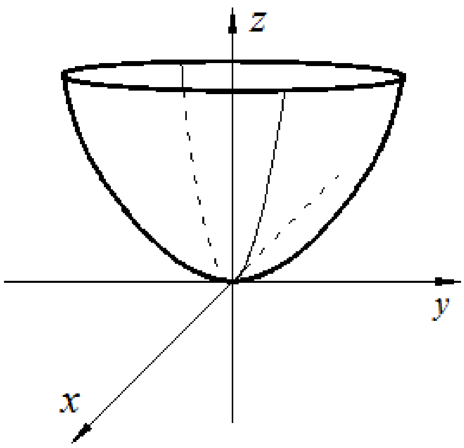


Рис. 24.13: Рисунок к задаче №3539

$$dz = 2xdx + 2ydy.$$

Далее воспользуемся уравнением касательной плоскости, подставив значения:

$$z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2).$$

Теперь найдем уравнение нормальной прямой для данной поверхности:

$$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0,$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}.$$

□

Касательная плоскость для неявной функции

Пусть теперь поверхность задана неявной функцией: $F(x, y, z) = 0$. Теорема о неявной функции утверждает, что при выполнении некоторых условий существует функция $z(x, y)$, которое обращает равенство $F(x, y, z) = 0$ в верное тождество. Кроме того, диффереcниал можно найти из равенства

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости выглядит так:

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0.$$

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0).}$$

Вектор нормали для этой плоскости (и для самой поверхности в данной точке) — это градиент:

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z).$$

Пример 7. Для окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$ вектор нормали имеет вид $(2x, 2y)$.

Пример 8. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ вектор единичной нормали имеет вид $\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$.

Задача №3550

В какой точке эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Решение: Запишем градиент (то есть нормаль) этой поверхности

$$\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right).$$

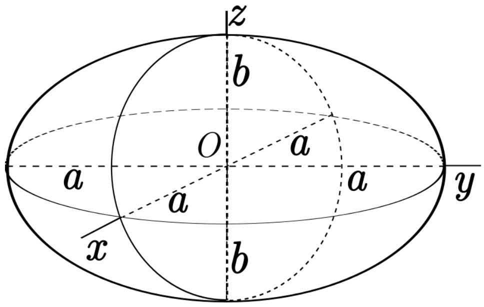


Рис. 24.14: Рисунок к задаче №3550

Итак, точки которые мы ищем удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \\ \frac{x}{a^2} = \frac{y}{a^2} = \frac{z}{a^2} = t. \end{cases}$$

Подставим значение t в первое уравнение:

$$a^2t + b^2t + c^2t = 1,$$

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Получается, что решениями являются две точки

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

$$-\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

□

Задача №3548

Найти уравнение касательной плоскости к поверхности

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2, \\ z = u^3 + v^3. \end{cases}$$

Решение: По теореме о неявной функции мы с помощью дифференциалов можем найти уравнение касательной поверхности

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2udu + 2vdv, \\ dz = 3u^2du + 3v^2dv. \end{cases}$$

Далее с помощью подбора коэффициентов получаем уравнение.

Другой способ состоит в том, что мы ищем два вектора в касательной плоскости. Сначала можно зафиксировать v — получим кривую, которая лежит на поверхности и проходит через данную точку. Фиксируя теперь u, но меняя v, получим другую кривую на поверхности, проходящую через данную точку. Касательный вектор для кривой — это производная. Таким образом, получаем два вектора (касательные векторы для кривых), которые и образуют касательную плоскость.

Вектор нормали ищется через векторное произведение двух касательных векторов. □

Задача №3532

Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в данной точке к следующей кривой:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

в точке $M(1,-2,1)$.

Решение: Находим дифференциалы

$$\begin{cases} xdx+ydy+zdz=0, \\ dx+dy+dz=0. \end{cases}$$

Получаем

$$xdx+ydy+z(-dx-dy)=0,$$

$$(x-z)dx=(z-y)dy.$$

Вспомним, как выглядело уравнение кривой

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}}, |: dt$$

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dx}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dx}}.$$

Здесь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-z}{z-y},$$

$$dz=-dx-dy \Longrightarrow \frac{dz}{dx}=-1-\frac{dy}{dx}=-1-\frac{x-z}{z-y}=\frac{y-z-x+z}{z-y}=\frac{y-x}{z-y}.$$

Подставляем

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

здесь вторая дробь означает, что $y=-2$.

Найдем нормальную плоскость к нашей кривой. Два касательных вектора к плоскостям в системе:

$$(x,y,z), \quad (1,1,1).$$

Построим теперь касательный вектор

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3).$$

□

Задача о побеге из тюрьмы

Пусть у нас есть дорога, на которой расположена тюрьма. По дороге сбежавший заключенный бежит со скоростью k км/ч, а по полю 1 км/ч. Побег был замечен только спустя час. Вопрос: где заключенный может находиться в это время?

Решение: Можно использовать геометрический подход. Рассмотрим последнюю точку, когда заключенный находился на дороге. Получается, что во-первых, он прошел по дороге некоторое расстояние kt, а значит по прошествии часа он будет находиться в круге радиуса $1-t$ с центром в точке kt. Итак, ответ будет следующий: нужно взять объединение всех кругов с центрами в точках kt и радиусами $1-t$ соответственно.

Получается семейство

$$(x-kt)^2 + y^2 - (1-t)^2 = 0.$$

Касательная плоскость должна быть перпендикулярна поверхности, значит $F'_t = 0$. Получим

$$2(kt-x)\cdot k - 2(t-1) = 0$$

— огибающая. □

Задача №3570

Найти кривую, огибаемую отрезком длины l, концы которого скользят по осям координат («падающая лестница»).

Решение: Введем параметр — угол α между прямой и осью Ox. Длину отрезка положим $l = 1$. Как написать уравнение прямой, проходящий через этот отрезок (с координатами точек касания $(\cos\alpha, 0)$ и $(0, \sin\alpha)$)? Используем уравнение прямой в отрезках: если прямая пересекает ось Ox в точке p, а ось Oy в точке q, то уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Для наших прямых уравнение имеет вид

$$\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = 1.$$

Ограничение на параметр — $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Как найти точку на огибающей кривой? Первое условие — само уравнение прямых, второе — это же выражение, продифференцированное по параметру и приравненное к нулю

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = 1, \\ \frac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0. \end{cases}$$

Параметризация

$$\begin{cases} x = \cos^3\alpha, \\ y = \sin^3\alpha \end{cases}$$

нам подходит. Это параметризация астроиды. $\square$

Семинар 25

25. Экстремум функций нескольких переменных

Задача №3553

Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\Phi : \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}, \quad a > 0$$

отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

Решение: Найдем дифференциал

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx + \frac{1}{\sqrt{y}}dy + \frac{1}{\sqrt{z}}dz = 0.$$

Тогда касательная плоскость в точке $A(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z}}(z - z_0) = 0.$$

Итак, касательная плоскость имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}.$$

Далее ищем пересечение с осями координат

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Получим, что

$$x = \sqrt{x_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}).$$

□

Задача №3501

С помощью линейной замены

$$\begin{cases} \xi = x + \lambda_1 y, \\ \eta = x + \lambda_2 y \end{cases}$$

преобразовать уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (1)$$

где A, B и C — постоянные и $AC - B^2 < 0$, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0.$$

Найти общий вид функции, удовлетворяющей уравнению (1).

Решение: Найдем дифференциалы

$$d\xi = dx + \lambda_1 dy,$$

$$d\eta = dx + \lambda_2 dy,$$

$$du = u'_\xi d\xi + u'_\eta d\eta.$$

Получаем

$$du = (u'_\xi + u'_\eta)dx + (\lambda_1 u'_\xi + \lambda_2 u'_\eta)dy.$$

Ищем вторые производные:

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi}\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)u''_{\xi\eta} + \lambda_2 u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi}\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 u''_{\xi\eta} + \lambda_2^2 u''_{\eta\eta}.$$

Обозначим

$$f(\lambda) = A + 2\lambda B + C\lambda^2.$$

Имеем

$$f(\lambda)u''_{\xi\xi} + (2A + 2B(\lambda_1 + \lambda_2) + 2C\lambda_1\lambda_2)u''_{\xi\eta} + f(\lambda_2)u''_{\eta\eta} = 0.$$

□

Задача №3556

Найти проекции эллипсоида

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

на координатные плоскости.

Решение: Рассмотрим проекцию на Oxy:

$$F'_z = 0 \Longleftrightarrow 2z = 0, \quad z = 0.$$

Имеет место система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

получаем

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1.$$

Рассмотрим проекцию на Oxz:

$$F'_y = 0 \Longleftrightarrow 2y - x = 0,$$

имеет место система

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2}, \\ \frac{3x^2}{4} + z^2 = 1, \end{cases}$$

получаем

$$\frac{3x^2}{4} + z^2 \leq 1.$$

Рассмотрим проекцию на Oyz:

$$F'_x = 0 \Longleftrightarrow 2x - y = 0.$$

Имеет место система

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2}, \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 = 1, \end{cases}$$

получаем

$$\frac{3y^2}{4} + z^2 \leq 1.$$

$\square$

Экстремум функций нескольких переменных

Пусть у нас определена функция $f(x, y)$ на плоскости $M \subset \mathbb{R}^2$.

Всего экстремумов может быть 8 типов: минимум или максимум (знак больше или меньше), локальный или глобальный, строгий или нестрогий (знак больше/меньше или «больше или равно»/«меньше или равно»).

Локальный максимум: $\exists \varepsilon > 0\, \forall (x, y) \in \bar{B}'_\varepsilon(x_0, y_0) \cap M$ выполнено соответствующее неравенство (например, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для $(x_0, y_0) \neq (x, y)$).

Глобальный максимум: $\forall (x, y) \in M \setminus (x, y)$ выполнено соответствующее неравенство (например, $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для $(x_0, y_0) \neq (x, y)$).

Необходимое условие локального экстремума

При каких условиях на функцию f можно утверждать, что разность

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

будет положительна или отрицательна? Определение дифференцируемой функции дает следующий явный вид этой разности

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \bar{\bar{o}}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

Если точка (x_0, y_0) — точка локального экстремума, вблизи этой точки функция f определена и в самой точке функция дифференцируема, то ее частные производные в этой точке равны нулю

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Эти точки называются *критическими*.

Задача №3621

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

$$z = x^2 + (y-1)^2.$$

Решение: Найдем критические точки. Запишем необходимое условие локального экстремума:

$$z'_x = z'_y = 0,$$

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2(y-1) = 0. \end{cases}$$

Получили точку $(0,1)$. Видно, что $z(0,1) = 0$ и $z > 0$ вне этой точки. Следовательно, это точка строгого глобального минимума. $\square$

Задача №3622

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

$$z = x^2 - (y-1)^2.$$

Решение: Найдем критические точки. Запишем необходимое условие локального экстремума:

$$z'_x = z'_y = 0,$$

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ -2(y-1) = 0. \end{cases}$$

Получили точку $(0,1)$. Видно, что $z(0,1) = 0$. Это точка перегиба: фиксируя y, получаем возрастающую функцию, а фиксируя x — убывающую. $\square$

Задача №3623

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

$$z = (x-y+1)^2.$$

Решение: Найдем критические точки. Запишем необходимое условие локального экстремума:

$$z'_x = z'_y = 0,$$

$$\begin{cases} 2(x-y+1) = 0, \\ -2(x-y+1) = 0. \end{cases}$$

Получили прямую $x - y + 1 = 0$. Все эти точки будут точками нестрогого глобального минимума. $\square$

Формула Тейлора для двух переменных

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \bar{\bar{o}}((\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^n).$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1,y_1,x-x_0,y-y_0),$$

где

$$x_1 = x_0 + \theta(x-x_0), \quad y_1 = y_0 + \theta(y-y_0), \quad \theta \in (0,1).$$

Точки минимума и максимума, квадратичная форма

Какие условия нам гарантируют, что в точке будет минимум или максимум? Эти условия будут связаны со вторым дифференциалом.

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0) + r_2.$$

Напомним вид квадратичной формы

$$g(u,v) = Au^2 + 2buv + Cv^2.$$

Если $\forall (u,v) \neq (0,0)$

1) $g(u,v) > 0$, то квадратичная форма положительно определена — точка минимума;
2) $g(u,v) < 0$, то квадратичная форма отрицательно определена — точка максимума;
3) переменного знака;
4) вырожденные формы.

Задача №3625

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

$$z = x^2y^3(6-x-y)^2.$$

Решение: Найдем критические точки. Запишем необходимое условие локального экстремума:

$$z'_x = z'_y = 0,$$

$$\begin{cases} 2xy^3(6-x-y) - x^2y^3 = xy^3(12-3x-2y) = 0, \\ 3x^2y^2(6-x-y) - x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y) = 0. \end{cases}$$

Получаем, что

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ \begin{cases} 12-3x-2y = 0, \\ 18-3x-4y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ (2,3). \end{array}\right.$$

Исследуем второй дифференциал

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

в точке $(2,3)$. Найдем вторые производные в этой точке

$$z''_{xx} = y^3(12-3x-2y) - 3xy^3,$$

$$z''_{xx}(2,3) = -3\cdot 2\cdot 3^3 = -162.$$

$$z''_{xy} = 3xy^2(12-3x-2y) - 2xy^3,$$

$$z''_{xy}(2,3) = -108.$$

$$z''_{yy} = 2x^2y(12-3x-2y) - 4x^2y^2,$$

$$z''_{yy}(2,3) = -144.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра. Мы получили матрицу

$$\begin{pmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{pmatrix},$$

у которой все миноры чередуются знаками, начиная с минуса. Значит, это отрицательно определенная квадратичная форма. Следовательно, точка $(2,3)$ — точка локального максимума.

В случае прямых решим методом интервалов.

1) точки на оси Oy: $(-\infty;0)$ — точки максимума, точки $(0,6)$ — точки нестрогого минимума, точки $(6,+\infty)$ — точки максимума.

2) на всей оси Ox экстремумов нет.

$\square$

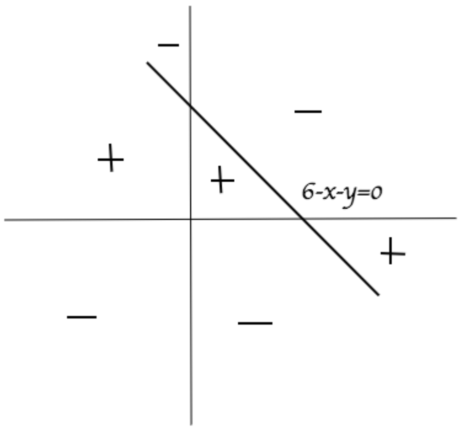


Рис. 25.15: Рисунок к задаче №3625

Задача №3643

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

$$u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Решение: Найдем критические точки. Запишем необходимое условие локального экстремума:

$$\begin{cases} u'_x = 3x^2 + 12y = 0, \\ u'_y = 2y + 12x = 0, \\ u'_z = 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

Получаем точки $(0, 0, -1)$ и $(24, -144, -1)$.

Исследуем с помощью второго дифференциала и критерия Сильвестра. Найдем вторые производные

$$u''_{xx} = 6x,$$
$$u''_{yy} = 2,$$
$$u''_{zz} = 2,$$
$$u''_{xy} = 3$$
$$u''_{xz} = 0,$$
$$u''_{yz} = 0.$$

Посмотрим на матрицу в точке $(0, 0, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не вырождена, а значит и квадратичная форма. В этой ситуации квадратичная форма будет знакопеременной. Значит, в этой точке экстремумов нет.

Посмотрим на матрицу в точке $(24, -144, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Все миноры положительны. Значит, форма положительно определена. Следовательно, точка $(24, -144, -1)$ — точка строгого локального минимума. □

Задача №3651

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Решение: Продифференцируем по x и по y:

$$2x + 2z'_x z - 2 - 4z'_x = 0,$$

$$2y + 2z'_y z + 2 - 4z'_y = 0.$$

Кроме того, $z'_x = z'_y = 0$. Итак, получаем

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Подставляем

$$z^2 - 4z - 12 = 0.$$

$$(z-2)^2 = 16,$$

$$z = 6; -2.$$

Получили точку максимума $(1, -1, 6)$ и точку минимума $(1, -1, -2)$. □

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ