МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. СЕМИНАРЫ. ЧАСТЬ 1

КОСУХИН ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

# Содержание

# Семинар 1

В курсе используется сборник задач и упражнений по математическому анализу Б. П. Демидовича.

## Множества

**Определение 1.1.** *Множество* – это совокупность каких-либо объектов, называемых *элементами* этого множества.

Множества обычно обозначаются большими буквами, у которых могут присутствовать индексы.

Запись $a \in A$ означает, что элемент $a$ принадлежит множеству $A$, а запись $a \notin A$ означает, что элемент $a$ не принадлежит множеству $A$.

**Определение 1.2.** Два множества называются *равными* тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов:

$$A = B \iff ((a \in A) \iff (a \in B)).$$

**Определение 1.3.** Множество $A$ *включается* в множество $B$, если все элементы множества $A$ принадлежат множеству $B$:

$$A \subset B \iff ((a \in A) \implies (a \in B)).$$

Иногда используют запись $A \subseteq B$, которая означает, что множество $A$ включается в множество $B$ или совпадает с ним. При использовании такой записи обычно подразумевается, что запись $A \subset B$ не допускает равенства множеств.

Множества можно изображать кругами (они называются круги Эйлера) или другими фигурами. Если использовать только круги, то, например, для 4 множеств не получится расположить круги так, чтобы реализовывались все 16 возможных вариантов включения или невключения элементов в множества.

**Упражнение 1.1** (На дом)**.** На какое наибольшее количество частей смогут разбить плоскость $n$ окружностей?

Выпишем способы задания множеств.

1) Задание перечислением элементов: $\{a, b, c, \ldots, z\}$. Порядок элементов не важен. Элементы в множестве не должны повторяться, а если и повторяются, то их кратность ни на что не влияет.

2) Задание некоторым законом: $\{x : \; P(x)\}$, или $\{x \mid P(x)\}$. Закон сам должен подчиняться некоторым правилам, чтобы не возникало противоречий. Например, нельзя задать множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента (парадокс Рассела). Также не существует множества всего.

3) Получение новых множеств путём применения операций над множествами (о них ниже) к уже имеющимся множествам.

**Определение 1.4.** $\varnothing$ – *пустое множество* – множество, не содержащее элементов.

**Определение 1.5.** $A = A_1 \cup A_2$ – *объединение множеств*:

$$a \in A \iff (a \in A_1 \text{ или } a \in A_2).$$

Причём «или» неисключающее. Объединять множества можно в любых количествах.

**Определение 1.6.** $B = A_1 \cap A_2$ – *пересечение множеств*:

$$a \in B \iff (a \in A_1 \text{ и } a \in A_2).$$

Пересекать множества можно в любых количествах.

**Определение 1.7.** $C = A \setminus B$ – *разность множеств*:

$$a \in C \iff (a \in A \text{ и } a \notin B).$$

**Определение 1.8.** $\overline{A}$ – *дополнение к множеству*:

$$a \in \overline{A} \iff a \notin A.$$

**Определение 1.9.** $C = A \triangle B$ – *симметрическая разность множеств*:

$$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**Утверждение 1.1.**

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

*Доказательство:*

Это хорошо видно с помощью кругов Эйлера.

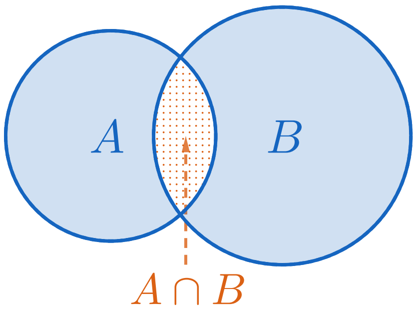


Рис. 1.1: Симметрическая разность $A \triangle B$ выделена синим

Формально это утверждение можно доказать полным перебором. ■

## Множество натуральных чисел

Множество натуральных чисел можно вводить по-разному. Например, опираясь на пустое множество:

$$1 := \{\varnothing\}, \qquad 2 := \{\varnothing, 1\}, \qquad \dots .$$

Менее абстрактный способ следующий. Натуральные числа – это числа, появившиеся в результате счёта, заданные определённым набором аксиом (например, аксиомами Пеано).

Натуральные числа обычно начинают с 1, но иногда и с 0. Можно сказать, что начало с 1 мотивированно использованием чисел для счёта, а начало с 0 – для описания количества.

Каждое следующее натуральное число получается из предыдущего добавлением 1.

## Метод математической индукции

Пусть требуется доказать утверждение $P(n)\ \ \forall n \geqslant n_0$. Тогда для доказательства по методу математической индукции надо проверить два пункта:

1) *база индукции*: $P(n_0)$ верно;

2) *шаг индукции*: $P(n) \implies P(n+1)\ \ \forall n \geqslant n_0$.

Второй пункт может быть обобщён: $P(n_0),\ \dots,\ P(n) \implies P(n+1)$.

В качестве примера докажем следующее утверждение.

**Утверждение 1.2.**

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

*Доказательство:*

База индукции: $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$ – верно.

Шаг индукции: надо показать, что из равенства

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

следует равенство

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Действительно,

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

■

В качестве примера неправильного применения метода индукции можно, например, «показать», что все лошади цвета.

База индукции: одна лошадь одного цвета – верна.

Шаг индукции: надо показать, что из утверждения «$n$ лошадей одного цвета» следует утверждение «$(n+1)$ лошадей одного цвета». Если $n$ лошадей одного цвета и к ним подвели новую лошадь, то одну старую лошадь можно временно отвести в сторону. Получим $n$ лошадей вместе с новой, которые одного цвета по предположению индукции, причём этот цвет такой же, как у старых лошадей. Теперь вернём назад одну старую лошадь. Получим, что $(n+1)$ лошадей одного цвета.

Ошибка в том, что шаг индукции не работает при $n=1$.

**Замечание 1.1.** Метод математической индукции позволяет доказать утверждение только для любого конечного значения $n$. В случае бесконечного значения $n$ утверждение может быть неверным.

## Бином Ньютона

**Утверждение 1.3.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

*– бином Ньютона, где* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *– биномиальные коэффициенты.*

Биномиальные коэффициенты удобно записывать в виде треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{lc}
n=0: & 1 \\
n=1: & 1 \quad 1 \\
n=2: & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n=3: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4: & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n=5: & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n=6: & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Треугольник Паскаля строится следующим образом: при переходе к следующей строке каждое число из текущей строки сносится по диагоналям направо и налево. В тех местах, куда попадают при сносе два числа, они складываются. Номер строки соответствует значению $n$, начиная с 0, а номер числа в строке соответствует значению $k$, тоже начиная с 0. Таким образом, каждое число в треугольнике Паскаля соответствует биномиальному коэффициенту $C_n^k$.

Также биномиальные коэффициенты $C_n^k$ имеют смысл количества способов, которым можно выбрать $k$ элементов из $n$-элементного множества.

Из треугольника Паскаля можно получить числа Фибоначчи. Это такая последовательность чисел, в которой первые два члена последовательности равны 1, а каждый следующий равен сумме двух предыдущих. Чтобы получит числа Фибоначчи из треугольника Паскаля, надо просуммировать числа вдоль параллельных наклонных линий, как это показано на картинке ниже.

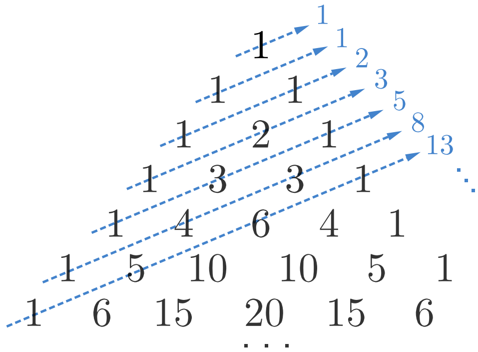


Рис. 1.2: Получение чисел Фибоначчи из треугольника Паскаля

Если в биноме Ньютона положить $a = b = 1$, то получим: $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Значит, сумма чисел в $n$-й строке треугольника Паскаля, считая с 0, равна $2^n$.

Так как треугольник Паскаля симметричен относительно центральной вертикали, то $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Оценим числа, стоящие на центральной вертикали. Так как такие числа есть только в строках с чётным номером $n$, то положим $n = 2k$.

**Утверждение 1.4.** *При $k \geqslant 2$ верно неравенство $C_{2k}^k \geqslant \dfrac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k + \frac{1}{4}}}$, причём равенство достигается только при $k = 2$.*

*Доказательство:*

При $k = 2$ (база индукции) имеем: $C_4^2 = 6$ и $\dfrac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k + \frac{1}{4}}} = 6$.

Покажем (шаг индукции), что из $C_{2k}^k \geqslant \dfrac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k + \frac{1}{4}}}$ следует

$$C_{2(k+1)}^{k+1} > \frac{9 \cdot 4^{k+1-2}}{\sqrt{k + 1 + \frac{1}{4}}} = \frac{9 \cdot 4^{k-1}}{\sqrt{k + \frac{5}{4}}}.$$

Выразим $C_{2(k+1)}^{k+1}$ через $C_{2k}^k$ и используем предположение индукции:

$$C_{2(k+1)}^{k+1} = \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k)!}{k!k!} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)} =$$

$$= C_{2k}^k \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} \geqslant \frac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k + \frac{1}{4}}} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1}.$$

Значит, достаточно показать, что при $k > 2$ верно неравенство

$$\frac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k+\frac{1}{4}}} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} > \frac{9 \cdot 4^{k-1}}{\sqrt{k+\frac{5}{4}}}.$$

Выполним эквивалентные преобразования с доказываемым неравенством:

$$\frac{9 \cdot 4^{k-2}}{\sqrt{k+\frac{1}{4}}} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} > \frac{9 \cdot 4^{k-1}}{\sqrt{k+\frac{5}{4}}} \iff \frac{2(2k+1)}{(k+1)\sqrt{k+\frac{1}{4}}} > \frac{4}{\sqrt{k+\frac{5}{4}}} \iff$$

$$\iff (2k+1)\sqrt{k+\frac{5}{4}} > (2k+2)\sqrt{k+\frac{1}{4}} \iff$$

$$\iff \left(4k^2+4k+1\right)\left(k+\frac{5}{4}\right) > \left(4k^2+8k+4\right)\left(k+\frac{1}{4}\right) \iff$$

$$\iff 4k^3+9k^2+6k+\frac{5}{4} > 4k^3+9k^2+6k+1 \iff \frac{1}{4} > 0.$$

Так как в ходе эквивалентных преобразований получили верное неравенство, то и исходное неравенство тоже верное. ■

**Замечание 1.2.** В строке с номером $2k$ всего $(2k+1)$ число, а их сумма равна $2^{2k} = 4^k$. Значит, среднее значение чисел в строке с номером $2k$ равно $\frac{4^k}{2k+1}$. А число из середины этой строки не меньше, чем $\frac{9}{16} \cdot \frac{4^k}{\sqrt{k+\frac{1}{4}}}$. Таким образом, число из середины строки асимптотически растёт быстрее, чем среднее значение чисел в строке.

Отсюда следует, что, например, при большом количестве подбрасываний монетки доля орлов будет близка к среднему значению.

Из треугольника Паскаля также можно получить числа Каталана (1, 1, 2, 5, 14, ...). Они показывают количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$ (где $n$ – номер числа Каталана, счёт начинается с 0). Правильная скобочная последовательность означает, что в ней одинаковое количество открывающихся и закрывающихся скобок, а в любом её префиксе открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Чтобы получить $n$-е число Каталана из треугольника Паскаля, надо в строке с номером $2n$ из числа из середины строки вычесть соседнее с ним число (если оно есть, то есть если $n \neq 0$).

**Упражнение 1.2** (На дом)**.** Вычислить $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

# Семинар 2

## Метод интерполяции (или экстраполяции)

**Упражнение 2.1.** Определить, чем равна сумма первых $n$ квадратов натуральных чисел:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

*Решение:*

При $n = 1$ эта сумма равна 1, при $n = 2$ – равна 5, при $n = 3$ – равна 14, при $n = 4$ – равна 30, при $n = 5$ – равна 50. Запишем эти числа в строку и будем сносить их по диагоналям налево и направо, причём будем записывать только разность в те места, куда попадают два числа.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 50 \\ & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & \\ & & 5 & & 7 & & 9 & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array} \tag{2.1}$$

Заметим, что во второй строке написаны значения некоторой квадратичной функции от $n$, тогда в третьей строке получается линейная функция от $n$, в четвертой строке – постоянная функция от $n$, а в пятой строке – нулевая функция от $n$. Это наводит на мысль, что первая строке соответствует значениям некоторого многочлена третьей степени от $n$.

Заметим, что многочлен $C_{n-1}^k$ соответствует такой первой строке, для которой в $(k+1)$-й строке все числа равны 1, а во всех строках с номерами больше $(k+1)$ все числа равны 0. Тогда многочлен

$$1 \cdot C_{n-1}^0 + 4 \cdot C_{n-1}^1 + 5 \cdot C_{n-1}^2 + 2 \cdot C_{n-1}^3 \tag{2.2}$$

соответствует такой первой строке, для которой первые числа следующих строк таблицы совпадают с соответствующими числами таблицы (2.1). Тогда таблица для многочлена (2.2) полностью совпадёт с таблицей (2.1), потому что все числа таблицы однозначно восстанавливаются только из первых чисел всех строк.

Таким образом, мы приходим к предположению, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1 \cdot C_{n-1}^0 + 4 \cdot C_{n-1}^1 + 5 \cdot C_{n-1}^2 + 2 \cdot C_{n-1}^3.$$

Можно упростить правую часть полученной формулы:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказать это можно с помощью метода математической индукции. □

**Упражнение 2.2** (На дом)**.** Подобрать выражение для $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ и доказать методом математической индукции.

**Упражнение 2.3.** На какое количество частей можно разрезать плоскость $n$ прямыми в общем положении (то есть никакие две прямые не проходят через одну точку и никакие две не параллельны)?

*Решение:*

При $n = 1$ прямая разрежет плоскость на 2 части, при $n = 2$ – на 4, при $n = 3$ – на 7, при $n = 4$ – на 11. Составим диаграмму.

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 4 & & 7 & & 1 \\ & 2 & & 3 & & 4 & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Получаем многочлен:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{4 + 4(n-1) + n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Докажем по индукции, что полученный многочлен является искомым ответом.

База индукции: при $n = 1$ получаем значение 2 – верно.

Шаг индукции: покажем, что из значения $\frac{k^2 + k + 2}{2}$ для $k$ прямых следует значение $\frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$ для $(k+1)$ прямых.

$(k+1)$-я прямая добавила столько новых частей плоскости, сколько старых частей плоскости она пересекла. Это на 1 больше, чем количество точек пересечения новой прямой со старыми прямыми. А таких точек столько же, сколько старых прямых, то есть $k$ штук. Значит, появляется $(k+1)$ новых частей.

Таким образом, надо проверить, верно ли следующее равенство:

$$\frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}.$$

Это равенство действительно верно. □

**Упражнение 2.4** (На дом)**.** На какое наибольшее количество частей пространство $\mathbb{R}^3$ можно разбить $n$ плоскостями? Требуется подобрать формулу и доказать методом математической индукции.

## Развитие представления о числах до введения действительных чисел

Сначала появились натуральные числа для удовлетворения потребности счёта. Обозначение: $\mathbb{N}$ – *множество натуральных чисел.*

Затем появились отрицательные числа для учёта долговых обязательств. Затем появилось число 0, заполняющее пробел между отрицательными и положительными числами. Таким образом сформировалось представление о целых числах.

Обозначение: $\mathbb{Z}$ – *множество целых чисел.*

Заметим, что операция вычитания может выводить из множества натуральных чисел, а множество целых чисел решает эту проблему. Говоря алгебраическим языком, множество целых чисел образует коммутативную группу относительно операции арифметического сложения.

Кроме этого, появилась потребность в операции, обратной к умножению, – операции деления. Для этого стали применять рациональные числа, то есть числа вида $\dfrac{p}{q}$, где $p$ – целое число, а $q$ – натуральное число. При этом вводится класс эквивалентности: $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$, если $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$.

Обозначение: $\mathbb{Q}$ – *множество рациональных чисел.*

## Множество действительных чисел

Ещё древние греки заметили, что рациональных чисел недостаточно для геометрии. Действительно, по теореме Пифагора квадрат длины гипотенузы равнобедренного треугольника со стороной 1 есть $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Древние греки смогли доказать, что среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2. Но древние греки не исследовали эту проблему дальше.

Эту проблемы стали решать на рубеже 19 – 20 веков. Для этого было построено *множество действительных чисел* $\mathbb{R}$, которое определяется набором своих свойств.

*Свойства действительных чисел* $\mathbb{R}$*:*

1) множество $\mathbb{R}$ образует коммутативную группу относительно операции арифметического сложения;
2) множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ образует коммутативную группу относительно операции арифметического умножения;
3) свойство дистрибутивности: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
4) для действительных чисел задано отношение порядка: если $a \neq b$, то $a < b$ или $b < a$;
5) транзитивность отношения порядка: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
6) если $a < b$, то $\forall c$ верно $a + c < b + c$;
7) если $a < b$, то $\forall c > 0$ верно $a \cdot c < b \cdot c$;
8) свойство полноты (или непрерывности):
   если $\forall a \in A \subset \mathbb{R}$ и $\forall b \in B \subset \mathbb{R}$ верно $a \leqslant b$, то
   $$\exists c \in \mathbb{R}:\ a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A \ \text{ и } \ \forall b \in B.$$

Объект, обладающий свойствами (1) – (3), называется полем. Этим свойствам удовлетворяют не только действительные числа, но и рациональные числа. Таким образом, множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ являются полями. Рациональные числа обладают также свойствами (4) – (7), а свойством (8) не обладают.

Чтобы показать, что рациональные числа не обладают свойством (8), возьмём следующие множества:

$$A = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{N}, \quad \frac{p^2}{q^2} < 2 \right\}; \qquad B = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{N}, \quad \frac{p^2}{q^2} > 2 \right\}.$$

Так как среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2, то свойство (8) для них не будет выполнено.

## Множество комплексных чисел

Начнём с того, как решать кубические уравнения. В основе идеи лежит следующая формула:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right).$$

Верность этой формулы можно проверить, раскрыв скобки. Далее заменим $a$ на $x$:

$$x^3 - 3bc \cdot x + b^3 + c^3 = (x+b+c)\left(x^2 - (b+c)x + b^2 + c^2 - bc\right). \tag{2.3}$$

Таким образом, кубический многочлен такого вида, как стоит в левой части выражения (2.3) мы уже научились раскладывать на множители. Но к такому виду можно привести любой кубический многочлен. Действительно, если есть кубический многочлен $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, то, используя замену $t = x + \dfrac{A}{3}$, получим кубический многочлен вида $t^3 + pt + q$. Чтобы свести этот кубический многочлен к такому виду, как стоит в левой части выражения (2.3), надо подобрать такие значения $b$ и $c$, чтобы выполнялись равенства $\begin{cases} bc = -\dfrac{p}{3} \\ b^3 + c^3 = q \end{cases}$. Если переписать эту систему в следующем эквивалентном виде: $\begin{cases} b^3c^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ b^3 + c^3 = q \end{cases}$, то по теореме Виета значения $b$ и $c$ могут быть найдены как корни некоторого известного квадратного уравнения.

Произведя все описанные выше действия, можно получить формулы Кардано. В частности, по этим формулам получаем, что у кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ существует корень

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{2.4}$$

Теперь рассмотрим конкретное кубическое уравнение:

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Оно имеет корень $x = 4$, это можно проверить подстановкой. По формуле (2.4) получаем:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-11^2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-11^2}}.$$

Если предположить существование такого числа $i$, для которого верно $i^2 = -1$, то получим:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Так как

$$(2+i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i,$$
$$(2-i)^3 = 8 - 12i + 6i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i,$$

то получаем:

$$x = (2+i) + (2-i) = 4.$$

Так появилось *множество комплексных чисел* $\mathbb{C}$, то есть чисел вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а $i$ – *мнимая единица*, то есть такое число, для которого верно $i^2 = -1$.

**Определение 2.1.**
$x$ – *действительная часть* числа $z = x + iy$.
$y$ – *мнимая часть* числа $z = x + iy$.

Сложение комплексных чисел выполняется по следующему правилу:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а умножение – по следующему правилу:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{2.5}$$

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем. Но комплексные числа, в отличие от действительных, не обладают свойством упорядоченности.

Комплексные числа изображают точками на плоскости, где по оси абсцисс откладывается значение $x$, а по оси ординат – значение $iy$.

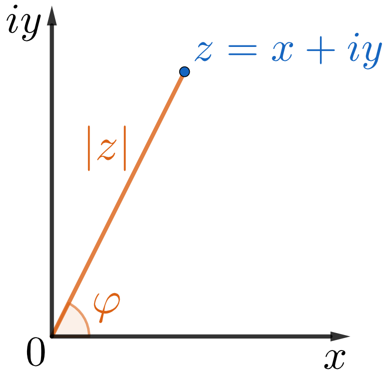


Рис. 2.1: Графическое предпставление комплексного числа

**Определение 2.2.** $\operatorname{Arg} z$ – *аргумент комплексного числа* $z = x + iy$ – множество всех возможных значений угла $\varphi$ такого, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

При этом $\arg z$ обозначают конкретное значение угла $\varphi$ из какого-либо определённого промежутка. Обычно в качестве промежутка берут $[0;\ 2\pi)$ или $(-\pi;\ \pi]$.

**Определение 2.3.** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – *модуль комплексного числа* $z = x + iy$ – расстояние от начала координат до числа $z$.

**Определение 2.4.** $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрическая форма записи комплексного числа* $z$.

Используя правило произведения комплексных чисел (2.5) для чисел

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

можно показать, что

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{2.6}$$

**Упражнение 2.5.** Вычислить $(1+i)^2$.

*Решение:*

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

□

Рассмотрим число $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и возведём его в степень $n$, используя правило (2.6), получим следующее утверждение.

**Утверждение 2.1.**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

– *формула Муавра.*

Используем формулу Муавра для степени $n = 2$, получим:

$$
\begin{aligned}
&(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi;\\
&\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi + i^2\sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi;\\
&\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + i\cdot(2\sin\varphi\cos\varphi) = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi;\\
&\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \qquad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Получили тригонометрические формулы двойного угла для синуса и для косинуса. Аналогично можно вывести формулы для других значений $n$.

**Упражнение 2.6** (На дом)**.** Доказать формулу: $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.

**Упражнение 2.7** (На дом)**.** Доказать формулу: $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

Так как

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

то это произведение подчиняется закону $f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2)$. Таким свойством обладает экспоненциальная функция. Тогда можно определить экспоненту в степени чисто мнимого числа (то есть числа с нулевой действительной частью) следующим образом:

$$e^{i\varphi} \coloneqq \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Есть и другие обоснования, почему следует так определять экспоненту в степени чисто мнимого числа.

**Определение 2.5.** $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$ *– экспоненциальная форма записи комплексного числа* $z$*.*

**Упражнение 2.8.** Вычислить $\dfrac{1+i}{2+i}$.

*Решение:*

$$\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3+i}{5}.$$

□

**Замечание 2.1.** Так как

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \qquad \arg(2+i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \qquad \arg\left(\frac{3+i}{5}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$$

и $1 + i = (2+i)\cdot\dfrac{3+i}{5}$, то получаем:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Эта формула раньше использовалась для приближённого вычисления значения числа $\pi$.

Позже была популярна другая формула, называющаяся формула Мэчина:

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

**Упражнение 2.9** (На дом)**.** Доказать формулу Мэчина: $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$.

## Модуль действительного числа

**Определение 2.6.** $|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$ – *модуль действительного числа.*

**Задача 30.** Доказать тождество:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

*Решение:*

Если $x \geqslant 0$, получаем: $x^2 + 0^2 = x^2$ – верное равенство.

Если $x < 0$, получаем: $0^2 + x^2 = x^2$ – верное равенство. $\square$

# Семинар 3

## Функции

**Определение 3.1.** $f\colon\ A \to B$ – *функция, отображающая множество $A$ в множество $B$*, если

$$\forall a \in A \qquad \exists!\, b \in B\colon \quad b = f(a).$$

Можно дать более абстрактное определение, в котором функция рассматривается как подмножество декартова произведения $A \times B$.

**Определение 3.2.** $f\colon\ A \to B$ – *функция, отображающая множество $A$ в множество $B$*, если

$$\forall a \in A \qquad \exists!\, b \in B\colon \quad (a,b) \in f \subseteq B.$$

Введём типы функций.

**Определение 3.3.** $f$ – *инъекция*, если

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2.$$

**Определение 3.4.** $f$ – *сюръекция*, если

$$\forall b \in B \qquad \exists a \in A\colon \quad b = f(a).$$

**Определение 3.5.** $f$ – *биекция (взаимно однозначное отображение)*, если $f$ – инъекция и сюръекция.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = x^2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Эта функция не является инъекцией, так как, например, $f(-1) = f(1) = 1$. Также она не является сюръекцией, так как $f(x) = -1 \implies x \in \varnothing$. Если рассматривать функцию $f(x) = x^2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ – неотрицательные действительные числа, то такая функция будет сюръекцией. А если рассматривать функцию $f(x) = x^2\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, то она уже будет инъекцией и сюръекцией, то есть биекцией.

Если функция $f\colon\ A \to B$ является биекцией, то можно построить обратную функцию $f^{-1}\colon\ B \to A$, где $a = f^{-1}(b)$ означает такое значение $a$, для которого $b = f(a)$.

## Мощность множества

**Определение 3.6.** $|A|$, или $\operatorname{card} A$, – *мощность множества $A$* – мера количества элементов множества $A$:

- $|A| = 0$, если $A = \varnothing$;
- $|A| = n$, если множество $A$ содержит $n$ элементов;
- $|A| = \aleph_0$, если $A = \mathbb{N}$;
- $|A| = \mathfrak{c}$, если $A = \mathbb{R}$.

Покажем, что не существует множества самой большой мощности. Для этого рассмотрим, например, множество всех подмножеств множества $A = \{1, 2, 3\}$. Получим следующее множество:

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Получили $2^3 = 8$ подмножеств. Количество этих подмножеств равно 2 в степени количества элементов множества $A$, так как каждый элемент множества $A$ имеет ровно 2 варианта: быть или не быть включённым в подмножество. Это объясняет смысл обозначения $2^A$ для множества всех подмножеств множества $A$.

**Определение 3.7.** Если $A \overset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$, то $A$ называется *счётным* и $|A| = \aleph_0$.

**Определение 3.8.** *Не более чем счётное множество* – пустое, конечное или счётное множество.

Рассмотрим множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{Z} = \bigsqcup Z_k$, где $Z_0 = \{0\}$, $Z_1 = \{-1,\ 1\}$, $Z_2 = \{-2,\ 2\}$ и так далее, и $\mathbb{N} = \bigsqcup N_k$, где $N_0 = \{1\}$, $N_1 = \{2,\ 3\}$, $N_2 = \{4,\ 5\}$ и так далее, то $\mathbb{Z} \overset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим множество $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Можно расставить элементы $\mathbb{N}^2$ в двух измерениях, где по одному измерению будет увеличиваться первая координата, а по второму – вторая. Затем можно разбить множество $\mathbb{N}^2$ на подмножества $P_k$, каждое из которых содержит все элементы вдоль $k$-й диагонали (все диагонали параллельны). Тогда $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup P_k$, причём множество $P_k$ содержит ровно $k$ элементов. Теперь рассмотрим множество $\mathbb{N}$ и разобьём его на подмножества следующим образом: $N_k$ – подмножество, состоящее из $k$ элементов, причём $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2, 3\}$, $N_3 = \{4, 5, 6\}$ и так далее. Значит, $\mathbb{N}^2 \overset{\text{биекция}}{\longleftrightarrow} \mathbb{N}$.

Можно обобщить эту идею и сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.** *Если $A$ и $B$ счётны, то $A \times B$ счётно.*

Аналогичным способом можно показать, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

**Определение 3.9.** $|A| > |B|$, если между множествами $A$ и $B$ не существует биекции, но существует инъекция $B \to A$.

Сравним множество действительных чисел $\mathbb{R}$ и множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Существует инъекция $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. В качестве $f$ можно взять $f(n) = n$. При этом можно показать, что не существует биекции между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$. Значит, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

**Теорема 3.1** (Теорема Кантора – Бернштейна)**.** *Если существуют инъекция $A \to$ $\to B$ и инъекция $B \to A$, то существует биекция между $A$ и $B$.*

**Определение 3.10.** $|A| \leqslant |B|$, если существует инъекция $A \to B$.

Тогда по теореме Кантора–Бернштейна (3.1) получаем:

$$\begin{cases} |A| \leqslant |B| \\ |B| \leqslant |A| \end{cases} \implies \quad |A| = |B|.$$

**Теорема 3.2** (Теорема Кантора)**.**

$$|A| < \left|2^A\right|.$$

Если бы существовало $A$ – множество всего, то его мощность была бы максимальной и не могла бы быть меньше мощности множества всех его подмножеств. Но это противоречит теореме Кантора (3.2). Значит, множества всего не существует.

**Определение 3.11.** *Последовательность* – функция, заданная на натуральных числах, то есть $f\colon\ \mathbb{N} \to A$, где $A$ – некоторое множество.

**Упражнение 3.1** (На дом)**.** Найти мощность $\{f \mid f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ – множества всех последовательностей натуральных чисел.

**Упражнение 3.2** (На дом)**.** Верно ли, что $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$?

**Упражнение 3.3** (На дом)**.** Пусть $\mathbb{R}^\infty = \{f \mid f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$. Проверить следующие равенства:

$$|\mathbb{R}^\infty| = |\mathbb{R}|, \qquad |\mathbb{R}^\infty| = \left|2^{\mathbb{R}}\right|, \qquad |\mathbb{R}^\infty| = \left|2^{2^{\mathbb{R}}}\right|.$$

## Супремум и инфимум множества

**Определение 3.12.** *Промежуток на действительной прямой* – такое подмножество действительной прямой, что вместе с двумя точками, входящими в это подмножество, в него входят и все точки действительной прямой между этими двумя точками.

Выпишем, какие типы промежутков из действительных чисел могут существовать:

$$(a;\, b), \qquad [a;\, b], \qquad [a;\, b), \qquad (a;\, b].$$

Если дополнительно рассматривать символы $-\infty$ и $+\infty$, то получим ещё такие типы промежутков:

$$(a;\ +\infty), \qquad [a;\ +\infty), \qquad (-\infty;\ b), \qquad (-\infty;\ b], \qquad \mathbb{R} = (-\infty;\ +\infty).$$

**Определение 3.13.** $M = \sup A$ – *супремум (точная верхняя грань) множества* $A \subset \mathbb{R}$, если:

1) $\forall a \in A \quad a \leqslant M$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon\colon\ \ a_\varepsilon + \varepsilon > M$.

Дадим ещё одно определение супремума множества.

**Определение 3.14.** Рассмотрим множество $B = \{b\colon\ \forall a \in A \quad b \geqslant a\}$ – множество верхних граней. Тогда $M = \sup A$ – *супремум (точная верхняя грань) множества* $A \subset \mathbb{R}$, если:

1) $M \in B$;

2) $\forall b \in B \quad M \leqslant b$.

**Утверждение 3.2.** *Определения (3.13) и (3.14) эквивалентны.*

*Доказательство:*

Заметим, что пункты (1) в обоих определениях одинаковые. Поэтому надо доказать только эквивалентность пунктов (2).

Сначала докажем, что из определения (3.13) следует определение (3.14). Предположим, что пункт (2) определения (3.14) не выполнен. Тогда $\exists b \in B:\ b < M$. Выберем в пункте (2) определения (3.13) $\varepsilon = M - b > 0$. Тогда $\exists a_\varepsilon:\ a_\varepsilon + \varepsilon > M$. Отсюда получаем: $a_\varepsilon + M - b > M$, то есть $a_\varepsilon > b$. Но тогда $b \notin B$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно.

Теперь докажем, что из определения (3.14) следует определение (3.13). Предположим, что пункт (2) определения (3.13) не выполнен. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\colon\ \forall a \in A \quad a + \varepsilon \leqslant M,$$

то есть $a \leqslant M - \varepsilon$. Значит, $M - \varepsilon$ – верхняя грань. Но $M - \varepsilon < M$, что противоречит пункту (2) определения (3.14). Получили противоречие, значит, наше предположение неверно. ■

**Утверждение 3.3.** *Если у множества существует некоторая верхняя грань, то существует и точная верхняя грань.*

Если у множества нет никакой верхней грани, то пишут $\sup A = +\infty$.

Аналогично можно ввести инфимум (точную нижнюю грань) множества.

**Определение 3.15.** $M = \inf A$ – *инфимум (точная нижняя грань) множества* $A \subset \mathbb{R}$, если:

1) $\forall a \in A \quad a \geqslant M$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon\colon\ a_\varepsilon - \varepsilon < M$.

Дадим ещё одно определение инфимума множества.

**Определение 3.16.** Рассмотрим множество $C = \{c\colon\ \forall a \in A \quad c \leqslant a\}$ – множество нижних граней. Тогда $M = \inf A$ – *инфимум (точная нижняя грань) множества* $A \subset \mathbb{R}$, если:

1) $M \in C$;

2) $\forall c \in C \quad M \geqslant c$.

**Утверждение 3.4.** *Определения (3.15) и (3.16) эквивалентны.*

**Задача 18** (a)**.** Пусть $-X = \{-x\} \subset \mathbb{R}$ – множество чисел, противоположных числам множества $X = \{x\} \subset \mathbb{R}$. Доказать, что

$$\inf\{-x\} = -\sup\{x\}.$$

*Решение:*

Пусть $M = \sup X$, тогда:

1) $\forall x \in X \quad M \geqslant x$;
2) если $b$ – верхняя грань $X$, то $M \leqslant b$.

Тогда $-M \leqslant -x$. Значит, $-M$ – нижняя грань множества $-X$.

Пусть $c \leqslant -x \quad \forall x \in X$. Тогда $-c \geqslant x \quad \forall x \in X$. Значит, $M \leqslant -c$. Тогда $-M \geqslant c$. Значит, $-M = \inf\{-x\}$. □

**Задача 19** (a)**.** Пусть $\{x+y\}$ – множество всех сумм $x+y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать, что

$$\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

*Решение:*

Так как $x \geqslant \inf\{x\}$ и $y \geqslant \inf\{y\}$, то $x+y \geqslant \inf\{x\}+\inf\{y\}$. Значит, $\inf\{x\}+\inf\{y\}$ – нижняя грань множества $\{x+y\}$.

По определению инфимума получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x_\varepsilon : \qquad x_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < \inf\{x\};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists y_\varepsilon : \qquad y_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < \inf\{y\}.$$

Сложим эти два неравенства и получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists x_\varepsilon, y_\varepsilon : \qquad x_\varepsilon + y_\varepsilon - \varepsilon < \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

Значит, $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$. □

# Семинар 4

## Теорема Кантора

Докажем теорему Кантора, сформулированную на прошлом семинаре.

**Теорема 4.1** (Теорема Кантора)**.**

$$|A| < \left|2^A\right|.$$

*Доказательство:*

1) Докажем, что существует инъекция $A \to 2^A$. Для этого достаточно взять отображение $a \to \{a\}\ \ \forall a \in A$. Оно будет инъекцией и не будет сюръекцией, так как, по крайней мере, никакой элемент множества $A$ не перейдёт в элемент $\varnothing \in 2^A$.

2) Докажем, что не существует биекции между $A$ и $2^A$. Предположим, что такая биекция $f\colon\ A \to 2^A$ существует. Тогда $\forall a \in A\ \ f(a) \subset A$. Построим множество $B$ по следующим правилам:

- если $a \in f(a)$, то $a \notin B$;
- если $a \notin f(a)$, то $a \in B$.

Проверим, существует ли такой элемент $b$, что $f(b) = B$. Если $b \in f(b)$, то $b \notin B = f(b)$. А если $b \notin f(b)$, то $b \in B = f(b)$. Получили противоречие. Значит, в множество $B$ не переходит никакой элемент при отображении $f$. Но это противоречи тому, что $f$ – биекция. Значит, не существует биекции между $A$ и $2^A$. ■

## Множество Кантора

Рассмотрим всевозможные функции $f\colon\ A \to \{0, 1\}$. Покажем, что между множеством всех таких функций $\{f\}$ и множеством $2^A$ существует биекция. Действительно, для этого подойдёт отображение $f \to \{a\colon\ f(a) = 1\}$.

Тогда $2^{\mathbb{N}}$ биективно отображается в набор всевозможных бесконечных векторов (имеющих начало и не имеющих конца), состоящих из 0 и 1.

Теперь построим множество Кантора, которое назовём $K$. Оно тоже будет иметь биекцию с множеством $2^{\mathbb{N}}$.

Возьмём в качестве множества $K_0$ отрезок $[0; 1]$. Чтобы получить множество $K_1$, исключим из множества $K_0$ среднюю треть отрезка, тогда получим: $K_1 = \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3};\ 1\right]$. И так далее по индукции: пусть $K_n$ – множество, состоящее из $2^n$ отрезков, каждый из которых имеет длину $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, тогда множество $K_{n+1}$ получится, если в каждом из $2^n$ отрезков множества $K_n$ исключить среднюю треть.

Построим множество Кантора как пересечение всех множеств $K_n$: $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$. По лемме о вложенных отрезках в множество $K$ будут входить все точки, к которым стягиваются вложенные отрезки из множеств $K_n$.

Для множества $K$ существует биекция с множеством $2^{\mathbb{N}}$. Чтобы это показать, воспользуемся тем, что $2^{\mathbb{N}}$ биективно отображается в множество $V$ – набор всевозможных бесконечных векторов (имеющих начало и не имеющих конца), состоящих из 0 и 1. Тогда достаточно показать, что существует биекция между $K$ и $V$. Действительно, для этого можно взять отображение $V \to K$, сконструированное по следующему правилу: если на $n$-м месте вектора из $V$ стоит 0, то в множестве $K_n$ выбираем левый отрезок, а если 1, то правый. Таким образом мы получим систему отрезков, стягивающихся к некоторой точке множества $K$.

**Упражнение 4.1** (На дом)**.** Доказать, что $K + K = [0; 2]$, то есть, что всевозможные суммы чисел из одного множества Кантора и другого множества Кантора образуют отрезок $[0; 2]$.

## Предел числовой последовательности

Обычно мы будем рассматривать числовые последовательности вида $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, но иногда и $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Обычно числовую последовательность задают перечислением её членов $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ или формулой. Пример задания числовой последовательности формулой для чисел Фибоначчи:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geqslant 2.$$

**Определение 4.1.** Дадим определения *предела* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *числовой последовательности* $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon)\colon\ \ \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon).$$

Альтернативная форма записи: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

В качестве примера последовательности, имеющей предел, можно привести постоянную последовательность: $a_1 = a,\ a_2 = a,\ a_3 = a,\ \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

В качестве примера последовательности, не имеющей предела, можно привести следующую последовательность: $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0,\ a_4 = 1,\ \ldots$.

**Определение 4.2.** $\{\alpha_n\}$ – *бесконечно малая последовательность*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

**Утверждение 4.1.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = a + \alpha_n,$$

*где* $\{\alpha_n\}$ *– бесконечно малая последовательность.*

**Утверждение 4.2.** *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*, то:*

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$*;*
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$*;*

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *если* $b \neq 0$.

**Задача 41.** Пусть $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - 1| < \varepsilon$, если $n > N$.

Заполнить следующую таблицу:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | | | | |

*Решение:*

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad 1 < \varepsilon n + \varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Так как в определении предела важен только случай малых значений $\varepsilon$, то будем рассматривать значения $\varepsilon < 1$. Тогда можем положить $N(\varepsilon) = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Теперь можем заполнить таблицу:

| $\varepsilon$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | 9 | 99 | 999 | 9999 |

□

**Определение 4.3.** Если последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*, а если не имеет, то *расходящейся*.

**Утверждение 4.3.** *Предел числовой последовательности не зависит от значений конечного количества начальных членов последовательности.*

**Определение 4.4.** $\{\beta_n\}$ – *ограниченная последовательность*, если

$$\exists C > 0\colon \quad |\beta_n| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Утверждение 4.4.** *Любая бесконечно малая последовательность является сходящейся, а любая сходящаяся – ограниченной.*

**Определение 4.5.** $\{b_n\}$ – *неограниченная последовательность*, если она не является ограниченной:

$$\forall C > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon \quad |b_n| \geqslant C.$$

**Определение 4.6.** $\{a_n\}$ – *бесконечно большая последовательность*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)\colon \quad \forall n > N \quad |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Также используют обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

**Замечание 4.1.**

Запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ используют в случае

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

А запись $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ используют в случае

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad a_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

**Замечание 4.2.** Когда речь идёт о натуральных числах, то символ $\infty$ подразумевает $+\infty$.

**Утверждение 4.5.** *Если $\{a_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность. А если $\{b_n\}$ – бесконечно малая последовательность, причём $b_n \neq 0$ для всех значений $n$, начиная с некоторого номера, то $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.*

**Задача 46.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000 \cdot n}{n^2+1}$.

*Решение:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10\,000 \cdot n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{10\,000}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0.$$

$\square$

**Задача 49.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

*Решение:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{(-2)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+3} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

**Задача 47.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

*Решение:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

□

**Задача 56.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

*Решение:*

Используя равенство $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

□

**Замечание 4.3.** С этой задачей связана одна из нерешённых проблем математики. Будем интерпретировать числа вида $\frac{1}{n(n+1)}$ как площади прямоугольников со сторонами $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$, а значение предела 1 как площадь квадрата со стороной 1. Спрашивается, можно ли замостить этот квадрат такими прямоугольниками?

# Семинар 5

## Предел числовой последовательности (продолжение)

Рассмотрим предел вида

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{P_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \ldots}{b_m n^m + \ldots},$$

где $P_k$ и $P_m$ – многочлены степени $k$ и $m$ соответственно.

Если $m = k$, то делением числителя и знаменателя дроби на $n^m$ получим, что предел равен $\dfrac{a_k}{b_m}$.

Если $m > k$, то делением числителя и знаменателя на $n^m$ получим, что предел равен 0.

Если $k > m$, то делением числителя и знаменателя на $n^m$ получим, что предел равен $\infty$.

**Утверждение 5.1.** *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Если $a > 0$, то все $a_n$, начиная с некоторого номера положительны. А если $a < 0$, то все $a_n$, начиная с некоторого номера, отрицательны.*

**Утверждение 5.2.** *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Если все члены последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера, неотрицательны, то $a \geqslant 0$. А если все члены последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера, неположительны, то $a \leqslant 0$.*

**Утверждение 5.3.** *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $b$ – некоторое число. Если $a_n \geqslant b$ или $a_n > b$, то $a \geqslant b$. А если $a_n \leqslant b$ или $a_n < b$, то $a \leqslant b$.*

**Теорема 5.1.** *Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, начиная с некоторого номера, и*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

*Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

**Задача 58.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

*Решение:*

Заметим, что $\dfrac{n}{2^n} > 0$. Кроме этого, из $n$-й строчки треугольника Паскаля следует, что

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}.$$

Значит, $2^n > \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2n}{n(n-1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n(n-1)} = 0$, то по теореме (5.1) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. $\square$

**Замечание 5.1.** Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{2^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

**Замечание 5.2.** Также можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ и $a > 1$. Для этого надо представить $a$ в виде $a = 1 + x$, где $x > 0$, и воспользоваться биномом Ньютона для $(1+x)^n$.

**Задача 64.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, где $a > 1$.

*Решение:*

Пусть $\{k_n\}$ – такая числовая последовательность, что $a^{k_n} \leqslant n < a^{k_n+1}$. Тогда $k_n \leqslant \log_a n < k_n + 1$ и $k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Таким образом, $0 \leqslant \dfrac{\log_a n}{n} < \dfrac{k_n+1}{a^{k_n}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n+1}{a^{k_n}} = 0$, то по теореме (5.1) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$. $\square$

**Замечание 5.3.** Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

**Замечание 5.4.** Также можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a^p n}{n^q} = 0 \quad \forall p, q > 0$. Для этого надо воспользоваться неравенством $\dfrac{\log_a^p n}{n^q} \leqslant \dfrac{\log_a^{\lceil p \rceil} n}{n^q} = \left(\dfrac{\log_a n}{n^{q/\lceil p \rceil}}\right)^{\lceil p \rceil}$, верным при достаточно больших значениях $n$.

**Задача 61.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, где $a > 1$.

*Решение:*

При достаточно больших значениях $n$ получим:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \lceil a \rceil} \cdot \frac{a}{\lceil a \rceil + 1} \cdot \frac{a}{\lceil a \rceil + 2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n} \leqslant C \cdot \frac{a}{n},$$

где $C = \dfrac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \lceil a \rceil}$.

Таким образом, $0 < \dfrac{a^n}{n!} \leqslant C \cdot \dfrac{a}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(C \cdot \dfrac{a}{n}\right) = 0$, то по теореме (5.1) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. $\square$

**Задача 63.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, где $a > 0$.

*Решение:*

Если $a = 1$, то утверждение тривиально.

Рассмотрим случай $a > 1$. Пусть $a = 1 + x$, где $x > 0$. Рассмотрим последовательность $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Заметим, что $x_n > 0$. Так как $(1 + x_n)^n = 1 + x$, то по неравенству Бернулли получаем, что $1 + x > 1 + nx_n$. Тогда $x_n < \dfrac{x}{n}$.

Таким образом, $0 < x_n < \dfrac{x}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$, то по теореме (5.1) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Рассмотрение случая $a < 1$ оставим в качестве самостоятельного упражнения. $\square$

## Монотонные последовательности

**Определение 5.1.** $\{a_n\}$ – *возрастающая последовательность*, если

$$\exists N\colon \quad \forall n > N \quad a_{n+1} \geqslant a_n.$$

**Определение 5.2.** $\{a_n\}$ – *убывающая последовательность*, если

$$\exists N\colon \quad \forall n > N \quad a_{n+1} \leqslant a_n.$$

**Определение 5.3.** $\{a_n\}$ – *строго возрастающая последовательность*, если

$$\exists N\colon \quad \forall n > N \quad a_{n+1} > a_n.$$

**Определение 5.4.** $\{a_n\}$ – *строго убывающая последовательность*, если

$$\exists N\colon \quad \forall n > N \quad a_{n+1} < a_n.$$

**Теорема 5.2.**

*Если $\{a_n\}$ – возрастающая последовательность, то она либо неограничена, либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n \{a_n\}$.*

*Если $\{a_n\}$ – убывающая последовательность, то она либо неограничена, либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_n \{a_n\}$.*

**Задача 81.** Доказать сходимость следующей последовательности:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}, \qquad \ldots .$$

*Решение:*

Так как $\sqrt{2} < 2$, то получаем:

$$x_1 < 2, \qquad x_2 < \sqrt{2+2} = 2, \qquad \ldots, \qquad x_n < 2, \qquad \ldots.$$

Кроме этого, $x_{n+1} > x_n$. Значит, $x_n$ – ограниченная возрастающая последовательность. Тогда по теореме (5.2) получаем, что эта последовательность сходится.

□

**Замечание 5.5.** Можно вычислить этот предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Так как $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, то $x_{n+1}^2 = x_n + 2$. Переходя в этом равенстве к пределу, получим: $x^2 = x + 2$. Значит, значение предела является корнем уравнения $x^2 - x - 2 = 0$. Это уравнение имеет корни $-1$ и 2. Так как все члены последовательности положительны, то $x \geqslant 0$. Значит, $x = 2$.

## Число $e$

**Определение 5.5.**

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Утверждение 5.4.** *Последовательность* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *монотонно возрастает и стремится к числу $e$, а последовательность* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ *монотонно убывает и стремится к числу $e$.*

**Утверждение 5.5.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

**Замечание 5.6.** Если положить некоторую сумму $S$ на вклад в банк под $x$ процентов годовых и если банк будет стремиться делать капитализацию процентов как можно чаще, то через год сумма на счёте будет стремиться к $S \cdot e^x$.

**Упражнение 5.1** (На дом)**.** В театр пришли $n$ человек и при входе сдали свои пальто. Позже на выходе из театра гардеробщица раздавала пальто случайным образом. Найти при больших значениях $n$ вероятность того, что хотя бы один человек получит своё пальто.

**Утверждение 5.6.**

$$e = 2{,}718281828459045\ldots.$$

**Утверждение 5.7.**

$$(e^x)' = e^x.$$

**Задача 75.** Доказать неравенства:

а) $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, где $n$ – любое натуральное число;

б) $1+\alpha < e^\alpha$, где $\alpha$ – вещественное число, отличное от нуля.

*Решение:*

а)
$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \iff e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} \iff$$

$$\iff \begin{cases} e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < e \end{cases}.$$

Последняя система верна в силу утверждения (5.4).

б) Случай 1: пусть $\alpha = \dfrac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Из пункта (а) решения этой задачи имеем доказанное неравенство $1+\dfrac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$.

Случай 2: пусть $\alpha = \dfrac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Из случая 1 получаем: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m < e^{\frac{m}{n}}$. А из неравенства Бернулли получаем: $1+\dfrac{m}{n} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m$. Таким образом, $1+\dfrac{m}{n} < e^{\frac{m}{n}}$.

Случай 3: пусть $\alpha = x$, где $x > 0$ – действительное число. Построим монотонно возрастающую последовательность $\left\{\dfrac{m_k}{n_k}\right\}$, которая стремится к $x$. Тогда получим:

$$e^x > e^{\frac{m_k}{n_k}} > 1+\frac{m_k}{n_k}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получим: $e^x \geqslant 1+x$.

Случай строгого неравенства доказывать сейчас не будем, так как, освоив производные, это будет сделать проще.

Случай 4: пусть $\alpha = -x$, где $x > 0$ – действительное число. Надо доказать неравенство $1-x \leqslant e^{-x}$ (случай строго неравенства опять сейчас не будем рассматривать). При $x \geqslant 1$ это неравенство тривиально, так как сравниваются выражения разных знаков. Далее рассмотрим случай $x \in (0; 1)$. Тогда доказываемое неравенство равносильно следующему: $e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$. Рассмотрим сначала $x = \dfrac{1}{n+1}$, где

$n \in \mathbb{N}$. Тогда доказываемое неравенство обращается в следующее:

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}.$$

А это неравенство верно в силу пункта (а) решения этой задачи.

Теперь рассмотрим $x = \dfrac{m}{n+1}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \leqslant n$. Тогда из предыдущего неравенства получаем:

$$e^{\frac{m}{n+1}} \leqslant \left( \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} \right)^m.$$

А с помощью неравенства Бернулли получаем:

$$\left( \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} \right)^m \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{m}{n+1}}.$$

Значит, $e^{\frac{m}{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{1 - \dfrac{m}{n+1}}$. А отсюда предельным переходом получаем, что

$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in (0;\, 1).$$

$\square$

**Задача 74.** Доказать неравенство:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

*Решение:*

Докажем неравенство $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n!$ методом математической индукции.

База индукции: при $n = 1$ получаем верное неравенство $\dfrac{1}{e} < 1$.

Шаг индукции: надо из неравенства $\left(\dfrac{k}{e}\right)^k < k!$ вывести неравенство $\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1} < (k+1)!$. Для этого достаточно доказать неравенство

$$\frac{\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1}}{\left(\dfrac{k}{e}\right)^k} < \frac{(k+1)!}{k!}. \tag{5.1}$$

Действительно, если перемножить соответственно левую и правую части неравенств $\left(\dfrac{k}{e}\right)^k < k!$ и (5.1), то получится искомое неравенство $\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1} < (k+1)!\,.$

Неравенство (5.1) равносильно неравенству $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k < e$, которое верно в силу утверждения (5.4).

Доказательство неравенства $n! < e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

# Семинар 6

## Частично упорядоченные множества

**Определение 6.1.** Если между некоторыми объектами множества задано отношение $\subset$, обладающее свойствами

- $A \subset B \subset C \implies A \subset C$,
- $A \subset B,\ B \subset A \implies A = B$,

то говорят, что для некоторых элементов исходного множества задано *отношение порядка*, а само множество называют *частично упорядоченным.*

В качестве примера рассмотрим множество $\{1, 2, 3\}$. Оно имеет следующие подмножества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. Между этими подмножествами существуют следующие отношения порядка:

$$\varnothing \subset \{1\}, \quad \varnothing \subset \{2\}, \quad \varnothing \subset \{3\},$$
$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1\} \subset \{1,3\}, \quad \{2\} \subset \{1,2\},$$
$$\{2\} \subset \{2,3\}, \quad \{3\} \subset \{1,3\}, \quad \{3\} \subset \{2,3\},$$
$$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}, \quad \{1,3\} \subset \{1,2,3\}, \quad \{2,3\} \subset \{1,2,3\}.$$

Как видно, существуют несравнимые друг с другом подмножества. Например, $\{1\}$ и $\{2, 3\}$, $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$ и так далее.

**Определение 6.2.** *Цепь* – множество, любые два элемента которого сравнимы.

Пример цепи: $\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, так как $\varnothing \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$.

**Определение 6.3.** *Антицепь* – множество, состоящее из попарно несравнимых элементов.

Пример антицепи: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

**Теорема 6.1.** *В частично упорядоченном множестве из $mn + 1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания $m + 1$ элементов, либо антицепь из $n + 1$ элементов.*

*Доказательство:*

Сопоставим каждому элементу заданного множества индекс, равный длине наибольшей цепи, для которой в упорядоченной записи в конце находится этот элемент.

Пусть $p$ – максимальный из индексов. Если $p \geqslant m + 1$, то теорема доказана. А если $p \leqslant m$, то по принципу Дирихле получаем, что из общего количества $mn + 1$ элементов хотя бы $n + 1$ имеют одинаковый индекс. А так как элементы, имеющие одинаковый индекс, несравнимы, то в этом случае получаем, что существует антицепь хотя бы из $n + 1$ элементов. ∎

**Упражнение 6.1** (На дом)**.** Пусть на выставку, которая работает с 9:00 до 20:00, за всё время работы пришли $mn + 1$ посетителей. Каждый посетитель провёл на выставке некоторое время. Доказать, что либо найдутся $m+1$ посетителей, которые были на выставке одновременно, либо найдутся $n+1$ посетителей, которые попарно не были на выставке одновременно.

## Подпоследовательность

**Определение 6.4.** Пусть $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Выберем натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Тогда $\{a_{n_k}\}$ – *подпоследовательность* числовой последовательности $\{a_n\}$.

**Определение 6.5.** Будем говорить, что *последовательность* $\{a_n\}$ *разбита на конечное количество подпоследовательностей*, если подпоследовательности не имеют одинаковых индексов и каждый элемент исходной последовательности входит ровно в одну подпоследовательность.

**Теорема 6.2.** *Из любой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.*

*Доказательство:*

Обозначим исходную последовательность $\{a_n\}$. Пусть $\{A_k\}$ – подпоследовательность, содержащая все элементы последовательности $\{a_n\}$, начиная с индекса $n = k$. Тогда реализуется один из следующих случаев:

1) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists a_j = \sup A_k,$ где $j \geqslant k$. В этом случае можно построить монотонно (нестрого) убывающую подпоследовательность:

$$a_{n_1} = \max A_1, \qquad a_{n_2} = \max A_{n_1+1}, \qquad \ldots, \qquad a_{n_{k+1}} = \max A_{n_k+1}, \qquad \ldots.$$

Таким образом, $a_{n_1} \geqslant a_{n_2} \geqslant \ldots \geqslant a_{n_{k+1}} \geqslant \ldots$.

2) $\exists k \in \mathbb{N}: \quad \nexists a_j = \sup A_k \quad \forall j \geqslant k$. Тогда для любого элемента из множества $A_k$ будет существовать бесконечно много бóльших элементов из этого же множества. Значит, в качестве $a_{n_1}$ можно взять $a_k$. В качестве $a_{n_2}$ можно взять первый из следующих элементов бóльших, чем $a_{n_1}$. В качестве $a_{n_3}$ можно взять первый из следующих элементов бóльших, чем $a_{n_2}$. И так далее. Таким образом мы построим монотонно возрастающую подпоследовательность.

■

Следствием доказанной выше теоремы является теорема Больцано.

**Теорема 6.3** (Теорема Больцано)**.** *Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

**Определение 6.6.** Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall m, n > N \qquad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

**Теорема 6.4** (Критерий Коши)**.** *Последовательность* $\{a_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

**Задача 83.** Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

*Решение:*

Будем без ограничения общности считать, что $m > n$. Тогда пусть $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$.

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n}.$$

Нам надо, чтобы выполнялось неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Для этого достаточно потребовать выполнения неравенства $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$, то есть $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$. Значит, в определении фундаментальности последовательности достаточно взять $N = \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда по критерию Коши эта последовательность сходится. $\square$

**Задача 88.** Доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

*Решение:*

Надо доказать, что эта последовательность не является фундаментальной, то есть, что

$$\exists \varepsilon > 0\colon \quad \forall N \quad \exists m, n > N\colon \quad |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Будем без ограничения общности считать, что $m > n$. Тогда пусть $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$. Значит, надо показать, что

$$\exists \varepsilon > 0\colon \quad \forall N \quad \exists n > N \quad \exists p \in \mathbb{N}\colon \quad \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \varepsilon.$$

Положим $p = n$. Тогда получим:

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geqslant n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, достаточно взять $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и $p = n$, чтобы установить, что последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной. Значит, эта последовательность расходится. $\square$

## Частичные пределы

**Определение 6.7.** *Частичный предел последовательности* $\{a_n\}$ – это предел какой-либо её подпоследовательности.

**Утверждение 6.1.** *Если последовательность имеет предел, то все её частичные пределы равны этому пределу.*

**Утверждение 6.2.** *Если все частичные пределы последовательности равны, то она имеет такой же предел.*

*Доказательство:*

Пусть подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет предел, равный $a$. Предположим, что предел последовательности $\{a_n\}$ не равен $a$. Тогда получаем:

$$\exists\varepsilon > 0\colon \quad \forall N \quad \exists n > N\colon \quad |a_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

Это значит, что можно выбрать подпоследовательность $\{a_{n'_k}\}$ такую, что для всех её членов будет выполнено неравенство $|a_{n'_k} - a| \geqslant \varepsilon$. Но тогда её предел не будет равен $a$. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. ■

**Утверждение 6.3.** *Множество всех частичных пределов содержит все свои предельные точки.*

*Доказательство:*

Пусть дана последовательность $\{a_n\}$. Рассмотрим некоторую последовательность её частичных пределов $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$, имеющую предел $b$. Покажем, что $b$ является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.

Так как $b_1$ – частичный предел, то можно выбрать такой член последовательности $\{a_n\}$, что он будет отличаться от $b_1$ менее чем на 1, назовём его $a_{n_1}$.

Так как $b_2$ – частичный предел, то можно выбрать такой член последовательности $\{a_n\}$, что его номер будет больше $n_1$, а сам он будет отличаться от $b_2$ менее чем на $\dfrac{1}{2}$, назовём его $a_{n_2}$.

...

Так как $b_m$ – частичный предел, то можно выбрать такой член последовательности $\{a_n\}$, что его номер будет больше $n_{m-1}$, а сам он будет отличаться от $b_m$ менее чем на $\dfrac{1}{m}$, назовём его $a_{n_m}$.

...

Таким образом мы построили подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящуюся к $b$. Значит, $b$ – частичный предел последовательности $\{a_n\}$. ■

В качестве следствия из доказанного выше утверждения получаем следующее утверждение.

**Утверждение 6.4.** *Пусть $A$ – множество всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ (включая символы $-\infty$ и $+\infty$). Тогда:*

- $\exists \max A$ *(может быть $+\infty$);*
- $\exists \min A$ *(может быть $-\infty$).*

**Определение 6.8.** $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ – *верхний предел последовательности* $\{a_n\}$ – наибольший из частичных пределов (может быть $+\infty$).

**Определение 6.9.** $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ – *нижний предел последовательности* $\{a_n\}$ – наименьший из частичных пределов (может быть $-\infty$).

**Утверждение 6.5.** *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, причём в этом случае*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

**Задача 101.** Для последовательности

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

найти $\inf x_n,\ \sup x_n,\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Решение:*

Члены последовательности:

$$0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \ldots .$$

Отсюда видно, что $\inf x_n = 0,\ \sup x_n = 1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. □

**Замечание 6.1.** Вообще говоря, верны следующие неравенства:

$$\inf x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup x_n.$$

# Семинар 7

## Частичные пределы (продолжение)

Пусть $A_1$ – последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; $A_k$ – последовательность $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots$. Тогда $\sup A_{k+1} \leqslant \sup A_k$. Значит, $\{\sup A_k\}$ – монотонно убывающая последовательность. Тогда существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{k\to\infty} (\sup A_k) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{a_n\}.$$

**Упражнение 7.1** (На дом)**.** Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{a_n\} = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Вследствие описанного выше для верхнего предела $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ также используется обозначение $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Аналогично для нижнего предела $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ используется обозначение $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Задача 118.** Найти частичные пределы следующей последовательности:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5},\quad \ldots.$$

*Решение:*

Все члены последовательности лежат в интервале $(0; 1)$. Тогда все предельные точки лежат в отрезке $[0; 1]$.

Покажем, что любая точка из отрезка $[0; 1]$ является предельной. Все члены последовательности с одинаковыми знаменателями разрезают отрезок $[0; 1]$ на промежутки тем меньшей длины, чем больше значение знаменателя. Пусть $x$ – некоторая фиксированная точка из отрезка $[0; 1]$. Построим подпоследовательность, сходящуюся к $x$. Для этого достаточно из всех членов исходной последовательности с одинаковыми знаменателями каждый раз выбирать такой член, который наиболее близок к $x$. Действительно, модуль разности между $x$ и членом подпоследовательности со знаменателем $n$ будет не больше чем $\dfrac{1}{n}$, а значит, будет стремиться к 0 при $n \to \infty$.

Таким образом, отрезок $[0; 1]$ – множество частичных пределов. $\square$

**Замечание 7.1.** Вообще говоря, множеством частичных пределов последовательности может быть даже вся числовая прямая (включая точки $-\infty$ и $+\infty$). Построим такую последовательность.

Так как множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ равномощны, то между ними существует биекция, обозначим её $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Эта биекция задаёт последовательность всех рациональных чисел.

Пусть $a$ – некоторое фиксированное действительное число. Построим подпоследовательность, сходящуюся к $a$. В качестве 1-го члена подпоследовательности можно взять первый член последовательности, удалённый от $a$ не далее чем на 1 (такой член найдётся, так как любой промежуток содержит бесконечное количество рациональных чисел). В качестве 2-го члена подпоследовательности можно взять первый из следующих членов последовательности, удалённый от $a$ не далее чем на $\frac{1}{2}$. И так далее. В качестве $k$-го члена подпоследовательности можно взять первый из следующих после $(k-1)$-го члена подпоследовательности член последовательности, удалённый от $a$ не далее чем на $\frac{1}{k}$.

А чтобы получить в качестве предельной точки, например, $+\infty$, достаточно составить подпоследовательность из неограниченно возрастающих членов последовательности. Аналогично с частичным пределом $-\infty$.

**Задача 143.** Доказать *теорему Штольца*:
если
а) $y_{n+1} > y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,
в) $\exists \lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$,
то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

*Решение:*

Пусть $\lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N\colon \quad \forall n > N \qquad \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} - a\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$a-\varepsilon < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < a+\varepsilon \qquad \forall n > N;$$

$$(a-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n) < x_{n+1}-x_n < (a+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n) \qquad \forall n > N. \tag{7.1}$$

Введём обозначения:

$$A \coloneqq x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_N - x_{N-1}),$$
$$B \coloneqq y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \ldots + (y_N - y_{N-1}).$$

Преобразуем дробь $\dfrac{x_n}{y_n}$:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A + (x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} =$$
$$= \frac{A}{y_n} + \frac{(x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A}{y_n} = 0$.

В силу неравенства (7.1) имеем:

$$\frac{(x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} < \frac{(a+\varepsilon)\left((y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})\right)}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} =$$

$$= \frac{(a+\varepsilon)(y_n - y_N)}{B + y_n - y_N} = \frac{(a+\varepsilon)\left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)}{1 + \dfrac{B - y_N}{y_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a + \varepsilon;$$

$$\frac{(x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} > \frac{(a-\varepsilon)\left((y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})\right)}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} =$$

$$= \frac{(a-\varepsilon)(y_n - y_N)}{B + y_n - y_N} = \frac{(a-\varepsilon)\left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)}{1 + \dfrac{B - y_N}{y_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a - \varepsilon.$$

Тогда множество всех частичных пределов последовательности $\dfrac{(x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}$ лежит в отрезке $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$.

А так как последовательность $\dfrac{x_n}{y_n}$ отличается от последовательности $\dfrac{(x_{N+1} - x_N) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{B + (y_{N+1} - y_N) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}$ на бесконечно малую последовательность $\dfrac{A}{y_n}$, то и множество всех частичных пределов последовательности $\dfrac{x_n}{y_n}$ лежит в отрезке $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$.

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что все частичные пределы последовательности $\dfrac{x_n}{y_n}$ равны $a$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$. □

**Задача 138.** Доказать *теорему Коши*:

если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$.

*Решение:*

Положим в теореме Штольца (задача (143)) $y_n = n$ и $x_n = a_1 + \ldots + a_n$. Так как все условия теоремы Штольца выполнены, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$. □

**Замечание 7.2.** Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Может быть, что последовательность не имеет предел, а последовательность, составленная из средних арифметических членов исходной последовательности, имеет предел. Таким образом, можно сформулировать новое определение предела последовательности через средние арифметические. Предел в таком смысле будет совпадать с пределом в обычном смысле, если предел в обычном смысле существует. Но также предел в смысле средних арифметических может существовать тогда, когда предел в обычном смысле не существует.

В случае суммирования рядов такой подход называется *методом суммирования Чезаре*: вместо обычного определения ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ – частичные суммы, используется определение ряда как предела среднего арифметического частичных сумм: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$.

В качестве примера можно рассмотреть ряд $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$. Частичные суммы: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, $\ldots$. Ряд в обычном смысле расходится. А по Чезаре получаем:

$$\frac{S_1 + \ldots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{S_1 + \ldots + S_{2n} + S_{2n+1}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Значит, по Чезаре ряд сходится к $\dfrac{1}{2}$.

**Задача 146.** Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0{,}577216\ldots$ – так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$.

*Решение:*

Ранее мы доказывали, что верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{7.2}$$

Заметим, что

$$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=$$
$$=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n}{n-1}=\ln n.$$

Используя неравенства (7.2), получим:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Введём обозначение $a_n \coloneqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Тогда $x_n = a_n - \ln n$. Получим неравенства:

$$a_n - 1 < \ln n < a_n - \frac{1}{n};$$
$$\frac{1}{n} + \ln n < a_n < 1 + \ln n;$$
$$\frac{1}{n} < x_n < 1.$$

Отсюда следует, что $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Докажем, что эта последовательность монотонна:

$$x_{n+1} - x_n = (a_{n+1} - \ln(n+1)) - (a_n - \ln n) =$$
$$= (a_{n+1} - a_n) - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$$

(последнее неравенство верно в силу левого неравенства (7.2)).

Таким образом, $\{x_n\}$ – монотонно убывающая ограниченная последовательность. Значит, она сходится. □

## Метод итераций

Метод итераций состоит в рекуррентном задании некоторой последовательности. Например, так: $x_1 = C$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

**Задача 149.** Пусть $\{x_n\}$ – последовательность чисел ($n = 1, 2, \ldots$), определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

*Решение:*

Если у последовательности $\{x_n\}$ существует предел $x$, то, переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$, получаем, что $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, то есть $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2x}$, то есть $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$. Так как при $x_0 > 0$ имеем: $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $x \geqslant 0$ (если предел $x$ существует). Таким образом, если предел существует, то он равен 1.

Проверим последовательность $\{x_n\}$ на монотонность (учитываем, что $x_n > 0$):

$$x_{n+1} < x_n \iff \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) < x_n \iff x_n^2 + 1 < 2x_n^2 \iff x_n^2 > 1. \quad (7.3)$$

Если $x_0 = 1$, то $x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность монотонная. Если $x_0 > 0$ и $x_0 \neq 1$, то по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем:

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) > \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1 \qquad \forall n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Значит, в этом случае в силу равносильности неравенств (7.3) получаем, что $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, $\{x_n\}$ – монотонная (убывающая или постоянная) ограниченная (снизу числом 1) последовательность. Значит, у неё есть предел, а тогда он равен 1.

□

**Задача 150.** Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \qquad y_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

где $a, b > 0$, имеют общий предел

$$\mu(a,b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*арифметико-геометрическое среднее чисел $a$ и $b$*).

*Решение:*

Если $a = b$, то $\mu(a,b) = a = b$.

Случаи $a < b$ и $a > b$ дают одинаковые последовательности, начиная с $n = 2$. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что $a < b$.

В случае $a < b$ имеем: $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$. Тогда получаем:

$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ – монотонная (возрастающая) и ограниченная (числом $b$ сверху), а последовательность $\{y_n\}$ – монотонная (убывающая) и ограниченная (числом $a$ снизу). Значит, последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы. Покажем, что их пределы равны:

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n y_n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2;$$

$$y_n - x_n = \left(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}\right)\left(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}\right);$$

$$\frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}}{\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n}} < \frac{1}{2};$$

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2}\left(y_n - x_n\right) < \ldots < \frac{1}{2^n}\left(y_1 - x_1\right).$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. □

## Частичные пределы (продолжение)

**Задача 131** (a)**.** Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n).$$

*Решение:*

Введём обозначение $z_n \coloneqq x_n + y_n$ и $c \coloneqq \varliminf\limits_{n\to\infty} z_n$. Пусть $\{z_{n_k}\}$ – такая подпоследовательность, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = c$. Так как нижний предел подпоследовательности не меньше нижнего предела исходной последовательности, то получаем:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}, \qquad \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{k\to\infty} y_{n_k}.$$

Тогда для доказательства заданного неравенства достаточно доказать следующее неравенство:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k} + \varliminf_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}).$$

Введём обозначение $a \coloneqq \varliminf\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Пусть $\left\{x_{n_{k_m}}\right\}$ – такая подпоследовательность, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = a$. Так как в случае, когда у последовательности существует предел, он равен пределу любой её подпоследовательности, получаем, что $\lim\limits_{m\to\infty}\left(x_{n_{k_m}} + y_{n_{k_m}}\right) = c$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} y_{n_{k_m}} = c - a$. Отсюда получаем:

$$a + \varliminf_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant a + \lim_{m\to\infty} y_{n_{k_m}} \quad\Longleftrightarrow\quad \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k} + \varliminf_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}).$$

Левое неравенство верно в силу того, что нижний предел последовательности $\{y_{n_k}\}$ не больше предела любой её подпоследовательности. Значит, верно и правое неравенство. □

# Семинар 8

## Предел функции

**Определение 8.1.** *$\varepsilon$-окрестность точки $a$* – это интервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$.

То, что $x$ принадлежит $\varepsilon$-окрестности точки $a$ можно записать неравенством

$$|x-a|<\varepsilon.$$

**Определение 8.2.** Проколотая $\varepsilon$-окрестность точки $a$ – это множество

$$(a-\varepsilon;\ a)\cup(a;\ a+\varepsilon).$$

То, что $x$ принадлежит проколотой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ можно записать неравенствами

$$0<|x-a|<\varepsilon.$$

**Определение 8.3** (Определение предела функции по Коши)**.** Пусть задана функция $f:\ A\to B$, где $A,B\subset\mathbb{R}$ и $A,B\neq\varnothing$. Пусть $a$ – предельная точка множества $A$. Тогда можно определить *предел функции $f(x)$ в точке $a$*:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad (\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\colon\quad 0<|x-a|<\delta,\ \ x\in A\quad\Longrightarrow\quad |f(x)-b|<\varepsilon).$$

Часто при записи предела не пишут, что $x\in A$, то есть пишут просто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. В такой записи подразумевается, что функция определена в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и рассматриваются значения $x$, принадлежащие этой проколотой окрестности.

**Определение 8.4.** Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке $a$*.

**Упражнение 8.1.** Показать по определению предела Коши, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.

*Решение:*

Надо показать, что

$$\forall\varepsilon>0\qquad\exists\delta>0\colon\qquad 0<|x-2|<\delta\qquad\Longrightarrow\qquad\left|x^2-4\right|<\varepsilon.$$

Заметим, что

$$\left|x^2-4\right|=|x-2|\cdot|x+2|<\delta\cdot|x+2|.$$

По неравенству треугольника получаем:

$$|x+2|\leqslant|x-2|+|4|<\delta+4.$$

Тогда получаем:

$$\left|x^2 - 4\right| < \delta(\delta + 4).$$

Значит, достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0\colon \qquad \delta(\delta + 4) < \varepsilon.$$

По сути надо показать, что система $\begin{cases} \delta^2 + 4\delta - \varepsilon < 0 \\ \delta > 0 \end{cases}$ имеет решения. Так как у уравнения $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$ существуют два корня: положительный и отрицательный, то система действительно имеет решения.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. $\square$

**Определение 8.5.** $\{x_n\}$ – *последовательность Гейне для точки* $a \in A$, если:

1) $x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2) $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**Определение 8.6** (Определение предела функции по Гейне)**.** Пусть задана функция $f\colon\ A \to B$, где $A, B \subset \mathbb{R}$ и $A, B \neq \varnothing$. Пусть $a$ – предельная точка множества $A$. Тогда можно определить *предел функции* $f(x)$ *в точке* $a$:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \text{ последовательности Гейне } \{x_n\} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b).$$

**Упражнение 8.2.** Показать по определению предела Гейне, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

*Решение:*

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 2^2 = 4$. $\square$

**Упражнение 8.3.** Показать, что $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$, где $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

*Решение:*

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ и $\dfrac{1}{n} \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – последовательность Гейне для точки 0. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} \dfrac{1}{n} = 1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$ и $-\dfrac{1}{n} \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$ – последовательность Гейне для точки 0. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = -1$.

Таким образом, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$. $\square$

**Определение 8.7** (Определение предела функции в бесконечности по Коши)**.** Пусть задана функция $f\colon\ A \to B$, где $A, B \subset \mathbb{R}$ и $A, B \neq \varnothing$. Пусть $\infty$ – предельная точка множества $A$. Тогда можно определить *предел функции* $f(x)$ *в точке* $\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in A}} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \quad |x| > \frac{1}{\delta},\ x \in A \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon\right).$$

**Упражнение 8.4.** Показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$.

*Решение:*

Надо показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \quad |x| > \frac{1}{\delta} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x+1| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

По неравенству треугольника имеем:

$$|x+1| \geqslant |x| - 1 > \frac{1}{\delta} - 1.$$

Значит, если $\dfrac{1}{\delta} - 1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$, то есть если $\delta = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon} + 1}$, то неравенство $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ будет выполнено.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$. □

**Определение 8.8** (Определение предела функции, равного бесконечности, по Коши)**.** Пусть задана функция $f\colon\ A \to B$, где $A, B \subset \mathbb{R}$ и $A, B \neq \varnothing$. Пусть $a$ – предельная точка множества $A$. Тогда можно определить *предел функции* $f(x)$ *в точке* $a$*, равный бесконечности*:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \quad 0 < |x - a| < \delta,\ x \in A \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

**Замечание 8.1.**

Если заменить $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ на $f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то можно написать $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = +\infty$.

А если заменить $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ на $f(x) < -\dfrac{1}{\varepsilon}$, то можно написать $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = -\infty$.

**Замечание 8.2.**

Если пишут $x \to a+$ или $x \to a+0$, то подразумевают вместо условия $0 < |x-a| < \delta$ условие $0 < x-a < \delta$.

Если пишут $x \to a-$ или $x \to a-0$, то подразумевают вместо условия $0 < |x-a| < \delta$ условие $-\delta < x-a < 0$.

**Определение 8.9.** Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ – *бесконечно малая функция при* $x \to a$.

**Утверждение 8.1.** *Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.*

**Утверждение 8.2.** *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = b \pm c;$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = b \cdot c;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

*Причём в случае с частным $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и $c \neq 0$.*

**Задача 409.** Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если} \quad n = m \\ 0, & \text{если} \quad n < m \end{cases}.$$

*Решение:*

Сначала рассмотрим случай $m = n$.

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Теперь рассмотрим случай $m > n$.

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^{m-n}} + \dfrac{a_1}{x^{m-n+1}} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^m}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}} = 0.$$

Теперь рассмотрим случай $m < n$. Так как по доказанному выше $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{R(x)} = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$. □

**Задача 411.** Найти значение следующих выражений:

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$\text{б)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

*Решение:*

а)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

б)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

б)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}.$$

□

## Схема Горнера

Если надо поделить многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ на двучлен $x - b$, то можно воспользоваться схемой Горнера.

Схему Горнера удобно записывать в виде следующей таблицы.

| | $a_0$ | $a_1$ | $\ldots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $b_0$ | $b_1$ | $\ldots$ | $b_{n-1}$ | $b_n$ |

В этой таблице сначала заполняется верхняя строка из коэффициентов исходного многочлена (с пропуском первой ячейки), а во вторую строку в первую ячейку записывается значение $b$. Затем мы под ячейку с $a_0$ записываем значение $b_0 = a_0$. После этого под ячейку с $a_1$ записываем значение $b_1 = b \cdot b_0 + a_1$, под ячейку с $a_2$ записываем значение $b_2 = b \cdot b_1 + a_2$, и так далее, пока не дойдём до $b_n = b \cdot b_{n-1} + a_n$.

То есть, чтобы получить число из нижней строки, надо $b$ умножить на предыдущее записанное число из нижней строки и к полученному произведению прибавить число из верхней строки того же столбца, в который собираемся писать.

В результате получим коэффициенты многочлена $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, который является результатом деления многочлена $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ на двучлен $x - b$, и остаток $b_n$.

# Семинар 9

## Основная теорема алгебры

**Теорема 9.1** (Основная теорема алгебры). *Многочлен $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет ровно $n$ корней с учётом кратности, то есть*

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n = a_0(z-z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m},$$

*где $z_1, \ldots, z_m$ – корни, $k_1, \ldots, k_m$ – кратности корней, причём $k_1+\ldots+k_m=n$.*

**Утверждение 9.1.** *Если все коэффициенты многочлена действительны, то корни либо действительные, либо вместе с корнем вида $z_{j_1}=x+iy$ существует комплексно сопряжённый ему корень, то есть $z_{j_2}=x-iy$, причём кратности у корней $z_{j_1}$ и $z_{j_2}$ совпадают.*

Если перемножить комплексно сопряжённые корни $z_{j_1}$ и $z_{j_2}$, то получим квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами.

**Утверждение 9.2.** *Если все коэффициенты многочлена действительны, то его можно разложить на линейные множители и на квадратичные множители, не имеющие действительных корней.*

**Теорема 9.2** (Теорема Безу). *Остаток от деления многочлена*

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

*на $(z-a)$ равен $P_n(a)$.*

**Замечание 9.1.** Таким образом, если $a$ – корень многочлена $P_n(z)$, то остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $(z-a)$ равен 0.

## Предел функции (продолжение)

**Задача 420.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$$

*Решение:*

Заметим, что $x=1$ – корень числителя и знаменателя.

Воспользуемся схемой Горнера для деления многочлена $x^4-3x+2$ на двучлен $x-1$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | $-3$ | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $-2$ | 0 |

Получили многочлен $x^3+x^2+x-2$.

Воспользуемся схемой Горнера для деления многочлена $x^5 - 4x + 3$ на двучлен $x - 1$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | $-4$ | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $-3$ | 0 |

Получили многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x - 3$.

Теперь можем вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-2}{x^4+x^3+x^2+x-3} = 1.$$

$\square$

**Задача 428.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right),$$

где $m$ и $n$ – натуральные числа.

*Решение:*

Если $m = n$, то $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right) = 0$.

Рассмотрим случай $m > n$. Воспользуемся формулой сокращённого умножения:

$$x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+x+1\right).$$

Получим:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{n}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(m-n)+(m-n)x+\ldots+(m-n)x^{n-1}-nx^n-\ldots-nx^{m-1}}{(1-x)\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\left(1+x+\ldots+x^{m-1}\right)} \ominus$$

Воспользуемся схемой Горнера для деления многочлена

$$(m-n)+(m-n)x+\ldots+(m-n)x^{n-1}-nx^n-\ldots-nx^{m-1}$$

на двучлен $x - 1$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-n$ | $-n$ | $\ldots$ | $-n$ | $m-n$ | $\ldots$ | $m-n$ | 0 |
| 1 | $-n$ | $-2n$ | $\ldots$ | $-(m-n)n$ | $-(m-n)(n-1)$ | $\ldots$ | $-(m-n)$ | 0 |

Получили следующий многочлен:

$$-nx^{m-2} - 2nx^{m-3} - \ldots - (m-n)nx^{n-1} - (m-n)(n-1)x^{n-2} - \ldots - (m-n).$$

Теперь можем продолжить вычисление предела:

$$\ominus \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)}{(1-x)\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\left(1+x+\ldots+x^{m-1}\right)}\cdot\left(-nx^{m-2}-2nx^{m-3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ldots-(m-n)nx^{n-1}-(m-n)(n-1)x^{n-2}-\ldots-(m-n)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\left(1+x+\ldots+x^{m-1}\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\left(nx^{m-2}+2nx^{m-3}+\ldots+(m-n)nx^{n-1}+(m-n)(n-1)x^{n-2}+\ldots+(m-n)\right)\right)=$$

$$=\frac{n+2n+(m-n)n+(m-n)(n-1)+\ldots+(m-n)}{nm}=$$

$$=\frac{n\cdot\dfrac{(1+m-n)(m-n)}{2}+(m-n)\cdot\dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2}}{mn}=$$

$$=\frac{(m-n)(n+mn-n^2+n^2-n)}{2mn}=\frac{m-n}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай $m<n$. Сведём к предыдущему случаю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=-\lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right)=-\frac{n-m}{2}=\frac{m-n}{2}.$$

Таким образом, результат вычисления предела во всех случаях равен $\dfrac{m-n}{2}$. □

**Задача 435.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1.$$

□

**Задача 438.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{\left(\sqrt{1-x}-3\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(2+\sqrt[3]{x})\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(1-x-9)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(8+x)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=\lim_{x\to -8}\frac{-(8+x)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(8+x)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{-\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=\frac{-12}{6}=-2.$$

□

**Задача 444.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},$$

где $n\in\mathbb{N}$.

*Решение:*

Воспользуемся следствием из формулы сокращённого умножения:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+1}=\frac{1}{n}.$$

□

**Теорема 9.3** (Теорема о пределе композиции непрерывных функций)**.**

*Пусть* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ *и* $\lim\limits_{t\to b}g(t)=g(b)=a,$ *тогда*

$$\lim_{t\to b}f(g(t))=f(g(b))=f(a).$$

*Доказательство:*

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists\delta > 0\colon \quad |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Так как $\lim\limits_{t\to b} g(t) = g(b) = a$, то

$$\forall\delta > 0 \qquad \exists\theta > 0\colon \quad |t-b| < \theta \quad \Longrightarrow \quad |g(t) - g(b)| < \delta.$$

Тогда получаем:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists\theta > 0\colon \quad |t-b| < \theta \quad \Longrightarrow \quad |f(g(t)) - f(g(b))| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{t\to b} f(g(t)) = f(g(b)) = f(a)$. ■

**Задача 454.** Пусть $P(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m$ и $m \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(t)} - 1}{t} = \frac{a_1}{m}.$$

*Решение:*

Используя результат задачи (444), доопределим по непрерывности функцию $\dfrac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x}$ в 0 значением $\dfrac{1}{m}$.

Тогда по теореме (9.3) о пределе композиции непрерывных функций получаем:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(t)} - 1}{P(t)} = \frac{1}{m}.$$

Теперь можем вычислить заданный предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(t)} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \left( \frac{\sqrt[m]{1+P(t)} - 1}{P(t)} \cdot \frac{P(t)}{t} \right) = \frac{a_1}{m}.$$

□

## Эквивалентные функции

**Определение 9.1.** *Функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$* (пишут $f(x) \sim g(x)$) *при $x \to x_0$* ($x_0$ может быть $\infty$), если $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$.

**Утверждение 9.3.** *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.*

*Доказательство:*

Так как $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$.

Тогда $g(x) = \dfrac{1}{h(x)} \cdot f(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{h(x)} = 1$. Значит, $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$. ■

**Утверждение 9.4.** *Если $f(x) \sim g(x)$ и $g(x) \sim p(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) \sim p(x)$ при $x \to x_0$.*

*Доказательство:*

Так как $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) = h_1(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x) = 1$.

Так как $g(x) \sim p(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x) = h_2(x) \cdot p(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h_2(x) = 1$.

Тогда $f(x) = h_1(x)h_2(x) \cdot p(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h_1(x)h_2(x) = 1$. Значит, $f(x) \sim p(x)$ при $x \to x_0$. ■

**Замечание 9.2.** Таким образом, эквивалентность функций обладает свойствами симметричности и транзитивности, а значит, является отношением эквивалентности.

**Замечание 9.3.** По сути в решении задачи (454) мы показали, что

$$\sqrt[m]{1 + P(t)} - 1 \sim \frac{P(t)}{m} \quad \text{при} \quad t \to t_0,$$

где $P(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m$ и $m \in \mathbb{N}$.

Аналогично можно показать, что если $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = 0$ и $m \in \mathbb{N}$, то

$$\sqrt[m]{1 + g(t)} - 1 \sim \frac{g(t)}{m} \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

**Замечание 9.4.** Заменять по эквивалентности выражения внутри предела можно только в том случае, когда они являются множителями (в том числе и в знаменателе), не участвующими в сложении или вычитании.

**Задача 453.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$.

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - \sqrt[m]{1+\alpha x} + \sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} \ominus$$

Разобьём предел на сумму двух пределов, надеясь, что не выйдет так, что оба получившихся предела не будут существовать (так как в этом случае мы ничего не сможем сказать про исходный предел).

$$\ominus \lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}=\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}.$$

□

## Корень из квадрата

**Утверждение 9.5.**

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Например, $\sqrt{x^2(x+1)}=|x|\sqrt{x+1}$, а значит, $x\sqrt{x+1}=\operatorname{sgn}(x)\cdot\sqrt{x^3+x^2}$.

**Задача 470.** Найти постоянные $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ из условий:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1}{x}=0\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-a_1x}{x}=0\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1.$$

Теперь можем найти $b_1$:

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Нахождение $a_2$ и $b_2$ остаётся в качестве домашнего упражнения. □

**Замечание 9.5.** Вообще говоря, если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-a_1x-b_1)=0$, то $y=a_1x+b_1$ – *правая наклонная асимптота*, а если $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-a_2x-b_2)=0$, то $y=a_2x+b_2$ –

*левая наклонная асимптота*, причём константы ищутся по следующим формулам:

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - a_1 x),$$

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - a_2 x).$$

# Семинар 10

## Первый замечательный предел

**Утверждение 10.1.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

*– первый замечательный предел.*

В процессе доказательства первого замечательного предела устанавливаются следующие полезные утверждения.

**Утверждение 10.2.**

$$|\sin x|\leqslant |x| \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

*причём равенство возможно только при $x=0$.*

**Утверждение 10.3.**

$$x\leqslant \operatorname{tg} x \qquad \forall x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right),$$

*причём равенство возможно только при $x=0$.*

**Утверждение 10.4.**

$$\operatorname{arctg} x\leqslant x \qquad \forall x\geqslant 0,$$

*причём равенство возможно только при $x=0$.*

**Задача 471.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

□

**Задача 472.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

*Решение:*

Так как $\sin x$ – ограниченная функция, а $\frac{1}{x}$ – бесконечно малая функция при $x\to\infty$, то получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

□

**Задача 474.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) \ominus$$

Так как $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2\to 0$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Таким образом, функция $\cos x$ непрерывна в 0.

$$\ominus\ 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

*2-й способ:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

□

**Задача 477.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

Используем формулу $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=4\cdot 1\cdot 1=4.$$

*2-й способ:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 3x}{x^2} \ominus$$

Разобьём предел на сумму двух пределов, надеясь, что не выйдет так, что оба получившихся предела не будут существовать (так как в этом случае мы ничего не сможем сказать про исходный предел).

$$\ominus\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+9\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}=-\frac{1}{2}+9\cdot\frac{1}{2}=4.$$

$\square$

**Задача 481** (a)**.** Доказать равенство:

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = 0;$$

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-a| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to a}(\sin x - \sin a) = 0$, а значит, $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$. $\square$

**Определение 10.1.** $f(x)$ – *липшицева функция* (или *функция класса Липшица*), если

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C\cdot|x_1 - x_2|,$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от выбора $x_1$ и $x_2$.

Как видно из решения задачи (481), $\sin x$ – липшицева функция.

**Утверждение 10.5.** *Липшицевы функции непрерывны.*

**Упражнение 10.1** (На дом)**.** Доказать, что функция $y = \sqrt{x}$ не является липшицевой на отрезке $x \in [0;\,1]$.

**Задача 482.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right) = 1\cdot\cos a = \cos a.$$

$\square$

## Символ «$o$» малое

**Определение 10.2.** $f(x) = o(g(x))$ *при* $x \to x_0$, если $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

**Замечание 10.1.** Запись «$f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$» обозначает принадлежность функции $f(x)$ к классу функций $o(g(x))$ при $x \to x_0$. Поэтому запись «$f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$» корректна, а запись «$o(g(x)) = f(x)$ при $x \to x_0$» некорректна.

**Утверждение 10.6.** *Если* $f(x) = o(g(x))$ *при* $x \to x_0$, *то* $f(x) \cdot h(x) = o(g(x) \cdot h(x))$ *при* $x \to x_0$.

*Доказательство:*

Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Тогда получаем:

$$f(x) \cdot h(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \cdot h(x).$$

Значит, $f(x) \cdot h(x) = o(g(x) \cdot h(x))$ при $x \to x_0$. ■

**Задача 646** (a). Показать, что:

$$o(o(f(x))) = o(f(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

*Решение:*

$o(f(x))$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\alpha(x) \cdot f(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

$o(o(f(x)))$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\alpha_2(x) \cdot \alpha_1(x) \cdot f(x)$, где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

Так как $(\alpha_2(x) \cdot \alpha_1(x))$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то получаем: $o(o(f(x))) \subset o(f(x))$.

Так как $\alpha(x) = \left(\operatorname{sgn}(\alpha(x)) \cdot \sqrt{|\alpha(x)|}\right) \cdot \sqrt{|\alpha(x)|}$, причём функции $\operatorname{sgn}(\alpha(x)) \cdot \sqrt{|\alpha(x)|}$ и $\sqrt{|\alpha(x)|}$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, то $o(f(x)) \subset o(o(f(x)))$.

Таким образом, $o(o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \to x_0$. □

**Утверждение 10.7.**

$$o(f(x)) = o(|f(x)|) \quad \textit{при} \quad x \to x_0.$$

*Доказательство:*

$o(f(x))$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\alpha_1(x) \cdot f(x)$, где $\alpha_1(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

$o(|f(x)|)$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\alpha_2(x) \cdot |f(x)|$, где $\alpha_2(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Так как $\alpha_1(x) \cdot f(x) = \alpha_1(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot |f(x)|$, причём функция $\alpha_1(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то $o(f(x)) \subset o(|f(x)|)$.

Так как $\alpha_2(x) \cdot |f(x)| = \alpha_2(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f(x)$, причём функция $\alpha_2(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x))$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то $o(|f(x)|) \subset o(f(x))$.

Таким образом, $o(f(x)) = o(|f(x)|)$ при $x \to x_0$. ■

**Утверждение 10.8.** *Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, тогда*

$$o(f(x)) = o(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

## Символ «$O$» большое

**Определение 10.3.** $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to x_0$, если $f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$, где $\beta(x)$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$.

**Замечание 10.2.** Запись «$f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$» обозначает принадлежность функции $f(x)$ к классу функций $O(g(x))$ при $x \to x_0$. Поэтому запись «$f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$» корректна, а запись «$O(g(x)) = f(x)$ при $x \to x_0$» некорректна.

**Замечание 10.3.** Так как всякая бесконечно малая функция при $x \to x_0$ является ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, то $o(f(x)) \subset O(f(x))$.

**Утверждение 10.9.**

$$O(f(x)) = O(|f(x)|) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

**Утверждение 10.10.** *Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, тогда*

$$O(f(x)) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

**Задача 646** (д). Показать, что:

$$O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

*Решение:*

$O(f(x))$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\beta(x) \cdot f(x)$, где $\beta(x)$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$.

$O(f(x)) + o(f(x))$ при $x \to x_0$ – это класс функций вида $\beta_1(x) \cdot f(x) + \alpha(x) \cdot f(x)$, где $\beta_1(x)$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Так как $(\beta_1(x) + \alpha(x))$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, то $O(f(x)) + o(f(x)) \subset O(f(x))$.

Так как $\beta(x) = \beta(x) + 0$, причём $\beta(x)$ – функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, и 0 – бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то $O(f(x)) \subset O(f(x)) + o(f(x))$.

Таким образом, $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$ при $x \to x_0$. □

**Замечание 10.4.** Так как всякая бесконечно малая функция при $x \to x_0$ является ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$, то из предыдущей задачи получаем:

$$O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

## Решение пределов с помощью символа «$o$»

**Задача 494.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

*Решение:*

Как было показано ранее, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + o(1)$ при $x \to 0$. Домножим равенство на $x^2$, получим: $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$. Для аргументов $2x$ и $3x$ при $x \to 0$ получим:

$$1 - \cos 2x = 2x^2 + o(x^2); \qquad 1 - \cos 3x = \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Выразим косинусы при $x \to 0$, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2); \qquad \cos 2x = 1 - 2x^2 + o(x^2); \qquad \cos 3x = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Теперь можем вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - 2x^2 + o(x^2))\left(1 - \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} - 2x^2 - \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{7 + o(1)}{\dfrac{1}{2} + o(1)} = 14.$$

$\square$

**Замечание 10.5.** Равенство вида $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ называется *асимптотическими равенствами* (или *асимптотическими разложениями*).

**Задача 499.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

*Решение:*

Как было показано ранее, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2} + o(1)$ при $x \to 0$. Тогда $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

Так как, например, $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \dfrac{\sin x}{2} + o(\sin x)$ и $o(\sin x) = o(x)$ при $x \to 0$, а в знаменателе выражения внутри заданного предела находится $x^3$, то точности недостаточно. Поэтому сначала преобразуем выражение под заданным пределом.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{2x^3 \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{2} = \frac{1}{4}.$$

$\square$

**Задача 504.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

*Решение:*

Как было показано ранее, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{3}$. Значит, $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{3} + o(x)$ при $x \to 0$.

Получим асимптотические равенства для выражений, находящихся внутри заданного предела:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 - 2x^2 + o(x^2)} = 1 - x^2 + o(x^2) + o(-2x^2 + o(x^2)) = 1 - x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt[3]{\cos 3x} = \sqrt[3]{1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Теперь можем вычислить заданный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + o(1)}{1} = 3.$$

$\square$

# Семинар 11

## Второй замечательный предел

**Утверждение 11.1.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

– *второй замечательный предел.*

**Замечание 11.1.** Не следует путать второй замечательный предел с определением числа $e$. Число $e$ определяется как предел числовой последовательности:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{где} \quad n\in\mathbb{N},$$

а второй замечательный предел – это предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \text{где} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

**Утверждение 11.2.** *Другие формы второго замечательного предела:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

**Замечание 11.2.** Из того, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, получаем:

$$\ln(1+x)\sim x \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

**Задача 506.** Вычислить пределы:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \qquad \text{б)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \qquad \text{в)}\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

*Решение:*

а)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} = e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

б)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

в)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)} = e^0 = 1.$$

□

**Задача 515.** Вычислить предел:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x.$$

*Решение:*
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}.$$

□

**Задача 520.** Вычислить предел:
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

*Решение:*
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a} e^{\frac{1}{x-a}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{1}{x-a}\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{1}{\sin a}\cdot\frac{\sin x-\sin a}{x-a}} \ominus$$

Как мы показывали в задаче (482), $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a} = \cos a$.

$$\ominus\ e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\operatorname{ctg} a}.$$

□

**Задача 539.** Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}.$$

*Решение:*
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-1}{\cos(bx)-1} = \lim_{x\to 0}\left(\left(-\frac{(ax)^2}{2}\right):\left(-\frac{(bx)^2}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

□

**Задача 548.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \qquad (a>0).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^\alpha - 1\right)}{a^\beta\left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^\beta - 1\right)} = \lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left(e^{\alpha\cdot\ln\frac{x}{a}} - 1\right)}{a^\beta\left(e^{\beta\cdot\ln\frac{x}{a}} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\cdot\alpha\cdot\ln\dfrac{x}{a}}{a^\beta\cdot\beta\cdot\ln\dfrac{x}{a}} = \lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\cdot\alpha}{a^\beta\cdot\beta} = \frac{a^\alpha\cdot\alpha}{a^\beta\cdot\beta}.$$

$\square$

**Задача 556.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (a,b,c>0).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}\left(\frac{e^{x\ln a}-1}{x}+\frac{e^{x\ln b}-1}{x}+\frac{e^{x\ln c}-1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}\left(\frac{x\ln a}{x}+\frac{x\ln b}{x}+\frac{x\ln c}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} =$$

$$= e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} = e^{\ln\sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

$\square$

**Замечание 11.3.** Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$. При $x=1$ получаем среднее арифметическое, при $x=2$ – среднее квадратическое. А из решения предыдущей задачи следует, что при $x\to 0$ получаем среднее геометрическое.

Таким образом, неравенства для средних

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

можно доказать, показав, что функция $f(x)$ является неубывающей.

**Задача 560.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\qquad (a>0).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{a^x\cdot\ln a}-e^{x^a\cdot\ln a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{x^a\cdot\ln a}\left(e^{(a^x-x^a)\cdot\ln a}-1\right)}{a^x-x^a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^{x^a\cdot\ln a}\,(a^x-x^a)\cdot\ln a}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\left(e^{x^a\cdot\ln a}\cdot\ln a\right)=e^{a^a\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^{a^a}\cdot\ln a.$$

$\square$

## Гиперболические функции

**Определение 11.1.**

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

– гиперболический синус.

**Определение 11.2.**

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

– гиперболический косинус.

**Определение 11.3.**

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

– гиперболический тангенс.

**Определение 11.4.**

$$\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

– гиперболический котангенс.

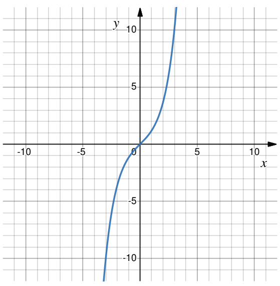

Рис. 11.1: $y=\operatorname{sh}x$

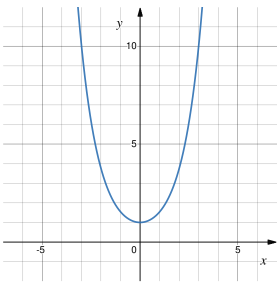

Рис. 11.2: $y=\operatorname{ch}x$

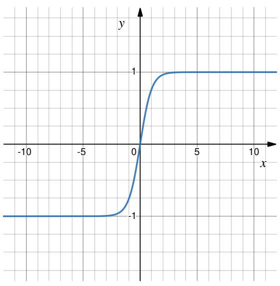

Рис. 11.3: $y=\operatorname{th}x$

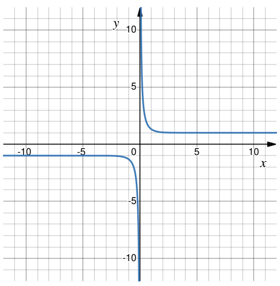

Рис. 11.4: $y=\operatorname{cth}x$

**Замечание 11.4.** Из формулы $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ получаем:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{ch}(ix); \qquad \operatorname{ch} x = \cos(ix);$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \operatorname{sh}(ix); \qquad \operatorname{sh} x = -i \sin(ix).$$

**Замечание 11.5.** Одна из форм 2-го замечательного предела следующая:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Преобразуем выражение из левой части:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

Таким образом, получаем ещё одну форму 2-го замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$$

Отсюда следует, что 2-й замечательный предел – это 1-й замечательный предел, если рассматривать его вдоль мнимой оси:

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-i \sin(ix)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ix)}{ix} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z},$$

где $z = ix$ и $x \in \mathbb{R}$.

**Замечание 11.6.** Вообще говоря, можно показать, что $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$, где $z \in \mathbb{C}$.

**Утверждение 11.3.**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

*– основное гиперболическое тождество.*

*Доказательство:*

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

■

**Утверждение 11.4.**

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$$

*– формулы двойных аргументов.*

*Доказательство:*

$$\operatorname{sh}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - 2}{2} = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$$

■

**Задача 576** (б)**.** Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2}.$$

□

**Задача 577** (1 а)**.** Вычислить предел:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a} = \lim_{x \to a} \left( \frac{1}{x - a} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^a - e^{-a}}{2} \right) \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{e^x - e^a}{x - a} - \frac{e^{-x} - e^{-a}}{x - a} \right) \right) = \lim_{x \to a} \left( \frac{1}{2} \left( e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} + e^{-a} \cdot \frac{e^{a-x} - 1}{a - x} \right) \right) =$$

$$= \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \operatorname{ch} a.$$

□

## Эквивалентные функции (продолжение)

**Задача 653** (в)**.** Пусть $x \to 0$. Выделить главный член вида $Cx^\alpha$, где $C$ – постоянная, и определить порядки малости относительно переменной $x$ следующей функции:

$$\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}.$$

*Решение:*

Используя формулу сокращенного умножения

$$a^6 - b^6 = (a-b)\left(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5\right),$$

получим:

$$\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x} = \sqrt[6]{(1-2x)^3} - \sqrt[6]{(1-3x)^2} = \frac{(1-2x)^3 - (1-3x)^2}{(\star)} \ominus$$

Здесь $(\star)$ – выражение $(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$ при $a = \sqrt{1-2x}$ и $b = \sqrt[3]{1-3x}$.

$$\ominus \frac{(1-6x+12x^2-8x^3) - (1-6x+9x^2)}{(\star)} = \frac{3x^2 - 8x^3}{(\star)} \sim$$

Заметим, что $(\star) \sim 6$.

$$\sim \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, $C = \dfrac{1}{2}$ и $\alpha = 2$. □

**Задача 657** (в)**.** Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида $C \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}$, где $C$ – постоянная, и определить порядки малости относительно переменной $\dfrac{1}{x}$ следующей функции:

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}.$$

*Решение:*

$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right) - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) =$$

$$= \frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} - \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{x-(x+2)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)} \sim \frac{-2}{\left(2\sqrt{x}\right)^3} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, $C = -\dfrac{1}{4}$ и $\alpha = \dfrac{3}{2}$. $\square$

**Определение 11.5.** *Функция $f(x)$ слабо эквивалента функции $g(x)$ при $x \to a$,* если в некоторой проколотой окрестности точки $a$ верно, что

$$\exists C_1, C_2 > 0\colon \qquad C_1 \cdot f(x) \leqslant g(x) \leqslant C_2 \cdot f(x).$$

Пишут: $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$.

Например, при $x \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ верно неравенство $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$. Значит, $\sin x \asymp x$ при $x \to +0$.

**Утверждение 11.5.** *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$.*

# Семинар 12

## Обратные тригонометрические функции

**Определение 12.1.** $\arcsin x$ *(арксинус $x$), где $x \in [-1;\ 1]$ – число $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ такое, что $\sin y = x$.*

**Определение 12.2.** $\arccos x$ *(арккосинус $x$), где $x \in [-1;\ 1]$ – число $y \in [0;\ \pi]$ такое, что $\cos y = x$.*

**Определение 12.3.** $\operatorname{arctg} x$ *(арктангенс $x$), где $x \in \mathbb{R}$ – число $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ такое, что $\operatorname{tg} y = x$.*

**Определение 12.4.** $\operatorname{arcctg} x$ *(арккотангенс $x$), где $x \in \mathbb{R}$ – число $y \in (0;\ \pi)$ такое, что $\operatorname{ctg} y = x$.*

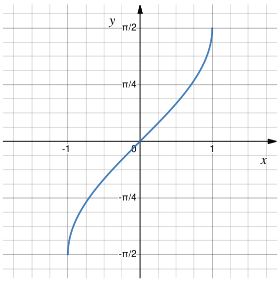

Рис. 12.1: $y = \arcsin x$

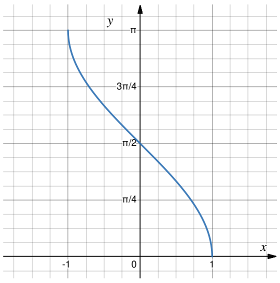

Рис. 12.2: $y = \arccos x$

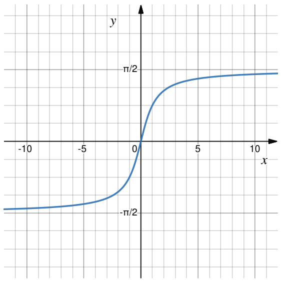

Рис. 12.3: $y = \operatorname{arctg} x$

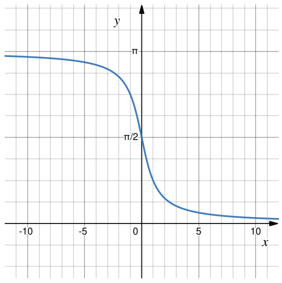

Рис. 12.4: $y = \operatorname{arcctg} x$

**Утверждение 12.1.** *Обратные тригонометрические функции непрерывны.*

**Утверждение 12.2.**

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

## Обратные гиперболические функции

Решим уравнение $\operatorname{sh} x = y$ относительно переменной $x$. Учтём, что $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и сделаем замену переменной $t = e^x$, где $t > 0$.

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{2} = y \quad \Big| \cdot 2t;$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 1; \qquad t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Так как $t > 0$, то $t = y + \sqrt{y^2+1}$. Тогда $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

**Определение 12.5.** $\operatorname{arsh} x$ *(обратный гиперболический синус $x$), где $x \in \mathbb{R}$* – число $y$ такое, что $\operatorname{sh} y = x$:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Решим уравнение $\operatorname{ch} x = y$ относительно переменной $x$. Учтём, что $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и сделаем замену переменной $t = e^x$, где $t > 0$.

$$\frac{t + \frac{1}{t}}{2} = y \quad \Big| \cdot 2t;$$

$$t^2 - 2yt + 1 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = y^2 - 1; \qquad t = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

Подходят оба решения относительно $t$ (так получается из-за того, что гиперболический косинус – неинъективная функция). Тогда $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$.

**Определение 12.6.** $\operatorname{arch} x$ *(обратный гиперболический косинус $x$), где $x \geqslant 1$* – число $y \geqslant 0$ такое, что $\operatorname{ch} y = x$:

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

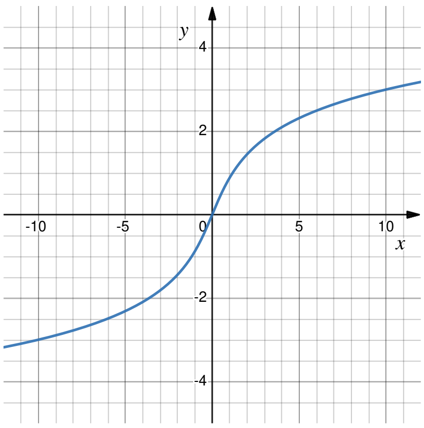


Рис. 12.5: $y = \operatorname{arsh} x$

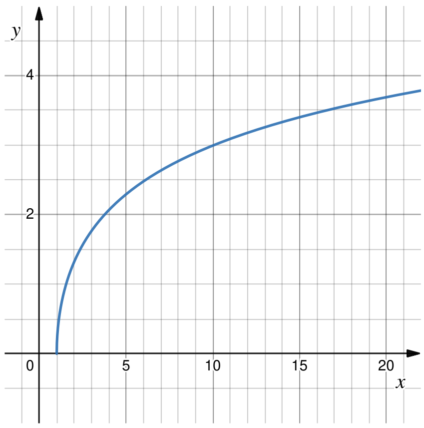


Рис. 12.6: $y = \operatorname{arch} x$

**Упражнение 12.1** (На дом)**.** Решить уравнения $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$ относительно переменной $x$.

**Утверждение 12.3.** *Обратные гиперболические функции непрерывны.*

# Решение задач на пределы

**Задача 582.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \arccos\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

□

**Задача 585.** Вычислить предел:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}.$$

*Решение:*

Используя эквивалентность $t \sim \operatorname{tg} t$ при $t \to 0$, получаем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x\right)}{h} \circleddash$$

Теперь используем формулы $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ и $\operatorname{tg}\operatorname{arctg} t = t$, получим:

$$\circleddash \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h)-x}{1+(x+h)\cdot x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+(x+h)\cdot x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

**Задача 604.** Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

*Решение:*

Заметим, что $\sin(x+\pi) = -\sin x$. Тогда $\sin(x+\pi n) = (-1)^n \cdot \sin x$.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \cdot \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 0.$$

□

**Задача 606.** Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\text{ раз}} x.$$

*Решение:*

Найдём предел с помощью метода итераций. Пусть $x_0 = x$, тогда $x_{n+1} = \sin x_n$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Если $x = 0$, то $x_n = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Если $x \neq 0$, то $x_1 \in [-1;\ 1]$.

Если $x_1 = 0$, то $x_n = 0\ \ \forall x \in \mathbb{N}$.

Если $x_1 \in (0;\, 1]$, то в силу неравенства $0 < \sin x < x$ получаем, что

$$0 < x_{n+1} < x_n \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{x_n\}$ – монотонно убывающая ограниченная последовательность. Значит, у неё есть предел, назовём его $a$. Тогда из равенства $x_{n+1} = \sin x_n$ предельным переходом получаем: $a = \sin a$. Это уравнение имеет единственный корень $a = 0$.

Аналогично можно показать, что если $x_1 \in [-1;\ 0)$, то предел последовательности $\{x_n\}$ равен 0.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\text{ раз}} x = 0$. □

**Задача 637** (3)**.** Последовательность $\{x_n\}$ определяется следующим образом:

$$x_0 = 1, \qquad x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Указание:* рассмотреть разность между $x_n$ и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$.

*Решение:*

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он является корнем уравнения

$x = \dfrac{1}{1+x}$. Решим это уравнение (заметим, что $1 + x \neq 0$):

$$x = \frac{1}{1+x} \quad \Big| \cdot (1+x);$$
$$x^2 + x - 1 = 0;$$
$$D = 1 + 4 = 5; \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как все члены последовательности $\{x_n\}$ положительны, то её предел, если он есть, неотрицателен. Тогда, если этот предел существует, то он равен $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi^{-1}$ – это число. обратное к золотому сечению.

Воспользуемся указанием из задания, учитывая, что $x = \varphi^{-1}$ – корень уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$, то есть $\varphi^{-1} = \dfrac{1}{1+\varphi^{-1}}$.

$$x_n - \varphi^{-1} = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \varphi^{-1} = \frac{(1+\varphi^{-1}) - (1+x_{n-1})}{(1+x_{n-1})(1+\varphi^{-1})} = \frac{\varphi^{-1} - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+\varphi^{-1})}.$$

Пусть $y_n = x_n - \varphi^{-1}$. Тогда получаем:

$$y_n = \frac{-y_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+\varphi^{-1})}.$$

Отсюда следует, что $|y_n| < \dfrac{|y_{n-1}|}{1+\varphi^{-1}}$. Тогда $|y_n| < \dfrac{|y_1|}{(1+\varphi^{-1})^{n-1}}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi^{-1}$, то есть $\varphi^{-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}$. □

**Задача 639** (2)**.** Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ – произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$.

*Решение:*

Если последовательность $\{y_n\}$ имеет предел, то он является корнем уравнения $y = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{x}{y}\right)$. Отсюда получаем $\dfrac{1}{2}y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{y}$, значит, $y^2 = x$. Так как все члены последовательности $\{y_n\}$ положительны, то её предел, если он есть, неотрицателен.

Значит, $y = \sqrt{x}$.

Так как $\sqrt{x}$ является решением уравнения $y = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{x}{y}\right)$, то получаем: $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)$.

$$y_n - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(y_{n-1} - \sqrt{x}\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{y_{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} - \sqrt{x}\right) + \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{x} - y_{n-1}}{y_{n-1} \cdot \sqrt{x}}.$$

Пусть $z_n = y_n - \sqrt{x}$. Тогда получаем:

$$z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2y_{n-1}}\right) \cdot z_{n-1}.$$

Заметим, что если $y_{n-1} = \sqrt{x}$, то $z_{n-1} = 0$ и $z_n = 0$. Если $y_{n-1} > \sqrt{x}$, то $|z_n| \leqslant \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot |z_{n-1}|$. Если $y_{n-1} < \sqrt{x}$, то $z_{n-1} < 0$, а тогда $z_n > 0$, то есть $y_n > \sqrt{x}$. Таким образом, для всех возможных случаев получаем:

$$|z_n| \leqslant \frac{1}{2} \cdot |z_{n-1}| \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Тогда $|z_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |z_1|$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$. □

**Упражнение 12.2** (На дом)**.** Пусть $\varphi$ – сжимающее отображение, то есть

$$\exists q \in (0;\, 1): \qquad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant q \cdot |x_1 - x_2|.$$

Доказать, что если уравнение $x = \varphi(x)$ имеет корень, то он единственный и последовательность $\{x_n\}$, построенная по правилу

$$x_0 \text{ – любое}, \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

имеет предел, равный этому корню.

## Классификация точек разрыва

**Определение 12.7.** *Функция $f(x)$ непрерывна*, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

**Определение 12.8.** Точка $x_0$ – *точка устранимого разрыва функции* $f(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = a,$$

при этом $f(x_0) \neq a$ или $\nexists f(x_0)$.

**Определение 12.9.** Точка $x_0$ – *точка разрыва 1-го рода функции* $f(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \qquad \text{и} \qquad \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

но $x_0$ – точка разрыва.

**Замечание 12.1.** Точку устранимого разрыва обычно считают также точкой разрыва 1-го рода.

Пример точки (неустранимого) разрыва 1-го рода: точка $x = 0$ для функции $y = \operatorname{sgn} x$.

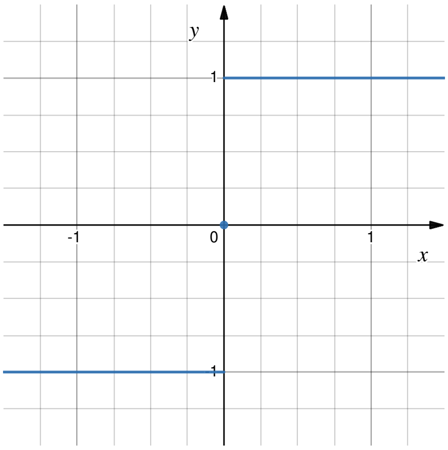


Рис. 12.7: $y = \operatorname{sgn} x$

**Определение 12.10.** Точка $x_0$ – *точка бесконечного разрыва функции* $f(x)$, если один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равен бесконечности, а другой предел существует или равен бесконечности.

Пример точки бесконечного разрыва: точка $x = 0$ для функции $y = \dfrac{1}{x}$.

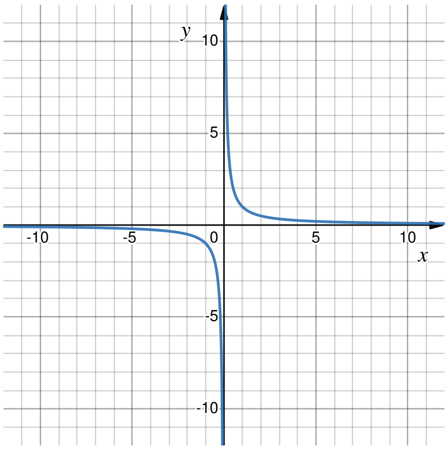


Рис. 12.8: $y = \dfrac{1}{x}$

**Определение 12.11.** Точка $x_0$ – *точка разрыва 2-го рода функции* $f(x)$, если

$$\nexists \lim_{x\to x_0-0} f(x) \qquad \text{или} \qquad \nexists \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

(«или» неисключающее).

**Замечание 12.2.** Точка бесконечного разрыва является точкой разрыва 2-го рода.

Пример точки (конечного) разрыва 2-го рода: точка $x = 0$ для функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

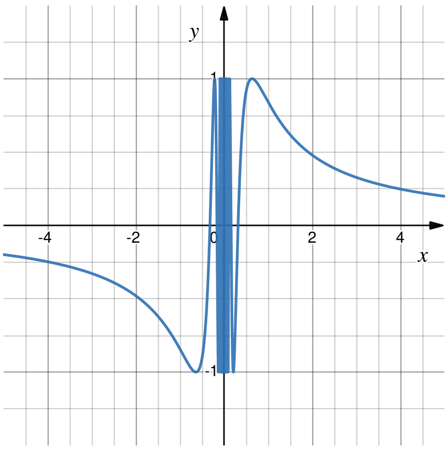


Рис. 12.9: $y = \sin\dfrac{1}{x}$

**Задача 694.** Определить точки разрыва функции

$$y = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

и исследовать характер этих точек.

*Решение:*

При $x = 0$ функция неопределена, поэтому $x = 0$ – точка разрыва. В точках, где

$\sin\dfrac{\pi}{x} = 0$, функция терпит разрыв. Это точки вида $x = \dfrac{1}{m}$, где $m \in \mathbb{Z}$. В остальных точках функциях непрерывна в силу теоремы о композиции непрерывных функций.

В точках вида $x = \dfrac{1}{m}$, где $m \in \mathbb{Z}$, левый и правый пределы существуют, но не равны друг другу, так как один из них равен 1, а другой равен $-1$. Значит, это точки (неустранимого) разрыва 1-го рода.

В точке $x = 0$ не существует предела (так как можно выбрать разные последовательности Гейне, имеющие разные пределы). Значит, это точка (конечного) разрыва 2-го рода. $\square$

## Непрерывность и равномерная непрерывность функции на промежутке

**Определение 12.12.** *Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $I$*, если

$$\forall x_1 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad (x_2 \in I \quad \text{и} \quad |x_2 - x_1| < \delta) \implies |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Пишут: $f \in C(I)$.

**Замечание 12.3.** Так как существование $\delta$ в определении (12.12) утверждается после введения $x_1$ и $\varepsilon$, то $\delta$ может зависеть от $x_1$ и $\varepsilon$.

**Определение 12.13.** *Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $I$*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad (x_1, x_2 \in I \quad \text{и} \quad |x_2 - x_1| < \delta) \implies |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

**Замечание 12.4.** Так как существование $\delta$ в определении (12.13) утверждается после введения только $\varepsilon$, то $\delta$ может зависеть только от $\varepsilon$.

**Утверждение 12.4.** *Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $I$, то она непрерывна на этом промежутке.*

**Замечание 12.5.** Обратное, вообще говоря, неверно.

**Утверждение 12.5.** *Пусть $I$ – промежуток типа $[a; b]$, или $[a; b)$, или $(a; b]$, или $(a; b)$. Тогда если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $I$, то она ограничена на этом промежутке.*

**Теорема 12.1** (Теорема Кантора)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на нём.*

# Семинар 13

## Непрерывность и равномерная непрерывность функции на промежутке (продолжение)

**Утверждение 13.1.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и принимает значения разных знаков на концах этого отрезка, то*

$$\exists c \in (a;\, b)\colon\ f(c) = 0.$$

**Теорема 13.1** (Теорема о промежуточном значении)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то для любого значения $d$, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$*

$$\exists c \in (a;\, b)\colon \qquad f(c) = d.$$

**Упражнение 13.1** (На дом)**.** Доказать, что «блин» (ограниченное выпуклое множество) можно разрезать двумя перпендикулярными разрезами на 4 одинаковые по площади части.

**Теорема 13.2** (1-я теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то она ограничена на нём.*

**Теорема 13.3** (2-я теорема Вейерштрасса)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то она достигает минимума и максимума на нём.*

**Задача 790.** Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

*Решение:*

$f(x)$ непрерывна как композиция непрерывных функций.

$f(x)$ ограничена, так как $|\sin x^2| \leqslant 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Чтобы доказать, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, надо показать, что

$$\exists \varepsilon > 0\colon \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon.$$

Для этого сначала найдём такие значения $x$, для которых $\sin x^2 = 1$. Решение:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теперь найдём такие значения $x$, для которых $\sin x^2 = -1$. Решение:

$$x = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $x_1 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k}$ и $x_2 = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k}$.

$$x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} = \frac{\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}{\sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k} + \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k} + \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, получаем:

$$\exists \varepsilon = 2\colon \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\colon \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon,$$

а именно $|f(x_2) - f(x_1)| = 2$. □

**Задача 796.** Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ на равномерную непрерывность в области $x \in (0;\, \pi)$.

*Решение:*

Введём функцию $\hat{f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \in (0;\, \pi] \end{cases}$. В силу первого замечательного предела эта функция непрерывна на отрезке $[0;\, \pi]$. Тогда по теореме Кантора (12.1) получаем, что функция $\hat{f}(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0;\, \pi]$.

Равномерная непрерывность на некотором множестве влечёт равномерную непрерывность на подмножестве этого множества. При этом $f(x) \equiv \hat{f}(x)$ на интервале $(0;\, \pi)$. Значит, $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $(0;\, \pi)$. □

**Задача 797.** Исследовать функцию $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$ на равномерную непрерывность в области $x \in (0;\, 1)$.

*Решение:*

Возьмём две последовательности таких значений $x$, для которых соответственно $\cos \dfrac{1}{x} = 1$ и $\cos \dfrac{1}{x} = -1$. Обе эти последовательности стремятся к 0. Тогда получаем:

$$\exists \varepsilon = 2\colon \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in (0;\, 1)\colon \quad |x_2 - x_1| < \delta \quad \text{и} \quad |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \varepsilon,$$

а именно $|f(x_2) - f(x_1)| > 2$.

Таким образом, $f(x)$ не является равномерно непрерывной в области $x \in (0;\, 1)$. □

# Модуль непрерывности

**Определение 13.1.**

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x_1,\, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

*– модуль непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $I$.*

**Утверждение 13.2.** *Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $I$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.*

**Задача 808** (б)**.** Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ вида $\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha$, где $C$ и $\alpha$ – константы, для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $x \in [0;\, a]$ и на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$.

*Решение:*

Сначала рассмотрим промежуток $x \in [0;\, a]$. Пусть $x_1, x_2 \in [0;\, a]$, $x_2 > x_1$ и $x_2 - x_1 < \delta$, тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_1 + \delta} + \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}.$$

Тогда получаем:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x_1,\, x_2 \in [0;\, a] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \sqrt{\delta}.$$

Таким образом, искомые константы: $C = 1$ и $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим промежуток $x \in (a;\ +\infty)$. Пусть $x_1, x_2 \in (a;\ +\infty)$, $x_2 > x_1$ и $x_2 - x_1 < \delta$, тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} <$$

$$< \frac{\delta}{\sqrt{x_1 + \delta} + \sqrt{x_1}} < \frac{\delta}{\sqrt{a + \delta} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \delta.$$

Тогда получаем:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x_1,\, x_2 \in (a;\ +\infty) \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \delta.$$

Таким образом, искомые константы: $C = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ и $\alpha = 1$. □

## Функциональные уравнения

**Задача 809.** Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая для всех $x, y \in \mathbb{R}$ уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

есть линейная однородная функция $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ – произвольная константа.

*Решение:*

Возьмём в равенстве $f(x+y) = f(x) + f(y)$ значение $y = x$, получим:

$$f(2x) = 2f(x).$$

Пусть $f(1) = a$. Тогда $2f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = a$. Значит, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2}$. По индукции получаем, что $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{a}{2^n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Так как $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{a}{2^n}$ и $f\left(\frac{2}{2^n}\right) = \frac{a}{2^{n-1}}$, то

$$f\left(\frac{3}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right) + f\left(\frac{2}{2^n}\right) = \frac{3}{2^n} \cdot a.$$

По индукции получаем: $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} \cdot a$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Из равенства $f(2x) = 2f(x)$ при $x = 0$ получаем: $f(0) = 2f(0)$. Значит, $f(0) = 0$.

Из равенства $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при $y = -x$ получаем: $f(0) = f(x) + f(-x)$. Так как $f(0) = 0$, то $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $f(x) = ax \ \ \forall x = \frac{m}{2^n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Для любого значения $x_0 \in \mathbb{R}$ существует последовательность $x_k = \frac{m_k}{2^{n_k}}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. В силу непрерывности $f(x)$ имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$. Но

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} ax_k = ax_0.$$

Значит, $f(x_0) = ax_0$.

Таким образом, $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ – произвольная константа. $\square$

**Замечание 13.1.** Эта задача имеет отношение к решению одной из проблем Гильберта: верно ли, что любые два многогранника равного объёма можно составить из одинаковых многогранных частей? Ответ: нет.

# Семинар 14

## Производная

Производная произведения $n$ множителей считается по следующему правилу:

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x))' = f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+$$
$$+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)+\ldots+f_1(x)\cdot\ldots f_{n-1}(x)\cdot f_n'(x).$$

**Определение 14.1.** Функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x_0$, если $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ и верно следующее равенство:

$$f(x)-f(x_0)=A\cdot(x-x_0)+o(x-x_0)\quad \text{при} \quad x\to x_0.$$

**Утверждение 14.1.** *$f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда $\exists f'(x_0)=A$.*

**Утверждение 14.2.**

$$(f(g(t)))'=g'(t)\cdot f'(g(t))$$

*– производная сложной функции.*

**Замечание 14.1.** Аналогичное правило работает для композиции большего количества функций, например:

$$(f(g(h(t))))'=h'(t)\cdot g'(h(t))\cdot f'(g(h(t))).$$

**Задача 855.** Найти производную функции

$$y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

$(1+x)'=1;$

$$\left(\sqrt{2+x^2}\right)'=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}};$$

$$\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)'=3x^2\cdot\frac{1}{3}\left(3+x^3\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(3+x^3\right)^2}};$$

$$y'=\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cdot(1+x)\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(3+x^3\right)^2}}.$$

*2-й способ:*

Так как $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, то $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, где $f(x) \neq 0$.

Пусть $f(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$, тогда получаем:

$$\ln|f(x)| = \ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \frac{1}{3}\ln|3+x^3|;$$

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{2+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{3+x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{2+x^2} + \frac{x^2}{3+x^2}\right)\cdot f(x). \tag{14.1}$$

Таким образом, мы нашли выражение для производной для всех значений $x$, при которых $f(x) \neq 0$. Это значения $x \neq -1$ и $x \neq -\sqrt[3]{3}$.

**Теорема 14.1.** *Если $f(x)$ всюду дифференцируема и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, то*

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0).$$

Используя теорему выше, с помощью предельного перехода можно показать, что в тех точках, где производная существует, но формула по умолчанию не доказана, найденное равенство (14.1) всё равно оказывается справедливым. В данном случае это только точка $x=-1$, так как в точке $x = -\sqrt[3]{3}$ производная не существует. □

**Задача 883** (исправленная)**.** Найти производную функции

$$y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$$

*Решение:*

$$y' = e^x + e^x\cdot e^{e^x} + e^x\cdot e^{e^x}\cdot e^{e^{e^x}}.$$

□

**Задача 895.** Найти производную функции

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

*Решение:*

$$y' = \frac{1 + 2x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

□

**Замечание 14.2.** Если $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, то

$$y' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Это длинные логарифмы – функции, обратные к гиперболическим синусу и косинусу.

**Задача 987.** Доказать следующее правило дифференцирования определителя $n$-го порядка:

$$\left(\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right)' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

*Решение:*

Докажем методом математической индукции.

База индукции: $(f_{11}(x))' = f'_{11}(x)$ – верно.

Шаг индукции. Пусть $\det_k(x)$ – определитель, полученный из исходного вычеркиванием 1-й строки и $k$-го столбца. Разложим определитель по первой строке:

$$\left(\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{1k}(x) \cdot \det_k(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f'_{1k}(x) \cdot \det_k(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} f_{1k}(x) \cdot (\det_k(x))' =$$

$$= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \dots & f'_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \sum_{k=2}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

$\square$

**Задача 989.** Найдите $F'(x)$, если

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

*Решение:*

$$F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 \cdot \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 6x^2.$$

$\square$

**Задача 1024.** Вывести формулы для сумм:

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1};$$
$$Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

*Указание:* рассмотреть $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

*Решение:*

$$P_n(x) = \left(x + x^2 + \ldots + x^n\right)' = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\right)' = \left(\frac{x^{n-1} - 1}{x - 1}\right)' =$$

$$= \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

$$Q_n(x) = (x \cdot P_n(x))' = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1\right)(x-1)^2 - \left(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\right) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{\left(n(n+2)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + 1\right)(x-1) - 2\left(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\right)}{(x-1)^3}.$$

$\square$

## Производная обратной функции

**Утверждение 14.3.** *Пусть $y = f(x)$ – строго монотонная дифференцируемая функция в интервале $(a;\, b)$. Тогда существует обратная дифференцируемая функция $x = f^{-1}(y)$, где $y \in (f(a);\ f(b))$ (в случае убывающей функции $f$ концы надо* *поменять местами), причём*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad \text{где} \qquad y_0 = f(x_0).$$

## Производная параметрической функции

**Определение 14.2.** $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ – *параметрически заданная функция*, где $t \in (\alpha;\, \beta)$ (концы могут быть включены).

**Замечание 14.3.** Вообще говоря, параметрически заданная функция не является функцией, так как одному значению $x$ может соответствовать более одного значения $y$.

Если же $\varphi(x)$ – строго монотонная функция в интервале $(\alpha;\, \beta)$, то $t = \varphi^{-1}(x)$. Значит, в этом случае $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ – обычная функция.

**Утверждение 14.4.**

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

*– производная параметрически заданной функции.*

**Замечание 14.4.** Используя запись производной с помощью отношения дифференциалов (о них будет позже), можно написать следующую формулу для производной параметрической функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

**Задача 1040.** Найти производную $y'_x$, если

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$$

*Решение:*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\sin t \cos t}{2\cos t \sin t} = -1.$$

□

**Замечание 14.5.** Можно заметить, что $x + y \equiv 1$, то есть $y \equiv 1 - x$. Это дополнительно объясняет, почему $y'_x \equiv -1$.

## Производная неявной функции

Пусть, например, мы хотим найти такие функции $y(x)$, которые обращают уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$ в верное тождество:

$$x^2 + y^2(x) \equiv 1.$$

Тогда говорят, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт функцию неявно.

**Определение 14.3.** Уравнение $F(x, y) = 0$ *задаёт неявно функцию* $y(x)$ *на интервале* $(a;\, b)$, если

$$F(x,\, y(x)) \equiv 0 \qquad \forall x \in (a;\, b)$$

(концы могут быть включены).

Если допускать поиск разрывных функций в неявно заданном виде, то их может быть несчётное множество. Однако если ограничить поиск множеством непрерывных функций, то выбор резко сужается. Например, в примере с уравнением окружности остаются только две функции: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Чтобы найти производную неявно заданной функции, можно продифференцировать уравнение $F(x,\, y(x)) = 0$.

**Задача 1051.** Найти производную $y'_x$, если

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \qquad \text{(парабола).}$$

*Решение:*

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'_x}{2\sqrt{y}} = 0;$$

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$\square$

**Задача 1053.** Найти производную $y'_x$, если

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(логарифмическая спираль).}$$

*Решение:*

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)' = \frac{y' \cdot x - y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2};$$

$$\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}; \qquad\qquad y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

$\square$

**Задача 1054** (б)**.** Найти производную $y'_x$, если

$$r = a(1+\cos\varphi) \qquad \text{(кардиоида)}.$$

*Решение:*

Учитывая, что $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $x = r\cos\varphi$, получаем:

$$r = a(1+\cos\varphi) \quad \Big| \cdot r;$$

$$r^2 = ar + ar\cos\varphi;$$

$$x^2+y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} + ax;$$

$$2x + 2yy' = \frac{a(2x+2yy')}{2\sqrt{x^2+y^2}} + a;$$

$$y' \cdot \left(2y - \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + a - 2x;$$

$$y' \cdot \left(2y\sqrt{x^2+y^2} - ay\right) = ax + (a-2x)\sqrt{x^2+y^2};$$

$$y' = \frac{ax + (a-2x)\sqrt{x^2+y^2}}{2y\sqrt{x^2+y^2} - ay}.$$

$\square$

# Семинар 15

## Геометрический смысл производной

**Определение 15.1.** Рассмотрим некоторую кривую $\gamma$ и точку $A$ на ней. Выберем на кривой ещё одну точку $B$ и проведём прямую $AB$ – секущую кривой $\gamma$. Начнём приближать вдоль кривой точку $B$ к точке $A$. Секущая начнёт менять своё положение, поворачиваясь вокруг точки $A$. Если при приближении точки $B$ к точке $A$ прямая $AB$ стремится к некоторой прямой $l$, то такая прямая $l$ называется *касательной к кривой $\gamma$ в точке $A$*.

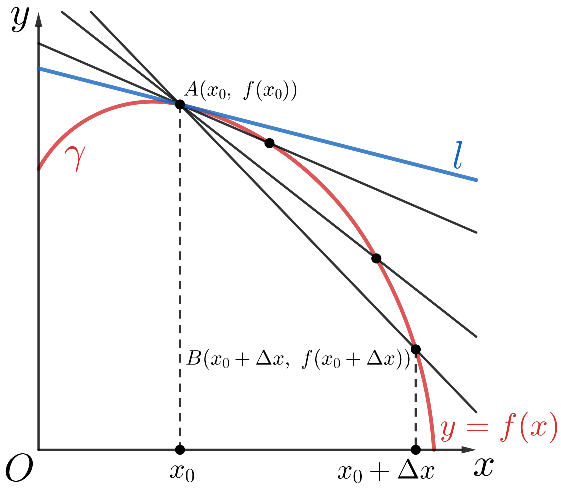


Рис. 15.1: Касательная $l$ к кривой $\gamma$ в точке $x_0$

**Утверждение 15.1** (геометрический смысл производной)**.**

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

*где $x_0$ – абсцисса точки касания касательной и графика функции $f(x)$, $\alpha$ – угол от положительного направления оси $x$ до касательной.*

**Замечание 15.1.** Можно определить левую и правую касательные к кривой $\gamma$ в точке $x_0$ и соответственно левую и правую производные функции $f(x)$ в точке $x_0$.

**Утверждение 15.2.** *Прямая $l$ является касательной к кривой $\gamma$ в точке $(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда $d = o(\rho)$ при $x \to x_0$, где $d$ – расстояние от точки $(x, y)$ на кривой $\gamma$ до прямой $l$, $\rho$ – расстояние от точки $(x, y)$ до точки касания $(x_0, y_0)$.*

**Утверждение 15.3.**

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

*– уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, y_0)$.*

**Замечание 15.2.**

$$f'(x_0)\cdot(x-x_0)-(y-y_0)=0$$

– альтернативный вид уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0,y_0)$.

**Определение 15.2.** *Нормаль к кривой $\gamma$ в точке* $(x_0,y_0)$ – прямая, перпендикулярная к касательной к кривой $\gamma$ в точке $(x_0,y_0)$.

**Утверждение 15.4.**

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

*– уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0,y_0)$.*

**Замечание 15.3.**

$$(x-x_0)+f'(x_0)\cdot(y-y_0)=0$$

– альтернативный вид уравнения нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0,y_0)$.

**Задача 1057.** Доказать, что парабола

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\qquad (a\neq 0,\quad x_1<x_2)$$

пересекает ось $Ox$ под углами $\alpha$ и $\beta$, где $\alpha,\beta\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, равными между собой.

*Решение:*

$$\begin{aligned}
&y'(x)=a(x-x_2)+a(x-x_1)=2ax-a(x_1+x_2);\\
&\operatorname{tg}(-\alpha)=y'(x_1)=a(x_1-x_2);\\
&\operatorname{tg}\beta=y'(x_2)=a(x_2-x_1).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$. А так как $\alpha,\beta\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha=\beta$. □

**Определение 15.3.** *Угол между пересекающимися кривыми* – угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.

**Задача 1062.** Под какими углами пересекаются кривые

$$y=\sin x\qquad \text{и}\qquad y=\cos x\,?$$

*Решение:*

Пусть $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$. Они пересекаются в точках $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$ (с точностью до периода $2\pi$).

$$y_1' = \cos x; \qquad y_2' = -\sin x;$$

$$y_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad y_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда в точке $x = \frac{\pi}{4}$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, где $\alpha$ и $\beta$ – углы между касательной к $y_1$ и осью $Ox$ и между касательной к $y_2$ и осью $Ox$ соответственно. Значит, $\alpha = -\beta$. Тогда искомый угол равен $2\alpha$.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, $2\alpha = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

В точке $\frac{3\pi}{4}$ обе производные изменят знак, а угол останется таким же. $\square$

**Задача 1069.** Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

в любой её точке $M(x_0, y_0)$.

*Решение:*

Так как $y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, то можем составить уравнение нормали в точке $(x_0;\, y_0)$:

$$(x - x_0) + \operatorname{sh}\frac{x_0}{a}\cdot(y - y_0) = 0.$$

Пусть эта нормаль пересекает ось $x$ в точке $(x_1;\, 0)$, тогда получаем:

$$x_1 - x_0 = y_0\operatorname{sh}\frac{x_0}{a}.$$

Пусть $d$ – искомая длина. По теореме Пифагора получаем:

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 = y_0^2\operatorname{sh}^2\frac{x_0}{a} + y_0^2 = y_0^2\operatorname{ch}^2\frac{x_0}{a};$$

$$d = y_0\operatorname{ch}\frac{x_0}{a} = \frac{y_0^2}{a}.$$

$\square$

**Задача 1079.** Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

в произвольной точке $t = t_0$. Дать способ построения касательной к циклоиде.

*Решение:*

Вычислим производную $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{a \sin t_0}{a(1 - \cos t_0)} = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0}.$$

Запишем уравнение касательной:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0);$$

$$y - a(1 - \cos t_0) = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0} \cdot (x - a(t_0 - \sin t_0)).$$

Это уравнение можно привести к следующему виду:

$$y - 2a = (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

Верхняя точка катящегося круга, который образует циклоиду, имеет координаты $(at_0;\ 2a)$. Заметим, что это точка удовлетворяет уравнению касательной к циклоиде при всех значения $t_0$. Значит, касательная к циклоиде всегда проходит через верхнюю точку катящегося круга. Тогда, если провести отрезок от точки касания до нижней точки катящегося круга, то получим вписанный угол, опирающийся на диаметр (см. рисунок).

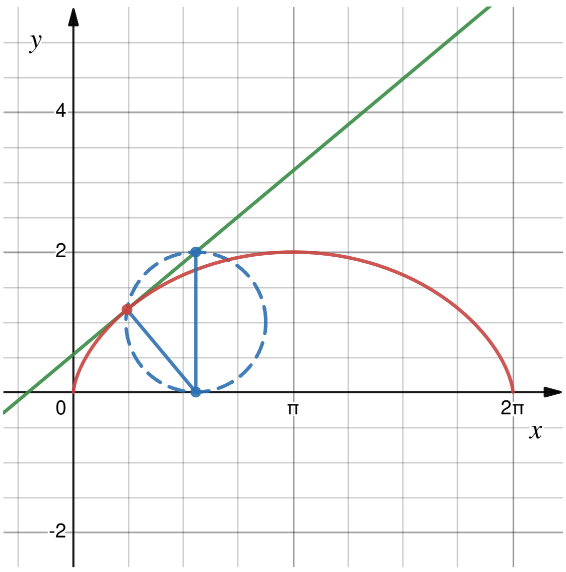


Рис. 15.2: Циклоида, касательная и катящийся круг:
$a = 1, \quad t \in [0;\ 2\pi], \quad t_0 = 1{,}75$

Таким образом, получаем: касательная к циклоиде перпендикулярна к отрезку, соединяющему точку касания с точкой соприкосновения катящегося круга. □

**Задача 1070.** Доказать, что у астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключённого между осями координат, есть величина постоянная.

*Решение:*

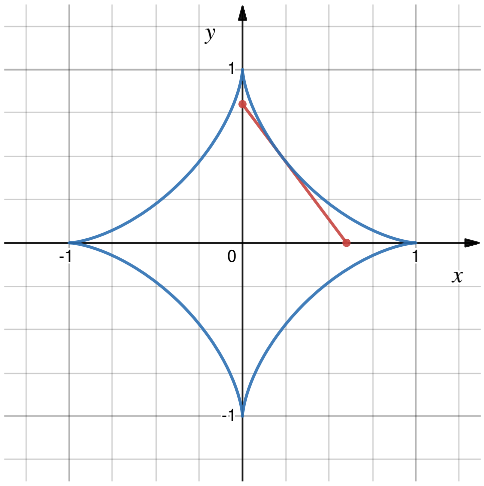


Рис. 15.3: Астроида ($a = 1$) и отрезок касательной

Найдём производную неявно заданной функции $y(x)$:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

Составим уравнение касательной в точке $(x_0;\, y_0)$:

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}} \cdot (x - x_0);$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{y}{\sqrt[3]{y_0}} - \left(x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}}\right) = 0;$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x_0}} + \frac{y}{\sqrt[3]{y_0}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Пусть $(x_1;\,0)$ – точка пересечения касательной с осью $x$, а $(0;\,y_1)$ – точка пересечения касательной с осью $y$. Тогда из уравнения касательной получаем:

$$x_1 = \sqrt[3]{a^2 x_0}; \qquad y_1 = \sqrt[3]{a^2 y_0};$$

$$x_1^2 + y_1^2 = a^{\frac{4}{3}} \cdot \left( x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} \right) = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^2.$$

Таким образом, по теореме Пифагора получаем, что длина отрезка касательной, заключённого между осями координат, равна $a$. □

## Дифференциал функции

По определению функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, если

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

причём $A = f'(x_0)$.

Введём новую переменную $dx \coloneqq x - x_0$.

**Определение 15.4.** *$f'(x_0)\,dx$ – дифференциал функции $f(x)$ в точке $x_0$.*

**Определение 15.5.** *$df(x,\,dx) = f'(x)\,dx$ – дифференциал функции $f(x)$.*

Из этого определения становится ясна суть выражения для производной через дифференциалы: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

При некоторых условиях дифференциал можно использовать для приближённых вычислений:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

**Задача 1099.** Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближённо значение $\sqrt[3]{1{,}02}$.

*Решение:*

Так как $\sqrt[3]{1+t} - 1 = \dfrac{t}{3} + o(t)$, то при достаточно малых значениях $t$ получаем:

$$\sqrt[3]{1+t} \approx 1 + \frac{t}{3}.$$

Тогда получаем: $\sqrt[3]{1{,}02} \approx 1 + \dfrac{0{,}02}{3} = 1 + \dfrac{1}{150}$. □

**Задача 1104** (a)**.** Доказать приближённую формулу:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \qquad (a > 0),$$

где $|x| \ll a$. С помощью этой формулы приближённо вычислить $\sqrt{5}$.

*Решение:*

Так как

$$\left(\sqrt{a^2+x}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(a^2+x\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2a},$$

то $\sqrt{a^2+x}-a \approx \dfrac{1}{2a}\cdot x$, то есть $\sqrt{a^2+x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ при $|x| \ll a$.

Вычислим приближённо значение $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25.$$

$\square$

**Задача 1100.** Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближённо значение $\sin 29^\circ$.

*Решение:*

Заметим, что $\sin 29^\circ = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right)$. Тогда получаем:

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)'\Big|_{x=0} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x + o(x);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360}.$$

$\square$

## Свойства дифференциалов

**Утверждение 15.5.** *Верны следующие свойства дифференциалов:*

- $d(u \pm v) = du + \pm dv$;
- $d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du$;
- $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

# Семинар 16

## Производные старших порядков

Пусть $\forall x_0 \in (a;\, b)\ \ \exists f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Тогда на интервале $(a;\, b)$ задана функция $f'(x)$, и для неё можно найти производную. В результате получим вторую производную функции $f(x_0)$:

$$f''(x_0) = (f'(x))'\Big|_{x=x_0}.$$

И так далее по аналогии можно вводить производные более старших порядков, если функция это допускает.

**Определение 16.1.** *Бесконечно дифференцируемая на интервале* $(a;\, b)$ *функция* – это функция, у которой существует производная любого порядка на интервале $(a;\, b)$.

Большинство функций, с которыми мы будем работать, будут бесконечно дифференцируемы в интересующих нас областях.

**Определение 16.2.** $C^{(n)}((a;\, b))$ – класс функций, имеющих непрерывную производную $n$-го порядка на интервале $(a;\, b)$.

**Замечание 16.1.** $C^{(0)}((a;\, b)) = C((a;\, b))$ – класс функций, непрерывных на интервале $(a;\, b)$.

**Определение 16.3.** $D^{(n)}((a;\, b))$ – класс функций, дифференцируемых $n$ раз на интервале $(a;\, b)$.

**Замечание 16.2.** $D^{(1)}((a;\, b)) = D((a;\, b))$ – класс функций, дифференцируемых на интервале $(a;\, b)$.

**Задача 1113.** Найти $y''$, если $y = e^{-x^2}$.

*Решение:*

$$y' = (-2x)e^{-x^2};$$
$$y'' = -2e^{-x^2} + (-2x)^2\, e^{-x^2} = \left(4x^2 - 2\right) e^{-x^2}.$$

□

**Задача 1124.** Найти $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дважды дифференцируемые функции. Найти $y''$, если $y = u^v$, где $u > 0$.

*Решение:*

$$y = u^v = e^{v\ln u};$$

$$y' = \left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)e^{v\ln u};$$

$$y'' = \left(v''\ln u + v'\cdot\frac{u'}{u} + v'\cdot\frac{u'}{u} + v\cdot\frac{u''u-(u')^2}{u^2}\right)e^{v\ln u} + \left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)^2 e^{v\ln u} =$$

$$= \left(v''\ln u + 2v'\cdot\frac{u'}{u} + v\cdot\frac{u''u-(u')^2}{u^2} + \left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)^2\right)\cdot u^v.$$

□

**Утверждение 16.1.**

$$(u(x)\cdot v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot u^{(k)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x) \tag{16.1}$$

*– формула Лейбница, где функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы $n$ раз в некотором интервале (или в точке).*

**Задача 1161.** Найти $y^{(20)}$, если $y = x^2e^{2x}$.

*Решение:*

Заметим, что $(e^{ax})^{(n)} = a^n\cdot e^{ax}$. Также заметим, что

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)x^{n-k}.$$

Тогда $(x^n)^{(n)} = n!$.

Воспользуемся формулой Лейбница (16.1), получим:

$$y^{(20)} = C_{20}^0\cdot x^2\cdot 2^{20}\cdot e^{2x} + C_{20}^1\cdot 2x\cdot 2^{19}\cdot e^{2x} + C_{20}^2\cdot 2\cdot 2^{18}\cdot e^{2x} =$$
$$= 2^{20}\cdot\left(x^2+20x+95\right)\cdot e^{2x}.$$

□

**Утверждение 16.2.**

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

**Замечание 16.3.** Это следствие того, что $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Как следствие, получаем следующее утверждение для синуса (и по аналогии для косинуса).

**Утверждение 16.3.**

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax+b+\frac{\pi n}{2}\right); \tag{16.2}$$

$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cdot \cos\left(ax+b+\frac{\pi n}{2}\right). \tag{16.3}$$

**Задача 1167.** Найти $y^{(10)}$, если $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

*Решение:*

Заметим, что $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$. Аналогично преобразуем функцию $y(x)$ далее:

$$y = \frac{1}{2}\cos x \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x \sin 3x = \frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x).$$

Воспользуемся формулой (16.2), получим:

$$y^{(10)} = \frac{1}{4} \cdot \left(2^{10} \cdot \sin(2x+5\pi) + 4^{10} \cdot \sin(4x+5\pi) - 6^{10} \cdot \sin(6x+5\pi)\right) =$$
$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(2^{10} \cdot \sin 2x + 4^{10} \cdot \sin 4x - 6^{10} \cdot \sin 6x\right).$$

□

## Производные старших порядков комплекснозначных функций

Рассмотрим функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Такие функции представимы в виде

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

где $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда получаем:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g(x)+ih(x)) - (g(x_0)+ih(x_0))}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + i\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right).$$

Этот предел будет существовать тогда и только тогда, когда будут существовать по отдельности пределы действительной и мнимой частей. Тогда, если функции $g(x)$ и $h(x)$ дифференцируемы в точке $x_0$, получаем:

$$f'(x_0) = g'(x_0) + ih'(x_0).$$

Аналогично получаем:

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) + ih^{(n)}(x_0).$$

Так как $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то получаем:

$$\begin{aligned}
&e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right);\\
&\left(e^{(a+ib)x}\right)' = \left(e^{a}\cos bx\right)' + i\left(e^{ax}\sin bx\right)' =\\
&= \left(ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx\right) + i\left(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx\right) =\\
&= (a+ib)\, e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right) = (a+ib)e^{(a+ib)x}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\left(e^{(a+ib)x}\right)^{(n)} = (a+ib)^n \cdot e^{(a+ib)x}. \qquad (16.4)$$

**Задача 1169.** Найти $y^{(4)}$, если $y = e^x\cos x$.

*Решение:*

Заметим, что

$$y = \mathrm{Re}\left(e^x \cdot e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right).$$

Воспользуемся формулой (16.4), получим:

$$\begin{aligned}
&\left(e^{(1+i)x}\right)^{(4)} = (1+i)^4 \cdot e^{(1+i)x} = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \cdot e^{(1+i)x} = -4e^{(1+i)x};\\
&y^{(4)} = \mathrm{Re}\left(-4e^{(1+i)x}\right) = -4e^x\cos x.
\end{aligned}$$

$\square$

**Замечание 16.4.** Другой способ решения:

$$y = e^x\cos x = e^x \cdot \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right).$$

Свойство комплексной экспоненты, отображаемое формулой (16.4) активно используется в курсе дифференциальных уравнений. Например, необходимо решить дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – константы. То есть необходимо найти функции $y(x)$, удовлетворяющие написанному выше дифференциальному уравнению. Подставим в это дифференциальное уравнение функцию вида $y(x) = e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Получим:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_0e^{\lambda x} = 0.$$

Это равенство выполняется тождественно тогда и только тогда, когда

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Значит, функции вида $y(x) = e^{\lambda x}$, где $\lambda$ – корни написанного выше уравнения, являются решениями исходного дифференциального уравнения.

**Задача 1183.** Показать, что функция $y = C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$, где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные, $\lambda_1, \lambda_2$ – постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0.$$

*Решение:*

Проверим что функция $y = e^{\lambda_1 x}$ удовлетворяет заданному уравнению:

$$\left(e^{\lambda_1 x}\right)'' - (\lambda_1 + \lambda_2)\cdot\left(e^{\lambda_1 x}\right)' + \lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x} = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x} =$$
$$= \left(\lambda_1^2 - \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\right) e^{\lambda_1 x} = 0$$

Аналогично можно показать, что функция $y = e^{\lambda_2 x}$ удовлетворяет заданному уравнению.

Тогда в силу свойств линейности заданного уравнения получаем, что функция $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ также является решением. □

**Задача 1213.** Доказать равенства:

$$\left(e^{ax}\sin(bx + c)\right)^{(n)} = e^{ax}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\varphi);$$
$$\left(e^{ax}\cos(bx + c)\right)^{(n)} = e^{ax}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

*Решение:*

Пусть $y = e^{ax}\cdot e^{i(bx+c)} = e^{(a+ib)x}\cdot e^{ic}$, тогда

$$y^{(n)} = (a+ib)^n\cdot e^{(a+ib)x}\cdot e^{ic} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{i\varphi}\right)^n\cdot e^{(a+ib)x}\cdot e^{ic} =$$
$$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{in\varphi}\cdot e^{ax}\cdot e^{i(bx+c)} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot e^{i(bx+c+n\varphi)} =$$
$$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\left(\cos(bx+c+n\varphi) + i\sin(bx+c+n\varphi)\right).$$

Отсюда получаем:

$$\left(e^{ax}\cos(bx + c)\right)^{(n)} = \operatorname{Re} y^{(n)} = e^{ax}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi);$$
$$\left(e^{ax}\sin(bx + c)\right)^{(n)} = \operatorname{Im} y^{(n)} = e^{ax}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\varphi).$$

$\square$

**Задача 1217.** Используя тождество

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin((n+1)\operatorname{arcctg}x).$$

*Решение:*

Покажем, что $\left(\dfrac{1}{x-(a+ib)}\right)'=-\dfrac{1}{(x-(a+ib))^2}$, где $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-(a+ib)}=\frac{(x-a)+ib}{((x-a)-ib)((x-a)+ib)}=\frac{(x-a)+ib}{(x-a)^2+b^2};$$

$$\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}\right)'=\frac{(x-a)^2+b^2-2(x-a)^2}{((x-a)^2+b^2)^2}=\frac{b^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+b^2)^2};$$

$$\left(\frac{b}{(x-a)^2+b^2}\right)'=\frac{-2b(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^2};$$

$$\left(\frac{1}{x-(a+ib)}\right)'=\frac{(b^2-(x-a)^2)-2ib(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^2};$$

$$-\frac{1}{(x-(a+ib))^2}=\frac{-((x-a)+ib)^2}{((x-a)^2+b^2)^2}=\frac{(b^2-(x-a)^2)-2ib(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^2}.$$

По индукции получаем:

$$\left(\frac{1}{x-c}\right)^{(n)}=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)}{(x-c)^{n+1}}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-c)^{n+1}},$$

где $c\in\mathbb{C}$.

Теперь можем доказать требуемое равенство:

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+i)^{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot((x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1})}{2i\,(x^2+1)^{n+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{x+i}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{n+1}-\left(\frac{x-i}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{n+1}\right)=$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \operatorname{Im}\left(\left(\frac{x+i}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{n+1}\right) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin((n+1)\operatorname{arcctg} x),$$

так как $\operatorname{Re}\left(\frac{x+i}{\sqrt{x^2+1}}\right) : \operatorname{Im}\left(\frac{x+i}{\sqrt{x^2+1}}\right) = x.$ $\square$

## Дифференциалы старших порядков

Вспомним, что $df(x, dx) = f'(x)\,dx$ – дифференциал 1-го порядка функции $f(x)$.

Дифференциалы старших порядков $d^n f(x, dx)$ определим по индукции:

1) $dx$ считаем константой;
2) вычисляем $d\left(d^{n-1} f(x, dx)\right)$;
3) «новый» $dx$ = «старый» $dx$.

Приведём пример нахождения 2-го дифференциала функции $f(x)$:

$$d^2 f(x, dx) = \left(f'(x)\,dx\right)' dx = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

По индукции можно получить формулу $n$-го дифференциала функции $f(x)$:

$$d^n f(x, dx) = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n.$$

Теперь рассмотрим сложную функцию $f(g(x))$. Обозначим $t = g(x)$. Заметим, что

$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \left(f'(t)\,dt\right)\Big|_{t=g(x)}.$$

Это свойство называется инвариантностью формы 1-го дифференциала.

Так как $(f(g(x)))'' \neq f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2$, то для 2-го дифференциала (и дифференциалов старших порядков) не выполняется свойство инвариантности формы.

# Семинар 17

## Производная старшего порядка сложной функции

Для производной 1-го порядка сложной функции верна формула $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Для производных старших порядков верна более общая формула.

**Утверждение 17.1.**

$$(f(g(x)))^{(n)} = \sum_{\substack{m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n \\ m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{n!}{m_1! m_2! \cdot \ldots \cdot m_n!} \cdot f^{(m_1+\ldots+m_n)}(g(x)) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left( \frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{m_j} \tag{17.1}$$

– *формула Фаа-ди-Бруно.*

Таким образом, вообще говоря, $(f(g(x)))^{(n)} \neq f^{(n)}(g(x)) \cdot (g'(x))^n$.

Приведём пример нахождения 2-й производной сложной функции $f(g(x))$. Нам надо выбрать все такие числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которых верно $m_1 + 2m_2 = 2$. Возможны следующие варианты: $m_1 = 2$, $m_2 = 0$ или $m_1 = 0$, $m_2 = 1$. Тогда получаем:

$$(f(g(x)))^{(2)} = \frac{2!}{2!0!} \cdot f^{(2)}(g(x)) \cdot \left( \frac{g'(x)}{1!} \right)^2 + \frac{2!}{0!1!} \cdot f^{(1)}(g(x)) \cdot \left( \frac{g''(x)}{2!} \right)^1 =$$
$$= f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x).$$

Как видно, отличие полученного выражение от $f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2$ исчезает, если $g''(x) = 0$. Вообще говоря, формула $(f(g(x)))^{(n)} \neq f^{(n)}(g(x)) \cdot (g'(x))^n$ верна в тех случаях, когда производные функции $g(x)$ порядков выше 1-го равны 0, то есть когда функция $g(x)$ линейная.

## Инвариантность формы дифференциала

Как было показано в конце прошлого семинара, для 1-го дифференциала выполняется свойство инвариантности его формы:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = (f'(t)\, dt) \Big|_{t=g(x)}.$$

Как следует из формулы Фаа-ди-Бруно (17.1), инвариантность формы дифференциала 2-го порядка (и более старших) будет выполняться, только есть $g(x)$ – линейная функция. В этом случае получаем:

$$d^2 f(g(x)) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2\, (dx)^2 = \left(f''(t)(dt)^2\right) \Big|_{t=g(x)}.$$

# Теоремы о средних значениях

**Теорема 17.1** (Теорема Ролля). *Если функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируемая на интервале $(a;\, b)$, принимает на концах отрезка $[a;\, b]$ одинаковые значения, то найдётся хотя бы одна точка $c \in (a;\, b)\colon\; f'(c) = 0$.*

Геометрический смысл: на интервале $(a;\, b)$ найдётся точка, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси абсцисс.

**Теорема 17.2** (Теорема Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\, b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a;\, b)\colon\; f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Геометрический смысл: на интервале $(a;\, b)$ найдётся точка, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна хорде, проходящей через точки графика, соответствующие концам отрезка.

**Теорема 17.3** (Теорема Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;\, b)$, причём $g'(x) \neq 0$ на интервале $(a;\, b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a;\, b)\colon\; \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.*

**Замечание 17.1.** Условие $g'(x) \neq 0$ можно ослабить, то есть вместо него можно потребовать выполнения условий

$$\left(f'(x)\right)^2 + \left(g'(x)\right)^2 \neq 0 \;\text{ на }\; (a;\, b) \quad \text{ и } \quad g(a) \neq g(b).$$

**Задача 1240.** Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами $a_k$, где $k = 0, 1, \ldots, n$, вещественны, то его последовательные производные $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, …, $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

*Решение:*

Запишем разложение многочлена $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m},$$

где $k_1 + \ldots + k_m = n$.

Запишем выражение для производной $P_n'(x)$:

$$P_n'(x) = a_0 k_1 (x - x_1)^{k_1 - 1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{k_m} + \ldots +$$
$$+ a_0 k_m (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_{m-1})^{k_{m-1}} (x - x_m)^{k_m - 1} =$$

$$= a_0(x-x_1)^{k_1-1}(x-x_2)^{k_2-1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m-1}\cdot$$
$$\cdot\left(k_1(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}+\ldots+(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_{m-1})^{k_{m-1}}\right).$$

Отсюда видно, что если $x_i$ – корень $P_n(x)$ кратности $k_i > 1$, то он будет корнем $P_n'(x)$ кратности $k_i - 1$, а если $x_i$ – корень $P_n(x)$ кратности $k_i = 1$, то он не будет корнем $P_n'(x)$.

Применяя теорему Ролля (17.1) для $P_n(x)$, получаем, что существуют ещё следующие корни $P_n'(x)$:

$$c_1 \in (x_1;\ x_2),\quad c_2 \in (x_2;\ x_3),\quad \ldots,\quad c_{m-1} \in (x_{m-1};\ x_m).$$

Таким образом, мы показали, что у $P_n'(x)$ существует следующее количество корней с учётом кратности:

$$(k_1-1)+(k_2-1)+\ldots+(k_m-1)+(m-1)=(n-m)+(m-1)=n-1.$$

Так как $P_n'(x)$ – многочлен степени $n-1$, то по основной теореме алгебры он имеет ровно $n-1$ корней с учётом кратности. Значит, мы нашли все его корни, и они вещественны.

По индукции получаем, что $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, …, $P_n^{(n-1)}(x)$ имеют лишь вещественные корни. □

**Задача 1247.** Доказать, что если $x \geqslant 0$, то

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

где $\theta(x) \in \left[\dfrac14;\ \dfrac12\right]$, причём $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\dfrac14$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac12$.

*Решение:*

Выразим $\theta(x)$:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}};$$

$$x+\theta(x)=\frac{1}{4\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2};$$

$$\theta(x)=\frac{1-4x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}{4\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2}.$$

Преобразуем выражение для $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \frac{\left(1 - 4x\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2}{4\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2 - 4x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{x(x+1)} - 2x\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \left(1 - 2\sqrt{x(x+1)} + 2x\right)\right) =$$

$$= \frac{2 - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)^2}{4}.$$

Отсюда видно, что $\theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \frac{1}{4}$.

А с помощью равенства равенства

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

становится ясно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

Кроме этого, так как $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leqslant 1$, то $\theta(x) \geqslant \frac{1}{4}$. □

**Замечание 17.2.** По теореме Лагранжа (17.2) мы можем получить:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

где $\theta(x) \in (0; 1)$. Решая задачу выше, мы по сути уточнили множество значений функции $\theta(x)$ и её зависимость от $x$.

**Упражнение 17.1.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$ и

$$f(x+1) - f(x) = f'\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Описать функцию $f(x)$.

**Задача 1251** (а)**.** Доказать неравенство:

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

*Решение:*

Пусть $f(t) \in D(I^0) \cap C(I)$, где $I^0$ – множество внутренних точек промежутка $I$. Пусть $a, b \in I$ и $a < b$. Тогда по теореме Лагранжа (17.2) получаем:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a), \tag{17.2}$$

где $c \in (a;\, b)$.

Если $f'(x)$ ограничена на $I^0$, то есть

$$\exists M > 0\colon \qquad \forall x \in I^0 \qquad |f'(x)| \leqslant M,$$

то из (17.2) получаем:

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a| \leqslant M \cdot |b - a|.$$

Таким образом, в этом случае функция $f(x)$ является липшицевой.

Так как $|(\sin x)'| = |\cos x| \leqslant 1$, то получаем:

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

$\square$

**Задача 1251** (г)**.** Доказать неравенство:

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{если} \quad 0 < b < a.$$

*Решение:*

По теореме Лагранжа (17.2) получаем:

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b = \frac{1}{c} \cdot (a - b),$$

где $c \in (b;\, a)$. Тогда $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b}$. Домножая это двойное неравенство на $(a - b)$, получим:

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

$\square$

**Задача 1266.** Доказать, что если

1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на отрезке $[a;\, b]$;
2) $f'(a) = f'(b) = 0$,

то в интервале $(a;\, b)$ существует по меньшей мере одна точка $c$ такая, что

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \cdot |f(b) - f(a)|.$$

*Решение:*

Пусть $d \in (a;\, b)$ – такая точка, что $|f'(d)| = M$ – максимум $|f'(x)|$. Заметим, что либо $d - a \leqslant \dfrac{b-a}{2}$, либо $b - d \leqslant \dfrac{b-a}{2}$. Без ограничения общности будем считать, что $b - d \leqslant \dfrac{b-a}{2}$. По теореме Лагранжа (17.2) для $f'(x)$ получим:

$$f'(d) - f'(b) = f''(c) \cdot (d - b);$$

$$|f''(c)| = \left|\frac{f'(d) - f'(b)}{d - b}\right| \geqslant \frac{2}{b-a} \geqslant \frac{2}{b-a} \cdot M.$$

Предположим, что $|f''(c)| < \dfrac{4}{(b-a)^2} \cdot |f(b) - f(a)| = k$.

По теореме Лагранжа (17.2) для $f'(x)$ получим:

$$f'(x) - f'(a) = f''(p) \cdot (x - a),$$

где $p \in (a;\, b)$. Тогда $|f'(x)| < k(x - a)$.

Снова по теореме Лагранжа (17.2) для $f'(x)$ получим:

$$f'(b) - f'(x) = f''(q) \cdot (b - x),$$

где $q \in (a;\, b)$. Тогда $|f'(x)| < k(b - x)$.

Путём сравнения функции $f(x)$ с функцией, у которой $f'(x)$ линейно растёт от 0 в точке $x = a$ до $k \cdot \dfrac{b-a}{2}$ в точке $x = \dfrac{a+b}{2}$, а затем линейно убывает от этого же значения до 0 в точке $x = b$, можно показать, что наше предположение приводит к противоречию.

Завершение решения остаётся в качестве домашнего упражнения. $\square$

# Семинар 18

## Следствия из теорем о промежуточном значении

**Утверждение 18.1.** *Если $f \in C[a;\, b] \cap D(a;\, b)$ и $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = A$, то $\exists {f_+}'(a) = A$.*

**Утверждение 18.2.** *Пусть $f \in D(a;\, b)$ и $x_1, x_2 \in (a;\, b)$, причём $x_1 < x_2$. Тогда на интервале $(x_1;\, x_2)$ производная $f'(x)$ принимает все значения между $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.*

**Утверждение 18.3.** *Пусть $f,\ g \in C[a;\, b] \cap D(a;\, b)$. Если $f(a) \geqslant g(a)$ и $f'(x) > g'(x)\ \ \forall x \in (a;\, b)$, то $f(x) > g(x)\ \ \forall x \in (a;\, b]$.*

*Доказательство:*

Пусть $h(x) \coloneqq f(x) - g(x)$. Тогда $h(a) \geqslant 0$ и $h'(x) > 0\ \ \forall x \in (a;\, b)$.

Так как $h(a) \geqslant 0$, то $h(x) \geqslant h(x) - h(a)$. По теореме Лагранжа (17.2) получаем: $h(x) - h(a) = h'(c) \cdot (x - a)$, где $c \in (a;\, x)$. Так как $h'(x) > 0\ \ \forall x \in (a;\, b)$, то $h'(c) > 0$. Тогда получаем:

$$h(x) \geqslant h(x) - h(a) = h'(c) \cdot (x - a) > 0 \qquad \forall x \in (a;\, b].$$

Значит, $f(x) > g(x)\ \ \forall x \in (a;\, b]$. ■

**Замечание 18.1.** Если условие $f'(x) > g'(x)$ заменить на условие $f'(x) \geqslant g'(x)$, то вывод $f(x) > g(x)$ заменится на $f(x) \geqslant g(x)$.

**Задача 1289** (в)**.** Доказать следующее неравенство:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \qquad \text{при} \quad x > 0.$$

*Решение:*

Пусть $f(x) = x$ и $g(x) = \sin x$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \cos x$. Значит, $f'(x) \geqslant g'(x)$, причём равенство достигается только в точках вида $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда по утверждению (18.3) получаем, что $f(x) > g(x)\ \ \forall x \in (0;\, 2\pi]$. Аналогично $f(x) > g(x)\ \ \forall x \in (2\pi;\ 4\pi]$. И так далее. Таким образом, мы доказали, что $\sin x < x\ \ \forall x > 0$.

Теперь пусть $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$. Тогда $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. По утверждению (18.3) для доказательства, что $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$, надо доказать, что $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x$.

Пусть $f_1(x) = \cos x$ и $g_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Тогда $f_1(0) = g_1(0) = 1$, $f_1'(x) = -\sin x$, $g_1'(x) = -x$. Так как мы ранее доказали, что $\sin x < x\ \ \forall x > 0$, то $f_1'(x) > g_1'(x)$ $\forall x > 0$. Тогда по утверждению (18.3) получаем, что $f_1(x) > g_1(x)\ \ \forall x > 0$.

Таким образом, $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x\ \ \forall x > 0$. □

**Замечание 18.2.** Мы получили, что $0 < \sin x < \dfrac{x^3}{6}$ при $x > 0$. Значит,

$$x - \sin x = O(x^3) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

## Неравенство Коши – Буняковского

**Утверждение 18.4.**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{18.1}$$

*– неравенство Коши – Буняковского, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\vec{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ линейно зависимы.*

**Задача 1293.** Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

где $x, a_k, b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ вещественны, доказать неравенство Коши-Буняковского (18.1).

*Решение:*

Если $a_k = 0 \;\; \forall k = 1, \ldots, n$, то неравенство обращается в равенство и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Если $a_k \neq 0$ при каком-нибудь значении $k$, то получаем неотрицательный квадратный трёхчлен:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) x^2 - 2\left(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n\right) x + \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant 0.$$

Графиком этого квадратного трёхчлена является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как квадратный трёхчлен неотрицателен, то он может иметь не более одного корня. Тогда получаем:

$$\frac{D}{4} = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 - \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \leqslant 0.$$

Отсюда получаем неравенство Коши-Буняковского (18.1). Причём оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = 0$ при некотором значении $x$, то есть когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. □

## Сравнение $e^{\pi}$ и $\pi^{e}$

**Упражнение 18.1.** Сравнить числа $e^{\pi}$ и $\pi^{e}$.

*Решение:*

Возведём оба числа в степень $\dfrac{1}{\pi e}$, получим числа $e^{\frac{1}{e}}$ и $\pi^{\frac{1}{\pi}}$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Как видно, $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' > 0$ при $x \in (0;\, e)$, $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = 0$ при $x = e$, $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' < 0$ при $x > e$.

Значит, $f(x)$ возрастает при $x \in (0;\, e)$ и убывает при $x > e$. $x = e$ – точка максимума. Таким образом, $e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$. Значит, $e^{\pi} > \pi^{e}$. $\square$

## Выпуклость функции

**Определение 18.1.** Пусть $f(x) \in C(I)$, где $I$ – некоторый промежуток. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх (вогнутой вниз, вогнутой)*, если $\forall x_1, x_2 \in I$ и $\forall x \in (x_1;\, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant l(x)$, где $l(x)$ – линейная функция, которая совпадает с $f(x)$ в точках $x_1$ и $x_2$.

**Определение 18.2.** Пусть $f(x) \in C(I)$, где $I$ – некоторый промежуток. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз (вогнутой вверх, выпуклой)*, если $\forall x_1, x_2 \in I$ и $\forall x \in (x_1;\, x_2)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant l(x)$, где $l(x)$ – линейная функция, которая совпадает с $f(x)$ в точках $x_1$ и $x_2$.

**Утверждение 18.5.** *Если функция $f(x)$ выпукла вверх, то $f'(x)$ монотонно убывает. При этом $f''(x) \leqslant 0$. Верно и обратное.*

**Утверждение 18.6.** *Если функция $f(x)$ выпукла вниз, то $f'(x)$ монотонно возрастает. При этом $f''(x) \geqslant 0$. Верно и обратное.*

**Определение 18.3.** $x_0$ – *точка перегиба функции* $f(x)$, если $f(x)$ имеет разные направления выпуклости в некоторых интервалах вида $(x_0 - \varepsilon;\; x_0]$ и $[x_0;\; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

**Утверждение 18.7.** *Если $x_0$ – точка перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $\nexists f''(x_0)$.*

## Неравенство Йенсена

**Утверждение 18.8.** *Пусть функция $f(x)$ – выпуклая вниз на отрезке $[a;\, b]$. Тогда*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1, x_2 \in [a;\, b]. \tag{18.2}$$

*Кроме этого,*

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \qquad \forall x_1,\,\ldots,x_n \in [a;\,b]. \tag{18.3}$$

*Кроме этого,*

$$f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n) \qquad \forall x_1,\,\ldots,x_n \in [a;\,b], \tag{18.4}$$

*где* $\alpha_1,\,\ldots,\alpha_n \geqslant 0$ *и* $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$.

*Причём в случае, если $f(x)$ – строго выпуклая вниз функция, во всех неравенствах равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n$.*

**Замечание 18.3.** В случае выпуклой вверх функции $f(x)$ знаки неравенств «$\leqslant$» во всех случаях меняются на противоположные: «$\geqslant$».

**Упражнение 18.2.** Пусть $x_1,\,\ldots,x_n > 0$. Доказать, что

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

*Доказательство:*

Достаточно доказать, что

$$\ln\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geqslant \frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n}.$$

Пусть $f(x)=\ln x$. Тогда $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ – монотонно убывающая функция. Значит, $f(x)$ – выпуклая вверх функция. Тогда по неравенству Йенсена (18.3) получаем, что доказываемое неравенство выполнено. ■

**Определение 18.4.** $\left(\dfrac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ – *среднее порядка $p$.*

**Упражнение 18.3** (На дом)**.** Доказать, что

$$\left(\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{при} \qquad p>q>0.$$

**Задача 1314** (в; исправленная)**.** Доказать неравенство:

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2},$$

где $x, y > 0$ и $x \neq y$.

*Решение:*

Пусть $f(x) = x \ln x$. Тогда достаточно доказать, что $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. Значит, по неравенству Йенсена (18.2) достаточно показать, что $f(x)$ – выпуклая вниз.

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Так как $f'(x)$ монотонно возрастает, то $f(x)$ – выпуклая вниз функция. □

## Выпуклость функции (продолжение)

**Задача 1310.** Исследовать направление выпуклости циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (a > 0).$$

*Решение:*

Так как $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, то

$$y''(x) = \frac{\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)} = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Так как $y'(t) = a \sin t$, $y''(t) = a \cos t$ и $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $x''(t) = a \sin t$, то

$$y''(x) = \frac{a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}{a^3(1 - \cos t)^3} = \frac{a^2(\cos t - 1)}{a^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} < 0.$$

Значит, $y(x)$ – выпуклая вверх функция. □

## Правило Лопиталя

**Теорема 18.1** (Правило Лопиталя)**.** *Пусть $f(x)$, $g(x)$ – функции, дифференцируемые в проколотой окрестности точки $a$ ($a$ может быть $\infty$), причём:*

*1)* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ *или* $\dfrac{\infty}{\infty}$,

*2)* $g'(x) \neq 0$ *в проколотой окрестности $a$,*

*3)* $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

*тогда* $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причём* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Задача 1318.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

*Решение:*

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}.$$

□

**Задача 1320.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\dfrac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

*2-й способ:*

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\dfrac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}\ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя получаем:

$$\ominus\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}=2.$$

□

# Семинар 19

## Правило Лопиталя (продолжение)

**Задача 1336.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0).$$

*Решение:*

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}=\dfrac{\infty}{\infty}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}=0.$$

□

**Задача 1339.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-0{,}01x}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-0{,}01x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0{,}01x}} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{0{,}01x}}=\dfrac{\infty}{\infty}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\ominus \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{0{,}01\cdot e^{0{,}01x}} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{0{,}01\cdot e^{0{,}01x}}=\dfrac{\infty}{\infty}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\ominus \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{0{,}01^2\cdot e^{0{,}01x}}=0.$$

□

**Задача 1338.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

*Решение:*

Замена: $t=\dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{t\to+\infty} t^{50}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t} = \frac{\infty}{\infty}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\ominus \lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t} = \ldots = \lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t} = 0.$$

$\square$

**Замечание 19.1.** Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases} \tag{19.1}$$

имеет при $x = 0$ производные любого порядка, причём все они равны 0.

**Задача 1355.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\ominus \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x-1}} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, то получаем:

$$\ominus \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

**Задача 1342.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+0} x^x.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = \lim_{x\to+0} e^{\frac{\ln x}{1/x}} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\ominus \lim_{x\to+0} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = \lim_{x\to+0} e^{-x} = 1.$$

$\square$

**Задача 1373.** Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

*Решение:*

Так как $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \dfrac{0}{0}$, то по правилу Лопиталя (теорема (18.1)) получаем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} = f''(x).$$

Последнее равенство верно в силу более общей формулы:

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0+0\\ y_n\to x_0-0}} \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(x_0).$$

Обоснуем, почему эта формула верна.

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{(f(x_n)-f(x_0))+(f(x_0)-f(y_n))}{(x_n-x_0)+(x_0-y_n)}.$$

Обозначим $a \coloneqq f(x_n - f(x_0))$, $b \coloneqq x_n - x_0$, $c \coloneqq f(x_0) - f(y_n)$, $d \coloneqq x_0 - y_n$.

Заметим, что дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ лежит между дробями $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$. Действительно, выражения

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \quad \text{и} \quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{d(b+d)}$$

имеют разные знаки, так как $b, d > 0$.

Так как $\lim\limits_{x_n\to x_0+0} \dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$ и $\lim\limits_{y_n\to x_0-0} \dfrac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0} = f'(x_0)$, то получаем:

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0+0\\ y_n\to y_0-0}} \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(x_0).$$

$\square$

**Задача 1374** (a)**.** Исследовать возможность применения правила Лопиталя для вычисления следующего предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}.$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1,\ x$ – бесконечно малая функция при $x\to0$, а $\sin\dfrac{1}{x}$ – ограниченная функция.

Если попробовать применить правило Лопиталя $\Bigg($так как неопределённость вида $\dfrac{0}{0}\Bigg)$, то получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x},$$

а полученный предел не существует, так как $\nexists\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$. $\square$

## Формула Тейлора

**Утверждение 19.1.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n-1)$ раз в окрестности точки $x_0$ и $\exists f^{(n)}(x_0)$. Тогда*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

*где $R_n(x)$ – остаточный член.*

**Утверждение 19.2.** $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ *– остаточный член в форме Пеано.*

Для функции $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если}\quad x\neq0\\ 0, & \text{если}\quad x=0\end{cases}$ (которая встречалась ранее: (19.1)) формула Тейлора при $x_0=0$ будет выглядеть следующим образом: $f(x)=o(x^n)$ при $x\to0$.

**Определение 19.1.** *Формула Маклорена* – формула Тейлора при $x_0=0$.

**Утверждение 19.3.** *Формулы Маклорена для табличных функций:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1});$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) =$$

$$= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^{2n-1}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n-1}).$$

*Все формулы верны при $x \to 0$.*

**Задача 1402.** Вычислить предел:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}\right) \ominus$$

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(x^{-3}) \quad \text{при} \quad x\to+\infty;$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o(x^{-12}) \quad \text{при} \quad x\to+\infty;$$

$$x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=x^3+\frac{1}{2x^3}+O(x^{-9}) \quad \text{при} \quad x\to+\infty;$$

$$\ominus \lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(x^{-3})\right)-x^3-\frac{1}{2x^3}+O(x^{-9})\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)=\frac{1}{6}.$$

$\square$

**Задача 1385.** Написать разложение функции $\sin(\sin x)$ по целым неотрицательным степеням переменной $x$ до члена с $x^3$.

*Решение:*

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

$\square$

**Задача 1405.** Вычислить предел:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

*Решение:*

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x}{x\,(x+o(x))}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x}{6}+o(x)}{1+o(1)}=0.$$

$\square$

# Семинар 20

## Формула Тейлора (продолжение)

**Задача 1410** (2). При каких коэффициентах $A$, $B$, $C$ и $D$ справедлива при $x \to 0$ асимптотическая формула

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5).$$

*Решение:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5);$$

$$\frac{1}{1 + Cx + Dx^2} = \left(1 + Cx + Dx^2\right)^{-1} =$$

$$= 1 - \left(Cx + Dx^2\right) + \left(Cx + Dx^2\right)^2 - \left(Cx + Dx^2\right)^3 + \left(Cx + Dx^2\right)^4 + O(x^5) =$$

$$= 1 - Cx - Dx^2 + C^2x^2 + 2CDx^3 + D^2x^4 - C^3x^3 - 3C^2Dx^4 + C^4x^4 + O(x^5);$$

$$\frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} = \left(1 + Ax + Bx^2\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - Cx + (C^2 - D)x^2 + (2CD - C^3)x^3 + (D^2 - 3C^2D + C^4)x^4 + O(x^5)\right) =$$

$$= 1 + (A - C)x + (B + C^2 - D - AC)x^2 + (-BC + AC^2 - AD + 2CD - C^3)x^3 +$$

$$+ (BC^2 - BD + 2ACD - AC^3 + D^2 - 3C^2D + C^4)x^4 + O(x^5).$$

Так как $e^x = \dfrac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5)$, то получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A - C = 1 \\ B + C^2 - D - AC = \dfrac{1}{2} \\ -BC + AC^2 - AD + 2CD - C^3 = \dfrac{1}{6} \\ BC^2 - BD + 2ACD - AC^3 + D^2 - 3C^2D + C^4 = \dfrac{1}{24} \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, можно найти коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$. Это остаётся в качестве самостоятельного упражнения. $\square$

# Построение графиков функций

**Задача 1481.** Построить график функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

*Решение:*

Функция определена при $x \neq 1$. Причём $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = +\infty$. Значит, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Симметрии не видно.

Промежутки непрерывности функции: $x \in (-\infty;\ 1)$, $x \in (1;\ +\infty)$.

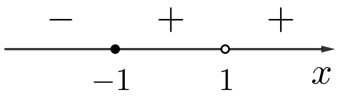


Рис. 20.1: Промежутки знакопостоянства функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2};$$

$$y' = 1 - \frac{12}{(x-1)^2} - \frac{16}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 12(x-1) - 16}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x - 5}{(x-1)^3} =$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −3 | −9 | −5 |
| −1 | 1 | −4 | −5 | 0 |

$$= \frac{(x+1)(x^2-4x-5)}{(x-1)^3} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

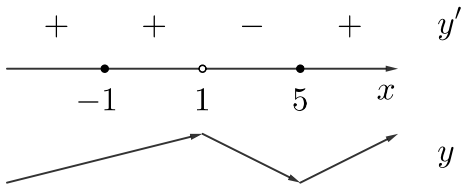


Рис. 20.2: Промежутки монотонности функции

$$y'' = \left(\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\right)' =$$

$$= \frac{\left(2(x+1)(x-5) + (x+1)^2\right)(x-1)^3 - (x+1)^2(x-5)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)((2x-10+x+1)(x-1) - 3(x+1)(x-5))}{(x-1)^4} = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

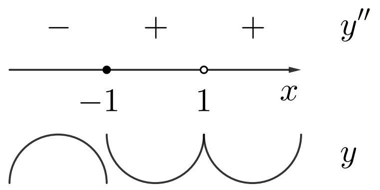


Рис. 20.3: Промежутки выпуклости функции

$$y = x + 5 + \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} = x + 5 + o(1) \quad \text{при} \quad x \to \infty;$$

$y = x + 5$ – наклонная асимптота при $x \to \infty$.

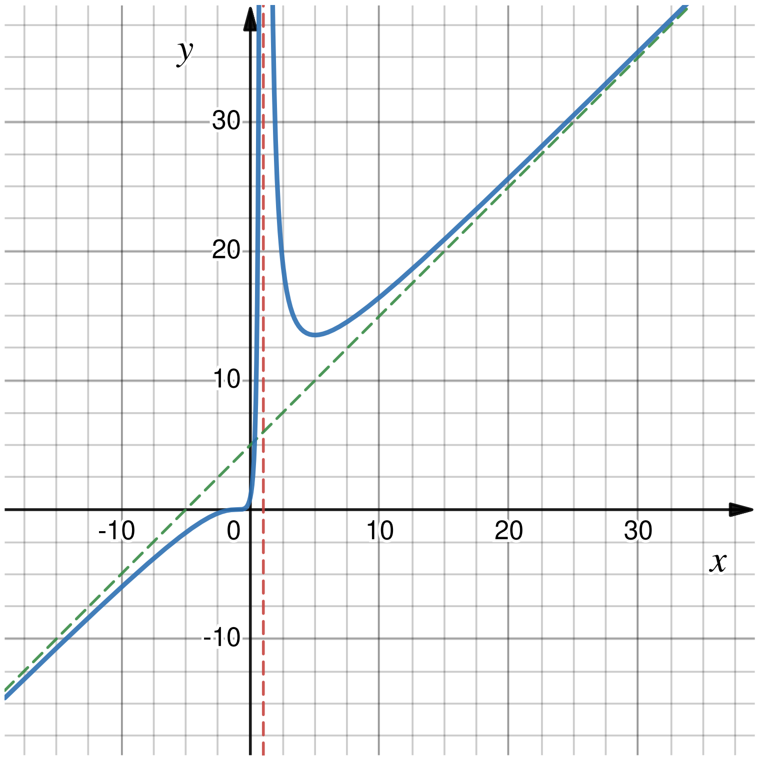


Рис. 20.4: График $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

$\square$

**Задача 1509.** Построить график функции

$$y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}.$$

*Решение:*

Мы будем считать, что $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{-x}$, чтобы не было проблем со значениями $x < 0$.

Функция определена при $x \in \mathbb{R}$.

Симметрии не видно.

Разрывов нет.

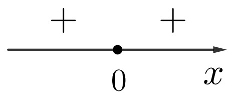


Рис. 20.5: Промежутки знакопостоянства функции

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^{-x} - x^{\frac{2}{3}}e^{-x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}(2-3x) = \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x}\cdot e^{x}}.$$

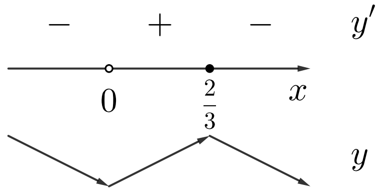


Рис. 20.6: Промежутки монотонности функции

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}(2-3x)\right)' = -\frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}(2-3x) - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}(2-3x) - x^{-\frac{1}{3}}e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}\left(3x-2-3x(2-3x)-9x\right) = \frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}\left(9x^2-12x-2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}\left(3x-2+\sqrt{6}\right)\left(3x-2-\sqrt{6}\right).$$

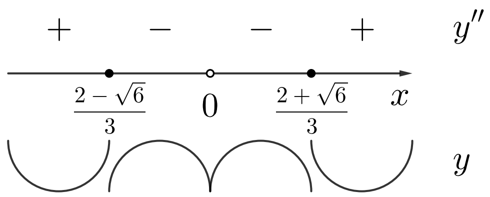


Рис. 20.7: Промежутки выпуклости функции

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \text{ – правая горизонтальная асимптота;}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{левой наклонной асимптоты нет.}$$

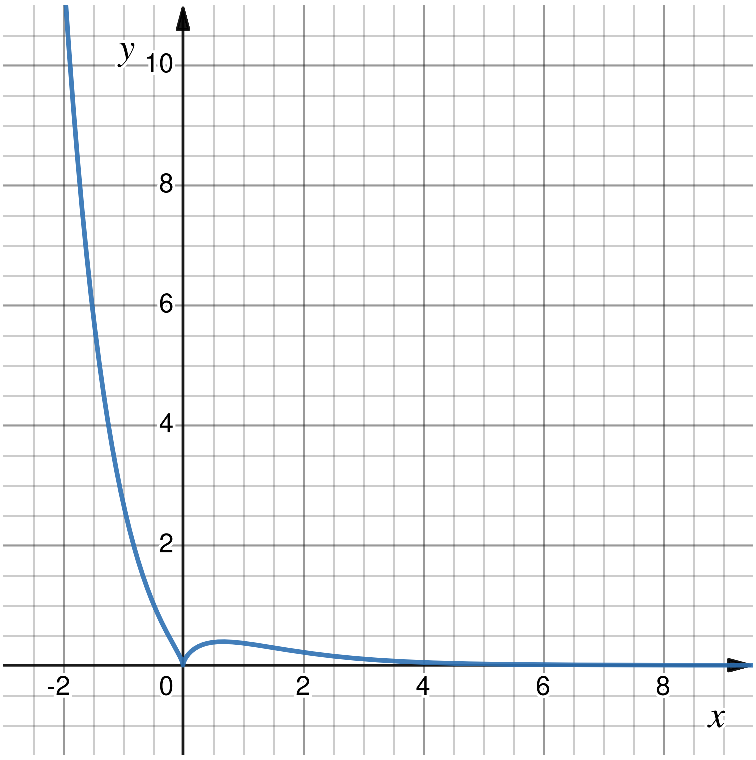


Рис. 20.8: График $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$

$\square$

**Задача 1499.** Построить график функции

$$y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x.$$

*Решение:*

Функция определена при $x \in \mathbb{R}$.

Функция нечётная: $y(-x) = -y(x)$. Также функция $2\pi$-периодическая. Значит, достаточно изобразить график функции на отрезке $x \in [0; \pi]$, а затем можно будет продолжить график при всех значениях $x \in \mathbb{R}$, используя найденные симметрии.

Разрывов нет.

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right).$$

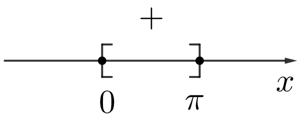


Рис. 20.9: Промежутки знакопостоянства функции на отрезке $[0; \pi]$

$$y' = \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x.$$

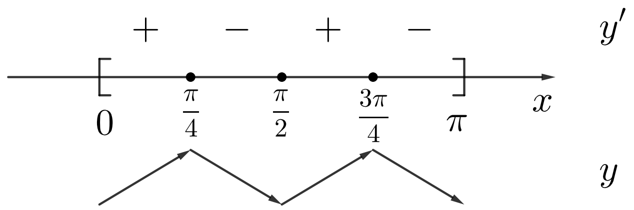


Рис. 20.10: Промежутки монотонности функции на отрезке $[0;\,\pi]$

$$y'' = (\cos x + \cos 3x)' = -\sin x - 3\sin 3x = -\sin x - 9\sin x + 12\sin^3 x =$$

$$= 2\sin x\left(6\sin^2 x - 5\right) = 12\sin x\left(\sin x - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(\sin x + \sqrt{\frac{5}{6}}\right).$$

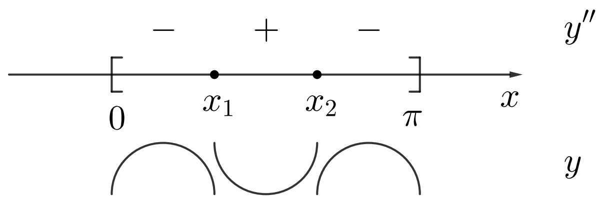


Рис. 20.11: Промежутки выпуклости функции на отрезке $[0;\,\pi]$,
где $x_1 = \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$ и $x_2 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}$

В силу периодичности и колеблющегося характера функции наклонных асимптот нет.

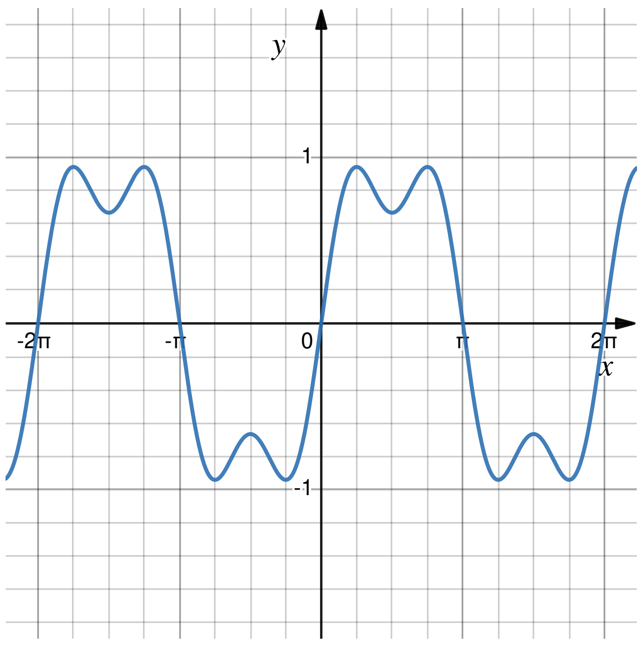


Рис. 20.12: График $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$

□

# Семинар 21

## Формула Тейлора (продолжение)

Разберём более простой способ решения задачи (1410) (2), которую решали в начале прошлого семинара.

**Задача 1410** (2)**.** При каких коэффициентах $A$, $B$, $C$ и $D$ справедлива при $x \to 0$ асимптотическая формула

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5).$$

*Решение:*

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5) \quad \Longleftrightarrow \quad e^x\left(1+Cx+Dx^2\right) = 1+Ax+Bx^2+O(x^5);$$

$$e^x\left(1+Cx+Dx^2\right) = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right)\left(1+Cx+Dx^2\right);$$

$$1+Ax+Bx^2 = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right)\left(1+Cx+Dx^2\right).$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях переменной $x$, можно получить линейную систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными. Решив эту систему уравнений, можно найти коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$. Это остаётся в качестве самостоятельного упражнения. $\square$

## Построение графиков функций (продолжение)

**Задача 1525.** Построить график функции

$$y = \arccos\frac{1-x}{1-2x}.$$

*Решение:*

Функция определена при следующих значениях $x$:

$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{1-2x} \geqslant -1 \\ \dfrac{1-x}{1-2x} \leqslant 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3x-2}{2x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-2x} \leqslant 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{3};\ +\infty\right) \\ x \in (-\infty;\ 0] \cup \left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty;\ 0] \cup \left[\dfrac{2}{3};\ +\infty\right).$$

Симметрии не видно.

Разрывов на области определения нет. Причём $y(0) = 0$ и $y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \pi$.

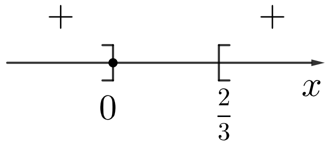


Рис. 21.1: Промежутки знакопостоянства функции

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{-(1-2x)+2(1-x)}{(1-2x)^2} =$$

$$= -\frac{|1-2x|}{\sqrt{x(3x-2)}} \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{-1}{|1-2x|\sqrt{x(3x-2)}}.$$

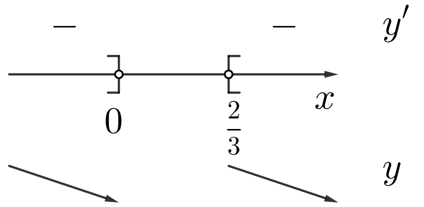


Рис. 21.2: Промежутки монотонности функции

$$y'' = \frac{-2\operatorname{sgn}(1-2x)\cdot\sqrt{x(3x-2)} + |1-2x| \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x(3x-2)}} \cdot (6x-2)}{(1-2x)^2 \cdot x(3x-2)};$$

При $x < 0$: $\quad y'' = \dfrac{-2\sqrt{x(3x-2)} + (1-2x)\cdot\dfrac{3x-1}{\sqrt{x(3x-2)}}}{(1-2x)^2\cdot x(3x-2)} =$

$$= \frac{-12x^2+9x-1}{(1-2x)^2\cdot x(3x-2)\sqrt{x(3x-2)}} < 0;$$

При $x > \dfrac{2}{3}$: $\quad y'' = \dfrac{2\sqrt{x(3x-2)} - (1-2x)\cdot\dfrac{3x-1}{\sqrt{x(3x-2)}}}{(1-2x)^2\cdot x(3x-2)} =$

$$= \frac{12x^2-9x+1}{(1-2x)^2\cdot x(3x-2)\sqrt{x(3x-2)}} > 0.$$

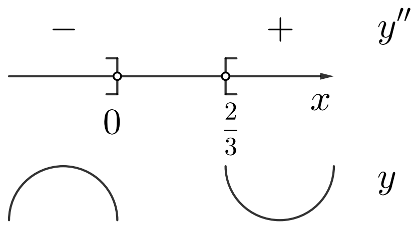


Рис. 21.3: Промежутки выпуклости функции

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\pi}{3} \text{ – горизонтальная асимптота.}$$

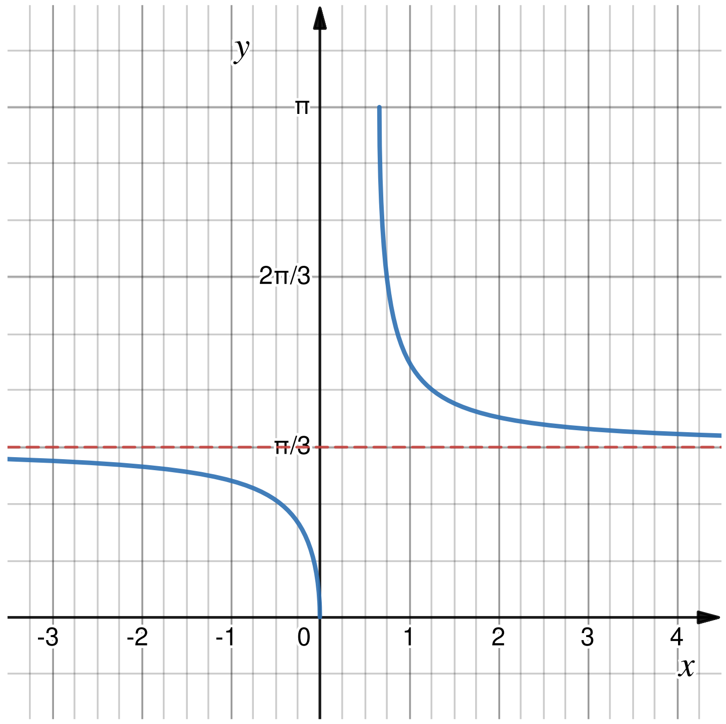


Рис. 21.4: График $y = \arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$

$\square$

**Задача 1532.** Построить кривую, заданную в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}.$$

*Решение:*

Сначала построим графики $x(t)$ и $y(t)$.

Графиком $x(t)$ является парабола с вершиной в точке $(1;\,1)$, пересекающая ось $t$ при $t = 0$ и при $t = 2$.

Для построения графика $y(t)$ проведём анализ.

$$y = 3t - t^3 = t(3 - t^2) = t\left(\sqrt{3} - t\right)\left(\sqrt{3} + t\right).$$

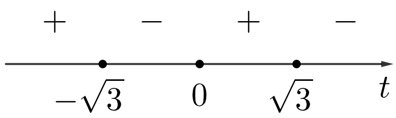


Рис. 21.5: Промежутки знакопостоянства функции $y(t)$

$$y' = 3 - 3t^2 = 3(1 - t)(1 + t).$$

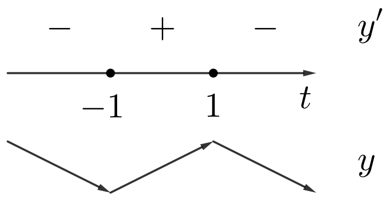


Рис. 21.6: Промежутки монотонности функции $y(t)$

$$y'' = -6t.$$

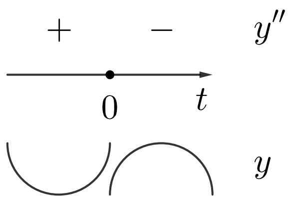


Рис. 21.7: Промежутки выпуклости функции $y(t)$

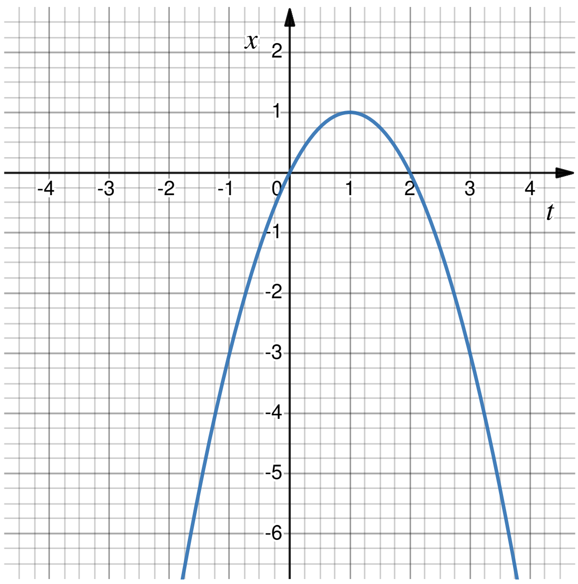


Рис. 21.8: $x = 2t - t^2$

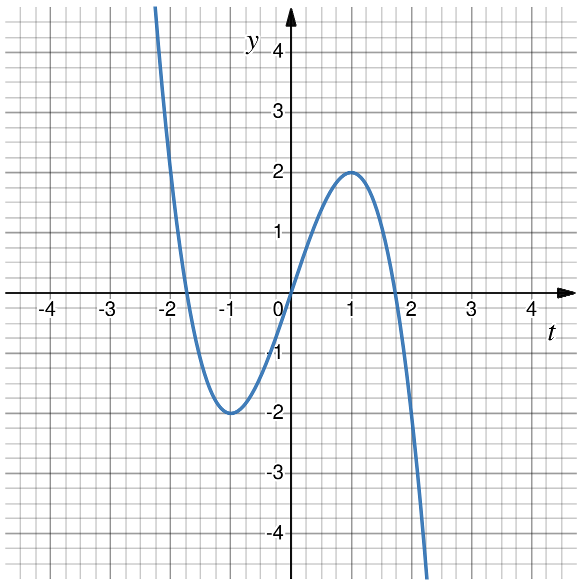


Рис. 21.9: $y = 3t - t^3$

При $t \to \infty$ имеем:

$$x = 2t - t^2 \sim -t^2; \qquad y = 3t - t^3 \sim -t^3 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 \sim -x^3.$$

При $t \to -\infty$ имеем:

$$x \to -\infty \quad \text{и} \quad y \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad y \sim \sqrt{-x^3}.$$

При $t \to +\infty$ имеем:

$$x \to -\infty \quad \text{и} \quad y \to -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad y \sim -\sqrt{-x^3}.$$

Теперь можем построить заданную кривую.

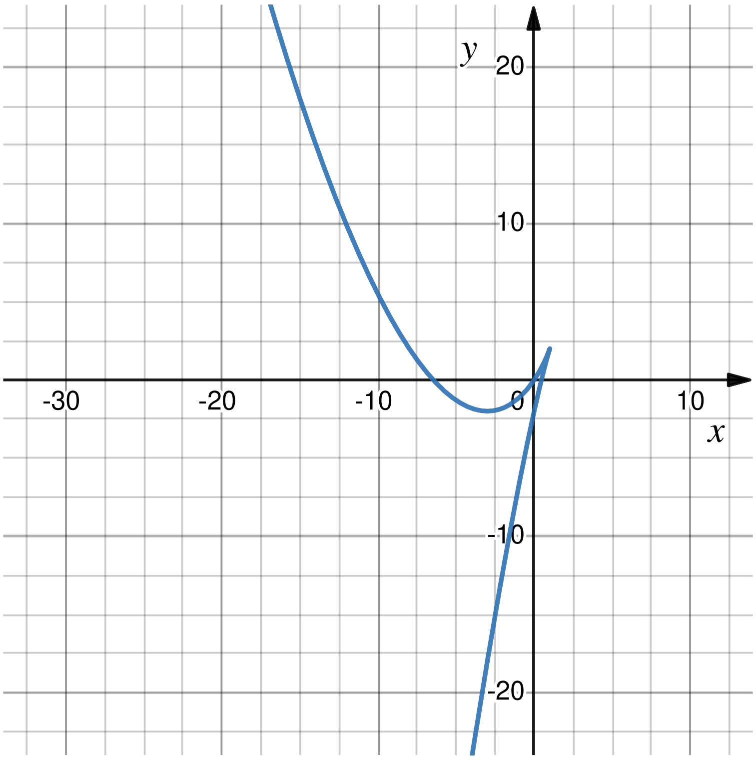


Рис. 21.10: Кривая $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

□

**Задача 1536.** Построить кривую, заданную в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos 3t \end{cases}.$$

*Решение:*

Функции $x(t)$ и $y(t)$ чётные и $2\pi$-периодические. Значит, достаточно построить кривую при $x \in [0; \pi]$, а затем продлить это построение по симметрии на область $x \in \mathbb{R}$.

Сначала построим графики $x(t)$ и $y(t)$.

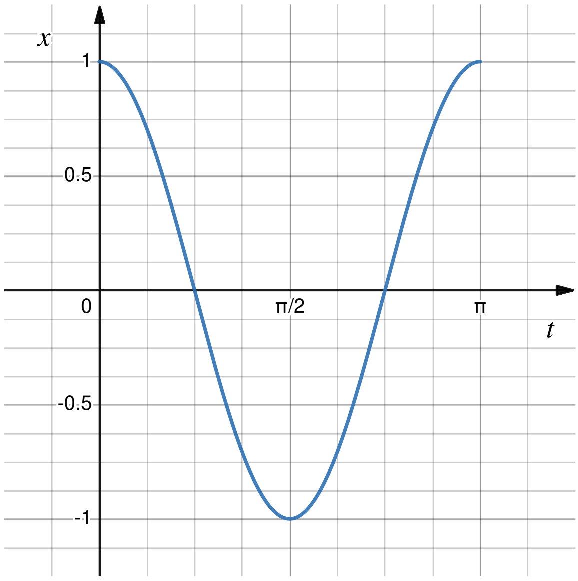


Рис. 21.11: $x = \cos 2t$

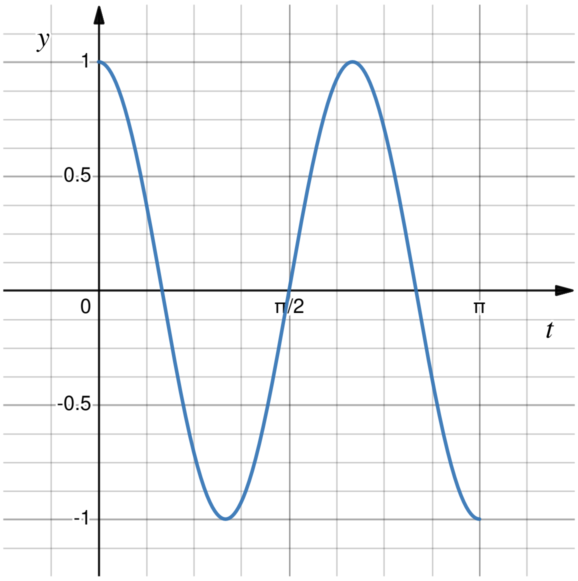


Рис. 21.12: $y = \cos 3t$

Теперь можем построить заданную кривую.

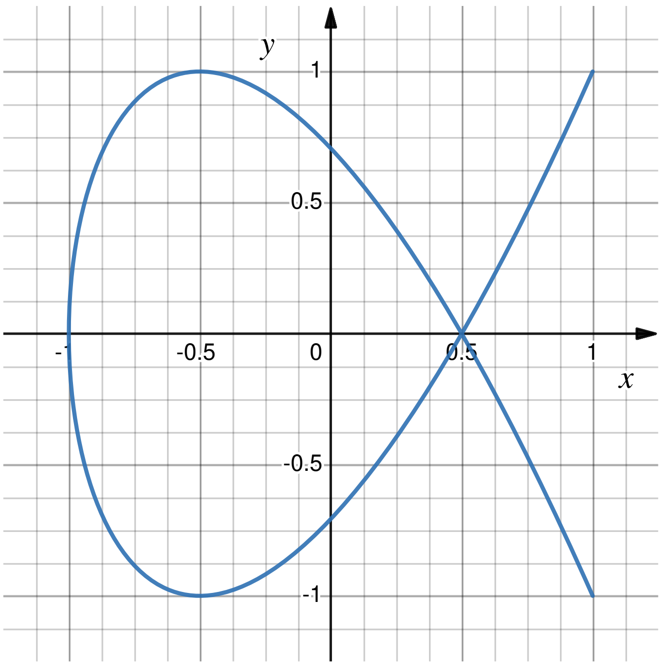


Рис. 21.13: Кривая $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos 3t \end{cases}$

$\square$

**Задача 1547.** Построить график функции, заданной в полярной системе координат:

$$r = \sin 3\varphi.$$

*Решение:*

Сначала построим график в координатах $r(\varphi)$. При этом будем учитывать, что $r \geqslant 0$ (если на каком-то промежутке значений $\varphi$ окажется, что $r < 0$, изобразим этот участок графика пунктиром). Также заметим, что функция $r(\varphi)$ является $\dfrac{2\pi}{3}$-периодической. Поэтому достаточно построить график при $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$, а затем продолжить его с учётом периодичности. Затем можно будет построить график в координатах $y(x)$.

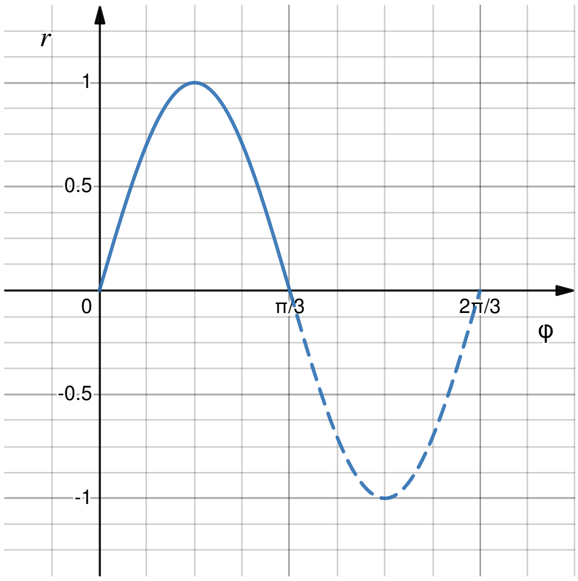


Рис. 21.14: График $r = \sin 3\varphi$ в координатах $r(\varphi)$

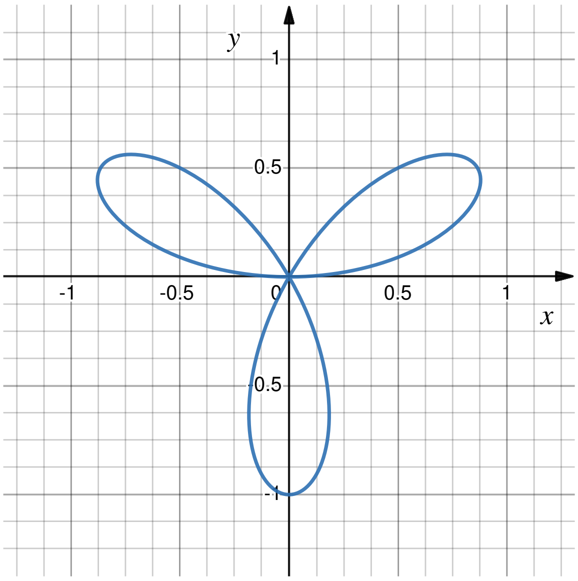


Рис. 21.15: Кривая $r = \sin 3\varphi$ в коондинатах $y(x)$

$\square$

**Задача 1541.** Представив уравнение кривой в параметрической форме, построить эту кривую:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad (a > 0).$$

*Указание:* положить $y = tx$.

*Решение:*

$$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0;$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}; \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Осталось построить график кривой, заданной параметрически. Это остаётся в качестве самостоятельного упражнения. $\square$

# Семинар 22

## Числовые ряды

**Определение 22.1.** Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ – *числовой ряд.*

**Определение 22.2.** $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ – *частичная сумма ряда.*

**Определение 22.3.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* и его *сумма* равна $S$, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

**Утверждение 22.1** (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Доказательство:*

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

В качестве примера ряда рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Тогда

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{при} \qquad x \neq 1.$$

В случае $x = 1$ ряд расходится к $+\infty$.

Так как при $|x| > 1$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = +\infty$, то при $|x| > 1$ ряд расходится.

При $x = -1$ имеем: $S_n = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2}$. Значит, при $x = -1$ ряд расходится.

Так как при $|x| < 1$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$, то при $|x| < 1$ ряд сходится:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{при} \qquad |x| < 1.$$

Если левую и правую части умножить на константу $b_0$, то получим общую формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_0$ и знаменателем $x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_0 x^n = \frac{b_0}{1-x} \qquad \text{при} \qquad |x| < 1.$$

Можно рассматривать и ряды с комплексными членами.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$ и $z = x + iy$. Так как $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$, то

$$\max\{|x_n - x|,\, |y_n - y|\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Значит, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \end{cases}.$$

Тогда последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда по отдельности сходятся действительная и мнимая части этих чисел. Аналогично для ряда с комплексными членами.

По аналогии с примером, разобранным выше, можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда $|z| < 1$. Причём

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_0 z^n = \frac{b_0}{1-z} \qquad \text{при} \qquad |z| < 1.$$

**Задача 2551.** Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

$$q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots\,;$$
$$q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^n \cos n\alpha + \ldots\,,$$

где $|q| < 1$.

*Решение:*

Так как $\left(qe^{i\alpha}\right)^n = q^n\cos n\alpha + iq^n \sin n\alpha$, то

$$\operatorname{Re}\left(qe^{i\alpha}\right)^n = q^n \cos n\alpha \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im}\left(qe^{i\alpha}\right)^n = q^n \sin n\alpha.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(qe^{i\alpha}\right)^n$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $qe^{i\alpha}$ таким, что $|qe^{i\alpha}| = |q| < 1$. Значит, сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(qe^{i\alpha}\right)^n = \frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}} = \frac{q\cos\alpha + iq\sin\alpha}{1-q\cos\alpha - iq\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(q\cos\alpha + iq\sin\alpha)(1-q\cos\alpha + iq\sin\alpha)}{(1-q\cos\alpha - iq\sin\alpha)(1-q\cos\alpha + iq\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2\cos^2\alpha - q^2\sin^2\alpha + iq\sin\alpha - iq^2\sin\alpha\cos\alpha + iq^2\sin\alpha\cos\alpha}{(1-q\cos\alpha)^2 + q^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \operatorname{Im}\left(\frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}\right) = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}\left(\frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}\right) = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2}.$$

$\square$

Теперь рассмотрим ряд, определяемый последовательностью частичных сумм $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где $a_1 = b_1$ и $a_k = b_k - b_{k-1}$ для $k = 2, 3, \ldots, n$. Такой ряд называется *телескопическим* из-за следующего свойства:

$$S_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) = b_n.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = S.$$

**Задача 2549.** Доказать сходимость следующего ряда и найти его сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots .$$

*Решение:*

Заметим, что $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Тогда для частичных сумм ряда получаем:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$\square$

# Признак сравнения и интегральный признак сходимости числовых рядов

**Утверждение 22.2** (Признак сравнения числовых рядов)**.** *Даны два ряда:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*. Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *для всех значений* $n$*, больших некоторого значения* $N$*. Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Если же ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

**Утверждение 22.3** (Интегральный признак сходимости числовых рядов)**.** *Пусть функция* $F(x)$ *непрерывна при* $x \in [1;\ +\infty)$ *и дифференцируема при* $x \in (1;\ +\infty)$*. Пусть* $F'(x) \geqslant 0$ *и* $F'(x)$ *монотонно убывает или* $F'(x) \leqslant 0$ *и* $F'(x)$ *монотонно возрастает при* $x \in [1;\ +\infty)$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} F'(n)$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} F(n)$*.*

В качестве примера рассмотрим функцию $F(x) = \ln x$. Заметим, что $F(x)$ непрерывна и дифференцируема при $x \geqslant 1$, причём $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ – положительная монотонно убывающая функция при $x \geqslant 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \ln n$. А так как $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \ln n$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

**Определение 22.4.** $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ – *гармонический ряд.*

Таким образом, мы установили, что гармонический ряд расходится.

Теперь рассмотрим функцию $F(x) = \ln(\ln x)$. Так как $F'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ расходится.

Аналогично можно показать, что ряд, члены которого имеют вид $\dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ (и с большим количеством логарифмов), расходится.

Теперь рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{1}{x^p}$, где $p > 0$. Эта функция непрерывна и дифференцируема при $x \geqslant 1$, причём $F'(x) = -\dfrac{p}{x^{p+1}}$ – отрицательная и монотонно возрастающая функция при $x \geqslant 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{p}{n^{p+1}}$ сходится тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{p}{n^{p+1}}$ сходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ сходится при $p > 0$.

**Упражнение 22.1** (На дом)**.** Пусть $a_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Тогда существует последовательность чисел $b_n > 0$: $b_n = o(a_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

**Упражнение 22.2** (На дом)**.** Пусть $a_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Тогда существует последовательность чисел $b_n > 0$: $a_n = o(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

**Задача 2556.** Исследовать сходимость ряда:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

*Решение:*

Так как члены ряда не стремятся к 0, то ряд расходится. □

**Задача 2559.** Исследовать сходимость ряда:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots .$$

*Решение:*

Так как $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, то получаем, что все члены заданного ряда больше соответственных членов ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots$. Так как в последнем ряду все члены в 2 раза меньше, чем соответственные члены в гармоническом ряду, то этот ряд расходится. Тогда по признаку сравнения заданный ряд тоже расходится. □

**Замечание 22.1.** Можно было бы решить задачу (2559), используя интегральный признак сходимости для функции $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$.

**Задача 2553.** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

*Указание:* показать, что при $x \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, невозможно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$.

*Решение:*

Если $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, то все слагаемые ряда равны 0. Тогда ряд сходится.

Далее рассмотрим $x \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $\sin nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда

$$\sin((n+1)x) = \sin nx \cos x + \sin x \cos nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Значит, $\cos nx = \dfrac{\sin((n+1)x) - \sin nx \cos x}{\sin x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда $1 = \sin^2 nx + \cos^2 nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ – противоречие. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx \neq 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ расходится. □

**Задача 2563.** Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots .$$

*Решение:*

Заданный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, а значит, сходится по признаку сравнения. □

## Критерий Коши для сходимости числового ряда

**Утверждение 22.4** (Критерий Коши для сходимости числового ряда)**.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Задача 2575.** Доказать сходимость ряда:

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \ldots .$$

*Решение:*

Пусть $a_n$ – члены ряда. Тогда получаем:

$$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}| = \left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\right.$$

$$+\cos(n+2)x\cdot\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)+\cos(n+3)x\cdot\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+$$

$$\left.+\cos(n+p)x\cdot\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)+\frac{1}{n+p}=\frac{2}{n+1}.$$

Значит, для критерия Коши достаточно выбрать значение $N$ так, чтобы $\dfrac{2}{N}=\varepsilon$, то есть $N=\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда получаем:

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \exists N=\frac{2}{\varepsilon}: \quad \forall n>N \quad \forall p\in\mathbb{N} \qquad |a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

Таким образом, заданный ряд сходится. $\square$

# Семинар 23

## Признак Даламбера

**Утверждение 23.1** (Признак Даламбера). *Пусть* $a_n > 0 \ \ \forall n > N$. *Тогда если* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \ \ \forall n > N$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \ \ \forall n > N$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.2** (Признак Даламбера в предельной форме). *Пусть* $a_n > 0 \ \ \forall n > N$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. *Тогда если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.3** (Признак Даламбера в усиленной предельной форме). *Пусть* $a_n > 0 \ \ \forall n > N$. *Тогда если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Задача 2578.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots + \frac{1000^n}{n!} + \ldots .$$

*Решение:*

$a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$ и $a_{n+1} = \dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}$, тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1000}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, по признаку Даламбера ряд сходится. □

**Задача 2580.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots .$$

*Решение:*

$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ и $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$ при $n \to +\infty$. Значит, по признаку Даламбера ряд сходится. □

Приведём пример, демонстрирующий слабое место признака Даламбера. Рассмотрим два сходящихся ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Составим новый ряд из членов этих двух рядов:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.$$

Тогда получаем:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=+\infty.$$

Значит, признак Даламбера не может ничего сказать о сходимости составленного нами ряда (а он на самом деле сходится как сумма двух сходящихся рядов).

## Радикальный признак Коши

**Утверждение 23.4** (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0\ \ \forall n > N$. *Тогда если* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1\ \ \forall n > N$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1\ \ \forall n > N$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.5** (Радикальный признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0\ \ \forall n > N$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.6** (Радикальный признак Коши в усиленной предельной форме)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0\ \ \forall n > N$ *и* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$. *Тогда если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Снова рассмотрим пример ряда, сконструированного выше:

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.$$

Получаем для чётных членов ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а для нечётных –

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\dfrac{1}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \sqrt[2n+1]{\dfrac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt[2n+1]{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда по радикальному признаку Коши ряд сходится.

**Задача 2586.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

*Решение:*

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, то $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to +\infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши. $\square$

**Задача 2595.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$.

*Решение:*

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}.$$

Так как $\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leqslant \sqrt[n]{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = 1$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши. $\square$

**Задача 2597.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$.

*Решение:*

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}} = \sqrt[n]{n^3} \cdot \frac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, то $\sqrt[n]{n^3} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$ при

$n \to +\infty$.

При $n = 2k$ имеем: $\dfrac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$. А при $n = 2k-1$ имеем: $\dfrac{\sqrt{2}+(-1)^n}{3} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши. $\square$

## Признаки Раабе. Признак Жамэ. Логарифмический признак. Признак Гаусса (обобщённый)

**Утверждение 23.7** (Признак Раабе)**.** *Пусть* $a_n > 0 \quad \forall n > N$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n = p$. *Тогда если* $p > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $p < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.8** (Признак Жамэ)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0 \quad \forall n > N$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \cdot \dfrac{n}{\ln n} = p$. *Тогда если* $p > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $p < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.9** (Логарифмический признак)**.** *Пусть* $a_n > 0 \quad \forall n > N$. *Тогда если* $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \varepsilon \quad \forall n > N$, *где* $\varepsilon > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1 \quad \forall n > N$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.10** (Логарифмический признак в предельной форме)**.** *Пусть* $a_n > 0 \quad \forall n > N$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = p$. *Тогда если* $p > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. А если* $p < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.11** (Признак Гаусса)**.**

*Пусть* $\exists \varepsilon > 0\colon\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ *при* $n \to +\infty$.

- *Если* $\lambda > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
- *Если* $\lambda < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*
- *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
- *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu \leqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Утверждение 23.12** (Признак Гаусса (обобщённый))**.**

*Пусть* $\exists \varepsilon > 0\colon\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + b_n$ *при* $n \to +\infty$, *где* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$.

- *Если* $\lambda > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
- *Если* $\lambda < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*
- *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*
- *Если* $\lambda = 1$ *и* $\mu \leqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Задача 2598.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \ldots .$$

*Решение:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^p}{\left(\dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^p \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p =$$

$$= 1 + \frac{p}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{p}{2n} - \frac{p}{2n(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, для признака Гаусса мы получили: $\lambda = 1$ и $\mu = \dfrac{p}{2}$. Значит, при $p > 2$ ряд сходится, а при $p \leqslant 2$ – расходится. $\square$

**Задача 2603.** Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdot \ldots \cdot (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

*Решение:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{p(p+1)\cdot \ldots \cdot (p+n-1)}{n!}\cdot \dfrac{1}{n^q}}{\dfrac{p(p+1)\cdot \ldots \cdot (p+n-1)(p+n)}{n!(n+1)}\cdot \dfrac{1}{(n+1)^q}} = \frac{n+1}{n+p}\cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \ominus$$

Так как

$$\frac{n+1}{n+p} = \frac{n+p-(p-1)}{n+p} = 1 - \frac{p-1}{n+p} = 1 - \frac{p-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то получаем:

$$\ominus \left(1 - \frac{p-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{q-p+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, для признака Гаусса мы получили: $\lambda = 1$ и $\mu = q - p + 1$. Значит, при $q > p$ ряд сходится, а при $q \leqslant p$ – расходится. $\square$

**Задача 2616.** Исследовать сходимость ряда с общим членом $a_n = n^{\ln x}$, где $x > 0$.

*Решение:*

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{\ln n^{-\ln x}}{\ln n} = \frac{-\ln x \cdot \ln n}{\ln n} = -\ln x.$$

По логарифмическому признаку получаем, что ряд сходится при $-\ln x > 1$, то есть при $x < \dfrac{1}{e}$, а при $x \geqslant \dfrac{1}{e}$ – расходится. $\square$

**Задача 2618.** Исследовать сходимость ряда с общим членом $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$, где $n > 1$.

*Решение:*

$$\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln n)^{\ln\ln n}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \circleddash$$

Замена: $\quad \ln(\ln n) = x_n.$

$$\circleddash \frac{x_n^2}{e^{x_n}} \xrightarrow[x_n\to+\infty]{} 0.$$

По логарифмическому признаку получаем, что ряд расходится. $\square$

# Семинар 24

## Использование ряда для исследования последовательности

**Задача 2653.** Заменив последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

соответствующим рядом, исследовать её сходимость.

*Решение:*

Составим соответствующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$a_1 = x_1 = 1 - 2 = -1;$$

$$a_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \cdot \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)} = \frac{(n-1)-n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2}.$$

Таким образом, $x_n = -1 - \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}$.

Видно, что последовательность $\{x_n\}$ является убывающей.

Заметим, что $\dfrac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} < \dfrac{1}{4\left(\sqrt{k-1}\right)^3}$. Тогда так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2}$ сходится.

Значит, последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда можно записать следующее равенство:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - M + \varepsilon_n,$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, а последовательность $\{\varepsilon_n\}$, монотонно убывая, стремится к 0 при $n \to \infty$. □

**Упражнение 24.1** (На дом)**.** Пусть $p \in (0;\,1]$ Найти функцию $F(n)$ такую, что

$$1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} \sim F(n).$$

## Знакопеременные ряды

**Утверждение 24.1.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже сходится.*

**Определение 24.1.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

**Теорема 24.1** (Теорема Коши)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то сумма этого ряда не зависит от расстановки его членов, то есть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *для любой биекции* $\sigma(n)\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

**Определение 24.2.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

**Теорема 24.2** (Теорема Римана)**.**

$$\forall S \in [-\infty;\ +\infty] \qquad \exists(\textit{биекция } \sigma(n)\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N})\colon \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S.$$

**Замечание 24.1.** Более того, можно переставить члены условно сходящегося ряда так, чтобы он стал расходящимся, а множество его частичных пределов представляло собой любой наперёд заданный отрезок.

**Утверждение 24.2.** *Если ряд сходится к $S$, то ряд, полученный из исходного с помощью расстановки скобок, тоже сходится к $S$. Обратное, вообще говоря, неверно.*

**Утверждение 24.3.** *Пусть* $a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$*. Тогда если проводить группировку в ряде* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *не более чем по конечному количеству членов, то сходимости исходного и полученного рядов будут эквивалентны.*

**Утверждение 24.4.** *Пусть* $a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. *Тогда если проводить группировку в ряде* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *так, чтобы в каждой скобке все слагаемые были либо неотрицательные, либо неположительные, то сходимости исходного и полученного рядов будут эквивалентны.*

**Утверждение 24.5** (Признак Лейбница)**.** *Пусть, начиная с некоторого номера, последовательность* $\{a_k\}$ *монотонно убывает и все её члены положительны. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда* $a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Замечание 24.2.** Пусть $K$ – номер, начиная с которого последовательность $\{a_k\}$ монотонно убывает и все её члены положительны. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| \leqslant |a_{n+1}| \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right) = \operatorname{sgn} a_{n+1} \qquad \forall n > K.$$

**Задача 2669.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$.

*Решение:*

$|a_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{n+100} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $x = \sqrt{n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2+100}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+100-x\cdot 2x}{(x^2+100)^2} = \frac{100-x^2}{(x^2+100)^2} < 0 \text{ при } x > 10.$$

Значит, $|a_n|$ убывает при $n \geqslant 100$. Тогда по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$ сходится. □

**Задача 2673.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

*Решение:*

Заметим, что $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \not\to 0$ при $n \to +\infty$, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ расходится. □

**Задача 2672.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$, где $[\cdot]$ – целая часть.

*Решение:*

Заметим, что $(-1)^{[\sqrt{n}]}$ меняет знак членов ряда в те моменты, когда $n$ становится полным квадратом. Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots+(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{k^2+2k}\right)+\ldots.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$, где $b_k = \dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{k^2+2k}$, полученный группировкой членов исходного ряда, является знакочередующимся, причём его сходимость эквивалентна сходимости исходного ряда.

Сравним $b_k$ с выражением $\ln(k+1)-\ln k$. По теореме Лагранжа получаем:

$$\ln(k+1)-\ln k = (\ln k)'\Big|_{k=c} = \frac{1}{c},$$

где $c \in (k;\ k+1)$. Тогда $\dfrac{1}{k+1} < \ln(k+1)-\ln k < \dfrac{1}{k}$. Отсюда получаем:

$$\frac{1}{k^2+p} > \ln(k^2+p+1)-\ln(k^2+p);$$

$$b_k = \frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots+\frac{1}{k^2+2k} > \big(\ln(k^2+1)-\ln k^2\big)+$$

$$+\big(\ln(k^2+2)-\ln(k^2+1)\big)+\ldots+\big(\ln(k+1)^2-\ln(k^2+2k)\big) =$$

$$= \ln(k+1)^2-\ln k^2 = 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Так как $c \in (k;\ k+1)$, то $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Тогда $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{k(k+1)}$. Так как $\dfrac{1}{c} = \ln(k+1)-\ln k$, то получаем:

$$\frac{1}{k} < \ln(k+1)-\ln k+\frac{1}{k(k+1)};$$

$$\frac{1}{k^2} < \ln(k^2+1)-\ln k^2+\frac{1}{k^2(k^2+1)};$$

$$b_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k} < 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{k^2(k^2+1)} + \frac{1}{(k^2+1)(k^2+2)} + \ldots + \frac{1}{(k^2+2k)(k+1)^2} =$$

$$= 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1}\right) + \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+2}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{k^2+2k} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Теперь представим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ в виде суммы двух рядов и исследуем их на сходимость:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(b_k - 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Так как $\left\{2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}$ – монотонно убывающая к 0 последовательность, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ сходится по признаку Лейбница.

Так как $0 < b_k - 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$, то

$$\left|b_k - 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| < \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ряд с членами вида $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ сходится как телескопическая сумма. Тогда по признаку сравнения ряд с членами вида $\left|b_k - 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right|$ тоже сходится. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(b_k - 2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ сходится абсолютно.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сходится как сумма двух сходящихся рядов. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ тоже сходится. $\square$

**Задача 2675.** В зависимости от значения параметра $p$ определить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ абсолютно, условно или же расходится.

*Решение:*

Для исследования на абсолютную сходимость надо рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Ранее мы его уже исследовали: он сходится при $p > 1$. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$.

При $0 < p \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится условно по признаку Лейбница.

При $p \leqslant 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ расходится по необходимому условию сходимости. $\square$

**Утверждение 24.6.** *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – последовательности только с положительными членами. Тогда если $a_n \sim b_n$, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, то сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентны.*

**Задача 2677.** Исследовать на абсолютную и условную сходимости ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right).$$

*Решение:*

При $p \leqslant 0$ логарифм неопределён для некоторых членов ряда. Значит, ряд расходится.

Теперь рассмотрим случай $p > 1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ по 2-му замечательному пределу, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\ln(1+x)|}{|x|} = 1$. Значит, $|\ln(1+x)| \sim |x|$ при $x \to 0$. Поэтому сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)\right|$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, а этот ряд сходится при $p > 1$, как мы показывали раньше. Значит, в этом случае заданный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ сходится абсолютно.

Теперь рассмотрим $p \in (0;\ 1]$.

Так как в этом случае ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится по признаку Лейбница, сходимость исходного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right) - \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Запишем разложение функции $\ln(1+x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1+x) = x + \left.\frac{(\ln(1+x))''}{2!}\right|_{x=\theta} \cdot x^2 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

где значение $\theta$ лежит между 0 и значением $x$. Так как $(\ln(1+x))'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, то получаем:

$$\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2(1+\theta)^2} \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Таким образом, сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right) - \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-1}{2(1+\theta_n)^2} \cdot \dfrac{1}{n^{2p}}$, где значение $\theta_n$ лежит между 0 и значением $\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ при $n \to \infty$. Значит, $\theta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-1}{2(1+\theta_n)^2} \cdot \dfrac{1}{n^{2p}}$ – знакопостоянный, начиная с некоторого номера члена ряда, причём $\dfrac{1}{2(1+\theta_n)^2} \cdot \dfrac{1}{n^{2p}} \asymp \dfrac{1}{n^{2p}}$. Значит, ряд сходится при $2p > 1$, то есть при $p > \dfrac{1}{2}$, и расходится при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$ и расходится при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Получаем следующий результат для всей задачи: исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $p \in \left(\dfrac{1}{2};\ 1\right]$, расходится при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. $\square$

# Семинар 25

## Признаки Дирихле и Абеля для сходимости ряда

**Утверждение 25.1** (Признак Дирихле)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если последовательность* $\{A_n\}$ *ограничена и последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно стремится к 0, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

**Утверждение 25.2** (Признак Абеля)**.** *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. *Пусть* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ *и последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

**Задача 2697** (а)**.** Пусть $x \in (0; \pi)$. Доказать, что ряд

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

сходится условно.

*Решение:*

Пусть $a_n = \sin nx$ и $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0.

Используя формулу $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, получим:

$$A_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = (\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \left(\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

При каждом фиксированном значении $x$ получаем: $|A_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$. Тогда

$$\forall x \in (0;\, \pi) \qquad \exists C = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} > 0\colon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |A_n| < C.$$

Значит, последовательность $\{A_n\}$ ограничена.

Таким образом, ряд $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n} + \ldots$ сходится по признаку Дирихле.

Для исследования на абсолютную сходимость рассмотрим ряд

$$|\sin x| + \frac{|\sin 2x|}{2} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{n} + \ldots .$$

Так как $|\sin kx| \geqslant \sin^2(kx) = \dfrac{1-\cos 2kx}{2}$, то получаем:

$$|\sin x| + \frac{|\sin 2x|}{2} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{n} + \ldots \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2kx}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{2k}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{2k}$ сходится по признаку Дирихле (доказывается аналогично тому, что мы проделывали выше), а $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ расходится как гармонический. Тогда ряд

$$|\sin x| + \frac{|\sin 2x|}{2} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{n} + \ldots$$

расходится.

Таким образом, ряд $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n} + \ldots$ сходится условно. $\square$

**Задача 2683.** Исследовать ряд на сходимость: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

*Решение:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} \cdot \frac{n-1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

где $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ и $b_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ сходится по признаку Лейбница.

$b_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, значит, последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ сходится по признаку Абеля. □

## Усиленные признаки Дирихле и Абеля для сходимости ряда

**Утверждение 25.3.** *Признаки Абеля и Дирихле можно проверять не с первого номера члена ряда, а с некоторого $n_0$.*

**Утверждение 25.4.** *В признаке Дирихле можно заменить условие, что последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к 0, условием, что последовательность $\{b_n\}$ представима в виде разности двух последовательностей, каждая из которых монотонно стремится к 0.*

**Определение 25.1.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью с ограниченной вариацией (с ограниченным изменением)*, если $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{n+1} - x_n|)$ конечен.

**Упражнение 25.1** (На дом). Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $x_n = y_n - z_n$, где последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ монотонно возрастают и ограничены.

**Утверждение 25.5** (Усиленный признак Абеля). *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Если $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n$ и последовательность $\{b_n\}$ имеет ограниченную вариацию, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

**Утверждение 25.6** (Усиленный признак Дирихле). *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Пусть $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Если последовательность $\{A_n\}$ ограничена и последовательность $\{b_n\}$ имеет ограниченную вариацию, а также $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

**Задача 2682.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}}$.

*Решение:*

При $p = 0$ ряд не определён, так как некоторые члены ряда содержат операцию деления на 0. Значит, ряд в этом случае расходится.

Рассмотрим исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}}$ при $p < 0$. При $n_k = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$, получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p + 1} \not\to 0$ при $k \to +\infty$. Значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}}$ расходится при $p < 0$.

Далее рассмотрим случай $p > 0$.

Введём вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p}$.

Пусть $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$, тогда $|a_1 + \ldots + a_n| \leqslant \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{8}}$ (по аналогии с решением задачи (2697) (a)). Кроме этого, $\dfrac{1}{n^p}$ монотонно стремится к 0. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится при $p > 0$ по признаку Дирихле.

Теперь рассмотрим разность между исходным рядом и вспомогательным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}\right)}.$$

Заметим, что $\dfrac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{\left(n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}\right)\cdot n^p} \leqslant \dfrac{1}{n^p(n^p-1)} \asymp \dfrac{1}{n^{2p}}$. Ряд с членами $\dfrac{1}{n^{2p}}$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$. Значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}\right)}$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p + \sin\dfrac{n\pi}{4}\right)}$ при $p \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

При $n_k = 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$, получаем подпоследовательность $a_{n_k} = \dfrac{1}{(2+8k)^p((2+8k)^p+1)}$. Тогда получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2+8k)^p((2+8k)^p+1)}.$$

Так как $\dfrac{1}{(2+8k)^p((2+8k)^p+1)} \asymp \dfrac{1}{k^{2p}}$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}}$ расходится при $p\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]$, то и ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\dfrac{n\pi}{4}}{n^p\left(n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)}$ расходится при $p\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right]$.

Таким образом, исходный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\dfrac{n\pi}{4}}$ расходится при $p\leqslant\dfrac{1}{2}$ и сходится при $p>\dfrac{1}{2}$. □

**Задача 2698** (1б)**.** Исследовать ряд на сходимость: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

*Решение:*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\cos\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{1}{n}\cos n}{\ln(\ln n)} =$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}\cdot\cos\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\cos n\cdot\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\ln(\ln n)}.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}$ сходится по признаку Дирихле. Последовательность $\left\{\cos\dfrac{1}{n}\right\}$ монотонна и ограничена. Значит, ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}\cdot\cos\frac{1}{n}$ сходится по признаку Абеля.

Ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\cos n\cdot\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$ сходится по признаку Дирихле.

Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$ сходится как сумма двух сходящихся рядов. □

## Решение задач на сходимость ряда

**Задача 2700.** Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_m^n$, где

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}.$$

*Решение:*

Если $m \in \mathbb{N}$, то, начиная с некоторого значения $n$, все $C_m^n$ будут равны 0. Значит, в этом случае ряд сходится.

Далее рассмотрим случай $m \notin \mathbb{N}$. Заметим, что

$$\frac{C_m^n}{C_m^{n-1}} = \frac{\dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}}{\dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+2)}{(n-1)!}} = \frac{m-n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Тогда, начиная с некоторого значения $n$, имеем: $\dfrac{C_m^n}{C_m^{n-1}} < 0$. Значит, начиная с некоторого значения $n$, ряд знакочередующийся. Так как, начиная с некоторого значения $n$, имеем: $m-n+1<0$, то, начиная с этого значения $n$, имеем:

$$\frac{|C_m^n|}{|C_m^{n-1}|} = \frac{n-m-1}{n} = 1 - \frac{m+1}{n}.$$

Если $1-\dfrac{m+1}{n} \geqslant 1$, то есть если $m \leqslant -1$, то $|C_m^n| \geqslant |C_m^{n-1}|$. Значит, в этом случае ряд расходится.

Если же $m > -1$, то $|C_m^n| < |C_m^{n-1}|$. Значит, в этом случае последовательность $C_m^n$ – знакочередующуюся и модули её членов монотонно убывают. Если мы покажем, что $C_m^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то по признаку Лейбница ряд в этом случае будет сходиться.

Покажем, что $C_m^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Из задачи (2606), которую решим ниже, известно, что если $a_n > 0$ и $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{p}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$, то $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to +\infty$. Тогда если $a_n > 0$ и $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 - \dfrac{p}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$, то $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to +\infty$. Так как мы знаем, что $\dfrac{|C_m^n|}{|C_m^{n-1}|} = 1 - \dfrac{m+1}{n}$, то положим $p = m + 1$ и $\varepsilon = \dfrac{p}{2}$. Тогда $|C_m^n| = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{m+1}{2}}}\right)$. Значит, $C_m^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_m^n$ сходится при $m > -1$ и расходится при $m \leqslant -1$. $\square$

**Задача 2606.** Пусть $a_n > 0$ и $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{p}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to +\infty$. Доказать, что $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to +\infty$.

*Решение:*

При $n \to +\infty$ имеем: $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right) \iff a_n n^{p-\varepsilon} = o(1)$. Рассмотрим последовательность $b_n = a_n n^{p-\varepsilon}$.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n n^{p-\varepsilon}}{a_{n+1}(n+1)^{p-\varepsilon}} = \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(p-\varepsilon)} =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{p-\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \text{ при } n \to +\infty;$$

$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \geqslant \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n}\right) \text{ при } n \to +\infty.$$

Используем то, что $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$ при $x > 0$ (так как в 0 эти функции совпадают, а при $x > 0$ производная функции $\ln(1+x)$ не меньше производной функции $x - \dfrac{x^2}{2}$). Получим:

$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2n} - \frac{\varepsilon^2}{8n^2} \text{ при } n \to +\infty;$$

$$\ln b_n - \ln b_{n+1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2n} - \frac{\varepsilon^2}{8n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0;$$

$$(\ln b_{n_0} - \ln b_{n_0+1}) + \ldots + (\ln b_n - \ln b_{n+1}) = \ln b_{n_0} - \ln b_{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{1}{n_0^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0;$$

$$\ln b_{n+1} \leqslant \ln b_{n_0} + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{1}{n_0^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Введём обозначения: $\ln b_{n_0} = C$ и $\dfrac{\varepsilon^2}{8}\left(\dfrac{1}{n_0^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\right) < C_1$, где $C_1$ – некоторая константа, ограничивающая частичную сумму сходящегося ряда. Тогда получим:

$$b_{n+1} \leqslant e^{C+C_1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0.$$

Так как $\left(\dfrac{1}{n_0}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$ – частичная сумма расходящегося ряда, то $C + C_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\left(\dfrac{1}{n_0}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right) \to -\infty$ при $n \to +\infty$. Тогда получаем:

$$b_{n+1} \leqslant e^{C+C_1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n_0}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Тогда $b_n = o(1)$, то есть $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$. $\square$

# Семинар 26

## Произведение рядов

**Определение 26.1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ – *произведение рядов (произведение по Коши)*, где

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_{n-k} b_k + \ldots + a_0 b_n.$$

**Замечание 26.1.** Ряд, выполняющий роль единицы для операции произведения рядов, – это $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$. Тогда обязательным условием существования обратного элемента для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ в смысле опреации произведения рядов является условие $a_0 \neq 0$.

**Задача 2711.** Доказать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$

*Решение:*

Заметим, что $c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1$.

При $n \geqslant 1$, используя бином Ньютона, получим:

$$c_n = \frac{1}{n!} \cdot 1 + \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1) + \ldots + \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + 1 \cdot \frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left( C_n^0 \cdot 1 + C_n^1 \cdot (-1) + \ldots + C_n^k \cdot (-1)^k + \ldots + C_n^n \cdot (-1)^n \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot (1 + (-1))^n = 0.$$

Таким образом, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$ □

**Замечание 26.2.** Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$, то равенство для произведения сумм рядов получается аналогичным: $e \cdot e^{-1} = 1$.

## Сходимость произведения рядов

**Теорема 26.1** (Теорема Коши)**.** *Если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ тоже сходится* *абсолютно, причём* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C = A \cdot B$.

**Теорема 26.2** (Теорема Мертенса)**.** *Если один из рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходится абсолютно, а другой сходится, причём* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *тоже сходится, причём* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C = A \cdot B$.

**Теорема 26.3.** *Если ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходятся, причём* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *сходится по Чезаре, причём*

$$\frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C = A \cdot B,$$

*где* $\{S_n\}$ *– последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

**Задача 2713.** Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ есть ряд расходящийся.

*Решение:*

Будем считать, что нулевой член ряда равен 0. Тогда $c_0 = a_0 a_0 = 0 \cdot 0 = 0$. Далее рассмотрим случай $n > 0$.

$$c_n = 0 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot 0 =$$

$$= (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{1\cdot(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot 1}} \right);$$

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1\cdot(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot 1}}. \quad (26.1)$$

Заметим, что для каждого слагаемого в выражении (26.1) можно сделать следующую оценку:

$$\frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)^2}} \geqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{n}.$$

Тогда для $|c_n|$, имеющего в выражении (26.1) $n-1$ слагаемых, получаем следующую оценку:

$$|c_n| \geqslant (n-1)\cdot\frac{2}{n} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Значит, квадрат ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ расходится. □

## Бесконечные произведения

**Определение 26.2.** Пусть задана числовая последовательность $\{p_n\}$. Тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = p_1\cdot p_2\cdot\ldots$ – *бесконечное произведение.*

**Определение 26.3.** $P_n = p_1\cdot\ldots\cdot p_n$ – *частичное произведение.*

**Определение 26.4.** Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится* и равно $p$, если $\exists\lim\limits_{n\to\infty} P_n = p \neq 0$.

**Утверждение 26.1** (Необходимое условие сходимости бесконечного произведения)**.** *Если бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

*Доказательство:*

Если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = p$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1} = p$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1.$$

■

**Замечание 26.3.** Так как для сходящегося бесконечного произведения имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$, то все члены $p_n$ сходящегося бесконечного произведения, начиная с некоторого номера $n$, положительны. Тогда, если бесконечное произведение сходится, то можно в нём отбросить конечное количество начальных членов так, чтобы все оставшиеся члены бесконечного произведения были положительны, причём полученное бесконечное произведение тоже будет сходиться. А для такого бесконечного произведения можно записать следующее равенство: $\ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln p_k$. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln p_k$ будет сходиться. Верно и обратное.

**Задача 3051.** Доказать, что $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

*Решение:*

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{n+1}{2n};$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{2}.$$

□

**Задача 3056.** Доказать, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}\quad\forall x\neq 0$.

*Решение:*

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\qquad\Big|\ \cdot 2\sin\frac{x}{2^n};$$

$$2\sin\frac{x}{2^n}\cdot P_n=\cos\frac{x}{2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\qquad\Big|\ \cdot 2^{n-1};$$

$$2^n\sin\frac{x}{2^n}\cdot P_n=\sin x.$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$. Значит,

$$\exists N(x):\qquad -\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2^n}<\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad\frac{x}{2^n}\neq 0.$$

Тогда $\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0\quad\forall n\in\mathbb{N},\ n>N$. Далее рассматриваем $n>N$.

Используя первый замечательный предел, получаем:

$$P_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\to\frac{\sin x}{x}\quad\text{при}\quad n\to+\infty.$$

Таким образом, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}\quad\forall x\neq 0$. □

**Задача 3066.** Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

*Решение:*

$\dfrac{1}{n} \not\to 1$ при $n \to +\infty$. Значит, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. □

**Задача 3068.** Исследовать бесконечное произведение на сходимость: $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

*Решение:*

Если $p<0$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty$. Если $p=0$, то $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=1$. Значит, в этих случаях бесконечное произведение расходится, так как $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\neq 1$.

Далее рассмотрим случай $p>0$. Бесконечное произведение сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$. А сходимость этого ряда эквивалентна сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ по признаку сравнения. Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$, то и исходное бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$. □

## Признаки сходимости бесконечного произведения

**Утверждение 26.2.** *Если все $p_n\geqslant 1$ или если все $p_n\in(0;\,1]$, то бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)$.*

*Альтернативная формулировка: если $\alpha_n$ сохраняет знак, то бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$.*

**Задача 3070.** Исследовать бесконечное произведение на сходимость:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$$

*Решение:*

$$\alpha_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p-1=\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p-1.$$

Заметим, что при каждом конкретном значении $p$ знак $\alpha_n$ не зависит от $n$. Действительно, если $p=0$, то $\alpha_n=0$; если $p>0$, то $\alpha_n<0$; если $p<0$, то $\alpha_n>0$.

Значит, по утверждению (26.2) получаем, что сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$.

При $p=0$ получаем: ряд $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \prod\limits_{n=2}^{\infty}1$ сходится.

Далее рассмотрим случай $p\neq 0$. Так как $(1+p)^t = 1+pt+O(t^2)$ при $t\to 0$, то получаем:

$$\alpha_n = \left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p - 1 = -\frac{2p}{n^2+1} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Так как ряды с членами $\frac{2p}{n^2+1}$ и с членами $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ при $n\to\infty$ сходятся при всех значениях $p$, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ тоже сходится при всех значениях $p$. Значит, бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$ сходится при всех значениях $p$. □

**Замечание 26.4.** Вообще говоря, если $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n = p\neq 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n^a = p^a \neq 0$, где $a$ – произвольная константа.

Теперь рассмотрим случай, когда члены последовательности $\alpha_n$ имеют разные знаки при $n\to\infty$, где $p_n = 1+\alpha_n$ – члены бесконечного произведения. Будем применять формулу Тейлора для логарифма:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член. Например, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, где $\theta$ находится между 0 и $x$. Оставим в формуле Тейлора только первый член, получим:

$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{1}{2(1+\theta_n)^2}\cdot\alpha_n^2,$$

где $\theta_n$ находится между 0 и $\alpha_n$. Так как мы рассматриваем случай $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (иначе ряд расходится), то $\theta_n$ – бесконечно малая последовательность. В таком случае получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2}{2(1+\theta_n)^2},$$

причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_n^2}{2(1+\theta_n)^2} \asymp \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$.

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ сходится.

Если один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходится, а другой расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ расходится.

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ расходятся, то о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ ничего сказать нельзя.

Тогда получаем следующий признак сходимости бесконечного произведения.

**Утверждение 26.3.** *Пусть $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ сходятся, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ сходится, а если сходится ровно один из рядов выше, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ расходится.*

**Определение 26.5.** Говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ *сходится абсолютно*, если ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n$ сходится абсолютно. Если же ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n$ сходится условно, то говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ *сходится условно.*

**Замечание 26.5.** Если бесконечное произведение сходится абсолютно, то его множители можно переставлять в произвольном порядке. Если же бесконечное произведение сходится условно, то перестановка его множителей может привести к изменению сходимости или значения бесконечного произведения.

**Задача 3088.** Исследовать бесконечное произведение на абсолютную и условную сходимости:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

*Решение:*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ – знакопеременный сходящийся ряд.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – сходящийся ряд.

Таким образом, бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ сходится по признаку сходимости из утверждения (26.3).

Теперь исследуем на абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \right|$ расходится, так как расходится гармонический ряд.

Таким образом, бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ сходится условно.

$\square$

**Задача 3099** (с исправленной опечаткой)**.**

Показать, что произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 + \alpha_n)$, где

$$\alpha_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если} \quad n = 2k - 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если} \quad n = 2k \end{cases}$$

сходится, хотя оба ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha_n^2$ расходятся.

*Решение:*

Исследуем бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ на сходимость.

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 + \alpha_n) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \ldots;$$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{k^2};$$

$$P_{2k}=4\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=4\prod_{n=2}^{k}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Используя задачу (3051) получаем, что $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} P_{2k}=4\cdot\dfrac{1}{2}=2$. Так как $P_{2k+1}=$ $=P_{2k}\cdot(1+\alpha_{2k+1})$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}\alpha_{2k+1}=0$, то также $\exists\lim\limits_{k\to+\infty}P_{2k+1}=2$. Тогда $\exists\lim\limits_{k\to+\infty}P_k=2$, то есть бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)$ сходится, причём $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)=2$.

Теперь исследуем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ на сходимость.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n=3-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots;$$

$$S_{2k}=3-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots-\frac{1}{\sqrt{k}}+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)=$$

$$=3+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).$$

Так как гармонический ряд расходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ расходится.

Теперь исследуем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n^2$ на сходимость.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n^2=9+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)^2+\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots.$$

Так как гармонический ряд расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n^2$ расходится. $\square$

# Семинар 27

## Решение задач на бесконечные произведения

**Задача 3077.** Исследовать бесконечное произведение на сходимость:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

*Решение:*

Заметим, что при $x=-n$, где $n\in\mathbb{N}$, один из членов бесконечного произведения равен 0. Значит, в этом случае бесконечное произведение расходится к 0.

Также заметим, что при $x=0$ все члены бесконечного произведения равны 1. Значит, в этом случае бесконечное произведение сходится к 1.

Далее рассмотрим случай $x\neq 0$ и $x\neq -n$, где $n\in\mathbb{N}$. Заметим, что при достаточно больших значениях $n$ значение выражения $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ будет положительно. Далее будем рассматривать такие достаточно большие значения $n$. Используя формулу Тейлора для логарифма с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем:

$$\ln p_n=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}=\frac{x}{n}-\frac{1}{2(1+\theta(n,x))^2}\cdot\frac{x^2}{n^2}-\frac{x}{n}=-\frac{1}{2(1+\theta(n,x))^2}\cdot\frac{x^2}{n^2},$$

где $\theta(n,x)$ лежит между 0 и $\dfrac{x}{n}$. Тогда $\ln p_n\sim-\dfrac{x^2}{2n^2}$. Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то и бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ сходится.

Таким образом, бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ сходится при всех значениях $x$. □

**Задача 3100.** Пусть $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (дзета-функция Римана), где $x>1$, и $p_n$ $(n=1,2,\ldots)$ – последовательные простые числа. Доказать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

*Решение:*

Так как $\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^x}}$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то $\left(1-\dfrac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$, где $q=\dfrac{1}{p_n^x}$. Тогда получаем:

$$P_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^x}\right)^{-1} \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{2^{kx}} + \ldots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{3^{kx}} + \ldots\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n^x} + \ldots + \frac{1}{p_n^{kx}} + \ldots\right).$$

Так как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия сходится абсолютно, то можно в выражении для $P_n(x)$ перемножать скобки и складывать слагаемые в произвольном порядке. Тогда получим: $P_n = \sum\limits_m \frac{1}{m^x}$, где $m = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, где $k_1$ – номер слагаемого в 1-й скобке с рядом из бесконечной геометрической прогрессии, $k_2$ – номер слагаемого во 2-й скобке, ..., $k_n$ – номер слагаемого в $n$-й скобке, которые участвовали в произведении, результат которого равен $\frac{1}{m^x}$.

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} > \sum\limits_m \frac{1}{m^x} > \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x}$, то есть $\zeta(x) > P_n(x) > \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x}$. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x} = \zeta(x)$, то при $n \to +\infty$ получаем: $\zeta(x) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) \geqslant \zeta(x)$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \zeta(x)$, то есть $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$. □

**Замечание 27.1.** Заметим, что при $x \leqslant 1$ ряд $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ расходится. Но и из решения выше видно, что $P_n(x) > \sum\limits_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^x}$. А значит, бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}$ при $x \leqslant 1$ тоже расходится.

**Задача 3102** (изменённая)**.** Пусть $a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + b_n,$$

где $\{b_n\}$ – такая последовательность, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно. Доказать, что $a_n \asymp \frac{1}{n^p}$.

*Указание:* рассмотреть

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p\right) = a_1 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^p.$$

*Решение:*

Так как $a_n n^p = a_n : \dfrac{1}{n^p}$, то если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n n^p \neq 0$, то $a_n \asymp \dfrac{1}{n^p}$. Значит, для решения задачи надо доказать, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^p$ сходится.

При достаточно больших значениях $k$ верно, что $\dfrac{p}{k} + b_k < 1$. Тогда для таких значений $k$, используя разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(1+\frac{p}{k}+b_k\right)^{-1} = 1 - \frac{p}{k} - b_k + \frac{1}{(1+\theta)^3}\cdot\left(\frac{p}{k}+b_k\right)^2,$$

где $\theta$ лежит между 0 и $\dfrac{p_k}{k} + b_k$. Тогда получаем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{p}{k} + c_k,$$

где $c_k = -b_k + \dfrac{1}{(1+\theta)^3}\cdot\left(\dfrac{p}{k}+b_k\right)^2$ – члены абсолютно сходящегося ряда.

Аналогично можно показать, что $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^p = 1+\dfrac{p}{k}+d_k$, где $d_k$ – члены абсолютно сходящегося ряда.

Тогда получаем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^p = \left(1-\frac{p}{k}+c_k\right)\left(1+\frac{p}{k}+d_k\right) = 1 - \frac{p^2}{k^2} + e_k,$$

где $e_k$ – члены абсолютно сходящегося ряда.

Таким образом, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^p = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$, где $\alpha_k = -\dfrac{p^2}{k^2} + e_k$. Так как ряды с членами $\alpha_k$ и с членами $\alpha_k^2$ сходятся, то по признаку сходимости из утверждения (26.3) бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^p$ сходится. □

**Утверждение 27.1** (Формула Валлиса)**.**

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\ldots = \frac{\pi}{2}. \qquad (27.1)$$

**Задача 3103.** С помощью формулы Валлиса доказать, что

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

*Решение:*

Введём обозначения

$$P_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} \quad \text{и} \quad \Pi_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}.$$

Заметим, что $\Pi_n = \dfrac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2\,(2n+1)}$. Значит, $\dfrac{1}{\sqrt{\Pi_n}} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\sqrt{2n+1}$.

По формуле Валлиса (27.1) имеем: $\Pi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\dfrac{1}{\sqrt{\Pi_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. Так как $P_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, то получаем:

$$P_n\cdot\sqrt{n} = P_n\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\Pi_n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Значит, $P_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. □

**Задача 3104.** Доказать, что выражение

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

имеет отличный от нуля предел $A$ при $n\to\infty$.

Вывести отсюда формулу Стирлинга

$$n! = A\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\cdot(1+\varepsilon_n)\,,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ и $A = \sqrt{2\pi}$.

*Решение:*

Так как $a_n = a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, то $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \neq 0$ тогда и только тогда, когда сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{(n-1)!e^{n-1}}{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}} = e\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} = e^{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2(1+\theta)^2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

где $\theta$ между 0 и $-\dfrac{1}{n}$. Тогда получаем:

$$1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}-\frac{n-\frac{1}{2}}{2n^2(1+\theta)^2}=\frac{n(1+\theta)^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2n^2(1+\theta)^2}=\frac{n\theta(2+\theta)+\frac{1}{2}}{2n^2(1+\theta)^2}.$$

Так как $n\theta$ между 0 и $-1$, то $\left|\dfrac{n\theta(2+\theta)+\frac{1}{2}}{2n^2(1+\theta)^2}\right|\asymp\dfrac{1}{n^2}$.

Таким образом, ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ сходится. Значит, сходится и бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Таким образом, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=A$. Тогда $\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=A(1+\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n$ – бесконечно малая последовательность. Отсюда получаем формулу Стирлинга в простейшем виде:

$$n!=A\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\cdot(1+\varepsilon_n)\,.$$

□

**Замечание 27.2.** С помощью формулы Валлиса (27.1) можно показать, что $A=\sqrt{2\pi}$.

**Утверждение 27.2** (Формула Стирлинга)**.**

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}},\tag{27.2}$$

*где* $\theta_n\in(0;\,1)$.

**Задача 3119.** Приближённо вычислить $C_{2n}^n$, если $n$ велико.

*Решение:*

Используя формулу Стирлинга (27.2), получаем:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n+\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{2\pi n\cdot(n)^{2n}\cdot e^{-2n+\frac{\theta_n}{6n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 2^{2n}\cdot e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}-\frac{\theta_n}{6n}}.$$

Так как $e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}-\frac{\theta_n}{6n}} = 1+o(1)$ при $n\to\infty$, то $C_{2n}^n \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$. □

**Замечание 27.3.** В треугольнике Паскаля строка с номером $2n$ выглядит так:

$$C_{2n}^0 \quad C_{2n}^1 \quad \ldots \quad C_{2n}^n \quad \ldots \quad C_{2n}^{2n-1} \quad C_{2n}^{2n}.$$

В этой строке всего $2n+1$ чисел, а их сумма равна $2^{2n}$. Тогда среднее значение чисел в строке равно $\dfrac{2^{2n}}{2n+1}$. Так как $C_{2n}^n \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, то число из середины строки является бесконечно большим относительно среднего значения чисел в строке при $n\to\infty$.

**Задача 3120** (б)**.** Пользуясь формулой Стирлинга, найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

*Решение:*

Используя формулу Стирлинга (27.2), получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot n\cdot e^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot e^{-1+\frac{\theta_n}{12n^2}}} \ominus$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{12n^2} = 0$, то получаем:

$$\ominus \frac{1}{1\cdot e^{-1}} = e.$$

□

**Задача 3105.** $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$ – гамма-функция.

а) Представить функцию $\Gamma(x)$ в виде бесконечного произведения.

б) (с исправленной опечаткой) Показать, что $\Gamma(x)$ имеет смысл для всех действительных $x$, не равных целому отрицательному числу или 0.

*Решение:*

а) Пусть $a_n = \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$, тогда получаем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n+1)}\cdot\frac{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{n!n^x} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x\cdot\frac{n+1}{x+n+1};$$

$$a_n = a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{x(x+1)}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\cdot\frac{2}{x+2}\right)\cdot\ldots\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\cdot\frac{n}{x+n}\right);$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{x(x+1)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\cdot\frac{k+1}{x+k+1}.$$

б) Заметим, что при $x\in\{0;\ -1;\ -2;\ \ldots\}$ гамма-функция не имеет смысла, так как происходит деление на 0. Далее рассмотрим другие значения $x$.

Бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\cdot\frac{n+1}{x+n+1}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\cdot\frac{n+1}{x+n+1}\right)$.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\cdot\frac{n+1}{x+n+1}\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\frac{n+1}{x+n+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{x+n+1}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty}O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ сходится, то также сходится и бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\cdot\frac{n+1}{x+n+1}$.

Таким образом, гамма-функция имеет смысл для всех действительных $x$, не равных целому отрицательному числу или 0. $\square$

# Семинар 28

## Первообразная и неопределённый интеграл

**Определение 28.1.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $I$. Тогда $F(x)$ – *первообразная для* $f(x)$ *на* $I$, если $F'(x) \equiv f(x)$ на $I$.

**Утверждение 28.1.** *Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $I$, то $F(x)+C$ – множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $I$, где $C$ – произвольная константа.*

**Определение 28.2.** $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C$ – *неопределённый интеграл для функции* $f(x)$ *на промежутке* $I$ – множество всех первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке.

**Определение 28.3.** $F(x)$ – *обобщённая первообразная для функции* $f(x)$ *на промежутке* $I$, если выполнены следующие условия:

1) $F \in C(I)$;
2) $\exists F'(x)$ на $I \setminus E$, где $E$ – конечное множество, причём $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I \setminus E$.

**Утверждение 28.2.** *Если $F(x)$ – обобщённая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $I$, то $F(x) + C$ – множество всех обобщённых первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $I$, где $C$ – произвольная константа.*

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

У такой функции не существует первообразной на $\mathbb{R}$. Действительно, если бы такая первообразная $F(x)$ существовала, то было бы верно, что

$$\lim_{x\to-0} F'(x) = \lim_{x\to-0} f(x) = -1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+0} F'(x) = \lim_{x\to+0} f(x) = 1,$$

но тогда $\nexists F'(0)$.

Тем не менее обобщённая первообразная $F(x)$ для $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ на $\mathbb{R}$ существует: $F(x) = |x|$. Действительно $\exists F'(x) = f(x)$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Замечание 28.1.** Можно ещё обобщить определение (28.3) обобщённой первообразной, если вместо конечного множества $E$ рассматривать счётное множество $E$.

## Таблица интегралов

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l}\arcsin x + C \\ -\arccos x + C\end{array}\right.$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C\end{array}\right.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

## Решение задач на неопределённые интегралы

**Утверждение 28.3.** *Если* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, *то* $\int f(t)\,dt = F(t) + C$.

**Утверждение 28.4.** *Если* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *то*

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

**Задача 1636.** Найти интеграл

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\cdot x^{\frac{3}{4}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{4}}\,dx - \int x^{-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$$

$\square$

**Задача 1642.** Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \arcsin x + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

$\square$

**Задача 1648.** Найти интеграл

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

*Решение:*

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}\,dx =$$
$$= \int \sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,dx = \int |\sin x-\cos x|\,dx \ominus$$

Подмодульное выражение отрицательно при $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right)$, равно нулю при $x = \frac{\pi}{4}$, положительно при $x \in \left(\frac{\pi}{4};\ 0\right]$.

$$x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right): \qquad \ominus \int (\cos x-\sin x)\,dx = \sin x+\cos x+C_1;$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{4};\ \pi\right]: \qquad \ominus \int (\sin x-\cos x)\,dx = -\cos x-\sin x+C_2;$$

$$x = \frac{\pi}{4}: \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+C_2;$$

$$C_2 = C_1+2\sqrt{2};$$

$$x \in [0;\ \pi]: \qquad \ominus \begin{cases} \sin x+\cos x+C_1, & x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right] \\ -\cos x-\sin x+2\sqrt{2}+C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{4};\ \pi\right] \end{cases}.$$

Найденная первообразная является первообразной в обычном смысле, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} F'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} F'(x) = 0.$ □

**Задача 1652.** Найти интеграл

$$\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \operatorname{th}^2 x\,dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

□

**Утверждение 28.5.** *Если* $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, *то* $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$

**Задача 1658.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{2-5x} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C.$$

□

**Задача 1667.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right) + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + C.$$

□

**Утверждение 28.6.** *Если* $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, *то* $\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt = F(g(t))+C.$

**Замечание 28.2.** Можно ввести обозначение $d(g(t)) \coloneqq g'(t)\,dt$.

**Задача 1674.** Найти интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}+C = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

□

**Задача 1676.** Найти интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{x\,dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{3-2x^2}\cdot(-4x)\,dx = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+C.$$

□

**Задача 1695.** Найти интеграл

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx = \frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

□

**Задача 1699.** Найти интеграл

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx = \frac{3}{2}\left(\sin x-\cos x\right)^{\frac{2}{3}}+C.$$

□

**Задача 1709.** Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C.$$

□

**Задача 1729.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

□

**Задача 1734.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} \ominus$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x-1)(x+2)};$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \end{cases};$$

$$\ominus \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

□

**Задача 1744.** Найти интеграл

$$\int \sin 3x \sin 5x\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \sin 3x\sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

□

**Задача 1763.** Найти интеграл

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\, dx.$$

*Решение:*

$$\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\, dx \circleddash$$

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\circleddash \int 2 \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x\, dx = \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + C.$$

$\square$

**Задача 1780.** Найти интеграл

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

*Решение:*

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx \circleddash$$

Замена: $x = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right);$

$$\circleddash \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{8} \sin t \cos t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{8} x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$\square$

**Задача 1785.** Найти интеграл

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx,$$

где $a, b > 0$.

*Указание:* применить подстановку $x - a = (b - a) \sin^2 t$.

*Решение:*

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx \ominus$$

Замена: $x-a=(b-a)\sin^2 t, \quad t\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right);$

$$b-x=(b-a)-(x-a)=(b-a)-(b-a)\sin^2 t=(b-a)\cos^2 t;$$

$$dx=d(x-a)=d\left((b-a)\sin^2 t\right)=(b-a)\cdot 2\sin t\cos t\,dt;$$

$$\ominus\ 2(b-a)^2\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{(b-a)^2}{2}\int \sin^2(2t)\,dt=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\left(\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\frac{1}{4}\sin\left(4\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)\right)+C.$$

$\square$

# Семинар 29

## Интегрирование по частям

**Утверждение 29.1** (Формула интегрирования по частям)**.**

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

**Замечание 29.1.** Если использовать обозначения $u'(x)\,dx \coloneqq du(x)$ и $v'(x)\,dx \coloneqq$ $\coloneqq dv(x)$, то можно переписать формулу интегрирования по частям в следующем виде:

$$\int v(x)\,du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)\,dv(x).$$

**Задача 1791.** Найти интеграл

$$\int \ln x\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

□

**Задача 1798.** Найти интеграл

$$\int x\cos x\,dx.$$

*Решение:*

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

□

**Задача 1828.** Найти интеграл

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx +$$

$$+ \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx - b\int e^{ax}\cos bx\,dx\right) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\cdot I;$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\cdot I = \frac{1}{a^2}\left(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx\right) + C_1 \quad \Big|\cdot \frac{a^2}{a^2+b^2};$$

$$I = \frac{a}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\sin bx + C.$$

*2-й способ:*

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \operatorname{Re}\left(\int e^{(a+ib)x}\,dx\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{a+ib}\cdot e^{(a+ib)x} + C_1\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\left(e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx\right)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} + C_1\right) = \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\cos bx}{a^2+b^2} + C.$$

*3-й способ:*

В задаче (1213) мы показали, что

$$\left(e^{ax}\cos(bx+c)\right)' = \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cos(bx+c+\varphi),$$

где $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда получаем:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot e^{ax}\cos(bx+c-\varphi)\right)' = e^{ax}\cos(bx+c).$$

Значит, получаем:

$$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot e^{ax}\cos(bx-\varphi) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot e^{ax}\left(\cos bx\cos\varphi + \sin bx\sin\varphi\right) + C =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\sin bx + C.$$

$\square$

## Таблица некоторых интегралов в более общем случае

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad (a \neq 0);$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \qquad (a > 0);$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2} + C \qquad (a > 0);$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0);$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C \qquad (a > 0).$$

## Интегрирование рациональных функций

**Определение 29.1.** $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – *рациональная функция*, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Если степень многочлена $P(x)$ не меньше чем степень многочлена $Q(x)$, то можно выполнить деление многочленов с остатком:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Интегрирование многочлена $T(x)$ не вызывает проблем. Осталось сформулировать алгоритм для интегрирования $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$.

Пусть степень многочлена $Q(x)$ равна $n$. Тогда многочлен $Q(x)$ имеет ровно $n$ комплексных корней с учётом кратности, тогда

$$Q(z) = b_0(z-z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_q)^{k_q},$$

где $z_1, \ldots, z_q \in \mathbb{C}$ – различные числа, $k_1, \ldots, k_q \in \mathbb{N}$ – кратности корней $z_1, \ldots, z_q$ соответственно, причём $k_1 + \ldots + k_q = n$.

Рассмотрим случай, когда $b_0 = 1$ и $k_1 = \ldots = k_n = 1$. Тогда получаем:

$$\frac{P_1(z)}{Q(z)} = \frac{P_1(z)}{(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)}.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа.

Для этого построим многочлен

$$\frac{(z - z_2)(z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \cdot \ldots \cdot (z_1 - z_n)},$$

который принимает значение 1 при $z = z_1$ и значение 0 при $z = z_2, z_3, \ldots, z_n$.

Аналогично можно построить многочлен

$$\frac{(z - z_1)(z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \cdot \ldots \cdot (z_2 - z_n)},$$

который принимает значение 1 при $z = z_2$ и значение 0 при $z = z_1, z_3, \ldots, z_n$.

И так далее.

Теперь мы можем умножать построенные выше многочлены на нужные нам числовые значения и складывать, тогда мы получим многочлен, который принимает нужные нам числовые значения в точках $z = z_1, z_2, \ldots, z_n$. Причём такой многочлен единственен, так как его степень меньше $n$ и он принимает заданные значения в $n$ различных точках. Действительно, если бы таких многочленов было 2, то вычитанием из одного многочлена другого мы бы получили такой многочлен, степень которого меньше $n$ и который имеет $n$ различных корней, а значит, этот многочлен является тождественным нулём.

Тогда мы можем расписать многочлен $P_1(z)$ через построенные выше многочлены:

$$\frac{P_1(z)}{Q(z)} = \frac{P_1(z_1) \cdot \dfrac{(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)}{(z_1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (z_1 - z_n)} + \ldots + P_1(z_n) \cdot \dfrac{(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1})}{(z_n - z_1) \cdot \ldots \cdot (z_n - z_{n-1})}}{(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)} =$$

$$= \frac{P_1(z_1)}{(z_1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (z_1 - z_n)} \cdot \frac{1}{z - z_1} + \ldots + \frac{P(z_n)}{(z_n - z_1) \cdot \ldots \cdot (z_n - z_{n-1})} \cdot \frac{1}{z - z_n} =$$

$$= \frac{P_1(z_1)}{Q'(z_1)} \cdot \frac{1}{z - z_1} + \ldots + \frac{P(z_n)}{Q'(z_n)} \cdot \frac{1}{z - z_n}$$

**Задача 1837** (изменённая)**.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} \ominus$$

$$P_1(x) = 1; \qquad Q(x) = (x-1)(x+2); \qquad Q'(x) = 2x+1;$$

$$\ominus \int \left( \frac{P_1(1)}{Q(1)} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{P_1(-2)}{Q'(-2)} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

□

**Задача 1867.** Найти интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

*Решение:*

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \ominus$$

$$P_1(x) = x; \qquad Q(x) = (x+1)(x+2)(x+3);$$

$$Q'(x) = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = 3x^2 + 12x + 11;$$

$$\ominus \int \left( \frac{P_1(-1)}{Q'(-1)} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{P_1(-2)}{Q'(-2)} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{P_1(-3)}{Q'(-3)} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C.$$

□

**Задача 1870.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

*Решение:*

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \frac{(x^4+5x^2+4)-(5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \left(1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right)dx \circleddash$$

Замена в дроби: $t = x^2$;

$P_1(t) = 5t+4; \qquad Q(t) = t^2+5t+4 = (t+1)(t+4); \qquad Q'(t) = 2t+5;$

$$\frac{5t+4}{t^2+5t+4} = \frac{P_1(-1)}{Q'(-1)}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{P_1(-4)}{Q'(-4)}\cdot\frac{1}{t+4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{t+4};$$

$$\circleddash \int \left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)dx = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$$

$$= x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

$\square$

**Задача 1884.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

*Решение:*

*1-й способ:*

Используя формулу для суммы квадратов

$$a^2+b^2 = a^2+2ab+b^2-2ab = (a+b)^2 - \left(\sqrt{2ab}\right)^2 = \left(a+b+\sqrt{2ab}\right)\left(a+b-\sqrt{2ab}\right),$$

получим:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+1+\sqrt{2x^2}\right)\left(x^2+1-\sqrt{2x^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)} = \ldots$$

Дальше, используя теорему о разложении на простейшие дроби, можно разложить дробь, являющуюся подынтегральным выражением, и найти интеграл.

*2-й способ:*

$$\int \frac{dx}{x^4+1} \circleddash$$

$P_1(x) = 1; \qquad Q(x) = x^4+1; \qquad Q'(x) = 4x^3;$

Корни уравнения $Q(x) = 0$: $\quad e^{i\frac{\pi}{4}},\quad e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad e^{-i\frac{3\pi}{4}},\quad e^{-i\frac{\pi}{4}};$

$$Q'\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}; \quad Q'\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad Q'\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}; \quad Q'\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}};$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{-i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{-i\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}\cdot\frac{1}{x-e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}};$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx = \ldots$$

$\square$

Теперь обсудим, как интегрировать рациональные функции в случае наличия кратных корней у знаменателя. Используя теорему о разложении на простейшие дроби, получаем:

$$\frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_j)^{k_j}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \ldots .$$

В записанном разложении на простейшие дроби интегралы от всех дробей, кроме дробей вида $\dfrac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}$, являются табличными интегралами. Значит, осталось построить алгоритм нахождения интеграла следующего вида:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,dx,$$

где квадратичный трёхчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней.

Сделаем замену $t = x + \dfrac{p}{2}$. Тогда $x^2+px+q = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + a^2 = t^2 + a^2$, где $a^2$ – некоторая положительная константа. Получим интеграл следующего вида:

$$\int \frac{bt+c}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Для расчёта интеграла $\displaystyle\int \frac{bt}{(t^2+a^2)^k}\,dt$ сделаем замену $w = t^2+a^2$. Тогда $dw = 2t\,dt$, и получаем:

$$\int \frac{bt}{(t^2+a^2)^k}\,dt = \frac{b}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{b}{2}\int \frac{dw}{w^k}.$$

Это табличный интеграл.

Осталось построить алгоритм нахождения интеграла следующего вида:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Выведем для этого рекуррентное соотношение:

$$I_k = \int \frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt = a^2\cdot I_{k+1} + \int \frac{t}{(t^2+a^2)^{k+1}}\cdot t\,dt =$$

$$= a^2\cdot I_{k+1} - \frac{1}{2k}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+a^2)^k}\right) = a^2\cdot I_{k+1} - \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{1}{2k}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= a^2\cdot I_{k+1} - \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + \frac{1}{2k}\cdot I_k;$$

Получаем искомое рекуррентное соотношение:

$$I_{k+1} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-1}{2k}\cdot I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k}\right) = \frac{1}{2ka^2}\left((2k-1)\cdot I_k + \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

Так как $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$ – табличный интеграл, то по рекуррентной формуле, полученной выше, можно посчитать $I_2$, затем $I_3$ и так далее.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ