МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ. ЧАСТЬ 3

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ЕФАНОВА АНТОНА АЛЕКСАНДРОВИЧА

Содержание

1. Интегралы, зависящие от параметра

1.1. Вступление

Тема интегралов, зависящих от параметра, аналогична теме функциональных рядов, она практически дублирована. Но на практике кажется, что интегралы выглядят сложнее, чем ряды. Все дело в используемой и устоявшейся терминологии. Для рядов используется "прямое" обозначение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Здесь сходимость подразумевается равномерная. Для интегралов "сходимость" скрыта в самом обозначении

$$F(y) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^{x} f(x,y)dx.$$

Сходимость также равномерная. Функция $F(y)$ называется интегралом, зависящим от параметра. То есть мы рассматриваем семейство функций (верхний предел интеграла переменный), заданных следующим специальным образом

$$F(x,y) = \int\limits_a^{x} f(x,y)dx.$$

И хотим изучать как свойства функции $f(x,y)$ порождают свойства функции $F(y)$, то есть что можно сказать о функции F гарантированно. Данная тема имеет массу приложений. Одно из них - вычисление интегралов.

1.2. Равномерная сходимость и супремум-критерий

Определение 1. *Интеграл сходится равномерно (семейство интегралов с переменным верхним пределом) к несобственному интегралу, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A : \forall B > A \Rightarrow \left| \int\limits_a^{B} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$\int\limits_a^{x} f(x,y)dx \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Данное определение можно переписать в следующем виде, пользуясь свойствами интегралов:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall B > A \Rightarrow \left| \int\limits_B^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Утверждение 1 (Супремум-критерий)**.** *Равномерная сходимость интеграла равносильна условию*

$$\sup_{[a,b]} \left| \int\limits_B^{+\infty} f(x,y)dx \right| \xrightarrow[B\to+\infty]{} 0.$$

На практике супремум-критерий для интегралов проще, чем для функциональных рядов, так как вычислить явно ряд очень трудно, а вот интегралы легче, так как выразить его в элементарных функций удается чаще.

Далее, нужно продемонстрировать работу введенных понятий. Проводя аналогию, вспомним, что в рядах мы начинали с изучения ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Доказывалось, что он сходится равномерно внутри интервала и сходится неравномерно на интервале. Аналог в интегралах:

$$\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx, \quad y \in (0,+\infty)\,.$$

Воспользуемся супремум-критерием, найдя интеграл явно:

$$\sup_{y\in Y} \left| \int\limits_B^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = \sup_{y\in Y} \left| e^{-By} \right|$$

Если Y - отрезок $[a,b]$ внутри интервала $(0,+\infty)$, то супремум равен e^{-Ba} и он, очевидно, стремится к нулю в при $B \to +\infty$. Если мы рассматриваем в качестве Y весь луч, то супремум равен 1 и к нулю не стремится.

Можно попытаться решить эту задачу по-другому, сделав замену переменной в исходном интеграле $t = xy$ и тогда и интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t}dt.$$

Не трудно проверить, что он сходится равномерно к 1. Это, казалось бы, противоречит тому, что мы только что получили. Однако, здесь допущена ошибка из-за терминологии. Параметр y исчез, но на самом деле, замену нужно делать в семействе функций:

$$\int\limits_0^x ye^{-xy}dx = \int\limits_0^{xy} e^{-t}dt.$$

И тут уже параметр сохранился и данное семейство будет по-прежнему сходиться неравномерно на интервале $(0, +\infty)$.

Казалось бы, что избежать ошибок в таких ситуациях поможет запрет в использовании замены переменной, содержащей параметр. Однако, это неправильно. В некоторые ситуациях эти замены даже нужно сделать. И тут уже видно первое отличие от рядов: в рядах замены не сделаешь. Более того, интегралы обычно вычисляются явно, даже остатки, а вот ряды - нет. "Хвост" ряда практически никогда не вычисляется явно. Даже в ситуациях, когда интеграл не выражается через элементарные функции, можно легко использовать оценки, чего не сделаешь для рядов. Последняя разница является ключевой в использовании супремум-критерия для рядов: супремум критерий хорошо работает для рассмотренного ряда и, возможно все, в остальных случаях это не удается сделать так легко, как в интегралах. Для наглядности рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y}e^{-x^2y}dx, \quad y \in (0, +\infty).$$

Рассмотрим остаток и сделаем в нем замену переменной $t = \sqrt{y}x$:

$$\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{y}e^{-x^2y}dx = \int\limits_{B\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-t^2}dx.$$

Запишем супремум-критерий:

$$\lim_{B\to+\infty} \sup_{y\in Y} \left| \int\limits_{B\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-t^2}dx \right|$$

Теперь заметим, что подинтегральная функция положительна, а значит интеграл тем больше, чем шире отрезок интегрирования, а значит супремум достигается при наименьшем значении нижнего предела $B\sqrt{y}$. Если теперь множество Y отделено от нуля, то $B\sqrt{y_{min}} \neq 0$ и, следовательно, при $B \to +\infty$ стремится к $+\infty$. Из последнего следует, что предел супремума равен 0 (если обозначить первообразную через $F(t)$, то интеграл равен $F(+\infty) - F\left(B\sqrt{y}\right) \to F(+\infty) - F(+\infty) = 0$).

Если же Y не отделено от нуля, то супремум достигается при $y = 0$, тогда число $F(+\infty) - F(0)$ положительно (в силу свойства интеграла от неотрицательной функции) и не содержит B. Таким образом, равномерной сходимости на луче нет.

В качестве задачи для самостоятельного решения приведем следующий важный интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx, \quad y \in (0,+\infty)\,.$$

1.3. Критерий Коши

Из теории функциональных рядов будет рассматривать в качестве эталона ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

Для доказательства неравномерной сходимости на всем интервале потребуется критерий Коши. Посмотрим на аналогию в интегралах.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-yx}}{x}dx, \quad y \in (0,+\infty)\,.$$

Будем доказывать неравномерную сходимость с помощью критерия Коши, то есть требуется доказать, что на некотором промежутке интегрирования и при некотором значении параметра интеграл принимает достаточно большое значение. Рассмотрим для это интеграл

$$\int\limits_A^B \frac{e^{-yx}}{x}dx, \quad 1 \leqslant A < B < +\infty.$$

Положим $B = 2A$ и $y = 1/2A$, тогда имеем $e^{-xy} \geqslant e^{-2Ay} = 1/e$ и

$$\int\limits_A^B \frac{e^{-yx}}{x}dx \geqslant \int\limits_A^{2A} \frac{1/e}{x}dx = \left.\frac{\ln x}{e}\right|_A^{2A} = \frac{\ln 2}{e}.$$

Таким образом, из критерия Коши следует отсутствие равномерной сходимости интеграла. Предъявим теперь более простое решение с использованием замены переменной. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{e^{-yx}}{x}dx.$$

Сделаем замену переменной $t = yx$:

$$\int\limits_{By}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Если построить такие же рассуждения (подинтегральная функция положительна), что и в предыдущем рассмотренном интеграле, то получим:

$$\sup_{y>0} \int\limits_{By}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = +\infty.$$

Таким образом, получен тот же результат, но более простым методом.

1.4. Признак Дирихле и преобразование Абеля

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Мы знаем, что данный ряд сходится равномерно внутри интервала и не сходится равномерно на интервале. Доказательство этого факта использует более тонкие признаки сходимости (Абеля и Дирихле) внутри интервала и критерий Коши на интервале, причем последнее является сложной задачей.

Теперь рассмотрим аналогичный интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx, \quad y \in (0, +\infty).$$

Исследовать на равномерную сходимость этот интеграл хоть и не простая задача, но намного проще, чем аналогичная задача для рядов.

Докажем, что интеграл сходится равномерно внутри интервала с помощью признака Дирихле. Пусть $y \geqslant \delta > 0$. Тогда имеем равномерно ограниченную первообразную для функции $\sin yx$:

$$\left| \int\limits_{0}^{B} \sin yx dx \right| = \left| \frac{\cos yx}{y} \Big|_{0}^{B} \right| \leqslant \frac{2}{y} \leqslant \frac{2}{\delta}.$$

Посчитать сумму синусов в случае рядов куда труднее (нужно знать определенные формулы тригонометрии). Эту задачу можно решить еще проще, если вспомнить, что признак Дирихле это частный случай преобразования Абеля (для интегралов это просто интегрирование по частям):

$$\int\limits_{1}^{x} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{1}{y} \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{x} d(-\cos yx) = \frac{1}{y} \left(-\frac{\cos yx}{x} \Big|_{1}^{x} - \frac{1}{y} \int\limits_{1}^{x} \frac{\cos yx}{x^2} dx \right).$$

То есть, преобразование Абеля служит "ускорителем" сходимости, так как последний интеграл уже сходится по признаку Вейерштрасса, а $1/y$ оценивается сверху как $1/\delta$.

Теперь перейдем ко всему интервалу $(0, 2\pi)$. Без критерия Коши никак не обойтись. Рассмотрим интеграл

$$\int_A^B \frac{\sin yx}{x} dx.$$

Будем подбирать наши значения так, чтобы $B = 2A$ и $yx \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. То есть должны быть выполнены условия $Ay \geqslant \frac{\pi}{6}$ и $2Ay \leqslant \frac{5\pi}{6}$. Очевидно, что эти требования непротиворечивы. Положим $y = \pi/4A$. Тогда интеграл оценивается снизу следующим образом:

$$\int_A^B \frac{\sin yx}{x} dx \geqslant \frac{1}{2} \int_A^{2A} \frac{1}{x} dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

Таким образом, из критерия Коши следует отсутствие равномерной сходимости на интервале.

Теперь рассмотрим два интерала, аналоги которых в функциональных рядах вряд ли можно проанализировать быстро. Рассмотрим два интеграла:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin yx}{x \ln x} dx, \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos yx}{x \ln x} dx, \quad y \in (0, +\infty).$$

Аналогичный ряд:

$$\sum_{n=10} \frac{\sin nx}{n \ln n}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Доказать, что такой ряд сходится равномерно - очень тяжелая задача. А вот для интегралов это так не выглядит. Применим критерий Коши. Рассмотрим интеграл

$$\int_A^B \frac{dx}{x \ln x}$$

и положим $B = A^2$, тогда получим

$$\int_A^B \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_A^{A^2} = \ln 2.$$

То есть на очень большом отрезке получается всего лишь $\ln 2$. Для тригонометрии будем снова (как и в предыдущей задаче) требовать, что синус сильно не "прыгал". Для этого потребуем $yA \geqslant \pi/6$ и $yA^2 \leqslant 5\pi/6$. Очевидно, что выбрать y с такими условиями невозможно, так как для больших значений A какое-либо из неравенств точно не выполнится. То есть тот факт, что с помощью критерия Коши не получится доказать равномерную сходимость, тривиален по сравнению с рядами.

Простое решение дает признак Дирихле. Введем две функции

$$a(x,y)=\int\limits_0^x \frac{\sin xy}{x}dx, \qquad b(x)=\frac{1}{\ln x}.$$

Функция $b(x)$ монотонно убывает к нулю (и равномерно, так как не зависит от y). Поэтому нужно доказать, что функция $a(x,y)$ равномерно ограничена, то есть нет интерференции. Сделаем замену переменной $t=xy$:

$$a(x,y)=\int\limits_0^x \frac{\sin xy}{x}dx=\int\limits_0^{xy} \frac{\sin t}{t}dt.$$

Последнее есть интеграл с переменным верхним пределом. Нужно просто посчитать производную и исследовать на вопрос максимума и минимума. Таким образом, ограниченность очевидна. Интеграл с синусом сходится равномерно.

Интеграл с косинусом проще, так как у косинуса таких проблем как у синуса с интерфернцией нет: чем меньше y, тем больше косинус и тем хуже интерференция. Поэтому будет достаточно в критерии Коши взять y порядка $1/A^2$. Поэтому интеграл сходится неравномерно.

1.5. Задачи повышенной сложности.

Некоторые задачи требуют более тонкого и детального исследования. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-y(x-y)^2}dx, \quad y\in[1,+\infty).$$

Сложность этого интеграла заключается в том, что зависимость от параметра не такая простая, как была ранее. Поэтому замену делать будет сделать не так просто. Если попытаться применить признак Вейерштрасса, то ничего хорошего мы не получим. Когда признаки не получается применить, нужно возвращаться или к супремум-критерию или критерию Коши. Применим супремум-критерий. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_B^{+\infty} e^{-y(x-y)^2}dx.$$

Сделаем линейную замену переменной $t = \sqrt{y}\,(x-y)$:

$$\int\limits_{B}^{+\infty} e^{-y(x-y)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int\limits_{\sqrt{y}(B-y)}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Если y окажется очень большим, то он может нижний предел "утащить" не то что до нуля, а даже до $-\infty$, но тогда функция $1/\sqrt{y}$ окажется маленькой. А если взять y малым, то множитель $1/\sqrt{y}$ будет большим, а нижний предел интегрирования не очень. То есть нижний предел интегрирования и указанный множитель создают сложность в исследовании. Чтобы избавиться от этого, применим следующий "трюк разобьем промежуток $[1,+\infty]$ на два: $[1, y(B)]$ и $[y(B), +\infty]$, где $y(B)$ будет подобрано далее (чтобы не путаться, можно считать, что $y(B)$ некоторая константа A никак несвязанная с y). И на каждом из этих промежутков оценим супремум.

На первом промежутке множитель $1/\sqrt{y}$ не превосходит 1 (этот множитель здесь "не помощник"). Так как подинтегральная функция положительна, то сам интерал тем больше, чем меньше нижний предел интегрирования, то есть $(B-y)\sqrt{y} \to \min$. Нетрудно проверить, что минимум достигается в одном из концов рассматриваемого промежутка. Ясно, что так как мы выбираем $y(B)$, то мы можем потребовать, чтобы минимум обязатально достигался в правом конце, то есть при $y = y(B)$. Таким образом, супремум на первом промежутке не превосходит

$$\int\limits_{(B-y(B))\sqrt{y(B)}}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Если здесь брать $y(B)$ меньше, чем B, то тут все в порядке (если взять, например, $3B/2$, то при $B \to +\infty$ левый предел интегрирования уйдет в $-\infty$, чего мы пытаемся избежать). Например, можно взять $y(B) = B/2$. Предыдущий анализ минимума от этого не пострадает, так как можно считать, что B сколько угодно большое. Таким образом, нижний предел интегрирования при таком выборе $y(B)$ стремится к $+\infty$, а сам интеграл к нулю.

На втором промежутке интеграл тем больше, чем меньше нижний предел интегрирования. Ясно, что минимум "достигается" при $y \to +\infty$. То есть интеграл оценивается сверхну интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Последний интеграл есть некоторое число (не обязательно помнить, что это интеграл Эйлера-Пуассона и равен он $\sqrt{\pi}$; важно лишь помнить, что из признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость).

В роли "помощника" теперь выступает вномжитель $1/\sqrt{y}$, так как он не превосходит $1/\sqrt{y(B)}$. Поэтому достаточно выбрать $y(B)$ таким, чтобы $y(B) \to +\infty$ при $B \to +\infty$. Учитывая первый промежуток, положим $y(B) = B/2$. Таким образом, каждый из супремумов стремится к нулю, а значит супремум на всем промежутке $[1, +\infty]$ также стремится к нулю.

В этой задаче выбор $y(B)$ оказался простым, но это далеко не всегда так.

Рассмотрим еще один интеграл:

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\sin\left(y\sqrt{x^2+1}\right)}{x} dx, \quad y \in [1, 2]\,.$$

Признак Дирихле здесь неприменим, так как подсчет интеграла от такого синуса трудоемок (если это вообще возможно). Можно заметить, $\sqrt{x^2+1}$ при больших значениях x похож на x. Отсюда появляется идея представить данную функцию в виде суммы двух других, одна из которых более просто устроена, а другая - мала. Представим ее так:

$$\frac{\sin\left(y\sqrt{x^2+1}\right)}{x} = \frac{\sin(xy)}{x} + \frac{\sin\left(y\sqrt{x^2+1}\right) - \sin(xy)}{x}.$$

С первой функцией мы уже работали ранее, ее равномерная сходимость на отрезке $[1, 2]$, очевидно следует из признака Дирихле. Остается разобраться со второй функцией. Напишем следующие оценки, используя тот факт, что $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$:

$$\left|\frac{\sin\left(y\sqrt{x^2+1}\right) - \sin(xy)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{y\sqrt{x^2+1} - xy}{x}\right| = \left|\frac{y\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{x}\right| =$$

$$= \left|\frac{y}{x\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}\right| < \frac{y}{2x^2} \leqslant \frac{2}{2x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Теперь равномерная сходимость интеграла от второй функции следует из признака Вейерштрасса.

Конечно, есть и другое решение, связанное с той же заменной переменной, но здесь показателен сам прием выделения "части" части и "маленькой".

Таким образом, главные выводы следующие: интегралы проще, чем ряды; делать замены можно и нужно; бывает, что есть возможность выделения главной части, более просто устроенной, и малой.

2. Ряды Фурье

2.1. Тригонометрический многочлен

Рассмотрим обыкновенный многочлен от двух переменных степени $n : P_n(t, s)$. Подставим $t = \sin x, s = \cos x$. Тогда алгебраический многочлен перейдет в тригонометрический многочлен (по определению). Его особенность заключается в том, что, если применить классические формулы тригонометрии понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$
$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)\right),$$

то многочлен приводится к многочлену первой степени

$$P_{2n}(t, s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

являющимся линейной комбинацией синусов и косинусов соответствующих углов.

Пример:

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} =$$
$$= \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

В связи с такой простой структурой тригонометрических многочленов, их легко изучать.

Теперь рассмотрим множество тригонометрических многочленов конечной размерности (степени не выше, чем n). Ясно, что это векторное пространство. Введем на нем скалярное произведение следующим образом:

$$\langle P, Q\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)Q(x)dx.$$

Относительно такого скалярного произведения получаем, что система

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx\right\}_{k=1}^{n}$$

является ортогональной (почти ортонормирована, просто так сложилось ставить $\frac{1}{2}$, удобно). Конечно, студентам следует это проверить.

Теперь можно говорить о тригонометрическом ряде, то есть рассматривать бесконечную систему

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx\right\}_{k=1}^{\infty}$$

и соответствующий ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Еще на этапе тригонометрического многочлена можно указать формулы, с помощью которых восстанавливаются коэффициенты a_k и b_k. Это возможно в силу ортогональности указанной системы функций (нужно скалярно умножить левую и правую часть на соответствующую функцию из базисной системы). Проделаем эту процедура для ряда, умножив, например, на $\cos 3x$:

$$\left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \cos 3x \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \cos 3x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \cos 3x + b_k \sin kx \cos 3x \right) dx.$$

Ясно, что далее нужно иметь возможность интегрировать ряд почленно. А для этого нужны какие-то специальные теоремы. Предлагается не сильно углубляться в такие вопросы, а знать достаточные условия для почленного интегрирования. Таким условием является равномерная сходимость такого ряда. В данном случае легко предъявить мажоранту:

$$|a_k \cos kx \cos 3x| \leqslant |a_k|\,, \quad |b_k \sin kx \cos 3x| \leqslant |b_k|\,.$$

Поэтому, если ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

сходится, то применяем признак Вейерштрасса.

Теперь мы интегрируем почленно и получаем одно единственное ненулевое слагаемое при $k = 3$ с косинусом:

$$\frac{1}{\pi} a_3 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 3x \ dx = \frac{1}{\pi} a_3 \pi = a_3.$$

Обозначим исходную сумму через $f(x)$. Тогда заключаем:

$$\langle f(x), \cos 3x \rangle = a_3 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 3x \ dx.$$

Оказывается, что условие сходимости ряда

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

является не только достаточным, но и необходимым. Но этого можно не касаться. Просто рассматриваем некоторый класс тригонометрических многочленов. Таким образом, тригонометрические ряды являются аналогом тригонометрических многочленов, коэффициенты которых вычисляются по соответствующим формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx.$$

2.2. Ряд Фурье

Теперь, для функций, все "выворачивается наизнанку". Пусть мы рассматриваем некоторую функцию $f(x)$. Будем требовать от нее интегрируемость по Риману, а также интегрируемость ее квадрата. То есть рассматриваем пространство интегрируемых функций $R^2[-\pi,\pi]$, где степень 2 означает, что пространство наделено скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx, \quad f, g \in R^2[-\pi,\pi].$$

Это пространство бесконечномерно. Из заданного скалярного произведения следует корректная определенность следующих интегралов:

$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx.$$

Эти формулы называются формулами Фурье. Пока никакого тригонометрического ряда нет. Он попросту вводится: функции f сопоставляется следующий ряд

$$f \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx.$$

Конечно, возникает вопрос о связи между функцией и сопоставляемым ей рядом. В анализе нас интересует поточечное равенство, сходимость обычная или равномерная. В предыдущем разделе мы фактически доказали следующую теорему. Функция $f(x)$ совпадает поточечно со своим рядом Фурье при условии абсолютной сходимости ряда из коэффициентов:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty.$$

В данном случае ряд Фурье совпадает с тригонометрическим рядом. Однако, разница здесь более тонкая. Здесь уместно провести аналогию со степенными рядами.

Если функция $f(x)$ задавалась суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k,$$

то коэффициенты c_k определяются формулами Тейлора. И тогда ряд Тейлора и степенной ряд это синонимы.

В случае с рядом Фурье это не так. Тригонометрический ряд может всюду сходиться и не быть рядом Фурье, а может быть рядом Фурье и сходиться "куда-то не туда". Однако, зачастую для "хороших" функций ряд Фурье сходится абсолютно и, следовательно, совпадает с тригонометрическим рядом. В тех ситуациях, где коэффициенты "медленно" стремятся к нулю, нужно, чтобы появилось достаточное условие.

Для практических задач достаточно следующего класса функций. Пусть отрезок $[-\pi, \pi]$ разбивается на конечное объединение неперекрывающихся отрезков:

$$[-\pi, \pi] = \cup [t_i, t_{i+1}].$$

Потребуем, чтобы функция на каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) была гладкой, на концах доопределяем по непрерывности (односторонние пределы должны существовать). В таком случае производная является непрерывной и в концевых точках. Говорят, что функция гладкая на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ В точках разрыва доопределяем ее средним арифметическим

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Класс таких периодических кусочно-гладких функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ обозначается $KC[-\pi, \pi]$.

Теперь сформулируем теорему. Пусть $f \in KC[-\pi, \pi]$, тогда соответствующий ряд Фурье сходится всюду и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Далее возникает вопрос о том, как этот ряд сходится. Рассмотрим на примере.

Пусть $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Очевидно, что $f \in KC[-\pi, \pi]$. Так как речь о периодической функции, то мы дублируем картину на всю прямую (см. рис.1). Подсчитаем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int -\pi^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\ dx = 0 \ \text{ в силу нечетности,}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x) \cos kx\ dx = 0 \ \text{ в силу нечетности,}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\sin kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin kx\ dx = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{при } k = 2l, \\ \frac{4}{\pi(2l+1)}, \text{при } k = 2l+1, l \geqslant 0. \end{cases}$$

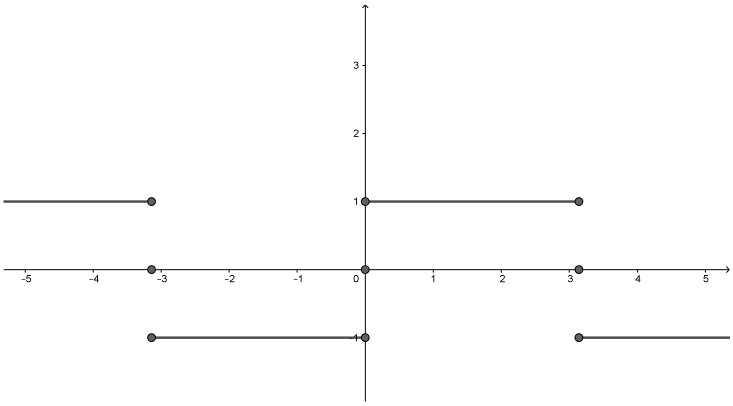

Рис. 1.

Таким образом,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Этот ряд является неабсолютно сходящимся, так как функция $\operatorname{sgn}(x)$ разрывна, а абсолютно сходящиеся ряды не могут давать в сумме разрывные функции. Рассмотрим вопрос о поведении частичных сумм. Рассмотрим

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Если N очень большой, то в силу равномерной сходимости внутри $[0,\pi]$ сумма $S_N(x)$ будет близка к $\operatorname{sgn}(x)$, то есть похожа на константу 1 (там будут колебания около отрезка, так как это тригонометрический полином). Что будет происходить в окрестности точки разрыва? Это неочевидный вопрос (ответил на него Гиббс). Найдем на что похож ближайший экстремум вблизи нуля. Вычислим производную:

$$S_N'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin(2Nx)}{2\sin x}.$$

Легко видеть, что все экстремумы являются нулями $\sin(2Nx)$, то есть $x = \pi k/2N, k \in \mathbb{Z}$, а ближайший $x = \pi/2N$. Вычислим значение функции в этой точке:

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N}\right)}{2k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N}\right)}{\frac{\pi(2k+1)}{2N}}\frac{1}{N}$$

Это интегральная сумма для функции $\sin x/x$ на отрезке $[0,1]$. Тогда при достаточно большом N эта сумма будет мало отличаться от числа

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx.$$

Эта константа называется константой Гиббса и она больше 1, тем самым в районе нуля будет более сильная осцилляция в константу Гиббса раз, чем скачок.

2.3. Приложения

В качестве приложения рядов Фурье можно находить некоторые неочевидные суммы. Например, положим в предыдущем примере $x=\pi/2$. Тогда имеем:

$$1=\operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Последнее можно использовать для посчета π.

Еще одно красивое приложение получается из следующих соображений. Выпишем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx.$$

Это есть разложение вектора f по почти ортогональному базису (по компоненте a_0 не нормировки). Поэтому можно рассмотреть теорему Пифагора (конечно, это серьезная теорема, но интуитивно это понятно; все теоретические тонкости опускаем):

$$\langle f,f\rangle=||f||^2=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2+b_k^2\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2+b_k^2.$$

Полученная формула называется равенством Парсеваля. Применим эту формулу к рассмотренному примеру.

$$f^2(x)=(\operatorname{sgn}(x))^2=1\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2.$$

С другой стороны, воспользуемся разложение в ряд Фурье:

$$a_0=0,\quad b_k=0,\quad a_k^2=\frac{16}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Таким образом, получаем:

$$2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Равенство Парсеваля позволяет вычислять разного рода суммы. Из этого равенства также следует качественный результат. Так как функция $f(x)$ из класса $R^2[-\pi,\pi]$, то интеграл стоящий слева конечен, а значит и сходится ряд, стоящий справа (ряд из квадратов коэффициентов).

Отсюда можно получить качественные результаты. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}.$$

Это тригонометрический ряд, всюду сходящийся, но не является рядом Фурье, так как ряд из квадратов коэффициентов

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}$$

расходится. Отсюда следует, что функция $f(x)$ не может быть интегрируема по Риману, а значит, коэффициенты Фурье не вычисляются. На самом деле эта функция не будет интегрируема даже по Лебегу, но это более тонкий вопрос, выходящий за рамки курса. Этот пример показывает, что ряды Фурье вещь более сложная, чем степенные ряды, но с другой стороны и функции можно представлять не только бесконечно дифференцируемые, но и разрывные.

Рассмотрим еще один важный пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на отрезке $[0,\pi]$. Хотим разложить только по синусам. Поэтому мы должны продолжить функцию на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом. Таким образом, рассматриваем функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0,\pi), \\ \frac{-\pi - x}{2}, & x \in (-\pi, 0); \end{cases}$$

и ее периодизацию (рис.2). Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0, \quad \text{в силу нечетности;}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx = 0, \quad \text{в силу нечетности;}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx\, dx = \int_{0}^{\pi} \sin kx\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin kx\, dx =$$

$$= -\left.\frac{\cos kx}{k}\right|_0^\pi + \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\cos kx}{k}\right|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos kx\ dx\right) = \frac{1-(-1)^k}{k} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{\pi k} - 0\right) = \frac{1}{k}.$$

Таким образом, имеем разложение по синусам:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}, \quad x \in (0, \pi)\,.$$

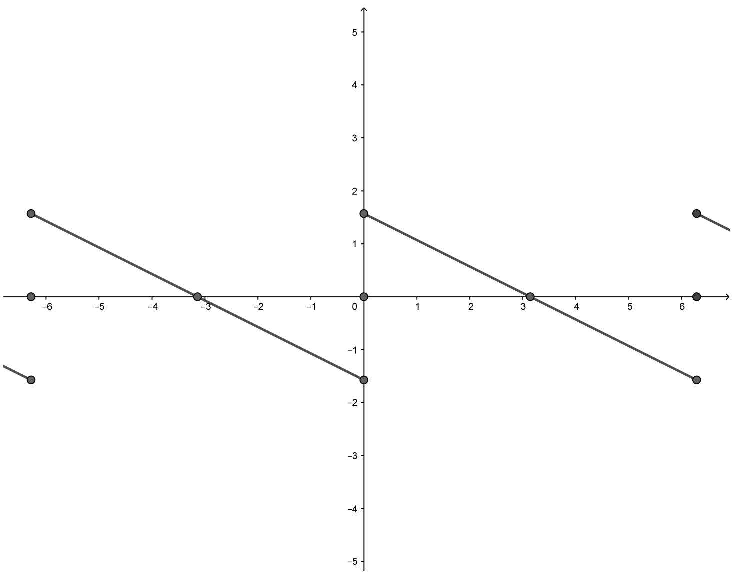

Рис. 2.

Этот ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ дифференцировать нельзя. Применим для этой функции равенство Парсеваля на $(-\pi, \pi)$:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2\ dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{\pi^2 x - \pi x^2 + x^3/3}{4}\right|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3 - \pi^3 + \pi^3/3}{4} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, на $(-\pi, \pi)$ с соответствующей периодизацией (см. рис.3). Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\ dx = 0, \quad \text{в силу нечетности;}$$

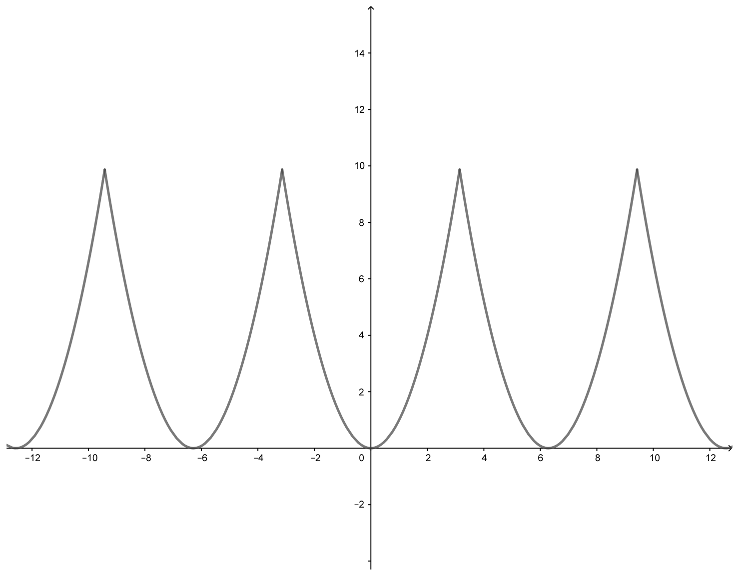

Рис. 3.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\ dx = \frac{2}{\pi k^3}\int\limits_0^{\pi}(kx)^2\cos kx\ d(kx) = \frac{2}{\pi k^3}\int\limits_0^{\pi k} t^2\cos t\ dt =$$

$$= \frac{2}{\pi k^3}\int\limits_0^{\pi k} t^2\ d(\sin t) = \frac{2}{\pi k^3}\left(t\sin t|_0^{\pi k} - 2\int\limits_0^{\pi k} t\sin t\ dt\right) = \frac{4}{\pi k^3}\int\limits_0^{\pi k} t\ d(\cos t) =$$

$$= \frac{4}{\pi k^3}\ (t\cos t - \sin t)|_0^{\pi k} = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2}.$$

Рассматриваема функция (периодизация) стала и вовсе непрерывна. Ряд сходится равномерно. Если положить $x=\pi$, то получим снова сумму обратных квадратов:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Если же положить $x=0$, то получим следующую сумму

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Этот пример показывает, что если функция на $(-\pi,\pi)$ непрерывна, то и ряд Фурье начинает вести себя "лучше".

2.4. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Если функция разрывна, то ничего более, чем стремление коэффициентов Фурье к нулю, сказать нельзя. Если же функция равномерно непрерывна, то коэффициенты обладают порядком $\bar{\bar{o}}\left(1/k\right)$, если гладкая, то $\bar{\bar{o}}\left(1/k^2\right)$. Эти факты следуют из формул Фурье. Покажем это для a_k. Пусть функция имеет непрерывную производную, тогда в формулах Фурье можно применить интерирование по частям:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{\pi k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\ d\sin kx = -\frac{1}{\pi k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\ dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ka_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\ dx$$

В полученном равенстве справа стоит коэффициент Фурье b_k' для производной функции $f(x)$. А для непрерывной функции (в данном случае непрерывная производная) порядок $\bar{\bar{o}}\left(1/k\right)$, значит, a_k имеет порядок $\bar{\bar{o}}\left(1/k^2\right)$.

Если функция достаточно "хорошая", то ряд Фурье можно достаточное число раз продифференцировать. В частности, если функция бесконечно гладкая, то и ряд Фурье можно дифференцировать бесконечно много раз, так как коэффициенты будут очень быстро стремиться к нулю.

Интегрировать ряд Фурье можно всегда, даже расходящийся. Пусть функции f сопоставляется ряд Фурье:

$$f \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx.$$

Проинтегрируем ряд Фурье:

$$A_0 + \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx.$$

Функцию x разложить в ряд Фурье не составляет проблемы. Коэффициенты $-\frac{b_k}{k}$ и $\frac{a_k}{k}$ уже являются коэффициентами Фурье некоторой функции, так как это ряд уже сходится равномерно в силу неравенства:

$$\left|\frac{b_k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(b_k^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

То есть полученный ряд сходится абсолютно. Значит, это ряд Фурье некоторой функции, а в силу полученного ранее, коэффициенты a_k и b_k будут коэффициентами Фурье ее производной. Таким образом, даже если ряд Фурье не сходился к своей функции f, то проинтегрированный ряд уже будет сходиться к интегралу от этой функции.

Естественно, с помощью интегрирования можно получать соответствующие разложения. В частности, получим разложение в ряд Фурье для функции x^4 с помощью интегрирования функции x. Функция x^4 не будет гладкой в точках $\pm\pi$, но ее можно немного подправить, рассмотрев функцию $x^4 - 2\pi^2 x^2$. Эта функция будет дважды гладкая, а значит ее коэффициенты будут порядка $1/k^4$. Разложив в ряд Фурье эту функцию, можно будет посчитать сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

2.5. Вычисление определенных интегралов

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \sin 50x \, dx, \quad |q| < 1.$$

Конечно, интеграл от рациональной тригонометрической функции берется, всего лишь осталось представить $\sin 50x$ представить в виде полинома от $\cos x$ и $\sin x$, выполнить универсальную тригонометрическую подстановку и проинтегрировать, но, очевидно, это "неподъемная" задача.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$$

и разложим в ряд Фурье. Но воспользоваться формулами Фурье, как было показано выше, не представляется возможным. Эта функция уже периодическая, а значит, бесконечно гладкая. Попробуем разложить "как-нибудь" в тригонометрический ряд, а потом из каких-либо соображений вывести, что это будет именно ряд Фурье рассматриваемой функции.

Разложим эту функцию в степенной ряд по q :

$$\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} = \frac{q \sin x}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - q^{ix}} - \frac{1}{1 - q^{-ix}} \right).$$

Далее разложим каждую дробь в сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|qe^{\pm ix}| < 1$ по при $|q| < 1$, что дано по условию).

$$f(x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(e^{inx} - e^{-inx} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(2i \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx.$$

Этот тригонометрический ряд сходится равномерно, так как ряд из модулей коэффициентов сходится. Этот пример показывает, что раз функция бесконечно гладкая, то коэффициенты стремятся к нулю быстрее любой степени. Таким образом, это ряд Фурье рассматриваемой функции. Как следствие, получаем ответ на поставленную задачу:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\sin 50x \ dx = q^{50}.$$

Конечно, можно рассматривать ряды Фурье от неограниченных функций (несобственные интегралы). Приведем показательный пример

$$\ln\left(\frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Для сравнения напомним рассматриваемый ранее пример

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

3.1. Свойства интегралов, зависящих от параметров

Рассмотрим функцию $F(y)$ записанную в интегральном представлении

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx, \quad y \in Y.$$

В качестве множества Y обычно рассматривается некоторый промежуток (на практике этого более чем достаточно). Хочется по свойствам функции $f(x,y)$ восстановить свойства функции $F(y)$. Существует аналогия с рядами. Если рассматривать в качестве $F(y)$ следующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y),$$

то мы знаем, что частичные суммы

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(y)$$

обладают такими же свойствами, что и сама функция $f_n(y)$. Остается произвести предельный переход $n \to \infty$. Вот тут возникают разные вариации с равномерной сходимостью.

В случае с интегралом аналогом частичных сумм будет все-таки более сложный объект (интеграл Римана)

$$F_N(y) = \int\limits_a^{N} f(x,y)\ dx.$$

Поэтому в данном случае, перед переходом к изучению свойств несобственного интеграла, необходимо понять что происходит с собственным интегралом Римана. То есть нужно выяснить: при каких условиях $F_N(y)$ сохраняют свойства слагаемых, то есть функций $f(x,y)$.

В данном случае имеется простое утверждение. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике, то есть

$$f(x,y) \in C\left([a,N] \times [c,d]\right),$$

то функциональная последовательность $f\left(x_n, y\right)$ сходится равномерно на $[c,d]$ при $x_n \to x_0$ к $f\left(x_0, y\right)$:

$$f\left(x_n, y\right) \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} f\left(x_0, y\right), \quad \text{при } x_n \to x_0.$$

Это утверждение называется непрерывность по совокупности. Это утверждение проще проверять, чем равномерную сходимость. Отсюда сразу следует непрерывность интеграла. Аналогично производные. Таким образом, получаются достаточные условия

1. непрерывность по совокупности
$$f(x,y) \in C\left([a,\infty]\times[c,d]\right);$$

2. интегралы вида
$$\int\limits_a^N f(x,y)\ dx$$
сходятся равномерно на отрезке $[c,d]$ при $N\to\infty$ к своему значению
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\ dx = F(y).$$

Если выполнены эти условия, то $F(y)\in C\left[c,d\right]$. Этих же условий достаточно для перестановки интегралов:
$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Теперь рассмотрим возможность дифференцировать. Пусть выполнены услови 1 и 2 и дополнительно выполнены аналогичные условия для частной производной:

3. непрерывность по совокупности частной производной
$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C\left([a,\infty]\times[c,d]\right);$$

4. интегралы вида
$$\int\limits_a^N \frac{\partial f}{\partial y}\ dx$$
сходятся равномерно на отрезке $[c,d]$ при $N\to\infty$ к своему значению
$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx.$$

При выполнение всех 4 условий можно дифференцирование "спустить" на подынтегральную функцию:

$$F(y) \in C^1\left[c, d\right], \qquad \frac{dF}{dy} = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx.$$

Следует отметить, что эти условия избыточны, но на практике проверять удобнее. Рассмотрим подробнее на примерах.

Пусть дан интеграл, зависящий от параметра:

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x+1}\ dx.$$

Задача состоит в выяснении свойств функции $F(y)$. Ясно, что так как функцию $\sin yx$ нечетная, то достаточно рассмотреть $Y = (0, +\infty)$. Так как Y является подмножеством промежутка интегрирования, то по признаку Дирихле этот интеграл сходится всюду (интегралы от $\sin yx$ ограничены, а функция $\frac{1}{x+1}$ монотонно стремится к нулю).

Данный интеграл сходится неравномерно на Y, по критерию Коши: рассмотрим интегралы

$$\int\limits_N^{2N} \frac{\sin yx}{x+1}\ dx$$

и положим $y = \pi/2N$, тогда эти интегралы будут "большими". Несмотря на это функция $F(y)$ непрерывна. Отступим от нуля: пусть $y \geqslant \delta$, тогда этот интеграл сходится равномерно, так как частичные интегралы

$$\int\limits_0^{N} \sin yx\ dx$$

не превосходят $2/\delta$, то есть неопределенные интегралы равномерно ограничены, а функция $\frac{1}{x+1}$ монотонно стремится (равномерно) к нулю.

Перейдем к дифференцируемости. Попробуем продифференцировать согласно условия 3 и 4:

$$F'(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x+1} \cos yx\ dx.$$

Здесь речь о равномерной сходимости не заходит, так как даже сам интеграл не сходится (функция $\frac{x}{x+1}$ примерно 1). Но из неприменимости теоремы не следует отсутсвие производной. Указанные условия избыточны!

Для взятия производной представление функции $F(y)$ в указанном виде неудобно. Чтобы "ускорить" сходимость как и в случае с рядами, нужно проинтегрировать по частям:

$$F(y) = -\frac{1}{y}\frac{\cos yx}{x+1}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{y}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{y}\left(1 + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{(x+1)^2}\, dx\right).$$

В последнем интеграле мы получили "запас" в виде $(x+1)^2$, поэтому можем попробовать взять производную по укзаанному правилу:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{(x+1)^2} = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin yx}{(x+1)^2}.$$

Это равенство верное, так как полученный сходится равномерно внутри интервала, так как интегралы от синусов равномерно ограничены, а функция $\frac{x}{(x+1)^2}$ монотонно стремится к нулю. Таким образом, в "новом" рассматриваемом виде производную $F'(y)$ можно найти. Чтобы найти производные высших порядков нужно достаточное число раз проинтегрировать по частям.

Однако, существует еще один более эффективный "ускоритель" - замена переменной. Произведем замену переменной $t = yx$:

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+y} dt.$$

В этом интерале взятие производной будет приводить к более лучшей сходимости, поэтому здесь можно дифференцировать сколько угодно раз, то функция $F(y)$ класса C^∞.

3.2. Приложения. Точное вычисление несобственных интегралов

Вычислить несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

У подинтегральной функции особенность только в 1. Он сходится. Но вычислить его через взятие неопределенного интеграла не представляется возможным. Поэтому нужно придумать некоторую функцию $F(y)$, связанную с рассмотренным интегралом (вычислить интеграл в какой-то конкретной точке оказывается сложнее, чем вычислить на всем промежутке). В данном случае представление следующее:

$$F(y) = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1 - x^2y^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Отсюда следует, что искомый интеграл есть $F(1)$. Мотивация в введении такого параметра заключается в том, чтобы дифференцированием избавиться от логарифма и получить функцию из известного класса интегрирования.

Вычислим формально сразу производную:

$$F'(y) = \int\limits_0^1 \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2}\left(1 - x^2y^2\right)}\, dx.$$

Проблема здесь заключается в том, что в нужно точке $y = 1$ интеграл расходится. Обратим внимание, что точка $y = 1$ является концевой и, на самом деле (как часто бывает в теоремах), дифференцируемость на концах не требуется, достаточно непрерывности (в этом случае функция однозначно восстанавливается по своей производной).

Докажем, что функция $F(y)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Ясно, что (композиция непрерывных функций на соответствующих промежутках)

$$\frac{\ln\left(1 - x^2y^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \in C\left([0, -1) \times [-1, 1]\right).$$

В нуле нет никаких проблем, так как

$$\lim_{x\to 0, y\to y_0} \frac{\ln\left(1 - x^2y^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -y_0^2.$$

Отсюда следует, что частичные интегралы непрерывны. А для предельного перехода нужна равномерная сходимость. Это следует из признкак Вейерштрасса:

$$\left|\frac{\ln\left(1 - x^2y^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{-\ln\left(1 - x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

Интеграл от функции стоящей справа сходится. Таким образом, $F(y) \in C\,[-1, 1]$. Теперь докажем, что $F(y)$ дифференцируема на $(-1, 1)$. Первое, что нужно проверить - непрерывность подынтегральной функции:

$$\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2}\left(1 - x^2y^2\right)} \in C\left([0, -1) \times (-1, 1)\right).$$

Это очевидно. Докажем, что на отрезке $[-1+\delta, 1-\delta]$ есть равномерная сходимость по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2}\left(1 - x^2y^2\right)}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\left(1 - (1-\delta)^2 x^2\right)}.$$

Интеграл от функций стоящей справа сходится. Значит, равенство

$$F'(y) = \int\limits_0^1 \frac{-2y}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2y^2)}\, dx$$

корректно на интервале $(-1,1)$. Теперь мы можем перейти к технике.

Вычислим $F'(y)$ с помощью подстановки Абеля

$$t = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x^2 = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$d\left(t\sqrt{1-x^2}\right) = -dx \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}dt + t^2dx = -dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dt}{1+t^2};$$

подставляем в интеграл:

$$F'(y) = \int\limits_0^{-\infty} \frac{2y}{1+(1-y^2)\,t^2}dt = \frac{-\pi y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Теперь можно восстановить функцию $F(y)$ проинтегрировав производную (тот факт, что неопределенный интеграл вычисляется явно - в некотором смысле везение):

$$F(y) = \pi\sqrt{1-y^2} + C.$$

Чтобы определить константу C, нужно подставить какое-либо значение y в исходный интеграл (тот факт, что интеграл посчитается - еще одно везение). В данном случае нужно подставлять, конечно, $y = 0$:

$$0 = F(0) = \pi + C \Leftrightarrow C = -\pi \Rightarrow F(y) = \pi\left(\sqrt{1-y^2} - 1\right) \Rightarrow F(1) = -\pi.$$

Рассмотрим вычисление следующего интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{b^2+x^2}dx.$$

В этом интеграле сразу два параметра и их оба можно использовать для вычислений. Из предыдущего примера есть мотивация взять в качестве параметра a :

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(a^2+x^2\right)}{b^2+x^2}dx, \quad a > 0.$$

Возьмем производную:

$$F'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2a}{\left(x^2+a^2\right)\left(b^2+x^2\right)}dx.$$

Подынтегральная функция функции $F(a)$ непрерывна на прямоугольнике

$$[0,+\infty)\times(0,+\infty)\,.$$

Равномерная сходимость проверяется внутри и следует из признака Вейерштрасса заменой a на отступ от нуля. Аналогичная ситуация с интегралом от производной. Переходим к вычислению производной:

$$F'(a)=\frac{2a}{b^2-a^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a}-\frac{\pi}{2b}\right)=\frac{\pi}{b\,(a+b)};$$

$$F(a)=\frac{\pi}{b}\ln{(a+b)}+C.$$

Теперь нужно найти C. И это является содержательной частью задачи. Подставим $a=0$ (эту возможность еще следует обосновать (показать равномерную сходимость), так как появится особенность в нуле):

$$F(0+)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\ln x}{b^2+x^2}dx.$$

Выполним линейную замену $x=bt$:

$$F(0+)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\ln t+2\ln b}{b\,(1+t^2)}dt=\frac{2\ln b}{b}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt+\frac{2}{b}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=\frac{\pi\ln b}{b}+\frac{2}{b}I.$$

Интеграл I не берется. Но видно, что его подынтегральная функция симметрична относительно 1. Поэтому сделаем замену $t=1/u$:

$$I=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}du=-I\Leftrightarrow I=0\Rightarrow F(0+)=\frac{\pi\ln b}{b}.$$

С другой стороны

$$F(0+)=\frac{\pi}{b}\ln b+C\Rightarrow C=0\Rightarrow F(a)=\frac{\pi}{b}\ln{(a+b)}\,.$$

Но такой способ нахождение константы является самым сложным. Рассмотрим более простой способ - подставим $a=b$:

$$F(b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln{(b^2+x^2)}}{b^2+x^2}dx.$$

Сделаем линейную замену $bt=x$:

$$F(b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\ln b+\ln{(1+t^2)}}{b\,(1+t^2)}dt=\frac{\pi\ln b}{b}+\frac{1}{b}J.$$

Теперь в интеграле I делаем тригонометрическую замену $t = \tan u$:

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln \frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos^2 u}} \frac{du}{\cos^2 u} = -2 \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos u \; du = -2I.$$

Последний интеграл считается так. На промежутке интегрирования смена косинуса на синус ничего не поменяет:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos u \; du = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin u \; du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(\cos u \sin u\right) \; du = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\ln \sin 2u - \ln 2\right) \; du = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \ln \sin v \; dv - \frac{\pi \ln 2}{2} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin v \; dv - \frac{\pi \ln 2}{2} = I - \frac{\pi \ln 2}{2} \Leftrightarrow I = -\frac{\pi \ln 2}{2} \Rightarrow J = \pi \ln 2;$$

$$\Rightarrow F(b) = \frac{\pi \ln b}{b} + \frac{\pi \ln 2}{b}.$$

С другой стороны

$$F(b) = \frac{\pi \ln 2b}{b} + C \Rightarrow C = 0.$$

Теперь самый простой способ. Подставим бесконечность. В каком смысле? Просто так подставить не удается. Выпишем асимптотические разложения функций $F(a)$ в обоих видах. С одной стороны

$$F(a) = \frac{\pi}{b} \ln a + \frac{\pi}{b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) + C = \frac{\pi}{b} \ln a + C + \bar{\bar{o}}(1),$$

а с другой

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(a^2 + x^2\right)}{b^2 + x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2 \ln a}{b^2 + x^2} dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{b} \ln a + \bar{\bar{o}}(1).$$

Последний интеграл является бесконечной малой, так как при $a = \infty$ в числителе получаем $\ln 1 = 0$. Однако, придется доказать равномерную сходимость вплоть до бесконечности (из признака Вейерштрасса), отступать нельзя, но зато можно отступить от нуля. Из равномерной сходимост следует, что можем занести предел под знак интеграла:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}{b^2 + x^2} dx \sim \int\limits_0^{+\infty} \frac{\bar{\bar{o}}(1)}{b^2 + x^2} dx = \bar{\bar{o}}(1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{b^2 + x^2} dx = \bar{\bar{o}}(1).$$

Из сравнения двух результатов следует, что $C = 0$. Таким образом, заключаем

$$F(a) = \frac{\pi}{b} \ln (a + b) \, .$$

Последний способ не содержит в себе ни одного интеграла, для которого потребовалась бы техника интегрирования, и знакомит студента с асимптотическими методами.

Есть и другой подход к решению этой задачи. Взять в качестве параметра b. Дифференцирование только ухудшит интеграл, но проинтерировав по частям, получим дифференциальное уравнение первой степени. И в этой ситуации никаких проблем с вычислением константы не возникнет (достаточно положить $b = \infty$).

4. Приложение спецфункций к вычислению интегралов

4.1. Другое решение одной классической задачи

Рассмотрим функцию

$$2F(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}, \quad F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Вычислим ее производную (обоснование опустим):

$$F'(a) = -\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} \cdot \frac{2a}{x^2}\, dx.$$

Сделаем замену переменной $t = a/x$:

$$F'(a) = -2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}\, dt = -2F(a) \Leftrightarrow F'(a) = -2F(a).$$

Мы получили обыкновенное линейное с постоянными коэффициентами дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого, учитывая начальное условие, является функция

$$F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

4.2. Гамма-функция и Бета-функция

По определению Гамма-функцией называется функция

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Ясно, что область определения $x > 0$. Для начала нужно понять какие значения можно вычислить явно. Очевидно, что при $x = 1$:

$$\Gamma(1) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

Если проинтегрировать по частям, то получим формулу понижения:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Из этой формулы следует, что любое значение x можно перевести в диапазон $(0,1)$. Более того, эта формула дает все значения в целых точках:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Также имеется формула дополнения, доказательство которой сложнее (нужно будет переставлять интегралы), поэтому можно сообщать ее без доказательства:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Отсюда сразу находим $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Таким образом, находим все значения в полуцелых точках.

Теперь хотим понять асимптотики при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Рассмотрим для нуля. Из формулы понижения следует, что

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x} \sim \frac{1}{x}, \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Чтобы написать следующие члены асимптотики, нужно знать разложение $\Gamma(1+x)$ в ряд Тейлора в нуле:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x} = \frac{1+\Gamma'(1)x + \bar{\bar{o}}(x)}{x} = \frac{1}{x} + \Gamma'(1) + \bar{\bar{o}}(1).$$

На бесконечности появляется формула Стирлинга, доказательство которой занимает много времени. Перейдем к дифференцируемости.

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t \; dt.$$

Ясно, что производная уже не будет всюду положительной, но будет иметь одну смену знака, так как в подынтегральной функции смена знака будет только в логарифме. Еще проще это заметить, если взять вторую производную:

$$\Gamma''(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^2 t \; dt > 0.$$

Следовательно, первая производная возрастает на множестве определения, а значит имеет максимум один ноль. Ясно, что этот ноль находится на промежутке $(1,2)$, так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Пользуясь формулой понижения, можно вывести аналогичные формулы понижения для первой и второй производной. Попробуем вычислить $\Gamma'(1)$ с помощью очень хитрого представления:

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \; dt.$$

Такое представление следует, конечно, обосновывать, потому что параметр n находится как внутри интеграла, так и в его верхнем пределе. Обоснование опустим. Последний интеграл нужно проинтегрировать по частям и взять интеграл от рациональной функции. Ответом будет константа Эйлера $-\gamma$. Таким образом, в асимптотике можно исправить:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \bar{\bar{o}}(1), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Аналогично можно вычислить вторую производную в единице:

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Бета-функция определяется формулой

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Поэтому все свойства гамма-функции наследуются бета-функцией.

4.3. Приложения

Вычислим интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \beta x} dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \beta x} dx.$$

В случае с косинусом все проще:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x}} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x}} dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x}} dx.$$

Далее, с помощью экспоненциальной замены оба интеграла сводятся к бета-функции. Попробуем для синусов сделать тоже самое:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} - e^{-\beta x}} dx.$$

Разбить этот интеграл на сумму не так просто, так как тут особенность не только на бесконечности, но и в нуле. Сделаем замену $t = e^{-2\beta x}$ и все сведется к вычислению интеграла

$$\frac{1}{2\beta} \int\limits_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t} dt, \quad \text{где } p = \frac{\beta - \alpha}{2\beta}.$$

Разобьем на два интеграла:

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-1}\,dt - \int_0^1 t^{-p}(1-t)^{-1}\,dt = B(p,0) - B(1-p,0).$$

Конечно, подставлять в бета-функцию 0 нельзя, но "очень хочется". Чтобы так сделать, нужно ввести другой параметр (отступить от нуля для):

$$F(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{(1-t)^{1-\varepsilon}}dt.$$

Ясно, что искомые интеграл есть $F(0)$. Опустим обоснование вынесение предела наружу (нужна равномерная сходимость):

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{(1-t)^{1-\varepsilon}}dt.$$

Этот интеграл мы уже можем разбить на два как указывалось ранее:

$$F(\varepsilon) = B(p,\varepsilon) - B(1-p,\varepsilon) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} =$$

$$= \Gamma(\varepsilon)\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon) - \Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)}.$$

Знаменатель последней дроби стремится к конкрентному конечному числу (формула дополнения). $\Gamma(\varepsilon)$ ведет себя как $1/\varepsilon$. Тогда получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} F(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon) - \Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Далее воспользуемся разложением в ряд Тейлора до первого порядка (или правилом Лопиталя):

$$\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Gamma(p)\left[\Gamma(1-p) + \varepsilon\Gamma'(1-p) + \bar{\bar{o}}(1)\right] - \Gamma(1-p)\left[\Gamma(p) + \varepsilon\Gamma'(p) + \bar{\bar{o}}(1)\right]}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma'(1-p) - \Gamma(1-p)\Gamma'(p)}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = -\frac{(\Gamma(p)\Gamma(1-p))'_p}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = -\left(\ln\left(\Gamma(p)\Gamma(1-p)\right)\right)'_p =$$

$$= -\left(\ln\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)\right)'_p = \pi\cot\pi p.$$

Таким образом, получаем окончательный ответ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh\alpha x}{\sinh\beta x}dx = \frac{\pi}{2\beta}\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2\beta}\right).$$

Для сравнения и самостоятельного разбора доказать

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh \beta x} dx = \frac{\pi}{2\beta} \tanh\left(\frac{\pi\alpha}{2\beta}\right)$$

Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(4x^2+\pi^2)\sinh x}\, dx.$$

1 способ. Надо ввести параметр и продифференцировать по нему. Введем функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{(4x^2+\pi^2)\sinh x}.$$

Тогда исходный интеграл находится как $F'(0)$. Применение асимптотического разложение будет более общим подходом, так как позволяет найти не только исходный интеграл, но и все интегралы с соответствующей степенью x в числителе (соответствующее слагаемое в асимптотическом разложении).

Далее нужно вычислить $F(\alpha)$. Ясно, что $F(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и бесконечно дифференцируема на $(-1, 1)$ (типичная ситуация). То есть функция восстанавливается из любых дифференциальных уравнений. Вычислим вторую производную (чтобы избавиться от квадратичной скобки в знаменателе):

$$F''(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sinh \alpha x}{(4x^2+\pi^2)\sinh x}.$$

Теперь сложим с соответствующими коэффициентами:

$$4F''(\alpha) + \pi^2 F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh x}\, dx = \pi \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Последнее равенство есть предыдущая задача при $\beta = 1$.

Полученное уравнение есть обыкновенное дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть не является квазимногочленом, поэтому нужна вариация постоянной для второго порядка. Опустим ход решения и предъявим сразу ответ:

$$F(\alpha) = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\ln\left(\frac{1-\tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)}\right) + C_1\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Теперь нужно разобраться с начальными условиям. Из интегрального представления очевидны следующие значения:

$$F(0) = 0, \quad F(1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + \pi^2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $C_1 = 0, C_2 = 1/2$ (частное решение стремится к нулю, когда $\alpha \to 1$). Получаем итоговое решение дифференциального уравнения

$$F(\alpha) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \ln\left(\frac{1 - \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

Остается найти производную и подставить 0 (выкладки опускаем). Получаем ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(4x^2 + \pi^2)\sinh x}\, dx = F'(0) = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Теперь рассмотрим второй способ решения. Идея второго решения заключается в интегральном представлении подыинтегральной функции рассматриваемого интеграла. Конечно, такая идея может и не напрашиваться сразу, но если на практике разобран ряд соответствующих задач, такая идея возникнуть все-таки может. Например,

$$\frac{1}{x} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xy} dy, \quad \frac{1}{x^2 + 1} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+1\right)y} dy, \quad \text{и пр.}$$

В данном случае представление будет следующим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(4x^2 + \pi^2)\sinh x}\, dx = \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sinh x}\, dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} \sin xy\, dy.$$

Теперь мы меняем порядок интегрирования. Законность этого действия обосновывается теми фактами, что двойной интеграл и равномерная сходимость очевидна из вида самой функции (экспоненциальный рост; синус можно выкинуть). Имеем:

$$\frac{1}{4} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y}\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xy}{\sinh x}\, dx.$$

Ответ на внутренний интеграл давался выше.

$$\frac{1}{4} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} \pi \tanh\left(\frac{\pi y}{2}\right)\, dy = \frac{\pi}{4} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}y} \frac{e^{\frac{\pi}{2}y} - e^{-\frac{\pi}{2}y}}{e^{\frac{\pi}{2}y} + e^{-\frac{\pi}{2}y}}\, dy.$$

Последний интеграл берущийся. Ответ, конечно, получится как и прежде.

Прокомментируем как вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh \beta x} dx.$$

Для этого интеграла воспользуемся еще одним вспомогательным методом - разложение в ряд. Распишем гиперболический синус следующим образом:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^{\beta x}\left(1 - e^{-2\beta x}\right)} dx.$$

На промежутке интегрирования $e^{-2\beta x}$ меньше 1 (от нуля, вообще говоря, нужно отступить), поэтому можно считать это суммой бесконечно убывающей прогрессии:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)\beta x} \sin \alpha x \right) dx.$$

Теперь нужно переставить сумму и интеграл местами (нужно обязательно отступать от нуля, иначе это незаконно):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-(2n+1)\beta x} \sin \alpha x \ dx \right) = 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \beta^2 + \alpha^2}.$$

Последняя сумма считается с помощью формулы суммирования Пуассона, когда вместо самой функции берется преобразование Фурье. В данном случае воспользуемся такой формулой (косинус преобразованием):

$$\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(2\pi m) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \ dx.$$

Вычислим искомый ряд при $\alpha = \beta = 1$. Берем функцию

$$f(x) = \frac{\pi^2}{(x+\pi)^2 + \pi^2}.$$

Очевидно, что эта функция гладкая. Слева стоит тот самый ряд. Первый интеграл стоящий справа считается и равен π. Второй интеграл есть интеграл Лапласа. Имеем:

$$\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n}.$$

Последняя сумма есть геометрическая прогрессия. Таким образом, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2+1} = \frac{\pi}{2} + \pi\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1}\right) = \frac{\pi}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, при $\alpha = \beta = 1$ указанная ранее формула верна. При любых α и β этот подход (формула Пуассона) работает, более того, дает считающиеся ряды, что очень важно (иначе метод не имел бы смысла).

Все рассмотренные примеры так или иначе используют много знаний вне зависимости от подхода решения, в том числе знания из других областей, например, дифференциальных уравнений.

5. Производные гамма-функции

5.1. Вычисление обобщения интегралов Дирихле и Френеля

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^m}\, dx.$$

При значениях $m = 1$ этот интеграл есть интеграл Дирихле, а при $m = 1/2$ и $3/2$ - интегралы Френеля. Оказывается, что можно посчитать и при других m, а точнее выразить через гамма-функцию.

Ясно, что $m \in (0, 2)$, иначе интеграл разойдется. Для нахождения этого выражения применяется достаточно типичный прием - представление части подынтегральной функции в интегральной форме:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^m}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin x\; dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^m} dt.$$

Ясно, что в таком виде не удастся проинтегрировать, нужно, чтобы степень x была равна 1, но тогда появитс поправочный множитель:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^m}\, dx = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \int\limits_0^{+\infty} \sin x\; dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}} x} dt.$$

Теперь следует переставить интегралы, но такую перестановку трудно обосновать, так как в окрестности нуля экспонента примерно единица, поэтому равномерной сходимости там нет. Следует отступить от нуля в обоих интегралах:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_\varepsilon^{+\infty} dx \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_\delta^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}} x} \sin x\; dt.$$

Эти интегралы уже переставлять можно, но между ними еще стоит предел, который следует вытащить наружу и это самое нетривальное действие, так как функция

$$\Phi(x, \delta) := \int\limits_\delta^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}} x} \sin x\; dt$$

зависит от двух переменных x и δ. Поэтому нам нужно проверить непрерывность по совокупности и равномерную сходимость интеграла в некоторой окрестности нуля. Проверять эти свойства для функции в таком виде неудобно, так как переменные "разбросаны" по интегралу. Поэтому нужно сделать удобный для проверки вид с помощью замены переменной $tx^m = s$:

$$\Phi(x,\delta) = \frac{\sin x}{x^m} \int\limits_{\delta x^m}^{+\infty} e^{-s^{\frac{1}{m}}} ds.$$

Таким образом, переменная x вынесена в множитель перед интегралом, а переменная δ осталась только в нижнем пределе интегрирования, а в подынтегральной функции переменных и вовсе не осталось. На множестве $x \in (\varepsilon, +\infty)$ функция $\sin x/x^m$ является непрерывной. Интеграл с переменным пределом всегда функция непрерывна. Сам же переменный предел также является непрерывной функцией. Заключаем, что функция Φ непрерывна по совокупности.

Равномерная сходимость следует из признака Абеля. Множитель перед интегралом не зависит от параметра δ. Интеграл же сходится (при фиксированном m) по признаку Дирихле. На что можно умножать сходящийся интеграл, чтобы не испортить равномерную сходимость? На монотонную и равномерноограченную функцию. Функция

$$\int\limits_{\delta x^m}^{+\infty} e^{-s^{\frac{1}{m}}} ds$$

является убывающей, так как подынтегральная функция положительна. Теперь нужна оценка:

$$\int\limits_{\delta x^m}^{+\infty} e^{-s^{\frac{1}{m}}} ds \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s^{\frac{1}{m}}} ds.$$

Последний интеграл есть некоторое значение гамма-функции, но самое важное, что он не зависит ни от δ, ни от x.

Итак, теперь можем вынести предел:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)} \lim_{\varepsilon\to 0+} \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dx \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}}x} \sin x \; dt.$$

Теперь следует обосновать перестановку интегралов. Для этого требуется сходимость повторного интеграла по модулю. Это, конечно, так:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dx \int\limits_{\delta}^{+\infty} \left| e^{-t^{\frac{1}{m}}x} \sin x \right| \; dt \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} dx \int\limits_{\delta}^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}}x} \; dt.$$

После первого интегрирования будет снова экспонента и от нее интеграл будет сходиться (так как отошли от нуля). Теперь нужно равномерная непрерывность интегралов, которая следует из равномерной сходимости. Последняя в свою очередь следует из признака Вейерштрасса:

$$\left|e^{-xt^{\frac{1}{m}}}\sin x\right| \leqslant e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{m}}}, \qquad \left|e^{-xt^{\frac{1}{m}}}\sin x\right| \leqslant e^{-x\delta^{\frac{1}{m}}}.$$

Переставляем интегралы местами:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\lim_{\varepsilon\to 0+}\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{\delta}^{+\infty} dt\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}}x}\sin x\ dx.$$

Видно, что предел по δ и интеграл по δ находятся рядом, поэтому их можно "схлопнуть" в интеграл:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{+\infty} dt\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t^{\frac{1}{m}}x}\sin x\ dx.$$

Переходим к интегрированию:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{0}^{+\infty} dt\frac{\cos\varepsilon - t^{\frac{1}{m}}\sin\varepsilon}{1+t^{\frac{2}{m}}}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{m}}}.$$

Интегрировать далее по t явно не представляется возможным. Поэтому попытаемся переставить предел и интеграл местами. Непрерывность подынтегральной функции очевидна. Равномерная сходимость следует из признакак Вейерштрасса:

$$\left|\frac{\cos\varepsilon}{1+t^{\frac{2}{m}}}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{m}}}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^{\frac{2}{m}}}, \qquad \left|\frac{\varepsilon}{1+t^{\frac{2}{m}}}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{m}}}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^{\frac{2}{m}}}.$$

Переставляем предел и интеграл:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int\limits_{0}^{+\infty} dt\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\cos\varepsilon - t^{\frac{1}{m}}\sin\varepsilon}{1+t^{\frac{2}{m}}}e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{\Gamma(m+1)}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^{\frac{2}{m}}}.$$

Сделаем замену переменной $u = 1/\left(1+t^{\frac{2}{m}}\right)$:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\frac{m}{2}\int\limits_{0}^{1} u^{-\frac{m}{2}}\left(1-u\right)^{\frac{m}{2}-1}du = \frac{1}{m\Gamma(m)}\frac{m}{2}B\left(1-\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(m)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}.$$

Окончательно получаем формулу:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^m}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}, \quad m\in(0,2)\,.$$

Вычислим с помощью этой формулы интеграл Дирихле ($m = 1$):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}$$

Вычислим с помощью этой формулы интегралы Френеля ($m = 1/2$):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

при $m = 3/2$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\pi}.$$

При всех остальных значениях нужно знать значения гамма-функции.

5.2. Производная гамма-функции

Мы рассматриваем гамма-функцию

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

и ее производную

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\ dt.$$

Оказывается, что значения в целых точках считаются. Для этого сначала нужно вычислить значение в единице, а затем воспользоваться формулой понижения.

$$\Gamma'(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\ dt.$$

Чтобы объяснить этот переход нужно показать, что разность первого и последнего стремится к нулю. Представим первый интеграл в аналогичном представлении (по определению несобственного интеграла):

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n e^{-t}\ln t\ dt.$$

Этот интеграл несобственный в нуле и на бесконечности, но он будет сходиться из-за медленного роста логарифма. Теперь нужно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^n e^{-t}\ln t\,dt-\int\limits_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln t\,dt\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t\,dt=0.$$

Произведем следующие оценки.

1. Первые две оценки очевидны:

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t},\quad\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{t}.$$

2. $$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\frac{t^2}{n}e^{-t}.$$

   Доказательство. Перегруппируем:

   $$e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

   Домножим обе части на $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$:

   $$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\leqslant\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

   В правой части стоит разность квадратов. В левой части произведение $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ не превосходит 1 по оценке из первого пункта. Поэтому, если мы докажем неравенство

   $$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\leqslant\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n,$$

   то из него последует то, что нам нужно. Последнее неравенство есть неравенство Бернулли. Таким образом, все оценки верны.

Итак, мы имеем оценку

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\frac{t^2}{n}e^{-t}.$$

Умножим это неравенство на $\ln t$. Если t от 0 до 1, то

$$0\geqslant\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t\geqslant\frac{t^2}{n}e^{-t}\ln t.$$

Проинтегрируем это неравенство на участке $[0,1]$:

$$0 \geqslant \int\limits_0^1 \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t\ dt \geqslant \int\limits_0^1 \frac{t^2}{n}e^{-t}\ln t\ dt.$$

Теперь устремим n к бесконечности. Левая часть стремится к 0, в правой части $1/n$ выносится и оставшийся интеграл есть некоторая фиксированная величина, поэтому правая часть также стремится к нулю. Поэтому, по теореме "о двух миллиционерах", центральная часть также стремится к нулю.

Теперь умножим на $\ln t$ при $t \geqslant 1$ и проинтерируем на участке $[1,n]$:

$$0 \leqslant \int\limits_1^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t\ dt \leqslant \int\limits_1^n \frac{t^2}{n}e^{-t}\ln t\ dt.$$

Левая часть по-прежнему стремится к нулю. В правой части интеграл

$$\int\limits_1^n t^2 e^{-t}\ln t\ dt$$

при $n \to \infty$ сходится, а раз мы делим дополнительно на n, вся правая часть стремится к нулю. Таким образом, центральная часть также стремится к нулю.

Теперь складываем две центральные части и получаем требуемый результат

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t\ dt = 0.$$

Мы получили, что разность двух последовательностей стремится к нулю, но это пока не значит, что их пределы равны. Это следует из того, что одна из последовательностей сходится, а именно

$$\exists \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n e^{-t}\ln t\ dt.$$

Это обсуждалось в начале. Поэтому верно равенство

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\ dt.$$

Перейдем к вычислению полученного интеграла. Сделаем сначала замену переменной $s = 1 - t/n$:

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 s^n \ln\left(n(1-s)\right)\ ds.$$

Этот интеграл разбивается в сумму двух:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln n}{n+1}+n\int\limits_0^1 s^n\ln(1-s)\;ds\right).$$

Последний интеграл вычисляется по частям:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\int\limits_0^1 \ln(1-s)\;d\left(s^{n+1}\right)\right).$$

Но если так проинтегрировать, то внеинтегральный член не сойдется. Поэтому скорректируем функцию, которая стоит под дифференциалом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\int\limits_0^1 \ln(1-s)\;d\left(s^{n+1}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\ln n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\int\limits_0^1 \frac{s^{n+1}-1}{s-1}\;ds\right).$$

Последнюю подынтегральную функцию представим как сумму геометрической прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)\right).$$

Первый сомножитель стремится к единице, а разность и есть по определению число Эйлера (только с обратным знаком). Таким образом, имеем

$$\Gamma'(1)=-\gamma.$$

5.3. Вторая производная гамма-функции

Перейдем к вычислению второй производной в единице. Имеем:

$$\Gamma''(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\ln^2 t\;dt=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln^2 t\;dt.$$

Обоснование последнего равенства аналогично предыдущим рассуждениям для первой производной, только проще, так как $\ln^2 t>0$.

Перейдем к вычислениям. Снова делаем замену $s=1-t/n$:

$$\lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^1 s^n\ln^2\left(n(1-s)\right)\;ds.$$

Дальше раскрываем полный квадрат:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln^2 n}{n+1}+2n\ln n\int\limits_0^1 s^n\ln(1-s)\;ds+n\int\limits_0^1 s^n\ln^2(1-s)\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln^2 n}{n+1} - \frac{2n\ln n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + n\int\limits_0^1 s^n\ln^2(1-s)\,ds\right]$$

Последний интеграл считается с помощью дважды интегрирования по частям. Вычислим его отдельно:

$$n\int\limits_0^1 s^n\ln^2(1-s)\,ds = \frac{n}{n+1}\int\limits_0^1 \ln^2(1-s)\,d\left(s^{n+1}-1\right) = \frac{-2n}{n+1}\int\limits_0^1 \frac{s^{n+1}-1}{s-1}\ln(1-s)\,ds =$$

$$= \frac{-2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^1 s^{k-1}\ln(1-s)ds = \frac{2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}.$$

Таким образом, нам нужно посчитать следующий предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\ln^2 n}{n+1} - \frac{2n\ln n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{2n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}\right].$$

Конечно, в таком виде вряд ли его удастся посчитать, поэтому нужно упростить полученные суммы:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} = \sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{l}\sum_{k=l}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Теперь для удобства поменяем индексы суммирования местами:

$$\sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{l}\sum_{k=l}^{n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=k}^{n+1}\frac{1}{l}.$$

Очень важно подчеркнуть, с какой суммы мы начали и какой закончили:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=k}^{n+1}\frac{1}{l},$$

так как, если взять среднее арифметическое этих двух чисел, то можем продолжить равенство:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{l=k}^{n+1}\frac{1}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\left(\sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{l}+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, все свелось к вычислению предела

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\left(\ln^2 n - 2\ln n\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1} \left(\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \right) \right] = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

5.4. Приложения

Выпишем асимптотическое разложение гамма-функции в точке $x = 0$:

$$\Gamma(1+x) = \Gamma(1) + \Gamma'(1)x + \frac{1}{2}\Gamma''(1)x^2 + \bar{\bar{o}}\left(x^2\right) = 1 - \gamma x + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)x^2 + \bar{\bar{o}}\left(x^2\right).$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

По отдельности эти интегралы не считаются. Преобразуем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Ясно, что и таким преобразованием мы не избавились от проблемы. Но здесь только одна проблема в $x = 0$. Поэтому нужно по x "немного" уменьшить степень:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x^{1-\varepsilon}}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1-\varepsilon}}\,dx \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1-\varepsilon}}\,dx \right).$$

Остается обосновать только предельный переход (выкладки опускаются из-за очевидной простоты). Первый интеграл явно считается. Второй интеграл разбирался в самом начале, но только с синусом. Для косинуса все аналогично. Имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2\Gamma(1-\varepsilon)\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)\right)} \right).$$

Для косинуса воспользуемся формулой приведения и приведем к общему знаменателю:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\sin\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right) - \frac{\pi}{2}\varepsilon}{\varepsilon\Gamma(1-\varepsilon)\sin\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)}.$$

Теперь воспользуемся разложениями в ряд Тейлора для синуса и гамма-функции нуле:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\left(1+\gamma\varepsilon+\bar{\bar{o}}\left(\varepsilon\right)\right)\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon + \bar{\bar{o}}\left(\varepsilon^2\right)\right) - \frac{\pi}{2}\varepsilon}{\varepsilon\left(1+\gamma\varepsilon+\bar{\bar{o}}\left(\varepsilon\right)\right)\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon + \bar{\bar{o}}\left(\varepsilon^2\right)\right)} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2}\gamma\varepsilon^2 + \bar{\bar{o}}\left(\varepsilon^2\right)}{\frac{\pi}{2}\varepsilon^2 + \bar{\bar{o}}\left(\varepsilon^2\right)} = \gamma.$$

Таким образом, получаем окончательный ответ

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \gamma.$$

Доказательство формулы дополнения без использования бесконечного произведения будет предъявлено на следующей лекции (а также ее применение).

6. Формула дополнения

6.1. Вывод формулы дополнения без использования бесконечного произведения

При $x > 0$ будем явно вычислять выражение $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Посмотрим для начала на это выражение при $x = 1/2$. Это интеграл Эйлера-Пуассона. Имеем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^{-1/2}e^{-s}\,ds.$$

В данном случае знак умножения можно убрать, так как он не изменит ответа (второй интеграл все равно будет тем самым числом даже в случае записи в виде повторного интеграла, то есть без умножения). Теперь рассматриваем повторный интеграл. Сделаем во втором интеграл линейную замену переменной $s = tu$:

$$\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}t^{-1/2}u^{-1/2}e^{-tu}t\,du = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} u^{-1/2}e^{-t(u+1)}\,du.$$

Теперь, естественно, меняем порядок интегрирования (нужно отступить по t от нуля, так как в нуле "погибает" экспонента):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)} = \pi.$$

Отсюда получаем $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Эта идея реализуется и в общем случае (все аналогичные рассуждения будут опущены):

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \cdot \int\limits_0^{+\infty} s^{-x}e^{-s}\,ds = \int\limits_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt \int\limits_0^{+\infty} s^{-1/2}e^{-s}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}t^{-x}u^{-x}e^{-tu}t\,du = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{\infty} u^{-x}e^{-t(u+1)}du = \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{\infty} u^{-x}e^{-t(u+1)}dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u}\,du.$$

Мы получили бета-функцию, но если попытаться ею воспользоваться, то придется пользоваться ее представлением через гамма-функцию, что в свою очередь приведет к использованию формулы дополнения, которую мы хотим доказать. Поэтому придется использовать другие методы. Ясно, что доказать при всех x не удастся, например, при $x = \sqrt{2}/2$. Поэтому обойдем эту проблему с помощью следующего соображения. Это функция по x, непрерывная, тогда достаточно будет рассмотреть некоторое плотно множество на $(0,1)$, а потом по непрерывности все восстановить. Таким множество является множество рациональных чисел. Итак, пусть $x \in \mathbb{Q}$, то есть $x = p/q$, где $0 < p < q$. В таком случае получаем стандартный интеграл. В начале нужно избавиться от корня с помощью замены переменной $u = v^{2q}$:

$$2q \int\limits_0^{+\infty} \frac{v^{-2p+2q-1}}{1+v^{2q}}\, dv.$$

Степень числителя положительная в силу ограничений $0 < p < q, p, q \in \mathbb{N}$. Теперь нужно разложить на простейшие множители:

$$2q \int\limits_0^{+\infty} \frac{v^{2q-2p-1}}{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1\right)}\, dv.$$

Теперь подынтегральную дробь нужно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{v^{2q-2p-1}}{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1\right)} = \sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k v + \beta_k}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1}.$$

Умножим обе части на знаменатель левой дроби:

$$v^{2q-2p-1} = \sum_{k=1}^{q} (\alpha_k v + \beta_k) \frac{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1\right)}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^{2q-2p-1} = \sum_{k=1}^{q} (\alpha_k v + \beta_k) \frac{1+v^{2q}}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1}.$$

Неизвестные ровно $2q$. Для их нахождения подставим корни $v = e^{i\pi(2k-1)/2q}$. Сопряженные корни мы не рассматриваем, так как уже эти корни дадут в точности $2q$ действительных уравнения. Имеем:

$$e^{i\pi\frac{(2q-2p-1)(2k-1)}{2q}} = \left(\alpha_k e^{i\pi\frac{2k-1}{2q}} + \beta_k\right) \lim_{v\to e^{i\pi(2k-1)/2q}} \frac{1+v^{2q}}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1}.$$

Воспользуемся правилом Лопиталя для вычисления предела:

$$\lim_{v\to e^{i\pi(2k-1)/2q}} \frac{1+v^{2q}}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1} = \lim_{v\to e^{i\pi(2k-1)/2q}} \frac{2qv^{2q-1}}{2v - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)} =$$

$$= \frac{qe^{i\pi\frac{(2k-1)(2q-1)}{2q}}}{e^{i\pi\frac{2k-1}{2q}} - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)} = \frac{qe^{i\pi\frac{(2k-1)(2q-1)}{2q}}}{i\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}$$

Таким образом, имеем:

$$e^{i\pi\frac{(2q-2p-1)(2k-1)}{2q}} = \frac{qe^{i\pi\frac{(2k-1)(2q-1)}{2q}}}{i\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}.$$

Поделим обе части на $e^{i\frac{(2k-1)(2q-1)}{2q}}$:

$$e^{-i\pi\frac{p(2k-1)}{q}} i\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) = q\left(\alpha_k e^{i\pi\frac{2k-1}{2q}} + \beta_k\right).$$

Теперь нужно разделить действительную и мнимую части. Мнимая часть:

$$\cos\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) = q\alpha_k \sin\left(\pi\frac{2k-1}{2q}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k = \frac{1}{q}\cos\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right).$$

Действительная часть:

$$\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) = \cos\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\cos\left(\pi\frac{2k-1}{2q}\right) + q\beta_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_k = -\frac{1}{q}\cos\left(\pi\frac{(2p+1)(2k-1)}{2q}\right).$$

Возвращаемся к интегрированию дробей:

$$2q\sum_{k=1}^{q}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha_k v + \beta_k}{v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + 1}dv.$$

Чтобы проинтегрировать такую дробь, нужно выделить полный квадрат в знаменателе:

$$\int\frac{\alpha_k v + \beta_k}{\left(v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}dv =$$

$$= \alpha_k\int\frac{v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}{\left(v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}dv +$$

$$+ \left(\alpha_k\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + \beta_k\right)\int\frac{dv}{\left(v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)} =$$

$$= \frac{\alpha_k}{2} \ln\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + 1\right) +$$
$$+ \frac{\alpha_k \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + \beta_k}{\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)} \arctan\left(\frac{v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}\right).$$

Вычислим отдельно числитель коэффициента второго слагаемого:

$$\alpha_k \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + \beta_k = \frac{1}{q}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right).$$

Отсюда следует, что весь коэффициент второго слагаемого равен

$$\frac{1}{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right).$$

Теперь нужно просуммировать и одновременно подставить найденные α_k и β_k (с учетом множителя $2q$ сократится q в знаменателе):

$$\sum_{k=1}^{q}\left[\cos\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\ln\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty} +$$
$$+2\sum_{k=1}^{q}\left[\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\arctan\left(\frac{v - \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty}.$$

Теперь выполним подстановку в первой сумме. В нуле получается ноль. А в бесконечности логарифм стремится к бесконечности. Выпишем асимптотику логарифма:

$$\ln\left(v^2 - 2v\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)+1\right) = \ln v^2 + \ln\left(1 - 2\frac{1}{v}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right) + \frac{1}{v^2}\right) =$$
$$= 2\ln v + \bar{\bar{o}}(1).$$

Остается посчитать сумму косинусов и тут имеется только две возможности: либо сумма не равна нулю и все слагаемое стремится к бесконечности, либо равна нулю и все слагаемое ноль. Вычислим сумму косинусов:

$$\sum_{k=1}^{q}\cos\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{p\pi}{q}}\sum_{k=1}^{q}\left(\sin\frac{2kp\pi}{q} - \sin\frac{2\pi p(k-1)}{q}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{p\pi}{q}}(\sin 2p\pi - \sin 0) = 0$$

Таким образом, первое слагаемое равно нулю. При подстановке бесконечности во втором слагаемом арктангенс переходит в $\pi/2$ и остается сумма синусов:

$$\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right) = -\frac{1}{2\sin\frac{p\pi}{q}}\sum_{k=1}^{q}\left(\cos\frac{2kp\pi}{q} - \cos\frac{2\pi p(k-1)}{q}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{p\pi}{q}}\left(\cos 2p\pi - \cos 0\right) = 0.$$

Остается подставить ноль во второе слагаемое:

$$2\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\arctan\left(\cot\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)\right)\right] =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi(2k-1)}{2q}\right] =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\frac{\pi}{2} - 2\sum_{k=1}^{q}\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right)\frac{\pi(2k-1)}{2q}.$$

Первая сумма уже считалась и она равна нулю. Остается только вторая сумма:

$$-\frac{\pi}{q}\sum_{k=1}^{q}(2k-1)\sin\left(\pi\frac{p(2k-1)}{q}\right) = \left(\sum_{k=1}^{q}\cos\left(x\frac{\pi(2k-1)}{q}\right)\right)'_x\Bigg|_{x=p} =$$

$$= \left(\frac{\sin 2x\pi}{2\sin\frac{\pi x}{q}}\right)'_x\Bigg|_{x=p} = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi\cos 2x\pi\sin\frac{\pi x}{q} - \sin 2x\pi\cos\frac{\pi x}{q}\frac{\pi}{q}}{\sin^2\frac{\pi x}{q}}\Bigg|_{x=p} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi p}{q}}.$$

Таким образом, для рациональных $x = p/q$ ответ получен:

$$\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi p}{q}}.$$

Теперь, если x иррационально, то подбираем последовательность рациональных точек, которая стремится к x (в силу плотности), и с учетом непрерывности полученного равенства, получаем общий ответ для произвольного значения x из интервала $(0,1)$:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

6.2. Приложения

Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+\pi^2)\cosh x}.$$

Интеграл, очевидно, сходится. Рассмотрим функцию

$$F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{(x^2+\pi^2)\cosh x} dx.$$

Тогда исходный интеграл есть $F(0)$. Для a допустимы значения из промежутка $[-1,1]$. Функция является непрерывной на $[-1,1]$ из признака Вейерштрасса (верхний $\cosh ax$ оцениваем сверху $\cosh x$ и получаем сходящийся интеграл). Продифференцируем:

$$F'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sinh ax}{(x^2+\pi^2)\cosh x} dx.$$

Тут подставлять 1 уже нельзя. Равномерная сходимость будет лишь внутри отрезка $[-1,1]$. Продифференцируем еще раз:

$$F''(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \cosh ax}{(x^2+\pi^2)\cosh x} dx = -\pi^2 F(a) + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F''(a) + \pi^2 F(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx.$$

Вычислим отдельно интеграл, стоящий в правой части:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^x+e^{-x}} dx.$$

Обозначим искомый интеграл через I. Сделаем замену переменной $t = e^{-x}$:

$$I = \int\limits_0^{1} \frac{t^a+t^{-a}}{1+t^2} dt.$$

Теперь сделаем другую замену $t = e^x$ в исходном интеграле:

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^a+t^{-a}}{1+t^2} dt.$$

Сложим полученные результаты:

$$2I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^a+t^{-a}}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^2} dt + \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-a}}{1+t^2} dt.$$

Сделаем замену переменной $u = t^2$ в обоих интегралах:

$$4I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{a-1}{2}}}{1+u}du + \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{-a-1}{2}}}{1+u}du = B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1-a}{2}\right) + B\left(\frac{1-a}{2}, \frac{1+a}{2}\right) =$$

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{\sin\left(\pi\frac{1-a}{2}\right)} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Таким образом, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$F''(a) + \pi^2 F(a) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Решаем однородное уравнение:

$$F(a) = C_1 \cos\pi a + C_2 \sin\pi a.$$

Чтобы найти частное решение, придется произвести вариацию постоянной:

$$F(a) = C_1(a)\cos\pi a + C_2(a)\sin\pi a.$$

Необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cos\pi a + C_2' \sin\pi a = 0 \\ -\pi C_1' \sin\pi a + \pi C_2' \cos\pi a = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$C_1' = -C_2' \tan\pi a;$$

подставляем во второе:

$$\frac{C_2'}{\cos\pi a} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi a}{2}} \Leftrightarrow C_2' = \frac{\cos\pi a}{2\cos\frac{\pi a}{2}} = \cos\frac{\pi a}{2} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi a}{2}}$$

$$C_1' = -\frac{\sin\pi a}{2\cos\frac{\pi a}{2}} = -\sin\frac{\pi a}{2}.$$

Интегрируем и получаем:

$$C_1(a) = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi a}{2} + C_1;$$

$$C_2(a) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi a}{2} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\tan\frac{\pi a}{4}}{1-\tan\frac{\pi a}{4}} + C_2.$$

Таким образом, получаем решение неоднородного уравнения:

$$F(a) = C_1\cos\pi a + C_2\sin\pi a + \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi a}{2}\cos\pi a + \sin\frac{\pi a}{2}\sin\pi a\right) - \frac{\sin\pi a}{\pi}\ln\frac{1+\tan\frac{\pi a}{4}}{1-\tan\frac{\pi a}{4}} =$$

$$F(a) = C_1 \cos \pi a + C_2 \sin \pi a + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi a}{2} - \frac{\sin \pi a}{\pi} \ln \frac{1 + \tan \frac{\pi a}{4}}{1 - \tan \frac{\pi a}{4}}.$$

Начальные условия:

$$F(1) = \frac{1}{2}, \quad F'(0) = 0.$$

Можно и по-другому попытаться определить константы, заметив свойства функции $F(a)$. Эта функция является четной, а в полученном решении нечетным является только слагаемое $C_2 \sin \pi a$. Следовательно, $C_2 = 0$. Но одну точку все-таки придется подставить - $a = 1$. Последнее слагаемое стремится к нулю, так как синус эквивалентен πa, а логарифм с многочленом "не справится". Останется только одно первое слагаемое:

$$\frac{1}{2} = -C_1 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Получаем решение задачи Коши

$$F(a) = -\frac{1}{2} \cos \pi a + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi a}{2} - \frac{\sin \pi a}{\pi} \ln \frac{1 + \tan \frac{\pi a}{4}}{1 - \tan \frac{\pi a}{4}}.$$

Откуда находим

$$F(0) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} = \frac{4 - \pi}{2\pi}.$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ