МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ. ЧАСТЬ 1

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
СОКОЛОВУ ВЕРУ АЛЕКСЕЕВНУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Содержание

Семинар 1 **4**
1.1. Теория последовательностей 4
1.2. Критерий Коши 8

Семинар 2 **9**
2.3. Критерий Коши и отрицание критерия Коши 9
2.4. Достаточное условие сходимости. Теорема Вейерштрасса. 13
2.5. Важная задача. Число e 15

Семинар 3 **17**
3.6. Теорема Чизара 17
3.7. Теорема Штольца. 18

Семинар 4 **21**
4.8. Вычисление пределов 21
4.9. Задачи, которые часто встречаются в этом случае 22
4.10. Еще примеры задач 24

Семинар 5 **26**
5.11. Дифференциальное исчисление функции одной переменной 26
5.12. Теорема Ролля 26
5.13. Теорема Ролля в задачах 27
5.14. Теорема Лагранжа. 28
5.15. Теорема Коши. 28

Семинар 6 **30**
6.16. Исследование функции и роль асимптотики 30

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 1

1.1. Теория последовательностей

Для начала, представим, что мы делаем какие-то дискретные измерения некоторого процесса и получаем какие-то значения $a_1, a_2, a_3, ...$ Теперь нам надо этот огромный массив значений (он может быть и конечным) запомнить, желательно потратить минимум памяти.

Пример.

$$2, 2, 2, ...$$

В этом случае очевидно стоит запомнить одно число.

Пример.

$$1, 3, -1, 2, 2, 2, ...$$

То есть измерения с некоторого момента стали тождественными. Понятно, что стоит запомнить только набор из 4 чисел.

Пример.

$$1, 2, -1, 0, 4, ...$$

Бывают последовательности совсем хаотичные, тут уже ничего не сделаешь. Самое выгодное в данном случае - запомнить все эти числа.

Пример.

$$2.5, 2.05, 2, 005, 20005, ...$$

$$2.5, 2.05, 1.95, 2.049, 1.96, ...$$

А можно ли такие последовательности запомнить с точностью 0.1? Конечно, и там и там можно убрать первое число и сказать, что все остальные равны примерно 2. То есть точность $\varepsilon = 0.1$ достигается. Для каких-то задач этого хватает. Однако, если возникает вопрос о дальнейшем росте точности (например, $\varepsilon = 0.001$), то выясняется, что сделать эту уже заметно сложнее, а может и нельзя вовсе.

Так формируется понятие сходящейся последовательности - это последовательность, у которой, начиная с некоторого номера, с наперед заданной точностью можно заменить все элементы одним числом. С такими последовательностями удобно работать на практике.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется сходящейся и число a называется пределом, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Задача. Дана последовательность

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Найти её предел.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение. Интуитивно понятно, что предел равен 1, но это надо объяснять. Чтобы установить, что последовательность имеет предел, надо найти функцию $N(\varepsilon)$ из определения. Для этого в данной задаче решим неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon; \quad |\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Таким образом, мы нашли функцию $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Рассмотрим подробнее этот пример. Возьмём $\varepsilon = 0.1$, тогда $N(0.1) = 9$. Это значит, что начиная с 10 мы гарантированно можем сказать, что с точностью 0.1 последующие элементы примерно то же, что 1. □

Задача. Дана последовательность

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 3}{5n^3 + 7n^2 - 20n + 10}$$

Найти её предел.

Решение. Очевидно, что это последовательность бесконечно малая, то есть предел равен 0. Опять же, будем пытаться решить неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Нам не обязательно решать это неравенство точно, речь идет о существовании решения этого неравенства, являющееся целым лучом, и нахождении гарантированного куска этого луча, то есть, нам не обязательно искать оптимальное $N(\varepsilon)$. Разумеется, если считать точно, то может получится функция примерно такого вида

$$N(\varepsilon) = \frac{1/\varepsilon\sqrt{1/\varepsilon^2 - 1/\varepsilon + 2}}{125},$$

а значит при подстановке, например, $\varepsilon = 1/50$ вычисления будут ужасными. $N(\varepsilon)$ удобно искать в виде

$$\frac{c}{\varepsilon^n}, \frac{c}{e^{1/\varepsilon^n}}, \frac{c}{\ln^n(1/\varepsilon)},$$

потому что $N(\varepsilon)$ должно вычисляться быстро. То есть мы должны перейти к неравенству, решение которого является решением изначального.

В данной задаче мы можем оценить сверху нашу последовательность какой-то маленькой последовательностью. Соответсвенно числитель сделаем побольше, а знаменатель поменьше.

$$2n^2 + 3n - 3 < 2n^2 + 3n^2 = 5n^2$$

$$5n^3 + 7n^2 - 20n + 10 > 5n^3 - 20n.$$

Дальше мы хотим заменить $-20n$ на что-то со старшим порядком, например, на $-n^3$, тогда надо узнать, когда $-20n > -n^3$. Это при $n \leq 5$ гарантированно выполнено. В конечном итоге получаем неравенство

$$a_n < \frac{5n^2}{4n^3} = \frac{5}{4n} < \varepsilon$$

Последнее неравенство решается аметно легче. $N(\varepsilon) = max(\frac{5}{4\varepsilon}, 5)$. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача. Дана последовательность

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Найти её предел.

Решение. В этой задаче нетрудно найти явно функцию $N_1(\varepsilon) = \log_2(1/\varepsilon)$. Но можно обойти выражение с логарифмом и решить другим способом.

$$a_n = \frac{1}{(1+1)^n} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Это оценка достаточно точная, получена с помощью неравенства Бернулли. Конечно, мы могли использовать оценку $2^n > n^2$, но это неравенство верно при достаточно больших n, поэтому нам нужно определенное число, начиная с которого будет оно выполнено. В нашем способе оценка достаточно хорошая. $N_2(\varepsilon) = 1/\varepsilon - 1$. Она не такая точная, как $N_1(\varepsilon)$, но верная. Действительно, при $\varepsilon = 0.001$: $N_1(\varepsilon) \approx 10$, $N_2(\varepsilon) \approx 1000$. □

Задача. Дана последовательность

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

Определить, чему равен предел, и найти N.

Решение. Домножим на сопряженное:

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \approx 1,\ n \to \infty$$

Тонкость в том, что неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$ решить не так просто. Первым делом раскрываем модуль. Важно помнить, что неравенство должно быть верным для любого n или для $n > A$, где A известно заранее. Очевидно, что $n + 1 > \sqrt{n^2 + 2n}$. Значит наше неравенство равносильно $n + 1 - \sqrt{n^2 + 2n} < \varepsilon$.

$$(n + 1 - \varepsilon) < n^2 + 2n; \quad 2n(1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)^2 < 2n; \quad 2n\varepsilon > (1 - \varepsilon)^2.$$

Дальше можно не делать равносильные переходы, а перейти к следствию, то есть $2n\varepsilon > 1$, $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. □

Дальше идет стандартный блок задач, использующих неравенство Бернулли и бином Ньютона, а именно:

$$a_n = \frac{2^n}{n!},\ b_n = \frac{n^2}{2^n},\ c_n = \sqrt[n]{2},\ d_n = \sqrt[n]{n}$$

и т.д. Здесь лучше найти $N(\varepsilon)$, но будет появляться достаточно сильное округление.

Идея первой задачи достаточно простая - надо так оценить, чтобы все сократилось.

Решение.

$$\frac{2^n}{n!} \le \frac{2 * 2 * \ldots * 2}{1 * 2 * \ldots * n}$$

Надо сделать так, чтобы было как можно больше одинаковых сомножителей, но не все. Заменим в знаменателе все числа кроме n на 2, тогда в числителе будет n штук 2, а в знаменателе $n - 1$.

$$a_n < \frac{2 * 2 * \ldots * 2 * 2}{2 * 2 * \ldots * 2 * n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

Таким образом, $N(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon}$. Оценка очень грубая, но верная. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Во второй задаче без бинома Ньютона не обойтись.

Решение.

$$b_n = \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{(1+1)^n} = \frac{n^2}{\sum_{k=0}^{n} C_n^k}$$

Все числа C_n^k положительные, все они являются многочленами от n, степень многочленов равна k. А значит, можно оставить одно из слагаемых, выбрав нужное k. Просто надо следить, чтобы порядок многочлена был больше порядка числителя. В данном случае, мы можем взять $n = 3$.

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{C_n^3} = \frac{6 * n^2}{n(n-1)(n-2)}$$

Все эти рассуждения верны для $n > 2$. Нам надо, чтобы было $n-1 > n-\frac{n}{2}$ и $n-2 > n-\frac{n}{2}$, это верно при $n > 4$, тогда

$$b_n < \frac{4 * 6n^2}{n^3} = \frac{24}{n}$$

$N = \frac{24}{\varepsilon}$ □

Рассмотрим третий случай.

Решение. Конечно, эта последовательность сходится к 1. Чем больше степень корня, тем ближе число приближается к 1.

$$|\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon, \quad \sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon$$

Логарифмировать в этом случае нехорошо, так как это не самый удачный, с точки зрения практики, путь, поэтому лучше возвести в степень n, использовать бином Ньютона и выбрать одно нужное слагаемое. $2 < (1+\varepsilon)^n$, а значит $2 < n\varepsilon$. $N(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}$. Здесь $N(\varepsilon)$ достаточно точное. □

Рассмотрим четвертую задачу.

Решение.

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon, \quad \sqrt[n]{n} < \varepsilon + 1, \quad n < (1+\varepsilon)^n$$

Первого слагаемого недостаточно, оценим этот бином вторым слагаемым. Вспомним так же $n - 1 > n - \frac{n}{2}$, тогда

$$n < \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2} < \frac{n^2\varepsilon^2}{4}$$

при $n > 1 \Rightarrow N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon^2}$. □

Замечание. В последних двух задачах можно поговорить о вопросе сходимости. c_n начинает быть похожим на 1 достаточно быстро, при $\varepsilon = 1/1000$ $N = 2000$, а чтобы приблизить d_n с такой же точностью, надо взять $N = 4 * 10^6$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

К этим задачам потом можно возвращаться. Например,

$$a_n = n^3(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})$$

Эта последовательность сходится к $\frac{1}{6}$. Для того, чтобы понять, с какого момента она начинает сходиться, надо взять a_n и оценить

$$|n^3(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3})| < \varepsilon; \quad \sin\frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3},$$

то есть модуль раскрывается со знаком минус, то есть

$$n^3(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}) < \varepsilon$$

Здесь надо использовать неравенство $\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5}$, тогда $\frac{n^3}{120n^5} < \varepsilon$, $N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{120\varepsilon}}$. Отсюда видно, что последовательность достаточно быстро сходится к своему пределу.

1.2. Критерий Коши

$$\exists \lim a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\, \forall p\, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

Доказательство в одну сторону очевидно. Что значит, что есть предел? Это значит, что с некоторого номера числа находятся возле своего предела, а значит и друг рядом с другом. Обратно это утверждение нетривиально. Но результат этот очень важен, ведь если мы не можем угадать, к чему сходится последовательность, то мы можем, во-первых, понять, что она действительно сходится, и во-вторых, даже не находя предела, мы находим количественную характеристику $N(\varepsilon)$. Устремим $p \to \infty$, тогда $|a_n - a| < \varepsilon$, то есть $N(\varepsilon)$ то же самое. Из этих рассуждений мы понимаем, что мы можем посчитать предел приближенно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 2

2.3. Критерий Коши и отрицание критерия Коши

Вычислив $N(\varepsilon)$ из критерия Коши, мы находим его же и для определения. Тем самым мы можем найти приближенное значение предела. В критерии N обозначает скорость сходимости последовательности, то есть то, насколько она быстро становится похожа на свой предел. Чем меньше N, тем быстрее сходимость.

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \, \exists n > N \, \exists p : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$$

В отрицании критерия Коши знаковой вещью является p. Она говорит о том, насколько быстро последовательность расходится, то есть чем меньше p, тем быстрее она расходится. Желательно, при решении задач обращать внимание на N и p. Соответственно, задача на положительную часть критерия Коши должна быть примерно такой.

Задача.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k^2}{2^k}$$

Надо исследовать на сходимость.

Решение. Оценим $a_{n+p} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k^2}{2^k}$. Надо показать, что эта разность маленькая. Здесь возникает неравенство с двумя параметрами (ε и p), а ответ должен зависеть лишь от одного, то есть, параметра p не должно в конце остаться.

Сначала применим неравенство треугольника, затем оценим синус.

$$|a_{n+p} - a_n| \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k^2|}{2^k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k}$$

Во-первых, такая сумма не считается, потому что мы умеем считать только сумму прогрессий. Во-вторых, если вместо синусов поставим что-то чуть большее, то ничего не испортится, потому что прогрессия сходится достаточно быстро. Таким образом, точно вычисляем такую сумму:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}}$$

Получилось выражение, не содержащее длинную сумму, но все так же зависящее от p. Мы хотим избавиться от этого параметра, поэтому избавимся от последнего слагаемого.

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon; \quad N(\varepsilon) = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

Таким образом, мы видим, что последовательность действительно сходится, причем сходится достаточно быстро, так как $N(\varepsilon)$ достаточно маленькое. Более того, мы можем вычислить предел последовательности с любой наперед заданной точностью. Например, для $\varepsilon = 0.001$ достаточно взять $N = 10$, вычислить на компьютере сумму 10 слагаемых и так получим предел с точностью до 10 знаков. На этом примере хорошо видны преимущества критерия Коши. □

Следующая задача уже менее тривиальная.

Задача. Ряд обратных квадратов.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Решение. То, что такая последовательность сходится, менее очевидно. Если рассмотреть выражение $a_{n+p} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}$, то непонятно сразу, какими оценками пользоваться. Геометрическая прогрессия тут вряд ли возникнет, поэтому тут идея такая - воспользоваться нетривиальной оценкой

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Значит, данная последовательность оценивается суммой разности. Действительно, иного выхода нет, потому что мы умеем считать только прогрессии и сумму разностей, а дальше все то же самое. Убираем длинную сумму, сокращаем, оцениваем величиной, не зависящей от p.

$$a_{n+p} - a_n \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

Отсюда $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. □

Замечание. Имеет смысл каждый раз обращать внимание на некоторые вещи: $N(\varepsilon)$ тут совершенно конкретное, простое, последовательность по сравнению с предыдущей сходится намного хуже. Например, чтобы здесь посчитать с точностью до $\varepsilon = 0,001$ придется вычислить уже 1000 слагаемых. Понятно, и там и здесь значение N не точное, хотя близко к оптимальному.

Имеет смысл разобрать задачу на расходимость, а потом возвращаться то к одному, то к другому.

Задача. Гармонический ряд.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{k}$$

Решение. Здесь принципиально иная структура рассуждений. В этой задаче наоборот, параметр p находится в нашем управлении. Здесь мы выбираем $p(n)$, которое и показывает нам, насколько быстро последовательность расходится. Подходит самая тривиальная оценка, мы заменяем все слагаемые самым маленьким.

$$|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n+p} = \frac{p+1}{n+p} > \frac{p}{n+p}$$

Выбирая $p(n) = n$, получаем, что $|a_{n+p} - a_n| \geq \frac{1}{2}$. Получили количественную характеристику последовательность: надо взять a с номером $2n$, чтобы разность $a_{2n} - a_n$ была больше $\frac{1}{2}$. То, насколько большим мы берем этот член последовательности, характеризует скорость её расходимости. Если взять просто соседние члены последовательности, то, конечно, ничего подобного мы не получим. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание. Сразу понятно, что если разобраны задачи с гармоническим рядом и с рядом обратных квадратов, то бесполезно решать задачи суммы обратных кубов или суммы обратных к корню числа, ввиду абсолютно тривиальных оценок. Оценка в этой задаче похожая на задачу с суммой обратных к квадратам.

Задача.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Решение. Чем отличается последовательность $\frac{1}{k}$ от $\frac{1}{k^2}$? Во втором случае у нас есть ресурсы, с помощью которых мы можем разбить k^2 на некоторое произведение, один из множитель которого - многочлен первой степени. В первом случае такого ресурса уже нет. В нашей последовательности этот самый ресурс есть, но он небольшой, его трудно поймать. Ясно, что надо какое-то из чисел k заменить меньшим.

$$\frac{1}{k\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}\sqrt{k}}$$

Если бы теперь здесь где-нибудь возникла бы разность, то получился бы тот же эффект, что и для $\frac{1}{k^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{k(k-1)}\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k})} \geq \frac{2}{\sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} =$$

Домножаем на сопряженное:

$$= 2(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}).$$

$$a_{n+p} - a_n \geq 2\sum_{k=n}^{n+p}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+p}}\right).$$

$N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon^2}$. Таким образом, $N(\varepsilon)$ найдено, но оно достаточно велико, ряд сходится медленно. Чтобы вычислить его сумму с точностью до $\varepsilon = 0.001$ надо вычислить уже сумму 10^6 слагаемых. □

Замечание. Этот приём можно обсуждать и в виде задачи $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1+\delta}}$. Для ее решения нужно доказать вот такое неравенство

$$\frac{1}{k^{1+\delta}} \leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{(k-1)^{\delta}}\frac{1}{k^{\delta}} \quad \forall \delta > 0.$$

Решение подобных задач приблизит к понимаю критерия Коши.

Дальше опять можно двигаться в сторону расходящихся рядов. Это уже трудные задачи, например

Задача.

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log_2 k}$$

Доказать, что такая последовательность не сходится.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение. Обычно при решении предпринимается такая попытка: заменить самым маленьким слагаемым и оценить снизу, но такую величину никаким выбором p нельзя сделать маленькой.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k\log_2 k} \geqslant \frac{p}{(n+p)\log_2(n+p)}$$

Проблема в том, что p надо брать очень большим. Если брать p того же порядка, что и n, то ничего не выйдет. Решать задачу надо следующим образом. Надо взять и разбить сумму на части вида

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}} \frac{1}{k\log_2 k},$$

то есть p следует взять квадратом нижнего номера. Необходимо, чтобы сумма была очень длинной, чтобы та тривиальная оценка сработала. Разобьем эту сумму на части по степеням двойки, а затем для каждого элемента разбиения применим оценку. В каждой части верхний номер будет в два раза больше нижнего.

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}} \frac{1}{k\log_2 k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j+n-1}+1}^{2^{j+n}} \frac{1}{k\log_2 k}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j+n-1}+1}^{2^{j+n}} \frac{1}{k\log_2 k} \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j+n-1}+1}^{2^{j+n}} \frac{1}{2^{j+n}(j+n)}.$$

Все слагаемые справа от k не зависят, всего их 2^{n+j-1}. Вычисляем эту сумму,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j+n-1}+1}^{2^{j+n}} \frac{1}{2^{j+n}(j+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Здесь применяем оценку для гармонического ряда и получаем $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{4}$. Получаем, что сумма такого ряда расходится, но только разница между a_n и a_{n+p} окажется большой только если $p(n) = n^2$. □

Замечание 1. То, что основание у логарифма 2 не принципиально, но с 2 удобнее доказывать.

Замечание 2. Наш ряд чуть меньше, чем гармонический, но недостаточно, чтобы стать сходящимся.

Задача.

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k}$$

Решение. Этим можно удивить, ведь от предыдущей задачи эта последовательность отличается только квадратом у логарифма, а ответ меняется на диаметрально противоположный. Оценка здесь стандартная:

$$\frac{1}{\ln\ln^2 k} \leqslant \frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k}.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Она очень тонкая и получается так: квадрат логарифма оценивается произведением квадратов от двух соседних номеров, а потом используется оценка, которая появлялась при описании числа e.

$$\frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \frac{\frac{1}{k}}{\ln k \ln(k-1)} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)}{\ln k \ln(k-1)} = \frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k}.$$

Используя это неравенство, получаем, что

$$a_{n+p} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k\ln^2 k} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln k}\right) = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+p)} < \frac{1}{\ln n} < \varepsilon.$$

$N(\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Теперь ясно, что не так уж и сильно отличается сумма этого ряда от предыдущего. Чтобы посчитать сумму с точностью $\varepsilon = 0.01$ надо посчитать сумму e^{100} слагаемых, что не сильно больше, чем количество атомов на Земле. То есть этот ряд сходится весьма теоретически. □

На данный момент, не ясна роль n, ведь начинать оценивать разность можно не с каждого номера. Для этого полезны задачи такого типа.

Задача.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$$

Решение. Выясняется, что p надо брать не слишком большим, здесь доказать расходимость не так уж и просто. Надо показать, что $a_{n+p} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ не слишком маленькая. Для этого надо добиться, чтобы косинусы были не слишком маленькими и сохраняли знак, то есть необходимо, чтобы $\forall k \in [n+1, n+p]$ косинусы были бы больше, например, $\frac{1}{2}$, то есть

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi l \leq \sqrt{k} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi l \Leftrightarrow (-\frac{\pi}{3} + 2\pi l)^2 \leq k \leq (\frac{\pi}{3} + 2\pi l)^2.$$

Тогда левая часть это $n+1$, а правая $n+p$. Следовательно,

$$a_{n+p} - a_n \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{n+p}} = \frac{p+1}{2\sqrt{n+p}} > \frac{p}{2\sqrt{n+p}}.$$

Тут p можно взять достаточно маленьким, n порядка l^2, тогда p будет порядка l. Здесь начальный номер нельзя брать где попало, а p не стоит брать очень большим, $p(n) = \sqrt{n}$. □

2.4. Достаточное условие сходимости. Теорема Вейерштрасса.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Тогда существование предела равносильно ограниченности.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Можно перефразировать и сказать не про монотонное возрастание, а про то, что члены последовательности представимы в виде $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, где $\alpha_k \geq 0$.

На эту тему есть масса задач. Первый класс задач - последовательности, заданные рекурентными формулами.

Задача. $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$

Решение. Надо проверить монотонность и ограниченность.
1) Монотонность. Что нужно для этого? Сравнить x_{n+1} с x_n. Это то же самое, что их квадраты. $\sqrt{2 + x_1} \vee x_n$,

$$0 \vee x_n^2 - x_n - 2 = (x_n + 1)(x_n - 2)$$

Отсюда видно, что $\{x_n\}$ возрастает $\Leftrightarrow x_n < 2$. Ничего доказать нам не удалось, но мы установили нечто. Оказывается, мы установили границу.
2) Ограниченность. Доказываем, что $x_n < 2$. По индукции. База: $x_1 < 2$. Шаг индукции: $x_n < 2 => 2 + x_n < 4 => \sqrt{2 + x_n} < 2$.

Здесь это несложно, но если взять $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, то начнется проблема с корнями и счетом. Как следствие, последовательность сходится, её предел равен 2 (для этого необходимо перейти к пределу). К сожалению, эта задача решена качественно, то есть предел найден, а $N(\varepsilon)$ нет. □

Задача. $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, $x_1 = 8$.

Решение. Совершенно очевидно, что $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$. Также очевидно, что последовательность монотонна. Заметим, что здесь ситуация не такая, как в задаче выше, тут нет связи между ограниченностью и монотонностью.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_n} - x_n) < 0$$

при $x_n \geq 2$, то есть последовательность убывающая. Причем это все выполнено при любом стартовом значении: если x_1 взять очень маленьким, то x_2 будет уже достаточно большим и рассуждения повторятся, убывание с $n \geq 2$. Так же очевидно, решая соответсвующее уравнение, переходя к пределу, получаем, что предел равен $\sqrt{2}$. Выясним, какое N у этой последовательности.

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n} - \sqrt{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{x_n}$$

Понятно, что так как x_n это примерно $\sqrt{2}$, то разность x_{n+1} и $\sqrt{2}$ равно половине квадрата разности и еще деленное на что-то. Также понятно, что это "что-то"ничего не означает, потому что оно - примерно константа. Для того, чтобы это x_n убрать, надо посчитать $\left|x_{n+1} + \sqrt{2}\right|$. Выкладки здесь абсолютно идентичные, то есть

$$\left|x_{n+1} + \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2}\frac{\left(x_n + \sqrt{2}\right)^2}{x_n}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\left|\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}\right|^2$$

Отсюда получается сразу, что наша разность каждый раз возводится в квадрат. Получаем, что $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right| < q^{2^n}$, где q зависит от стартового шага. Это значение примерно такое $q = \left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$. Если мы сразу попали в $\sqrt{2}$, то числитель уже маленький, а если мы сильно ошиблись, то эта величина все равно меньше 1 и засчет такой большей степени все быстро приходит в норму. То есть если $q^{2n} < \varepsilon$, то $N(\varepsilon) = \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Если нам нужна точность $\varepsilon = 2^{-1000}$, то всего лишь нужно 10 шагов такого алгоритма для достижения такой точности. □

Замечание. Теорема Вейерштрасса является не только качественным аппаратом для доказательства, но и помогает найти $N(\varepsilon)$.

2.5. Важная задача. Число e

Задача. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

Решение. Надо доказать, что последовательность x_n монотонна и ограничена. Есть масса решений. Например, одно из них использует неравенство о среднем. Также есть много решений, связанных с банальным раскрытием скобок. Например,

$$x_n = 1 + 1 + \frac{(1-\frac{1}{2})}{2}...,$$

потом выкидываем все минусы и говорим, что последовательность ограничена, монотонность очевидна из этого вида, а значит есть сходимость. Наше решение будет таким:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{(n+1)}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(n(n+2))^n}{((n+1)^2)^n}\frac{n+2}{n+1}$$

Из этого выражения видно, насколько это тонкая задача: первая дробь чуть-чуть меньше 1, а вторая чуть больше, они начинают соперничать, и, оказывается, первая побеждает. Как это проверить? В ситуации, когда аргумент близок к 1 удобно применить неравенство Бернулли, а именно

$$\frac{(n(n+2))^n}{(n+1)^2)^n}\frac{n+2}{n+1} > (1+n\frac{-1}{(n+1)^2})\frac{n+2}{n+1}$$

Если x положительно, то неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ очевидно как следствие бинома Ньютона, но если $x \in (-1,0)$, т.е. маленькое отрицательное, то это неравенство неверно, поэтому мы пользуемся именно неравенством Бернулли. Раскроем скобки.

$$(1+n\frac{-1}{(n+1)^2})\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}$$

Оценки очень точные, из них мы видим, что последовательность возрастающая.

А дальше очень красивое рассуждение: последовательность $e_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ убывающая (доказывается похожим способом). Отсюда видно, что $x_n > y_n$, одна последовательность

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

растет, другая - убывает, обрауется система вложенных отрезков $[x_n, y_n]$, а e лежит во всех этих отрезках. Это доказывает, что число e существует. Помимо того, у нас появляется неравенство (прологарифмируем выражение $x_n < e < y_n$) $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$. Отсюда так же задаром получаем $N(\varepsilon)$: для этого оценим разность $e - x_n < y_n - x_n < \frac{4}{n}$. Отсюда, $N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon}$, то есть последовательность сходится достаточно медленно, а значит e таким способом считать неудобно.

Еще приятные неравенства: $2 < e < 4$; $x_n < y_k \, \forall n, k$. □

Замечание. На самом деле, эта последовательность связана еще и с финансовой математикой. Например, положили вклад под 100%, то в конце года получили $(1 + 1)^1 = 2$ рубля. Если процент капитализируется первые полгода, то будет $(1 + \frac{1}{2})^2$. Бернулли заинтересовался, а можно ли неограниченно разбогатеть. Но оказалось, что нет, так как $x_n < e$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 3

Рассмотрим задачу из недавней олимпиады по математическому анализу.

Задача. Докаать, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} = \ln \ln n + O(1)$.

В прошлый раз мы доказали, что $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$, нашли оценку $N(\varepsilon)$ и получили хорошие неравенства. Таким же способом как и на прошлом семинаре можно считать и такие задачи:
1)$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - c\sqrt{k}$
2)$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - c \ln \ln k$.
Далее идет серия задач, которые важны сами по себе. Например,

3.6. Теорема Чизара

Задача. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+...+a_n}{n} = a$.

Решение. Есть последовательность, сходящаяся к числу a и изначально она может сильно отклоняться, но влияние первых членов последовательности не видно. Проблема нашей же последовательности в том, что в ней задействованы все элементы, даже самые плохие, но с ростом n их вклад становится все меньше и меньше. Одновременно с этим, реультат не вызывает сомнений. Грубо говоря, если элементы последовательности с некоторого n похожи на число a, то и их среднее арифметическое тоже, только момент, с которого они начинают быть похожи на число a будет другим.

Первое, на что надо обратить внимание, это линейность задачи, то есть, если мы перенесем число a вправо, то ничего не изменится. Значит задачу можно свести к следующему:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 - a) + ... + (a_n - a)}{n} = 0$$

Это приводит к серьезному упрощению выкладок, это необходимо для лучшего понимания идеи. Обозначим $b_n := a_n - a$, то есть случай произвольного a редуцировали к случаю 0. То есть хотим доказать импликацию $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_1+...+b_n}{n} = 0$ (другими словами, если последовательность бесконечно малая, то и последовательность из ее средних арифметических тоже бесконечно малая).

Сумма $\frac{b_1+...+b_n}{n}$ маленькая, она состоит из первой части очень непредсказуемых слагаемых, которые могут быть огромными, и второй части чисел, которые с ростом n будут становится маленькими. Разобьем нашу сумму на эти две части. $\frac{b_1+...+b_n}{n} = \frac{b_1+...+b_N}{n} + \frac{b_{N+1}+...+b_n}{n}$, где $N << n$. Мы видим, что слева стоит среднее арифметическое n чисел: от a_1 до a_N и (до n) нулей. Справа мы усредняем уже очень маленькие числа, почему и получаются достаточно маленькие пределы. Теперь распишем это строго. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : |b_n| < \varepsilon$. Тогда $|\frac{b_1+...+b_n}{n}| \leq \frac{|b_1+...b_N|}{n} + \frac{|b_{N+1}|+...+|b_n|}{n}$. Теперь $\forall N \, \exists K : \forall n > K \frac{|b_1+...b_N|}{n} < \varepsilon$. Тогда $|\frac{b_1+...+b_n}{n}| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Важно понять, что мы берем число K, зависящее от уже выбранного числа N, хотя обычно в задачах идея в том, что берут сначала N_1, затем находят N_2 и так далее. □

На основе этого решения нужно и полезно разобрать некоторые задачи вида:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

I) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = a > 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} = a$

II)$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = +\infty$

c) $\ln m_n \frac{n}{a_1+\dots+\frac{1}{a_n}} = +\infty$

III) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = 0$

Причем во всех задачах предполагается, что $a_i \geq 0 \, \forall i$ и что возможно решение без использования неравенств про среднее.

Последнее задание выделено отдельно, потому что среднее геометрическое надо редуцировать не к случаю $a = 0$, а, так как случай мультипликативный, к $a = 1$. Стоит сделать эти номера сугубо элементарными методами, без ln и тому подобного.

Из этих задач можно получить разнообразные следствия. Например, что мы можем получить из 1) номера? Соотношение, демонстрирующее, что признак Даламбера слабее признака Коши.

Задача. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Решение. Возьмем и применим среднее геометрическое к соотношению $\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_1}\dots\frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n}$, где $a_0 := 1$. □

3.7. Теорема Штольца.

Даны две последовательности, нужно сравнить их соотношение. Напрямую это сделать нельзя, ведь получается неопределенность, но, оказывается, при определенных условиях ее можно свести к хорошему виду, а именно к вычислению отношению их скоростей (время здесь дискретно, так что скорость в нашем случае - величина одного шага).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

Если x_n - величина пройденного пути первого, y_n - второго, то отношение пути, пройденного ими, относится так же, как длины их шагов. Необходимое условие - y_n должна возрастать. Теорема часто применяется, когда x_n и y_n - длинные суммы. Метод, к чему теорема Штольца применяется, одновременно является и подсказкой к доказательству этой теоремы. Введем новые последовательности.

$$\alpha_{n+1} = x_{n+1} - x_n; \; \beta_{n+1} = y_{n+1} - y_n, \; \beta_n > 0 \, \forall n$$

Для простоты выкладок положим $x_0 = y_0 = 0$. Тем самым, переформулируем теорему:

Теорема 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k}{\sum_{k=1}^n \beta_k} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ *при* $\beta_n > 0$.

Обозначим этот предел буквой a. И опять же тот же самый трюк - редукция к $a = 0$. Дано:

1) $\sum \beta_k = +\infty$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $\beta_k > 0$
3)$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - a\beta_n}{\beta_n} = 0$,
Надо доказать:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n} (\alpha_k - a\beta_k)}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} = 0$$

Заметим, что если $y_n = n$, то это просто теорема Чизара, соответсвенно, теорема Штольца сильнее.

Обозначим $\gamma_k = \alpha_k - a\beta_k$.

Окончательная переформулировка (в силу линейности задачи):

Теорема 3. *Есть две последовательности γ_n и β_n. 1)$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$, 2) $\beta_n > 0$ Тогда если $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\beta_n} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} = 0$. (последовательность γ_n может быть любой).*

Доказательство. Идея доказательства такая же, как в теореме Чизара, но она чуть тоньше реализуется. Начинаем с конца, берем отношение двух сумм. Мы знаем,что γ_n намного меньше β_n, начиная с некоторого номера. Про элементы с маленькими номерами мы ничего сказать не можем, так как там может быть все наоборот. В первом пределе это не влияет ни на что, но во втором участвуют все члены последовательности. Опять же, разбиваем нашу сумму на две: $n >> N$,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \gamma_k}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} \gamma_k}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}$$

У второй суммы все γ_i много меньше β_i, а значит знаменатель подавит числитель. В первой дроби в числителе фиксированная сумма, а в знаменателе сумма, стремящаяся к ∞. Формально это означает:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : (\frac{\gamma_n}{\beta_n} < \varepsilon)|\gamma_n| < \varepsilon\beta_n \quad \forall n > N$$

$$\forall N\, \exists K : \frac{\left|\sum_{k=1}^{N} \gamma_k\right|}{\sum_{k=1}^{N} \beta_k} < \varepsilon\, \forall N > K$$

Тогда

$$\frac{|\sum_{k=1}^{n} \gamma_k|}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} \leq \frac{|\sum_{k=1}^{N} \gamma_k|}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} + \frac{\sum_{k=N+1}^{n} |\gamma_k|}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} < \varepsilon + \varepsilon \frac{\sum_{k=N+1}^{n} |\beta_k|}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k} < 2\varepsilon$$

Тем самым теорема Штольца доказана. □

Поговорим о применениях.

Задача. Оценка суммы гармонического ряда. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$

Решение. К этой задаче есть совершенно естественный подход:

1) Показать, что последовательность x_n расходится,

2) Оценить асимптотику роста последовательности, то есть найти такую последовательность $y_n : y_n \to +\infty\, x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$.

x_n это последовательность, удовлетворяющую условию теоремы Штольца.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Эквивалентная постановка задачи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 1,$$

но $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}$, то есть осталось подобрать такую последовательность y_n, чтобы она шагала на $\frac{1}{n+1}$. Вспоминается число e.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n-1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}$$

Нашли последовательность. Теперь осталось только аккуратно все доказать. Применяем теорему Штольца, переходим к пределу отношения разности, а затем используем лемму о двух милиционерах.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

А значит $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

3)$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + ?$

Не очевидно, что находится вместо ?, это нетривиальный факт. Для этого надо исследовать последовательность, состоящую из разности. $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Последовательность z_n исследуется ровно так же, как последовательность с числом e.

Проверим монотонность. $z_{n+1} - z_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) < 0$ по неравенствам выше. Получаем, что последовательность монотонно убывает. Может быть два случая: z_n убывает к конечному пределу или к отрицательному бесконечному (тогда справа вместо ? будет стоять что-то непонятное). Оценку непросто придумать, поэтому лучше рассмотреть последовательность $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. Тогда $z_n = w_n + \frac{1}{n}$, тогда $w_n < z_n\, \forall n$.

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) > 0$$

Тогда последовательность w_n возрастает. Тогда $w_n < z_k\, \forall n, k$. Тогда последовательность w_n ограничена сверху любым числом из последовательности z_k, а последовательность z_k ограничена сверху любым числом из w_n. Значит $\lim z_n = \ln w_n = \gamma$, $w_1 < \gamma < z_1$, $0 < \gamma < 1$.

4)Но это еще не все. В качестве приятного бонуса возникает четвертая задача - нахождение $N(\varepsilon)$. $w_n < \gamma < z_n$. $0 < z_n - \gamma < z_n - w_n = \frac{1}{n}$. Тогда $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{\theta}{n}$. Получается $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. То есть чтобы вычислить γ с точностью до $\varepsilon = 0.001$ надо вычислить сумму 1000 слагаемых гармонического ряда и вычесть $\ln(1000)$. □

Этим все не ограничивается, есть еще множество задач, решающихся точно так же.

1)$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

С помощью теоремы Штольца показываем, что главный член ассимптотики $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim 2\sqrt{n}$, затем покаываем, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n} + C + O(\frac{1}{\sqrt{n}})$. O с конкретной постоянной, и опять можно найти $N(\varepsilon)$, чтобы вычислять эту константу с любой точностью.

2)$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + C + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

Здесь чуть лучше $N(\varepsilon)$, для точности $\varepsilon = 0.001$ придется считать сумму примерно 900 слагаемых.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 4

4.8. Вычисление пределов

Рассмотрим предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x+1}$. В этой задаче часто студенты используют правило Лопиталя, что здесь неверно. Главное в матанализе - умение представлять функцию $f(x)=g(x)+h(x)$, где первая устроена проще, а вторая маленькая.

При объяснении темы пределов надо начинать с вычисления пределов $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$, то есть только рациональных функций. Затем перейти к случаям, когда теорема о пределе частного не работает, то есть когда возникает неопределенность. Стоит начать с очень простых задач.

Задача. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1-3x}{1-(1+x)(1+2x)(1-3x)}$

Решение. Раскрываем скобки, получаем $\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2+x^3)}{7x^2+6x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3+x}{7+6x}=\frac{3}{7}$ □

Если есть отношение двух многочленов при $x\to 0$, то надо раскрыть скобки, привести подобные, сократить на x в некоторой степени и неопределенность исчезнет. Затем стоит решить задачу, когда x к 0 не стремится.

Задача. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+4x+3}$

Решение. Опять видно, что при подстановки -1 имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. В этой задаче опять же надо сокращать, но не на x, а на $x+1$. Для этого надо разложить на множители числитель и знаменатель, что делать намного проще, зная один из множителей. Поделим столбиком, получим

$$x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2),\ x^4+4x+3=(x+1)(x^3-x^2+x+3)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+4x+3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x^3-x^2+x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x-2)}{(x^3-x^2+x+3)}$$

Пришли к той же ситуации, а значит повторим процедуру снова. $\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x-2)}{(x^3-x^2+x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-2x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-2)}{(x^2-2x+3)}=-\frac{1}{2}$ □

Чем отличается эта задача от предыдущей? В этой сложно увидеть, что надо сокращать на множитель в квадрате. Поэтому это решение не очень удачное, правильное, но плохое. Поэтому стоит пойти по другому пути, сделать замену $y=x+1$.

Решение. Поэтому стоит пойти по другому пути, сделать замену $y=x+1$.

$$\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^3-3(y-1)-2}{(y-1)^4+4(y-1)+3}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y^2+y^3}{y^4-4y^3+6y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-3+y}{y^2-4y+6}=-\frac{1}{2}$$

и получаем в точности предыдущую задачу. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если бы мы ошиблись в первом варианте решения, что более вероятно, то это значительно бы повлияло на ответ, во втором варианте даже при вычислительной ошибке сложно придти к неправильному ответу. Это происходит из-за того, что при раскрытии некоторые слагаемые уже можно не писать. При раскрытии у нас получились главные слагаемые и маленькие, что мы и хотели сделать.

Здесь же, на примере рациональный функций, можно поговорить о других неопределенностях и методах избавления от них.

Задача. Случай $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^4+2x+3\right)(x+1)^2}{(2x-1)^6}$

Решение. Конечно можно раскрыть скобочки, выбрать главное слагаемое (здесь x^6), но часто проще объяснить, что эту задачу можно свести к предыдущей. Мы умеем решать задачи, когда $x \to 0$, поэтому сделаем замену $y = \frac{1}{x}$. Опять сделаем элементарные преобразования. $\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^4+2x+3\right)(x+1)^2}{(2x-1)^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(1+2y^3+3y^4\right)(1+y)^2}{(2-y)^6} = \frac{1}{2^6}$. □

Задача. Случай непределенности вида $\infty - \infty$ $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{3}{x^3+2x^2-x-2}\right)$

Решение. Первым делом подставляем 1, видим, что неопределенность именно такого вида. Сделаем замену. $y = x - 1$, подставляем, раскрываем скобки, приводим подобные.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{3}{x^3+2x^2-x-2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2y+2y^2+y^3} - \frac{3}{6y+5y^2+y^3}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y-2y^2}{(2+2y+y^2)(6+5y+y^2)y}\right) = \frac{-1}{12}$$

□

После рациональных функций дальше стоит изучать либо замечательные пределы и элементарные методы либо рассказать, что проивзольная функция есть многочлен + мелочь, то есть $f(x) = P(x) + o(\ldots)$.

4.9. Задачи, которые часто встречаются в этом случае

1) Корни.

Например, функция $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{9+x}}{x-7}$ при $x \to 7$. Если решать элементарными методами, то надо домножать на сопряженное 12го порядка, но никто так задачи не решает. Есть задачи, в которых надо дважды домножать на сопряженное. Например, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$. Поэтому стоит разбирать именно такие неприятные задачи, чтобы потом, когда появяться новые методы, понять и лучше усвоить их.

2) Тригонометрия.

Первые замечательный предел (они получаются все друг из друга).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = |\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}, \lim_{x\to 0} 2\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Пример задачи: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$. Здесь надо не разбивать в сумму двух предела, а вычитать косинусы друг из друга, чтобы получились синусы.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Можно комбинировать тригонометрию с корнями: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$. То есть сначала домножили на сопряженное, а потом при помощи формул тригонометрии воспользовались замечательным пределом.

3)Второй замечательный предел и все, что с ним связано.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}};\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x};\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x};\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$$

где n - произвольное действительное число. И опять же придется раобрать набор задач, связанных с этими функциями, с неопределностями вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$.

При решении этих задач надо будет пользоваться только арифметикой предела, то есть только свойствами предела суммы, произведения, частного. И как только как следует поработав с этими задачами, можно переходить к более важным вещам.

Во-первых, надо объяснить, каким образом можно представить в таком виде функции. Лучше поставить такую задачу - можно ли представить $f(x)$ в виде $P_n(x)+o(x^n)$ при заданном n? Что такое o? Лучше всего ввести класс $o(1)$ всех бесконечно малых, потом ввести класс $xo(1)=o(x)$, который будет поуже и так далее. Самое нестрогое определение $o(x^n)$ - это много-много маленьких слагаемых, степень которых выше, чем n. Затем рассказать про вложение этих классов. Затем надо рассказать, что $o(x^n)=x^no(1)$, а потом из этого выводить разные свойства вида $o(1)+o(1)=o(1)$.

Начать надо с чего-то более простого. То есть для начала надо объяснить это на многочленах. Например, что многочлен большой степени можно представить как сумму многочлена маленькой степени и $o(\ldots)$, $P_N(x)=P_N(x)+o(x^n)$, $n<<N$. Идейно проще всего выписать все коэффициенты многочлена $P_N(x)$, а потом лишнее выбросить. Это очень долгий вариант. Еще можно выписать только те коэффициенты, степень которых не превосходит n. Например, разложить многочлен $(1+x+x^2)^{10}$ и представить в виде $(1+x+x^2)^{10}=P_3(x)+o(x^3)$. Разумеется, первым путем идти сложно и долго. Надо идти другим путем - тот же бином Ньюьона, но в другой форме. Берем главное слагаемое 1 и мелкое слагаемое $x+x^2$ и именно к ним применяем бином Ньютона. $(1+x+x^2)^{10}=$ $=1+10(x+x^2)+45(x+x^2)^2+120(x+x^2)^3+o(x^3)$ и все, потому что при возведении 4 степень и выше после раскрытия слагаемых останутся только слагаемые степени 4 и выше. Лучше дать понимание именно в таком виде - все слагаемые, которые имеют стпень выше, чем 3. Раскрываем скобки дальше. $(1+x+x^2)^{10}=1+10(x+x^2)+45(x+x^2)^2+120(x+x^2)^3+o(x^3)=$ $=1+10x+10x^2+45x^2+90x^3+120x^3+o(x^3)=1+10x+55x^2+210x^3+o\left(x^3\right)$.

Можно пойти чуть дальше. Возьмем более широкий класс рациональных функций $R(x)$ и покажем, что любую функцию можно представить в таком же виде. Разумеется, надо требовать, чтобы $R(x)$ была определена в нуле.

Задача. Возьмем функцию $R(x)=\frac{1+3x-x^2}{1-x+2x^2+x^3}$ и представим в виде $R(x)=P_4(x)+o\left(x^4\right)$

Решение. Берем и просто делим в столбик, но считаем, что старшее слагаемое с небольшой степенью. $1+3x-x^2=(1-x+2x^2+x^3)=(1+4x+x^2)-8x^3-6x^4+o(x^4)$. В итоге получается, что наша дробь равна целой части плюс дробная. $R(x)=1+4x+x^2-$ $-8x^3-14x^4+\frac{o(x^4)}{1-x+2x^2+x^3}$. Очевидно, что знаменатель можно не писать, потому что он стремится к 1.

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом многочлены можно приближать многочлены нужного порядка. Если у нас есть предел $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ с неопределенностью $\frac{0}{0}$, то можно сделать следующее: выделить главный член там и там, сократить и выписать ответ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{c_1x^n+o(x^n)}{c_2x^m+o(x^m)}$. В частности это можно делать, когда f, g - какие-нибудь сложные многочлены каких-нибудь огромных степеней.

Это все элементарные методы.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \Leftrightarrow \sin x = x + o(x)$. То есть из замечательных пределов получаются вот такие вот формулы, которыми на определенном уровне можно и ограничиться.

Задача. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{tg}2x-1}{\ln(1-4x)}$

Решение. Приближаем каждую из функций многочленом первой степени.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{tg}2x-1}{\ln(1-4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+2x-1+o(x)}{-4x+0(x)} = \frac{-3}{4}$$

□

Разумеется, для более сложных задач этого недостаточно.

Задача. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

Решение. У этой задачи есть несколько траекторий пути решения. На лекциях сначала определяют предел, затем производную, затем многочлен Тейлора, а затем опять возращаются к производным. Поэтому на семинарах придется идти либо параллельно лекциям, либо согласиться, что нечто будет рассказано позже. Первая траектория плохая, потому что тогда мы ограничиваемся только на задачах, в которых необходимы только короткие разложения. Например, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}\sqrt{\cos 2x}\cos x-1}{x^2}$. Если ее делать непосредственно, то надо домножать на сопряженное 6го порядка, но короткие разложение здесь, конечно, работают эффективнее. К сожалению, часто при решении задач приближают многочленами какими получится, это нехорошо, например, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 3x}\sqrt{\cos 2x}\cos x-\cos x^{10}}{x^2}$. Очевидно, что совершенно не нужно расписывать $\cos x^{10}$ как многочлен, достаточно приблизить 1. Имено поэтому не стоит сразу рассказывать про производные и многочлены Тейлора, а рассказть о приближении функций некоторыми многочленами с любой наперед заданной точностью, что синусы, косинусы и экспонента на самом деле можно представить в виде многочлена. □

4.10. Еще примеры задач

1) Дана функция $f(x)$ и число n, приблизить функцию многочленом n-ой степени, $f(x) = P_N(x) + o(x^n)$. Здесь самое важное - объяснить, что происходит то же самое, что и в многочленах, только скобки раскрывать сложнее.

2) n неизвестно, то есть надо приблизить функцию при некоторых условиях многочленом неизвестной степени. То есть, например, надо приблизить функцию одночленов, найти у функции первый ненулевой член разложения. $f(x) = Cx^n + o(x^n)$, где $C \neq 0$. Тут надо объяснить, что имеем ту же ситуацию, что и с многочленами. Быстрее технически делать так - разложить по первой степени, по второй и так далее, пока не найдем.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3) Частный случай 2). Вычисление пределов. Предел сводим к задаче, когда $x \to 0$, то есть сводим к неопределенности $\frac{0}{0}$, затем выделяем главнй член в числителе и знаменателе. Разница только в том, что надо раскрывать скобки еще немного думая.

Чтобы отрабатывать эту траекторию, стоит решить такую задачу:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - e^{x+\frac{x^3}{3}}}{x(\operatorname{tg}(\ln(1+x)) - \sqrt{1+2x+\frac{x^3}{3}}+1)}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 5

5.11. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Известно, что $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Отсюда вытекает сразу тождество $f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$. Стоит разобрать поэтому задачу, связанную с этим.

Задача. $x^x \sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}$ Взять производную

Решение. Понятно, что если задачу решать стандартно, то она становится неподъемной, но с помощью логарифмической производной все элементарно. $\left(x^x \cdot \sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}\right)' = f(x)\left(x\ln x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\ln|x+1|\right)'$, а так посчитать производную уже намного легче. $\square$

5.12. Теорема Ролля

Теорема 4. $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b);\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c : f'(c) = 0$

Обратить внимание стоит, во-первых, на формулировку теоремы. Иногда бывает, что в теоремах заложены некоторые избыточные условия, есть вещи, в которых усиление теорем не имеет смысла. Но здесь все существенно. Важно, что $D(a,b)$, а не $D[a,b]$, потому что на практике очень часто возникает такая ситуация. Функции, на которых это заметно, например, $\sqrt{x}$ на $[0,1]$ или $\arcsin x$ на $[-1,1]$. Часто бывает удобно, что в концевой точке нет производной, а есть только непрерывность. Во-вторых, это теорема существования, а значит ничего конкретного про расположение точки c сказать нельзя. Соответствующие примеры есть во всех задачниках.

Подведем итог.

1) Может не существовать $f'(a), f'(b)$

2) Например, у функции $(x-1)(x-2)(x-3)$ три нуля. Надо найти нули производной, посмотреть, где они располагаются. Стоит понять, что там все, что угодно.

3) Важный момент про необходимость условий теоремы, то етсь неулучшаемость условий. Стоит привести примеры, когда что-то нарушилось. Например, функция $|x|$ на $[-1,1]$.

На эту теорему есть задачи такого вида:

Задача. Есть многочлен $y = P(x)$. Надо понять 1) количество действительных корней 2) их локализация

Задача. Пусть $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Доказать, что корень есть у второй производной. $a < c < b$

Решение. На отрезке $[a,c]$ и на отрезке $[c,b]$ по теореме Ролля есть соответственно точки ξ_1 и ξ_2: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, $\xi_1 \neq \xi_2$. В задаче предполагается нужная степень гладкости $f(x)$. Тогда по теореме Ролля $\exists \eta \in [\xi_1, \xi_2] : f''(\eta) = 0$. $\square$

Отсюда следует обобщенная теорема Ролля.

Теорема 5. $f(x) \in C[a,b] \cap D^n(a,b),\ x_0 = a, x_n = b, f(x_i) = 0\,\forall i :\ 0 \leq i \leq n,\ x_i \neq x_j\,\forall i \neq j \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f^{(n)}(\xi) = 0.$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Есть n отрезков, для каждого применяем теорему Ролля, получаем $n-1$ отрезков и так далее. □

Рассмотрим задачу посложнее. Все то же самое, но в точке a число 0 двойной кратности, то есть $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$. Применяем теорему Ролля, получаем $\exists \xi_2 : f'(\xi_2) = 0$. В данном случае, роль точки ξ_1 выполняет точка a. Безусловно, в этом случае мы должны требовать дифференцируемость на отрезке. Затем опять применяем теорему для точек a и ξ_2.

Теорема 6. *$f(x) \in C[a,b] \cap D^{p+q-1}(a,b)$, $f \in D^{p-1}(a) \cap D^{q-1}(b)$, $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = f(b) = f'(b) = f^{(q-1)} = 0$, то есть в точке a у нас ноль кратности p, а в точке b - кратности $q \Rightarrow \exists \xi : f^{(p+q-1)}(\xi) = 0$.*

Доказательство. Доказательство ровно такое же. Есть отрезок $[a,b]$, в точке a сидит p нулей, а в точке b - q нулей. Как только мы начинаем поэтапно применять теорему Ролля, внутри появляется нуль ξ_1, теперь у производной в точке a сидит $p-1$ нулей, а в точке b - $q-1$ нулей. Затем появляется еще две точки внутри отрезка, а в концах отрезка количество нулей уменьшиться на 1 соответсвенно. Как только в одном конце закончатся нули, количество точек внутри отрезка не будет увеличиваться. Это количества не будет уменьшаться до тех пор, пока в другом конце отрезка не исчезнут все нули. □

Финальное обобщение теоремы Ролля.

Теорема 7. *Пусть есть функция с достаточным условием гладкости, причем $0 = f(x_1) = f'(x_1) = \ldots = f^{(k_1-1)}(x_{1)}$, $0 = f(x_2) = f'(x_2) = \ldots = f^{(k_2-1)}(x_{2)}$, $\ldots$, $0 = f(x_j) = f'(x_j) = \ldots = f^{(k_j-1)}(x_{j)}$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_j = n+1 \Rightarrow \exists \xi : f^{(n)}(\xi) = 0$.*

После этого идет приложение для многочленов. Пусть дан многочлен, причем все его корни действительны. Тогда все его производные обладают таким же свойством. Если все корни совпадают, то очевидно. Так же очевидно, если есть только один корень. А если есть хотя бы два различных корня, тогда у производной появится еще корни на отрезке, но какая-то часть может остаться и на концах. Соответственно, у $P_n(x)$ n действительных корней, а у $P_n'(x)$ - $(n-1)$.

Пусть $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$, где a, b могут принимать не только действительные значения, но и $+\infty$ и $-\infty$, $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$. Считается, что значения функции совпали в точке a и в точке $b = \infty$, если $\lim_{x\to\infty} = f(a)$. Тогда на некотором отрезке условие теоремы Ролля будут так же выполнены. Для этого надо будет отступитть от ∞. Дальше могут быть две ситуации:

1) В окрестности точки A и a функция оказывается разных знаков. Тогда надо воспользоваться теоремой о промежуточных значениях $\exists t \in (a, A) : f(t) = 0$. Тогда имеем теорему Ролля для точек a и t.

2)$\forall \varepsilon > 0\, \exists A : f(x) < \varepsilon\, \forall x > A$, $f(A) = \varepsilon$. Тогда в окрестности точки a по теореме о промежуточном значении $\exists t \in (a, A) : f(t) = \varepsilon$.

5.13. Теорема Ролля в задачах

Задача. $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$. Почему у этого многочлена все корни действительные?

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение. Понятно, что это многочлен степени n. Корней у многочлена $(x^2-1)^n$ очевидно $2n$, по n корней в точках -1 и 1 соответственно. Корней $2n$ и все они действительные, а значит у любой производной все корни действительные. □

Задача. $e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$

Решение. Очевидно, это многочлен. Для решения этой задачи нужно работать с ∞. Рассматриваем эту функцию на полуоси. В точке 0 находится n корней, а в точке ∞ - ∞ корней, потому что сколько бы раз мы не брали производную, экспонента не пропадет. Это приводит к тому, что при взятии производной количество корней не будет уменьшаться (по тем же причинам, что и в одном из доказательств теоремы Ролля выше, но в обобщенном случае). □

Задача. Многочлены Эрмита. $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

Решение. Идея в том, что на $+\infty$ и $-\infty$ по ∞ корней. □

5.14. Теорема Лагранжа.

Теорема 8. *$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, где $f \in C[c,b] \cap D(a,b)$.*

Геометрически это означает, что есть точка, в которой касательная параллельно хорде. Физически это означает, что в некоторый момент времени мы будем двигаться со средней скоростью. Тут так же стоит обсудить важность этих условий. Часто теорему удобно писать в виде $f(x+h)-f(x)=f'(x+\theta h)h$, $\theta \in (0,1)$. Есть масса задач на оценку θ.

Задача. $\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = ax^2+bx+c$

Задача. $\theta = C \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = ax+b$

Приложения теоремы Лагранжа - доказательство всяких неравенств и приложений в механике.

Задача. Пусть функция $f(x)$ нелинейна, тогда $\exists c : f'(c) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Иными словами - прямолинейное и равномерное движение - решение экстремальной задачи.

Решение. Так как функция нелинейна, то найдется точка вне хорды. Проведем две хорды, соединяющие концы отрезка и эту точку. Одна из них имеет наклон выше, именно на том отрезке применим теорему Лагранжа. □

5.15. Теорема Коши.

Теорема 9. *Пусть есть пара функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, $(x')^2+(y')^2 \neq 0 \Rightarrow \exists \gamma \in (\alpha,\beta) : \frac{y'(\gamma)}{x'(\gamma)} = \frac{y(\alpha)-y(\beta)}{x(\alpha)-x(\beta)}$.*

Сразу видно, что это та же теорема Лагранжа, но в случае, когда кривая задана параметрически. Дробь слева это y'_x. Объяснения геометрически и физически такие же.

Опять же стоит обсудить условия теоремы, разобрать примеры. Обязательно надо обратить внимание, что теорема Коши не является двойным применением теоремы Лагранжа, поскольку она дает для каждой фунции свою точку.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Задача. Нам надо добраться от пункта A до пункта B за время от a до b. Начальная скорость в начальный и конечный момент времени нулевая. Надо оптимизировать перегрузки, то есть найти $min_f\, max_{x\in[a,b]}|f''|$.

Решение. Для начала надо найти оптимальную траекторию. Чтобы не испытывать больших перегрузок, не надо испытывать слишком маленькие, то есть первую половину времени надо двигаться равноускоренно и пойти первую половину пути, а дальше аналогично тормозить.

$$g(x) = \begin{cases} C(x-a)^2 + A, & x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ -C(b-x)^2 + B, & x \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases},$$

где C вычисляется так, чтобы $g(\frac{a+b}{2}) = \frac{A+B}{2}$. Теперь надо сравнить произвольную функцию с этой. Оценим приращение произвольной функции с нашей и применим теорему Коши. $\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{(\frac{a+b}{2}-a)^2-0} = \frac{f'(\xi)}{2(\xi-a)} = \frac{f'(\xi)-f'(a)}{2(\xi-a)}$, где ξ лежит в левой половине. Воспользуемся теперь теоремой Лагранжа. $\frac{f'(\xi)-f'(a)}{2(\xi-a)} = \frac{1}{2}f''(\eta)$, где η тоже в левой половине. То есть эта дробь это половина ускорения в некоторой точке η. $f''(\eta) = 8\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{(b-a)^2}$. То есть мы доказали, что какова бы ни была функция f найдется такая точка η, левее серины, что ускорение именно такое. Применим аналогичные рассуждения, но для правой половины отрезка, то есть найдется такая точка ζ, что $f''(\zeta) = 8\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^2}$. $\frac{f''(\eta)+f''(\zeta)}{2} = 4\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}$. Если среднее арифметическое двух чисел равно некоторому числу Q, то одно из них $\geq Q$. Нас интересует случай, когда они одинаковы. Для нашей траектории g именно такой ответ и будет.

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 6

6.16. Исследование функции и роль асимптотики

Есть устоявшееся определение асимптоты.

Определение 2. $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx$ И если оба предела существуют, то прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой.

Но это не нужно, ведь если имеет место такое асимптотическое разложение $y = kx+b+o(1)$ при $x \to +\infty$, то прямая $kx + b$ - асимптота. А асимптотических разложений очень много. Понятно, что если функция сложная, то удобнее использовать первый метод.

Пусть функция $f(x)$ задана явно, тогда нет никакой сложности вычислить её асимптотику. Например, $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x)$. Сначала надо приблизить многочленами Тейлора функцию $\operatorname{tg} x$, затем взять нужное количество слагаемых у $\sin x$ и получим некоторое асимптотическое разложение.

Случай, когда функция задана неявно, сложнее. Хороший пример - обратная функция. В этой ситуации возникает необходимость итерационно вычислять слагаемые. Например,

Задача. Пусть задана функция $f(x) = \arcsin x$ и нам надо выписать асимптотику.

Решение. Один из методов такой - взять от обеих частей sin, тогда $\sin\arcsin x = x$, но так как $\sin \sim x$, то главная часть $\arcsin x$ это x, то есть $\arcsin x \sim x$. Для того, чтобы выписать следующее слагаемое, надо применить такой же итерационный процесс, но не так, как в этих формулах, а немного по-другому. Возьмем теперь $f_1(x) = \arcsin x - x$ и применим к ней sin.

$$f_1(x) \sim \sin f_1(x) = \sin(\arcsin x - x) = x\cos x - \sqrt{1-x^2}\sin x =$$
$$= x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

отсюда $\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6} \Rightarrow \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. □

Задача. $f(x) = \arccos(1 - x^4)$. Выписать асимптотику в окрестности нуля.

Решение. Проблема в том, что, в отличии от предыдущей задачи, у arccos нет производной, когда мы подходим к 1, поэтому количество методов решения этой задачи значительно уменьшается, но можно действовать похожим способом. При $x \to 0$ $1 - x^4 \to 1$, то есть $f(x) \to 0$, то есть $f(x)$ бесконечно малая, а значит $f(x) \sim \sin f(x) = \sqrt{1-(1-x^4)^2} = \sqrt{2x^4 - x^8} \sim \sqrt{2}x^2$, то есть $\arccos(1 - x^4) \sim \sqrt{2}x^2$. Дальше асимптотика вычисляется так же, $f(x) - \sqrt{2}x^2$ является бесконечно малой, а значит

$$f(x) - \sqrt{2}x^2 \sim \sin(f(x) - \sqrt{2}x^2) = \sqrt{2x^4 - x^8}\cos(\sqrt{2})x^2 - (1 - x^4)\sin\sqrt{2}x^2 =$$
$$= \sqrt{2}x^2(1 - \frac{x^4}{4} + o(x^4))(1 - x^4 + o(x^4)) - (1 - x^4)(\sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}x^6}{3} + o(x^6)) =$$
$$= x^6(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}) + o(x^6) = \frac{\sqrt{2}x^6}{12} + o(x^6)$$

Таким образом, $\arccos(1 - x^4) = \sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}x^6 + o(x^6)$. □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Этот итерационный процесс интересен тем, что он неизбежен, когда функция задана параметрически.

Задача.

$$\begin{cases} x &= \frac{t^2}{t-1} \\ y &= \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

Надо найти асимптотику, когда $x \to \infty$.

Решение. Понятно, что $x \to \infty$ разными путями. Асимптоты x это $x = t+1$ и $t = 1$. Везде потребуется итерационный процесс. $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$ или $t \to 1$.

1)$\boldsymbol{t \to \infty}$. $x \sim t$, $y \sim \frac{1}{t}$, $y \sim \frac{1}{x}$, $x \to \infty$.

$$y - \frac{1}{x} = \frac{t}{t^2-1} - \frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{t}(1 - \frac{1}{t^2})^{-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t}(1 + o(\frac{1}{t})) - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + o(\frac{1}{t^2})$$

Тем самым, $y - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{t^2} \Rightarrow y - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

2)$\boldsymbol{t \to 1}$, $x \sim \frac{1}{t-1}$, $y \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Автоматически найден тот самый k из "псевдоопределения": $y \sim \frac{x}{2}$

$$y - \frac{x}{2} = \frac{t}{t^2-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} = \frac{2t - t^2(t+1)}{2(t-1)(t+1)} = \frac{t(2-t^2-t)}{2(t-1)(t+1)} = \frac{t(2+t)(1-t)}{2(t-1)(t+1)} = -\frac{t(2+t)}{2(t+1)}$$

То есть, $y - \frac{x}{2} \to -\frac{3}{4}$. $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + o(1)$. Посмотрим, что это за $o(1)$.

$$y - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{t(2+t)}{2(t+1)} = \frac{3(t+1) - 2t(t+2)}{4(t+1)} = \frac{(2t+3)(1-t)}{4(t+1)} \to \frac{-5}{8}, \text{ при } t \to 1$$

$y - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \sim -\frac{5(t-1)}{8} \sim \frac{-5}{8x}$. Таким образом получаем еще более точную асимптотику.
$y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5(t-1)}{8} + o(\frac{1}{x})$. Третий член асимптотики даже визуализируется - наша кривая похожа на прямую и подходит к ней при положительных x снизу, а при отрицательных - сверху. □

Задача.

$$\begin{cases} x &= te^t \\ y &= \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

Найти асимптотику при $t \to +\infty$.

Решение. Надо подобрать главный член приближения. Понятно, что x не эквивалентна y, хоть $x \approx y$. Надо взять в качестве вспомогательной задачи асимптотику $\ln x = \ln t + t \sim t$. Тогда $y = \frac{x}{t^2} \sim \frac{x}{\ln^2 x}$. Главный член асимптотики найден.

Чтобы выписать следующий член, надо исследовать

$$y - \frac{x}{\ln^2 x} = \frac{e^t}{t} - \frac{te^t}{(t+\ln t)^2} = \frac{e^t}{t}(1 - (1 - \frac{\ln t}{y})^{-2}) \sim \frac{e^t}{t}\frac{2\ln t}{t} = \frac{2e^t}{t^2}\ln t$$

$\ln x = t + \ln t \sim t$, $\ln\ln x = \ln(t + \ln t) \sim \ln t$. $y - \frac{x}{\ln^2 x} \sim \frac{2x\ln\ln x}{\ln^3 x}$. Тем самым имеем

$$y = \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{2x\ln\ln x}{\ln^3 x} + o(\frac{x\ln\ln x}{\ln^3 x})$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

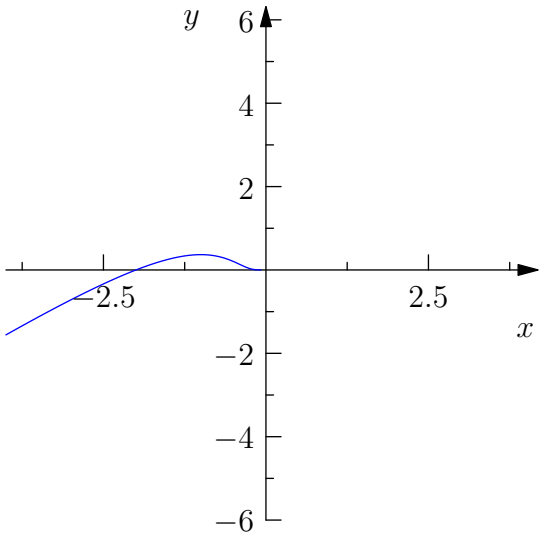
Задача. Построить график функции $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

Решение. Посчитаем асимптотику. Асимптотика нуля тривиальна, очевидно, что в окрестности $x = -2$ функция линейна, а в окрестности нуля и ∞ асимптотика интересна.

1) $x \to 0, y \sim 2e^{\frac{1}{x}}$.

2) $x \to \infty, y = (x+2)(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x + 3 + \frac{2{,}5}{x} + O(\frac{1}{x^2})$.

Мало того, что мы нашли прямую, на которую она похожа, так мы еще и разобрались, с какой стороны она подходит к ней и с какой скоростью. Теперь очень легко построить картинку, имею эту информацию. Конечно, надо искать проиводную (её здесь удобнее считать логарифмическую), но мы опустим это.



□

Задача.

$$\begin{cases} x &= \frac{t^2}{t-1} \\ y &= \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$

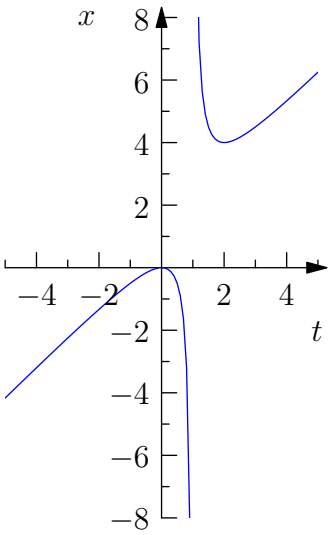
Решение. Для построения этого графика стоит сначала построить графики $x(t)$ и $y(t)$.

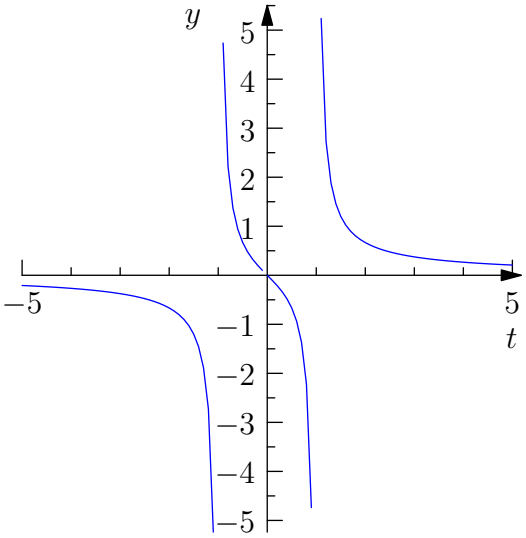
1) $t \to 0$, $x \sim t^2$, $y \sim -t$, $y \sim + - \sqrt{-x}$

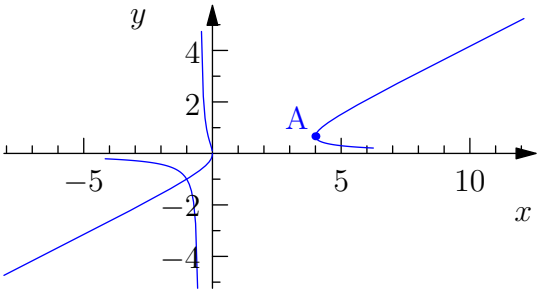
2) $t \to -1$, $x \to \frac{-1}{2}$, $\to \frac{1}{2(t+1)}$, то есть $x = \frac{-1}{2}$ - асимптота.

С помощью наших вычислений мы не нашли только точку перегиба и точку A (указана на графике ниже). □

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ







МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФОНД ВОЛЬНОЕ ДЕЛО
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ