МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 4

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Кратные интегралы

Обзор курса и литературы

В этом семестре нам предстоит разобрать несколько больших тем. Начнем мы с кратных интегралов, интегрирования в многомерном пространстве. Второй большой раздел – это поверхностные и криволинейные интегралы, интегрирование по множествам с размерностью меньшей, чем пространство. И, наконец, третий раздел – это преобразование Фурье.

Из учебников, в первую очередь, стоит рассматривать учебник **В.А. Зорича**.

Кратный интеграл как аддитивная функция

Сравним две задачи из практики.

1. Дан прямой стержень с плотностью $f(x) \in C[a,b]$. Требуется найти массу стержня.

   Задача решается следующим образом. Стержень разбивается на маленькие кусочки и масса каждого фрагмента считается отдельно. Так как плотность $f(x)$ непрерывна, на каждом из фрагментов она почти постоянна. Поэтому на каждом отрезке Δ_k достаточно взять значение $f(x)$ в произвольной точке ξ_k. Итак,

   $$m \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|, \quad |\Delta_k| \ \to \ 0.$$

2. Рассмотрим похожую двумерную задачу.

   Замечание 1.1. С точки зрения кратного интегрирования между ситуациями в двумерном, трехмерном и n-мерном пространствах нет принципиальной разницы. Поэтому для иллюстраций часто будет браться именно $n = 2$.

   Пусть дана прямоугольная пластина с непрерывной на всем прямоугольнике плотностью $f(x) \in C$.

   Задача решается аналогично. Вся пластина разбивается на маленькие прямоугольники. В силу непрерывности $f(x)$ на каждом маленьком фрагменте Δ_k плотность почти постоянна, поэтому можно взять ее значение в точке $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta_k$. Тогда

   $$m \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)|\Delta_k|.$$

   Что же считать достаточно малым прямоугольником? Если поставить условие, чтобы его площадь была достаточно мала, мы можем оказаться в ситуации, когда фрагмент очень вытянут, и, соответственно, на протяжении всего фрагмента $f(x)$ может ощутимо меняться. Поэтому условие следует наложить на диаметр:

   $$\operatorname{diam} \Delta_k \ \to \ 0.$$

Вторая трудность, которая связана с случаем двумерного пространства, связана с формой пластины, у которой нужно вычислить массу – например, это может быть круг.

Вводные понятия для кратного интеграла

В некоторых случаях мы будем ограничиваться только общими соображениями. Это связано с тем, что параллельно этому курсу читаются курсы «Теория функций действительного переменного» и «Теория вероятностей», на которых также будут выполнены построения ниже со всей строгостью.

Будем рассматривать *брус в* $\mathbb{R}^m$:

$$\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]. \tag{1}$$

В случае $\mathbb{R}^2$ брус – это прямоугольник.

Замечание 1.2. Иногда границы в (1) будут считаться включенными, иногда – не будут.

У брусов есть следующие **свойства**.

1. $\Pi_1 \cap \Pi_2$ – брус или $\emptyset$. В случае, когда брусы пересекаются по границе, будем считать, что одна из них не включена, и, следовательно, пересечение пусто.
2. $\Pi_1 \setminus \Pi_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$, где J_k – брусы;
3. $\cup J_k = \sqcup \Pi_k$.

Определение 1.1. Пусть $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$, где Δ_k не перекрываются и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = \Pi$. Тогда T называется *разбиением* Π.

Определение 1.2. Разбиение T' называется *измельчением (продолжением)* T, если $\forall\ \Delta'_k \in T'\ \exists\ \Delta_l \in T$ такое, что $\Delta'_k \subset \Delta_l$.

В таких случаях пишут $T' \prec T$.

Можно показать, что $T' \prec T$ – отношение порядка для тех разбиений, которые сравнимы (то есть отношение частичного порядка).

Утверждение 1.1. *Для* $\forall\ T_1$ *и* $T_2\ \exists\ T_3$ *такое, что*

$$T_3 \prec T_1, \quad T_3 \prec T_2.$$

Пример 1.1. (Простая иллюстрация утверждения 1.1) Пусть $T_1 = \{\Delta^{\}}_k, T_2 = \{\Delta^2_l\}$. Тогда можно взять $T_3 = \{\Delta'_k \cap^2_l\}$ (вырожденные множества в T_3 не включаются).

Определение 1.3. *Размеченное разбиение* – это разбиение $T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^n$ такое, что

1. $\{\Delta_k\}_{k=1}^n = T$ – разбиение;

2. $\xi_k \in \Delta_k \ \forall \ k$.

Определение 1.4. *Диаметром бруса* Δ называется

$$\operatorname{diam} \Delta = d(\Delta) = \sup_{x',x'' \in \Delta} \|x' - x''\|.$$

Диаметром разбиения T называется

$$\operatorname{diam} T = d(t) - \max_k d(\Delta_k).$$

Кратный интеграл

Определение 1.5. Функция f называется *интегрируемой по Риману на брусе* Π (обозначение: $f \in R(\Pi)$) и число I называется *ее определенным интегралом по брусу* Π

$$I = \int\limits_{\Pi} f(x)dx,$$

если $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что $\forall \ T_\xi$, $d(T) < \delta$ справедливо

$$\left| \sum_T f(\xi_k)|\Delta_k| - I \right| < \varepsilon.$$

Здесь можно воспользоваться тем, что интеграл – это предел по базе.[1] В качестве базы здесь берется система всех размеченных разбиений, диаметр которых $< \delta$. В силу утверждения 1.1, δ можно брать сколь угодно малым. База $d(T) \ \to \ 0$.

Будет удобно считать, что

$$I = \lim_{d(T) \to 0} \sigma(f, T_\xi),$$

где

$$\sigma(f, T_\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k|.$$

Перейдем к обсуждению **свойств интегрируемых функций**. Некоторые из результатов ниже сформулируем без доказательств, воспользовавшись свойствами интегралов по базе.

Теорема 1.1. *Пусть* $f \in R(\Pi)$. *Тогда* $\exists!$ *число*

$$I = \int\limits_{\Pi} f(x)dx.$$

Теорема 1.2. $f \in R(\Pi)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ *такое, что* $\forall$ T_ξ^1, T_ξ^2 *таких, что* $d\left(T_\xi^i\right) < \delta$, *верно*

$$\left|\sigma\left(f, T_\xi^1\right) - \sigma\left(f, T_\xi^2\right)\right| < \varepsilon.$$

[1] Подробнее с этим фактом предлагается ознакомиться самостоятельно.

Теорема 1.3. *Пусть* $f \in R(\Pi)$. *Тогда* $f \in B(\Pi)$ *(ограничена). Иными словами,* $R(\Pi) \subset B(\Pi)$.

Доказательство. (Идея доказательства) Пусть $f \in R(\Pi)$. Тогда $\exists\, M, \exists\, \delta > 0$ такие, что $\forall\ T_\xi$, $d(T) < \delta$,

$$|\sigma(f, T_\xi)| \leq M.$$

Из ограниченности сумм Римана следует ограниченность f. □

Теорема 1.4. *Пусть* $f, g \in R(\Pi)$, $f \leq g$. *Тогда* $\forall\ x \in \Pi$

$$\int\limits_{\Pi} f(x)dx \leq \int\limits_{\Pi} g(x)dx. \tag{2}$$

Доказательство. Так как $f \leq g$, то $\sigma(f, T_\xi) \leq \sigma(g, T_\xi)$, откуда и следует неравенство (2). □

Теорема 1.5. *Пусть* $f \in R(\Pi)$, $f \geq 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Pi} \geq 0.$$

Теорема 1.6. *Пусть* $f, g \in R(\Pi)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lambda f + \mu g \in R(\Pi)$ *и*

$$\int\limits_{\Pi} \lambda f + \mu g dx = \lambda \int\limits_{\Pi} f dx + \mu \int\limits_{\Pi} g dx.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что

$$\sigma(\lambda f + \mu g, T_\xi) = \lambda\sigma(f, T_\xi) + \mu\sigma(g, T_\xi).$$

□

Теорема 1.7. *Пусть* $f \in R(\Pi)$, *брус* $\Delta \subset \Pi$. *Тогда* $f \in R(\Pi)$.

Доказательство. По условию, $f \in R(\Pi)$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T^1_\xi$, T^2_ξ таких, что $d(T^i) < \delta$, выполнено

$$\left|\sigma(f, T^1_\xi) - \sigma(f, T^2_\xi)\right| < \varepsilon.$$

Пусть S^1_ξ и S^2_ξ – различающиеся разбиения Δ, $d(S^i) < \delta$. Дополним S^1_ξ и S^2_ξ до T^1_ξ и T^2_ξ единообразно. Покажем, что так можно сделать. $\Pi \backslash \Delta$ представимо в виде конечного объединения некоторых брусов. Каждый из них можно разбить так, чтобы диаметр разбиения был $< \delta$. В каждом случае возьмем одну и ту же метку.

Итак, получаем, что

$$\left|\sigma(f, S^1_\xi) - \sigma(f, S^2_\xi)\right| < \varepsilon,$$

так как дополняли S^i_ξ до разбиений Π одними и теми же точками (эти слагаемые сокращаются). □

Итак, из критерия Коши на большом брусе Π следует критерий Коши на маленьком брусе Δ. Первая часть аддитивности установлена.

Теорема 1.8. *Пусть* $f \in R(\Pi_p)\ \forall\ p = 1, \dots, q$, $\sqcup_{p=1}^q \Pi_p = \Pi$. *Тогда* $f \in R(\Pi)$, *причем*

$$\int\limits_{\Pi} f(x)dx = \sum_{p=1}^{q} \int\limits_{\Pi_p} f(x)dx.$$

Доказательство. (Идея доказательства) Условия $f \in R(\Pi_p)\ \forall\ p = 1, \dots, q$, означает, что $\forall > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T_\xi^p$, $d(T^p) < \delta$, выполнено

$$\left|\sigma(f, T_\xi^p) - I_p\right| < \varepsilon.$$

Проблема в том, что разбиение большого бруса может не учитывать структуру

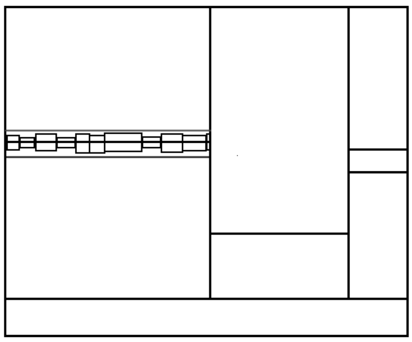

Рис. 1.1. Покрытие границы Π_k коридором

$\sqcup\Pi_p = \Pi$. Возьмем некоторое $\eta > 0$ и $\forall\ T_\xi$, $d(T) < \eta$, устроеное, как показано на рис. 1.1 (каждую границу Π_p окружаем η-коридором).

Разобъем

$$\sigma(f, T_\xi) = \sum^1 f(\xi_k)\Delta_k + \sum^2 f(\xi_k)|\Delta_k|,$$

где $\sum^1$ – суммы, где ξ_k вне коридора, а $\sum^2$ – все остальные. Тогда $\sum^1$ целиком состоит из слагаемых, лежащих в одном из Π_p (не на границе). Поэтому разобъем

$$\sigma(f, T_\xi) = \sum_1^1 + \sum_2^1 + \ldots + \sum_p^1 + \sum^2 = \sum_{T_\xi^1}^1 + \ldots + \sum_{T_\xi^q}^1 + \sum^2 - \sum^3,$$

где $\sum_{T_\xi^i}$ – разбиения из сумм $\sum_i^1$, дополненные так, чтобы полностью покрыть коридор (с диаметром, меньшим δ), а σ^3 – брусы из дополнения выше, полностью попавшие в коридор.

Оценим

$$\left|\sigma(f, T_\xi) - \sum_{p=1}^q I_p\right| \le \sum_{p=1}^q \left|\sigma(f, T_\xi^p - I_p\right| + |\sum^2| + |\sum^3| <$$

$$< \varepsilon p + 2\sup_{\Pi} |f| p 2 m d^{m-1} 2\eta < (p+1),$$

если выберем

$$\eta < \frac{\varepsilon}{\eta \sup |f| q\, m\, d^{m-1}}.$$

$\square$

Лекция 2. Интегралы по измеримому множеству

Повторение

Напомним, на прошлой лекции построили интеграл по брусу

$$\int\limits_{\Pi} f(x)dx. \tag{3}$$

Мы показали, что если такой интеграл определен, определен и

$$\int\limits_{\Delta} f(x)dx, \quad \forall\ \Delta \subset \Pi. \tag{4}$$

Кроме того, показали, что

$$\sum \int\limits_{\Pi_k} f(x)dx = \int\limits_{\Pi} f(x)dx, \quad \Pi = \sqcup_{k=1}^{n} \Pi_k. \tag{5}$$

Аддитивные функции

Определение 2.1. Пусть F – функция, отображающая семейство брусов $\Delta \subset \Pi$ в $\mathbb{R}$. F называется *аддитивной*, если выполнены (4) и (5).

Пример 2.1. (Аддитивные функции брусов)

1. Функция
$$F:\ \{[c,d] \subset [a,b]\}\ \to\ \mathbb{R},$$
действующую по правилу
$$F\left([c,d]\right) = F(d) - F(c).$$

2. Функция
$$F:\ \{\Delta \subset \Pi\}\ \to\ \mathbb{R},$$
действующая по правилу
$$F\left([a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\right) = F(b_1,b_2) + F(a_1,a_2) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1),$$
где F в правой части – функция двух переменных.

3. Интеграл
$$F(\delta) \int\limits_{\Delta} f(x)dx. \tag{6}$$

Обсудим **свойства** функции (6).

Утверждение 2.1. *$F(\Delta) \in UC(\Pi)$ (равномерно непрерывна), то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ $\Delta > 0$ такая, что $\forall\ \Delta$, $diam\,\Delta\delta$*

$$|F(\Delta)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left|\int\limits_{\Delta} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{\Delta} \sup \Pi |f| dx = \sup_{\Pi} |f||\Delta| <$$

при $\delta = / \sup\limits_{\Pi} |f|$. □

Утверждение 2.2. *Пусть $f \in C(x_0)$, $f \in R(\Pi)$. Тогда $F \in D(x_0)$, $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. Производная $F'(x)$ в точке x_0 определяется как

$$F'(x_0) = \lim_{\substack{x_0 \in \Delta \\ d(\Delta) \to 0}} \frac{F(\Delta)}{|\Delta|}.$$

Так как $f \in C(x_0)$, то $\forall > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ \Delta$, $x_0 \in \Delta$, $d(\Delta) < \delta$

$$\sup_{x \in \Delta} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\frac{F(\Delta)}{|\Delta|} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|\Delta|}\left|\int\limits_{\Delta} \left(f(x) - f(x_0)\right) dx\right| \leq \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} \varepsilon dx = \varepsilon.$$

□

Интеграл от функции по измеримому множеству

Перейдем к рассмотрению более сложных множеств, чем брусы Π.

Определение 2.2. Пусть $E \subset \Pi$. Введем *вверхнюю меру Жордана*:

$$|E|^* = \inf_{\cup_{k=1}^n \Pi_k \supset E} \sum k = 1^n |\Pi_k|.$$

Так как покрытие конечно, можно считать, что такие брусы не пересекаются.

Аналогично, *нижняя мера Жордана* определяется как

$$|E|_* = \sup_{\cup_{k=1}^n \Pi_k \subset E} \sum k = 1^n |\Pi_k|.$$

Если $|E|^* = |E|_* {=} |E|$, то E называется *измеримым по Жордану.*

Теорема 2.1. *(Критерий измеримости по Жордану) Пусть $E \subset \Pi$. Тогда E измеримо $\iff$ $|\partial E| = 0$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть E измеримо. Тогда $\exists$ набор $\{\Pi_k^1\}$ такой, что $\Pi_k^1 \supset E$, и набор $\{\Pi_k^2\}$ такой, что $\cup\Pi_k^2 \subset E$, и, кроме того,

$$\sum |\Pi_k^1| - \sum |\Pi_k^2| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$\cup\Pi_k^1 \setminus \left(\cup\Pi_k^2\right) = \cup\Delta_k.$$

Тогда

$$\sum |\Delta_k| = \sum |\Pi_k^1| - \sum |\Pi_k^2| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Пусть мера границы $|\partial E| = 0$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ система конечных $\{\Delta_k\}$, $\cup\Delta_k \supset \partial E$, но $\sum |\Delta_k| < \varepsilon$.

Возьмем

$$\Pi \setminus (\cup\Delta_k) = \sqcup_{k=1}^n \Pi_k = \sqcup^1 \Pi_k^1 \cup \sqcup^2 \Pi_k,$$

где $\sqcup^1$ – объединение внутренних брусов, а $\sqcup^2$ – внешних. Возьмем в качестве двух наборов

1. $\sqcup^1 \Pi_k \subset E$;

2. $\sqcup^1 \Pi_k \cup (\cup\Delta_k) \supset E$.

Тогда

$$|E|^* \geq \sum^1 |\Pi_k| + \sum |\Delta_k|,$$

$$|E|_* \leq \sum^1 |\Pi_k|.$$

Тогда

$$|E|^* - |E|_* \leq \sum |\Delta_k| < \varepsilon,$$

откуда $|E|^* = |E|_*$. $\square$

Напомним, что любые операции с множествами не могут величить границу.

Напомним **простейшие свойства измеримых множеств**

1. $E_1 \cup E_2$ измеримо;

2. $E_1 \cap E_2$ измеримо;

3. $E_1 \setminus E_2$ измеримо.

Перейдем к интегралу на произвольном измеримо[2] A

Определение 2.3. Функция f *интегрируема на измеримом множестве* A ($f \in R(A)$, если $f\chi_A \in R(\Pi)$,

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_\Pi f\chi_A dx.$$

[2] Везде далее по умолчанию подразумевается, что рассматриваемые множества измеримы по Жордану.

Утверждение 2.3. *Определение 2.3 корректно.*[3]

Следующие свойства интеграла по измеримому A следуют из свойств интеграла по брусу.

1. Единственность;
2. Ограниченность;
3. Линейность;
4. Сохранение неравенств;
5. Неотрицательость интеграла.

Теорема о мере измеримого множества

Теорема 2.2.

$$|A| = \int\limits_A dx.$$

Доказательство. Так как A измеримо, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{\Pi_p\}_{p=1}^q$ такое, что $\cup\Pi_p \supset \partial A$ и $\sum |\Pi_p| < \varepsilon$.

Возьмем некоторый брус Π, $A \subset \Pi$, и его разбиение. Его можно разделить на три части: брусы, полностью попадающие в A, брусы, лежащие в $\Pi \setminus A$, и брусы, попадающие на границу.

Иными словами, для некоторого (выберем позднее) $\eta > 0$ возьмем произвольное T_ξ, $d(T) < \eta$. Тогда

$$\sum \chi_A(\xi_k)|\Delta_k| = \sum^1 + \sum^2 + \sum^3,$$

где в $\sum^1$ входят брусы, полностью лежащие в A, в $\sum^3$ – брусы, лежащие полностью в $\Pi \setminus A$, а в $\sum^2$ – брусы, которые зацепили ∂A. Тогда

$$\sum^1 + \sum^2 + \sum^3 = \sum^1 |\Delta_k| + \sum^2 \chi_A(\xi_k)|\Delta_k| + 0.$$

Возьмем

$$\eta = \frac{\varepsilon}{q2md^{m-1}}.$$

Тогда

$$\sum^2 \chi_A(\xi_k)|\Delta_k| \le \varepsilon + q2md^{m-1}\eta < 2\varepsilon.$$

Оценим, наконец,

$$-2\varepsilon < \sum_T \chi_A(\xi_k)|\Delta_k| - |A| = \sum^1 |\Delta_k| + \sum^2 - |A| < 2\varepsilon.$$

□

[3] Корректность обосновывается с использованием свойств аддитивности интеграла по брусу.

Лекция 3. Обобщение кратного интеграла

Повторение

Обговорим еще раз следующий момент. В прошлый раз, разбивая брус на кусочки, границу разбиения окружали узким коридором. Это делалось для того, чтобы у точки, которая попала внутрь одного из кусочков, не было шансов быть окруженной брусом, который заедет через границу в другой кусок (рис. 2.1).

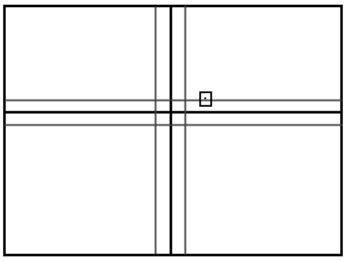

Рис. 2.1. Покрытие границы бруса коридором

В случае кривой произвольной области мы окружаем ее границу брусами, суммарная мера которых $< \varepsilon$. Вообще говоря, этого недостаточно, и суммарную меру границы нужно увеличить на δ (введя дополнительную контрольную полосу), например, до 2ε. Здесь

$$\delta = \frac{\varepsilon}{q2md^{m-1}},$$

где q – количество брусов, окружающих границу, $2m$ – количество граней этих брусов, а d – самый большой из диаметров.

Напомним, в прошлый раз доказали теорему

Теорема 2.2.

$$|A| = \int\limits_A dx = \int\limits_\Pi \chi_A dx.$$

Доказательство. (Повторение) Доказали следующую двустороннюю оценку:

$$\sum^1 |\Delta_k| \leq \mu A \leq \sum^1 |\Delta_k| + \sum^2 |\Delta_k|, \tag{7}$$

где $\sum^1$ – это сумма брусов, у которых отмеченная точка оказалась внутри A и не доходит до контрольной полосы, а $\sum^2$ – это сумма брусов, которые оказались внутри коридора.

Вычитая из оценки (7) интегральную сумму, получим

$$\sum^2 \chi_A |\Delta_k| \leq \mu A - \sum_T \chi_A(\xi_k)|\Delta_k| \leq \sum^2 (1-\chi_A)|\Delta_k|,$$

откуда получаем, что

$$\left|\mu A - \sum_T \chi_A(\xi_k)|\Delta_k|\right| \leq \sum^2 |\Delta_k| < 2\varepsilon.$$

□

Обобщение кратного интеграла

Будем работать теперь с обобщенными разбиениями. Пусть $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, где E_k измеримы, $E_k \cap E_l = \emptyset$, $|E_k| > 0$ и $\cup E_k = \Pi$.

Размеченное разбиение введем как $T_\xi = \{(\xi_k, E_k)\}$, $\xi_k \in E_k$, а

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x', x'' \in E} |x' - x''|,$$

$$\operatorname{diam} T = \max_k \operatorname{diam} E_k.$$

Определение 3.1. Функция f называется *интегрируемой по Риману в узком смысле* и обозначается $f \in R^*$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T_\xi$, $d(T) < \delta$,

$$|\delta^*(f, T_\xi) - I| < \varepsilon,$$

где

$$I = \int\limits_\Pi f(x)dx.$$

Замечание 3.1. Пока еще работаем с брусом, а не с произвольным множеством.

Возникает ощущение, что с определением 3.1 интегрируемых функций станет меньше, так как требований к разбиению стало больше. Ниже покажем, что это не так. На самом деле множество интегрируемых функций не изменилось, но определение 3.1 удобнее ипользовать в некоторых случаях.

Заметим, что очевидно, если функци интегрируема в обоих смыслах (простом и для обобщенного разбиения), значения интегралов совпадают.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in R^*(\Pi)$. Тогда $f \in B(\Pi)$ (ограничена).*

Доказательство. Так как $f \in R^*(\Pi)$, существует lim по базе, а значит, $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T$ таких, что $d(T) < \delta$, $\sigma^*(f, T) = \sum f(\xi_k)|E_k|$ ограничено. Если на каком-то E_k f неограничена, начнем «гонять» ξ_k по E_k до особенности и получим, что вся $\sigma^*(f, T)$ неограничена. □

Суммы Дарбу. Достаточное условие интегрируемости

Покажем, что $R^*(\Pi) = R(\Pi)$. Прежде, чем приступить к доказательству этого факта, напомним определение сумм Дарбу.

Определение 3.2. Так как f ограничена, то корректно определены

$$m_k = \inf_{E_k} f, \quad M_k = \sup_{E_k} f$$

для произвольного E_k. *Нижней суммой Дарбу* называется

$$s(f, T) = \sum m_k |E_k|,$$

а *верхней суммой Дарбу* называется

$$S(f, T) = \sum M_k |E_k|.$$

Справедливо соотношение

$$s(f,T) \le \sigma(f,T_\xi) \le S(f,T).$$

Заметим, что $s(f,T) \nearrow$, а $S(f,T) \searrow$. Тогда существуют

$$\sup_T s(f,T) = I_* \le I^* = \inf_T S(f,T).$$

В утверждении ниже опустим «*» в $R^*(\Pi)$. В доказательстве убедимся, что в рассуждениях нигде не используется специфика интегралов в узком смысле.

Теорема 3.2. *Пусть $I_* = I^* = I$. Тогда $f \in R(\Pi)$.*

Доказательство. Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ T_1$ такое, что $s(f,T_1) > I_* - \varepsilon$ и $\exists\ T_2$ такое, что $S(f,T_2) < I^* + \varepsilon$.

Возьмем $T \prec T_1, T_2$. Тогда

$$I_* - \varepsilon < s(f,T) \le S(f,T) < I^* + \varepsilon.$$

Разбиение представимо в виде $T = \{E_k\}_{k=1}^n$. Тогда $\exists\ \{\Pi_p\}_{p=1}^q$ такой, что

$$\sqcup_{p=1}^q \Pi_p \supset \cup \partial E_k, \quad \sum |\Pi_p| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\ \delta$,

$$\delta = \frac{\varepsilon}{q2md^{m-1}2\sup|f|},$$

где q – количество брусов, $2m$ – количество граней брусов, d – длина самой длинной грани бруса Π, а $\sup|f|$ умножается на 2 для большей точности δ, такое, что $\forall\ T_\xi^1$, $d(T_\xi^1) < \delta$,

$$I_* - 3\varepsilon < s(f,T) - 2\varepsilon \le \sigma(f,T_\xi) = \sum^1 + \sum^2 \le S(f,T^1) + 2\varepsilon < T^* + 3\varepsilon,$$

где $\sum^1$ – те слагаемые, в которых каждое множество находится в одном из E_k нового разбиения, а $\sum^2$ – остальные. $\square$

Положим колебания функции f на E_k:

$$\omega_k(f,E_k) = M_k - m_k.$$

Теорема 3.3. *Если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ T$ такое, что $\sum \omega_k |E_k| < \varepsilon$, то $f \in R(\Pi)$.*

Множество меры 0 по Лебегу

Определение 3.3. Множество E называется *множеством меры* 0 *по Лебегу* (обозначение: $\mu E = 0$), если $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \{\Pi_k\}_{k=1}^\infty$, $\cup \Pi_k \supset E$, $\sum |\Pi_k| < \varepsilon$.

Утверждение 3.1. *(Свойства множеств меры* 0 *по Лебегу)*

1. *Если* $\mu E = 0$, $G \subset E$, *то* $\mu G = 0$;

2. *Если* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ *таковы, что* $\mu E_k = 0 \ \forall \ k$, *то* $\mu(\cup E_k) = 0$;

3. *Если* E *замкнуто,* $\mu E = 0$, *то* $|E| = 0$.

Теорема 3.4. *Пусть* $f \in B(\Pi)$ *и* $f \in C(\Pi \setminus E)$, $\mu E = 0$. *Тогда* $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ T$ *такое, что* $\sum \omega_k |E_k| < \varepsilon$.

Доказательство. Фиксируем произвольное . Распишем условие непрерывности f: $\exists \ \delta(x_0)$, $x_0 \in \Pi \setminus E$, $\forall \ \Delta$, $x_0 \in \Delta$, $d(\Delta) < \delta(x_0)$

$$\omega(f, \Delta) < \varepsilon.$$

Так как $\mu E = 0$, $\exists \ \{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ (будем считать, что открытые) такие, что $\cup \Pi_k \supset E$ и $\sum |\Pi_k| < \varepsilon / \sup |f|$.

Возьмем конечный набор $\{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$, состоящий из брусов 2-х типов (либо покрывающих хорошую точку $x_0 \in \Pi \setminus E$, либо плохую $x \in E$). Тогда

$$\sum \omega_k |\Delta_k| = \sum^{1} + \sum^{2} \leq \varepsilon \sum^{1} |\Delta_k| + 2 \sup |f| \sum^{2} |\Delta_k| < \varepsilon |\Pi| + 2\varepsilon.$$

□

Замечание 3.2. Итак, показали, что $\forall$ ограниченная непрерывная почти всюду функция интегрируема в смысле R^*.

Лекция 4. Обобщение кратного интеграла. Теорема Фубини

Интегрируемость функции в регулярном смысле

Напомним, что доказали следующую теорему.

Теорема 3.5. *Если* $f \in B(\Pi)$ *(ограничена) и* $f \in C(\Pi \setminus E)$ *(непрерывна),* $\mu E = 0$, *то* $f \in R^*(\Pi)$.

Сегодня покажем, что более слабый интеграл интегрирует только такие функции и все. Тем самым установим эквивалентность интегралов.

Пусть $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ – брус. Заметим, что интегральная сумма имеет вид

$$\sum f(\xi_k)|\Delta_k|,$$

но условие на Δ_k накладывается следующее: $\operatorname{diam} \Delta_k < \delta$. Это связано с тем, что брусы могут быть очень вытянутыми. Мера таких брусов будет мала, но значение f может меняться вдоль таких брусов очень сильно.

Часто используют регулярные брусы.

Определение 4.1. Брус называется *ρ-регулярным*, если отношение длины максимального ребра к длине минимального ребра $\leq \rho$.

У регулярных брусов условия $\operatorname{diam} \to 0$ и $|\cdot| \to 0$ равносильны.

Определение 4.2. Функция f *интегрируема в регулярном смысле* ($f \in R_\rho(\Pi)$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall$ ρ-регулярного разбиения T_ξ, $\operatorname{diam} T < \delta$

$$|\sigma(f, T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in R_\rho(\Pi)$. *Тогда* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *такое, что* $\forall$ *ρ-регулярного* T, *diam* $T < \delta$,

$$\sum_T \omega_k |\Delta_k| < .$$

Доказательство. Так как функция f интегрируема,

$$I - \varepsilon < \delta(f, T_\xi) < I + \varepsilon.$$

Зафиксируем в этом неравенстве T и возьмем inf и sup по всем меткам:

$$I - \varepsilon \leq s(f, T_\xi) \leq S(f, T_\xi) \leq I + \varepsilon,$$

где $s(f, T_\xi)$ и $S(f, T_\xi)$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу соответственно. Отсюда

$$S(f, T) - s(f, T) \leq 2\varepsilon,$$

что равносильно тому, что $\sum\limits_T \omega_k |\Delta_k| \leq 2\varepsilon$. □

Следствие. Пусть $f \in R_\rho(\Pi)$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ T$ такое, что $\sum\limits_T \omega_k |\Delta_k| < \varepsilon$.

Теорема 4.2. *Пусть $f \in B(\Pi)$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ T$ такое, что*

$$\sum_T \omega_k |\Delta_k| < \varepsilon. \tag{8}$$

Тогда $\exists\ E$, $\mu E = 0$, такое, что $f \in C(\Pi \setminus E)$.

Доказательство. Пусть E (множество точек разрыва) не является множеством меры 0 по Лебегу. Определим колебание в точке как

$$\omega(f, x) = \inf_{\Delta :\, x \in \Delta} \omega(f, \Delta).$$

Тогда

$$\omega(f, x) = 0 \iff f \in C(x).$$

Определим

$$E_n = \left\{ x \in \Pi \,|\, \omega(f, x) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

тогда

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда (по предположению) $\exists$ номер n такой, что E_n тоже не является множеством меры 0.

Выпишем условие (8) для $\varepsilon/n > 0$. $\exists\ T$ такое, что

$$\sum_T \omega_k |\Delta_k| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Представим

$$\sum_T = \sum{}' + \sum{}'',$$

где $\sum'$ ведется по брусам $\Delta_k \cap E_n \neq \emptyset$, а $\sum''$ иначе. Тогда

$$\sum_T \geq \sum{}' \omega_k |\Delta_k| \geq \frac{1}{n} \sum{}' |\Delta_k|.$$

Тогда $\exists$ конечный набор $\{\Delta_k\}$ такое, что $\sum |\Delta_k| < \varepsilon$ и $\cup \Delta_k \supset E_n$. □

Теорема 4.3.

$$R_\rho(\Pi) = R(\Pi) = R^*(\Pi) = B(\Pi).$$

Обобщение интегрируемости по измеримому множеству

Определение 4.3. Функция f *интегрируема на произвольном измеримом по Жордану множестве* A (обозначение: $f \in R(A)$), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T_\xi$, $d(T) < \delta$

$$|\sigma(f, T_\xi) - I)| < \varepsilon.$$

Замечание 4.1. Любое невырожденное множество A можно окружить некоторым брусом Π, а затем разбить и само A, и оставшуюся часть бруса достаточно мелко.

Теорема 4.4. *Пусть* $f \in R(A)$, $B \subset A$. *Тогда* $f \in R(B)$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из критерий Дарбу. Разбиения множества B дополняются до разбиения A одним и тем же способом. В результате применения критерия это разбиение AB сокращается. $\square$

Теорема 4.5. *Пусть* $f \in R(A_k)$ *и* $\sqcup_{k=1}^{n} A_k = A$. *Тогда* $f \in R(A)$ *и*

$$\int\limits_A f = \sum \int\limits_{A_k} f.$$

Доказательство. (Идея доказательства) Пусть A разбито на конечное число непересекающихся A_k. Границу разбиения окружим достаточно малыми брусами (суммарная мера $< \varepsilon$). В свою очередь, окружаем эти брусы δ-коридором так, чтобы расширенная система брусов была $< 2\varepsilon$. Далее выбираем разбиения A_k с диаметром $< \delta$. Тогда все брусы разбиения A_k могут залезать в коридор, но не могут на соседнее множество. Получим, что каждая из интегральных сумм таких разбиений близка к соответствующему интегралу, а их общая сумма – к интегралу по всему A. $\square$

Обобщение неопределенного кратного интеграла

Определение 4.4. Функция $F(A) = \int\limits_A f(x)dx$, $A \subset B$, A – любое измеримое, называется *неопределенным интегралом Римана.*

Утверждение 4.1. *(Свойства неопределенного интеграла)*

1. F *– аддитивная функция множества.*
2. $F \in C(B)$, *то есть* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\forall\ A \subset B$, $|A| < \delta$, *выполнено*

$$F(A) < \varepsilon.$$

Отсюда следует следующая оценка:

$$\left|\int\limits_A f(x)dx\right| \le \sup_A |f||A|.$$

Теорема 4.6. *Пусть* $g \geq 0$. *Тогда*

$$\inf_A f \int\limits_A g dx \leq \int\limits_A f g dx \leq \sup_A f \int\limits_A g dx.$$

Теорема 4.7. *Пусть* $f\Big|_{\Pi\setminus E} = 0$, $|E| = 0$, $f \in B(\Pi)$. *Тогда*

$$\int\limits_\Pi f dx = 0.$$

Теорема 4.8. *Пусть* $f, g \in R(\Pi)$ *и* $f\Big|_{\Pi\setminus E} = g\Big|_{\Pi\setminus E}$, $|E| = 0$. *Тогда*

$$\int\limits_\Pi f dx = \int\limits_\Pi g dx.$$

Теорема Фубини

Конечно, считать интегралы по определению (через предел интегральных сумм) неудобно. Обсудим основной метод вычисления кратных интегралов.

Поскольку ранее было показано, как интеграл по произвольному измеримому множеству сводится к интегралу по брусу, теорема ниже будет сформулирована только для случая бруса.

Теорема 4.9. *(Фубини) Пусть* $f \in R(\Pi_x \times \Pi_y)$. *Тогда*

$$I^*(y) = \text{верх.} \int\limits_{\Pi_x \times \{y\}} f(x, y) dx \in R(\Pi_y),$$

$$I_*(y) = \text{ниж.} \int\limits_{\Pi_x \times \{y\}} f(x, y) dx \in R(\Pi_y),$$

и верно

$$\int_{\Pi_y} I^* dy = \int\limits_{\Pi_y} I_* dy = \int\limits_{\Pi_x \times \Pi_y} f dx dy.$$

Доказательство. Так как $f \in R(\Pi_x \times \Pi_y)$, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T$, $d(T) < \delta$, выполнено

$$I - \varepsilon M s(f, T) \leq S(f, T) < I + \varepsilon,$$

где

$$I = \int\limits_{\Pi_x \times \Pi_y} f dx dy.$$

Выберем

$$T = T_x \times T_y = \{\Delta_k^x \times \Delta_l^y\}$$

и вычислим

$$s(f,T) = \sum_{T_x}\sum_{T_y} \inf_{\Delta_k^x\times\Delta_l^y} f\,|\Delta_k^x\times\Delta_l^y| =$$

$$= \sum_{T_y}\sum_{T_x} \inf_{\Delta_l^y}\inf_{\Delta_k^x} f\,|\Delta_k^x|\,|\Delta_l^y| = \sum_{T_y}|\Delta_l^y|\sum_{T_x}\inf_{\Delta_l^y}\inf_{\Delta_k^x} f\,|\Delta_k^x| \leq$$

$$\leq \sum_{T_y}|\Delta_l^y|\inf_{\Delta_l^y}\sum_{T_x}\inf_{\Delta_k^x} f\,|\Delta_k^x| = \sum_{T_y}\inf s\left(f(\cdot,y)\right)|\Delta_l^y| \leq$$

$$\leq \sum_{T_y}\inf_{\Delta_l^y} I_*(y)\,|Delta_l^y| = s(I_*(y)).$$

Доказательство будет завершено на следующей лекции. □

Лекция 5. Теорема об интегрируемости

Теорема Фубини (доказательство)

Доказательство. (Теорема 4.9, продолжение) Итак, на прошлой лекции доказали, что

$$s(I^*, T_y) \geq s(I_*, T_y) \geq s(f, T_x \times T_y) > I - \varepsilon.$$

Аналогично,

$$S(I_*, T_y) \leq S(I^* T_y) \leq S(f, T_x \times T_y) < I + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$S(I^*, T_y) - s(I^*, T_y) < 2\varepsilon,$$
$$S(I_*, T_y) - s(I_*, T_y) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, выполнен критерий интегрируемости. Теорема Фубини доказана. □

Конечно, на практике не всегда встречаются прямоугольные множества. В этом случае множество делится, например, на некоторые горизонтальные полосы, по которым ведется интегрирование. Затем интегралы складываются. Пределы интегрирования в таком случае будут разными.

Кроме того, для некоторых множеств разбиение на полосы кажется неестественным. Например, круг хочется разбить на доли (как пирог). В этом случае теорема 4.9 неудобна, так как фактически она делит множество на брусы.

Замена переменных

Рассмотрим еще один инструмент для вычисления интегралов.

Теорема о замене переменных утверждает справедливость следующего равенства:

$$\int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx = \int\limits_{\Pi} f\left(\varphi(t)\right) \left|\det \varphi'(t)\right| dt. \tag{9}$$

Условия, накладываемые в утверждении теоремы, уточним позднее.

Заметим, что образ бруса $\varphi(\Pi)$ не обязан быть брусом.

В одномерном случае (9) принимает вид

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t)dt.$$

Сформулируем сначала вспомогательные утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть Δ – параллелограмм, A – линейный оператор. Тогда $A(\Delta)$ – параллелограм,*

$$|A(\Delta)| = |\det(A)||\Delta|.$$

Определение 1.1. Говорят, что отображение φ *дифференцируемо в точке* t_0 ($\varphi \in D(t_0)$), если $\exists$ матрица $\varphi'(t_0)$ такая, что

$$\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t + \overline{o}(\Delta t).$$

Определение 1.2. Говорят, что отображение φ *непрерывно дифференцируемо в* Π (обозначение $\varphi \in C^1(\Pi)$, если $\varphi' \in C(\Pi)$.

Определение 1.3. Отображение φ называется диффеоморфизмом Π и $\varphi(\Pi)$, если

1. φ взаимно однозначно;
2. $\varphi \in C^1$ и $\varphi^{-1} \in C^1$.

Теорема 1.2. *Если $\varphi \in C^1(\Pi)$, то она удовлетворяет условию Липшица, то есть $\exists\ C > 0$ такая, что $\forall\ t', t'' \in \Pi$*

$$\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| \leq C\|t' - t''\|.$$

Теорема 1.3. *(О замене переменной) Пусть φ – диффеоморфизм Π и $\varphi(\Pi)$, $f \in R(\varphi(\Pi))$. Тогда $f(\varphi(t))\,|\det\varphi'| \in R(\Pi)$ и*

$$\int\limits_{\Pi} f(\varphi(t))\,|\det\varphi'|dt = \int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx.$$

Докажем сначала интегрируемость $f(\varphi(t))\,|\det\varphi'|$. Для этого нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть $|E| = 0$, $\varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда $|\varphi(E)| = 0$.*

Доказательство. Так как $|E| = 0$, то E можно покрыть конечным числом брусов маленькой меры. Теперь, φ гладкое и липшицево, а значит, может увеличивать расстояние в C раз. Тогда

$$\operatorname{diam}\varphi(\Delta) \leq C\operatorname{diam}\Delta,$$

здесь φ не обязано переводить брус в брус, однако это множество можно окружить брусом, диаметр которого с C раз больше.

Заметим, что

$$|\Delta| \leq (\operatorname{diam}\Delta)^m.$$

Так как $|E| = 0$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ набор брусов $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\cup\Delta_k \supset E$ и $\sum|\Delta_k| < \varepsilon$. Кроме того, $\exists$ набор брусов $\{\Pi_k\}_{k=1}^n$, $\cup\Pi_k \supset \varphi(E)$ и $\sum|\Pi_k| < C^m\varepsilon$. $\square$

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 1.2. *Пусть $\mu E = 0$, $\varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда $\mu\varphi(E) = 0$.*

Здесь μ – мера Лебега.

Лемма 1.3. *Пусть A измеримо, $\varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда $\varphi(A)$ измерима.*

Доказательство. Из того, что A измерима, следует, что $|\partial A| = 0$. Тогда $|\varphi(\partial A)| = 0$, откуда $|\partial\varphi(A)| = 0$, а значит, $\varphi(A)$ измеримо. □

Перейдем к доказательству первой части теоремы 1.3.

Доказательство. (Теорема 1.3) Покажем, что в условиях теоремы $f(\varphi(t))|\det\varphi'| \in R(\Pi)$.

Так как $f \in R(\Pi)$, $f \in B(\Pi)$. Так как φ – диффеоморфизм, φ также ограничена, а значит, ограничена и их композиция $f(\varphi)$. $|\det\varphi'|$ также ограничена, так как φ' – непрерывная функция на компакте Π.

Следовательно, $f(\varphi)|\det\varphi'| \in B(\Pi)$. Найдем точки разрыва этой функции. Так как φ' – непрерывная матрица, у нее нет точек разрыва. Обозначим через E множество точек разрыва функции f. Тогда $\varphi^{-1}(E)$ – множество разрывов $f(\varphi(t))$. Так как отображение φ^{-1} – гладкое, $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Интегрируемость доказана. □

Сформулируем вспомогательные утверждения, которые помогут доказать вторую часть теоремы 1.3.

Лемма 1.4. *Пусть φ – диффеоморфизм. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ t, \Delta t$, $t, t+\Delta \in \Pi$, $\|\Delta t\| < \delta$, выполнено*

$$\|\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) - \varphi'(t)\Delta t\| < \varepsilon\|\Delta t\|.$$

Доказательство. По теореме Кантора, $\varphi'(t) \in UC(\Pi)$ (равномерно непрерывна). Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ такое, что $\forall\ t', t'' \in \Pi$, $\|t' - t''\| < \eta$,

$$\|\varphi'(t') - \varphi'(t'')\| < \varepsilon.$$

φ дифференцируема в каждой точке, то есть $\forall\ \varepsilon < 0$, $\forall\ t \in \Pi\ \exists\ \delta(t) > 0$ такое, что $\forall\ \Delta t$, $\|\Delta t\| < \delta(t)$, выполнено

$$\|\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) - \varphi'(t)\Delta t\| < \varepsilon\|\Delta t\|.$$

Это то же самое, что и требуется, но здесь δ зависит от выбора t.

Возьмем семейство окрестностей

$$\left\{B_{\delta(t)/2}(t)\right\}_{t\in\Pi}$$

– покрытие Π. Выделим конечное подпокрытие

$$B_{\delta(t_1)/2}(t), \ldots, B_{\delta(t_n)/2}(t)$$

– также покрытие Π. Положим

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\eta, \delta(t_1), \ldots, \delta(t_n)\right\}.$$

Возьмем произвольное $t \in \Pi$, $\forall\ \Delta t$ такие, что $t + \Delta t \in \Pi$, $\|\Delta t\| < \delta$. Тогда

$$\|\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) - \varphi'(t)\Delta t\| \leq$$
$$\leq \|\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t_k) - \varphi'(t_k)(t - t_k + \Delta t)\| + \|\varphi(t) - \varphi(t_k) - \varphi'(t_k)(t - t_k)\| +$$
$$+ \|\varphi'(t_k) - \varphi'(t)\|\,\|\Delta t\| < 4\varepsilon\delta.$$

□

Лекция 6. Теорема о замене переменной

Вспомогательные утверждения

Сегодня мы собираемся доказывать следующую формулу:

$$\int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx = \int\limits_{\Pi} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t)dt,$$

где φ – диффеоморфизм Π и $\varphi(\Pi)$, $f \in R(\varphi(\Pi))$, откуда $f(\varphi(t)) \det \varphi'(t) \in R(\Pi)$.

Лемма 6.1. *Пусть*

$$\psi : \ \Pi \ \to \ \mathbb{R},$$

$\psi \in D(\Pi)$ *(дифференцируема в каждой точке бруса* Π*). Тогда*

$$\psi(t+\delta t) - \psi(t) = (\nabla\psi(t+\theta\delta t, \delta t)\,,$$

где $\nabla \in (0,1)$.

Доказательство. Введем функцию

$$g(u) = \psi(t+u\delta t) - \psi(t).$$

Заметим, что

$$g : \ [0,1] \ \to \ \mathbb{R},$$

и, кроме того, $f \in D([0,1])$, $g(0)=0$, $g(1) = \psi(t+\delta t) - \psi(t)$. По теореме Лагранжа,

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)\cdot 1,$$

где $g(1)-g(0)$ равен в точности $\psi(t+\delta t)-\psi(t)$. Вычислим

$$g'(\theta) = \frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t+\theta\delta t)\delta t_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial t_m}(t+\theta\delta t)\delta t_m,$$

а это и есть скалярное произведение из утверждения леммы. □

Следующая лемма следует из леммы 6.1.

Лемма 6.2. *Пусть*

$$\varphi : \ \Pi \ \to \ \mathbb{R}^m,$$

$\varphi \in D(\Pi)$. *Тогда*

$$\varphi(t+\delta t) - \varphi(t) = \left(\begin{array}{c} \nabla\varphi_1(t+\theta_1\delta t) \\ \nabla\varphi_2(t+\theta_2\delta t) \\ \ldots\ldots\nabla\varphi_m(t+\theta_m\delta t) \end{array} \right)\delta t.$$

Лемма 6.3. *Пусть* $\varphi \in C^1(\Pi)$. *Тогда* $\exists\ C = \sqrt{\sum\left(\max\limits_{\Pi}\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_l}\right|\right)^2}$ *такое, что*

$$|\varphi(t+\delta t) - \varphi(t)| \le C\|\delta t\|.$$

Доказательство. Заметим, что утверждение корректно, так как все частные производные непрерывно дифференцируемой функции непрерывны, а значит, ограничены на компакте.

По лемме 6.2,

$$|\varphi(t+\delta t)-\varphi(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(\nabla\varphi_k(t+\theta_k\delta t),\delta t)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\|\nabla\varphi_k(t+\theta_k\delta t)\|^2\|\delta t\|^2} \le C\|\delta t\|.$$

□

Лемма 6.4. *Пусть $\varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ t \in \Pi$, $\forall\ \delta t$ таких, что $\|\delta t\| < \delta$, выполнено*

$$\|\varphi(t+\delta t)-\varphi(t)-\varphi'(t)\delta t\| < \varepsilon\|\delta t\|.$$

Доказательство. Перепишем утверждение леммы в терминах леммы 6.2 и воспользуемся оценкой леммы 6.3. Получим

$$|\varphi(t+\delta t)-\varphi(t)-\varphi'(t)\delta t\| = \left\|\begin{matrix}\nabla\varphi_1(t+\theta_1\delta t)-\nabla\varphi_1(t)\\ \nabla\varphi_2(t+\theta_2\delta t)-\nabla\varphi_2(t)\\ \ldots\ldots\nabla\varphi_m(t+\theta_m\delta t)-\nabla\varphi_m(t)\end{matrix}\right\| \le$$

$$\le \sqrt{\sum\left(\max_{0<\theta_k<1}\left|\frac{\varphi_k(t+\theta_k\Delta t)}{\partial t_l}-\frac{\partial\varphi_k(t)}{t_l}\right|\right)^2}\|\Delta t\|. \tag{10}$$

Заметим, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ k,\ l$, $\forall t \in \Pi$, $\forall\ \Delta t$ таких, что $\|\Delta t\| < \delta$ верно, что

$$\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_l}(t+\Delta t)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_l}(t)\right| < \varepsilon/m.$$

Тогда все max в оценке (10) $< \varepsilon/m$, то есть неравенство (10) можно оценить сверху следующим образом:

$$(10) \le \varepsilon\|\Delta t\|.$$

□

Леммы

Лемма 6.5. *Пусть $\varphi \in C^1(\Pi)$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ \rho$-регулярных брусов Δ, $t \in \Delta$, $d(\Delta) < \delta$, верно*

$$||\varphi(\Delta)| - |\det\varphi'(t)|\,|\Delta|| < \varepsilon|\Delta|.$$

Доказательство. Напомним, что условие ρ-регулярности означает, что у рассматриваемого бруса $\max d_k / \min d_k \leq \rho$. В этом случае диаметр бруса Δ допусткает двустороннюю оценку

$$C_1(\rho, m)|\Delta| \, (d(\Delta))^m \leq C_2(\rho, m)|\Delta|.$$

По условию, $\varphi \in C^1(\Pi)$. Это означает, что $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, t$, Δt таких, что $\|\Delta t\| < \delta$, выполнено

$$|\varphi(t + \Delta t) - (\varphi(t) + \varphi'(t)\Delta t)\| \leq \varepsilon \|\Delta t\|.$$

Отображение

$$\varphi(t) + \varphi'(t)\Delta \;\; \to \;\; \text{параллелепипед с мерой } |\det \varphi'(t)||\Delta|.$$

Рассмотрим двумерные случай. Здесь $\varphi(\Delta)$ – множество, которое выходить за пределы параллелепипеда и наоборот, параллелепипед может выходить за его границы. Точка $t + Deltat$ переходит в точку $\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \varphi'(t)\Delta t$.

Заметим, что $t + \Delta t \in \partial\Delta$, откуда $|\Delta t| \leq d(\Delta)$. Это означает, что

$$\|\varphi(t + \Delta t) - (\varphi(t) + \varphi'(t)\Delta t)\| < \varepsilon d(\Delta).$$

Выберем вместо рассматриваемого параллелепипеда два параллелепипеда чуть больше и чуть меньше так, чтобы ширина коридора была $2\varepsilon d(\Delta)$. Тогда

$$\Pi_1 \subset \varphi(\Delta) \subset \Pi_2.$$

Оценим

$$|\Pi_1| \geq |\det \varphi'(t)| \, |\Delta| - \varepsilon d(\Delta) d \left(\varphi(\Delta)\right)^{m-1} 2m > |\det \varphi'| \, |\Delta| - \varepsilon C^{m-1} \left(d(\Delta)\right)^m 2m,$$
$$|\Pi_2| \leq |\det \varphi'(t)| \, |\Delta| + \varepsilon d(\Delta) d \left(\varphi(\Delta)\right)^{m-1} 2m \leq |\det \varphi'| \, |\Delta| + \varepsilon 2m C^{m-1} \left(d(\Delta)\right)^{m-1}.$$

Получаем двустороннюю оценку

$$-\varepsilon C_3(\rho, m)|\Delta| + |\det \varphi'(t)||\Delta| \leq |\varphi(\Delta)| \leq |\det \varphi'(t)||\Delta| + \varepsilon C_3(\rho, m)|\Delta|.$$

□

Лемма 6.6. *Пусть φ – диффеоморфизм Π и $\varphi(\Pi)$. Тогда*

$$\int\limits_{\Pi} |\det \varphi'(t)| dt = |\varphi(\Pi)|.$$

Доказательство. Для $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall$ ρ-регулярное Δ, $t \in \Delta$, $d(\Delta) < \delta$, верно

$$|\varphi(\Delta) - |\det \varphi'(t)| \, |\Delta|| < \varepsilon |\Delta|.$$

Тогда $\forall$ ρ-регулярного T_ξ, $d(T) < \delta$,

$$|\sigma\left(|\det \varphi'|, T_\xi\right) - |\varphi(\Pi)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(|\det \varphi'(\xi_k)||\Delta_k| - |\varphi(\Delta_k)|\right) \right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon |\Delta_k| = \varepsilon |\Pi|.$$

□

Доказательство второй части теоремы 1.3 выполним на следующей лекции.

Лекция 7. Теорема о замене переменной. Несобственный интеграл

Теорема о замене переменной (доказательство равенства интегралов)

Напомним, в прошлый раз доказали следующую промежуточную теорему.

Теорема 7.1. *Пусть φ – диффеоморфизм. Тогда*

$$|\varphi(\Pi)| = \int\limits_{\Pi} |\det \varphi'(t)| \det t.$$

Теорема 7.2. *Пусть $f \in R((\Pi))$, φ – диффеоморфизм. Тогда*

$$\int\limits_{\Pi} = f(\varphi(t))\, |\det \varphi'(t)|\, dt = \int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем равенство (11). Так как $f \in R(\varphi(\Pi))$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, T$, $d(T) < \delta$, выполнено

$$S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon.$$

Пусть φ – диффеоморфизм. Тогда

$$\mathrm{diam}(\Delta) \le C \mathrm{diam}(\Delta).$$

Возьмем произвольное разбиение T. Тогда $\{\varphi(\Delta_k)\}_{k=1}^{n}$ – разбиение $\varpi(\Pi)$ и

$$d(\{\varphi(\Delta_k)\}) < C\delta.$$

Тогда для нижних сумм Дарбу справедлива оценка

$$\int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx - \varepsilon < \sum \inf_{(\Delta_k)} f\, |\varphi(\Delta_k)| = \sum \inf_{\varphi(\Delta_k)} f \int\limits_{\Delta_k} |\det \varphi'(t)|\, dt \le$$

$$\le \sum \int\limits_{\Delta_k} f(\varphi(t))\, |\det \varphi'(t)|\, dt = \int\limits_{\Pi} f(\varphi(t))\, |\det \varphi'(t)|\, dt.$$

Аналогично, для верхних сумм

$$\int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)dx + \varepsilon > \sum \sup_{\varphi(\Delta_k)} f\, |\varphi(\Delta_k)| = \sum \sup_{\varphi(\Delta_k)} f \int\limits_{\Delta_k} |\det \varphi'(t)|\, dt \ge$$

$$\ge \sum \int\limits_{\Delta_k} f(\varphi(t))\, |\det \varphi'(t)|\, dt = \int\limits_{\Pi} f(\varphi(t))\, |\det \varphi'(t)|\, dt.$$

В силу произвольности ε равенство (11) доказано. □

Теорема 7.3. *Пусть $f \in R(\varphi(A))$, φ – диффеоморфизм. Тогда*

$$\int\limits_A f(\varphi(t))\left|\det \varphi'(t)\right| dt = \int\limits_{\varphi(A)} f(x)dx. \tag{12}$$

Доказательство. Возьмем произвольное множество A. Мы договорились, чтобы диффеоморфизм был чуть больше (чтобы все точки A были внутренними). Множество A можно окружить конечным числом брусов, которые содержатся в окрестности. Тогда, если для каждого из брусов мы докажем (12), в силу аддитивности (12) будет верно и для их суммы.

Итак, утверждение теоремы сводится к случаю $A \subset \Pi$, φ – диффеоморфизм $\Pi \to \varphi(\Pi)$. Воспользуемся теоремой 7.2:

$$\int\limits_A f(\varphi(t))\left|\det \varphi'(t)\right| dt = \int\limits_\Pi f(\varphi(t))\left|\det \varphi'(t)\right| \chi_A(t)dt =$$

$$= \int\limits_{\varphi(\Pi)} f(x)\chi_{\varphi(A)}(x)dx = \int\limits_{\varphi(A)} f(x)dx.$$

□

Следствие.

$$\int\limits_A \left|\det \varphi'(t)\right| dt = \int\limits_{\varphi(A)} dx = \left|\varphi(A)\right|.$$

Следствие. Мера инвариантна относительно ортогонального преобразования:

$$|\varphi(A)| = \int\limits_A \left|\det \varphi'(t)\right| dt = \int\limits_A dt = |A|,$$

где φ – ортогональное преобразование.

Исчерпание множества

Вспомним, как определяли несобственный интеграл на прямой. Мы фиксировали левый конец отрезка $[a, b]$ и устремляли $b \to \infty$.

Поговорим, как же быть с плоскостью. На плоскости можно взять и квадрат, и круг, и так далее. Как будет видно позднее, в силу этой особенности определение несобственного интеграла Римана на плоскости (в трехмерном пространстве и так далее) отличается от одномерного случая.

Определение 7.1. Пусть Ω – множество. $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *исчерпанием*, если

1. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega$;
2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Теорема 7.4. *Пусть Ω – измеримое и $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n = \Omega$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}|\Omega_n| = |\Omega|.$$

Доказательство. Так как Ω измеримо, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{\Pi_p\}_{p=1}^q$ такие, что $\cup\Pi_p \subset \Omega$ и $\sum|\Pi_p| > |\Omega| - \varepsilon$.

Теперь, для $\forall\ n$ (так как каждое Ω_n измеримо) $\exists\ \{\Delta_k^n\}_{k=1}^{k_n}$ такие, что $\bigcup\limits_k \Delta_k^n \supset \Omega_n$ и $\sum\limits_k |\Delta_k^n| < |\Omega_n| + \varepsilon/2^n$.

Тогда

$$\bigcup_n\bigcup_k \Delta_k^n \supset \bigcup_n \Omega)n = \Omega \supset \bigcup_p \Pi_p.$$

Так как $\cup\Pi_p$ – конечное объединение замкнутых[4] брусов, то $\cup\Pi_p$ – компакт, а значит, $\exists$ конечный набор Δ_k^n, покрывающий $\cup\Pi_p$.

Пусть N – самый большой верхний индекс. Тогда

$$\{\Delta_k^{N_2}\} \cup \{\Delta_k^{N_2}\} \cup \ldots \supset \cup Pi_p.$$

Наконец, получем, что

$$|\Omega_N| > \sum|\Delta_k^n| - \varepsilon > |\Omega| - 2\varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}|\Omega_n| \geq |\Omega|.$$

Обратное неравенство очевидно. $\square$

Несобственный интеграл. Свойства

Определение 7.2. Функция f называется *интегрируемой в несобственном смысле по Риману на* Ω (обозначение: $f \in \widetilde{R}(\Omega)$), если

1. $\exists$ исчерпание $\{\Omega_n\}$ такое, что $f \in R(\Omega_n)$;
2. Для $\forall$ исчерпания $\{\Omega_n\}$ $\exists$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_n} f(x)dx = \int\limits_{\Omega} f(x)dx.$$

Замечание 7.1. Если $f \in R(\Omega)$, то $f \in \widetilde{R}(\Omega)$.

Теорема 7.5. *Пусть $f \geq 0$. Тогда $f \in \widetilde{R}(\Omega) \iff \exists$ исчерпание $\{\Omega_n\}$ такое, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_n} f(x)dx$.*

[4] Ранее договоривались, что в разных ситуациях будем считать брусы либо открытыми, либо замкнутыми в зависимости от того, что нам нужно.

Доказательство. Возьмем $\forall$ другое исчерпание $\{\Omega'_k\}$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega'_k} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega'_k\cap\Omega_n} f(x)dx < \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} f(x)dx = C.$$

Итак, интегралы $\int\limits_{\Omega'_k} f(x)dx$ ограничены одним и тем же числом C, а значит, и ее предел (он существует, так как последовательность монотонна) $\leq C$. В обратную сторону аналогично. $\square$

Теорема 7.6. *Если* $0 \leq f \leq g$, *то из того, что* $g \in \widetilde{R}(\Omega)$, *следует, что и* $f \in \widetilde{R}(\Omega)$.

Теорема 7.7. *Если* $|f| \in \widetilde{R}(\Omega)$, *то* f^+ *и* $f^- \in \widetilde{R}(\Omega)$, *где*

$$f^+ = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases} \qquad f^- = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы 7.6 и неравенств

$$0 \leq f^+ \leq |f|, \;\; 0 \leq f^- \leq f.$$

$\square$

Следствие. Если $|f| \in \widetilde{R}(\Omega)$, то $f \in \widetilde{R}(\Omega)$.

Доказательство. Следует из представления

$$f = f^+ - f^-.$$

$\square$

Теорема (если $|f| \in \widetilde{R}(\Omega)$, то и $f \in \widetilde{R}(\Omega)$)

Теорема 7.8. *Пусть* $f \in \widetilde{R}(\Omega)$. *Тогда* $|f| \in \widetilde{R}(\Omega)$.

Пример 7.1. Возьмем, к примеру, интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \tag{13}$$

Как известно, этот интеграл сходится условно. Сходимость возникает за счет того, что положительные участки функции $\sin x/x$ компенсируются отрицательными. Если бы вместо отрезков позволялось брать произвольные измеримые по Жордану множества (например, конечные объединения отрезков), можно было бы взять, например, 10 положительных отрезков, 1 отрицательный, затем 100 положительных, 2 отрицательных и так далее. Поэтому, если бы определение для прямой сделать таким же неестественным, как определение 8.2, условной сходимости (13) не было бы.

Доказательство. (Теорема 7.8, от противного) Пусть

$$\int\limits_{\Omega} |f| = \infty.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Omega} f^+ = \infty, \quad \int\limits_{\Omega} f^- = \infty,$$

$\exists$ исчерпание $\{\Omega_k\}$ такое, что $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k = \Omega$ и

$$\int\limits_{\Omega_k} f^+ \ \to \ \infty.$$

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 7.1. *Пусть E измеримо. Тогда $\exists\ G \subset E$ такое, что*

$$\int\limits_{G} f > \int Ef^+ - \varepsilon.$$

Доказательство. Существование $\int_E f^+$ означает, что $\exists$ исчерпание $\{E_k\}$ такое, что

$$\sum \inf_{E_k} f^+ |E_k| > \int\limits_{E} f^+ - \varepsilon.$$

Заметим, что $\inf f^+$ либо 0, либо > 0. Положим $G = \bigcup\limits_{\inf f^+ > 0} E_k$. Тогда

$$\sum \inf_{E_k} f^+ |E_k| \le \int\limits_{G} f.$$

$\square$

Доказательство теоремы будет продолжено на следующей лекции. $\square$

Лекция 8. Дифференциальные формы

Критерий интегрируемости в несобственном смысле

Напомним, в прошлый раз познакомились с понятием несобственного кратного интеграла Римана, который определили как

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} f(x)dx$$

для $\forall$ $\{\Omega_n\}$ таких, что $\lim\limits_{\Omega_n} = \Omega$.

В прошлый раз мы начали обсуждать следующий критерий.

Теорема 8.1. $f \in \widetilde{R}(\Omega) \iff |f| \in \widetilde{R}(\Omega)$.

Доказательство. Выясняли следующие факты, на которые будем сейчас опираться.

1. Если $\int f$ сходится, а $\int |f|$ расходится, то $\in f^+$ и $\int f^-$ расходится.
2. Если E измеримо и $f \in R(E)$, то $\forall > 0$ $\exists$ $G \subset E$ такое, что

$$\int\limits_G f > \int\limits_E f^+ - \varepsilon.$$

Предположим, что $\exists$ $f \in \widetilde{R}(\Omega)$, но $|f| \notin \widetilde{R}(\Omega)$.

Тогда в силу пункта 1

$$\int\limits_{\Omega} f^+ = +\infty, \quad \int\limits_{\Omega} f^- = +\infty.$$

Тогда, если мы возьмем последовательность Ω_n такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} f^+ = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} f^- = +\infty.$$

Возьмем n_1 такой (он $\exists$), что

$$\int\limits_{\Omega_{n_1}} f^+ > \int\limits_{\Omega_1} |f| + 1.$$

По пункту 2, $\exists$ $G_1 \subset \Omega_{n_1}$ такое, что

$$\int\limits_{G_1} f > \int\limits_{\Omega_{n_1}} f^+ - 1.$$

Положим $E_1 = G_1 \cap \Omega_1$. Тогда

$$\int\limits_{E_1} f \geq \int\limits_{G_1} f - \int\limits_{\Omega_1} |f| > \int\limits_{\Omega_{n_1}} f^+ - 1 - \int\limits_{\Omega_1} |f| > 1.$$

Теперь, $\exists\ n_2$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega_{n_2}} f^- > \int\limits_{E_1 \cup \Omega_2} |f| + 3.$$

Тогда $\exists\ G_2 \subset \Omega_{n_2}$ такой, что

$$\int\limits_{G_2} -f > \int\limits_{\Omega_{n_2}} f^- - 1.$$

Обозначим, аналогично первому шагу, $E_2 = G_2 \cup E_1 \cup \Omega_2$. Тогда

$$\int\limits_{E_2} (-f) \geq \int\limits_{G_2} (-f) - \int\limits_{E_1 \cup \Omega_2} |f| > 2.$$

Проговорим еще один шаг. $\exists\ n_3$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega_{n_3}} f^+ > \int\limits_{E_2 \cup \Omega_3} |f| + 4.$$

Далее, $\exists\ G_3 \subset \Omega_{n_3}$ такое, что

$$\int\limits_{G_3} f > \int\limits_{\Omega_{n_3}} f^+ - 1.$$

Обозначим $E_3 = G_3 \cup E_2 \cup \Omega_3$, тогда

$$\int\limits_{E_3} f > 3.$$

Продолжая рассуждения, получим, что

$$\int\limits_{E_4} f < -4$$

и так далее. Совершенно очевидно, что предела по такой последовательности исчерпаний нет. Получили противоречие с интегрируемостью f в несобственном смысле. $\square$

Кривые

Далее будем двигаться параллельно в двух направлениях. Первое – это общая теория интегрирования дифференциальных форм, а второе – интегрирование по кривым и поверхностям в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим несколько прикладных **задач** в $\mathbb{R}^2$.

1. Пусть есть гладкая кривая (проволока) и ее плотность $\rho(x, y)$, $\rho \in C$. Требуется вычислить массу проволоки.

   Разобъем проволоку на маленькие кусочки. Так как ρ непрерывна, на достаточно маленьких кусочках она почти не меняется. Тогда
   $$M = \sum M_k = \sum \rho(x_k, y_k)\Delta s_k. \tag{14}$$
   Суммарная погрешность в формуле выше становится меньше при увеличении количества слагаемых. Тогда предел сумм (14) равен массе проволоки.

2. Предположим, что материальная точка движется вдоль кривой под действием некоторой силы F. Будем считать $F \in C$. Здесь сила задана в каждой точке:
   $$F(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}.$$
   Требуется вычислить работу, которую совершает сила F вдоль кривой.

   Как и в задаче 1, разобъем кривую на маленькие кусочки. В силу непрерывности F работа
   $$A = \sum A_k \approx \sum P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Определение 8.1. *Кривой в* $\mathbb{R}^m$ называется одномерное многообразие. *Гладкой кривой* – гладкое многообразие. *Ориентированной кривой* называется ориентированное многообразие.

Остановимся подробнее на понятии ориентированности кривой. Пусть кривая отображается на прямую с помощью некоторого диффеоморфного отображения (U_1, φ_1). На прямой есть некоторый базис, который может иметь одно из двух направлений. Разделим все векторы на прямой на две группы, имеющих разные ориентации.

Если две карты на кривой перекрылись, функции склейки должны быть ориентированы одинаково. Для кривой это фактически означает, что мы выбрали направление движения. Начало движения считается ориентированным отрицательно, а конец – положительно.

Более формально это выглядит так. Пусть кривой соответствует атлас (U_1, φ_1). Предположим, что $\exists\ p \in M$ – многообразию, которой соответствует две карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2),
$$\varphi_1 : \ R_t \ \to \ U_1,$$
$$\varphi_2 : \ R_x \ \to \ U_2.$$
Тогда определители матриц отображений φ_i должен иметь одинаковый знак.

Теорема о существовании разбиения единицы

Определение 8.2. Пусть дана система функций $\{e_\alpha\}$,

$$e_\alpha :\ M \ \to \ \mathbb{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1. $0 \leq e_{\leq} 1$;
2. $\forall\ p \in M$ лишь конечное число $e_\alpha(p) \neq 0$;
3. $\sum\limits_{\alpha} e_\alpha \equiv 1$.

Такая система называется *разбиением единицы*.

Замечание 8.1. Заметим, что сумма в пункте 3 определения 8.2 определена корректно, так как в каждой точке мы складываем лишь конечное число ненулевых $e_\alpha(p)$.

Определение 8.3. Пусть дано многообразие M и (U_i, φ_i) – атлас. Разбиение единицы $\{e_\alpha\}$ называется *подчиненным атласу*, если $\forall\ \alpha\ \exists\ i$ такой, что

$$\mathrm{supp} e_\alpha \subset U_i.$$

Здесь

$$\mathrm{supp} e_\alpha = \{p \in M :\ e_\alpha \neq 0\}.$$

Теорема 8.2. *Пусть M – компактное гладкое многообразие, (U_i, φ_i) – конечный атлас. Тогда $\exists$ конечное гладкое разбиение единицы, или, иными словами, $\exists$ гладкая конечная система функций $\{e_i\}$ такая, что $supp e_i \subset U_i$.*

Дифференциальные формы

Определим понятие дифференциальной формы 1-го порядка (1-формы).

Пусть дано $\mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^m$ – касательное пространство в точке x.

Определение 8.4. Определим *дифференциальную форму 1-го порядка как*

$$\omega^1 :\ T\mathbb{R}^m_x \ \to \ \mathbb{R}$$

такое, что на этом касательном пространстве ω^1 представляет собой линейную функцию.

Пример 8.1. Пусть в $T\mathbb{R}^m_x$ есть ОНБ $\{e_i\}$. Тогда

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi^i e_i.$$

Определим дифференциальную форму

$$dx^i(\xi) = \xi^i.$$

Пример 8.2. Произвольная 1-форма для вектора ξ вычисляется как

$$\omega^1(x)(\xi) = \omega^1(x)\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega'(x)(e_i)dx^i(\xi). \tag{15}$$

Замечание 8.2. Справедливо представление

$$\omega^1(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)dx^i,$$

где

$$a_i(x) = \omega^1(x)(e_i).$$

Коэффиценты a_i и определяют свойства 1-формы.

Поговорим о переносе дифференциальных форм. Пусть есть два пространства $\mathbb{R}^m_x$ и $\mathbb{R}^m_t$ и диффеоморфизм

$$\varphi:\ \mathbb{R}^m_t\ \to\ \mathbb{R}^m_x.$$

Пусть, кроме того, задана 1-форма

$$\omega:\ T\mathbb{R}^m_x\ \to\ \mathbb{R}.$$

Тогда *перенос дифференциальной формы* определяется как

$$\varphi^*\omega:\ T\mathbb{R}^m_t\ \to\ \mathbb{R},$$

$$\varphi^*\omega(t)(\tau) = \omega(x)(\xi),$$

где $x = \varphi(t)$, $\xi = \varphi'(t)\tau$.

Рассмотрим одномерное многообразие M. Тогда 1-*форма на многообразии* (в $\mathbb{R}^1$) определяется как

$$\omega:\ TM_p\ \to\ \mathbb{R},$$

и дана карта (U, φ). Тогда

$$\varphi^*\omega = \omega\left(\varphi(t)\right)\left(\varphi'(t)\tau\right).$$

Лекция 9. Интеграл от формы по многообразию. Потенциал

Обозначения

Напомним, 1-форма
$$\omega^1 : \ T_pM \ \to \ \mathbb{R},$$
где T_pM – касательное пространство, которая действует как $\omega^1(p)(\xi)$ в каждой точке $p \in M$, $\xi \in T_p(M)$.

Пусть (U, φ) – некоторая карта. Перенос дифференциальной формы определяется следующим образом:
$$\varphi^*\omega : \ T_t\mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R},$$
$$\varphi^*\omega = \omega\left(\varphi(t)\right)\left(\varphi'(t)\tau\right).$$

Прежде, чем перейти к определению интеграла, разберемся, как выглядит 1-форма в $\mathbb{R}$. Как было показано ранее, в многомерном случае это некоторая сумма (15). В одномерном случае
$$\omega : \ T_t\mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$
имеет вид
$$\omega(t)(\tau) = a(t)dt(\tau),$$
где $dt(\tau)$ – координата его разложения по базисному вектору. Поэтому везде далее будем писать просто
$$\omega(t) = a(t)dt.$$
По определению положим *интеграл от формы* ω
$$\int \omega = \int a(t)dt. \tag{16}$$
Определение (16) корректно. Если некоторым отображением ψ мы перенесем 1-форму, то
$$\int \psi^*\omega = \int a\left(\psi(s)\right)\psi'(s)ds.$$

Интеграл от дифференциальной формы на многообразии

Перейдем к определению интеграла на компактном многообразии.

Определение 9.1. Пусть M – 1-мерное, гладкое, компактное многообразие, (U_i, φ_i) – конечный атлас, $\{e_i\}$ – конечное разбиение 1. Тогда
$$\int\limits_M \omega = \sum_i \int \varphi^*(e, \omega).$$

Пусть $(\widetilde{U}_i, \widetilde{\varphi}_i)$ – другой конечный атлас, $\{\widetilde{e_j}\}$ – другое конечное разбиение единицы. Заметим, что $e_i\widetilde{e}_j$ – тоже конечное разбиение единицы, так как

$$\sum_j e_i\widetilde{e}_j = e_i.$$

Тогда

$$\sum \int \varphi_i^*(e_i\omega) = \sum_i \sum_j \int \varphi_i^*(e_i, \widetilde{e}_j, \omega) = \sum_i \sum_j \in \widetilde{\varphi}_j^*(e_i\widetilde{e}_j\omega) =$$

$$= \sum_j \int \widetilde{\varphi}_j^*(\widetilde{e}_j, \omega).$$

Итак, определение 9.1 не зависит от атласа и подчиненного ему разбиения единицы, а значит, корректно.

Пример 9.1. Рассмотрим следующий пример в $\mathbb{R}^2$. Пусть $F = \{P, Q\}$,

$$\omega_F = Pdx + Qdy.$$

Тогда

$$\int\limits_M \omega_F = \int\limits_M Pdx + Qdy.$$

Предположим, что M накрыто только одной картой, то есть есть одно отображение

$$\varphi : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Здесь $t \in [\alpha, \beta]$, $x, y^1[\alpha, \beta]$, $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$. Тогда это диффеоморфизм. Разбиение единицы в этом случае состоит из одной функции, тождественно равной 1.

Найдем

$$\varphi^*\omega_F = \left(P\left(x(t), y(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right)y'(t)\right)dt.$$

Тогда, по определению,

$$\int\limits_M \omega_F = \int\limits_\alpha^\varphi {}^*\omega_F.$$

Если поле $F = \nabla f$, то оно называется *потенциальным*, а функция f – *потенциалом.* Тогда

$$\omega_{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

– 1-форма, соответствующая потенциальному полю (форма работы).

Определим

$$ds(p)(\xi) = \sqrt{(\xi, \xi)},$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярная форма в $\mathbb{R}^m$. Тогда

$$\varphi^* ds = \sqrt{\left(\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\dots\frac{d\varphi_m}{dt}\right)\tau, \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\dots\frac{d\varphi_m}{dt}\right)\tau\tau\right)}.$$

Получаем, что

$$\int\limits_M ds = \int\sqrt{\sum\left(\frac{d\varphi_k}{dt}\right)^2}dt.$$

Задачу вычисления массы решает интеграл

$$\int\limits_M \rho ds$$

– интеграл I рода.[5]

В одномерном случае

$$\int\limits_\alpha^\beta (x(t), y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt.$$

Заметим, что от ориентации этот интеграл не зависит.

Теорема

Теорема 9.1. *Пусть D – криволинейный прямоугольник, а векторное поле $F = \{P, Q\} \in C^1(\overline{D})$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Для удобства будем считать, что здесь граница ∂D имеет положительную ориентацию (обходится так, чтобы область оставалась слева). Криволинейный прямоугольник изображен на рис. 9.1.

Доказательство. Так как интеграл линеен, вычислим сначала интеграл только от P. В силу того, что $\in Pdx$ на вертикальных отрезках D равен 0, имеем

$$\int\limits_{\partial D} Pdx = \int\limits_{l_1} Pdx + \in_{l_2} Pdx,$$

$$l_1: \ x \ \to \ y_1(x),$$
$$l_2: \ x \ \to \ y_2(x).$$

[5]Выше рассматривали интеграл II рода.

Рис. 9.1. Криволинейный прямоугольник D

Тогда

$$\int\limits_{\partial D} Pdx = \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx + \int\limits_b^a P(x, y_2(x))dx = -\int\limits_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P\left(x, y_1(x)\right)\right) dx =$$

$$= -\int_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Аналогично, интеграл по Q по горизонтальным отрезкам D равен 0. Тогда

$$\int\limits_{\partial D} Qdy = \int\limits_c^d \left(Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)\right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

$\square$

Теоремы о потенциальном поле

Вернемся к потенциальным векторным полям. Пусть $F = \nabla f$. Пусть кривая M параметризуется как

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_M \nabla f = \int\limits_M \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{df}{dt} dt = f\left(x(t), y(t)\right)\Big|_\alpha^\beta = f(b) - f(a).$$

Полученный результат не зависит ни от параметризации кривой, ни от самой кривой.

Теорема 9.2. *Пусть F – потенциал в области D. Тогда*

1. *Работа F не зависит от пути;*
2. *Работа F по замкнутому контуру равна 0;*
3. *Работа равна разности потенциалов.*

Теорема 9.3. *Пусть F – потенциальное и гладкое. Тогда*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Доказательство. Напомним, что

$$F = \nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

□

Теорема 9.4. *Если D – простая область и $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, то F потенциально.*

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – произвольная точка области, из которой можно дойти до любой точки. Возьмем

$$f(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + Q(x_0,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + Q(x_0,y) =$$

$$= Q(x,y) - Q(x_0,y) + Q(x_0,y) = Q(x,y).$$

□

Лекция 10. Многообразие с краем. Теорема о разбиении единицы

Многообразие с краем

Тема этой лекции будет связана с повторением некоторых понятий из геометрии.

Определение 10.1. M – k-мерное многообразие с краем, если $\forall\ p \in M\ \exists\ (U, \varphi)$, $p \in U$,

$$\varphi:\ \mathbb{R}^k\ \to\ U$$

или

$$\varphi:\ H^k\ \to\ U,$$

где $H^k = \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$.

Семейство $\{(U, \varphi)\}$ – *атлас*.

Если $\varphi^{-1}(p) \in \partial H^k$, p называется *точкой края*. *Край* (обозначение ∂M) – это множество точек края.

Утверждение 10.1. *Край ∂M – $(k-1)$-мерное многообразие.*

Возьмем теперь (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) такие, что $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Обозначим

$$\varphi_1^{-1}(U) = I_1, \quad \varphi_2^{-1}(U) = I_2.$$

Оказывается, что $I_1 \leftrightarrow I_2$. Между I_1 и I_2 есть гомеоморфное либо дифеоморфное соответствие $\varphi_1^{-1}(\varphi_2) =: \varphi_{12}$ либо $\varphi_2^{-1}(\varphi_1) =: \varphi_{21}$.

Определение 10.2. Карты (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2) *согласованы*, если либо $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, либо $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ и $\det \varphi_{12} > 0$.

Определение 10.3. Многообразие называется *ориентируемым*, если $\exists$ согласованный атлас.

Определение 10.4. Многообразие называется *ориентированным*, если выбран согласованный атлас.

Считается, что если выбран ориентирующий атлас M $\{(U, \varphi)\}$, то $\left\{(\partial U, \varphi\Big|_{\partial H_k})\right\}$ – ориентирующий атлас края ∂M.

Предположим теперь, что

$$\varphi:\ \mathbb{R}^m_t\ \to\ \mathbb{R}^m_x,$$
$$x = \varphi(t).$$

Тогда

$$\varphi'(t):\ T_t\mathbb{R}^m\ \to\ T_x\mathbb{R}^m.$$

Здесь считаем, что $\varphi' \in C$. Раз $\det \varphi'(t) > 0$, то положительный репер переходит в положительный репер. Задать ориентацию значит выбрать поле реперов. Если выберем $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – ориентирующий репер M, то $e_2, \ldots, e_k$ – ориентирующий репер края.

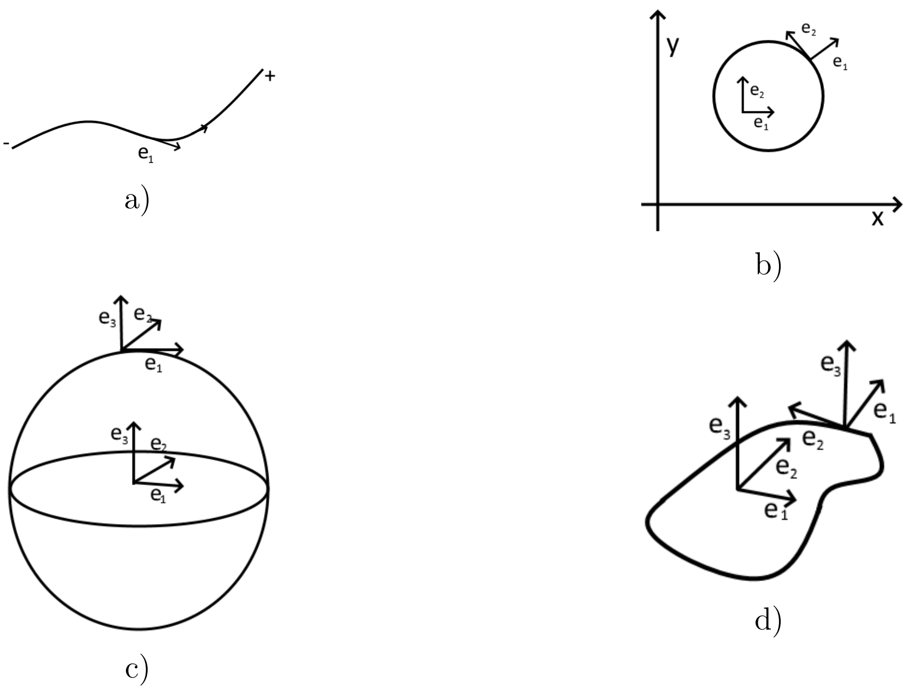

Рис. 10.1. Многообразия с краем: a) в $\mathbb{R}$, b) в $\mathbb{R}^2$, c), d) в $\mathbb{R}^3$

Пример 10.1. 1. Возьмем кривую. В качестве репера возьмем e_1. Если считаем, что у кривой есть край (то есть она незамкнута), то ориентируем край следующим образом: на одном конце (куда смотрит e_1) определяем $+$, а на другом $-$ (рис. 10.1, a).

2. Возьмем замкнутую область в $\mathbb{R}^2$. Краем здесь будет ее граница. Переместим выбранный репер так, чтобы e_1 находился перпендикулярно краю области. Здесь ориентирующий репер края e_2 будет смотреть против часовой стрелки (рис. **??**, b).

3. Возьмем шар в $\mathbb{R}^3$ – он является многообразием с краем. Заметим, что ориентация e_1, e_2, e_3 совпадает с ориентацией e_3, e_1, e_2. Считается, что ориентация края согласована с ориентацией края, если нормаль направлена наружу (рис. 10.1, c).

4. Возьмем поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограниченную гладкой кривой. Здесь расположим e_1, e_2, e_3 к краю так, чтобы e_1 был направлен перпендикулярно краю (рис. 10.1, d). Откинем e_1. Тогда e_2 будет указывать направление обхода кривой.

Теорема о разбиении единицы

Определение 10.5. Пусть M – многообразие. *Разбиением единицы* называется система функций $\{e_\alpha\}$ из $M \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $0 \leq_\alpha \leq 1$;

2. $\forall\ p \in M\ \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_r$ такие, что $e_{\alpha i}(p) \neq 0$;

3. $\sum\limits_{\alpha} e_\alpha \equiv 1$.

Определение 10.6. Пусть M – многообразие, $= \{(U, \varphi)\}$ – атлас. Говорят, что разбиение единицы $\{e_\alpha\}$ *подчинено* A, если $\forall\ \alpha\ \exists\ (U, \varphi)$ такие, что[6]$\text{supp} e_\alpha \subset U$.

Теорема 10.1. *Пусть M – компактное многообразие, а $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$. Тогда $\exists$ разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^n$, подчиненное A.*

Задача 10.1. *Показать, что можно построить функцию*

$$f:\ \mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R},$$

$f \equiv 1$ внутри круга r и $f \equiv 0$ вне круга R, $R > r$ такую, что $f \in C^\infty$.

Доказательство. (Теорема 10.1) Фиксируем $\forall\ p \in M$. $\exists$ пара (U_i, φ_i) такая, что $p \in U_i$. Возьмем $t = \varphi_i^{-1}(p)$ и функцию

$$\theta(t - t_0) = \theta_{t_0}.$$

Введем

$$\widetilde{\theta}_{p_0} = \begin{cases} \theta_{t_0}\left(\varphi_i^{-1}(p)\right), & p \in U_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для $\forall\ p_0$ рассмотрим

$$N_0 = \left\{ p \in M \mid \widetilde{\theta}_{p_0}(p) \neq 0 \right\}.$$

Очевидно, N_0 – открытые множества, они покрывают все M, то есть $\exists\ \widetilde{\theta}_1, \dots, \widetilde{\theta}_n$ такие, что их носители покрывают M.

Возьмем

$$e_1 = \widetilde{\theta}_1,$$

$$e_2 = \widetilde{\theta}_2\left(1 - \widetilde{\theta}_1\right),$$

$$e_3 = \widetilde{\theta}_3\left(1 - \widetilde{\theta}_1\right)\left(1 - \widetilde{\theta}_2\right)$$

и так далее. Наконец, положим

$$e_n = \widetilde{\theta}_n\left(1 - \widetilde{\theta}_1\right)\dots\left(1 - \widetilde{\theta}_{n-1}\right).$$

Правильно раскрывая скобки, получим, что

$$1 - \sum_{i=1}^n e_i = \prod_{i=1}^n (1 - \widetilde{\theta}_i). \tag{17}$$

[6]Напомним, что

$$\text{supp} e_\alpha = \{p \in M \mid e_\alpha(p) \neq 0\}.$$

Так как $\widetilde{\theta}_i$ выбирались так, чтобы в каждой точке $p \in M$ хотя бы одна $\widetilde{\theta}_i(p) = 1$, то хотя бы один из сомножителей в правой части (17) равен 0. Отсюда

$$1 - \sum_{i=1}^{n} e_i \equiv 0.$$

□

Смысл теоремы о разбиении единицы состоит в том, что при выполнении разного рода процедур можно сконцетрироваться на событиях одной карты.

Лекция 11. Поверхности. k-формы

Задачи, связанные с поверхностями

Перейдем к обсуждению поверхностей. Нам понадобятся 2-мерные поверхности, но, поскольку между 2-мерными и многомерными поверхностями нет большой разницы, теория будет приведена для общего случая.

Обсудим, какие задачи нам надо будет решать.

Пример 11.1. Дана некоторая пластинка[7]. На пластинке задана функция плотности $\rho(x, y) \in C$. Требуется посчитать ее массу.

Для этого разобъем пластинку на кусочки. Если кусочки малы, то плотности $\rho(x, y)$ на каждом из кусочков почти постоянна. Тогда масса

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k.$$

Забегая вперед, скажем, что эту задачу решает *поверхностный интеграл I рода.*

Пример 11.2. Пусть через заданную поверхность течет поток[8], то есть в каждой точке поверхности задан вектор $F = \{P, Q, R\} \in C$. Задача состоит в том, чтобы вычислить объем потока за единицу времени.

Задача решается аналогично. Поверхность разбивается на маленькие кусочки. Помимо допущения, что векторное поле локально постоянно, допустим, что каждый кучек разбиения – почти параллелограм. Тогда поток

$$A = \sum_{k} A_k = \sum_{k} \left(F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), n(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\right) \Delta S_k.$$

Эту задачу решает *поверхностный интеграл II рода.*

Далее будем рассматривать поверхность как двумерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, а k-мерная поверхность – это k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$.

Дифференциальные формы

Определим *дифференциальную форму*

$$\omega^k(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) : \ (T_x\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R},$$

причем

1. $\omega^k(x)$ k-линейна;
2. $\omega^k(x)$ обладает косой симметрией.

[7]Здесь считаем, что поверхность гладкая. Вообще говоря, можно рассматривать и кусочно-гладкий случай.

[8]Например, жидкости или электронов.

Для $\forall\ j$

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_j^i e_i.$$

Тогда

$$\omega^k(x)\left(\xi_1, \ldots, \xi_k\right) = \omega^k\left(\sum_{i_1=1}^{m} \xi_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{m} \xi_k^{i_k} e_{i_k}\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}}_{k} \xi_1^{i+1}\ldots\xi_k^{i_k}\omega^k(x)\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) =$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m} \omega^k(x)\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right)\begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m} a_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Здесь

$$a_{i_1,\ldots,i_k} = \omega^k(x)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

– *координата* ω^k,

$$dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}$$

Например, для $k = 2$

$$dx^1\wedge dx^2(\xi_1, \xi_2) = dx^1\otimes dx^2(\xi_1, \xi_2) - dx^2\otimes dx^1(\xi_1, \xi_2) =$$

$$= dx^1(\xi_1)dx^2(\xi_2) - dx^2(\xi_2)dx^1(\xi_1) = \xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1 = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix}$$

Аналогично определим ω^k на касательном пространстве к многообразию M:

$$\omega^(p)(\xi_1, \ldots, \xi_k):\ (T_pM)^k\ \to\ \mathbb{R}.$$

Как и выше,

1. $\omega^k(p)$ k-линейна;
2. $\omega^k(p)$ обладает косой симметрией.

Чтобы работать с таким ω^k, нам понадобится понятие *переноса*. Пусть

$$\varphi:\ \mathbb{R}_t^m\ \to\ \mathbb{R}_x^m,$$

$$x = \varphi(t),$$

$$\omega^k : \ (T_x\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\varphi^*\omega^k : \ (T_t\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R},$$

$$\varphi^*\omega^k(t)(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \omega^k(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k), \tag{18}$$

где $\xi_i = \varphi(\tau_i)$.

Теперь, пусть

$$\omega^k(p)\,(\xi_1, \ldots, \xi_k) : \ (T_pM)^k \ \to \ \mathbb{R},$$

тогда

$$\varphi^*\omega^k(t)\,(\tau_1, \ldots, \tau_k) : \ (T_t\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R}$$

и $\varphi^*\omega^k(t)\,(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ определяется аналогично случаю (18):

$$\varphi^*\omega^k(t)\,(\tau_1, \ldots, \tau_k) = \omega^k(p)(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Здесь (φ, U) – карта, покрывающая p.

Пусть теперь есть (U_1, φ_1) и (U_2, φ_2), $p \in U_1 \cap U_2$. Тогда

$$\varphi_1^*\omega^k(t_1)\left(\tau_1^1, \ldots, \tau_k^1\right) = \omega^k\left(\varphi_1(t_1)\right)\left(\varphi_1'(t_1)\tau_1^1, \ldots, \varphi_1'(t_k)\tau_k^1\right), \tag{19}$$

$$\varphi_2^*\omega^k(t_2)\left(\tau_1^2, \ldots, \tau_k^2\right) = \omega^k\left(\varphi_2(t_2)\right)\left(\varphi_2'(t_1)\tau_1^2, \ldots, \varphi_2'(t_k)\tau_k^2\right). \tag{20}$$

Сравним (19) и (20). Здесь, конечно,

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = p.$$

Далее,

$$\xi = \varphi_1'(t_1)\tau_1,$$

откуда

$$\tau_1 = \left(\varphi_1'(t_1)\right)^{-1}\xi = \left(\varphi_1'(t_1)\right)^{-1}\varphi_2'(t_2)\tau_2.$$

Итак, мы видим, что переносы между разными картами связаны между собой. Поэтому не имеет значения, в какую карту осуществляется перенос.

Дифференциалы от k-форм

Определение 11.1. Пусть $f(x)$ – гладкая 0-форма в $\mathbb{R}^m$. Тогда *внешним дифференциалом 0-формы* называется обычный дифференциал[9]:

$$df(x)(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi^i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i(x)dx^i(\xi)}, \quad \xi \in T_x\mathbb{R}^m. \tag{21}$$

Убрав в (21) вектор ξ, получим более привычную запись

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx^i.$$

[9]Заметим, что это 1-форма

Определение 11.2. Пусть ω^k – гладкая k-форма в $\mathbb{R}^m_x$:

$$\omega^k(x) = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Тогда дифференциалом ω^k называется $(k+1)$-форма

$$d\omega^k(x) = \sum da_{i_1,\ldots,i_k}(x)x^{i_1} \ldots dx^{i_k}.$$

Пример 11.3. Возьмем форму работы $Pdx + Qdy$. Ее дифференциал

$$d\left(Pdx + Qdy\right) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Теорема о коммутировании переноса и дифференциала

Теорема 11.1. *Пусть даны k-форма*

$$\omega^k : \ (T_x\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R}$$

и перенос

$$\varphi : \ \mathbb{R}^m_t \ \to \ \mathbb{R}^m_x.$$

Тогда

$$d\varphi^*\omega^k = \varphi^* d\omega^k.$$

Доказательство. Вычислим

$$d\varphi^*\omega^k = d\left(\sum a_{i_1,\ldots,i_n}(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) =$$

$$= \sum d\left(a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\right) \wedge x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k} = \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial t_j} dt^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{t^j} dt^j \wedge dx^{i_1} \ldots dx^{i_k} = \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^{i_1} \ldots dx^{i_k} = \varphi^* d\omega^k,$$

так как

$$\varphi^* d\omega^k = \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}\left(\varphi(t)\right).$$

Здесь $x = \varphi(t)$,

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \det \varphi' dt^{i_1} \ldots dt^{i_k},$$

$$dx^i = \sum \frac{x^i}{t^j} dt^j.$$

□

Лекция 12. Дифференциал и интеграл на касательном многообразии. Градиент, дивергенция, ротор

Теорема (перенос дифференциала равен дифференциалу переноса)

Напомним, в прошлый раз для

$$\omega^k : \ (T_x\mathbb{R}^m)^k \ \to \ \mathbb{R}$$

определили операцию внешнего дифференцирования следующим образом. Если

$$\omega^k(x) = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

то

$$d\omega^k(x) = \sum \frac{a_{i_1,\ldots,i_k}(x)}{\partial x_i dx_i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.}$$

Обсудим еще раз доказательство следующей теоремы.

Теорема 11.1. *Пусть*

$$\varphi : \ \mathbb{R}^m_t \ \to \ \mathbb{R}^m_x$$

– диффеоморфизм. Тогда

$$\varphi^* d\omega^k = d\varphi^*\omega^k.$$

Доказательство. (Более подробно) Пусть

$$\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Заметим, что

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

Кроме того,

$$\xi_j = \varphi'(t)\tau_j.$$

Тогда

$$\varphi^*\omega(t)\left(\tau_1, \ldots, \tau_k\right) = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(x)\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\left(\varphi'(t)\tau_1, \ldots, \varphi'(t)\tau_k\right) =$$

$$= \sum a_{i_1,\ldots,i_k}(x) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix} = \sum a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_1^{j_1} & \ldots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}}\tau_1^{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_k^{j_1} & \ldots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}}\tau_k^{j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} \begin{vmatrix} \tau_1^{j_1} & \ldots & \tau_k^{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{j_1} & \ldots & \tau_k^{j_k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_k}\left(\tau_1, \ldots, \tau_k\right).$$

С другой стороны,

$$d\varphi^*\omega = \sum d\left(a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}}\right) dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge t^{j_k} =$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial t^j}\left(a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}}\right) dt^j \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge t^{j_k} =$$

$$= \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right)}{\partial t^j} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} dt^j \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_k} =$$

$$= \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right)}{\partial x^i} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} dt^j \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_k}.$$

Наконец, вычислим

$$\varphi^* d\omega = \varphi^*\left(d\omega^k(x) = \sum \frac{a_{i_1,\ldots,i_k}(x)}{\partial x_i dx_i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}}\right) =$$

$$= \sum \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}\left(\varphi(t)\right)}{\partial x^i} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^{j_k}} dt^j \wedge dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_k} = d\varphi^*\omega.$$

□

Интеграл от дифференциальной формы в касательном пространстве

Определение 12.1. Пусть

$$\omega^k(p): \ (T_pM)^k \ \to \ \mathbb{R}.$$

Дифференциалом от $\omega^k(p)$ назовем такую $(k+1)$-форму, что $\forall$

$$\varphi: \ \mathbb{R}^m_t \ \to \ U$$

верно

$$\varphi^*\left(d\omega\right) = d\varphi^*\omega.$$

Покажем корректность определения 12.1. Пусть даны φ_1, φ_2:

$$\varphi_1^*\left(d\omega\right) = d\varphi_1^*\omega, \tag{22}$$

$$\varphi_2^*\left(d\omega\right) = d\varphi_2^*\omega. \tag{23}$$

Тогда из (22)

$$d\omega = \left(\varphi_1^*\right)^{-1}\left(d\varphi_1^*\omega\right),$$

а из (23)

$$d\omega = \left(\varphi_2^*\right)^{-1}\left(d\varphi_2^*\omega\right) = \left(\varphi_1^*\right)^{-1}\varphi_1^*\left(\varphi_2^*\right)^{-1} d\varphi_2^*\omega = \left(\varphi_1^*\right)^{-1}\left(d\varphi_1^*\omega\right)$$

в силу теоремы 11.1.

Перейдем к интегралу. Пусть задана дифференциальная форма максимальной степени на касательном многообразии:

$$\omega(x) = (T_x\mathbb{R}^m)^m \;\to\; \mathbb{R},$$

$$\omega(x) = a(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \omega(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a(x)dx^1 \ldots dx^m. \tag{24}$$

Здесь работаем с множеством

$$\mathrm{supp}\omega = \left\{x \in \mathbb{R}^m \mid \omega(x) \neq 0\right\},$$

которое полагаем измеримым по Жордану и ограниченным множеством.

Проверим корректность определения (24). Пусть

$$\varphi:\; \mathbb{R}^m_t \;\to\; \mathbb{R}^m_x$$

– диффеоморфизм и $\det\varphi' > 0$. Вычислим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_t} \varphi^*\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^m_t} a\left(\varphi(t)\right) \|\det\varphi'|\, dt^1 \ldots dt^m.$$

По теореме о замене переменной в кратном интеграле определение (24) корректно.

Интеграл от произвольной формы

Определим интеграл от произвольной формы. Пусть

$$\omega^k(p):\; (T_pM)^k \;\to\; \mathbb{R}.$$

Как и ранее, форма предполагается гладкой, а многообразие M – компактным.

Далее, так как M – компактное многообразие, то $\exists$ конечный атлас $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^m$ и разбиение единицы, подчиненное ему. Тогда

$$\int\limits_M \omega^k = \sum_{i=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_i^*(e_i\omega). \tag{25}$$

Здесь $\{e_i\}$ – разбиение единицы:

$$e_i:\; M \;\to\; \mathbb{R},$$

$$0 \leq e_i(p) \leq 1 \;\forall\; p \in M,$$

$$\sum -i = 1^m e_i(p) = 1 \;\forall p \in M.$$

Покажем корректность (25). Пусть $\left(\widetilde{U_j}, \widetilde{\varphi})j\right)$ – другой атлас. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \widetilde{\varphi_j^*}\left(\widetilde{e}_j, \omega \cdot 1\right) = \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \widetilde{\varphi_j^*}\left(\sum e_j \widetilde{e}_j \omega\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \widetilde{\varphi_j^*}\left(e_i e \widetilde{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_i^*\left(e_i \widetilde{e}_j \omega\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi_i^*\left(e_i \omega\right).$$

Итак, определение (25) корректно.

Утверждение 12.1. *(Свойства интеграла)*

1. $\int\limits_M \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = \lambda \int\limits_M \omega_1 + \mu \int\limits_M \omega_2$;
2. $\int\limits_{M_1} \omega + \int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{M_1 \sqcup M_2} \omega$;
3. $\int\limits_{M^+} \omega = -\int\limits_{M^-} \omega$, *где* M^+ *и* M^- *означают противоположные ориентации* M.

Случай формы на многообразии в пространстве $\mathbb{R}^3$

Возьмем теперь

$$\omega^3 = a(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Интеграл от такой формы, очевидно, – это просто интеграл в области $\subset \mathbb{R}^3$.

Форма 1 порядка здесь – это форма работы

$$\omega_F^1 = P dx + Q dy + R dz.$$

Здесь $F = \{P, Q, R\}$, $F \in C^1$. На векторе ξ

$$\omega_F^1(x)(\xi) = P\xi^1 + Q\xi^2 + R\xi^3 = (F, \xi).$$

Тогда интеграл для одномерного многообразия имеет вид

$$\int\limits_M \omega_F^1 = \int\limits_M (F, \xi).$$

Форма 2 порядка имеет вид

$$\omega_F^2 = P dy \wedge dz + \theta dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

На наборе касательных векторов к поверхности (ξ, η) форма равна смешанному произведению:

$$\omega_F^2(x)(\xi, \eta) = < F, \xi, \eta > .$$

Распишем более подробно:

$$(Pdy \wedge dz + \theta dz \wedge dx + Rdx \wedge dy)(\xi, \eta) =$$

$$= P\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^2 & \eta^3 \end{vmatrix} - Q\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^3 \end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1\eta^2 & \eta^3 & \end{vmatrix}$$

Тогда для двумерного многообразия M

$$\int\limits_M \omega_F^2 = \int\limits_M Pdy \wedge dz + \theta dz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Дифференциальные операторы в $\mathbb{R}^3$ (градиент, дивергенция, ротор)

Пусть дана скалярная функция

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

и векторная функция

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Градиент f определяется как

$$\nabla f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} f.$$

Дивергенция F равна

$$\div F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}, \{P, Q, R\}\right) = (\nabla, F).$$

Здесь $F = \{P, Q, R\}$.

Наконец, *ротор* F определяется как

$$\mathrm{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ PQR & & \end{vmatrix} = [\nabla, F].$$

Теорема 12.1. ∇f *– ортогональный инвариант.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(C^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix}$$

□

Замечание 12.1. На следующей лекции будет показано, что $\div F$ и $\mathrm{rot} F$ также являются ортогональными инвариантами. Отметим, однако, что это видно уже сейчас, так как скалярное $(\cdot,\cdot)$ и векторное $[\cdot,\cdot]$ произведения являются ортгональными инвариантами, а

$$\div F = (\nabla, F), \quad \mathrm{rot} F = [\nabla, F].$$

Лекция 13. Формула Гаусса — Остроградского. Теорема Стокса

Теоремы об ортогональных инвариантах

Напомним, в прошлый раз ввели следующие дифференциальные операторы:

1. Градиент f:
$$\nabla f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\};$$

2. Дивергенция F, $F = \{P, Q, R\}$:
$$\div F = (\nabla, F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

3. Ротор F:
$$\mathrm{rot} F = [\nabla, F] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$
$$= \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}.$$

Повторим (более подробно) доказательство следующей теоремы.

Теорема 12.2. ∇f *– ортогональный инвариант.*

Доказательство. Пусть имеем два набора координат
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T.$$

Тогда
$$\frac{\partial f}{\partial x'} = c_{11}\frac{\partial f}{\partial x} + c_{21}\frac{\partial f}{\partial y} + c_{31}\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_{12}\frac{\partial f}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial f}{\partial y} + c_{32}\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z'} = c_{13}\frac{\partial f}{\partial x} + c_{23}\frac{\partial f}{\partial y} + c_{33}\frac{\partial f}{\partial z},$$

то есть
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x'} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

□

Теорема 13.1. $\div F$ *и* $\mathrm{rot} F$ *– ортогональные инварианты.*

Доказательство. Здесь $F = \{P, Q, R\}$. Беря в качестве f из теоремы 12.2 последовательно P, Q, R, получим, что справедливо соотношение

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x'} & \frac{\partial Q}{\partial x'} & \frac{\partial R}{\partial x'} \\ \frac{\partial P}{\partial y'} & \frac{\partial Q}{\partial y'} & \frac{\partial R}{\partial y'} \\ \frac{\partial P}{\partial z'} & \frac{\partial Q}{\partial z'} & \frac{\partial R}{\partial z'} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Кроме того, справедливо

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} P' \\ Q' \\ R' \end{pmatrix}$$

Это то же самое, что

$$(P, Q, R) = (P', Q', R')C^{-1}.$$

Тогда

$$(26) = C \begin{pmatrix} \frac{\partial P'}{\partial x'} & \frac{\partial Q'}{\partial x'} & \frac{\partial R'}{\partial x'} \\ \frac{\partial P'}{\partial y'} & \frac{\partial Q'}{\partial y'} & \frac{\partial R'}{\partial y'} \\ \frac{\partial P'}{\partial z'} & \frac{\partial Q'}{\partial z'} & \frac{\partial R'}{\partial z'} \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Так как матрица (26), получается, преобразуется по законам линейного оператора, все ортогональные инварианты линейных операторов являются ортогональными инвариантами для нашего случая. Так, след

$$(Ae_1, e_1) + (Ae_2, e_2) + (Ae_3, e_3) = \div F,$$

векторный след

$$[Ae_1, e_1] + [Ae_2, e_2] + [Ae_3, e_3] = \mathrm{rot} F.$$

$\square$

Теорема (формула Гаусса — Остроградского)

Теорема 13.2. *(формула Гаусса – Остроградского) Пусть D – криволинейный параллелепипед, $F \in C^1\left(\overline{D}\right)$, ∂D ортонормирована внешней нормалью. Тогда*

$$\iint\limits_{\partial D} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{D} \left(\frac{P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{27}$$

Доказательство. В формуле Гаусса – Остроградского (27) будем показывать соответствие правых и левых слагаемых. Покажем, что

$$\iint\limits_{\partial D} R dx \wedge dy = \iiint\limits_{D} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Обозначим верхнюю и нижнюю часть поверхности через S_1 и S_2, а через Ω обозначим проекцию поверхности (цилиндра) на плоскость. Тогда

$$\iint\limits_{\partial D} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_1} R dx \wedge dy + \iint\limits_{S_2} R dx \wedge dy =$$

$$= -\iint\limits_{O} megaR\left(x, y, z_1(x,y)\right) dxdy + \iint\limits_{\Omega} R\left(x, y, z_2(x,y)\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iiint\limits_{D} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Остальные два равенства показываются аналогично. □

Теорема Стокса

Теорема 13.3. *(Стокса[10]) Пусть M – гладкая[11] поверхность, которая является образом криволинейного прямоугольника при дважды гладком отображении*

$$\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right).$$

Пусть, кроме того, ∂M ориентирована в соответствии[12] с ориентацией M, а $F \in C^1(M)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \quad (28)$$

Доказательство. Обсудим условие теоремы. В системе координат (u, v) есть некоторая область Ω, ее граница – криволинейный прямоугольник. Дано дважды гладкое отображение (x, y, z), переводящее Ω в некоторую поверхность.

Вычислим

$$\int\limits_{\partial M} Pdx = \int\limits_{\partial \Omega} P\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\left(\frac{\partial x}{u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right). \quad (29)$$

По теореме Грина получим

$$(29) = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right) dudv =$$

[10]Эту теорему еще называют трехмерной формулой Стокса. Помимо нее, в курсе будет еще общая теорема Стокса.

[11]Вообще говоря, дважды гладкая. Здесь опускаем, какая степень гладкости нам нужна, так как договорились, что под гладкостью можем подразумевать и дважды гладкость, и бесконечно гладкость.

[12]Здесь можно вспомнить правило буравчика.

$$= \iint_{\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv.}(30)$$

Мы хотим показать, что $\int\limits_{\partial M} Pdx$ равен следующему интегралу:

$$\iint\limits_{M} \frac{\partial P}{\partial z}dx\wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv.$$

Запись выше представлет собой запись (30). □

Интеграл I рода

Рассмотрим форму k-го порядка

$$\Omega^k(x)\left(\xi_1,\ldots,\xi_k\right) = \sqrt{G\left(\xi_1,\ldots,\xi_k\right)}.$$

Пусть M – k-мерное многообразие. Его мера (площадь, объем и так далее)

$$|M| = \int\limits_M \Omega^k.$$

Интералом I рода от функции ρ или массой (поверхности, кривой и так далее) называется

$$m = \int\limits_M \rho\Omega^k,$$

где ρ – 0-форма (скалярная функция).

При $k = 1$

$$\Omega^1(\xi) = \sqrt{(\xi,\xi)} = \|\xi\|.$$

Тогда интеграл I рода имеет вид

$$\int\limits_M \rho\Omega^1 = \int \rho\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dt.$$

Если $k = 2$, то

$$\Omega^2(\xi,\eta) = \sqrt{\begin{vmatrix} (\xi,\xi) & (\xi,\eta) \\ (\xi,\eta) & (\eta,\eta)\end{vmatrix}},$$

$$\int\limits_M \rho\Omega^2 = \iint \rho\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\begin{vmatrix} E & G \\ G & F\end{vmatrix}dudv.$$

Лекция 14. Теорема Стокса (общий случай)

Интеграл I рода

Напомним, интегралом I рода называется интеграл от 0-формы ρ

$$\int\limits_M \rho\Omega, \quad \Omega = \sqrt{G\left(\xi_1, \ldots, \xi_k\right)}.$$

В одномерном случае

$$\int\limits_M \rho\sqrt{(\xi,\xi)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho\left(\varphi(t)\right)\sqrt{(\varphi'(t),\varphi'(t))}dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho\left(\varphi(t)\right)\|\varphi'(t)\|dt.$$

В двумерном случае

$$\int\limits_M \rho\sqrt{\begin{vmatrix} (\xi,\xi) & (\xi,\eta) \\ (\xi,\eta) & (\eta,\eta) \end{vmatrix}} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \rho\left(\varphi(u,v)\right)\sqrt{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \end{vmatrix}}dudv.$$

Здесь $\xi,\eta \in T_pM$.

Сведем теперь интеграл II рода к интегралу I рода:

$$\int\limits_M \omega_F^1 = \int\limits_M (F,\xi) = \int\limits_M \left(F, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\sqrt{(\xi,\xi)} = \int\limits_M (F,e)\Omega.$$

Здесь e – нормированный вектор из касательного пространства (то есть смотрящий в сторону направления обхода).

Аналогично, в двумерной ситуации

$$\int\limits_M \omega_F^2 = \int\limits_M < F,\xi,\eta >= \int\limits_M (F,[\xi,\eta]) =$$

$$= \int\limits_M \left(F, \frac{[\xi,\eta]}{\|[\xi,\eta]\|}\right)\sqrt{G(\xi,\eta)} = \int\limits_M (F,n)\Omega,$$

где n – нормаль.

Теорема Стокса (общий случай)

Теорема 14.1. *Пусть M – гладкая поверхность, ω – гладкая форма. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Доказательство. Заметим, что в случаях, когда M – кривая $\subset \mathbb{R}^2$ (или $\subset \mathbb{R}^3$) и когда M – поверхность $\subset \mathbb{R}^3$, эту теорему мы доказали ранее.

Будем строить доказательство на следующих утвереждениях.

1. Можно считать, что
$$\mathrm{supp}\omega \subset U,$$
где (φ, U) – некоторая карта (разбиваем ω в конечную сумму).

2. В условиях пункта 1 рассмотрим случай, когда U диффеоморфна всему пространству:
$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_U d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \varphi^* d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^k} d\varphi^*\omega. \tag{31}$$

3. Теперь,
$$\varphi^*\omega = a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}. \tag{32}$$

4. Продолжим (31) с учетом (32):
$$(31) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} da_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \pm \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} \pm \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}}(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \pm \int\limits_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$
$$= \pm \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}}(x) dx^{i_k} =$$
$$= \pm \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_{k-1}} a\left((x^{i_1}, \ldots, x^{i_{k-1}}, x^{i_k}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

5. Вычислим теперь
$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial U} \omega = 0.$$
Здесь точек края нет, так как U диффеоморфна всему пространству.

6. Перейдем к рассмотрению случая, когда U диффеоморфна H^k:
$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{H^k} \varphi^* d\omega = \int\limits_{H^k} d\varphi^*\omega. \tag{33}$$

7. Как и ранее, достаточно рассмотреть случай, когда карта одна. Рассмотрим один из возможных вариантов ($i_k \neq 1$):
$$\int\limits_{H^k} da_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_{k-1}} = \pm \int\limits_{H^k} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}} dx^1 \wedge \ldots dx^k =$$
$$= \int\limits_{H^{k-1}} dx^{i_1} \wedge x \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}}(x) dx = 0.$$

8. Вычислим теперь
$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial U} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* \omega. \tag{34}$$

9. В (34) надо взять слагаемое из пункта 7:
$$(34) = \int \mathbb{R}^{k-1} a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_{k-1}} = 0,$$
так как dx^1, которая обязательно есть в $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$, обращается в 0 на $\mathbb{R}^{k-1}$.

10. Вернемся к пункту 7. Рассмотрим второй возможный случай ($i_k = 1$):
$$\int\limits_{H^k} da_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_{k-1}} = \pm \int\limits_{H^k} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}} dx^1 \wedge \ldots dx^k =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} dx^2 \ldots dx^k \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial a_{2,\ldots,k}}{\partial x_1} dx_1 =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} a_{2,\ldots,k}(0, x_2, \ldots, x_k) dx^2 dx^k.$$

11. С другой стороны,
$$= \int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial u} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^* \omega =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} a_{2,\ldots,k}(0, x_1, \ldots, x_k) dx^2 \ldots dx^k.$$

$\square$

Вывод формул с помощью теоремы Стокса

Выведем некоторые формулы с помощью теоремы 14.1.

1. Вычислим
$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_{\{a,b\}} dF = F(b) - F(a);$$
В частности,
$$\int\limits_{-\infty}^b f(x) dx = \int\limits_{\{b\}} dF = F(b) - F(-\infty) = F(b),$$
но такой случай мы рассматривать далее не будем ввиду того, что $(-\infty, b]$ не является компактным многообразием.

2. Вычислим интеграл по кривой в $\mathbb{R}^2$:

$$\int\limits_{\partial M} \omega_F^1 = \int\limits_{\partial M} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{M} d\left(Pdx + Qdy\right) = \int\limits_{M} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Здесь ∂M ориентировано против часовой стрелки.

3. Пусть теперь $M \subset \partial M$. Тогда интеграл от потока по замкнутой поверхности

$$\int\limits_{\partial M} \omega_F^2 = \int\limits_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$$

$$= \int\limits_{M} d\left(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy\right) =$$

$$= \int\limits_{M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \iiint\limits_{M} \div F dxdydz.$$

4. Пусть M – гладкая поверхность с краем. Тогда

$$\int\limits_{\partial M} \omega_F^1 = \int\limits_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{M} d\left(Pdx + Qdy + Rdz\right) =$$

$$= \int\limits_{M} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \int\limits_{M} \omega_{\mathrm{rot} F}^2.$$

Лекция 15. Потенциальное поле. Теорема Пуанкаре. Ряды Фурье (начало)

Точная и замкнутая формы. Потенциальное и соленоидальное поля

Напомним, что в прошлый раз установили следующий факт:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Здесь, очевидно, порядок ω совпадает с размерностью ∂M, и многообразие M, и форма ω гладкие.

Теорема 15.1. *Пусть $\omega \in C^2$. Тогда*

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

Доказательство. 1. Будем считать, что ω – дифференциальная форма на $\mathbb{R}^m$ (в противном случае можно воспользоваться переносом).

2. Будем считать, что у ω всего одна карта (U, φ) (в силу разбиения единицы).

3. В силу линейности формы, будем считать, что у нее всего одно слагаемое:

$$\omega = a_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

4. Достаточно взять $a_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ – 0-форму.

5. По теореме о равенстве смешанных производных,

$$\frac{\partial^2 a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^{j_1} x^{j_2}} = \frac{\partial^2 a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^{j_2} x^{j_1}}.$$

□

Везде далее также будем полагать формы $\in C^2$.

Определение 15.1. Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$.

Определение 15.2. Форма ω называется *точной*, если $\exists\ \Omega$ такая, что $d\Omega = \omega$.

Теорема 15.2. *Если форма ω – точная, то она замкнутая.*

Доказательство. Так как ω – точная, то $\exists\ \Omega$ такое, что $d\Omega = \omega$. По теореме 15.1 получаем, что

$$d^2\Omega = d\omega = 0.$$

□

Обсудим, как выглядит теорема 15.2 в некоторых частных ситуациях.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 15.3. Поле F *потенциально* в D, если ω_F^1 – точная[13].

Теорема 15.3. *Пусть F потенциально. Тогда $d\omega_F^1 = 0$.*

Напомним, что

$$d\omega_F^1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Следствие. Пусть F – потенциально. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Пусть теперь $D \subset \mathbb{R}^3$, $F = \{P, Q, R\}$.

Определение 15.4. Поле F называется *потеницальным* в D, если форма ω_F^1 – точная[14].

Определение 15.5. Поле F называется *безвихревым*, если форма ω_F^1 замкнута[15].

Теорема 15.4. *Если F – потенциальное, то F – безвихревое.*

Определение 15.6. Поле F назывется *соленоидальным*, если $\div F = 0$.

Теорема 15.5. *Пусть F имеет векторный потенциал, то есть $\exists\, G$ такое, что $F = rotG$ ($\omega_F^2 = d\omega_G^1$). Тогда F соленоидально.*

Вернемся к потенциальным полям в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 15.6. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *F – потенциальное в $D \subset \mathbb{R}^2$;*
2. *Интеграл от ω_F^1 не зависит от M, соединяющего точки $A, B \in D$;*
3. *Интеграл от ω_F^1 по замкнутому контуру равен 0.*

---

[13] Иными словами, $\exists\, U$ – 0-форма такая, что

$$dU = Pdx + Qdy.$$

[14] То есть $\exists\, U$ – 0-форма такая, что

$$dU = \omega_F^1 = Pdx + Qdy + Rdz.$$

[15] То есть $d\omega_F^1 = 0 \iff \omega^2_{\mathrm{rot}F} = 0 \iff \mathrm{rot}F = 0$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ $\exists\, U$ такое, что $F = \nabla U$,

$$\omega_F^1 = \omega_{\nabla U}^1 = dU.$$

Тогда $\forall\, M$ с краем $\{A, B\}$

$$\int\limits_M dU - \int\limits_{\partial M} U = U(B) - U(A).$$

$2 \Leftrightarrow 3$ Заметим, что пункт 3 – это частный случай пункта 2. Покажем в обратную сторону. Пусть замкнутый контур содержит точки A и B. Интеграл по контуру равен 0 по условию и в то же время равен сумме интеграла от A до B и интеграла от B до A. Отсюда получаем, что интеграл по обоим путям равны.

$2 \Rightarrow 1$ Функция

$$U = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$

и будет искомой. Здесь в силу пункта 2 неважно, по какому пути берется интеграл.

$\square$

Теорема 15.7. *Пусть D – односвязная область*[16]*. Если*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то F потенциально.

Доказательство. По теореме Грина, выполнено условие пункта 3 теоремы 15.6, а значит, F потенциально. $\square$

Теорема 15.8. *(Пуанкаре) Если M гомотопно точке, то ω замкнута $\iff$ ω точна.*

Следствие. Если D односвязна, то F – потенциально в D $\iff$ F – безвихревое в D.

Следствие. Если D односвязна, то F – соленоидальное в D $\iff$ F имеет векторный потенциал.

[16]То есть ∂D связна. Вторая эквивалентная формулировка: контур ∂D стягивается в точку.

Коэффиценты Фурье

Приступем к следующей большой теме: **ряды Фурье**. Этот раздел тесно связан с математической физикой.

Напомним, в прошлом семестре обсуждали степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

и тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Про степенные ряды мы выяснили, что они бесконечно дифференцируемы, единственны и являются рядами Тейлора. Суммы же тригонометрических рядов могут быть довольно плохими. Это, с одной стороны, сужает множество действий, которые можно над ними выполнять. С другой же стороны, большее количество функций можно представить тригонометрическими рядами (чем степенными).

Определение 15.7. H называется *гильбертовым*, если

1. H – евклидово;
2. H – полное.

Определение 15.8. $\{e_n\}$ называется *ортонормированной системой (ОНС)*, если $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$.

Теорема 15.9.

$$\min_{\substack{c_k\in\mathbb{R}\\ 1\le k\le n}}\left\|x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\| = \left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|.$$

Доказательство. Вычислим

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \left(x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)=$$

$$=(x,x)-2\left(x,\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)+\sum_{k=1}^{n} c_k^2=(x,x)-2\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)c_k+\sum_{k=1}^{n} c_k^2=$$

$$=(x,x)-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)^2+\sum_{k=1}^{n}\left((x,e_k)-c_k\right)^2=(x,x)-2\sum_{k=1}^{n}\left(x,\sum(x,e_k)e_k\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)^2+\sum_{k=1}^{n}\left((x,e_k)-c_k\right)^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\|^3+\sum_{k=1}^{n}\left((x,e_k)-c_k\right)^2.$$

Отсюда $(x,e_k)=c_k$. $\square$

Определение 15.9. $\widehat{x_k} = (x, e_k)$ называются *коэффицентами Фурье.*

Сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n} e_n$ называется рядом Фурье.

Среди всех выражений вида $c_1 e_1$ наилучшим образом приближает x выражение $\widehat{x_1} e_1$. Далее, среди всех сумм

$$c_1 e_1 + c_2 e_2$$

наилучшим образом приближает x сумма

$$\widehat{x_1} e_1 + \widehat{x_2} e_2$$

и так далее.

Теорема 15.10. *(Бесселя)* $\forall\ x \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)^2 < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)^2 \leq \|x\|^2. \tag{35}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 15.9,

$$\left\| x - \sum \widehat{x_k} e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k}^2 \geq 0,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k} \leq \|x\|^2.$$

□

Замечание 15.1. Заметим, что, если H – конечномерное и $n = \dim H$, то (35) превращается в равенство (теорема Пифагора).

Лекция 16. Сходимость ряда Фурье. Гильбертовы пространства

Теорема о сходимости ряда Фурье

Продолжим обсуждение рядов Фурье.

Теорема 16.1. *$\forall\ x \in H\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n} e_n$ сходится*[17]*.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \widehat{x_n} e_n \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} \widehat{x_n}^2 < \varepsilon,$$

Так как по теореме Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)^2$ сходится. □

Замкнутая и полная системы

Определение 16.1. Система $\{e_n\}$ называется *полной*, если из того, что $(x, e_n) = 0$ $\forall\ n$, следует, что $x = 0$.

Определение 16.2. Система $\{e_n\}$ называется *замкнутой*, если $\forall\ x\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ такая, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| < \varepsilon. \tag{36}$$

Теорема 16.2. *$\{e_n\}$ замкнута $\iff$ $\{e_n\}$ полна.*

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть $\{e_n\}$ полна. Тогда $\forall\ x$ из того, что $(x, e_n) = \widehat{x_n} = 0$, следует, что $x = 0$.

Рассмотрим

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k^{\,2}.$$

Тогда при $n \to \infty$ получим

$$\left\| x - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}_k e_k}_{y} \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}_k^{\,2}.$$

[17] в смысле нормы. Напомним, $x_n \to x$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x - x_n\| < \varepsilon.$$

Вычислим
$$\widehat{y_n} = (y, e_n) = \widehat{x_n},$$
откуда $(\widehat{x-y})_n = 0$. Тогда
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x_n} e_n.$$
Это даже сильнее, чем искомое (36).

$\Rightarrow$ Пусть $\{e_n\}$ замкнута. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, x \in H\ \exists\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ такая, что
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 <^2 .$$
Тогда
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k e_k \right\|^2 < \varepsilon^2.$$
Это эквивалентно тому, что
$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x_k}^2 < \varepsilon.$$
Отсюда при $n \to \infty$ получим
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x_k}^2. \tag{37}$$
Выберем теперь x такой, что $\widehat{x_n} = 0\ \forall\ n$. Из (37) следует, что $x = 0$.

□

Теорема 16.3. *(Парсеваля) Система* $\{e_n\}$ *замкнута* $\iff$ $\{e_n\}$ *полна* $\iff$
$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{x_n}^2.$$

Пространства l_2 и L_2

Поговорим о двух гильбертовых пространствах.

1. Пространство l_2 последовательностей вида
$$\{a_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\}.$$
Здесь для $a, b \in l_2$
$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$
Задача показать, что l_2 гильбертово, остается для самостоятельного разбора.

2. Пространство
$$L_2[a,b] = \left\{f: \ f^2 \in L[a,b]\right\}.$$
Можно показать, что $L_2[a,b]$ является гильбертовым относительно скалярного произведения
$$(f,g) = \int\limits_a^b fgdx.$$

Рассмотрим конкретные примеры пространств выше.

1. $L_2[-\pi,\pi]$. Будем считать[18], что $f(-\pi) = f(\pi)$ и функция периодически продолжена на всю $\mathbb{R}$. В $L_2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему
$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\right\}. \tag{38}$$
Покажем, что система (38) – почти ортонормированная. Будем считать, что
$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} fgdx.$$
Вычислим
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)dx = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx sinnxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)dx = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)dx = 0,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = 0,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos 2nx\right)dx = 1,$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos 2nx\right)dx = 1,$$
Заметим, однако, что
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}.$$

[18]Это касается и любых других $L_2[a,b]$.

2. Рассмотрим $L_2[0,1]$ со скалярным произведением
$$(f,g) = \int_0^1 fg dx. \tag{39}$$
Рассмотрим $\{w\}$, где $w_0 \equiv 1$. Напишем для номера n финитное[19] разложение
$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^k.$$
Каждой точке $x \in [0,1]$ сопоставим разложение
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k-1}.$$
Тогда определим w_n как
$$w_n(x) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} n_k x_k}$$
Можно показать, что
$$w_n w_m = w_{n \oplus m}.$$
Система $\{w_n\}$ является ортонормированной.

3. Рассмотрим еще одну систему $\{\chi_n\}$ (систему Хаара) в $L_2[0,1]$ со скалярным произведением (39). Положим
$$\chi_1(x) = 1,$$
а для $m \in [0, 2^n)$
$$\chi_{2^n+m} = 2^{n/2} \times \begin{cases} 1, & x \in [2m/2^{n+1}, (2m+1)/2^{n+1}] \\ -1, & x \in [(2m+1)/2^{n+1}, (2m+2)/2^{n+1}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема Риса – Фишера

Теорема 16.4. *(Риса – Фишера) Пусть дана* $\forall$ $\{\varphi_n\}$ *– ОНС в* $L_2[a,b]$. $\forall$ $c \in l_2$ $\exists$ $f \in L_2[a,b]$ *такая, что*
$$\widehat{f}_n = c_n.$$

Доказательство. Выберем $\forall$ $c \in l_2$. Сопоставим этой последовательности ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

[19] Так как начиная с некоторого k члены такой суммы будут равны 0.

Воспользуемся критерием Коши:

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\varphi_k(x)\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \varepsilon.$$

Следовательно, $\exists\ f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, откуда $c_n = \widehat{f}_n$. □

Лекция 17. Свертка функций

Свертка функций

К прочтению рекомендуются первые главы книги Н.К. Бари «Тригонометрические ряды».

Напомним, на прошлой лекции обсудили пространство $L_2[-\pi,\pi]$. Пусть φ_n – ОНС. $\forall\ f \in L_2[-\pi,\pi]$ мы сопоставляли

$$\sigma(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n \varphi_n,$$

где

$$\widehat{f}_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Кроме того, у нас есть пространство непрерывных функций $C[-\pi,\pi] \subset L_2[-\pi,\pi]$, но у него по-другому определяется норма (если взять норму из L_2, C не будет полным).

Еще одно пространство, которое будет нам интересно – это пространство интегрируемых по Лебегу функций $L[-\pi,\pi] = L_1[-\pi,\pi]$. Здесь норма определяется как

$$\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|dx.$$

Очевидно, цепочка вложений для пространств выше выглядит следующим образом:

$$C[-\pi,\pi] \subset L_2[-\pi,\pi] \subset L[-\pi,\pi].$$

Определение 17.1. Пусть $f, g \in L[-\pi,\pi]$. Тогда *свертка f с g* определяется как

$$f * g(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Теорема 17.1. *Свертка $f * g \in L[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Оценим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f*g(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|g(x-t)|\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||g(u)|di = \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_1} < \infty.$$

$\square$

Обсудим некоторые свойства свертки.

Теорема 17.2. *Пусть* $f, g \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда* $f * g = g * f$.

Доказательство. Распишем

$$g * f = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)f(u)du,$$

если сделать замену $x - t = u$. □

Теорема 17.3. *Пусть* $f, g \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда* $f * g_h = (f * g)_h$, *где*

$$\varphi_h(x) = \varphi(x-h).$$

Доказательство. Распишем

$$f * g_h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_h(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-h-t)dt = f * g(x-h) = (f * g)_h(x).$$

□

Теорема 17.4. *Пусть* $f \in C[-\pi, \pi]$, $g \in C^m[-\pi, \pi]$. *Тогда* $f * g \in C[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Распишем

$$\frac{d^m}{dx^m}(f * g) = \frac{d^m}{dx^m}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{d^m}{dx^m}f(x-t)dt,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Функции, используемые для свертки, называются *ядрами.*

δ-образная последовательность

Определим условно δ-функцию как

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Здесь должно выполняться $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(x)dx = 1$.

Тогда свертка с δ-функцией имеет вид

$$f * \delta(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\delta(x-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\delta(0)dt = f(x).$$

Такой функции δ не существует, но можно определить последовательность функций, которая сходится к δ, то есть для предела которой будет справедливо написанное выше.

Определение 17.2. Последовательность $K_n(t) \in L[-\pi,\pi]$ называется *δ-образной (или аппроксимативной единицей)*, если

1. $\sup\limits_n \|K_n\|_{L_1} < +\infty$;
2. $\forall\ n$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1;$$
3. $\forall\ \delta > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} |K_n(t)|\, dt = 0.$$

Теорема 17.5. *Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$. Тогда*

$$f * K_n(x) \ \rightrightarrows\ f(x).$$

Доказательство. Зафиксируем $\forall\ \varepsilon > 0$. Тогда $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x, t,\ |x-t| < \delta$ верно
$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$
Далее, $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$\left| int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt - 1 \right| < \varepsilon,$$

и $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} |K_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Определим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in [-\pi,\pi]$

$$|f * K_n(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t) - f(x)\right) K_n(t)dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-\delta}^{\delta} \left(f(x-t) - f(x)\right) K_n(t)dt \right| + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \, |K_n(t)| \, dt +$$

$$+|f(x)| \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt - 1 \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt + 2\|t\|_C \varepsilon + \varepsilon \|f\|_C \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\sup_n \|K_n\|_{L_1} + 3\|f\|_C \right).$$

□

Пример 17.1. Возьмем

$$K_n(t) = \frac{\cos^{2n}(t/2)}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(s/2)ds}. \tag{40}$$

Проверим свойства:

2. $\int\limits_{\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1;$

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt = 1;$

3. Убедимся в стремлении к 0 следующего интеграла:

$$\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \leq \pi \max_{[\delta,\pi]} K_n(t) = \pi \frac{\cos^{2n}(\delta/2)}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(s/2)ds}, \tag{41}$$

Здесь $\cos\delta/2 < 1$, поэтому числитель в оценке (41) $\to 0$, $n \to 0$. Заметим, однако, что и знаменатель в правой части (41) $\to 0$. Оценим скорость его стремления к 0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(s/2)ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{n2\ln\cos(s/2)}ds \sim \sqrt{2\pi/n(1/2)}.$$

Отсюда правая часть (41) $\to 0$.

Теорема Вейерштрасса

Теорема 17.6. *(Вейерштрасса) Тригонометрическая система*

$$\{1/2, \cos x, \sin x, \ldots\}$$

замкнута в $C[-\pi,\pi]$, *то есть* $\forall\ f \in C[-\pi,\pi]$ *и* $\forall > 0\ \exists$ *тригонометрический многочлен* $T_n(x)$ *такой, что*

$$\|f - T_n\| < \varepsilon.$$

Доказательство. По условию, свертка с функцией (40)

$$f * K_n(t) \ \rightrightarrows\ f(x).$$

Это значит, что $\forall > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$\|f * K_n - f\|_C < \varepsilon.$$

Распишем

$$f * K_n = \frac{2^{-n}}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\frac{s}{2} ds} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(1 + \cos(x-t))^n\, dt.$$

Раскрывая формулу $\cos(x-t)$ под знаком интеграла, возводя в степень n подынтегральное выражение, получим линейную комбинацию $\cos x$, $\sin x$ и const. Проинтегрировав, получим тригонометрический многочлен. $\square$

Лекция 18. Утверждения о рядах Фурье

Замкнутые и полные системы. Утверждения о рядах Фурье

Напомним, в прошлый раз установили теорему Вейерштрасса.

Теорема 17.6. $\forall\ f \in C[-\pi,\pi]$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

такой, что

$$\|f - T_n\|_C < \varepsilon.$$

Определение 18.1. Пусть X – полное нормированное пространство. Система $\{e_n\}$ называется *замкнутой в* X, если $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ x \in X\ \exists \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ такая, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_n e_n \right\| < \varepsilon.$$

Теорема 18.1. *Система*

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\} \tag{42}$$

замкнута в $C[-\pi,\pi]$.

Теорема 18.2. *Система*

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}$$

замкнута в $L[-\pi,\pi]$.

Определение 18.2. Система $\{\varphi_n(x)\}$ *полна в* $C[-\pi,\pi]$ *(*$L[-\pi,\pi]$*)*, если из того, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)dx = 0,$$

следует, что $f(x) = 0$.

Замечание 18.1. Пусть $F(x) \in C[-\pi,\pi]$. Тогда из того, что $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = 0$, следует, что $f(x) = 0$ (то есть система (42) полна).

Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$. Тогда

$$F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(t)dt \in C[-\pi, \pi],$$

так как

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Вычислим

$$a_n(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}F(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{b_n(f)}{n} = 0.$$

Аналогично,

$$b_n(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi n} f(x)\cos nx dx = \frac{a_n(f)}{n} = 0.$$

Отсюда

$$F(x) = \text{const} \;\Rightarrow\; f(x) = 0.$$

Следствие. Система

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}$$

полна в $L_2[-\pi, \pi]$ (так как $L_2 \subset L$).

Следствие. Система

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}$$

полна, замкнута в $L_2[-\pi, \pi]$ и $\forall\ f_2$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = (f, f).$$

Пусть теперь $f \in C[-\pi, \pi]$,

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Утверждение 18.1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

ряд сходится равномерно. Тогда

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Утверждение 18.2. *Пусть* $f \in C[-\pi, \pi]$,

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Если $\sigma(f)$ *сходится равномерно, то*

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Так как $\sigma(f)$ сходится равномерно,

$$a_n(f) = a_n\left(\sigma(f)\right), \quad b_n(f) = b_n\left(\sigma(f)\right),$$

откуда

$$\sigma(f) = f.$$

□

Теорема 18.3. $\forall\ \{a_n, b_n\} \in l_2\ \exists!\ f \in L_2[-\pi, \pi]$ *такая, что*

$$a_0(f) = a_0, \quad a_n(f) = a_n, \quad b_n(f) = b_n.$$

Оценка коэффициентов Фурье

Теорема 18.4. *Пусть* $f \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_n(f) \ \to\ 0, \quad b_n(f) \ \to\ 0.$$

Доказательство. Для $f \in L_2[-\pi, \pi]$ утверждение теоремы 18.4 тривиально, так как

$$\sum a_n^2 + b_n^2 < \infty,$$

откуда

$$a_n, \quad b_n \ \to\ 0.$$

Теперь, $\forall\ f \in L[-\pi, \pi]\ \exists\ g \in L_\infty[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\|f - g\|_{L_1} < \varepsilon.$$

$g \in L_2[-\pi, \pi]$, откуда

$$a_n(g), b_n(g) \ \to\ 0.$$

Тогда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|a_n(g)| < \varepsilon, \quad |b_n(g)| < \varepsilon.$$

Теперь,

$$a_n(f) = a_n(f-g) + a_n(g),$$

откуда

$$|a_n(f)| \leq |a_n(f-g)| + |a_n(g)| < 2\varepsilon.$$

Здесь $a_n(f-g)$ мало, так как

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f-g)\cos nx dx\right| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f-g|dx.$$

Аналогично

$$|b_n(f)| < 2\varepsilon\ \forall\ b > N.$$

$\square$

Пусть $f \in C[-\pi,\pi]$. Обозначим

$$\omega_f(\delta) = \sup_{x\in\mathbb{R}, |h|<\delta} |f(x+h) - f(x)|\,.$$

Так как $f \in C[-\pi,\pi]$, то

$$\omega_f(\delta)\ \to\ 0.$$

Теорема 18.5. *Пусть $f \in C[-\pi,\pi]$. Тогда*

$$|a_n(f)| \leq \omega_f(\pi/n), \quad \lfloor n(f)| \leq \omega_f(\pi/n).$$

Доказательство. Оценим $a_n(f)$. Распишем

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+\pi/n)\cos nt dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - f(x+\pi/n)\right)\cos nx dx,$$

откуда

$$|a_n(f)| \leq \left|\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - f(x+\pi/n)|\right|.$$

$\square$

Напомним следующее определение.

Определение 18.3. f – функция *ограниченной вариации* на $[-\pi, \pi]$ (обозначение: $f \in \mathrm{VB}[-\pi, \pi]$), если

$$\sup_T \sum |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \infty.$$

Теорема 18.6. *Пусть $f \in VB[-\pi, \pi]$. Тогда*

$$a_n(f) = O(1/n), \quad b_n(f) = O(1/n), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Оценим $a_n(f)$. Распишем

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x + \pi/n)) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x + 2\pi/n) - f(x + \pi/n)) \cos nx dx =$$

$$= \frac{\pm 1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x + n\pi/n) - f(x + (n-1)\pi/n)) =$$

$$= \ldots = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x + n\pi/n) - f(x - (n-1)\pi/n) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi n} \sum_{k=-n+1}^{n} \pm \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x + k\pi/n) - f(x + (k-1)\pi/n)) \cos nx dx.$$

Отсюда

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n+1}^{n} |f(x + \pi k/n) - f(x + (k-1)\pi/n)| \, dx \leq \frac{V_f[-\pi, \pi]}{2n},$$

где $V_f[-\pi, \pi]$ – вариация f на периоде $[-\pi, \pi]$.

Заметим, что чем меньше $V_f[-\pi, \pi]$, тем быстрее $a_n(f) \to 0$, $n \to \infty$. □

Лекция 19. Теоремы о рядах Фурье. Ядро Дирихле

Полнота тригонометрической системы

Напомним, показали, что система

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\right\}$$

замкнута в $C[-\pi, \pi]$.

Этот факт следует из теоремы Вейерштрасса.

Теорема 17.6. *(Вейерштрасса)* $\forall\ f \in C[-\pi, \pi]$ *и* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *тригонометрический многочлен*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

такой, что

$$\|f - T_n\|_C < \varepsilon.$$

Хотим показать, что из того, что

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \quad \int_{\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0\ \forall\ n$$

следует, что $f(x) = 0$. Итак, по условию получаем, что $\forall$

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

получаем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx = 0.$$

Далее,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(f(x) - T_n(x)\right)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(f(x) - T_n(x)\right)dx\right| < \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \varepsilon M.$$

Отсюда
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0,$$
то есть показали, что
$$f(x) = 0.$$

Утверждения о рядах Фурье

Ранее показали, что $\forall\ f \in L[-\pi, \pi]$
$$a_n(f) \ \to \ 0, \quad b_n(f) \ \to \ 0.$$
Для $\forall\ f \in \mathrm{VB}[-\pi, \pi]$
$$a_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Теорема 19.1. *Пусть $f, g \in L[-\pi, \pi]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда*[20]
$$\sigma(\lambda f + \mu g) = \lambda\sigma(f) + \mu\sigma(g).$$

Теорема 19.2. *Пусть $f \in L[-\pi, \pi]$,*
$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$
Тогда
$$\sigma(f_h) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(x-h) + b_n \sin n(x-h). \tag{43}$$

Доказательство. Вычислим
$$a_0(f_h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = a_0(f),$$
$$a_n(f_h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t+h)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos nt \cos nh - \sin nt \sin nh\right)dt = \cos nh a_n(f) - \sin ng b_n(t).$$
Аналогично,
$$b_n(f_h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin n(t+h)dt =$$

[20]Совпадают как формальные ряды (не говорим о сходимости).

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sin nt \cos nh + \sin nh \cos nt \right) dt = \cos nh b_n(f) + \sin nh a_n(f).$$

Раскроем n-е слагаемое в (42):

$$a_n \cos n(x-h) + b_n \sin n(x-h) =$$

$$= (a_n \cos ng - b_n \sin nh) \cos nx + (a_n \sin nh + b_n \cos nh) \sin nx.$$

□

Теорема 19.3. *Пусть* $f, g \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_0(f*g) = a_0(f)a_0(g),$$

$$a_n(f*g) = a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g),$$

$$b_n(f*g) = a_n(f)b_n(g) + a_n(g)b_n(f).$$

Доказательство. Вычислим

$$a_0(f*g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f*g(x)dx = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dx = a_0(f)a_0(g).$$

Далее,

$$a_n(f*g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f*g(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) \cos nx dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x-t) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x) \left(\cos nx \cos nt - \sin nx \cos nt \right) dx =$$

$$= a_n(f)a_n(g) - b_n(f)b_n(g).$$

Наконец, вычислим

$$b_n(f*g) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) \sin nx dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x) \sin n(x+t) dx = a_n(f)b_n(g) + a_n(g)b_n(f).$$

□

Теорема 19.4. *Пусть* $f \in L[-\pi,\pi]$, $F(x) = \int f(t)dt$,

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда

$$\sigma\left(F - \frac{a_0}{2}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx.$$

Доказательство. Вычислим

$$a_n\left(F - \frac{a_0}{2}x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F - \frac{a_0}{2}x\right)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right) d\sin nx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx d\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{b_n}{n}.$$

Аналогично,

$$b_n\left(F - \frac{a_0}{2}x\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)\sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right) d\cos nx = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\cos nx dx = \frac{a_n}{n}.$$

□

Замечание 19.1. Проверим, что $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – периодическая[21]. Вычислим

$$F(\pi) - \frac{a_0}{2}\pi - \left(F(-\pi) - \frac{a_0}{2}(-\pi)\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0.$$

Коэффиценты Фурье абсолютно непрерывных функций

Функция $f(x)$ – *абсолютно непрерывная на* $[-\pi,\pi]$ $f = \int f' dx$ (представима интегралом Лебега. Обозначение: $f \in [-\pi,\pi]$.

Теорема 19.5. *Пусть* $f \in [-\pi,\pi]$. *Тогда*

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

[21]Поэтому мы работаем именно с ней, а не просто с $F(x)$.

Доказательство. Так как $f \in$, $f' \in L$. Тогда

$$a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f'), \quad b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f').$$

Так как $f' \in L$,

$$a_n(f'), \quad b_n(f') \ \to \ 0.$$

□

Запишем эквивалентную формулировку теоремы 19.5.

Теорема 19.6. *Пусть* $f' \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Теорема 19.7. *Пусть* $f^{(k)} \in L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Распишем

$$a_n\left(f\right) = -\frac{1}{n} b_n\left(f'\right) = -\frac{1}{n^2} a_n\left(f^{(2)}\right) = \ldots = \pm \frac{a_n \text{ или } b_n(f^{(k)})}{n^k}.$$

□

Возьмем $k = 2$. Тогда $f'' \in L[-\pi, \pi]$. Отсюда

$$a_n, \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

а значит, ряд Фурье $\sigma(f)$ сходится равномерно.

Теорема 19.8. *Пусть* $f \in A[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$a_n(f), \quad b_n(f) \overset{\exp}{\to} 0.$$

Теорема 19.9. *Пусть* $f \in C^\infty$. *Тогда*

$$a_n, \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \ \forall\, k.$$

Ядро Дирихле

Если $f \in L_2[-\pi, \pi]$, то

$$\sigma_n(f) \overset{L_2}{\to} f.$$

Пусть теперь $f \in C[-\pi, \pi]$. Вопрос: как и при каких условиях

$$\sigma_n(f) \to f.$$

Определим *ядро Дирихле* как

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \ldots +\right.$$

$$\left. + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{44}$$

Утверждение 19.1. *Для ядра Дирихле справедливы следующие оценки:*

1. $|D_n(x)| \le n + \frac{1}{2}$;
2. $|D_n(x)| \le \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{\pi}{2|x|}$.

Вычислим теперь частичную сумму ряда Фурье f

$$\sigma_n(f) = \frac{a_0}{2]} + \sum_{k=1}^{\infty} a - k\cos kx + b_k \sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt + \sin kx \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos kt + \sin kx \sin kt\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt.$$

Теорема 19.10. *Пусть $f \in [-\pi, \pi]$. Тогда*

$$\sigma_n(f) = f * D_n.$$

Выведем следствие из теоремы 19.10. Упростим ядро Дирихле (44):

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \sin nx\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\cos nx+\frac{\sin nx}{x}. \tag{45}$$

Заметим, что основной вклад в (45) вносит величина $\frac{\sin nx}{x}$. Она называется *упрощенным ядром Дирихле.*

Представим теперь $\sigma_n(f)$ с помощью упрощенного ядра Дирихле. Воспользуемся теоремой 19.10 и заменой $t \mapsto -t$:

$$\sigma_n(f) = f * D_n = D_n * f = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}+\frac{1}{t}\right)\sin nt dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\cos nt dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt + \frac{1}{2}a_n\left(f(x+t)+f(x-t)\right) +$$

$$+b_n\left(\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin t}{t}dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin t}{t}dt + b_n\left(\begin{cases} 0, & t\in[0,\delta] \\ \frac{1}{t}\left(f(x+t)+f(x-t)\right), & t\in[\delta,\pi]\end{cases}\right) +$$

$$+o(1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1).$$

Итак, мы доказали теорему о представлении частичных сумм ряда Фурье в терминах упрощенного ядра Дирихле.

Теорема 19.11. *Пусть* $f \in L[-\pi,\pi]$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin t}{t}dt + o(1).$$

Лекция 20. Принцип локализации Римана. Признаки Дини и Жордана (случай рядов)

Теорема (принцип локализации Римана)

Напомним основные моменты из прошлой лекции. В прошлый раз рассматривали ядро Дирихле

$$D_n(x) = \frac{1}{2} +_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

а частичные суммы ряда Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f * D_n(x).$$

Кроме того, получили представление

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1). \tag{46}$$

Для $\forall\ \delta \in (0, \pi]$

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \left(f(x+t) + f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1).$$

Теорема 20.1. *(Принцип локализации Римана) Пусть $f, g \in L[-\pi,\pi]$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что*

$$f\Big|_{U_\delta(x)} = g\Big|_{U_\delta(x)}.$$

Тогда $\sigma(f)$ и $\sigma(g)$ равносходятся в точке x. Если они сходятся, то

$$\sigma(f)(x) = \sigma(g)(x).$$

Доказательство. Введем

$$\varphi = f - g.$$

Тогда

1. $\varphi \in L[-\pi,\pi]$;
2. $\sigma(\varphi) = \sigma(f) - \sigma(g)$;
3. $\varphi\Big|_{U_\delta(x)} = 0$.

Распишем

$$\sigma_n(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta (\varphi(x+t)+\varphi(x-t))\,\frac{\sin nt}{t}dt + o(1) = o(1), \quad n\to\infty.$$

Отсюда получаем, что $\sigma(\varphi)=0$, а значит,

$$\sigma(f)-\sigma(g)=0$$

в точке x, то есть

$$\sigma(f)=\sigma(g).$$

□

Поговорим теперь о том, почему в (46) взяли в $\sin nt/t$ n, а не, например, $n+1/2$, как в $D_n(x)$.

Возьмем $f\equiv 1$. Тогда

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta (1+1)\frac{\sin nt}{t}dt + o(1),$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{\sin nt}{nt}d(nt) + o(1),$$

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\delta n} \frac{\sin u}{u}du + o(1),$$

откуда

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}du,$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема об оценке частичных сумм ряда Фурье

Большую роль играет не только интеграл от упрощенного ядра, но и модули. Как только что было показано,

$$\int\limits_0^\delta \frac{\sin nt}{t}dt \ \to\ \frac{\pi}{2}.$$

Но

$$\int\limits_0^\delta \frac{|sinnt|}{t}dt \ \to\ \infty.$$

В теории рядов Фурье большую роль играет порядок стремления к бесконечности. Обозначим[22]

$$L_n = \int\limits_0^\pi \frac{|\sin nt|}{t} dt. \tag{47}$$

Такие L_n назывются *константами Лебега*. Выясним, с какой скоростью $L_n \to \infty$. Сделаем замену переменных в (47):

$$L_n = \int\limits_0^{\pi n} \frac{|sinu|}{u} du = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{|\sin u|}{u} du = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u+\pi(k-1)} du.$$

Отсюда следует двусторонняя оценка

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi k} \le L_n \le \int\limits_0^\pi \frac{|\sin u|}{u} du + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\pi(k-1)}.$$

Отсюда

$$L_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Теорема 20.2. *Пусть $f \in L_\infty[-\pi,\pi]$. Тогда*

$$\sigma_n(f) = O(\ln n).$$

Доказательство. Оценим

$$|\sigma_n(f)| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \left(f(x+t) + f(x-t)\right) \frac{\sin nt}{t} dt \right| + o(1) \le \frac{2}{\pi} \operatorname{ess\,sup} |f| L_n + o(1).$$

□

Критерий сходимости ряда Фурье в точке

Как обсуждали выше,

$$\sigma_n(1) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

Умножим это равенство на $f(x)$, где x – фиксированное число:

$$\sigma_n\left(f(x)\right) = f(x) = \frac{2f(x)}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

Вычтем получившееся равенство из (46):

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \left(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right) \frac{\sin nt}{t} dt + o(1).$$

[22]Здесь вместо δ в интеграли записали π – в данном случае это не принципиально.

Теорема 20.3. $\sigma(f)(x) = f(x) \iff \exists\ \delta > 0$ *такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \frac{\sin nt}{t} dt = 0.$$

Признак Дини. Следствия

Далее рассматриваем такие функции, что

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

то есть допустимы только разрывы первого рода, которые таким образом «компенсируются».

Теорема 20.4. *(Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке x) Пусть* $f \in L[-\pi, \pi]$,

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \infty.$$

Тогда

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^{\delta_1} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \varepsilon,$$

тогда

$$\left| \int\limits_0^{\delta_1} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin ntdt \right| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$\left| \int\limits_{\delta_1}^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin ntdt \right| < \varepsilon.$$

Итак, получаем, что $\forall\ n > N$

$$\left| \int\limits_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin ntdt \right| < 2\varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть $f \in D(x) \cap L[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Здесь

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t} = o(1).$$

Значит, и

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} = O(1).$$

□

Возьмем точку x разрыва f первого рода. Положим

$$f'(x+0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(xt)-f(x+0)}{t}.$$

Аналогично,

$$f'(x-0) = \lim_{t\to-0} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}.$$

Теорема 20.5. *Пусть*[23] $f \in D_*(x) \cap L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Проверим, что выполняется условие Дини:

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} = \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} =$$

$$= f'(x+0) - f'(x-0) + o(1) = O(1).$$

□

Теорема 20.6. *Пусть* $f \in D_*[-\pi, \pi] \cap L[-\pi, \pi]$. *Тогда*

$$\sigma(f)9x) = f(x)\ \forall\ x.$$

Признак Жордана

Теорема 20.7. *(Признак Жордана сходимости ряда Фурье в точке x) Пусть даны* $f \in L[-\pi, \pi]$ *и* $\exists\ \delta > 0$ *такое, что* $f \in VB(U_\delta(x))$. *Тогда*

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Считаем, что $f \nearrow (x-\delta, x+\delta)$.

[23] Здесь $D_*(x)$ означает обобщенную диффференцируемость в точке x.

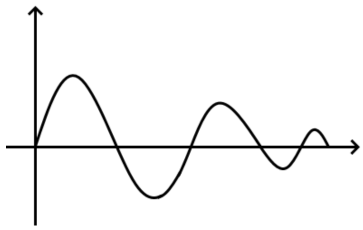

Рис. 20.1. График $\frac{\sin t}{t}$

Сделаем небольшое отступление. Рассмотрим график функции $\sin t/t$ (рис. 20.1). Выполнено соотношение

$$\max_{a,b>0}\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}dt\right| = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt.$$

Действительно, все остальные «волны» будут частично компенсировать друг друга и убывать, поэтому максимум – это первая положительная из них.

Вернемся к доказательству признака Жордана. Выполнено

$$\int_0^\delta \left(f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right)\frac{\sin nt}{t}dt =$$

$$\int_0^\delta \left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin nt}{t}dt - \int_0^\delta \left(f(x-0)-f(x-t)\right)\frac{\sin t}{t}dt =$$

$$= \left(f(x+\delta)-f(x+0)\right)\int_{\theta_1\delta}^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt - \left(f(x-0)-f(x-\delta)\right)\int_{\theta_2\delta}^{\delta}\frac{\sin nt}{t}dt$$

для некоторых $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Далее, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что

$$f(x+\delta)-f(x+0) < \frac{\varepsilon}{\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt},$$

$$f(x-0)-f(x-\delta) < \frac{\varepsilon}{\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt}.$$

Тогда

$$\left|\int_0^\delta \left(f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right)\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть $f \in \mathrm{VB}[-\pi,\pi]$. Тогда

$$\sigma(f)(x) = f(x)\ \forall\ x.$$

Лекция 21. Ядро Фейера. Операция свертки

Ядро Фейера. Многочлены Фейера

Напомним, в прошлый установили следующие факты.

Теорема 20.4. *(Признак Дини) Пусть* $f \in L[-\pi, \pi]$,

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \infty.$$

Тогда

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Теорема 20.7. *(Признак Жордана) Пусть* $f \in L[-\pi, \pi]$ *и* $f \in VB(U_\delta(x))$*. Тогда*

$$\sigma(f)(x) = f(x).$$

Заметим, что из того, что $f \in C[-\pi, \pi]$, не следует, что $\sigma(f)(x) = f(x)$. Пример функции, для которой это не выполняется, построить не очень легко, поэтому здесь мы его приводить не будем.

Вообще говоря, ряд Фурье

$$\sigma_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

плохо приближает f как функцию $\in C[-\pi, \pi]$.

Вспомним, *ядро Дирихле* определяется как

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{48}$$

Усредним (48):

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x). \tag{49}$$

Такое усредненное ядро Дирихле приближает функции как минимум не хуже, чем (48). Ниже покажем, что (49) приближает функции лучше, чем (48).

Преобразуем (49):

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1) 2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x = \frac{1}{(n+1) 4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x =$$

$$= \frac{1}{(n+1) 4 \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n} \cos kx - \cos(k+1)x = \frac{1 - \cos(n+1)x}{(n+1) 4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Итак, для (49) справедливо представление

$$K_n(x) = \frac{1 - \cos(n+1)x}{(n+1) 4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Такое ядро называется *ядром Фейера*.

Замечание 21.1. Разница в $K_n(x)$ и $D_n(x)$ следующая. Локализация $K_n(x)$ чуть более выраженная, чем у $D_n(x)$. Кроме того, $K_n(x)$ положительно.

Утверждение 21.1. $K_n(x)$ *– аппроксимативная единица.*

Доказательство. Покажем, что, действительно, все 3 свойства аппроксимативной единицы для $K_n(x)$ выполнены:

1. $$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt = 1;$$

2. $\sup\limits_n \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt = 1;$

3. $\forall\ \delta > 0$
$$\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt = 2\int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt =$$
$$= \frac{1}{(n+1)}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt \le \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \ \to\ 0.$$

□

Рассмотрим *многочлен Фейера*

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_n(x)$$

– среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье. Очевидно, многочлен Фейера тоже представляет собой тригонометрический ряд.

Покажем, что в $C[-\pi,\pi]$ многочлены Фейера хуже многочленов Фурье в L_2, но лучше в C. Действительно,

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f * D_n(x) = f * \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = f * K_n(x). \tag{50}$$

Если $\sigma_n(f)$ сходится, то $F_n(f)$ сходится.

Если $\sigma_n(f)(x)\ \to\ f(x)$, то $F_n(f)(x)\ \to\ f(x)$.

Следующая теорема – это теорема об аппроксиматичной единице, примененная к ядру Фейера.

Теорема 21.1. *Пусть* $f \in C[-\pi,\pi]$*. Тогда*

$$F_n(f)(x)\ \rightrightarrows\ f(x).$$

Теорема 21.2. *Пусть* $f \in C[-\pi,\pi]$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *тригонометрический многочлен* T_n *такой, что*

$$\|f - T_n\|_C < \varepsilon.$$

В качестве T_n можно взять $F_n(x)$ (50).

Операция свертки

Перейдем к непериодическому случаю.

Определение 21.1. Пусть $f, g \in L(\mathbb{R})$. *Сверткой f и g в точке x* называется

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Теорема 21.3. *Пусть $f, g \in L(\mathbb{R})$. Тогда и $f * g \in L(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Восплызуемся теоремой Фубини. Оценим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty} |f(t)|\,|g(x-t)|\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = \|f\|_L \|g\|_L.$$

□

Теорема 21.4.

$$f * g = g * f.$$

Доказательство. Воспользуемся заменой $u = x - t$. Тогда

$$g * f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du.$$

□

Определим

$$f_h(x) = f(x-h).$$

Теорема 21.5.

$$f * g_h = (f * g)_h.$$

Доказательство. Распишем

$$f * g_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g_h(x-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g\left((x-t)-h\right)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g\left((x-h)-t\right) = f * g(x-h) = (f * g)_h\,.$$

□

Теорема 21.6. *Пусть*

$$f \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}), \quad g \in C^m(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}), \quad g^{(k)} \in L(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$f * g \in C^m(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Вычислим

$$\frac{d^m f * g}{dx^m} = \frac{d^m}{dx^m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^m g}{dx^m}(x-t) dt.$$

□

Теорема об аппроксимативной единице

Определение 21.2. Система $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *аппроксимативной единицей*, если

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t) dt \ \to \ 1, \, n \to \infty;$
2. $\sup\limits_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_n(t)| \, dt < \infty;$
3. $\forall \ \delta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} |K_n(t)| \, dt = 0.$$

Теорема 21.7. *Если* $\{K_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *– аппроксимативная единица и* $f \in C(\mathbb{R})$ *и финитна (*$\mathrm{supp} f$ *– компакт), то*

$$f * K_n \ \rightrightarrows \ f.$$

Доказательство. $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что $\forall \ x, t, \ |x - t| < \delta$,

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists \ N_1$ такое, что $\forall \ n > N_1$

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t) dt - 1 \right| < \varepsilon,$$

$\exists \ N_2$ такое, что $\forall \ n > N_2$

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} |K_n(t)| \, dt < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ n > N$

$$|f * K_n(x) - f(x)| \le \left| f * K_n(x) - f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt \right| +$$

$$+ \left| f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt - f(x) \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f9x - t) - f(x))\, K_n(t)dt \right| +$$

$$+ |f(x)| \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt - 1 \right| \le \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, |K_n(t)|\, dt +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\, |K_n(t)|\, dt + |f(x)| \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)dt - 1 \right| <$$

$$< \varepsilon \sup_n \|K_n\| + 3\varepsilon \|f\|_C.$$

□

Итак, мы показали, что свертка с аппроксимативной единицей ведет себя хорошо в равномерной метрике.

Возьмем

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{51}$$

Проверим, что (51) – аппроксимативная единица. Здесь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1,$$

$$\sup_n \|K_n\| = 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} |K_n(x)|\, dx = \frac{\int\limits_{\delta}^{1} (1-x^2)^n dx}{\int\limits_{0}^{1} (1-t^2)^n dt} \le \frac{(1-\delta^2)^n}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}} \ \to\ 0.$$

Итак, (51) – аппроксимативная единица, а значит, по теореме 21.7

$$f * K_n \ \rightrightarrows\ f.$$

Пусть теперь $f \in C[a,b]$, $-1 < a < b < 1$. Соорудим из f функцию g такую, что

$$g\Big|_{[a,b]} = f\Big|_{[a,b]}, \quad g\Big|_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)} = 0.$$

Теперь, $g * K_n$ будет равномерно близка к g,

$$g * K_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)K_n(x-t)dt = C\int\limits_{-1}^{1} g(t)\left(1-(x-t)^2\right)^n dt = P_{2n}(x).$$

Итак, доказали следующую теорему.

Теорема 21.8. *(Вейерштрасса) Пусть $f \in C[a,b]$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ многочлен P_n такой, что*

$$\|f - P_n\| < \varepsilon.$$

Лекция 22. Интеграл Фурье. Принцип локализации Римана. Признак Дини (случай интегралов)

Интеграл Фурье

Пусть $f \in L[-T, T]$ и 2π-периодична. Запишем для f ряд Фурье:

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{\pi n}{T}x =$$

$$= \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{\pi n}{T}tdt\cos\frac{\pi n}{T}x +$$

$$+\frac{\pi}{T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{\pi n}{T}tdt\sin\frac{\pi n}{T}x \approx \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda tdt\cos\lambda x +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda tdt\sin\lambda x.$$

Замечание 22.1. Предельный переход выше не является «законным», это просто схематичные рассуждения.

Обозначим

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda tdt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda tdt. \tag{52}$$

Определение 22.1. *Интегралом Фурье* называется

$$J(f)(x) = \int\limits_{0}^{\infty} a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda xd\lambda. \tag{53}$$

Конечно, нам хотелось бы, чтобы интеграл (53) был равен $f(x)$. Это выполняется не всегда.

Теорема 22.1. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$a(\lambda), \quad b(\lambda) \in C\left([0, \infty)\right),$$

где $a(\lambda), b(\lambda)$ определены в (52).

Доказательство. Проверим непрерывность $a(\lambda)$. Распишем

$$a(\lambda+\Delta\lambda)-a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\lambda+\Delta\lambda)t-\cos\lambda t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{A}^{\infty} f(t)\left(\cos(\lambda+\Delta\lambda)t-\cos\lambda t\right)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\left(\cos(\lambda+\Delta\lambda)t-\cos\lambda t\right)dt.$$

Для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ A$ такое, что хвосты интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{A}^{\infty}|f(t)|dt<\varepsilon.$$

Оценим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\left(\cos(\lambda+\Delta\lambda)t-\cos\lambda t\right)dt\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}|f(t)|\left|\sin\frac{\Delta\lambda t}{2}\right|\left|\sin\frac{2\lambda+\Delta\lambda}{2}t\right|dt\le\frac{2A}{\pi}|\Delta\lambda|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt.$$

Положим

$$\delta=\frac{\varepsilon}{\frac{2A}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt}.$$

Тогда для $|\Delta\lambda|<\delta$

$$|a(\lambda+\Delta\lambda)-a(\lambda)|<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

$\square$

Теорема 22.2. *Пусть $f\in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$a(\lambda),b(\lambda)\ \to\ 0,\quad \lambda\to\infty.$$

Доказательство. Покажем утверждение для $a(\lambda)$. Представим

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{A}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\cos\lambda t dt.$$

Для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ A$ такое, что хвосты интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{-A}+\int\limits_{A}^{\infty}|f(t)|dt<\varepsilon.$$

Кроме того, $\exists\ \Lambda$ такое, что $\forall\ \lambda > \Lambda$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\cos\lambda t dt\right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|a(\lambda)| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{-A} + \int\limits_{A}^{\infty} |f(t)\cos\lambda t|\, dt + \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(t)\cos\lambda t dt\right| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Принцип локализации Римана. Условия, при которых $J(f)(x) = f(x)$

Обсудим, когда интеграл (53) сходится и равен $f(x)$.

Рассмотрим теперь

$$J_A(f)(x) = \int\limits_0^A a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x d\lambda.$$

Такой интеграл существует в смысле Римана. Подставив (52), получим

$$J_A(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A \left(\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt + \sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt\right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int\limits_0^A \cos\lambda(x-t)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(x-t)}{x-t}dt.$$

Теорема 22.3. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$J_A(f)(x) = f * \frac{\sin At}{\pi t}. \tag{54}$$

Замечание 22.2. Напомним, что ряд Фурье мы представляли в виде

$$\sigma(f) = f * D_n = f * \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Продолжим (54):

$$J_A(f)(x) = \frac{\sin At}{\pi t} * f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt + o(1), \quad A\to\infty. \tag{55}$$

Здесь $\delta > 0$ – произвольное число. Представление (55) верно, так как

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}\sin At dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} g(t)\sin At dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{t}, & t > \delta \\ 0, & 0 < t < \delta \end{cases}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 22.4. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$J_A(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt + o(1).$$

Наконец, сформулируем принципи локализации Римана.

Теорема 22.5. *(Принцип локализации Римана) Пусть $f, g \in L(\mathbb{R})$, $\exists\ \delta > 0$ такое, что*

$$fU_\delta(x) = g\Big|_{U-\delta(x)}.$$

Тогда $J(f)$ и $J(g)$ равносходится и $J(f) = J(g)$ в точке x.

Доказательство. Положим

$$\varphi = f - g.$$

Заметим, что

$$\varphi \in L(\mathbb{R}) \text{ и } \varphi\Big|_{U_\delta(x)} = 0.$$

Тогда

$$J_A(\varphi) = \int\limits_0^\delta (\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) \frac{\sin At}{t} dt + o(1) = o(1).$$

Получаем, что

$$J(\varphi)(x) = 0,$$

то есть

$$J(f) - J(g) = 0.$$

Равенство выше понимается в смысле равносходимости. □

Далее, можем записать

$$J_A\left(f(x)\right) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(x) \frac{\sin At}{t} dt = f(x).$$

Отсюда

$$J_A(f)(x) - f(x) = \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin At dt + o(1).$$

Теорема 22.6. $J(f)(x) = f(x) \iff$

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin At dt = 0$$

для некоторого $\delta > 0$.

Признак Дини

Теорема 22.7. *(Признак Дини) Пусть* $f \in L(\mathbb{R})$ *и* $\exists\ \delta > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} dt < \infty.$$

Тогда

$$J(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Будем предполагать, как и ранее, что

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Для $\delta > 0$ из условия, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta < \delta$ такое, что

$$\int\limits_0^\eta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\, N$ такое, что $\forall\, A > N$

$$\left| \int\limits_\eta^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin Atdt \right| < .$$

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, A > N$

$$\left| \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin Atdt \right| < 2\varepsilon.$$

□

Признак Жордана

Теорема 22.8. *(Признак Жордана) Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $\exists\, \delta > 0$ такое, что $f \in VB\,(U_\delta(x))$. Тогда*

$$J(f)(x) = f(x).$$

Лекция 23. Признак Жордана. Обратное преобразование Фурье

Следствия из признака Дини

Напомним, для $f \in L(\mathbb{R})$ существует интеграл Фурье

$$J(f)(x) = \int\limits_0^\infty a(\lambda \cos \lambda x + b(\lambda \sin \lambda x d\lambda.$$

В прошлый раз доказали признак Дини.

Теорема 22.7. *(Признак Дини) Пусть* $f \in L(\mathbb{R})$,

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \in L[0,\delta]$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Тогда

$$J(f)(x) = f(x).$$

Следствие. Пусть $finL(\mathbb{R}) \cap H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. Тогда

$$J(f)(x) = f(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Из условия следствия вытекает, что справедлива оцена

$$\left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x)}{t} \right| \le Ct^{\alpha-1}.$$

Интеграл от $t^{\alpha-1}$ сходится при $\alpha > 0$, а значит, для f выполняется условие Дини. □

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $\exists \ f'_+, f'_- \ \forall \ x \in \mathbb{R}$:

$$f'_+ = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t},$$

$$f'_- = \lim_{t \to -0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}.$$

Тогда

$$J(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что

$$\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} = O(1), \quad x \to \infty.$$

□

Признак Жордана

Докажем теперь признак Жордана, который был сформулирован в конце прошлой лекции.

Теорема 22.8. *(Признак Жордана) Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что $f \in VB(U_\delta(x))$. Тогда*

$$J(f)(x) = f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$J_A(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\sin Atdt.$$

Для некоторого $\delta > 0$ (как его выбрать, будет показано позднее)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \left(f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)\right)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \left(f(x+t)-f(x+0)\right)\frac{\sin At}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \left(f(x-0)-f(x-t)\right)\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= 1\pi\left(f(x+\delta)-f(x+0)\right)\int\limits_{\theta_1\delta}^\delta \frac{\sin At}{t}dt - \frac{1}{\pi}\left(f(x-0)-f(x-\delta)\right)\int\limits_{\theta_2\delta}^\delta \frac{\sin At}{t}dt.$$

Оценим

$$\left|\int\limits_{\theta_1\delta}^\delta \frac{\sin At}{t}dt\right| = \left|\int\limits_{\theta_1\delta A}^{\delta A} \frac{\sin u}{u}du\right| \le \int\limits_0^\pi \frac{\sin u}{u}du.$$

Для $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta > 0$ такое, что

$$f(x+\delta)-f(x+0) < \frac{\pi\varepsilon}{\int\limits_0^\pi \frac{\sin u}{u}du},$$

$$f(x-0)-f(x+\delta) < \frac{\pi\varepsilon}{\int\limits_0^\pi \frac{\sin u}{u}du}.$$

Такое δ и выберем. Далее, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ A > N$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\sin Atdt\right| < \varepsilon.$$

Выражение выше справедливо, так как интеграл в нем – интеграл Фурье функции

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}, & t > \delta \\ 0, & t \in [0, \delta) \end{cases}$$

Итак, $\forall > 0 \ \exists \ N$ такое, что $\forall \ A > N$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \sin Atdt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \sin Atdt \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_\delta^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \sin Atdt \right| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\square$

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap \mathrm{VB}(\mathbb{R})$. Тогда

$$J(f)(x) = f(x).$$

Главное значение интеграла. Преобразование Фурье

Определение 23.1. *Интеграл в смысле главного значения* определяется как

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx. \tag{56}$$

Утверждение 23.1. *Если* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ *сходится, то*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится,

$$\exists \ \lim_{A \to \infty} \int\limits_0^A f(x)dx = \int\limits_0^\infty f(x)dx,$$

$$\exists \ \lim_{B \to \infty} \int\limits_{-B}^0 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

$\square$

Пример 23.1. Вычислим

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} \sin x dx = 0.$$

Очевидно, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$ не существует.

Теорема 23.1. *Если f – нечетная, то* $\exists$

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0.$$

Замечание 23.1. Заметим, что компенсация в (56) происходит благодаря компенсации левой и правой частей. Так, функция $x^2 \sin x$ все равно будет иметь интеграл в смысле главного значения (равный 0), хотя при $x \to \pm\infty$ ее значения могут быть велики, так как $x^2 \sin x$ нечетна.

В случае интеграла в смысле главного значения нельзя говорить о сходимости. Это некоторая условность, которая помогает в определенных ситуациях.

Попробуем теперь преобразовать интеграл Фурье:

$$J(f) = \int\limits_{0}^{\infty} a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \left(\cos\lambda x \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t dt + \sin\lambda x \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t dt\right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt + \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) i \sin\lambda(x-t)dt. \tag{57}$$

Второй интеграл в смысле главного значения в (57) равен 0 в силу теоремы 23.1. Первый же интеграл в (57) либо сходится (а значит, сходится и в смысле главного значения), либо не существует.

Окончательно получаем, что

$$(57) = \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt = \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{58}$$

Определение 23.2. Пусть[24] $f \in L(\mathbb{R})$. *Преобразование Фурье* $f(x)$ определяется как

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{59}$$

Определение 23.3. Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. *Обратным преобразованием Фурье* называется

$$\text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Теорема 23.2. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что*

$$\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \in L[0, \delta].$$

Тогда

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} dx,$$

где $\widehat{f}(\lambda)$ – преобразование Фурье f (59).

Доказательство. Доказательство написано выше. Если условие Дини выполнено, интеграл

$$J(f) = \int\limits_{0}^{\infty} a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda$$

сходится к $f(x)$. В свою очередь, интеграл $J(f)$ сходится $\iff$ сходится интеграл в смысле главного значения (58). $\square$

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap H^{\alpha}(\mathbb{R})$. Тогда

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

(в каждой точке $x \in \mathbb{R}$).

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap D(\mathbb{R})$. Тогда

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Теорема 23.3. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что $f \in VB(U_{\delta}(x))$. Тогда*

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

[24] Далее будем рассматривать преобразование Фурье только для таких функций.

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap \mathrm{VB}(\mathbb{R})$. Тогда

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Лекция 24. Интегральное преобразование Фурье (продолжение)

Свойства преобразования Фурье

Напомним, на чем мы остановились на прошлой лекции. Каждой функции[25] $f \in L(\mathbb{R})$ мы можем сопоставить преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \tag{60}$$

Преобразование Фурье (60) обладает следующими **свойствами**.

1. Из того, что $f \in L(\mathbb{R})$, вытекает, что $\widehat{f}(\lambda) \in C(\mathbb{R})$;

2. $\widehat{f}(\lambda) \in B(\mathbb{R})$ и
$$\left\|\widehat{f}\right\|_C = \|f\|_L .$$
Это свойство вытекает из того,
$$\left|\widehat{f}(\lambda)\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx;$$

3. $$\lim_{\lambda \to \infty} \widehat{f}(\lambda) = 0; \tag{61}$$

Еще одно свойство сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 24.1. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ выполнено*

1. $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

2. $\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} dt < \infty$.

Тогда
$$f(x) = v.p. \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap H^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1]$. Тогда
$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

[25]Вообще говоря, $f(x)e^{-i\lambda x}$ можно проинтегрировать и при менее жестких ограничениях на f.

Следствие. Пусть $f \in L(\mathbb{R}) \cap D(\mathbb{R})$. Тогда

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Теорема 24.2. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $f \in VB[-A, A]$ $\forall$ A,*

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Тогда

$$f(x) = v.p.\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 24.1. *Пусть $f, f' \in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Доказательство. Функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = C + \int\limits_0^x f'(t) dt.$$

Так как f интегрируема на $\mathbb{R}$, существует интеграл по $[0, \infty)$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = C + \lim_{x \to \infty} \int\limits_0^c f'(t) dt.$$

□

Теорема 24.3. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $f' \in L(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to \infty.$$

Доказательство. Вычислим

$$\widehat{f'}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) de^{-i\lambda x} = i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \widehat{f}(\lambda).$$

Отсюда

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \widehat{f'}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

по свойству (61). □

Замечание 24.1. Побочным результатом теоремы 24.3 стала формула для производной преобразования Фурье:

$$\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\widehat{f}(\lambda).$$

Следствие. Пусть $f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$, $k = 0, \dots, n$. Тогда

$$\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$$

и

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n\widehat{f}(\lambda).$$

Теорема 24.4. *Пусть $f \in L(\mathbb{R})$, $xf(x) \in L(\mathbb{R})$. Тогда $\widehat{f}(\lambda \in C^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Вычислим

$$\frac{d\widehat{f}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx. \tag{62}$$

Чтобы дифференцирование под знаком интеграла выше было законным, требуется, чтобы интеграл (62) сходился равномерно. Это выполнено по признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|(-ix)f(x)e^{-i\lambda x}\right| = \left|xf(x)\right|.$$

Поэтому соотношения выше верны и

$$(62) = -\widehat{ixf(x)}(\lambda) \in C(\mathbb{R}).$$

$\square$

Следствие. Пусть

$$f, xf, \dots, x^n f \in L(\mathbb{R}).$$

Тогда

1. $\widehat{f}(\lambda) \in C^n(\mathbb{R})$;
2. Справедлива формула

$$\frac{d^n\widehat{f}(\lambda)}{d\lambda^n} = (\widehat{-ix)^n f}(x)(\lambda).$$

Примеры применения

Итак, в силу написанного выше, n-ую производную $f(x)$ можно вычислять как

$$f^{(n)}(x) = \widehat{(i\lambda\widehat{f}(\lambda)}.$$

Это облегчает вычисления для некоторых сложных функций.

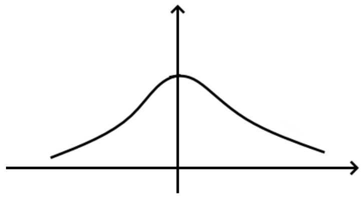

Рис. 24.1. Преобразование Фурье гладкой функции

Пусть дана достаточно гладкая функция. Чтобы хранить ее представление в компьютере, отрезок, на котором она определена, разбивается равномерной сеткой, значения на которой и заносятся в систему. Если отрезок велик, это создает проблемы (тратится много памяти).

Возьмем преобразование Фурье такой функции (рис. 24.1). Если функция очень гладкая, преобразование Фурье достаточно быстро стремится к 0, и, следовательно, отрезок, на котором требуется ввести сетку, будет не очень большим. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, можно восстановить обратную функцию (конечно, с небольшим искажением).

Замечание 24.2. Отметим, что современные преобразования Фурье более сложны, чем тригонометрические, которые мы рассматриваем. Общая же схема остается такой же.

Пример 24.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{1} e^{-i\lambda x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Заметим однако, что $f(x) = 0$, $|x| > 1$, и $f(x)$ интегрируема. Функция же $\widehat{f}(\lambda)$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману, и $\to 0$ медленно $\to \pm\infty$.

Здесь обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} d\lambda.$$

Пример 24.2. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Тогда

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{1 + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-|\lambda|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|}.$$

Обратно,

$$\widehat{e^{-|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\lambda x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Заметим, что $f(x) \sim o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, так как у $e^{-|x|}$ нет производной в одной точке. Будь $\widehat{f}$ гладкой, $f(x)$ стремилась бы к 0 быстрее.

Пример 24.3. Пусть

$$f(x) = e^{-ax^2}.$$

Тогда

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos \lambda x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}.$$

Итак,

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a^2}}.$$

Итак, мы видим, что даже в случае, когда функция $\to \infty$ достаточно быстро (как $\widehat{f}$), имеет смысл взять преобразование Фурье для нее (так как получившаяся f стремится к 0 тем быстрее, чем медленее стремится $\widehat{f}$).

Самым интересным является случай $a = 1/2$. Тогда

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

то есть преобразование Фурье ничего не делает с функцией.

Лекция 25. Приложения преобразования Фурье

Преобразование Фурье от свертки

Напомним, обсудили преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad f \in L(\mathbb{R}).$$

При определенных условиях[26] функция $f(x)$ восстанавливается по своему $\widehat{f}(\lambda)$:

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Если

$$f \in C^n(\mathbb{R}), \quad f, f', \ldots, f^{(n)} \in L(\mathbb{R}),$$

то

$$\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

и

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n \widehat{f}(\lambda).$$

Докажем теорему о преобразовании Фурье свертки двух функций.

Теорема 25.1. *Пусть* $f, g \in L(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Доказательство. Вычислим

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\lambda(u+t)} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\lambda u} du = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\lambda) \widehat{g}(\lambda).$$

□

[26] Смотри тему "Обратное преобразование Фурье".

Преобразование Фурье для уравнения колебаний

Поговорим о приложениях преобразований Фурье[27]

Рассмотрим *уравнение колебаний струны*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{t=0} = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x). \end{cases} \tag{63}$$

Здесь $u(t, x)$ описывает положение точки струны с координатой x в момент времени t.

Возьмем преобразование Фурье от уравнения (63):

$$\begin{cases} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} = \widehat{a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \\ \widehat{u\Big|_{t=0}} = \widehat{f} \\ \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}} = \widehat{g}. \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} = -a^2\lambda^2 \widehat{u} \\ \widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{f} \\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \widehat{g}. \end{cases} \tag{64}$$

Получаем дифференциально уравнение. Решая (64), получаем общее решение

$$\widehat{u} = A(\lambda)\cos a\lambda t + B(\lambda)\sin a\lambda t.$$

Подставляя в начальные условия (64) это представление, получим, что

$$A(\lambda) = \widehat{f}(\lambda), \quad B(\lambda) = \frac{\widehat{g}(\lambda)}{a\lambda}.$$

Итак, получаем, что

$$\widehat{u} = \widehat{f}(\lambda)\cos a\lambda t + \frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}\widehat{g}(\lambda).$$

Возьмем обратное преобразование Фурье[28]:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos a\lambda t e^{i(\lambda x - \lambda u)} du +$$

[27] Более подробно о них будет рассказано в курсе математической физики.

[28] Рассуждения ниже приведены без обоснования, так как строгое обоснование требует знания фактов, выходящих за рамки данного курса. Тем не менее, приведенные ниже рассуждения правдоподобны.

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}e^{i(\lambda x-\lambda u)}du = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos a\lambda t e^{i\lambda(x-u)}d\lambda}_{I_1} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}e^{i\lambda(x-u)}d\lambda}_{I_2}.$$

Вычислим

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\lambda(x-u-at)+\cos(x-u+at)\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\delta(x-u-at)+\delta(x-u+at)\right)du = \frac{1}{2}\left(f(x-at)+f(x+at)\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)du \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda(at-x+u)+\sin(at+x-u)\lambda}{a\lambda}d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\left(\frac{\pi}{a}(at-x+u)+\frac{\pi}{a}(at+x-u)\right)du = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(u)du.$$

Вернемся к уравнению (63). С учетом I_1, I_2 получаем, что

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+at)+f(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(u)du. \tag{65}$$

Проверим, что (65) – действительно[29] решение (63). Потребуем, чтобы

$$f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R}).$$

Проверим граничные условия (63) для (65):

$$u\Big|_{t=0} = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left(\frac{1}{2}\left(af'(x+at)-af'(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(ag(x+at)+ag(x-at)\right)\right)\Big|_{t=0} = g(x).$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}\left(f''(x+at)+f''(x-at)\right)+\frac{a}{2}\left(g'(x+at)-g'(x-at)\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x+at)+f''(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(g'(x+at)-g'(x-at)\right).$$

[29]Соображения, используемые для обратного преобразования выше, как уже было оговорено, не обоснованы в нашем курсе. С помощью них мы получили представление (65), а вот обосновать, что это – решение исходного уравнения колебания струны, сейчас можем строго.

Замечание 25.1. Схема выше, заметим, не самый оптимальный способ решения (63). Удобнее бы было работать, например, с заменой переменной.

Преобразование Фурье для уравнения теплопроводности

Рассмотрим теперь пример, когда воспользоваться преобразованием Фурье оптимально.

Рассмотрим *уравнение теплопроводности*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u\Big|_{t=0} = f(x) \end{cases} \tag{66}$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (66):

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2\lambda^2 \widehat{u} \\ \widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{f}(\lambda) \end{cases} \tag{67}$$

Решая (67), получим

$$\widehat{u}(\lambda, t) = A(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Из условия

$$\widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{f}(\lambda)$$

получим, что

$$A(\lambda) = \widehat{f}(\lambda).$$

Итак,

$$\widehat{u}(\lambda, t) = \widehat{f}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{68}$$

Найдем обратное преобразование Фурье для (68):

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\lambda, t) e^{-\lambda x} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda(x-u)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(x-u) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) du \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du. \tag{69}$$

Как и в примере выше, проверим, что (69) – решение уравнения (66). Пусть

$$f \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$u\Big|_{t=0} = \lim_{t\to+0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du = \lim_{t\to+0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} f(x)\sqrt{-\frac{2\pi t}{-\frac{1}{2a^2}}} = f(x).$$

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du + \frac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-u)^2 f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{24\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{(x-u)}{2a^2t} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du + \frac{1}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-u)^2 f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}du.$$

Лекция 26. Приложения преобразования Фурье. Преобразование суммы ряда

Приближенное значение суммы ряда (постановка задачи)

Напомним, работаем с преобразованием Фурье

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Если

$$f, f', \ldots, f^{(n)}, \ldots \in L(\mathbb{R}),$$

то

$$\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right), \quad \lambda \to \infty \; \forall \, n.$$

Вернемся к задаче, которую обсуждали еще в прошлом семестре. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Хотим, если получится, найти

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Точное значение S, конечно, вычислить удается не всегда. Что важнее, хотим найти N такое, чтобы приближенное значение

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n - S \right| < \varepsilon.$$

В некоторых даже не очень сложных ситуациях такое N велико. Например, N велико для

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

и для других.

Преобразование суммы ряда

Докажем теорему, которая позволяет вместо частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ рассматривать суммы более быстро сходящегося ряда.

Пусть $f, f', f'' \in L(\mathbb{R})$. Вычислим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(2\pi n) + f(2\pi(n+1))}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi f(2\pi n) - (-\pi) f(2\pi(n+1)) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\pi f(2\pi n) - (-\pi) f(2\pi(n+1)) - \int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x)dx\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\pi f(2\pi n) - (-\pi) f(2\pi(n+1)) - \int\limits_{0}^{2\pi} f(x+2\pi n)dx\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} (\pi - x) df(x+2\pi n) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} (\pi - x) f'(x+2\pi n)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} f'(x+2\pi n) d\frac{x^2 - 2\pi x}{4}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{x(x-2\pi)}{4} f'(x+2\pi n)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi+2\pi n} \varphi(x) f''(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f'')x_d x + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \tag{70}$$

Здесь $\varphi(x)$ – 2π-периодизация параболы $x(x-2\pi)/4$.

Вычислим коэффиценты ряда Фурье для $\varphi(x)$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2\pi x - x^2}{4}dx = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2\pi x - x^2}{4}\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2\pi x - x^2}{4} d\sin nx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx = \frac{1}{\pi n^2}\int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x) d\cos nx = -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\pi n^2}\int\limits_{0}^{\pi} \cos nx dx = -\frac{1}{n^2}.$$

Заменим в (70) φ на ее разложение в ряд Фурье:

$$(70) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2} f''(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}f''(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx. \tag{71}$$

Воспользуемся обратным интегрированием по частям:

$$(71) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{n^2}df'(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(x)\frac{\sin nx}{n}dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}df(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos nx dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos nx dx + \sum_{n=-\infty}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos nx dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos 0x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos nx dx - i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-inx}dx.$$

Итак, доказали следующую теорему.

Теорема 26.1. *Пусть* $f, f', f'' \in L(\mathbb{R})$*. Тогда*[30]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(2\pi n) = \sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n).$$

Пример 26.1. Рассмотрим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{2\pi n}{2\pi}\right)^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+1}e^{-inx}dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi nt}{t^2+1}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi e^{-2\pi|n|} = 2\pi e^{-2\pi}\frac{1}{1-e^{-2\pi}} + \pi = \pi\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \pi\mathrm{cth}\pi.$$

Заметим, что получившийся ряд легко считается. Это возможно не всегда, но преобразованный ряд обязательно будет сходится быстрее исходного.

[30]Эта формула называется *формулой суммирования Пуассона.*

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ