МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Числовые ряды

Введение

Главная цель курса – *расширить понятие функции.* На первом курсе в основном работали с элементарными функциями, потом – с параметрическими функциями, обратными функциями, наконец, с функциями, заданными неявно.

В этом году понятие функции расширится за счет предельного перехода. В частности, будут рассмотрены такие важные темы, как *функциональные ряды* (ряды из функций) и *интегралы, зависящие от параметра.* Начнем мы, конечно, с более простых тем: *числовые ряды* и *несобственные интегралы.* Некоторые понятия будут повторять рассказанное в предыдущих курсах.

Пример 1.1. Напомним, ранее изучали соотношения

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1}$$

и

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right). \tag{2}$$

Соотношение (2) является рядом.

Напомним, что было доказано существование предела (1), а затем значение такого предела было названо числом e. Для доказательства требовалось показать монотонность последовательности $(1+1/n)^n$. Это достаточно неочевидный факт.

Монотонность же выражения в правой части (2) очевидна. Это одно из преимуществ рядов.

Второе преимущество связано с точностью вычисления. Если вычислили e с некоторой заданной точностью, а потом это значение надо уточнить, в случае представления (1) вычисления придется производить заново. В случае (2), очевидно, вычисления можно просто продолжить, прибавив к уже полученному результату некоторое число новых слагаемых.

Понятие числового ряда

Определение 1.1. Пусть (a_n) – последовательность, $a_n \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Числовым рядом называется сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3}$$

Если для *частичных сумм* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

ряд (3) *сходится* и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Иначе (3) называетс *расходящимся рядом.*

По определению (вычисляя предел последовательности частичных сумм) ряды вычисляются редко.

Пример 1.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1. \tag{4}$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \;\to\; \frac{1}{1 - q}, \quad n \to \infty.$$

Выясним, насколько быстро этот ряд сходится:

$$|S_n - S| = \frac{|q|^{n+1}}{|1 - q|} < \varepsilon,$$

если $n > N$, где

$$N = \log_{|q|} \left(\varepsilon |1 - q|\right).$$

Запишем теперь ряд (4), используя представление $q = re^{ix}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} = \frac{1}{1 - re^{ix}}.$$

Выделив действительную и мнимую части ряда (4), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2},$$

$$1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

Сумма ряда из первых разностей

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1},$$

$$\Delta(\Delta a_k) = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$$

Пусть (a_n) такова, что $\exists$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Вычислим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta a_n$. Здесь

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \;\to\; a_1 - a.$$

В частности, если $a = 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n = a_1.$$

Пример 1.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n = 1, \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

Оценим точность приближения:

$$|S_n - S| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

если $n > N$, $N = 1/\varepsilon$. Это гораздо медленнее, чем сходимость ряда (4).

Ряд обратных квадратов

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится, и вычислим его сумму.

Положим

$$a_n = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx}. \tag{5}$$

Вычислим первую разность последовательности (a_n). Обозначим

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx, \quad J_n = \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx. \tag{6}$$

Найдем реккурентные соотношения для интегралов (6).

$$I_n = \cos^{2n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} (2n-1) \cos^{2n-2} x \sin^2 x dx = (2n-1)\left(I_{n-1} - I_n\right),$$

откуда

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

Теперь,

$$J_n = x^2 \cos^{2n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} (2n-1) x^2 \cos^{2n-2} x \sin^2 x dx -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} 2x \cos^{2n-1} x \sin x dx = (2n-1)\left(J_{n-1} - J_n\right) + \frac{1}{n} \int\limits_0^{\pi/2} x d \cos^{2n} x =$$

$$= (2n-1)\left(J_{n-1} - J_n\right) - \frac{I_n}{n},$$

откуда

$$J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1} - \frac{I_n}{2n^2}.$$

Тогда

$$\frac{J_n}{I_n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{J_{n-1}}{\frac{2n-1}{2n} I_{n-1}} - \frac{1}{2n^2},$$

то есть (5) можно записать как

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{2n^2}, \quad \Delta a_{n-1} = \frac{1}{2n^2}.$$

Заметим, что $\Delta a_n \geq 0$, откуда $a_n \geq a_{n+1}$, а значит, $a_n \searrow$. Так как, кроме того, $a_n \geq 0$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \geq 0$.

Для $\forall$ n $a_n \geq n$. Оценим

$$(a - a_n) I_n = \int\limits_0^{\pi/2} (a - x^2) \cos^{2n} x dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/n} (a - x^2) \cos^{2n} x dx + \int\limits_{1/n}^{\sqrt{a}} (a - x^2) \cos^{2n} x dx + \int\limits_{\sqrt{a}}^{\pi/2} (a - x^2) \cos^{2n} x dx. \tag{7}$$

Если получилось так, что a велико, то вместо 2 и 3 интеграла в (7) возьмем просто $\int\limits_{1/n}^{\pi/2} \ldots dx$. Тогда для $n > N_1$, где $N_1 = \sqrt{2/a}$, верно

$$(a - a_n) I_n > \frac{a}{2} \int\limits_0^{1/n} \cos^{2n} x dx - \int\limits_{\sqrt{a}}^{\pi/2} s^2 \cos^{2n} x dx > \frac{a}{2n} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\cos\sqrt{a}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{a}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Отсюда $a_n < a$ $\forall$ $n > N_1$.

Итак,

$$\Delta a_{n-1} = \frac{1}{2n^2}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_{n-1} = a_0 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Нахождение точного значения суммы ряда может быть сопряжено с трудностями. Напомним, что

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \exists \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Задачу о сходимости ряда бывает решить гораздо проще. Отметим, что решение этой задачи зачастую связано с заданием алгоритма, который вычисляет сумму ряда с заданной точностью. Таким образом, решение задачи о сходимости ряда не сильно уступает по эффективности задаче вычисления S.

Лекция 2. Исследование сходимости числовых рядов

Линейная комбинация рядов

Будем говорить о сходимости числовых рядов. Иными словами, есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Нужно выяснить, существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Пусть, кроме того, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda A + \mu B.$$

Доказательство. По условию, ряды сходятся, то есть

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \to \ A, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \ \to \ B, \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$\lambda A_n + \mu B_n \ \to \ \lambda A + \mu B.$$

□

Остаток ряда

Определение 2.1. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Остатком ряда* называется

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Теорема 2.2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ остаток ряда $r_m \ \to \ 0$, $m \to \infty$.*

Доказательство. Обозначим частичные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad R_n = \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Тогда для фиксированного m $S_n = S_m + R_n$. Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \text{ сходится}.$$

Пусть $S_n \to S$. Тогда

$$r_m = S - S_m \to 0, \quad m \to \infty.$$

□

Пример 2.1. 1. Остаток ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1,$$

имеет вид

$$r_m = \frac{q^{m+1}}{1-q}.$$

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

имеет остаток вида

$$r_m = \frac{1}{m+1}.$$

3. Для остатка ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

справедлива оценка

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{m}.$$

Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема 2.3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $a_n \to 0$.

Доказательство. Представим

$$a_n = -\Delta S_{n-1} = S_n - S_{n-1} \to 0.$$

□

Следствие. Если $a_n \to 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 2.2. 1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| \geq 1,$$

расходится. В частности, при $q = -1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ расходится.

2. Ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx}$$
расходится $\forall\ x$.

3. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \quad x \neq \pi k,$$
расходится. Действительно, предположим, что $\sin nx \to 0$ и $\sin(n+1)x \to 0$. Но
$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$
откуда получаем, что, если $\sin nx \to 0$ и $\sin(n+1)x \to 0$, то и $\cos nx \to 0$. Противоречие.

Критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная сходимость

Теорема 2.4. *(Критерий Коши) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ выполнено*
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Следут из того, что
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n.$$
Далее остается применить критерий Коши для числовых последовательностей. □

Определение 2.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Следующая теорема является одним из главных методов исследования ряда на сходимость.

Теорема 2.5. *Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*[1]

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$
так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. □

[1] То есть асболютная сходимость является более сильным условием, чем просто сходимость.

Исследование сходимости обобщенного гармонического ряда

Лемма 2.1. *Пусть* $x \in (0,1)$, $p > 0$. *Тогда*

$$(1-x)^{-p} > 1 + px. \tag{8}$$

Доказательство. Для начала перенесем px в левую часть (8):

$$p(1-x)^{-p-1} > p.$$

Сократив на p, получим

$$(1-x)^{-p-1} > 1,$$

что, очевидно, выполняется в условиях леммы. □

Теорема 2.6. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leq 1$.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Покажем, что

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right).$$

Умножив обе части на n^{p-1} и $p-1$, получим эквивалентное неравенство

$$\frac{p-1}{n} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} - 1,$$

которое, в свою очередь, эквивалетно

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-(p-1)} > 1 + \frac{p-1}{n}.$$

Это неравенство выполнено в силу утвреждения леммы 2.1.

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^p} < \frac{1}{p-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \Delta a_{k-1}, \quad a_k = \frac{1}{k^{p-1}}.$$

Как следствие,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^p} < \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}} < \varepsilon,$$

откуда $N = \frac{1}{((p-1)\varepsilon)^{1/(p-1)}}$. Заметим, что значение N показывает, сколько членов ряда надо вычислить, чтобы получить значение суммы с заданной точностью ε. При, например, $p = 3/2$ значение N достаточно велико.

Пусть теперь $p \leq 1$. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2},$$

то есть по критерию Коши (его отрицанию) ряд $\sum \frac{1}{n^p}$, $p \leq 1$, расходится. □

Исследование сходимости ряда с логарифмом

Теорема 2.7. *Ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leq 1$.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Покажем, что справедливо неравенство

$$\frac{1}{n \ln^p n} < \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{\ln^{p-1}(n-1)} - \frac{1}{\ln^{p-1} n} \right).$$

Домножим это неравенство на $\ln^{p-1}(n-1)$ и $\ln^{p-1} n$. Получим эквивалентное исходному

$$\frac{p-1}{n \ln n} < \left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)} \right)^{p-1} - 1,$$

которое можно записать как

$$\left(\frac{\ln(1-1/n)}{\ln n} \right)^{-(p-1)} > 1 + \frac{p-1}{n \ln n}. \tag{9}$$

Из неравенства

$$-\ln(1-1/n) > \frac{1}{n}.$$

и утверждения леммы (2.1) следует неравенство (9).

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 2.6. Возьмем

$$a_k = \frac{1}{\ln^{p-1} k}.$$

Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k \ln^p k} < \frac{1}{p-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \Delta a_{k-1} < \frac{1}{p-1} \frac{\ln^{p-1} n}{<} \varepsilon.$$

Здесь $N = e^{\frac{1}{((p-1)\varepsilon)^{1/(p-1)}}}$.

Пусть теперь $p \leq 1$. Оценим

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}} \frac{1}{k \ln^p k} > \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}} \frac{1}{n \log_2 k} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{n+m-1}+1}^{2^{n+m}} \frac{1}{k \log_2 k} > \frac{1}{\ln 2} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{n+m-1}+1}^{2^{n+m}} \frac{1}{2^{n+m}(n+m)} >$$

$$> \frac{1}{2 \ln 2} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n+m} > \frac{1}{4 \ln 2}.$$

□

Расстановка скобок в ряде

В конечных суммах мы могли менять слагаемые местами любым образом. Обсудим, когда можно менять члены ряда в случае бесконечного числа слагаемых.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Хотим получить из него ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где

$$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$$

$$A_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n.$$

Теорема 2.8. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $\forall\ n_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что

$$\sum_{l=1}^{k} A_l = S_{n_k} \ \to\ S.$$

□

Лекция 3. Бесконечные произведения и их приложение

Расстановка скобок в ряде (продолжение)

Напомним, в прошлый раз установили следующий факт.

Теорема 2.8. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Здесь

$$A_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n, \quad 0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$$

При определенных условиях утверждение теоремы выше верно и в обратную сторону.

Теорема 3.1. *Пусть*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2. $\max\limits_{k}(n_k - n_{k-1}) < \infty$.

Тогда, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Заметим, что

$$S_{n_k} = \sum_{n=1}^{n_k} a_n \ \to \ S.$$

Фиксируем $n \in (n_k, n_{k+1})$. Тогда

$$|S_n - S_{n_k}| = \left|\sum_{m=n_k+1}^{n} a_m\right| \le (n_{k+1} - n_k) \max_{m\in(n_k, n_{k+1}]} |a_m| \ \to \ 0.$$

Следовательно, $S_n \ \to \ S$. □

Пример 3.1. В силу теорем выше, можем сгруппировать слагаемые следующего ряда по двое:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right). \tag{10}$$

Покажем, что ряд в правой части (10) сходится. По критерию Коши,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) < \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k-1}\right) =$$

$$= \sum_{k=2n+1}^{2n+2p}\Delta a_k < \frac{1}{2n} < \varepsilon, \quad a_k = \frac{1}{k}.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $sgn\, a_n = sgn\, a_m \ \forall\ n, m \in (n_k, n_{k+1}]$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Доказательство. Если знак равен «+», то

$$S_{n_k} \le S_n \le S_{n_{k+1}}, \quad n \in (n_k, n_{k+1}],$$

а если знак «-», то

$$S_{n_k} \ge S_n \ge S_{n_{k+1}}.$$

Так как S_{n_k} и $S_{n_{k+1}} \to S$, то и $S_n \ \to\ S$ по лемме о зажатой последовательности. □

Понятие бесконечного произведения. Его сходимость

Определение 3.1. Пусть $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (или $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). *Бесконечным произведением* называется

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot$$

Частичное произведение определяется как $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* и $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 3.2. Пусть $a_n \to 1$. Рассмотрим произведение, состоящее из первых отношений (по аналогии с первыми разностями для рядов):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Его частичные произведения

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} \ \to\ a_1.$$

Поэтому $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n/a_{n+1} = a_1$.

Аналогично можно показать, что если $a_n \to a$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a}.$$

Пример 3.3. Рассмотрим

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{n-1}{n}, \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}.$$

Теорема 3.3. *Пусть* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Доказательство. Так как по условию $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{n-1} = P \neq 0.$$

Отсюда $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{P_n/P_{n-1}}_{a_n} = 1.$$

□

Теорема 3.4. *Пусть* $a_n > 0$. *Тогда* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ *сходится. В случае, если они сходятся,*

$$P = e^S, \quad P = \prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n.$$

Доказательство. Оба утверждения теоремы следуют из записи

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = e^{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} a_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k}.$$

□

Представление некоторых функций в виде бесконечных произведений

Теорема 3.5.

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2 (2n-1)^2}\right),$$

Лемма 3.1.

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = P_k(\sin^2 x), \tag{11}$$

$$\frac{\cos(2k+1)x}{\cos x} = Q_k(\sin^2 x), \tag{12}$$

где P_k и Q_k – многочлены.

Доказательство. 1. Очевидно, при $k = 0$ утверждение леммы верно.

2. Пусть верно для $n < 2k+1$. Перейдем к случаю $2k+1$. Здесь

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2k-1)x\cos 2x + \cos(2k-1)x \sin 2x}{\sin x} =$$

$$= P_{k-1}(\sin^2 x)\left(1 - 2\sin^2 x\right) + Q_{k-1}(\sin^2 x)2\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}$$

– многочлен от $\sin^2 x$. Аналогично,

$$\frac{\cos(2k+1)x}{\cos x} = \frac{\cos(2k-1)x\cos 2x}{\cos x} - \frac{\sin(2k-1)x\sin 2x}{\cos x} =$$

$$Q_{k-1}(\sin^2 x)\left(1 - 2\sin^2 x\right) - P_{k-1}(\sin^2 x)2\sin^2 x$$

– многочлен от $\sin^2 x$.

$\square$

Доказательство. (Теорема 3.5) Заметим, что $\sin^2 x \in [0,1]$. Убедимся, что корни многочлена $P_k(\sin^2 x)$ (11) также $\in [0,1]$:

$$\sin(2k+1)x = 0 \iff x = \frac{\pi n}{2k+1}.$$

Тогда $\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}$ – корни многочлена P_k.

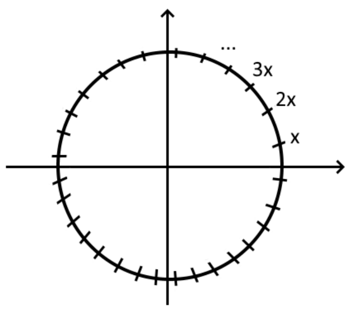

Рис. 3.1. Расположение $x = \pi n/(2k+1)$ на единичной окружности

Поймем, сколько таких различных чисел. Заметим, что $n \neq 0$, потому что иначе знаменатель (11) обращается в 0. В остальных случаях для $\forall\ n$ $\sin \frac{\pi n}{2k+1}$ лежат на единичной окружности (рис. 3.1), причем нижняя половина окружности нас не интересует, так как при возведении в 2 степень мы получаем одинаковые значения. Аналогично, можем отбросить левую верхнюю четверть. Итак, $1 \leq n \leq k$.

Вернемся к (11). Многочлен раскладывается на следующие множители:

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = C\prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right). \tag{13}$$

Положим в (13) $(2k+1)x = t$. Получим

$$\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2k+1}} = C\prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right). \tag{14}$$

В (14) подставим $t = 0$. Отсюда

$$2k+1 = C.$$

Итак, мы доказали первую часть следующей леммы.

Лемма 3.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{\sin t}{(2k+1)\sin\frac{t}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\cos t}{\cos\frac{t}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi/2+\pi n}{2k+1}}\right). \tag{16}$$

Соотношение (16) доказывается аналогично.

Продолжим (15). Для некоторого m (произвольного) запишем

$$(15) = \underbrace{\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right)}_{A_m}\underbrace{\prod_{n=m+1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right)}_{B_m}.$$

Перейдем к пределу при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin t}{(2k+1)\sin\frac{t}{2k+1}} = \frac{\sin t}{t}.$$

Далее,

$$\lim_{k\to\infty} A_m = \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} B_m$ существует, поскольку пределы A_m и $\frac{\sin t}{(2k+1)\sin\frac{t}{2k+1}}$ существуют и известны.

Заметим, что[2]

$$\prod_{n=1}^{k}(1+x_n) \geq 1+\sum_{m=1}^{k}x_n,$$

[2]Неравенство Бернулли.

где $x_n > -1$ и одного знака. Кроме того, напомним неравенство

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x.$$

Возьмем некоторое $m > t^4$. Тогда

$$1 \geq \prod_{n=m+1}^{k}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}}\right) \geq 1 - \sum_{n=m+1}^{k} \frac{\sin^2 \frac{t}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{n=m+1}^{k} \frac{\left(\frac{t}{2k+1}\right)^2}{\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2 n^2}{(2k+1)^2}} = 1 - \sum_{n=m+1}^{k} \frac{t^2}{4n^2} > 1 - \frac{t^2}{4m} > 1 - \frac{1}{4\sqrt{m}}.$$

Итак, показали, что

$$1 - \frac{1}{4\sqrt{m}} < B_m < 1.$$

Отсюда

$$1 - \frac{1}{4\sqrt{m}} \leq \lim_{k\to\infty} B_m \leq 1. \tag{17}$$

Итак, получили, что

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)\lim_{k\to\infty} B_m.$$

Возьмем предел при $m \to \infty$:

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

так как из (17) получаем

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty} B_m = 1.$$

$\square$

Лекция 4. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Теорема о перестановке членов знакопостоянного ряда

Напомним, что, если не оговорено другое, рассматриваются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0.$$

Ранее доказали следующее важнейшее утверждение.

Теорема 3.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ *последовательность частичных сумм* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничена.*

Везде далее факт сходимости ряда будем обозначать как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, а факт расходимости как $\sum\limits_{n=1}^{+} \infty a_n = +\infty$.

Кроме того, ранее показали, что

Теорема 2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, *где* $A_n = \sum\limits_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n$, $\forall\ (n_k)$.

Пусть

$$\sigma :\ \mathbb{N}\ \to\ \mathbb{N}$$

– биекция. Такое отображение называется *перестановкой*. Обсудим сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. *Тогда* $\forall\ \sigma$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} < +\infty$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Обозначим $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Так как по договоренности все рассматриваемые ряды – знакопостоянные, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le S$. Тогда $\forall\ \sigma$, $\forall\ n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \le \sum_{k=1}^{\max\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}} a_k \le S.$$

Отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} < +\infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \le S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Воспользовавшись обратной перестановкой, можно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

□

К знакопостоянным рядам применимы те же процедуры, что и к конечным рядам: можно как угодно расставлять скобки и можно переставлять слагаемые местами.

Связь абсолютной и безусловной сходимости

Определение 4.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с произвольными a_n называется *абсолютно сходящимся*, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Определение 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *безусловно сходящимся*, если $\forall\ \sigma$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится.

Теорема 4.2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *сходится абсолютно. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ *сходится безусловно и* $\forall$ σ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, откуда по теореме 4.1 получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно.

Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Для $\forall\ \sigma\ \exists$ номер K такой, что

$$\left\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(K)\right\} \supset \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Оценим

$$\left|\sum_{n=1}^{K} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{K} a_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\sum_{n=N+1}^{\max\{\sigma(1),\ldots,\sigma(K)\}}}_{\text{с пропусками}}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \le 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < 2\varepsilon.$$

□

Признак сравнения

Теорема 4.3. *Пусть* $0 < a_n \le b_n$. *Тогда*

1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то подследовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничена, то $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ тоже ограничена, а значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Аналогично, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ неограничена, а значит, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \ge \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ также неограничена, и, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

Теорема 4.4. *Пусть*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{18}$$

Тогда

1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. Возьмем частичные произведения (18). Получим, что

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

Мы попадаем в условия теоремы 4.3. □

Замечание 4.1. Теорема 4.4 говорит следующее. Вместо того, чтобы сравнивать члены ряда (как в теореме 19), можно сравнивать скорость их убывания.

Асимптотический признак сравнения

Теорема 4.5. *Пусть* $a_n \asymp b_n$, *то есть* $\exists\ C_1, C_2 > 0$ *такие, что* $\forall\ n$

$$C_1 a_n \le b_n \le C_2 a_n. \tag{19}$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*

Доказательство. Доказательство следует из утверждения теоремы 4.3 и соотношения (19) из условия. □

Теорема 4.6. *Пусть* $a_n \sim b_n$, *то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится.*

Доказательство. Условие $a_n \sim b_n$ означает, что $\exists$ номер N такой, что $\forall\ n > N$ верно

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}.$$

Эта в точности (19) с конкретными C_1 и C_2. Утверждение теоремы следует из теоремы 4.5. □

Признак Даламбера

Если выполнено соотношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q > 0,$$

последовательность a_n является геометрической прогрессией. Сформулируем признаки сходимости для случаев, когда последовательность членов ряда похожа, но не является геометрической прогрессией.

Теорема 4.7. *(Признак Даламбера) Пусть*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} < +\infty$.

Если же

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = +\infty$.

Доказательство. 1. Пусть

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1.$$

Условие означает, что $\exists\ \delta > 0$ такое, что $q + \delta < 1$. Тогда $\exists$ номер N такой, что $\forall\ n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \delta = \frac{(q+\delta)^{n+1}}{(q+\delta)^n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (q+\delta)^n < \infty$. Тогда сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (по теореме 4.3).

2. Обозначим

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

$\exists\ \delta > 0$ такое, что $q - \delta > 1$. Тогда $\exists\ N$ такой, что $\forall\ n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \delta = \frac{(q-\delta)^{n+1}}{(q-\delta)^n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (q-\delta)^n = +\infty$, а значит, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (по признаку сравнения).

$\square$

Признак Коши

Соотношение $\sqrt[n]{a_n} = q$, очевидно, тоже описывает геометрическую прогрессию.

Теорема 4.8. *(Признак Коши) Пусть*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{20}$$

Тогда, если $q < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Если же $q > 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Тогда $\exists\ \delta > 0$ такое, что $q + \delta < 1$. $\exists$ номер N такой, что $\forall\ n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \delta,$$

то есть

$$a_n < (q+\delta)^n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (q+\delta)^n < \infty$. По признаку сравнения, тогда сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Пусть $q < 1$. $\exists\ \delta > 0$ такое, что $q - \delta > 1$. Так как предел в условии (20) – частичный, $\exists\ n_k$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q.$$

Иными словами, $\exists\ K$ такое, что $\forall\ k > K$

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > (q - \delta),$$

то есть
$$a_{n_k} > (q-\delta)^{n_k} > 1.$$
Тогда $a_n \not\to 0$.

□

Замечание 4.2. Признак Коши чуть лучше признака Даламбера, поскольку a_n не обязано быть регулярным (в признаке Даламбера условие накладывалось на соотношение соседних членов ряда).

Теорема Гаусса

Вернемся к последовательностям, которые обсуждалии ранее. Пусть
$$a_n = \frac{1}{n^p}.$$
Тогда, очевидно,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$
Признаки Даламбера и Коши с такой последовательностью справиться не могут.

Следующие два признака связаны с тем, сколь близко отношение a_{n+1}/a_n к 1.

Теорема 4.9. *(Гаусса) Пусть*
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad p \in \mathbb{R}.$$
Тогда $\exists\, C \neq 0$ *такое, что* $a_n \sim \frac{C}{n^p}$.

Доказательство. Хотим показать, что $\exists$
$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p \neq 0.$$
Это верно $\iff$
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^p}{a_{n+1}(n+1)^p} \text{ сходится.}$$
В свою очередь, это верно $\iff$ сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{a_n n^p}{a_{n+1}(n+1)^p}. \qquad (21)$$
Воспользуемся признаком сравнения (4.6). Получим асимптотику для (21):
$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Отсюда (21) сходится.

□

Признак Бертрана

Теорема 4.10. *(Бертрана) Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n \ln^2 n}\right).$$

Тогда $\exists\ C \neq 0$ *такое, что*

$$a_n \sim \frac{C}{n \ln^p n}.$$

Доказательство. Необходимо показать, что $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} a_n n \ln^p n \neq 0.$$

Это верно $\iff$ сходится произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{a_n n \ln^p n}{a_{n+1}(n+1)\ln^p(n+1)}.$$

Такое произведение сходится $\iff$ сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{a_n n \ln^p n}{a_{n+1}(n+1)\ln^p(n+1)}.$$

Здесь

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - p \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{p}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right) - \frac{1}{n} - p\ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n \ln^2 n}\right).$$

$\square$

Итак, мы доказали два признака, связанных с асимптотикой отношения a_n/a_{n+1}. Заметим, что существуют и другие признаки такого типа.

Лекция 5. Знакопеременные ряды. Теорема Римана

Теорема Коши о разряжении

Итак, на прошлой лекции мы рассмотрели признаки Гаусса и Бертрана, которые позволяют работать с рядами, общий член которых $a_n \sim \frac{1}{n^p}$ или $a_n \sim \frac{1}{n \log_2^p n}$.

Теорема 5.1. *(Коши о разряжении) Пусть $a_n \searrow$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.*

Доказательство. Очевидно, будем рассматривать только $a_n \searrow 0$. Выберем $n_k = 2^k$. Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n.$$

Оценим A_k:

$$\frac{1}{2} 2^k a_{2^k} \leq (n_k - n_{k-1})\, a_{n_k} \leq A_k \leq (n_k - n_{k-1})\, a_{n_{k-1}} = 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Тогда

$$\sum A_k < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty,$$

хотя, конечно, суммы этих рядов совпадать не будут. □

Пример 5.1. 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} < \infty.$$

Ряд в правой части, очевидно, это сумма геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^k$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2^p n}$ сходится $\iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{2^k}{\log_2^p 2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Теорема об отсутствии оптимального расходящегся ряда

Теорема 5.2. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n / S_n^p$ сходится при $p >$ и расходится при $p \leq 1$.*

Доказательство. Возьмем $p > 1$. Напомним, что ранее нами было доказано неравенство

$$(1-x)^{-p} > 1 - px, \quad x \in (0,1), p > 0. \tag{22}$$

Покажем, что

$$\frac{a_n}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right).$$

Запишем неравенство выше в виде

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right).$$

Умножив обе части на $p-1$, получим

$$\frac{(p-1)\left(S_n - S_{n-1}\right)}{S_n} < \frac{S_n^{p-1}}{S_{n-1}^p} - 1,$$

откуда получаем

$$1 + \frac{(p-1)\left(S_n - S_{n-1}\right)}{S_n} < \left(1 - \left(-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)\right)^{(-p-1)}.$$

Получили как раз неравенство (22), где $p-1>0$, а $x = 1 - S_{n-1}/S_n$ (так как последовательность монотонна, $1 - S_{n-1}/S_n$ меньше 1).

Воспользуемся критерием Коши:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{S_k^p} < \frac{1}{p-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{S_{k-1}^{p-1}}{-}\frac{1}{S_k^p}\right) < \frac{1}{(p-1)}\frac{1}{S_n^{p-1}} < \varepsilon$$

тогда и только тогда, когда

$$S_n > \frac{1}{((p-1)\varepsilon)\,\frac{1}{p-1}}.$$

Заметим, что число в правой части неравенства выше достаточно большое.

Пусть теперь $p \leq 1$. Так как S_n неограничена, $\exists\ n > N$, где некоторое N задано, такое, что $S_n > 1$. Кроме того, $\exists\ m\ S_{m+n} > 2S_n$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{S_k^p} \geq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{S_k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{S_{n+m}} =$$

$$= \frac{1}{S_{n+m}}\left(S_{n+m} - S_n\right) \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+m}} > \frac{1}{2}.$$

□

Пример 5.2. 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Здесь $S_n \sim \ln n$. Из теоремы 5.2 следует, что $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2. Возьмем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Здесь $S_n \sim \ln\ln n$. Из теоремы 5.2 следует, что $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Теорема

Теорема 5.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $r_{n-1} = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \ \to\ 0.$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^p}$ *сходится при* $p<1$ *и расходится при* $p \geq 1$.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 5.3, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $x \in (0,1)$, $p \in (0,1)$. *Тогда*

$$(1-x)^p < 1 - px. \tag{23}$$

Доказательство. При $x = 0$ (23) обращается в равенство. Продифференцировав (23), получим

$$-p(1-x)^{p-1} < -p.$$

Такое неравенство равносильно соотношению

$$(1-x)^{p-1} > 1,$$

которое, очевидно, выполняется, так как малое $(1-x)$ берется в отрицательной степени. □

Доказательство. (Теорема 5.3) Пусть $0 < p < 1$. Докажем, что

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{r_n^{p-1}} - \frac{1}{r_{n-1}^{p-1}}\right). \tag{24}$$

Так как r_n – убывающая последовательность, $1/r_n$ – возрастающая, а значит, правая часть (24) положительна.

Домножим (24) на $p-1$ и r_{n-1}^{p-1}. Получим эквивалентное соотношение

$$\frac{(p-1)(r_{n-1}-r_n)}{r_{n-1}} < \frac{r_{n-1}^{p-1}}{r_n^{p-1}} - 1.$$

Его можно записать как

$$1-(p-1)\left(1-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right) < \left(1-\left(1-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)\right)^{-(p-1)}.$$

Это неравенство выполняется в силу (23).

Воспользуемся теперь критерием Коши. Справедлива оценка

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_n}{r_{n-1}^p} < \frac{1}{p-1}\sum_{k=n+1}^{m+1}\left(\frac{1}{r_k^{p-1}} - \frac{1}{r_{k-1}^{p-1}}\right). \tag{25}$$

Сложив все разности в правой части (25), можно убедиться, что критерий Коши выполнен для правого ряда (25) (а значит, и для левого ряда).

Пусть теперь $p \geq 1$. Оценим сумму

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_n}{r_{k-1}^p} \geq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_n}{r_{k-1}} \geq$$

$$\geq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{a_k}{r_n} = \frac{r_n - r_{n+m}}{r_n} = 1 - \frac{r_{m+n}}{r_n}.$$

Так как $r_n \to 0$, начиная с некоторого номера N соотношение $\frac{r_{m+n}}{r_n}$ станет $< 1/2$. $\square$

Знакопеременные ряды

Откажемся теперь от условия $a_n > 0$. Это значит, что мы отказываемся и от того, что S_n ограничена $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обсудим, какие возможны ситуации.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, тогда и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
3. $a_n \to 0$, но медленно, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Определим

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leq 0 \\ 0, & a_n > 0 \end{cases}$$

Будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Определение 5.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно*, если

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Теорема 5.4. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.*

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда и ряда из модулей в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^-;$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} |a_k|\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^- = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

□

Теорема Римана

Теорема 5.5. *(Римана) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда* $\forall\ S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists$ *перестановка*

$$\sigma:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S.$$

Доказательство. 1. Пусть $S \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty.$$

Тогда $\exists$ номер n_1^+ такой, что

$$\sum_{n=1}^{n_1^+-1} a_n^+ < S < \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+.$$

Другими словами, n_1^+ – первый номер, при котором сумма будет больше S. Дальше, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty.$$

Тогда $\exists$ номер n_1^- такой, что

$$\sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^- < S < \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^- -1} a_n^-.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, на k шаге получим, что $\exists\ n_k^+$ такое, что

$$\sum n = 1^{n_k^+ - 1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_{k-1}^-} a_n^- < S < \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^- - 1} a_n^-,$$

и $\exists\ n_k^-$ такое, что

$$\sum n = 1^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^-} a_n^- < S < \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^- - 1} a_n^-.$$

Итак, построили последовательность $\{n_k^-\}$, $\{n_k^+\}$. Запишем теперь

$$\sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^- + \sum_{n=n_1^+ + 1}^{n_2^+} a_n^+ - \sum_{n=n_1^- + 1}^{n_2^-} + \ldots +$$

$$+ \sum_{n=n_{k-1}^+ + 1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=n_{k-1}^- + 1}^{n_k^-} a_n^- + \ldots \tag{26}$$

Оценим частичную сумму ряда (26), заканчивающуюся на положительной группе слагаемых:

$$0 > S - \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ + \sum_{n=1}^{n_{k-1}^-} a_n^- > -a_{n_k}^+.$$

Так как исходный ряд $\sum a_n$ сходится условно, $a_{n_k}^+$ при $n \to \infty$ мало. Получаем, что частичные суммы ряда (26) $\to S$.

Аналогично, когда частичная сумма ряда (26) заканчивается на отрицательной группе слагаемых.

2. Случай $S = +\infty$ ($S = -\infty$) остается в качестве упражнения.

$\square$

Лекция 6. Признаки сходимости знакочередующихся рядов

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Напомним, что сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, называется *условно сходящимся.*

Самый простой вид знакопеременных рядов – это знакочередующиеся ряды.

Теорема 6.1. *(Признак Лебница) Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *и* $b_n \searrow 0$ *(будем считать, что* $b_n \geq 0$*). Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *сходится.*

Замечание 6.1. Если члены ряда из теоремы 6.1 убывают достаточно быстро, ряд сходится абсолютно. Интересен же случай, когда b_n убывают достаточно медленно.

Доказательство. (Теорема 6.1) Прежде, чем приступить к доказательству, обсудим следующую ситуацию. Пусть $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ и так далее,

$$a_{2k-1} > 0, \quad a_{2k} < 0 \ \forall \ k,$$

и $|a_k| \searrow 0$. Тогда a_2 почти компенсирует a_1 и так далее, за счет чего сумма ряда получается конечной. Суммы же отрицательной и положительной частей ряда могут быть огромными.

Распишем ряд из условия как

$$(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_{2k-1}.$$

Там как $b_n \searrow 0$, можем расставить круглые скобки произвольным образом. Сходимость полученного ряда эквивалентна сходимости исходного ряда.

Так как b_n монотонно убывает,

$$0 \leq \Delta b_{2k-1} \leq \Delta b_{2k-1} + \Delta b_{2k}, \quad \Delta b_{2k} = b_{2k} - b_{2k+1}. \tag{27}$$

Рассмотрим ряд

$$((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3)) + ((b_3 - b_4) + (b_4 - b_5)) + \ldots =$$

$$= \sum k = 1^{\infty} \left(\Delta b_{2k-1} + \Delta b_{2k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta b_n = b_1.$$

Тогда в силу оценки (27) сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Delta b_{2k-1}$, а, значит, и исходный ряд. $\square$

Следствие.

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \le b_1.$$

Кроме того,

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_k\right| \le b_{n+1}.$$

Замечание 6.2. При работе с рядами из теоремы 6.1 удобнее расставить скобки, то есть рассматривать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{\infty}\Delta b_{2k-1}. \tag{28}$$

Тождество Абеля. Теорема

Иногда бывает удобно разбить члены ряда на произведение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n.$$

Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $S_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(S_k - S_{k-1}\right)b_k = \sum_{k=1}^{n}S_k b_k - \sum_{k=1}^{n}S_{k-1}b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1}S_k b_{k+1} = S_n b_n - \underbrace{S_0 b_1}_{=0} + \sum_{k=1}^{n-1}S_k\Delta b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1}S_k\Delta b_k.$$

Из такого представления вытекает следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}S_n b_n$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$ *сходится. В случае сходимости*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n + \lim_{n\to\infty}S_n b_n.$$

Замечание 6.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\Delta b_n$ называется *преобразованным по Абелю.*

Вернемся к ряду вида из признака Лейбница (теорема 6.1). Здесь $a_n = (-1)^{n+1}$. Тогда последовательность частичных сумм a_n имеет вид

$$S_n = \{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}.$$

Заметим, что $\sum S_n$, конечно, возрастает. Можно сказать, что такие суммы несильно растут.

Кроме того, в условиях признака Лейбница $b_n \searrow 0$ (b_n достаточно регулярна) и выполнено (28). По теореме 6.2 получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ сходится. Таким образом, возрастание сумм S_n компенсируется убыванием разностей Δb_n. Итак, в некоторых случаях преобразованный по Абелю ряд начинает вести себя лучше (была условная сходимость, стала абсолютная).

Признак Дирихле

Теорема 6.3. *(Признак Дирихле) Пусть $\exists$ константа C такая, что*[3] $\forall\ n\ |S_n| \le C$, *а* $b_n \searrow 0$. *Тогда*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится;*
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$*;*
3. *Для остатка ряда справедлива оценка*

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k \right| \le 2Cb_{n+1}. \qquad (29)$$

Доказательство. Так как S_n ограничена, а b_n стремится к 0,

$$\lim_{n\to\infty} S_n b_n = 0,$$

выполнена теорема 6.2. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ сходится абсолютно:

$$|S_n \Delta b_n| \le C \Delta b_n,$$

а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C \Delta b_n$ сходится.

Итак, первые два пункта признака Абеля выполнены в сиу теоремы 6.2. Докажем оценку (29). Справедливо представление

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k = S_m b_m - S_n b_{n+1} + \sum_{n=1}^{m-1} S_k \Delta b_k.$$

[3]Здесь, как и ранее,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

Устремим в представлении выше $m \to \infty$ (так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, можем так сделать):

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k = -S_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} S_k \Delta b_k.$$

Наконец,

$$|r_n| \leq |S_n b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |S_k \Delta b_k| \leq C|b_{n+1}| + C \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta b_k = 2C b_{n+1}.$$

□

Пример 6.1. (Примеры $\{a_n\}$)

1. $\sin nx$;
2. $\cos nx$;
3. $\sin \sqrt{n}x$;

Пример 6.2. (Примеры $\{b_n\}$)

1. $\frac{1}{\sqrt{n}}$;
2. $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Признак Абеля

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обсудим, какой должна быть $\{b_n\}$, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходился.

Теорема 6.4. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $b_n \nearrow C$. Тогда*

1. *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится;*
2. *Верно следующее:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n + \lim_{n\to\infty} S_n b_n.$$

Доказательство. Покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Заметим, что $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} S_n b_n = \lim_{n\to\infty} S_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Справедлива оценка

$$|S_n \Delta b_n| \leq -M \Delta b_n.$$

Так как ряд из первых разностей Δb_n сходится абсолютно, то сходится и ряд $\sum S_n \Delta b_n$. По теореме 6.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Второй пункт вытекает из теоремы 6.2. □

Лекция 7. Перемножение рядов

Перемножение рядов по Коши

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Обсудим, как вычислить произведение

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Если бы ряды были конечными, произведение бы мы находили как сумму всевозможных произведений элементов a_k и b_k. В нашем случае запишем это в виде бесконечной матрицы

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{matrix} \tag{30}$$

От того, как мы упорядочим слагаемые в такой матрице, и будет зависеть конечный результат. Один из популярных способов связан со сложением прямоугольников.

Сейчас обсудим способ, связанный со сложением элементов по диагоналям (30).

Определение 7.1. *Произведением рядов*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

в смысле Коши называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$.

Теорема 7.1. *(Коши) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Доказательство. Оценим

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| = \sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\right| \le \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_{n+1-k}| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} |a_n||b_k| = \left(\sum_{k=1}^{N} |a_n|\right)\left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|\right) \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Заметим, что показали, что сходится не просто ряд

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \dots,$$

а ряд без группировки слагаемых

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_3 + a_3b_1 \ldots,$$

причем абсолютно. Это значит, что рассматриваемый ряд сходится безусловно. Тогда можно переставлять слагаемые в нем любым способом. Запишем его как

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_1b_3 + \ldots$$

(рис. 7.1). Частичная сумма такого ряда

$$S_{n^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

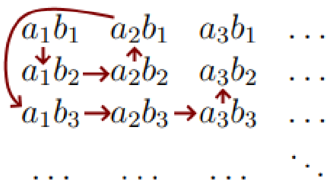

Рис. 7.1. Способ суммирования произведения рядов

Как следствие такого представления,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n^2}S_{n^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

□

Теорема Мертенса

В теореме 7.1 можно немного ослабить условие абсолютной сходимости рядов.

Теорема 7.2. *(Мертенса) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ *(сходится абсолютно),* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится*[4]*. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится*[5] *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

[4] Про абсолютную сходимость речь не идет.

[5] Теорема не гарантирует, каким именно образом сходится (есть ли абсолютная сходимость и т.д.), но гарантирует, что сходимость есть.

Доказательство. Обозначим

$$C_1 = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, его последовательность частичных сумм ограничена. Аналогично, обозначим

$$C_2 = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right|.$$

Так как $\sum b_n$ сходится, последовательность его частичных сумм также ограничена.

Обозначим, кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. $\exists\ N_1$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \ \forall\ n > N_1. \tag{31}$$

Кроме того, $\exists\ N_2$ такое, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon \ \forall\ n > N_2. \tag{32}$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ n > N$ выполняются оба неравенства (31), (32). Кроме того, $\forall\ n > N$

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon,$$

и $\forall\ n > N$, $\forall\ m$

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+m+1}^{\infty} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| + \left| \sum_{k=n+m+1}^{\infty} a_k \right| < 2\varepsilon.$$

Заметим, что можно поменять порядок суммирования в следующей сумме (так как слагаемых конечное число):

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_m b_{k+1-m} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=m}^{n} a_m b_{k+1-m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=m}^{n} b_{k+1-m} = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k.$$

Итак, получили представление

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_m b_{k+1-m} = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k.$$

Перейдем к основной части доказательства. Зафиксируем $n > 2N$. Преобразуем

$$\left|AB - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| = \left|AB - \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k\right| =$$

$$= \left|AB - \sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k - \sum_{m=N+1}^{n} a_m \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k\right|.$$

Здесь внешнюю сумму разбили на две части – там, где слагаемые a_m еще не очень маленькие и там где они уже малы (при $m > N$). Продолжим преобразования:

$$\left|AB - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| = \left|AB - \sum_{m=1}^{N} a_m B + \sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{k=n+2-m}^{\infty} b_k - \sum_{m=N+1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n+1-m} b_k\right| \le$$

$$\le |B|\left|A - \sum_{m=1}^{N} a_m\right| + \sum_{m=1}^{N} |a_m| \left|\sum_{k=n+2-m}^{\infty} b_k\right| + \sum_{m=N+1}^{n} |a_m| \left|\sum_{k=1}^{n+1-m} b_k\right| < \varepsilon|B| + \varepsilon C_1 + C_2 \cdot 2\varepsilon.$$

□

Приведем контрпример, чтобы показать, что в случае, когда ни один из рядов в произведении не имеет абсолютной сходимости, гарантировать сходимость произведения нельзя.

Пример 7.1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Этот ряд, очевидно, сходится условно.

Тогда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{33}$$

где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{(-1)^{n+1-k+1}}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n+3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}.$$

Заметим, что

$$|c_n| \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \not\to 0.$$

Так произошло, потому что оба ряда (33) сходились за счет компенсации знаков. Знаки же матрицы (30) устроены так, что на диагоналях знаки одинаковы и компенсации не происходит.

Лекция 8. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Несобственные интегралы

Обсудим основные понятия, связанные с темой несобствнных интегралов. Эта тема знакома слушателям по предыдущим курсам.

Определение 8.1. Пусть

1. $f \in R[a,b]\ \forall\ b > a$;
2. $\exists$ предел

$$\lim_{b} \to \infty \int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Тогда такой предел называется *несобственным интегралом*, а $f(x)$ называется *интегрируемой в несобственном смысле* (обозначение: $f \in \widetilde{R}[a,\infty)$).

Пример 8.1. (Примеры несобственных интегралов)

1. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left(e^{-x}\right)\Big|_0^b = 1$;
2. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$, $p > 1$. При $p \leq 1$ интеграл расходится.
3. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^p x} = \frac{1}{p-1}$, $p > 1$. При $p \leq 1$ интеграл расходится.

Несобственный интеграл от гауссовой функции

Приведем еще один пример несобственного интеграла. Вычислим *интеграл Эйлера – Пуассона*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx. \tag{34}$$

Замечание 8.1. Для того, чтобы вычислять (34) как предел конкретной подпоследовательности, нужно знать, что такой интеграл сходится. Сходимость мы покажем позднее.

Лемма 8.1. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ t \in [0,a]$ *справедливы оценки*

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t, \tag{35}$$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}, \tag{36}$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n}t^2e^{-t}. \tag{37}$$

Доказательство. Прологарифмируем (34):

$$n \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \le t \iff \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \le \frac{t}{n}.$$

Аналогично, для (36):

$$n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le -t \iff \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le -\frac{t}{n}.$$

Наконец, докажем (37). Вынесем в нервенстве e^{-t} за скобки:

$$e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \le e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n = e^{-t}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства Бернулли, примененного к $(1 - t^2/n^2)$:

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\frac{1}{n}\right)^n \ge 1-\frac{t^2}{n}.$$

$\square$

Применим неравенства из леммы 8.1, подставив x^2 вместо t. Неравенство (37) запишем как

$$0 \le e^{-x^2} - \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le \frac{1}{n}x^4 e^{-x^2}, \quad 0 \le x \le \sqrt{n}.$$

Тогда

$$0 \le \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx - \int\limits_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \le \underbrace{\frac{1}{n}\int\limits_0^{\sqrt{n}} x^4 e^{-x^2}dx}_{\to 0},$$

откуда по лемме о зажатой последовательности и средняя последовательность $\to 0$. Отсюда

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Выполним замену $x = \sqrt{n}\sin\varphi$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\varphi d\varphi = \lim n \to \infty\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

так как

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} =$$

$$= \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{-1}\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^{-1}\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Как следствие,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Исследование на сходимость несобственных интегралов

Формализуем ситуацию, в которой мы можем проверить функцию по определению 8.1.

Пусть
$$f(x) = F'(x), \quad F \in C^1[a, +\infty),$$
и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(+\infty)$. Тогда, как несложно показать,
$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$
В частности, если $F(+\infty) = 0$, то
$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = -F(a).$$

В случаях, если эти условия не выполнены, существуют другие механизмы определения, принадлежит ли f классу $\widetilde{R}[a, +\infty)$.

Теорема 8.1. *Пусть $f \in \widetilde{R}[a, +\infty)$. Тогда $f \in \widetilde{R}[b, +\infty)$ $\forall$ $b > a$ и остаток интеграла*
$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_b^\infty f(x)dx = 0.$$

Доказательство. Очевидно, справедливо представление
$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$$
Устремив $c \to \infty$, получим
$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^\infty f(x)dx,$$
откуда и следуют утверждения теоремы. □

Доказательство следующей теоремы следует из определения 8.1 и линейности предела.

Теорема 8.2. *Пусть $f, g \in \widetilde{R}[a, +\infty)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f + \mu g \in \widetilde{R}[a, +\infty)$ и*
$$\int\limits_a^\infty (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int\limits_a^\infty f(x)dx + \mu \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

Теорема 8.3. *(Критерий Коши)* $f \in \widetilde{[}a, \infty) \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ *такое, что* $\forall\, n > N$, $\forall\, p > 0$ *выполнено*

$$\left|\int\limits_n^{n+p} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как

$$\int\limits_n^{n+p} f(x)dx = \int\limits_a^{n+p} f(x)dx - \int\limits_a^{n} f(x)dx,$$

доказательство критерия сводится к критерию Коши для функции (которая представляет собой интеграл с переменным верхним пределом). □

Определение 8.2. Интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится.

Теорема 8.4. *Если* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходится абсолютно, то* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. Следует из критерия Коши и соотношения

$$\left|\int\limits_n^{n+p} f(x)dx\right| \le \int\limits_n^{n+p} |f(x)|dx.$$

□

Теорема 8.5. *Пусть* $f(x) \in \widetilde{R}[a, +\infty)$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$ *сходится, причем*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx.$$

Доказательство. В силу аддитивности,

$$\sum_{k=1}^{n} \int a_{k-1}{}^{a_k} f(x)dx = \int\limits_a^{a_n} f(x)dx.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^{a_n} f(x)dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$$

Из этих двух фактов и следует утверждение теоремы. □

Теорема о замене переменной

Теорема 8.6. *Пусть* $f \in \widetilde{R}[a, +\infty)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \beta)$, $\varphi \nearrow$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = +\infty$.

Тогда $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in \widetilde{R}[\alpha, \beta)$ *и*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Возьмем $\forall\ \gamma \in (\alpha, \beta)$. На $[\alpha, \gamma]$ выполнены условия теоремы о замене переменной. Тогда

$$\int\limits_a^{\varphi(\gamma)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{38}$$

Устремим в (38) $\gamma \to \beta - 0$. Получим

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

Сходимость интегралов от неотрицательных функций

Напомним, что если $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^x f(t)dt \nearrow$.

Из этого факта следует следующая теорема.

Теорема 8.7. *(Вейерштрасса)* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *сходится* $\iff$ $\int\limits_a^x f(t)dt$ *ограничен.*

Из теоремы 8.7 вытекает признак сравнения.

Теорема 8.8. *Если* $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall\ x \in [0, +\infty)$. *Тогда*

1. *Если* $\int\limits_a^\infty g(x)dx < \infty$, *то* $\int\limits_a^\infty f(x)dx < \infty$;

2. *Если* $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \infty$, *то* $\int\limits_a^\infty g(x)dx = \infty$.

Отсюда вытекает асимптотический признак сравнения интегралов.

Теорема 8.9. *Пусть* $f \asymp g$, $x \to \infty$, *то есть* $c_1 g < f < c_2 g$ *для некоторых* c_1, c_2. *Тогда*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx < \infty \iff \int\limits_a^\infty g(x)dx < \infty.$$

В частности, утверждение верно в случае, когда $f \sim g$, $x \to \infty$.

Для $f(x) \geq 0$ утверждение теоремы 8.5 верно в обе стороны.

Теорема 8.10. *Пусть $f(x) \geq 0$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Тогда $f(x) \in \widetilde{R}[a, +\infty)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$ сходится, причем

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx.$$

Теорема 8.11. *(Признак Коши – Маклорена) Пусть $f(x) \searrow$. Тогда $f(x) \in \widetilde{R}[0, +\infty)$ $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)dx < \infty$. В случае сходимости справедлива оценка*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Доказательство. Возьмем в условиях теоремы 8.10 $a = 0 = a_0$, $a_n = n$.

Справедлива следующая оценка:

$$\inf_{[n-1,n]} f(x) \leq \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \leq \sup_{[n-1,n]} f(x).$$

Отсюда из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{[-n,n]} f(x) < \infty$ следует, что $f \in \widetilde{R}[0, +\infty)$.

Обратно, если $f \in \widetilde{R}[0, +\infty)$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \inf\limits_{[-n,n]} f(x) < \infty$.

Так как $f(x) \searrow$, то

$$\inf_{[-n,n]} f(x) = f(n), \quad \sup_{[-n,n]} f(x) = f(n-1).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \Rightarrow \ f \in \widetilde{[}0, +\infty) \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty.$$

$\square$

Лекция 9. Условная сходимость несобственных интегралов. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Понятие абсолютной и условной сходимости

Продолжим разговор о сходимости несобственных интегралов. Напомним, о чем говорили на прошлой лекции.

Если $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^x f(t)dt \nearrow$. Существуют разные признаки сходимости несобственных интегралов. Напомним *асимптотический* признак сходимости: если

$$f(x), g(x) \geq 0,$$

$f \sim g$, $x \to \infty$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty \iff \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty.$$

Откажемся теперь от требования *неотрицательности* подынтегральной функции.

Утверждение 9.1. *Пусть $f(x) \in R[a,b]\ \forall\ b > a$. Тогда, если интеграл*

$$\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

то и

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$$

сходится (абсолютная сходимость).

Доказательство. По условию,

$$\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

Воспользуемся критерием Коши. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p > 0$

$$\int\limits_n^{n+p} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p > 0$

$$\left| \int\limits_n^{n+p} f(x)dx \right| < \int\limits_n^{n+p} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

откуда $f(x) \in \widetilde{R}[a, +\infty)$. $\square$

Замечание 9.1. В случае, когда $\int_a^\infty |f(x)|dx$ расходится, $\int_a^\infty f(x)dx$ может как сходиться (*условная сходимость*), так и расходиться.

Далее сосредоточимся на обсуждении условной сходимости.

Интегрирование по частям

Предположим, что разбили $f(x)$ в некоторое произведение:

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Функция $\psi(x)$ будет отвечать за стремление к 0 и регулярность, а $\varphi(x)$ – учитывать компенсацию знаков.

Предположим, что $\varphi \in C[a, +\infty)$, а $\psi(x) \in C^1[a, +\infty)$. Тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \Phi(x)\psi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \Phi(x)\psi'(x)dx,$$

где $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

Теорема 9.1. *(Формула интегрирования по частям) Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x)\psi(x)$. *Тогда* $\varphi(x)\psi(x) \in \widetilde{R}[a, +\infty) \iff \varphi(x)\psi'(x) \in \widetilde{R}[a, +\infty)$. *Более того, имеет место равенство*

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\psi(x)dx = \Phi(x)\psi(x)\Big|_a^\infty - \int\limits_a^\infty \Phi(x)\psi'(x)dx. \tag{39}$$

Из теоремы 9.1 выведем далее признаки Дирихле и Абеля условной сходимости несобственных интегралов.

Признак Дирихле

Теорема 9.2. *(Признак Дирихле условной сходимости) Пусть*

1. $\Phi(x)$ *ограничена на* $[a, +\infty)$: $\exists\ C > 0$ *такое, что* $\forall\ x \geq a$
$$|\Phi(x)| \leq C;$$
2. $\psi(x) \searrow 0$.

Тогда

1. *Интеграл* $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\psi(x)dx$ *сходится;*
2. *Верно*
$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\psi(x)dx = -\int\limits_a^\infty \Phi(x)\psi'(x)dx; \tag{40}$$

3. *Справедлива оценка*
$$\left|\int\limits_a^\infty \varphi(x)\psi(x)dx\right| \le C\psi(a).$$

Доказательство. 1. Очевидно, из условий теоремы, $\exists$
$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)\psi(x) = 0.$$

Оценим
$$|\Phi(x)\psi'(x)| \le -C\psi'(x),$$
так как $\psi(x)$ – убывающая функция. Заметим, что
$$\int\limits_a^\infty -\psi'(x)dx = \psi(a).$$
Воспользовавшись теоремой 9.1, получим первое утверждение теоремы.

2. Так как $\Phi(x)\psi(x)\Big|_a^\infty = 0-0$, из (39) следует равенство (40).

3. Воспользовавшись (40), получим
$$\left|\int\limits_a^\infty \varphi(x)\psi(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^\infty -\Phi(x)\psi'(x)dx\right| \le \int\limits_a^\infty |\Phi(x)\psi'(x)|dx|\,C\psi(a).$$

□

Признак Абеля

Пусть $\varphi(x) \in \widetilde{R}[a,+\infty)$. Возникает следующий вопрос: какова должна быть $\psi(x)$, чтобы $\varphi(x)\psi(x) \in \widetilde{R}[a,+\infty)$?

Теорема 9.3. *Пусть $\varphi(x) \in \widetilde{R}[a,+\infty)$, $\psi \nearrow C$. Тогда $\varphi(x)\psi(x) \in \widetilde{R}[a,+\infty)$.*

Доказательство. $\exists$
$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)\psi(x) = \lim_{x\to\infty}\Phi(x)\lim_{x\to\infty}\psi(x) = \int\limits_a^\infty \varphi(x)dx\cdot C.$$
Мы находимся в условиях теоремы 9.1. Покажем, что $\Phi(x)\psi'(x)$ интегрируема:
$$|\Phi(x)\psi'(x)| \le \sup_{[a,\infty)}|\Phi(x)|\left(\psi'(x)\right).$$
Здесь $\sup\limits_{[a,+\infty)}|\Phi(x)|$ ограничена, так как $\varphi(x) \in \widetilde{R}[a,+\infty)$. Значит, интегрируемость $\Phi(x)\psi'(x)$ зависит от интегрируемости $\psi'(x)$, а
$$\int\limits_a^\infty \psi'(x) = \psi(\infty)-\psi(a)$$
ограничена по условию. □

Виды сходимости функциональной последовательности

Определение 9.1. Говорят, что $f_n(x)$ *сходится поточечно (сходится всюду)* на X, если $\forall\ x \in X$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n(x)\ \rightarrow\ f(x),\quad x \in X.$$

У поточечной сходимости, заметим, сходимость в различных точках не связана между собой.

Определение 9.2. Говорят, что $f_n(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ N такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n(x)\ \rightrightarrows\ f(x) \text{ на } X.$$

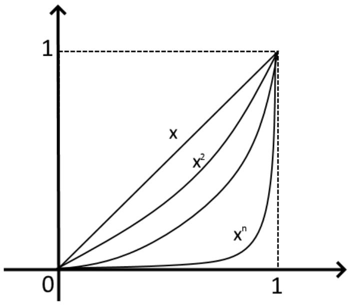

Рис. 9.1. Графическое представление $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1)$

Пример 9.1. Возьмем $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1)$ (рис. 9.1). Здесь $x^n\ \rightarrow\ 0$, но равномерной сходимости нет. В таких случаях говорят, что последовательность *сходится, но не равномерно.*

Заметим, однако, что на меньшем множестве, например, $X = [0, 1/2]$, $f_n(x)$ сходится равномерно.

Определение 9.3. Говорят, что $f_n(x)$ *локально равномерно внутри* (a, b) *сходится* к $f(x)$, если $\forall\ [\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$f_n(x)\ \rightrightarrows\ f(x) \text{ на } [\alpha, \beta].$$

Задача 9.1. *Показать, что* $f_n(x) = x^n$ *внутри интервала* $(0, 1)$ *сходится локально равномерна.*

Теорема 9.4. *Пусть $f_n \to f$ ($f_n \rightrightarrows f$ на X или f_n сходится к f локально равномерно внутри (a,b)) и $g_n \to g$ ($g_n \rightrightarrows g$ на X или g_n сходится к g локально равномерно внутри (a,b)).*

Тогда $\forall\ \lambda, \mu$ выполнено

$$\lambda f_n + \mu g_n \to \lambda f + \mu g$$

($\lambda f_n + \mu g_n \rightrightarrows \lambda f + \mu g$ на X или $\lambda f_n + \mu f_n$ сходится к $\lambda f + \mu g$ локально равномерно внутри (a,b)).

Доказательство. Покажем утверждение теоремы для равномерной сходимости. Оценим

$$|\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)| \leq |\lambda||f_n - f| + |\mu||g_n - g|.$$

По условию, $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$, $\forall\ x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

и $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$, $\forall\ x \in X$

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Положив $N = \max\{N_1, N_2\}$, получим утверждение теоремы. □

Заметим, что если $\forall\ x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

то

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Обозначим

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Теорема 9.5. *(Супремум-критерий) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.*

Функциональный ряд

Определение 9.4. *Функциональным рядом* называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in X. \tag{41}$$

Его частичной суммой называется

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Определение 9.5. Говорят, что функциональный ряд (41) *сходится поточечно* к $S(x)$, если

$$S_n(x) \ \to \ S(x).$$

$S(x)$ называется *суммой функционального ряда.*

Определение 9.6. Говорят, что функциональный ряд (41) *сходится равномерно*, если

$$S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x).$$

Лекция 10. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей

Теоремы о равномерной сходимости ряда

Напомним, что на прошлой лекции мы остановились на следующем факте. Говорят, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$$

равномерно на X, если

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x),$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in X$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon. \tag{42}$$

Кроме того, обсудили, что линейная комбинация равномерно сходящихся рядов $\rightrightarrows$ к линейной комбинации.

Напоним, что если ряд сходится в каждой точке, но равномерной сходимости нет, говорят, что такой ряд *сходится неравномерно.*

Имеет место следующее свойство.

Теорема 10.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* X. *Тогда* $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$ *сходится равномерно на* X *и*

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Доказательство. Представим частичную сумму

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Очевидно, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ сходится равномерно к $S(x)$, $m \to \infty$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ от m не зависит. Равномерная сходимость показана.

Далее,

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

Из определения равномерной сходимости (формула (42)) получаем, что

$$r_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

□

Замечание 10.1. Конечно, утверждение теоремы 10.1 верно и в обратную сторону (то есть это критерий). Заметим, что скорость стремления к 0 остатка $r_n(x)$ и есть скорость равномерной сходимости исходного ряда.

Теорема 10.2. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* X. *Тогда*

$$a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления

$$a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) - S(x) = 0.$$

□

Замечание 10.2. Теорема (10.2) – один из инструментов доказательства неравномерной сходимости. Действительно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится, а $a_n(x)$ стремится к 0 неравномерно, то и исходный ряд сходится неравномерно.

Критерий Коши

Теорема 10.3. *(Критерий Коши) Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* X $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ *такое, что* $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in X$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X. По теореме 10.1, тогда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Это значит, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in X$ выполнено

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| = |r_n(x) - r_{n+p}(x)| \le |r_n(x)| - |r_{n+p}(x)| < 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ По предположению, $\forall\ x \in X$, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Так как x зафиксированно, оценка выше – критерий Коши для числового ряда. Тогда $\forall$ зафиксированного $x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится к $S(x)$. Итак, мы поняли, к чему должен сходится функциональный ряд.

Так как ряд сходится, для $\forall$ фиксированного $x \in X$ $\exists$ остаток

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x).$$

Выполнена оценка

$$\lim_{p\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \le \varepsilon,$$

откуда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in X$

$$|r_n(x)| \le \varepsilon,$$

то есть остаток ряда $r_n(x)$ равномерно стремится к 0. Заметим, что для каждой задачи важно найти N, то есть понять, насколько быстро остаток равномерно стремится к 0. $\square$

Признаки равномерной сходимости

Теорема 10.4. *(Признак Вейерштрасса равномерной сходимости) Пусть*[6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in X} |a_n(x)| < +\infty.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* X*.*

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x\in X} |a_k(x)|\,.$$

По критерию Коши (из условия), $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x\in X} |a_k(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon.$$

$\square$

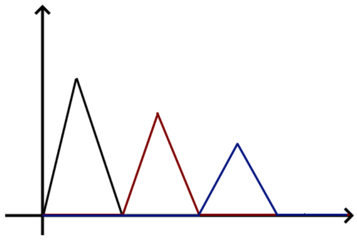

Рис. 10.1. Функции f_n (волны)

Пример 10.1. Рассмотрим функции, устроенные следующим образом (рис. 10.1). Каждая f_n – это волна. Если все пики стремятся к 0 достаточно быстро, ряд сходится равномерно. Если же пики стремятся к 0, например, как $1/n$, ряд из $\sup f_n(x)$ сходиться не будет.

Рассмотрим теперь менее серьезные ограничения. Будем исследовать на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$, $x \in X$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится, но не очень быстро (без абсолютной и тем более мажорируемой сходимости).

В этом случае схема исследования может быть следующая. Представим члены ряда в виде некоторого произведения

$$c_n(x) = a_n(x)b_n(x),$$

и пусть

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = S_n(x).$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = S_n(x)b_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} S_k(x)\Delta b_k(x).$$

Теорема 10.5. *Пусть $S_n(x)b_{n+1}(x)$ сходится равномерно на X. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x)$ сходится равномерно на X.*

Теорема 10.6. *(Признак Абеля) Пусть $\exists\, C > 0$ такое, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$*

$$|S_n(x)| \le C,$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

Пусть $b_n(x) \ge b_{n+1}(x)$ $\forall\, x \in X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и

$$b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

Тогда

[6] В таком случае говорят, что имеет место *мажорируемая* сходимость.

1. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* X*;*

2. *Выполнено*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x); \tag{43}$$

3. *Справедлива оценка*
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq \sup_{\substack{x\in X\\ m\geq n}} |S_m(x) - S_n(x)| \sup_{x\in X} b_{n+1}(x).$$

Доказательство. Проверим, что выполняется условие теремы 10.5:
$$\sup_{x\in X} |S_n(x)b_{n+1}(x)| \leq \sup_{x\in X} |S_n(x)| \sup_{x\in X} b_{n+1}(x) \leq C \sup_{x\to X} b_{n+1}(x) \ \to \ 0,$$
то есть $S_n(x)b_{n+1}(x)$ равномерно сходится к 0.

По теореме 10.5 получаем пункты 1 и 2. Покажем, что сходимость ряда в правой части (43) сильнее, чем в левой:
$$|S_n(x)\Delta b_n(x)| \leq C\,|\Delta b_n(x)| = C\Delta b_n(x).$$
Оценим
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)\Delta b_k(x)| \leq C \sum_{k=n+1}^{n+p} \Delta b_k(x) =$$
$$= C\left(b_{n+1}(x) \cdot b_{n+p+1}(x)\right) \leq Cb_{n+1}(x) \leq C \sup_{x\in X} b_{n+1}(x).$$
Так как по условию $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$
$$\sup_{x\in X} b_{n+1}(x) < \varepsilon,$$
то получаем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in X$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)\Delta b_k(x)\right| < \varepsilon.$$
Итак, получили, что ряд из модулей в правой части (43) сходится равномерно. □

Лекция 11. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей (продолжение)

Признак Дирихле

Пусть дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), \quad x \in X.$$

Задача исследовать такой ряд на сходимость.

Теорема 11.1. *(Признак Дирихле) Пусть*

1. $\exists\ C > 0$ *такое, что* $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in X$
$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leq C;$$
2. $b_n(x) \geq b_{n+1}(x)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in X$, *и*
$$b_n(x) \ \rightrightarrows\ 0$$
на X.

Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \ \overset{X}{\rightrightarrows}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x)$;
3. *Справедлива оценка*
$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leq \sup_{x,k}|S_k(x) - S_n(x)| \sup_x b_{n+1}(x).$$

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда как

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x)\Delta b_k(x) + S_n(x)b_{n+1}(x).$$

Заметим, что

$$|S_n(x)b_{n+1}(x)| \leq Cb_{n+1}(x) \leq C\sup_x b_{n+1}(x).$$

Кроме того,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} S_k(x)\Delta b_k(x)\right| \le C\sum_{k=n+1}^{m} \Delta b_k(x) \le C b_{n+1}(x).$$

Итак, выполнено условие Коши для равномерной сходимости ряда $\sum S_n(x) b_{n+1}(x)$.

Остаток ряда представим в виде

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(S_k(x) - S_n(x)\right)\Delta b_k(x).$$

Оценим

$$|r_n(x)| \le \sup_k |S_k(x) - S_n(x)| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta b_k(x) =$$

$$= \sup_k |S_k(x) - S_n(x)|\, b_{n+1}(x) \le \sup_{k,x} |S_k(x) - S_n(x)| \sup_x b_{n+1}(x).$$

□

Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}.$$

Возникает вопрос: какой должна быть последовательность $b_n(x)$, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ оставался равномерно сходящимся?

Теорема 11.2. *(Признак Абеля) Пусть*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$;
2. $b_n(x) \le b_{n+1}(x)\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x$, *и* $\exists\, C > 0$ *такое, что*

$$|b_n(x)| \le C\ \forall\, x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$$

Доказательство. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \left(S_k(x) - S_n(x)\right)\Delta b_k(x) + \left(S_{n+m}(x) - S_n(x)\right) b_{n+m+1}(x)\right| \le$$

$$\leq \sup_k |S_k(x) - S_n(x)| \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} -\Delta b_k(x) + |b_{n+m+1}(x)| \right| \leq$$

$$\leq \sup_k |S_k(x) - S_n(x)| \cdot 3 \sup_{x,k} |b_k(x)| \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

□

Признак Дини равномерной сходимости

Теорема 11.3. *(Признак Дини равномерной сходимости для функциональных последовательностей) Пусть* $f_n(x) \in C[a,b]$ *и* $\forall\ x \in [a,b]\ \exists$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

где $f(x) \in C[a,b]$. *Пусть также* $\forall\ x \in [a,b]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Тогда

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x).$$

Доказательство. Обозначим

$$r_n(x) = f_n(x) - f(x).$$

Покажем, что $r_n(x) \ \rightrightarrows\ 0$. Отметим, что $r_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $r_n(x) \geq 0$;
2. $r_n(x) \geq r_{n+1}) + (x)\ \forall\ x \in [a,b]$, $\forall\ n$;
3. $\forall\ x \in [a,b]$
$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Свойство 3 означает, что $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ x \in [a,b]\ \exists\ N(x)$ такое, что $\forall\ n > N$

$$r_n(x) < \varepsilon.$$

Заметим, что $r_n(x) < \varepsilon\ \forall\ n \geq N(x) \iff r_{N(x)}(x) < \varepsilon$ (в силу монотонности $r_n(x)$).

Заметим, что $r_{N(x)}(y) \in C[a,b]$. $\exists$ окрестность $U(x)$ такая, что $\forall\ y \in U(x)$

$$r_{N(x)}(y) < \varepsilon.$$

Так как

$$\bigcup_{x\in[a,b]} U(x) \supset [a,b],$$

то $\exists$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^M$ такая, что

$$\bigcup_{k=1}^M U(x_k) \supset [a,b].$$

Положим $N = \max\{N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_M)\}$. Тогда $\forall\ x \in [a, b]$

$$r_N(x) < \varepsilon,$$

Действительно, $\exists$ номер k такой, что $x \in U(x_k)$, откуда $r_{N(x_k)}(x) < \varepsilon$, а значит,

$$r_N(x) \leq r_{N(x_k)}(x) < \varepsilon.$$

Отсюда

$$r_N(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0.$$

□

Признак Дини равномерной сходимости для функцинальных рядов является следствием предыдущего признака (теорема 11.3).

Теорема 11.4. *(Признак Дини для функциональных рядов) Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x), \quad a_n(x), S(x) \in C[a, b]$$

и $a_n(x) \geq 0$ *для* $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $[a, b]$.

Теорема о перестановке пределов

Постановка задачи следующая. Дана функциональная последовательность $f_n(x)$. Беря предел по n и по x, мы можем получить

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

или

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Возникает вопрос: при каких условиях[7] на $f_n(x)$ повторные пределы выше равны?

Теорема 11.5. *(О перестановке пределов) Пусть*

1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$;
2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Тогда

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

[7]Заметим, что это выполняется при разных условиях. Мы докажем одну из теорем.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Доказательство. Запишем условие Коши равномерной сходимости для $f_n(x)$. $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ N такое, что $\forall$ $n, m > N$, $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Для n $\exists$ $\eta_1 > 0$ такое, что $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_{\eta_1}(x_0)$

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon.$$

Для m $\exists$ $\eta_2 > 0$ такое, что $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_{\eta_2}(x_0)$

$$|f_m(x) - a_m| < \varepsilon$$

Положим $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. Тогда $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_\eta(x_0)$

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon, \quad |f_m(x) - a_m| < \varepsilon.$$

Тогда справедлива оценка

$$|a_n - a_m| \le |a_n - f_n(x)| + |a_m - f_m(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| < 3\varepsilon.$$

Итак, показали, что $\exists$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \tag{44}$$

то есть пункты 1 и 2 теоремы показаны.

Далее, в силу (44) $\exists$ N_1 такое, что $\forall$ $n > N_1$

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Хотим показать, что $\exists$ $\eta > 0$ такое, что $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_\eta(x_0)$

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Оценим

$$|a - f(x)| \le |a - a_n| + |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,. \tag{45}$$

$\exists$ N_2 такое, что $\forall$ $n > N_2$ и $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Зафиксируем $n > N$. $\exists$ $\eta > 0$ такое, что $\forall$ $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$|f_n(x) - a_n| < \varepsilon.$$

Тогда

$$(45) < 3\varepsilon.$$

□

Лекция 12. Свойства равномерной сходимости последовательностей и рядов

Теоремы о пределах

Запишем формулировку теоремы 11.3 о перестановке пределов для функциональных рядов.

Теорема 12.1. *Пусть*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$*;*
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$*;*
3. $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 12.2. *(О пределе непрерывных функций) Пусть* $f_n \in C[a,b]$ $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$*. Тогда* $f \in C[a,b]$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 11.5. Можем записать

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

□

Сформулируем теорему о непрерывности для функциональных рядов.

Теорема 12.3. *Пусть* $f_n(x) = C[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $[a,b]$*. Тогда* $S(x) \in C[a,b]$.

Запишем еще один аналог теоремы 11.5 для случая локально равномерной сходимости.

Теорема 12.4. *Пусть* $f_n \in C(a,b)$, $f_n \to f$ *локально равномерно внутри* (a,b)*. Тогда* $f \in C(a,b)$.

Доказательство. Из условия локально равнмоерной сходимости, $\forall\ x_0 \in (a,b)$ $\exists$ $[\alpha,\beta]$ такой, что $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset C(a,b)$, откуда $f \in C[\alpha,\beta]$ по теореме 11.5. □

Теорема 12.5. *Пусть* $f_n(x) \in C(a,b)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *локально равномерно внутри* (a,b). *Тогда* $S(x) \in C(a,b)$.

Теорема 12.6. *Пусть*

1. $f_n(x) \in D[a,b]$;
2. $\exists\ x_0 \in [a,b]$ *такое, что* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$;
3. $f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.

Тогда

1. $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$;
2. $f \in D[a,b]$;
3. $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

Доказательство. Оценим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_0) - (f_m(x) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =$$
$$= |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =$$
$$|f_n'(x_0 + \theta(x - x_0)) - f_m'(x_0 + \theta(x - x_0))|\,|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|\,.$$

Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n, m > N_1$, $\forall\ x \in [a,b]$

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n, m > N_2$

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ n, m > N$, $\forall\ x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Равномерная сходимость показана.

Далее, положим

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0),$$

1. $\varphi_n(x) \rightrightarrows \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ на $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$;
2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)$.

Тогда выполнены условия теоремы 11.5 для $\varphi_n(x)$. Значит,

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = g(x_0),$$

и эти пределы равны.

Итак, показали, что

$$f'(x_0) = g(x_0).$$

□

Из теоремы 12.6 следует следующая теорема.

Теорема 12.7. *Пусть*

1. $f_n(x) \in D[a,b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится для некоторой* $x_0 \in [a,b]$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$.

Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $[a,b]$;
2. $S(x) \in D[a,b]$;
3. $S'(x) = g(x)$.

Сформулируем аналогичные теоремы для интервалов.

Теорема 12.8. *Пусть*

1. $f_n(x) \in D(a,b)$;
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$;
3. $f'_n(x) \ \to \ g(x)$ *локально равномерно внутри* (a,b).

Тогда

1. $f_n(x) \ \to \ f(x)$ *локально равномерно внутри* (a,b);
2. $f \in D(a,b)$;
3. $f'(x) = g(x)$.

Теорема 12.9. *Пусть*

1. $f_n(x) \in D(a,b)$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится;*
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ *локально равномерно.*

Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *локально равномерно;*
2. $S(x) \in D(a,b)$;
3. $S'(x) = g(x)$.

Теоремы об интегрируемости предельной функции

Теорема 12.10. *Пусть*[8] $f_n \in N[a,b]$, $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.
Тогда $f \in N[a,b]$ *и*[9]

$$(N)\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(N)\int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{46}$$

Доказательство. По условию, $\exists$

$$F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)dt,$$

где $F_n'(x) = f_n(x)$, $x \in [a,b]$. Тогда для $F_n(x)$ выполнены условия теоремы 12.6, а значит, верны следующие свойства:

1. $F_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} F(x)$, где $F(x)$ – предел F_n;
2. $F \in D[a,b]$;
3. $F'(x) = f(x)$.

Соотношение (46) получается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}(F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

□

[8] Напомним, $N[a,b]$ – множество интегрируемых по Ньютону на $[a,b]$ функций, то есть функций, имеющих первообразную.

[9] Здесь $(N)\int\limits_a^b g(x)dx$ означает интеграл в смысле Ньютона.

Итак, доказали теорему для интеграла Ньютона. Перейдем к обсуждению случая для интеграла Римана.

Теорема 12.11. *Пусть* $f_n \in R[a,b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$.
Тогда $f \in R[a,b]$ *и*[10]

$$(R)\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(R)\int\limits_a^b f_n(x)dx. \qquad (47)$$

Доказательство. Нам нужно показать, что $f \in R[a,b]$, то есть что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T$, $d(T) < \delta$ выполнено

$$\sum_T \omega_k(f)|\Delta_k| < \varepsilon,$$

где

$$\omega_k(f) = \sup_{x',x''\in\Delta_k} |f(x') - f(x'')|\,.$$

Зафиксируем $\forall\ \varepsilon > 0$. Оценим

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_n(x')| + |f(x'') - f_n(x'')| + |f_n(x') - f_n(x'')|\,.$$

$\exists$ номер N такой, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Заметим, что $\forall n$ по условию $f_n \in R[a,b]$. Тогда для $\forall$ фиксированного $n > N$ (в том числе) $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ T$, $d(T) < \delta$ выполнено

$$\sum_T \omega_k(f_n)|\Delta_k| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\sum_T \omega_k(f)|\Delta_k| < \sum_T \omega_k(f_n)|\Delta_k| + 2\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)|\sum_T |\Delta_k| < \varepsilon + 2\varepsilon(b-a).$$

Равенство (47) будет показано на следующей лекции. □

[10] Здесь $(R)\int\limits_a^b g(x)dx$ означает интеграл в смысле Римана.

Лекция 13. Степенные ряды и их свойства

Теорема

В прошлый раз остановились на доказательстве следующей теоремы.

Теорема 12.11. *Пусть* $f_n \in R[a,b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$.
Тогда $f \in R[a,b]$ *и*[11]

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{48}$$

Доказательство. Итак, в прошлый раз показали, что $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$.

Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$, $\forall\, x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\, \delta_1$ такое, что $\forall\, T_\xi$, $d(T_\xi) < \delta_1$, верно

$$\left|\sigma(f_n, T_\xi) - \int\limits_a^b f_n(x)dx\right| < \varepsilon,$$

и $\exists\, \delta_2 > 0$ такое, что $\forall\, T_\xi$, $d(T_\xi) < \delta_2$ верно

$$\left|\sigma(f, T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall\, T_\xi$, $d(T_\xi) < \delta$, верно

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \sigma(f_n, T_\xi)\right| +$$

$$+\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sigma(f, T_\xi)\right| + |\sigma(f_n - f, T_\xi)| < 2\varepsilon + \varepsilon(b-a).$$

□

[11]Здесь $(R)\int\limits_a^b g(x)dx$ означает интеграл в смысле Римана.

Критерий равномерной сходимости рядов

Напомним, ранее доказывали следующую теорему.

Теорема 12.3. *Пусть* $f_n \in C[a,b]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

равномерно на $[a,b]$. *Тогда* $S(x) \in C[a,b]$.

Кроме того, мы работали с признаком Дини.

Теорема 11.4. *(Признак Дини) Пусть* $f_n \in C[a,b]$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x),$$

$S(x) \in C[a,b]$ *и* $f_n(x) \geq 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно.*

Здесь получили следующий критерий.

Теорема 13.1. *Пусть* $f_n \in C[a,b]$, $f_n(x) \geq 0$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x),$$

равномерно на $[a,b] \iff S(x) \in C[a,b]$.

Полнота линейного пространства $C[a,b]$

Можно показать, что $C[a,b]$ – линейное пространство. Определим[12]

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty. \tag{49}$$

Здесь

1. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \iff f = 0$;
2. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$;
3. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Итак, (49) – действительно норма, а $C[a,b]$ – линейное нормированное пространство.

[12]Максимум на $[a,b]$ достигается, так как $[a,b]$ – компакт, поэтому можно использовать $\max$ вместо привычного в таких случаях $\sup$.

Определение 13.1. Пусть X – линейное нормированное пространство. X – *полное*, если $\forall\ \{x_n \in X\}$ такой, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n, m > N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

выполняется следующее: $\exists\ x \in X$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Теорема 13.2. *Пространство $C[a,b]$ – полное.*

Доказательство. Возьмем $\forall\ f_n \in C[a,b]$ такую, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall$ $n, m > N$ выполнено

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

то есть

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Это выполняется $\iff\ \forall\ x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{50}$$

В силу критерия Коши, $\exists\ f(x)$ такая, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ равномерно на $[a,b]$. Поскольку сходимость равномерная, $f \in C[a,b]$.

Осталось проверить сходимость по норме. Устремим в (50) $m \to \infty$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Так как для $\forall\ x \in [a,b]$, то и для максимума тоже верно.

Итак, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

$\square$

Степенной ряд. Теорема Коши – Адамара

Определение 13.2. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z_0, c_n, z \in \mathbb{C}. \tag{51}$$

Замечание 13.1. Частичные суммы степенного ряда (51) являются, очевидно, многочленами.

Определим величину

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

– *радиус сходимости* ряда (51).

Теорема 13.3. *(Коши – Адамара) Если $|z - z_0| < R$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится абсолютно.*

Если $|z - z_0| > R$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_n)^n$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим 3 возможных случая.

1. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$. Тогда $R = 0$, а значит, для всех $z \neq z_0$ верно $|z - z_0| > R$. Применим к ряду (51) признак Коши:
$$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n||z - z_0|^n} = |z - z_n| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|},$$
то есть ряд (51) расходится.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Тогда $\forall\ z\ |z - z_0| < R = \infty$. Тогда
$$|z - z_n| \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

3. Пусть $0 < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$. Тогда для
$$\frac{|z - z_0}{R} < 1$$
ряд (51) сходится, а для
$$\frac{|z - z_0|}{R} > 1$$
– расходится.

□

Локально равномерная сходимость степенного ряда

Теорема 13.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_n)^n$ *локально равномерно сходится внутри своего круга сходимости $|z - z_0| < R$.*

Доказательство. $\forall\ \delta > 0$ справедлива оценка
$$|c_n||z - z_0|^n \leq |c_n| \left(R - \delta\right)^n \ \ \forall\ z : \ |z - z_0| \leq R - \delta.$$

Из того, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \left(R - \delta\right)^n < \infty$, следует, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится равномерно на $|z - z_0| \leq R - \delta$. □

Из теоремы 13.4 следует следующее утверждение.

Теорема 13.5.
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \in C\left(|z - z_0| < R\right).$$

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для $z \in \mathbb{R}$ (обозначим такие точки как $x \in \mathbb{R}$).

Теорема 13.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \in C\left(x_0 - R, x_0 + R\right).$$

Теорема Абеля

Теорема 13.7. *(Вторая теорема Абеля) Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$ *сходится в точке* $x_0 + R$. *Тогда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \in C(x_0+R)$.

Доказательство. Для $x = x_0 + R$ из условия получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$$

сходится. Возьмем последовательность $\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$, $x \in [x_0, x_0+R]$.

1. Последовательность монотонна:

$$\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n \geq \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1};$$

2. Последовательность ограничена:

$$0 \leq \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n \leq 1.$$

В силу первой теоремы Абеля ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$$

сходится равномерно на отрезке $[x_0, x_0+R]$, а значит, и непрерывен на $[x_0, x_0+R]$. □

Дифференцирование степенных рядов

Будем, как и выше, считать, что аргументы степенного ряда (51) $\in \mathbb{R}$, то есть рассматривать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \quad x_0, c_n, x \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

Запишем ряд, состоящий из производных членов ряда (52):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Как мы видим, это также степенной ряд. Обозначим его радиус сходимости через R'.

Теорема 13.8. *$R' = R$.*

Доказательство. Распишем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

откуда и следует, что $R' = R$. □

Теорема 13.9.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \left(x - x_0\right)^{n-1}.$$

Теорема 13.10. *Сумма степенного ряда (52)*

$$f \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R).$$

Лекция 14. Ряды Тейлора

Интегрирование степенных рядов

Напомним, мы изучаем степенные ряды

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

В прошлый раз выяснили, что

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R), \\ f'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R) \end{aligned}$$

и так далее. Мы показали, что $f \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$.

Если x из области сходимости, то

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Интегрирование, очевидно, как и дифференциирование, можно применять к степенному ряду неоднократно.

Теорема единственности

Теорема 14.1. *(Единственности) Пусть даны аналитические функции*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0} b_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Пусть, кроме того, дана $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $0 < |z_k - z_0| < R$, $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = z_0$ и

$$f(z_k) = g(z_k) \ \forall \ k.$$

Тогда $f(z) = g(z)$ всюду.

Доказательство. Покажем сначала, что $c_0 = b_0$:

$$b_0 = \lim_{z_k \to z_0} g(z) = \lim_{z_k \to z_0} f(z) = c_0.$$

Далее, обозначим

$$f_1(z) = \frac{f(z) - c_0}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^{n-1},$$

$$g_1(z) = \frac{g(z) - b_0}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Тогда
$$c_1 = \lim_{z_k \to z_0} f_1(z) = \lim_{z_k \to z_0} g_1(z) = b_1.$$
Далее повторяем процедуру. Например,
$$f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z) - c_{n-1}}{z - z_0},$$
$$g_n(z) = \frac{g_{n-1}(z) - b_{n-1}}{z - z_0},$$
откуда можно показать, что $c_n = b_n$. □

Итак,
$$C^\infty(x_0 - R, x_0 + R) \supset A(x_0 - R, x_0 + R),$$
причем эти классы не совпадают.

Ряды Тейлора

Перейдем к рядам Тейлора. Везде далее аргументы[13] $\in \mathbb{R}$.

Вычислим коэффиценты степенного ряда
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$
в терминах производных. Получим, что
$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$
и так далее,
$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

Пусть $f(x) \in C^\infty(x_0)$. Построим по ней степенной ряд
$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \qquad (53)$$
Формулы для c_n называется *формулами Тейлора для коэффицентов*. Сам ряд (53) называется *рядом Тейлора функции $f(x)$*.

Теорема 14.2. *Пусть*
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$
Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ – ряд Тейлора своей суммы.

[13] Чтобы не разбираться с производными комплексных функций.

Теорема 14.3. *Пусть $f \in C^\infty(x_0)$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

тогда и только тогда, когда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ \to \ 0, \quad n \to \infty. \tag{54}$$

Замечание 14.1. Правую часть критерия (54) нельзя переписать как

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ \to \ 0,$$

так как в такой записи не показана связь между $f(x)$ и рядом.

Теорема 14.4. *Пусть $f \in C^\infty(x_0 - a, x_0 + a)$, где a – некоторое число, и*

$$\sup_{\substack{x \in (x_0 - a, x_0 + a) \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{q^n} < \infty$$

для некоторого q. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ \forall\ x \in (x_0 - a, x_0 + a).$$

Доказательство. Запишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ \to \ 0.$$

Отсюда по теореме 14.3 и вытекает утверждение теормы. □

Разложение в ряд Тейлора некоторых известных функций

Теорема 14.5. *Справедливы следующие разложения в ряд Тейлора:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Разложения для $\sin x$ и $\cos x$ следуют из того, что

$$\left|\sin^{(n)} x\right| \leq 1, \quad \left|\cos^{(n)} x\right| \leq 1.$$

На интервале $(-a, a)$, a – произвольное,

$$\left|(e^x)^{(n)}\right| \leq e^a.$$

□

Итак, показали, что $\sin x$, $\cos x$, e^x являются *целыми*[14] *функциями.*

Теорема 14.6. *Пусть* $m \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n, \quad x \in (-1, 1), \tag{55}$$

где

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}, \quad C_m^0 = 1.$$

Замечание 14.2. Заметим, что у (55)

$$((1+x)^m)^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Очевидно, что, начиная с некоторого момента, $n > m$, откуда получаем более чем экспоненциальный рост производных. Поэтому теорема 14.4 здесь неприменима.

Доказательство. (Теорема 14.6) Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $x \in [0, 1-\delta]$, δ – произвольное. Тогда по теореме Лагранжа

$$(1+x)^m - \sum_{k=0}^{n} C_m^k x^k = \frac{m(m-1)\dots(m-n)\,(1+\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^m \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Оценим

$$\left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^m \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}\right| \leq \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}\right| \max\left\{1, 2^m\right\}(1-\delta)^{n+1}.$$

Обозначим

$$b_n = \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}\right|.$$

Тогда

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1-m} = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда получаем, что $\exists\, C > 0$ такое, что $b_n \sim C/n^{m+1}$.

[14] Напомним, что это ряды, сходящиеся на всей $\mathbb{R}$.

2. Пусть теперь $x \in [-1+\delta, 0]$, δ – произвольное. Воспользуемся остаточным членом в форме Коши. Напомним, он имеет вид

$$\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0).$$

Тогда

$$(1+x)^m - \sum_{k=0}^{n} C_m^k x^k = \frac{m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$

$$= \pm\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}(-x)\left(\frac{x(\theta-1)}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}.$$

Здесь знак зависит от степени, поэтому запишем его как $\pm$. Оценим

$$\left|\pm\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}(-x)\left(\frac{x(\theta-1)}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\right|(1-\delta)^{n+1}\max\{1,\delta^{m-1}\} \ \to\ 0.$$

$\square$

Лекция 15. Методы суммирования по Чезаро и Абелю

Биномиальный ряд на полуинтервале и отрезке

Итак, в прошлый раз установили, что

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n, \quad x \in (-1,1). \tag{56}$$

Расширим границы. Пусть $x=-1$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_m^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

В прошлый раз установили, что

$$\underbrace{(-1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}}_{a_n} \sim \frac{C}{n^{n+m}}.$$

Итак, при $m>0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^m C_m^n$ сходится. По второй теореме Абеля имеет место равенство (56) для $x=-1$.

Возьмем теперь $x=1$. Ряд (56) в $x=1$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}.$$

Напомним, в прошлый раз мы установили, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тогда $a_n \to 0$ и $a_n \geq a_{n+1}$, $n \geq N$ (для $m>-1$).

Итак, получили следующее расширение границ в (56):

1. Для $m \in (-1,0]$ $x \in (-1,1]$ в (56);
2. Для $m>0$ $x \in [-1,1]$ в (56).

Разложение в ряд Тейлора некоторых известных функций

Получим разложение в ряд Тейлора для

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = \mathrm{arctg} x, \quad h(x) = \arcsin x.$$

Заметим, что

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, \quad g'(x) = (1+x^2)^{-1}, \quad h'(x) = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Отсюда

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1). \tag{57}$$

Подставим теперь в (57) $x = 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} < \infty,$$

откуда в разложении (57) $x \in (-1, 1]$.

Теперь,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$$

откуда

$$g(x) = \mathrm{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

То, что при $x = 1$ и $x = -1$ $g(x)$ также раскладывается в ряд, легко проверить подстановкой.

Наконец,

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{-1/2}^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$$

где

$$C_{-1/2}^0 = 1,$$

$$C_{-1/2}^n = \frac{(-1/2)(-3/2)\ldots(-1/2-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Таким образом,

$$h'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

откуда

$$h(x) = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Метод суммирования Чезаро

Определение 15.1. Говорят, что a_n *сходится по Чезаро* к a:

$$a_n \overset{(C,1)}{\to} a,$$

если

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \; to \; a.$$

Теорема 15.1. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Тогда $a_n \overset{(C,1)}{\to} a$.

Положим $b_n = a_n - a$, тогда

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Тогда доказательство теоремы 15.1 вытекает из теоремы ниже.

Теорема 15.2. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Тогда

$$b_n \overset{(C,1)}{\to} 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы получаем, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$ такое, что $\forall$ $n > N_1$

$$|b_n| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$\left|\frac{b_1 + \ldots + b_{N_2}}{n}\right| < \varepsilon.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\ n > N$

$$\left|\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}\right| == \left|\frac{b_1 + \ldots + b_{N_1}}{n} + \frac{b_{N_1+1} + \ldots + b_n}{n}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{b_1 + \ldots + b_{N_1}}{n}\right| + \frac{|b_{N_1+1}| + \ldots + |b_n|}{n - N_1} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Обратное, очевидно, не будет верно.

Пример 15.1. Пусть $a_n = (-1)^n$. Тогда $a_n \overset{(C,1)}{\to} 0$.

Определение 15.2. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу S *методом Чезаро*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C,1)}{=} S,$$

если $S_n \overset{(C,1)}{\to} S$, что эквивалетно

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n+1} \to S.$$

Пример 15.2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx, \quad x\neq 2\pi k.$$

Здесь

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n}\cos nx\right)\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin x/2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

Далее, вычислим величину[15]

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k.$$

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}(\cos kx-\cos(k+1)x)=\frac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}(n+1)}.$$

Предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}(n+1)}=0.$$

Итак, получили, что

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\overset{(C,1)}{=}0.$$

Теорема 15.3. *Пусть*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{(C,1)}{=}S.$$

Тогда $a_n=o(n)$.

[15] Для ядер Дирихле такая сумма называется *ядром Фейера.*

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется по Чезаро, $\sigma_n - S \to 0$. Отсюда следует ограниченность, то есть $\sigma_n - S = o(1)$.

Тогда

$$(n+1)(\sigma_n - S) = \sum_{k=0}^{n} \infty (S_k - S),$$

$$(n+1)(\sigma_n - S) - n(\sigma_{n-1} - S) = S_n,$$

откуда получаем, что $S_n = o(n)$, откуда и $a_n = o(n)$. □

Метод суммирования Абеля

Определение 15.3. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу S *методом Абеля*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S,$$

если

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

Теорема 15.4. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S$.

Пример 15.3. Просуммируем методом Абеля следующий ряд:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \overset{(A)}{===} \lim_{r\to 1-0} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \right) =$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(re^{ix}\right)^n \right) = \lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{re^{ix}}{1 - re^{ix}} \right) =$$

$$= \lim_{r\to 1-0} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{re^{ix} - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \right) = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} = 0.$$

Теорема Фробениуса

Теорема 15.5. *(Фробениуса) Если*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C,1)}{=} S,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S.$$

Доказательство. Вспомним, что условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C,1)}{=} S$$

означает, что $\sigma_n \ \to \ S$, то есть

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k \ \to \ S.$$

Как следствие теоремы выше, $a_n = o(n)$, $S_n = o(n)$.

Перейдем к суммированию ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ по Абелю, то есть к рассмотрению ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1. \tag{58}$$

При $x \in (0,1)$, очевидно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (абсолютно). Преобразуем ряд (58) по Абелю:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \Delta x^n,$$

так как

$$S_n x^{n+1} \ \to \ 0 \ \forall \ x.$$

Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n \Delta x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta_n x^n.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-0} (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta_n x^n.$$

Оценим

$$\left| (1-x)^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n - S \right| =$$

$$= (1-x)^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\sigma_n - S\right) x^n \right| \leq$$

$$\leq (1-x)^2 \left| \sum_{n=0}^{N} (n+1) \left(\sigma_n - S\right) x^n \right| + \varepsilon (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1) x^n < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

так как $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|\sigma_n - S| < \varepsilon,$$

и $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in (1-\delta, 1)$

$$(1-x)^2 \left| \sum_{n=0}^{N} (n+1)\left(\sigma_n - S\right) x^n \right| < \varepsilon.$$

Здесь

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

откуда

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

$\square$

Лекция 16. Теорема Таубера. Сходимость тригонометрических рядов

Теорема Таубера

Приведем пример к теореме 15.5 Фробениуса.

Пример 16.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n.$$

Очевидно, ряд расходится и не суммируем по Чезаро. Выясним, суммируем ли он по Абелю:

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \lim_{x\to 1-0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right)' =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \lim_{x\to 1-0} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Напомним теорему Абеля. Такие теоремы называются *теоремами Абелева типа*

Теорема 15.4. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *суммируем по Абелю (и эти суммы совпадают).*

Обратная импликация в теореме 15.4, очевидно, не верна. Для того, чтобы она была верна, необходимо добавить еще некоторое условие. Теоремы такого типа называются *теоремами Тауберова типа.*

Теорема 16.1. *(Таубера) Пусть*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S$$

и $a_n = o(1/n)$. *Тогда*[16]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Доказательство. По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$n|a_n| < \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

[16]То есть ряд просто сходится и его суммы по Абелю и просто сумма совпадают.

то есть $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in (1-\delta, 1)$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - S\right| < \varepsilon.$$

Надо показать, что $\exists\ M$ такое, что $\forall\ n > M$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon.$$

Оценим

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \le \left|\sum_{0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - S\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 - x_n^k\right)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_n^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - S\right|. \tag{59}$$

Здесь x_n – зависящая от n величина,

$$1 - x_n^k = (1 - x_n) \sum_{m=0}^{k-1} x_n^m,$$

$$\left|1 - x_n^k\right| \le (1 - x_n)\, k,$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{n} = \frac{1}{n}\frac{x_n^{n+1}}{1-x_n} \le \frac{1}{n(1-x_n)}.$$

Тогда

$$(59) \le n(1-x_n) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x|a_k|}_{n} + \sup_{k \ge n+1} (x|a_k|) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k}\right) + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - S\right|. \tag{60}$$

Заметим, что $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k| < \varepsilon,$$

для $\forall\ n > N$

$$\sup_{k \ge n+1} k|a_k| \le \varepsilon.$$

Тогда будем выбирать в (60) $\forall\ n > N_2 = \max\{N, N_1\}$.

Далее, нужно выбрать x_n так, чтобы

$$n(1 - x_n) = 1,$$

или, эквивалентно,

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

– $x_n \to 1$, но не слишком быстро.

Вернемся к оценке:

$$(60) \leq \varepsilon n(1 - x_n) + \frac{\varepsilon}{n(1 - x_n)} + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - S\right| <$$

$$< 2\varepsilon + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k - S\right| < 3\varepsilon \ \forall n > M,$$

где в силу того, что

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} > 1 - \delta,$$

то есть $n > 1/\delta$, M выбирается как

$$M = \max\{N_2, 1/\delta\}.$$

□

Тригонометрические ряды

Основная часть разговора о тригонометрических рядах состоится в следующем семестре, когда мы будем изучать тригонометрические ряды Фурье. Тогда же обсудим, какие функции можно приближать тригонометрическими рядами.

Сейчас обсуждение будет строиться вокруг некоторых свойств тригонометрических рядов.

Определение 16.1. *Тригонометрическим рядом* называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{61}$$

Заметим, что ряды вида (61) являются 2π-периодическими функциями.

Определение 16.2. *Тригонометрическим многочленом степени n* называется частичная сумма ряда (61):

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Частичная сумма в определении 16.2 называется тригонометрическим многочленом, так как для произвольного многочлена $P_n(x, y)$ степени n с помощью формул понижения можно получить представление

$$P_n(\cos x, \sin x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Ограничимся пока ситуацией, когда рассматриваются только *косинус-ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{62}$$

либо *синус-ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{63}$$

Кроме того, потребуем, чтобы $a_n \searrow 0$ ($b_n \searrow 0$). Напомним, последовательность $a_n \searrow 0$, если $a_n \geq a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема 16.2. *Пусть $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$. Тогда оба ряда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

сходятся локально равномерно[17] *внутри* $(0, 2\pi)$.

Доказательство. Положим

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\widetilde{D_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Для $\forall\ \delta > 0$, $\forall\ x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ справедливы оценки

$$|D_n(x)| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}, \quad \left|\widetilde{D_n}(x)\right| \leq \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{.}$$

Для косинус-ряда (62) выполнено следующее:

1. $\sup\limits_{n, x\in[\delta, 2\pi-\delta]} |D_n(x)| < \infty$;

2. $a_n \geq a_{n+1}$ и $a_n \to 0$.

Отсюда по признаку Дирихле ряд (62) сходится локально равномерно на $(0, 2\pi)$.

Аналогично, для синус-ряда (63) выполнено следующее:

1. $\sup\limits_{n, x\in[\delta, 2\pi-\delta]} \left|\widetilde{D_n}(x)\right| < \infty$;

2. $b_n \geq b_{n+1}$ и $b_n \to 0$.

Отсюда по признаку Дирихле ряд (63) сходится локально равномерно на $(0, 2\pi)$. □

[17]Напоминаем, это означает равномерную сходимость на любом компакте внутри $(0, 2\pi)$.

Следствие. Пусть $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$. Тогда функции

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$\in C(0, 2\pi)$.

Теорема 16.3. *Пусть $a_n \searrow 0$. Тогда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

равномерно сходится на[18] $[0, 2\pi] \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как (62) сходится равномерно, он сходится в каждой точке. Для $x = 0$ получаем, что

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится.

$\Leftarrow$ Так как

$$\sup_{x \in [0,2\pi]} |a_n \cos nx| = a_n,$$

ряд (62) сходится равномерно на $[0, 2\pi]$ (по признаку Вейерштрасса). □

Теорема 16.4. *Пусть $b_n \searrow 0$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

равномерно сходится на $[0, 2\pi] \iff b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство. $\Rightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$, $\forall\, p$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k \sin kx| < \varepsilon.$$

Положим $p = n$, $x = \frac{\pi}{4n}$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \frac{1}{\sqrt{2}} < \varepsilon,$$

откуда $2nb_{2n} < 2\sqrt{2}\varepsilon$.

$\Leftarrow$ Будет доказано на следующей лекции.

□

[18] А в силу 2π-периодичности и на всей $\mathbb{R}$.

Лекция 17. Критерий равномерной сходимости ряда по синусам на всей числовой прямой

Критерий равномерной сходимости синус-ряда

Продолжим доказательство критерия равномерной сходимости синус-ряда.

Теорема 16.5. *Пусть* $b_n \searrow 0$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{64}$$

сходится равномерно на $[0, 2\pi] \iff b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство. Докажем еще раз (более подробно) необходимость, потом перейдем к достаточности.

$\Rightarrow$ По условию, (65) сходится равномерно. Воспользуемся критерием Коши. Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$, $\forall\, p$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin kx \right| < \varepsilon.$$

Хотим, чтобы $\sin kx \geq \frac{1}{2}$ (отступить от 0). Это достижимо $\iff$ $nx \geq \frac{\pi}{x}$ и $(n+p)x \leq \frac{5\pi}{6}$.

Итак, нужно, чтобы $x \in \left[\frac{\pi}{6n}, \frac{5\pi}{6(n+p)}\right]$. Возьмем, например, $p = n$. Тогда $x \in \left[\frac{\pi}{6n}, \frac{5\pi}{12n}\right]$.

Возьмем $x = \frac{\pi}{6n}$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin \frac{\pi k}{6n} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} < \varepsilon. \tag{65}$$

В силу $b_n \searrow 0$ можем записать

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} b_{2n} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$2nb_{2n} < 4\varepsilon.$$

Кроме того, из (65) можем записать

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} b_{2n+1} < \varepsilon,$$

откуда

$$\frac{1}{2} n b_{2n+1} < \varepsilon,$$

$$(2n+1) b_{2n+1} < 4\varepsilon + b_{2n+1} < 5\varepsilon.$$

В силу монотонности получаем

$$\lim_{n\to\infty} n b_n = 0,$$

то есть $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\Leftarrow$ Хотим показать, что, если $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}.$$

Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ сходится равномерно на $[0,\pi]$ (в силу периодичности этого достаточно). Напомним, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin kx \overset{[0,\pi}{\rightrightarrows}$$

тогда и только тогда, когда

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin kx \overset{[0,\pi]}{\rightrightarrows} 0.$$

Разобьем остаток ряда на две суммы:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=n+1}^{m(x)} b_k \sin kx + \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{66}$$

Оценим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m(x)} b_k \sin kx \right| \le \sum_{k=n+1}^{m(x)} b_k |\sin kx| \le x \sum_{k=n+1}^{m(x)} k b_k \le$$

$$\le x \sum_{k=n+1}^{m(x)} \sup_{k\ge n} k b_k \le x m(x) \sup_{k\ge n} k b_k. \tag{67}$$

Далее, преобразуем вторую сумму (66) по Абелю:

$$\left| \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} b_k \sin kx \right| = \left| \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} \left(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x) \right) \Delta b_k \right|.$$

Это верно, так как
$$\left(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right) b_{k+1} \ \to \ 0.$$

Такое представление учитывает, что последовательность $\sin kx$ много раз меняет знаки. Напомним, что преобразованный по Абелю ряд сходится абсолютно.

Перейдем к оценке:

$$\left|\sum_{k=m(x)+1}^{\infty} \left(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right) \Delta b_k\right| \le \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} \left|\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right| \Delta b_k \le$$

$$\le \sup_{k \ge m(x)} \left|\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right| \sum_{k=m(x)+1}^{\infty} \Delta b_k \le \sup_{k \ge m(x)} \left|\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right| b_{m(x)} \le$$

$$\le \frac{\pi}{x} b_{m(x)} = \frac{\pi}{x m(x)} m(x) b_{m(x)}, \tag{68}$$

так как
$$\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x) = \frac{\cos\left(m(x) + \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

откуда
$$\sup_{k \ge m(x)} \left|\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x)\right| \le \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \le \frac{\pi}{x}.$$

Заметим, что $xm(x)$ в (67) стоит в числителе, а в (68) – в знаменателе. Если $xm(x)$ мало, то мала оценка (67), но велика оценка (68), и наоборот.

Следовательно, $xm(x)$ должно быть почти постоянной величиной. Например,

$$xm(x) \approx \pi,$$

откуда $m(x) \approx [\pi/x]$. Точнее говоря,

$$m(x) = \max\{n+1, [\pi/x]\}.$$

Тогда
$$(67) \le x \left(\frac{\pi}{x} + 1\right) \sup_{k \ge n} k b_k \le$$

$$\ge (\pi + \pi) \sup_{k \ge n} k b_k = 2\pi \sup_{k \ge n} k b_k,$$

$$(68) \le m(x) b_{m(x)} \le \sup_{k \ge m(x)} k b_k \le \sup_{k \ge n} k b_k.$$

Окончательно получаем, что

$$r_n(x) \le (2\pi + 1) \sup_{k \ge n} k b_k \ \to \ 0, \quad n \to \infty.$$

□

Сформулируем следствие из предыдущей теоремы.

Теорема 17.1. *Пусть* $a_n \searrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. *Тогда*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \in C(\mathbb{R}).$$

Пусть $b_n \searrow$, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \in C(\mathbb{R}).$$

Теорема об ограниченности $\sup$ модуля частичных сумм тригонометрических рядов

Теорема 17.2. *Пусть* $b_n \searrow 0$, $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ x\in\mathbb{R}}} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \right| < \infty.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для $x \in [0, \pi]$. Разобъем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx + \sum_{k=m(x)+1}^{n} b)k \sin kx.$$

Оценим

$$\left| \sum_{k=1}^{m(x)} b_k \sin kx \right| \le x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \le x m(x) \sup_k k b_k \le 2\pi \sup_k k b_k,$$

$$\left| \sum_{k=m(x)+1}^{n} b)k \sin kx \right| = \left| \sum_{k=m(x)+1}^{n} \left(\widetilde{D}_k(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x) \right) \Delta b)k + \right.$$

$$\left. + \left(\widetilde{D}_n(x) - \widetilde{D}_{m(x)}(x) \right) b_{n+1} \right| \le \frac{\pi}{x} \left(\sum_{k=m(x)+1}^{n} \Delta b_k + b_{n+1} \right) \le$$

$$\le \frac{\pi}{x} b_{m(x)} = \frac{\pi}{x m(x)} \sup_k k b_k \le \sup_k k b_k.$$

Итак, получили, что

$$\sup_{n,x} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| < \infty.$$

□

Лекция 18. Дифференцируемость лакунарных рядов. Параметрические семейства

Лакунарные ряды

Итак, на прошлых лекциях обсудили тригонометрические ряды с монотонными коэффицентами. Перейдем теперь к обсуждению тригонометрического ряда с другими свойствами.

Определение 18.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_k \sin n_k x$ называется *лакунарным*, если

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Пример 18.1. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin 8^n x. \tag{69}$$

Так как

$$\frac{8^{n+1}}{8^n} = 8 > 1,$$

ряд (69) является лакунарным.

Теорема 18.1. *Для $f(x)$ (69) верно следующее. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, но $\nexists\ f'(x_0)\ \forall\ x_0 \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|2^{-n} \sin 8^n x\right| = 2^{-n}.$$

Отсюда $f(x) \in C(\mathbb{R})$.

Для $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ положим

$$h_k^+ = \frac{\pi}{2\cdot 8^k}, \quad h_k^- = -\frac{\pi}{2\cdot 8^k}.$$

Выясним, существует ли

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Рассмотрим последовательности

$$\frac{f(x_0 + h_k^+) - f(x_0)}{h_k^+} \text{ и } \frac{f(x_0 + h_k^-) - f(x_0)}{h_k^-}.$$

Возьмем первую из них:

$$\frac{1}{h_k^+}\left(f(x_0 + h_k^+) - f(x_0)\right) = \frac{1}{h_k^+} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sin 8^n (x_0 + h_k^+) - \sin 8^n x_0\right) =$$

$$= \frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_n^+)-\sin 8^n x_0\right)+\frac{1}{h_k^+}\left(\sin 8^k(x_0+h_k^+)-\sin 8^k x_0\right)+$$
$$+\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^+)-\sin 8^n x_0\right). \tag{70}$$

Подставив $h_k^+ = \frac{\pi}{2\cdot 8^k}$, получим, что

$$\sin 8^n\left(x_0+\frac{\pi}{2\cdot 8^k}\right)=\sin\left(8^n x_0+\pi 8^{n-k}\frac{1}{2}\right)=\sin 8^n x_0,\quad n\geq k+1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^+)-\sin 8^n x_0\right)=0.$$

Далее,

$$\left|\sin 8^n(x_0+h_k^+)-\sin 8^n x_0\right|\leq\left|8^n(x_0+h_k^+)-8^n x_0\right|\leq$$
$$\leq 8^n h_k^+=\frac{\pi}{2}8^{n-k},$$

$$\left|\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^+)-\sin 8^n x_0\right)\right|\leq\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\left|\sin 8^n(x_0+h_k^+)-\sin 8^n x_0\right|\leq$$
$$\leq\frac{2}{\pi}8^k\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\frac{\pi}{2}8^{n-k}=\sum_{n=1}^{k-1}4^n=\frac{4}{3}\left(4^{k-1}-1\right)<\frac{1}{3}4^k.$$

Наконец, для k-го слагаемого в (70) верно

$$\frac{2}{\pi}8^k 2^{-k}\left(\sin\left(8^k x_0+\frac{\pi}{2}\right)-\sin 8^k x_0\right)=\frac{2}{\pi}4^k\left(\cos 8^k x_0-\sin 8^k x_0\right). \tag{71}$$

Аналогично для второй последовательности:

$$\frac{1}{h_k^-}\left(f(x_0+h_k^-)-f(x_0)\right)=\frac{1}{h_k^-}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^-)-\sin 8^n x_0\right)=$$
$$=\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=1}^{k-1} 2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_n^-)-\sin 8^n x_0\right)+\frac{1}{h_k^-}\left(\sin 8^k(x_0+h_k^-)-\sin 8^k x_0\right)+$$
$$+\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^-)-\sin 8^n x_0\right). \tag{72}$$

Тогда

$$\sin 8^n\left(x_0-\frac{\pi}{2\cdot 8^n}\right)=\sin\left(8^n x_0-\pi 8^{n-k}\frac{1}{2}\right)=\sin 8^n x_0,\quad n\geq k+1$$

Поэтому хвост

$$\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sin 8^n\left(x_0+h_k^-\right)-\sin 8^n x_0\right)=0.$$

Далее, аналогичная случаю h_k^+ оценка для начала:

$$\left|\sin 8^n(x_0+h_k^-)-\sin 8^n x_0\right| \le \left|8^n(x_0+h_k^-)-8^n x_0\right| \le$$

$$\le 8^n|h_k^-| = \frac{\pi}{2}8^{n-k},$$

$$\left|\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\left(\sin 8^n(x_0+h_k^-)-\sin 8^n x_0\right)\right| \le \frac{1}{|h_k^-|}\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\left|\sin 8^n(x_0+h_k^-)-\sin 8^n x_0\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}8^k\sum_{n=1}^{k-1}2^{-n}\frac{\pi}{2}8^{n-k} = \sum_{n=1}^{k-1}4^n = \frac{4}{3}\left(4^{k-1}-1\right) < \frac{1}{3}4^k.$$

Наконец, возьмем k-е слагаемое в (**??**):

$$\frac{2}{\pi}8^k 2^{-k}\left(\sin\left(8^k x_0-\frac{\pi}{2}\right)-\sin 8^k x_0\right) = \frac{2}{\pi}4^k\left(\cos 8^k x_0+\sin 8^k x_0\right). \tag{73}$$

Оба представления (71) и (73) не могут быть одновременно малы:

$$\max\{|\cos\alpha+\sin\alpha|, |\cos\alpha-\sin\alpha|\} \ge 1.$$

Пусть x_0 – фиксировано, $\overline{h_k}$ равно h_k^+ или h_k^- в зависимости от того, (71) ≥ 1 или (73) ≥ 1 соответственно.

Тогда

$$\frac{f\left(x_0+\overline{h_k}\right)-f(x_0)}{\overline{h_k}} \ge \frac{2}{\pi}4^k-\frac{1}{3}4^k = 4^k\left(\underbrace{\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}}_{>0}\right) \to \infty.$$

□

Сходимость по параметру семейства функций

Распространим понятия, которые мы обсуждали для последовательностей (которые можно рассматривать как семейство функций с дискретным параметром), на семейство функций с непрерывным параметром.

Определение 18.2. Говорят, что *предел при $x\to x_0$ функции $f(x,y)$ равномерен по y*:

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \varphi(y),$$

если $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что $\forall\ x$,

$$0<|x-x_0|<\delta,$$

$\forall\ y\in Y$ верно

$$|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon.$$

Определение 18.3. Говорят, что $f(x,y)$ *сходится при* $x \to x_0$ *к* $\varphi(y)$ *всюду на* Y:

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{Y}{\to}} \varphi(y),$$

если $\forall\ y \in Y\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x$,

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполнено

$$|f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Возьмем в качестве $Y = (c,d)$.

Определение 18.4. Говорят, что $f(x,y) \underset{x\to x_0}{\to} \varphi(y)$ *локально равномерно внутри* (c,d), если $\forall\ [\alpha,\beta] \subset (c,d)$

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}} \varphi(y).$$

Теорема 18.2.

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \varphi(y)$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0} \sup_{y\in Y} |f(x,y) - \varphi(y)| = 0.$$

Доказательство. Переформулируем определение 18.2. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall$ x,

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\sup_{y\in Y} |f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Теорема 18.3. *Пусть* $f(x,y) \ \to\ \varphi(y)$, $g(x,y) \ \to\ \psi(y)$. *Тогда* $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x,y) + \mu g(x,y) \ \to\ \lambda\varphi(y) + \mu\psi(y).$$

Теорема 18.4. *(Критерий Коши)* $f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\forall\ x_1$,

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta,$$

$\forall\ x_2$,

$$0 < |x_2 - x_0| < \delta,$$

$\forall\ y \in Y$ *выполнено*

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как x_1 и x_2 лежат в проколотой δ-окрестности, по определению

$$|f(x_1, y) - \varphi(y)|, \varepsilon,$$

$$|f(x_2, y) - \varphi(y)|, \varepsilon.$$

Отсюда

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Запишем ослабленную формулировку условия. $\forall\ y \in Y\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x_1$, $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $\forall\ x_2$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$, верно

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Обозначим

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Вернемся к исходной формулировке, $x_2 \to x_0$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x_1$, $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $\forall\ y \in Y$

$$|f(x_1, y) - \varphi(y)| \le \varepsilon.$$

Это и есть определение равномерной сходимости.

□

Лекция 19. Свойства равномерно сходящихся параметрических семейств

Признак равномерной сходимости Дини для параметрических семейств

Напомним, в прошлый раз начали обсуждать интегралы, зависящие от параметра. В частности, в прошлый раз обсуждали сходимости параметрического семейства $f(x, y)$ (здесь x – аргумент, y – параметр): поточечную сходимость

$$f(x, y) \underset{x\to x_0}{\overset{Y}{\to}} \varphi(y),$$

равномерную сходимость на Y и локально равномерную сходимость на компактах внутри Y.

Теорема 19.1. *(Признак Дини) Пусть* $x \in \overset{\circ}{U}_-(x_0)$, $f(x, y) \in C[c, d]$,

$$f(x, y) \underset{x\to x_0-0}{\overset{[c,d]}{\to}} \varphi(y), \quad \varphi(y) \in C[c, d].$$

Пусть, кроме того, $\forall\ x_1, x_2$ *таких, что*

$$x_0 - \delta < x_1 < x_2 < x_0,$$

$\forall\ y \in [c, d]$ *выполнено*

$$f(x_1, y) \le f(x_2, y).$$

Тогда

$$f(x, y) \underset{x\to x_0-0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y).$$

Доказательство. Положим

$$r(x, y) = \varphi(y) - f(x, y).$$

Из условия монотонности по x на $f(x, y)$ получаем

$$r(x_1, y) \ge r(x_2, y).$$

Для $\forall\ y \in [c, d]$

$$\lim_{x\to x_0-0} r(x, y) = 0.$$

Далее, $\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ y \in [c, d]\ \exists\ \delta(y) > 0$ такое, что $\forall\ x$,

$$x_0 - \delta(y) \le x < x_0$$

выполнено

$$r(x, y) < \varepsilon.$$

В частности,

$$r\left(x_0-\delta(y),y\right)<\varepsilon.$$

Так как $\varphi\in C[c,d]$ и $f\in C[c,d]$,

$$r\left(x_0-\delta(y),z\right)\in C[c,d].$$

В частности, $r\left(x_0-\delta(y),z\right)\in C(y)$, то есть $\exists\ V(y)$ такая, что $\forall\ x\in V(y)$

$$r\left(x_0-\delta(y),z\right)<\varepsilon.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{y\in[c,d]} V(y)\supset[c,d].$$

Тогда $\exists\ \{y_k\}_{k=1}^n$ такая, что

$$\bigcup_{k=1}^n V(y_k)\supset[c,d].$$

Каждому y_k, очевидно, соответствует свое значение $\delta_k=\delta(y_k)$. Положим

$$\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}.$$

Тогда $\exists\ k$ такое, что $y\in V(y_k)$,

$$r(x_0-\delta,y)\le r(x_0-\delta_k,y)<\varepsilon.$$

Итак, получили, что $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что $\forall\ x$,

$$x_0-\delta<x<x_0,$$

$\forall\ y\in[c,d]$

$$r(x,y)\le r(x_0-\delta,y)<\varepsilon.$$

$\square$

Теоремы

Теорема 19.2. *Пусть*

$$f(x,y)\ \underset{x\to x_0}{\overset{\overset{\circ}{U}(y_0)}{\rightrightarrows}}\ \varphi(y),$$

$$f(x,y)\ \underset{y\to y_0}{\overset{\overset{\circ}{V}(x_0)}{\to}}\ \psi(x).$$

Тогда $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$, $\exists\ \lim\limits_{y\to y_0}$
$varphi(y)$,

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{y\to y_0} varphi(y). \tag{74}$$

Доказательство. Докажем сначала существование $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$, а затем сразу равенство (74).

Запишем вместо условия равномерной сходимости условие Коши. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что $\forall$

$$x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0) \subset \overset{\circ}{V}(x_0),$$

$\forall\ y \in \overset{\circ}{U}(y_0)$ верно

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\varepsilon.$$

Далее, $\exists\ \overset{\circ}{U}_1(y_0)$ такая, что $\forall\ y\in \overset{\circ}{U}_1(y_0)$

$$|f(x_1,y)-\psi(x_1)|<\varepsilon,$$

и $\exists\ \overset{\circ}{U}_2(y_0)$ такая, что $\forall\ y\in \overset{\circ}{U}_1(y_0)$

$$|f(x_2,y)-\psi(x_2)|<\varepsilon.$$

Положим

$$\overset{\circ}{U}{}^*(y_0)=\overset{\circ}{U}_1(y_0)\cap \overset{\circ}{U}_2(y_0).$$

Тогда $\forall\ y\in \overset{\circ}{U}{}^*(y_0)$

$$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|\le|\psi(x_1)-f(x_1,y)|+|\psi(x_2)-f(x_2,y)|+$$

$$+|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<3\varepsilon.$$

Заметим, что последняя оценка не зависит от y. Итак, $\exists$

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=L,$$

то есть $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1>0$ такое, что $\forall\ \overset{\circ}{V}_{\delta_1}(x_0)$

$$|\psi(x)-L|<\varepsilon.$$

Далее, $\exists\ \delta_2>0$ такое, что $\forall\ x\in \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(x_0)$, $\forall\ y\in \overset{U}{(}y_0)$

$$|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon.$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда $\forall\ x\in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\ \exists\ \eta(x)>0$ такое, что $\forall\ y\in \overset{\circ}{U}_{\eta(x)}(y_0)$

$$|f(x,y)-\psi(x)|<\varepsilon.$$

Оценим

$$|\varphi(y)-L|\le|\varphi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-\psi(x)|+|\psi(x)-L|<3\varepsilon.$$

Итак, равенство (74) показано. $\square$

Теорема 19.3. *Пусть* $f \in C\left([a,b] \times [c,d]\right)$. *Тогда*

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} f(x,y) \ \forall\ x_0 \in [a,b].$$

Доказательство. Так как $f \in ([a,b] \times [c,d])$, то $f \in \mathrm{UC}\left([a,b] \times [c,d]\right)$.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ (x_1, y_1)$, (x_2, y_2) таких, что

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$$

следует, что

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Положим $y_1 = y_1 = y$, $x_1 = x$, $x_2 = x_0$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x$ таких, что $|x - x_0| < \delta$, $\forall\ y \in [c,d]$ выполнено

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon.$$

□

Замечание 19.1. Условие теоремы 19.3, очевидно, симметрично, поэтому x и y можно поменять местами (то есть утверждение верно для равномерной сходимости на $[a,b]$).

Из теорем 19.2, 19.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 19.4. *Пусть* $f(x,y) \in C\left([a,b] \times [c,d]\right)$. *Тогда* $\forall\ (x_0, y_0) \in [a,b] \times [c,d]$

$$\exists\ \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) \ \text{и}\ \exists\ \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

и верно

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y).$$

Замечание 19.2. Заметим, что условие теоремы 19.4 избыточно, то есть существуют ситуации, в которых $f(x,y) \notin C\left([a,b] \times [c,d]\right)$, а повторные пределы существуют и равны.

Теорема 19.5. *Пусть* $f(x,y) \in C\left([a,b] \times [c,d]\right)$ *и* $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y).$$

Тогда $\varphi(y) \in C[c,d]$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 19.4. Для $\forall\ y_0 \in [c,d]$

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = \varphi(y_0).$$

□

Теорема 19.6. *Пусть* $f(x,y) \in C([c,d])$ *и* $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\to} \varphi(y)$$

локально равномерно внутри (c,d). *Тогда* $\varphi(y) \in C(c,d)$.

Теорема 19.7. *Пусть*

$$f(x_1,y) \le f(x_2,y)$$

для $\forall\ x_1, x_2$ *таких, что*

$$x_0 - \delta < x_1 \le x_2 < x_0$$

$\forall\ y \in [c,d]$, *и для* $\forall\ x$ *таких, что*

$$x_0 - \delta < x < x_0,$$

$f(x,y) \in C[c,d]$. *Пусть, кроме того,*

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\overset{[c,d]}{\to}} \varphi(y).$$

Тогда

$$f(x,y) \underset{x \to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y)$$

тогда и только тогда, когда $\varphi(y) \in C[c,d]$.

Лекция 20. Свойства равномерно сходящихся параметрических семейств. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Теорема о коммутативности перехода к пределу и операции взятия производной

Продолжаем изучать свойства $\varphi(y)$, где

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\to}} \varphi(y).$$

Теорема 20.1. *Пусть $f(x,y) \in D[c,d]$ и $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$ $f(x,y)$ сходится при $x \to x_0$ для некоторой точки $y_0 \in [c,d]$. Пусть, кроме того,*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\to}} \psi(y).$$

Тогда

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y),$$

$\varphi(y) \in D[c,d]$ и $\varphi'(y) = \psi(y)$.

Доказательство. По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V}_{\delta_1}(x_0)$, $\forall$ $y \in [c,d]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{partial f}{\partial y}(x_2,y)\right| < \varepsilon.$$

Далее, $\exists\ \delta_2 > 0$ такое, что $\forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(x_0)$

$$|f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V}_{\delta}(x_0)$, $\forall\ y \in [c,d]$

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| = |f(x_1,y) - f(x_1,y_0) + f(x_1,y_0) -$$

$$-f(x_2,y) + f(x_2,y_0) - f(x_2,y_0)| \le$$

$$\le |f(x_1,y) - f(x_1,y_0)| + |f(x_1,y_0) - f(x_2,y)| + |f(x_2,y_0) - f(x_2,y_0)| =$$

$$= |f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0)| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_1, y_0 + \theta(y-y_0)\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_2, y_0 + \theta(y-y_0)\right)\right| |y - y_0| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon|y-y_0| < \varepsilon + \varepsilon(d-c).$$

Положим теперь

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}, \quad y_0 \in [c,d].$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ x_1, x_2 \in \overset{\circ}{V}_{\delta_1}(x_0)$, $\forall\ y \in [c,d] \setminus \{y_0\}$

$$|g(x,y) - g(x,y_0)| = \left|\frac{f(x_1,y) - f(x_2,y) - (f(x_1,y_0) - f(x_2,y_0))}{y - y_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta(y - y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}((x_2, y_0 + \theta(y-y_0))\right| < \varepsilon.$$

Итак,

$$g(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]\setminus\{y_0\}}{\rightrightarrows}} \frac{\varepsilon(y) - \varepsilon(y_0)}{y - y_0}.$$

Кроме того,

$$\lim_{y\to y_0} g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0).$$

Получаем, что оба повторных предела $\exists$ и они совпадают. С одной стороны,

$$\lim_{y\to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \varphi'(y_0).$$

С другой стороны,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) = \psi(y_0).$$

Итак, получили, что

$$\varphi'(y_0) = \psi(y_0).$$

$\square$

Обсудим теперь следствия из теоремы 20.1.

Теорема 20.2. *Пусть $f(x,y) \in D(c,d)$, $f(x,y_0)$ сходится при $x \to x_0$ для $y_0 \in (c,d)$. Пусть, кроме того,*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} \varphi(y)$$

локально равномерно внутри (c,d). Тогда

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} \varphi(y)$$

локально равномерно внутри (c,d), $\varphi \in D(c,d)$ и $\varphi'(y) = \psi(y)$.

Теорема 20.3. *Пусть $f(x,y) \in N[c,d]\ \forall\ x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$,*

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y).$$

Тогда $\varphi \in N[c,d]$ и

$$\int\limits_c^d \varphi(y)dy = \lim_{x\to x_0} \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Доказательство. Положим[19]

$$F(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt.$$

Все $F(x,y)$, очевидно, дифференцируемы и сходятся к 0 в точке $y = c$. $F'(x,y) = f(x,y)$ равномерно сходятся по условию.

Следовательно, выполняются условия теоремы 20.1. Тогда

$$F(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \Phi(y) \in D[c,d],$$

$\Phi'(y) = \varphi(y)$. □

Теорема 20.4. *Пусть* $f(x,y) \in R[c,d] \ \forall\ x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$,

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(y).$$

Тогда $\varphi \in R[c,d]$ *и*

$$\int\limits_c^d \varphi(y)dy = \lim_{x\to x_0} \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Доказательство. По условию, для $\forall\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$, $\forall\ y \in [c,d]$

$$|f(x,y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Для $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0)\ \exists\ \eta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения T, $d(T) < \eta$, выполнено

$$\sum_T \omega\left(f(x,y), \Delta_k\right)|\Delta_k| < \varepsilon.$$

Оценим

$$\omega(\varphi, \Delta) = \sup_{y_1,y_2\in\Delta}\left(\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\right) \le 2\sup_{y\in\Delta}\left(\varphi(y) - f(x,y)\right) + \\ + \sup_{y_1,y_2\in\Delta}\left(f(x,y_1) - f(x,y_2)\right) < 2\varepsilon + \omega\left(f(x,y),\Delta\right).$$

Тогда

$$\sum_T \omega\left(\varphi, \Delta_k\right)|\Delta_k| < 2\varepsilon(d-c) + \sum_T \omega\left(f(x,y), \Delta_k\right)|\Delta_k| < 2\varepsilon(d-c) + \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_c^d \varphi(y)dy - \int\limits_c^d f(x,y)dy\right| \le \int\limits_c^d |\varphi(y) - f(x,y)|\,dy \le \sup_{y\in[c,d]}|\varphi(y) - f(x,y)|\,(d-c).$$

Здесь правая часть зависит только от x и $\to 0$ при $x \to x_0$ в силу равномерной сходимости (по условию). □

[19]Здесь, конечно, интеграл понимается в смысле Ньютона.

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определим[20]

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{75}$$

Перейдем к обсуждению вопроса: как по свойствам $f(x,y)$ что-то сказать о $F(x)$?

Замечание 20.1. Везде далее $f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,d]\right)$.

Это, в частности, позволяет нам рассматривать интеграл (75) и как интеграл Римана, и как интеграл Ньютона – Лейбница.

Теорема 20.5. *Пусть* $f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,d]\right)$. *Тогда* $F \in C[a,b]$.

Доказательство. Для $\forall\ x_0 \in a[b,]$ оценим

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int\limits_c^d f(x,y)dy - \int\limits_c^d f(x_0,y)dy\right| \leq$$

$$\int\limits_c^d |f(x,y)-f(x_0,y)|\,dy. \tag{76}$$

Так как $f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,d]\right)$, $\forall\ x_0 \in [a,b]$

$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} f(x_0,y),$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$, $\forall\ y \in [c,d]$

$$|f(x,y)-f(x_0,y)| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$(76) < \varepsilon(d-c),$$

то есть

$$|F(x)-F(x_0)| < \varepsilon(d-c).$$

□

Теорема 20.6. *Пусть*

$$f, \frac{\partial f}{\partial x} \in C\left([a,b]\times[c,d]\right).$$

Тогда $F \in D[a,b]$ *и*

$$F'(x) = \int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

[20] Для определенности возьмем здесь интеграл Римана.

Доказательство. Распишем

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_c^d \left(f(x,y)-f(x_0,y)\right)dy-\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy\right| =$$

$$=\left|\int\limits_c^d \frac{\partial d}{\partial x}\left(x_0+\theta(x-x_0),y\right)dy-\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_c^d \left|\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta(x-x_0),y\right)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right| dy.$$

Заметим, что из условия следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y),$$

то есть $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что $\forall\ x\in \overset{\circ}{V}_\delta(x_0)$, $\forall\ y\in[c,d]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right|<\varepsilon.$$

Итак, получаем, что

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-\int\limits_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy\right|<\varepsilon(d-c).$$

$\square$

Лекция 21. Исследование на равномерную сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра

Напомним, рассматриваем интеграл, зависящий от параметра

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy, \quad x \in X.$$

Ранее показали, что если

$$f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,d]\right),$$

то $F(x) \in C[a,b]$. Заметим, что требование непрерывности $f(x,y)$ является довольно сильным условием (непрерывность $F(x)$ может выполняться и с более слабыми требованиями к $f(x,y)$).

Кроме того, доказали, что если

$$f, \partial f/\partial x \in C\left([a,b]\times[c,d]\right),$$

то

$$\frac{dF}{dx} = \int\limits_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x} dy.$$

Теорема 21.1. *Пусть*

$$f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,d]\right).$$

Тогда

$$\underbrace{\int\limits_a^b F(x)dx}_{=\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy} = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{77}$$

Доказательство. Проверим, что интегралы в смысле Ньютона (77) совпадают, то есть

$$\int\limits_a^t F(x)dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)dx, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Для $t = a$ это очевидно. Далее достаточно проверить равенство производных

$$\frac{d}{dt}\int\limits_a^t F(x)dx = \frac{d}{dt}\int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)dx.$$

Надо показать, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_c^d dy\int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_c^d dy\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^t f(x,y)dx,$$

тогда получим

$$F(t) = \int\limits_c^d dy\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_c^d f(t,y)dy.$$

Введем функцию

$$\Phi(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx.$$

Надо проверить, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_c^d \Phi(t,y)dy = \int\limits_c^d \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,y)dy.$$

Проверим, что $\Phi(t,y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Для $\forall\ (t_0,y_0) \in [a,b]\times[c,d]$, $\forall\ (t,y)$ таких, что

$$\sqrt{(y-y_0)^2+(t-t_0)^2} < \delta,$$

имеем

$$|\Phi(t,y)-\Phi(t_0,y_0)| = \left|\int\limits_a^t f(x,y)dx - \int\limits_a^{t_0} f(x,y_0)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_a^t \left(f(x,y)-f(x,x_0)\right)dy\right| + \left|\int\limits_{t_0}^t f(x,y_0)dx\right| \le \varepsilon(b-a)+M\delta.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f(t,y).$$

Итак, для $\Phi(t,y)$ выполнены условия теоремы о перестановке интеграла и производной. $\square$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 21.1. *Несобственным интегралом, зависящим от параметра*, называется

$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x,y)dy, \quad f(x,y)\in C\left(\langle a,b\rangle\times[c,\infty)\right). \tag{78}$$

Введем функцию

$$\Phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt.$$

Определение 21.2. Говорят, что $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится* $\forall\ x \in X$, если

$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\to},\ \forall\ x \in X.$$

Определение 21.3. Говорят, что $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится равномерно на X, если[21]

$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\rightrightarrows} \text{ на } X.$$

Определение 21.4. Говорят, что $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится локально равномерно внутри* (a,b), если $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ сходится равномерно $\forall\ [\alpha,\beta] \subset (a,b)$, или, другими словами, $\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\to}$ локально равномерно внутри (a,b).

Сформулируем эквивалентное определение равномерной сходимости для (79).

Определение 21.5. $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* X, если

$$\int\limits_y^\infty f(x,t)dt \overset{X}{\underset{y\to\infty}{\rightrightarrows}} .$$

Теорема 21.2. $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* $X \iff$

$$\lim_{y\to\infty}\sup_{x\in X}\left|\int\limits_y^\infty f(x,t)dt\right| = 0.$$

Теорема 21.3. *Пусть* $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится на* X, $\int\limits_c^\infty g(x,y)dy$ *сходится на* X, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\int\limits_c^\infty (\lambda f + \mu g)\, dy$$

сходится на X.

[21] Таким образом, имеется в виду равномерная сходимость параметрического семейства $\Phi(x,y)$.

Теорема 21.4. *(Критерий Коши)* $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* $X \iff \forall$ $\varepsilon > 0\ \exists\ N$ *такое, что* $\forall\ y_1, y_2 > N$, $\forall\ x \in X$

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,t)dt\right| < \varepsilon.$$

Замечание 21.1. Теорема 21.4, по сути, представляет собой критерий Коши для параметрического семейства, так как несобственные интегралы, зависящие от параметра – это частный случай параметрического семейства.

Теорема 21.5. *(Признак Вейерштрасса равномерной сходимости) Если*

$$\int\limits_c^\infty \sup_X |f(x,y)|\, dy < \infty,$$

то $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* X.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,t)dt\right| \le \int\limits_{y_1}^{y_2} \sup_X |f(x,t)|\, dt.$$

□

Признак Дирихле равномерной сходимости

Пусть дан несобственный интеграл, зависящий от параметра

$$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$$

на X. Хотим исследовать его на сходимость, представив

$$f(x,y) = a(x,y)b(x,y)$$

(как и в случае с рядами).

Теорема 21.6. *(Признак Дирихле) Пусть*[22]

$$\sup_{\substack{y \ge c\\ x\in X}} \left|\int\limits_c^y a(x,t)dt\right| < \infty,$$

[22]В качестве контрпримера к требованию равномерной ограниченности можно, например, рассмотреть интеграл от $\sin xy$, $x > 0$:

$$\int\limits_0^y \sin xt dt = \frac{1-\cos y}{x}.$$

Такая функция ограничена, но равномерной ограниченности нет.

$$\frac{\partial b}{\partial y} \in C\left([c,\infty)\right) \ \forall\ x \in X,$$

$$f(x,y_1) \geq b(x,y_2)$$

для $\forall\ y_1 < y_2,\ \forall\ x \in X,$ *и*

$$f(x,y) \underset{y\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0.$$

Тогда

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)b(x,y)dy$$

сходится равномерно на X*.*

Доказательство. Воспользовавшись интегрированием по частям, оценим

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} a(x,t)b(x,t)dt\right| = \left|A(x,t)b(x,t)\Big|_{y_1}^{y_2} - \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial b}{\partial t}(x,t)A(x,t)dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\sup_{y\geq c, x\in X}|A(x,y)|\,|b(x,y_2)-b(x,y_1)|\right| + \sup_{y\geq c,x\in X}|A(x,y)|\int\limits_{y_1}^{y_2} -\frac{\partial b}{\partial t}dt \leq$$

$$\leq 2\sup_{y\geq c,x\in X}|A(x,y)|\sup_{x\in X} b(x,y_1) < 2\varepsilon\sup|A(x,y)|\,,$$

где $\exists\ N$ и выбрано $\forall\ y \in N$, $\forall\ x \in X$ так, чтобы

$$b(x,y) < \varepsilon.$$

□

Замечание 21.2. В условиях теоремы 21.6 справедливо преобразование

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)b(x,y)dy = -\int\limits_c^\infty A(x,y)\frac{\partial b}{\partial y}(x,y)dy, \tag{79}$$

причем интеграл в правой части (79) сходится абсолютно.

Отметим, что для таких интегралов интегрирование по частям (путем которого и получается (79)) является важным инструментом при работе с прикладными задачами.

Признак Абеля равномерной сходимости

Пусть

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)dy$$

сходится равномерно на X. Вопрос: какова должна быть $b(x, y)$, чтобы

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)b(x,y)dy$$

также сходился равномерно на X?

Теорема 21.7. *(Признак Абеля) Пусть*

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)dy$$

сходится равномерно на X. Пусть

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C[c,\infty) \text{ и } \geq 0,$$

$$\sup_{y\geq c, x\in X} |b(x,y)| < \infty.$$

Тогда

$$\int\limits_c^\infty a(x,y)b(x,y)dy$$

сходится равномерно на X.

Доказательство. Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ y_1.y_2 > N$, $\forall\ x \in X$

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} a(x,t)dt\right| < \varepsilon.$$

Положим

$$A(x,y) = \int\limits_N^y a(x,t)dt.$$

Тогда

$$|A(x,y)| < \varepsilon.$$

Оценим

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} a(x,t)b(x,t)dt\right| = \left|A(x,t)b(x,t)\Big|_{y_1}^{y_2} - \int\limits_{y_1}^{y_2} A(x,t)\frac{\partial b}{\partial t}(x,t)dt\right| \leq 4\varepsilon \sup_{x,y}|b(x,y)|\,.$$

□

Лекция 22. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признак Дини равномерной сходимости

Напомним следующее определение.

Определение 21.3. Говорят, что

$$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$$

сходится равномерно на $[a,b]$, если

$$\Phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt \underset{y\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \int\limits_c^\infty f(x,y)dy.$$

Теорема 22.1. *(Признак Дини) Пусть*

$$f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,\infty)\right),$$

$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x,y)dy \in C[a,b],$$

а $f(x,y) \geq 0$. *Тогда*

$$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$$

сходится равномерно на $[a,b]$.

Доказательство. Положим

$$\Phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt.$$

Заметим, что

$$\Phi(x,y) = C\left([a,b]\times[c,\infty)\right),$$

в частности,

$$\Phi(x,y) \in C[a,b] \ \forall\ y \geq C.$$

Кроме того,

$$\Phi(x,y_1) \leq \Phi(x,y_2) \ \forall\ x\in[a,b],$$

$\forall\ y_1, y_2$ таких, что
$$c \leq y_1 \leq y_2,$$
и
$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\overset{[a,b]}{\to}} F(x) \in C[a,b].$$
Итак, получаем условия признака Дини для параметрического семейства. Тогда
$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} F(x).$$
□

Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра, понадобится нам, чтобы по свойствам $f(x,y)$ делать выводы о свойствах функции
$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x,y)dy.$$

Теорема о перестановке предельного перехода

Теорема 22.2. *Пусть*
$$f(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,\infty)}{\rightrightarrows}} \varphi(y),$$
$$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$$
сходится равномерно на $\overset{\circ}{U}(x_0)$. *Тогда*
$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \int\limits_c^\infty \varphi(y)dy,$$
или, иными словами,
$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_c^\infty f(x,y)dy = \int\limits_c^\infty \lim_{x\to x_0} f(x,y)dy.$$

Доказательство. «Отступим» от ∞ в несобственном интеграле. Для конечных интегралов на $[c,y]$ запишем
$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_c^y f(x,t)dt = \int\limits_c^y \lim_{x\to x_0} f(x,t)dt = \int\limits_c^y f(t)dt. \tag{80}$$

Перейдем в (80) к пределу при $y \to \infty$:

$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to x_0}\int\limits_c^y f(x,t)dt = \int\limits_c^\infty \varphi(t)dt. \tag{81}$$

Положим

$$\Phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt,$$

$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\overset{\mathring{U}(x_0)}{\rightrightarrows}} F(x).$$

Кроме того,

$$\Phi(x,y) \underset{x\to x_0}{\overset{[c,\infty)}{\to}} \int\limits_c^\infty \varphi(t)dt.$$

Итак, можем воспользоваться теоремой о перемене пределов для параметрических семейств для $\Phi(x,y)$. Получим, что

$$\exists \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to\infty}\Phi(x,y),$$

$$\exists \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to x_0}\Phi(x,y)$$

и эти два предела равны. Тогда в (81) можем поменять пределы местами. □

Теорема о непрерывности

Теорема 22.3. *Пусть*

$$f(x,y) \in C\left([a,b]\times[c,+\infty)\right),$$

$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ *сходится равномерно на* $[a,b]$. *Тогда*

$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x,y)dy \in C[a,b].$$

Доказательство. Рассмотрим параметрическое семейство

$$\Phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,t)dt \in C[a,b]\ \forall\ y \geq c,$$

$$\Phi(x,y) \underset{y\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} F(x).$$

Отсюда $F(x) \in C[a,b]$. □

Следующие теоремы являются следствиями теоремы 22.3.

Теорема 22.4. *Пусть*

$$f(x, y) \in C\left((a, b) \times [c, +\infty)\right),$$

$\int\limits_c^\infty f(x, y)dy$ *сходится локально равномерно внутри на* (a, b). *Тогда*

$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x, y)dy \in C(a, b).$$

Теорема 22.5. *Пусть*

$$f(x, y) \in C\left([a, b] \times [c, +\infty)\right),$$

и $f(x, y) \geq 0$. *Тогда* $\int\limits_c^\infty f(x, y)dy$ *сходится равномерно на* $[a, b] \iff F(x) \in C[a, b]$.

Теорема о дифференцируемости

Теорема 22.6. *Пусть*

$$f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in C\left([a, b] \times [c, +\infty)\right),$$

$\exists\ x_0 \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int\limits_c^\infty f(x_0, y)dy$$

сходится, а

$$\int\limits_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$$

сходится равномерно на $[a, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_c^\infty f(x, y)dy$$

сходится равномерно на $[a, b]$,

$$F(x) = \int\limits_c^\infty f(x, y)dy \in D[a, b]$$

и

$$\frac{dF}{dx} = \int\limits_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{c}^{\infty} f(x, y) dt.$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \int\limits_{c}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Для функции$\Phi(x, y)$ применим теорему о дифференцировании для параметрических семейств, так как

$$\Phi(x, y) \underset{y \to \infty}{\to},$$

$$\Phi(x, y) \in D[a, b] \ \forall \ y \geq c,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \underset{y \to \infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \int\limits_{c}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} dy$$

по условиям теоремы. Тогда

$$\Phi(x, y) \underset{y \to \infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \int\limits_{c}^{\infty} f(x, y) dy,$$

то есть интеграл $\int\limits_{c}^{\infty} f(x, y) dy$ сходится равномерно,

$$F(x) \in D[a, b],$$

$$\frac{dF}{dx} = \int\limits_{c}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

$\square$

Запишем следствие из теоремы 22.6.

Теорема 22.7. *Пусть*

$$f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in C\left((a, b) \times [c, +\infty)\right),$$

$\exists \ x_0 \in [(, b)$ *такое, что*

$$\int\limits_{c}^{\infty} f(x_0, y) dy$$

сходится, а

$$\int\limits_{c}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

сходится локально равномерно внутри (a, b). *Тогда*

$$\int_c^\infty f(x,y)dy$$

сходится равномерно на (a, b),

$$F(x) = \int_c^\infty f(x,y)dy \in D(a,b)$$

и

$$\frac{dF}{dx} = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

Теоремы об интегрируемости

Теорема 22.8. *Пусть*

$$f(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in C\left([a,b] \times [c,+\infty)\right),$$

$$\int_c^\infty f(x,y)dy$$

сходится равномерно на $[a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f(x,y)dy = \int_c^\infty dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим, как и раньше, параметрическое семейство

$$\Phi(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt.$$

Справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b dx \int_c^y f(x,y)dt = \int_c^y dt \int_a^b f(x,t)dx,$$

где y фиксировано, так как $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов. Устремляя $y \to \infty$, получим

$$\lim_{y\to\infty} \int_a^b \Phi(x,y)dx = \int_c^\infty dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

В силу равномерной сходимости $\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$ можем занести предел под знак интеграла:

$$\lim_{y\to\infty}\int\limits_a^b \Phi(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to\infty}\Phi(x,y)dx.$$

□

Теорема 22.9. *Пусть*

$$f(x,y) \in C\left([a,\infty)\times[b,\infty)\right),$$

$$\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty |f(x,y)|dy < \infty$$

или[23]

$$\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx < \infty.$$

Пусть, кроме того,

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

сходится равномерно на $[c,y]$ $\forall\ y \geq c$, *а*

$$\int\limits_c^\infty f(x,y)dy$$

сходится равномерно на $[a,b]$ $\forall\ x \geq a$. *Тогда*

$$\int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^\infty F(x,y)dy = \int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^\infty f(x,y)dx.$$

Доказательство. Отступим от ∞ по x:

$$\int\limits_a^x dt\int\limits_c^\infty F(t,y)dy = \int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^x f(t,y)dt.$$

Это равенство имеет место по теореме (22.8). Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_a^x dt\int\limits_c^\infty F(t,y)dy = \lim_{x\to\infty}\int\limits_c^\infty dy\int\limits_a^x f(t,y)dt. \tag{82}$$

[23] Так как следующие условия симметричны, можно проверять сходимость одного из двух интегралов.

Хотим показать, что можно занести предел под знак интеграла в правой части (82), то есть что справедливо

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)dy \stackrel{?}{=} \int\limits_c^\infty \lim_{x\to\infty} \lim_{x\to\infty} \Phi(x,y)dy. \tag{83}$$

Здесь

$$\Phi(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)dy.$$

Заметим, что

$$\Phi(x,y) \underset{x\to\infty}{\overset{[c,y]}{\rightrightarrows}},$$

$$\int\limits_c^\infty \Phi(x,y)dy$$

сходится равномерно на $[a,+\infty)$, так как

$$|\Phi(x,y)| \le \int\limits_a^x |f(t,y)|\,dt < \int\limits_a^\infty |f(x,y)|\,dx$$

– тогда применим признак Вейерштрасса.

Отсюда следует, что (83) верно. $\square$

Лекция 23. Гамма- и бета-функции

Гамма-функция и бета-функция

Напомним, ранее вычисляли интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Задача 23.1. *Показать, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

интеграл Дирихле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

интеграл Лапласа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-|a|}.$$

Ранее обсуждали функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x).$$

В зависимости от вида $f_n(x)$ такие ряды могут быть степенными, тригонометрическими и так далее. Функциональные ряды используют для представление некоторых функций. Так, в случае степенных рядов это класс аналитических функций. В целом функции, представимые функциональными рядами, называются *специальными функциями*.

Аналогичная ситуация с интегралами:

$$F(x) = \int\limits_a^b f(y) K(x,y) dy. \tag{84}$$

Здесь в качестве ядра $K(x, y)$ выбирается некоторая не очень сложная функция, а $f(y)$ – это аналог a_n для функциональных рядов. Если какая-то функция представима в виде интеграла (84), она называется *специальной*.

Мы рассмотрим два примера специальных функций: *гамма-функцию*

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{85}$$

и *бета-функцию*

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{86}$$

Заметим, что $t^{x-1}e^{-t}$ непрерывна в совокупности как функция двух переменных, а $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ – как функция трех переменных.

Исследуем область определения (85). Для этого разобьем интеграл на два:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int\limits_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Заметим, что

$$t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}.$$

Интеграл от t^{x-1} сходится, если $x > 0$. Итак, $\Gamma(x)$ будем рассматривать при $x > 0$.

Замечание 23.1. Область определения $\Gamma(x)$ можно расширить, но интегральное представление (85), за рамки которого мы выходить не будем, допускает $x > 0$.

Аналогично для (86):

$$B(x, y) = \int\limits_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int\limits_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Здесь из первого интеграла

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1},$$

откуда $x > 0$. Из второго интеграла

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1},$$

откуда $y > 0$. Итак, бета-функция (86) определена при $x, y > 0$.

Исследуем функции на сходимость. Вычислим

$$\sup_{x\in[\delta,1/\delta]} t^{x-1}e^{-t} = \max\{t^{\delta-1}, t^{1/\delta-1}\}e^{-\delta}.$$

По признаку Вейерштрасса получаем равномерную сходимость, а следовательно, $\Gamma(x) \in C(0, +\infty)$.

Аналогично,

$$\sup{[\delta, +\infty)^2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1},$$

откуда $B(x, y) in C\left((0, \infty)^2\right)$.

Дифференцируемость n-ого порядка

Благодаря интегральному представлению (85), можем легко вычислить производную n-го порядка для гамма-функции:

$$\frac{d^n\Gamma}{dx^n} = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^n t dt. \tag{87}$$

Заметим, что умножение подынтегральной функции на $\ln^n t$ не мешает непрерывности. Представление (87) справедливо, так как

$$\sup_{[\delta,1/\delta]} \left|t^{x-1}e^{-t}\ln^n t\right| = \max\{t^{\delta-1}, t^{1/\delta-1}\}e^{-t}\ln^n t,$$

а значит, интеграл (87) сходится равномерно на $[\delta, 1/\delta]$, то есть локально-равномерно внутри $(0, \infty)$, и

$$\Gamma(x) \in C^\infty(0, \infty).$$

Замечание 23.2. $\Gamma(x)$ – аналитическая функция.[24]

Возьмем, например, 2-ю производную $\Gamma(x)$:

$$\frac{d^2\Gamma}{dx^2} = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^2 t dt > 0.$$

Аналогично для бета-функции:

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln^m t \ln^n(1-t)dt. \tag{88}$$

Здесь представление (88) справедливо, так как

$$\sup_{[\delta,+\infty)^2} \left|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln^m t\ln^n(1-t)\right| = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\left|\ln t\right|^m \left|\ln(1-t)\right|^n,$$

а значит, (88) сходится равномерно на $[\delta, +\infty)^2$ и, как следствие,

$$B(x, y) \in C^\infty\left((0, \infty)\right).$$

Таблица значений гамма-функции. Рекуррентная формула

Итак,

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

[24]В курсе это не будет доказано.

Вычислим значения $\Gamma(x)$ в некоторых точках:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2\int\limits_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}. \tag{89}$$

Выведем рекуррентную формулу для $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} dt = -\int\limits_0^\infty t^x de^{-t} =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-t} dt^x = x\int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Как следствие, можем вычислить $\Gamma(x)$ во всех точках вида n и $n + 1/2$:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1) = n!,$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \ldots = \left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Таблица значений бета-функции. Рекуррентная формула

Теперь,

$$B(x.y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Вычислим значения бета-функции в некоторых точках:

$$B(1,1) = 1, \quad B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2,$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi.$$

Кроме того, с помощью замены $t = 1 - s$ можно показать, что

$$B(x,y) = B(y,x).$$

Выведем рекуррентную формулу для бета-функции:

$$B(x+1,y) = \int\limits_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt =$$

$$= -\frac{1}{y}\int\limits_0^1 t^x d(1-t)^y = \frac{x}{y}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt =$$

$$= \frac{x}{y}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)dt = \frac{x}{y}B(x,y) - \frac{x}{y}B(x+1,y).$$

Отсюда

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

Аналогично,

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y).$$

Отсюда

$$B(m+1,n+1) = \frac{m}{m+n+1}B(m,n+1) = \ldots =$$

$$= \frac{m!}{(m+n+1)\ldots(n+1)}B(1,n+1) =$$

m!n!$\frac{}{(m+n+1)!.}$

Задача 23.2. *Получить значения*

$$B\left(m+1, n+\frac{1}{2}\right), \quad B\left(m+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right).$$

Значение производной гамма-функции в точках $x = n$

Покажем, что

$$\Gamma'(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\ln t dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt. \tag{90}$$

Напомним, что справедлива оценка

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n}t^2 e^{-t}. \tag{91}$$

Пусть $0 < t \le 1$. Домножим (91) на $\ln t$:

$$0 \ge \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\ln t \ge \frac{1}{n}t^2 e^{-t}\ln t.$$

Проинтегрировав это неравенство по $[0,1]$, получим

$$0 \ge \int\limits_0^1 e^{-t}\ln t dt - \int\limits_0^1 \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt \ge \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^2 e^{-t}\ln t dt. \tag{92}$$

Устремив в (92) $n \to \infty$, получим, что $0 \to 0$, $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^2 e^{-t} \ln t dt \;\to\; 0, \quad n \to \infty,$$

а значит, и

$$\int\limits_0^1 e^{-t} \ln t dt - \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt \;\to\; 0, \quad n \to \infty.$$

Итак, показали, что

$$\int\limits_0^1 e^{-t} \ln t dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt.$$

Аналогично, домножим (91) на $\ln t$, $t \in [1, n]$:

$$0 \le \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \ln t \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t} \ln t.$$

Проинтегрировав по $[1, n]$, получим

$$0 \le \int\limits_1^n e^{-t} \ln t dt - \int\limits_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt \le$$

$$\le \frac{1}{n} \int +1^n t^2 e^{-t} \ln t dt.$$

Так как при $n \to \infty$

$$0 \to 0, \quad \frac{1}{n} \int +1^n t^2 e^{-t} \ln t dt \to 0,$$

то и

$$\int\limits_1^n e^{-t} \ln t dt - \int\limits_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt \;\to\; 0.$$

Получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n e^{-t} \ln t dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt. \tag{93}$$

Итак, получили равносходимость пределов: либо они оба не существуют, либо существуют и равны. Но левый предел (93) существует и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n e^{-t} \ln t dt = \int\limits_1^\infty e^{-t} \ln t dt.$$

Итак, (90) показано.

Вычислим теперь предел (90):

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1} \int\limits_0^n \ln t d\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n + \int\limits_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} - 1}{t} dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \frac{1}{n} \int\limits_0^n \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} \Bigg|_0^n\right) =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) = -\gamma.\gamma$ – постоянная Эйлера. Итак, показали, что

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

В следующий раз покажем, что

$$\Gamma'(2) = 1 - \gamma.$$

Лекция 24. Производные гамма-функции. Связь $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$

Значения производной гамма-функции во всех целых точках

Итак, напомним, начали обсуждать гамма-функцию

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Выяснили, что

$$\Gamma(x) \in C^\infty(0, \infty),$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right). \tag{94}$$

Воспользуемся теперь свойством

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0, \tag{95}$$

чтобы с помощью (90) вычислить производную гамма-функции во всех целых точках:

$$\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x),$$

тогда

$$\Gamma'(n+1) = (n-1)! + n\Gamma'(n) = (n-1)! + n(n-2)! + n(n-1)\Gamma'(n-1) = \ldots =$$

$$= n!\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \Gamma'(1)\right).$$

Итак,

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma\right).$$

Перейдем ко 2-й производной гамма-функции:

$$\Gamma'(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} \ln^2 t dt.$$

Справедлива оценка

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t}. \tag{96}$$

Для $t \in [0, n]$ умножим (94) на $\ln^2 t$:

$$0 \le \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \ln^2 t \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t} \ln^2 t.$$

Проинтегрировав по отрезку $[0, n]$, получаем

$$0 \le \int\limits_0^n e^{-t} \ln^2 t dt - \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t dt \le \int\limits_0^n \frac{1}{n} t^2 e^{-t} \ln^2 t dt \le \frac{1}{n} \int\limits_0^\infty t^2 e^{-t} \ln^2 t dt.$$

Так как

$$\frac{1}{n} \int\limits_0^\infty t^2 e^{-t} \ln^2 t dt \to 0, \quad n \to \infty,$$

следующие интегралы равносходятся:

$$\int\limits_0^n e^{-t} \ln^2 t dt = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t dt$$

Известно, что интеграл в левой части существует, а значит, существуют оба.

Далее,

$$\Gamma''(1) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln^2 t dt = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{n+1} \int\limits_0^n \ln^2 t d\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln^2 n + 2 \int\limits_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} - 2}{t} \ln t dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln^2 n - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \ln t dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln^2 n + 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \int\limits_0^n \ln t d\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} - 1\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - 2 \ln n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \int\limits_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} - 1}{t} dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln^2 n - 2 \ln n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \int\limits_0^n \sum_{m=0}^{k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^m dt\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln^2 - 2 \ln n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^m \Big|_0^n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left(\ln^2 - 2\ln n \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right). \tag{97}$$

Обсудим подробнее повторную сумму в (97):

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+1}\sum_{k=m}^{n+1}\frac{1}{km} = \sum_{m=1}^{n+1}\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{n+1}\frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{n+1}\frac{1}{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} + \sum_{m=k}^{n+1}\frac{1}{m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right).$$

Вернемся к (97):

$$\Gamma''(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Итак, получили, что

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}. \tag{98}$$

Воспользуемся свойством (95). Тогда

$$\Gamma''(x+1) = x\Gamma''(x) + 2\Gamma'(x), \quad x > 0.$$

Далее, для $x = n$

$$\Gamma'(n+1) = 2(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \gamma\right) + n\Gamma''(n) =$$

$$= 2(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \gamma\right) + 2n(n-2)!\left(\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \gamma\right) + n(n-1)\Gamma''(n-1) = \ldots =$$

$$= n!\left(2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} - \gamma\right) + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) =$$

$$= n!\left(2\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} - 2\gamma\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) =$$

$$= n!\left(\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)^2 - 2\gamma\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} + \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) =$$

$$= n!\left(\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\gamma\right)^2+\frac{\pi^2}{6}\right)=\Gamma''(n+1).$$

Воспользуемся формулами (94) и (98), чтобы получить асимптотическое разложение гамма-функции в точке $x=0$:

$$\Gamma(1+x)=1-\gamma x+\frac{\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}}{2}x^2+o(x^2),\quad x\to 0.$$

Отсюда

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{1}{x}-\gamma+\frac{\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}}{2}x+o(x),\quad x\to 0.$$

Эйлеровы интегралы: связь гамма- и бета-функции

Напомним,

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,$$

$$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad x,y>0.$$

Сделав замену $t=\frac{1}{s+1}$, можно получить для бета-функции представление

$$B(x,y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}ds.$$

Докажем следующую теорему о связи гамма-функции и бета-функции.

Теорема 24.1.

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad x,y>0.$$

Доказательство. Пусть сначала $x,y>1$. Покажем, что

$$B(x,y)\Gamma(x+y)=\Gamma(x)\Gamma(y).$$

Запишем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}ds\times\int\limits_0^{\infty}t^{x+y-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{\infty}\frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}\left(\int\limits_0^{\infty}t^{x+y-1}e^{-t}dt\right)ds=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}s^{y-1}\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{t}{1+s}\right)^{x+y-1}e^{-t}d\frac{t}{1+s}\right)ds. \tag{99}$$

Сделав замену $y = \frac{t}{1+s}$, получим

$$(99) = \int\limits_0^\infty s^{y-1} \left(\int\limits_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} du \right) ds = \int\limits_0^\infty ds \int\limits_0^\infty s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} du. \qquad (100)$$

Заметим, что

$$s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} \in C[0, +\infty)^2,$$

повторный интеграл в правой части (100) сходится,

$$\max_{s \geq 0} s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} = (y-1)^{y-1} u^x e^{-u-y+1}.$$

$$\max_{u \geq 0} s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} = (x+y-1)^{x+y-1} \frac{s^{y-1} e^{-1}}{(1+s)^{x+y-1}} \asymp \frac{1}{s^x}, \quad s \to \infty.$$

Тогда имеет место равномерная сходимость интегралов и в (100) можно переставить интегралы местами:

$$(100) = \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)} ds = \int\limits_0^\infty e^{x+y-1} e^{-u} \left(\int\limits_0^\infty s^{y-1} e^{-us} ds \right) du =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^{x-1} e^{-u} \left(\int\limits_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right) du = \int\limits_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \times \int\limits_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt.$$

$\square$

Лекция 25. Формула дополнения для гамма-функции

Связь гамма- и бета-функции

Напомним, мы рассматриваем гамма-функцию

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

и бета-функцию

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Завершим доказательство теоремы 24.1.

Теорема 24.1.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0. \tag{101}$$

Доказательство. Напомним, в прошлый раз доказали соотношение (101) для $x, y > 1$.

Возьмем теперь $\forall\ x, y > 0$. Воспользуемся формулами понижения:

$$B(x, y) = \frac{x+y}{x}B(x+1, y) = \frac{x+y}{x}\frac{x+y+1}{y}B(x+1, y+1) =$$

$$= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} =$$

$$= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

Формула дополнения

Рассмотрим частный случай формулы (101) при $x + y = 1$. Тогда

$$B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x), \quad x \in (0, 1). \tag{102}$$

Оказывается, что для $x + y = 1$ значение (102) можно вычислить.

Теорема 25.1.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in (0, 1). \tag{103}$$

Доказательство. При $x = 1/2$ равенство (103), конечно, верно:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

– это следует из (89). Можно вычислить это значение и другим путем:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

Используем это наблюдение для доказательства.

Воспользовавшись заменой $t = \frac{1}{1+u}$, получим

$$B(x, 1-x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt = \int\limits_0^\infty \frac{u^{-x}}{1+u}du, \quad x \in (0,1).$$

Пусть $x = p/q$, $0 < p < q$. Тогда

$$B\left(\frac{p}{q}, 1-\frac{p}{q}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{u^{-p/q}}{1+u}du =$$

$$= 2q\int\limits_0^\infty \frac{v^{2q-2p-1}}{1+v^{2q}}dv. \tag{104}$$

Здесь сделали замену $u = v^{2q}$. Далее,

$$\frac{v^{2q-2p-1}}{1+v^{2q}} = \frac{qv^{2q-2p-1}}{\prod\limits_{k=1}^q \left(v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^q \frac{\alpha_k v + \beta_k}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1}.$$

Отсюда

$$\frac{v^{2q-2p-1}}{1+v^{2q}} = \sum_{k=1}^q (\alpha_k v + \beta_k)\frac{1+v^{2q}}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1}. \tag{105}$$

Заметим, что под знаком суммы стоит многочлен, так как $1 + v^{2q}$ распадается в произведение. Подставив в (105) корни многочлена, то есть $v = \exp\left\{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}\right\}$, получим

$$qe^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}} = \left(\alpha_k e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}} - \beta_k\right) \lim_{v \to e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}}} \frac{v^{2q+1}}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1}. \tag{106}$$

Можно воспользоваться правилом Лопиталя для (106):

$$qe^{\frac{i\pi(2k-1)(2q-2p-1)}{2q}} = \left(\alpha_k e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}} + \beta_k\right) \frac{2qe^{\frac{i\pi(2k-1)(2q-1)}{2q}}}{2\left(e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}} - \cos\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}.$$

Здесь предел опускается, так как $\exp\left\{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}\right\}$ – простой корень.

Далее,

$$e^{\frac{i\pi(2k-1)(2q-2p-1)}{2q}} i\sin\frac{i\pi(2k-1)}{2q} = \alpha_k e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2q}} + \beta_k,$$

$$\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2q} = \alpha_k\cos\frac{\pi(2k-1)}{2q} + \beta_k,$$

$$cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2q} = \alpha_k\sin\frac{\pi(2k-1)}{2q},$$

откуда

$$\alpha_k = \cos\frac{|pi(2k-1)p}{q}, \quad \beta_k = -\cos\frac{\pi(2k-1)(2p+1)}{2q}.$$

Вернемся к интегралу:

$$(104) = 2\int\limits_0^\infty \sum_{k=1}^q \frac{v\cos\frac{\pi(2k-1)p}{q} - \cos\frac{\pi(2k-1)(2p+1)}{2q}}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1} dv. \tag{107}$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$\int\left(\left(\frac{\cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}\left(v - \cos\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1}\right) + \frac{\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2q}}{v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)v + 1}\right) dv =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}\ln\left(v^2 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)p}{q}\right)v + 1\right) +$$

$$+ \sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v - \cos\frac{\pi(2k-1)p}{2q}}{\sin\frac{\pi(2k-1)p}{2q}} =: \frac{1}{2}A_k(v) + B_k(v).$$

Тогда

$$(107) = \left(\sum_{k=1}^q A_k(v)\right)\Big|_0^\infty + \left(2\sum_{k=1}^q B_k(v)\right)\Big|_0^\infty.$$

Вычислим такие суммы:

$$\lim_{v\to\infty}\sum_{k=1}^q A_k(v) = \lim_{v\to\infty} 2\ln v\sum_{k=1}^q \cos\frac{\pi(2k-1)p}{q} +$$

$$+ \sum_{k=1}^q \cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}\lim_{v\to\infty}\ln\left(1 - 2\cos\frac{\pi(2k-1)}{2q}\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2}\right). \tag{108}$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}=\sum_{k=1}^{q}\frac{\cos\frac{\pi(2k-1)p}{q}2\sin\frac{\pi k}{q}}{2\sin\frac{\pi k}{q}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi x}{q}}\sum_{k=1}^{q}\left(\sin\frac{\pi 2kx}{q}-\sin\frac{\pi 2(k-1)x}{q}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi 2qp}{q}-\sin 0}{2\sin\frac{\pi p}{q}}=0,$$

так как $p\in\mathbb{N}$. Следовательно, предел (108) равен 0.

Для $v=0$, очевидно, $\sum\limits_{k=1}^{q}A_k(v)=0$. Далее,

$$2\sum_{k=1}^{q}B_k(0)=-2\sum_{k=1}^{q}\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(2k-1)}{2q}\right)=$$

$$=-\pi\sum_{k=1}^{q}\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}+2\sum_{k=1}^{q}\frac{\pi(2k-1)}{2q}\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}=$$

$$=\sum_{k=1}^{q}\frac{\pi(2k-1)}{q}\sin\frac{\pi(2k-1)p}{q}=\left(-\sum_{k=1}^{q}\cos\frac{\pi(2k-1)}{q}x\right)'_{x=p}=\left(-\frac{\sin 2\pi x}{2\sin\frac{\pi x}{q}}\right)'_{x=p}=$$

$$=-\frac{2\pi\cos 2\pi p}{2\sin\frac{\pi p}{q}}=-\frac{\pi}{\sin\frac{\pi p}{q}}.$$

Итак, получаем, наконец, что

$$(104)=2q\int_{0}^{\infty}\frac{v^{2q-2p-1}}{1+v^{2q}}dv=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi p}{q}}.$$

Итак, доказали теорему для $x=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $p<q$. Для иррациональных x формула продолжается по непрерывности. $\square$

Лекция 26. Асимптотика интеграла типа Лапласа

Асимптотика для случая краевого максимума

Исследуем асимптотику конкретного семейства интегралов, зависящих от параметра.

Пусть

$$F(x) = \int\limits_a^b f(y)e^{xg(y)}dy. \tag{109}$$

Здесь $[a, b]$ – отрезок (хотя, конечно, может быть луч или прямая). $e^{xg(y)}$ – ядро. Например, для $g = -y$

$$F(x) = \int_0^\infty f(y)e^{-xy}dy \tag{110}$$

– преобразование Лапласа.

Наша цель – изучить поведение (109) при $x \to \infty$.

Теорема 26.1. *Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$ $g \in C^1[a, b]$, $g'(a) < 0$,*

$$g(x) < g(a) \ \forall \ x \in (a, b].$$

Тогда

$$F(x) \sim -\frac{f(a)}{xg'(a)}e^{xg(a)}, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\delta > 0$ (какое – уточним позднее),

$$\max_{[a+\delta,b]} g(y) < g(a).$$

Положим

$$\varepsilon_0 = g(a) - \max_{[a+\delta,b]} g(y).$$

Разобъем следующий интеграл на два:

$$\int\limits_a^b f(y)e^{xg(a)}dy = \int\limits_a^{a+\delta} f(y)e^{xg(a)}dy + \int\limits_{a+\delta}^b f(y)e^{xg(a)}dy. \tag{111}$$

Оценим

$$\left|\int\limits_{a+\delta}^b f(x)e^{xg(y)}dy\right| \leq \max_{[a,b]}|f(y)|e^{x\max\limits_{[a+\delta,b]}g(y)}(b-a) =$$

$$= (b-a)\max_{[a,b]}|f(y)|e^{xg(a)}e^{-\varepsilon_0 x} = o\left(\frac{e^{xg(a)}}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Далее, $\exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ y \in [a, a+\delta_1]$ $g'(y) < 0$. Хотим сделать замену в первом из интегралов (111): $t = g(a) - g(y) \nearrow [a, a+\delta_1]$, и пусть $\delta \le \delta_1$. Обратная функция $y = y(t) \nearrow [0, g(a) - g(a+\delta)]$, $y'_t = -1/g'_y$. Тогда

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(y)e^{xg(y)}dy = -\int\limits_0^{g(a)-g(a+\delta)} \frac{f(y(t))}{g'(y(t))}e^{xg(a)}e^{-xt}dy. \tag{112}$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \le \delta_1$ такое, что $\forall\ t \in [0, g(a) - g(a+\delta)]$

$$\left|\frac{f(y(t))}{g'(y(t))} - \frac{f(a)}{g'(a)}\right| < \varepsilon.$$

Как раз такое δ и должны были выбрать в самом начале доказательства.

Вернемся к интегралу (112):

$$\int\limits_a^{a+\delta} f(y)e^{xg(y)} = -\frac{f(a)}{g'(a)}e^{xg(a)} \int\limits_0^{g(a)-g(a+\delta)} e^{-xt}dt+$$

$$+e^{xg(a)} \int\limits_0^{g(a)-g(a+\delta)} \left(\frac{f(a)}{g'(a)} - \frac{f(y(t))}{g'(y(t))}\right) e^{-xt}dt.$$

Разберемся с первым интегралом:

$$\int\limits_0^{g(a)-g(a+\delta)} e^{-xt}dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-xt}dt - \int\limits_{g(a)-g(a+\delta)}^{\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Для второго из интегралов справедлива оценка

$$\left|\int\limits_0^{g(a)-g(a+\delta)} \left(\frac{f(a)}{g'(a)} - \frac{f(y(t))}{g'(y(t))}\right) e^{-xt}dt\right| < \varepsilon \int\limits_0^{\infty} e^{-xt}dt = \frac{\varepsilon}{x}.$$

Итак, асимптотика (110) показана. □

Асимптотика через вторую производную

Теорема 26.2. *Пусть $f > 0$ и $f \in C[a,b]$, $g \in C^2[a,b]$, для $y_0 \in (a,b)$ $g''(y_0) < 0$ и $g(y) < g(y_0)\ \forall\ x \in [a,b] \setminus \{y_0\}$.*

Тогда

$$F(x) \sim f(y_0)\sqrt{-\frac{2\pi}{xg''(y_0)}}e^{xg(y_0)}. \tag{113}$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда

$$\varepsilon_0 = g(y_0) - \max_{[a,b]\setminus(y_0-\delta,y_0+\delta)} g(y) > 0.$$

Заметим, что $g'(y_0) = 0$. $\exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$ $g''(y) < 0$, то есть $g'(y) \searrow$ на $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$. Отсюда

$$g'(y) > 0\ \forall\ (y_0 - \delta_1, y_0),$$

$$g'(y) < 0\ \forall\ (y_0, y_0 + \delta_1).$$

Далее,

$$\int\limits_a^b f(y)e^{xg(y)}dy = \int\limits_a^{y_0-\delta} f(y)e^{xg(y)}dy + \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} f(y)e^{xg(y)}dy + \int\limits_{y_0+\delta}^{b} f(y)e^{xg(y)}dy.$$

Оценим

$$\left|\left(\int\limits_a^{y_0-\delta} + \int\limits_{y_0+\delta}^{b}\right) f(y)e^{xg(y)}dy\right| \le$$

$$\le \max_{[a,b]}|f(y)|(b-a)e^{x\max\limits_{[a,b]\setminus(y_0-\delta,y_0+\delta)} g(y)} = (b-a)\max f(y)e^{xg(y_0)}e^{-\varepsilon_0 x} = o\left(\frac{e^{xg(y_0)}}{\sqrt{x}}\right).$$

Теперь,

$$\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} f(y)e^{xg(y)}dy = \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0} f(y)e^{xg(y)}dy + \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} f(y)e^{xg(y)}dy. \tag{114}$$

Сделаем в первом из интегралов замену $t = \sqrt{g(y_0) - g(y)}$. Обратная замена

$$y = y(t) \searrow [0, \sqrt{g(y_0) - g(y_0 - \delta)}],$$

ее производная

$$y'_t = \frac{1}{t'_y} = -\frac{2\sqrt{g(y_0) - g(y)}}{g'(y)}.$$

Получим

$$\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0} f(y)e^{xg(y)}dy = -\int\limits_{\sqrt{g(y_0)-g(y_0-\delta)}}^{0} \frac{2f(y(t))\sqrt{g(y_0) - g(y(t))}}{g'(y(t))}e^{xg(y_0)}e^{-xt^2}dt.$$

Разложим по формуле Пеано в y'_t числитель и знаменатель:

$$\frac{2\sqrt{g(y_0) - g(y)}}{g'(y)} = \frac{2\sqrt{-\frac{g''(y_0)}{2}(y-y_0)^2 + o\left((y-y_0)^2\right)}}{g''(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{-2g''(y_0)+o(1)}}{-g''(y_0)+o(1)} \;\to\; \sqrt{-\frac{2}{g''(y_0)}}, \quad y \to y_0.$$

Для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \le \delta_1$ такое, что $\forall\ t \in [0, \sqrt{g(y_0)-g(y_0-\delta)}]$

$$\left|\frac{2f(y(t))\sqrt{g(y_0)-g(y(t))}}{g'(y(t))} - f(y_0)\sqrt{-\frac{2}{g''(y_0)}}\right| < \varepsilon.$$

Далее,

$$\int\limits_0^{\sqrt{g(y_0)-g(y_0-\delta)}} f(y_0)\sqrt{-\frac{2}{g''(y_0)}} e^{xg(y)} e^{-xt^2} dt =$$

$$= f(y_0)\sqrt{-\frac{2}{g''(y_0)}}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-xt^2} dt - \int\limits_{\sqrt{g(y_0)-g(y_0-\delta)}}^{\infty} e^{-xt^2} dt\right) = f(y_0)\sqrt{-\frac{\pi}{2g''(y_0)x}} e^{g(y_0)}.$$

Аналогично для второго интеграла (114) (проверить самостоятельно). Соотношение (113) показано. $\square$

Лекция 27. Формулы Валлиса и Стирлинга

Формулы Валлиса и Стирлинга

Рассмотрим несколько примеров к утверждению теоремы 26.2.

Пример 27.1. (формула Валлиса)

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2n} x dx = \int\limits_0^\pi e^{2n \ln \sin x} dx. \tag{115}$$

Воспользуемся теоремой 26.2. Вторая производная

$$(\ln \sin x)'' = (\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

При $x = \pi/2$

$$(\ln \sin x)'' \Big|_{x=\pi/2} = -1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2n} x dx \sim \sqrt{+\frac{2\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Вспомнив, что

$$\int\limits_0^\pi \sin^{2n} x dx = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

получим

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty. \tag{116}$$

Пример 27.2. (Формула Стирлинга) Выведем формулу Стирлинга произвольных x. Распишем

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} dt = \in_0^\infty e^{-t} e^{x \ln t} dt.$$

Сделаем замену $t = xu$. Тогда

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty x^{x+1} u^x e^{-xu} = x^{x+1} \int\limits_0^\infty e^{x(\ln u - u)}. \tag{117}$$

Отсюда получаем *формулу Стирлинга*:

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad x \to \infty. \tag{118}$$

Уточнение формулы Валлиса

Уточним формулу Валлиса (116).

Сделаем в интеграле (115) замену $-\ln\sin x = y$, $x \in (0, \pi/2]$, откуда $x = \arcsin e^{-y}$. Получим

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} x dx = -2\int\limits_0^{\infty} e^{-2ny} d\arcsin e^{-y} =$$

$$= 2\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{1-e^{-2y}}} e^{-2ny} dy. \tag{119}$$

Найдем разложение функции под знаком интеграла (119) (опуская множитель e^{-2ny}):

$$\frac{e^{-y}}{\sqrt{1-e^{-2y}}} = \frac{1-y+y^2/2+o(y^2)}{\sqrt{2y-2y^2+4y^3/3+o(y^3)}} = \frac{1-y+y^2/3+o(y^2)}{\sqrt{2y}\left(1-y+2y^2/3+o(y^2)\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2y}}\left(1-y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)\left(1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{3}+\frac{3}{8}y^2+o(y^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{24}+o(y^2)\right).$$

Тогда

$$(119) = \sqrt{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-2ny} dy - \sqrt{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{2} e^{-2ny} dy +$$

$$+\sqrt{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{y^{3/2}}{24} e^{-2ny} dy + \sqrt{2}\int\limits_0^{\infty} o(y^{3/2}) e^{-2ny} dy =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(1/2\right)}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Gamma(3/2)}{(2n)^{3/2}} + \frac{\sqrt{2}}{24}\frac{\Gamma(5/2)}{(2n)^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right),$$

так как, например,

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-2ny} = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{z}} e^{-z} \frac{dz}{2n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n}}\int\limits_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} dz,$$

если сделать замену $2ny = z$ (остальные интегралы вычисляются аналогично).

Итак, получили уточненную формулу Валлиса

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{128n^2} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{128n^2}{+} o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right).$$

Уточнение формулы Стирлинга

Хотим теперь уточнить формулу Стирлинга (116).

Начнем с интеграла (117):

$$x^{x+1}\int\limits_0^\infty e^{x(\ln u-u)}du = x^{x+1}e^{-x}\int\limits_0^\infty e^{x(\ln u-u+1)}du.$$

Разобъем

$$\int\limits_0^\infty e^{x(\ln u-u+1)}du = \int\limits_0^1 e^{x(\ln u-u+1)}du + \int\limits_1^\infty e^{x(\ln u-u+1)}du.$$

Сделаем для интеграла по $[0,1]$ замену $\ln u - u + 1 = -y$, $(1/u-1)du = -dy$. Тогда

$$\int\limits_0^1 e^{x(\ln u-u+1)}du = -\int\limits_0^\infty e^{-xy}du(y) = \int\limits_0^\infty \frac{u}{1-u}e^{-xy}dy.$$

Так как $x\to\infty$, все поведение подынтегральной функции $\frac{u}{1-u}e^{-xy}$ сосредоточено в окрестности 0.

Пусть $v = 1-u$. Тогда

$$\ln(1-v)+v = -y, \tag{120}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{u}{1-u}e^{-xy}dy = \int\limits_0^\infty \frac{1-v}{v}e^{-xy}dy. \tag{121}$$

Когда $v\to 0$, (120) близко к

$$-\frac{v^2}{2}+o(v^2) = -y,$$

откуда

$$\frac{v^2}{2}\sim y,\quad v=\sqrt{2y},\quad y\to +0,$$

то есть

$$v=\sqrt{2y}+w,\quad w=o(\sqrt{y}).$$

Подставляя это представление в (120), получим

$$\ln\left(1-\sqrt{2y}-w\right)+\sqrt{2y}+w=-y,$$

откуда получаем

$$-y = \sqrt{2y}w - \frac{2\sqrt{2}y\sqrt{y}}{3} + o(y^{3/2}) = -y,$$

$$w\sim -\frac{2y}{3},\quad y\to 0,$$

то есть

$$w = -\frac{2y}{3}+z,\quad z=o(y).$$

Повторяем процедуру для уточненного w:

$$\ln\left(1-\sqrt{2y}+\frac{2y}{3}-z\right)+2y-\frac{2y}{3}+z=-y,$$

откуда

$$-\frac{\left(-\sqrt{2y}+\frac{2y}{3}-z\right)^2}{2}+\frac{\left(-\sqrt{2y}+\frac{2y}{3}-z\right)^3}{3}-\frac{\left(-\sqrt{2y}+\frac{2y}{3}-z\right)^4}{4}+o(y^2)=-y.$$

Выделим члены до степени y^2:

$$-y+\frac{2\sqrt{2}}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{9}y^2-\sqrt{2y}z-\frac{2\sqrt{2}y\sqrt{y}}{3}+\frac{4y^2}{3}-y^2+o(y^2)=-y,$$

откуда получаем

$$\sqrt{2y}z\sim\frac{y^2}{9},$$

то есть

$$\sqrt{z}\sim\frac{\sqrt{2y}y}{18}.$$

Итак, получили, что

$$v=\sqrt{2y}-\frac{2y}{3}+\frac{\sqrt{2}}{18}y^{3/2}+o(y^{3/2}).$$

Подставим это представление в (121):

$$\int\limits_0^\infty\frac{1-v}{v}e^{-xy}dy=\int\limits_0^\infty\frac{1-\sqrt{2y}+\frac{2}{3}y+o(y)}{\sqrt{2y}\left(1-\frac{\sqrt{2y}}{3}+\frac{y}{18}+o(y)\right)}e^{-xy}dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2y}}\left(1-\frac{2\sqrt{2y}}{3}+\frac{y}{16}+o(y)\right)e^{-xy}dy=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2y}}e^{-xy}dy-\int\limits_0^\infty\frac{2}{3}e^{-xy}dy+\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{2y}}{12}e^{-xy}dy+\int\limits_0^\infty o(\sqrt{y})e^{-xy}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}-\frac{2}{3x}+\frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right),\quad x\to\infty.\qquad(122)$$

Задача 27.1. *В качестве упражнения остается показать, что*

$$\int\limits_1^\infty e^{x(\ln u-u+1)}du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}+\frac{2}{3x}+\frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right),\quad x\to\infty.\qquad(123)$$

Сложим (122) и (123):

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{12x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right).$$

Получили *уточненную формулу Стирлинга*

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ