МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
ВЫПУСКНИКА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ФИЛИППОВА ВЛАДИСЛАВА ИГОРЕВИЧА

Содержание

Лекция 1

Интеграл Ньютона

Рассмотрим физическую задачу о движении материальной точки вдоль прямой. Если известен закон движения, то, вычисляя производную, можно найти скорость в произвольный момент времени. Поставим обратную задачу: по известному закону изменения скорости от времени определить закон движения материальной точки. Для решения этой задачи требуется определить интеграл Ньютона.

Определение 1.1. Функция f называется *интегрируемой в смысле Ньютона на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists F \in D[a;\, b]: \qquad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b].$$

Обозначение: $f \in N[a;\, b]$.

Определение 1.2. Функция $F(x)$ называется *неопределённым интегралом Ньютона (первообразной)* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Определение 1.3. Величина

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (N)\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *определённым интегралом Ньютона* функции $f(x)$ по отрезку $[a;\, b]$.

Свойства интеграла Ньютона

Теорема 1.1 (Единственность неопределённого интеграла Ньютона (с точностью до аддитивной константы))**.** *Пусть $f \in N[a;\, b]$ и F_1, F_2 – неопределённые интегралы $f(x)$. Тогда*

$$\exists C \in \mathbb{R}: \qquad F_2(x) = F_1(x) + C \quad \forall x \in [a;\, b].$$

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда $\Phi(x) \in D[a;\, b]$ и

$$\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$\forall x_0 \in [a;\, b]$ $\forall x \in [a;\, b]$ на отрезке с концами x_0 и x выполнены условия теоремы Лагранжа. Тогда

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Phi'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Значит, $\Phi(x) = \Phi(x_0)$ $\forall x \in [a;\, b]$. ■

Сформулируем следствие из теоремы (1.1).

Утверждение 1.1 (Единственность определённого интеграла Ньютона)**.** *Пусть* $f \in N[a;\, b]$*. Тогда* $(N)\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *единственный.*

Доказательство:

Пусть $F_2(x) = F_1(x) + C$. Тогда

$$F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a).$$

■

Теорема 1.2 (Линейность интеграла Ньютона)**.** *Пусть* $f, g \in N[a;\, b]$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Тогда* $\lambda f + \mu g \in N[a;\, b]$*, причём*

$$\int\limits_a^b \lambda f + \mu g\,dx = \lambda \int\limits_a^b f\,dx + \mu \int\limits_a^b g\,dx.$$

Доказательство:

Так как $f, g \in N[a;\, b]$, то

$$\exists F, G \in D[a;\, b]\colon \quad F'(x) = f(x),\ \ G'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a;\, b].$$

Тогда $\lambda F + \mu G \in D[a;\, b]$ и $(\lambda F + \mu G)'(x) = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$. ■

Теорема 1.3 (Аддитивность интеграла Ньютона)**.**

1) Пусть $f \in N[a;\, b]$*. Тогда* $\forall [c;\, d] \subset [a;\, b] \quad f \in N[c;\, d]$*.*

2) Пусть $f \in N[a;\, c] \cap N[c;\, b]$*, где* $c \in (a;\, b)$*. Тогда* $f \in N[a;\, b]$*, причём*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

1) $\exists F \in D[a;\, b]\colon \quad F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a;\, b]$, в частности $\forall x \in [c;\, d]$.

2) $\exists F \in D[a;\, c] \cap [c;\, b]$. Тогда $F \in D[a;\, b]$, причём

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, c] \cup [c;\, b] = [a;\, b].$$

Так как $F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

■

Теорема о замене переменной. Теорема об интегрировании по частям

Теорема 1.4 (Теорема о замене переменной)**.** *Пусть* $f \in N[a;\, b]$ *и функция* $\varphi \in D[\alpha;\, \beta]$ *строго возрастает, причём* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$*. Тогда* $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \in N[\alpha;\, \beta]$ *и*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Доказательство:

Так как $f \in N[a;\, b]$, то $\exists F \in D[a;\, b]\colon\ F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in [a;\, b]$. Кроме этого, $\varphi \in \in D[\alpha;\, \beta]$. Тогда $F(\varphi(t)) \in D[\alpha;\, \beta]$ как композиция дифференцируемых функций, причём $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \ \forall t \in [\alpha;\, \beta]$. Тогда получаем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(x)\Big|_{a}^{b} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

■

Теорема 1.5 (Теорема об интегрировании по частям)**.** *Пусть* $u, v \in D[a;\, b]$*, причём* $u'(x)v(x) \in N[a;\, b]$*. Тогда* $v'(x)u(x) \in N[a;\, b]$*, причём*

$$\int\limits_{a}^{b} v'(x)u(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} u'(x)v(x)\, dx.$$

Доказательство:

Так как $u'(x)v(x) \in N[a;\, b]$, то $\exists F \in D[a;\, b]:\ \ F'(x) = u'(x)v(x)$. Тогда $G(x) = = u(x)v(x) - F(x) \in D[a;\, b]$, причём

$$G'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) - u'(x)v(x) = v'(x)u(x).$$

Равенство определённых интегралов следует из линейности операции подстановки $\Big|_{a}^{b}$. ■

Таблица интегралов

Выпишем таблицу производных:

$$\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n; \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}; \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x; \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2}; \qquad \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}.$$

На её основе составим таблицу интегралов (аддитивную произвольную константу для кратности писать не будем):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|; \qquad \int e^x\,dx = e^x;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x; \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x; \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x; \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x; \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x; \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|; \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x.$$

Обобщённый интеграл Ньютона

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не является интегрируемой по Ньютону на отрезке $[-1;\ 1]$. Чтобы была возможность проинтегрировать эту функцию, необходимо обобщить понятие интеграла Ньютона.

Определение 1.4. Функция f называется *обобщённо интегрируемой по Ньютону на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists F \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b] \setminus E)\colon \qquad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b] \setminus E,$$

где множество E не более чем счётно.

Обозначение: $f \in GN[a;\, b]$.

Определение 1.5. Функция $F(x)$ называется *обобщённым неопределённым интегралом Ньютона (обобщённой первообразной)* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Определение 1.6. Величина

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (GN)\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *обобщённым определённым интегралом Ньютона* функции $f(x)$ по отрезку $[a;\, b]$.

Лекция 2

Свойства обобщённого интеграла Ньютона

Теорема 2.1 (Единственность обобщённого неопределённого интеграла Ньютона (с точностью до аддитивной константы)). *Пусть $f \in GN[a;\, b]$ и F_1, F_2 – обобщённые первообразные f. Тогда*

$$\exists C \in \mathbb{R}\colon\ F_2(x) = F_1(x) + C \quad \forall x \in [a;\, b].$$

Доказательство:

Пусть $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда $\Phi(x) \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b] \setminus E)$, где E не более чем счётно, так как $F_1 \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b] \setminus E_1)$ и $F_2 \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b] \setminus E_2)$, где E_1 и E_2 не более чем счётны. Значит, $\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = 0 \ \ \forall x \in [a;\, b] \setminus E$.

Предположим, что $\Phi(x)$ не является постоянной, то есть

$$\exists \alpha, \beta \in [a;\, b]\colon \qquad \alpha < \beta \quad \text{и} \quad \varepsilon = |\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| > 0.$$

Пусть E – счётное множество (случай конечного множества более простой). Тогда $E = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, причём $\Phi \in C(x_k) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Значит, получаем:

$$\exists \delta(x_k) > 0\colon \qquad \forall x \in U_{\delta(x_k)}(x_k) \qquad |\Phi(x) - \Phi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Кроме этого, $\forall t \in [a;\, b] \setminus E \ \ \Phi \in D(t)$ и $\Phi'(t) = 0$. Значит, получаем:

$$\exists \delta(t)\colon \qquad \forall x \in U_{\delta(t)}(t) \qquad \left|\frac{\Phi(x) - \Phi(t)}{x - t}\right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}.$$

Так как $[\alpha;\, \beta] \subset \left\{U_{\delta(t)}(t),\, U_{\delta(x_k)(x_k)}\right\}$, то $\exists \{t_n\}_{n=1}^{N}\colon \ \ [\alpha;\, \beta] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} U_{\delta(t_n)}(t_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\left\{U_{\delta(t_n)}\right\}$ – минимальное покрытие отрезка $[\alpha;\, \beta]$, то есть никакую окрестность $U_{\delta(t_n)}$ удалить из покрытия нельзя без того, чтобы система $\left\{U_{\delta(t_n)}\right\}$ не перестала быть покрытием. Также без ограничения общности будем считать, что $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$.

Пусть $\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{N-1} < y_N = \beta$, где

$$y_1 \in U_{\delta(t_1)} \cap U_{\delta(t_2)}, \quad \ldots, \quad y_{N-1} \in U_{\delta(t_{N-1})} \cap U_{\delta(t_N)}.$$

Тогда получаем:

$$|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\Phi(y_n)-\Phi(y_{n-1})| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(|\Phi(y_n)-\Phi(t_n)|+|\Phi(t_n)-\Phi(y_{n-1})|\right) =$$

$$= \sum_{t_n\notin E} \left(|\Phi(y_n)-\Phi(t_n)|+|\Phi(t_n)-\Phi(y_{n-1})|\right) +$$

$$+ \sum_{t_n\in E} \left(|\Phi(y_n)-\Phi(t_n)|+|\Phi(t_n)-\Phi(y_{n-1})|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t_n\notin E} \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}(y_n-y_{n-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cdot\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но $|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)| = \varepsilon$. Получили противоречие. Значит, $\Phi(x)$ является постоянной. ■

Сформулируем следствие из теоремы (2.1).

Утверждение 2.1 (Единственность обобщённого определённого интеграла Ньютона). *Пусть $f \in GN[a;\, b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ единственный.*

Доказательство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F_1(b)-F_1(a) = F_2(b)-F_2(a).$$

■

Теперь можем проинтегрировать функцию $\operatorname{sgn} x$ в обобщённом смысле:

$$\int \operatorname{sgn} x\,dx = |x|.$$

Теорема 2.2 (Линейность обобщённого интеграла Ньютона). *Пусть $f, g \in GN[a;\, b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f + \mu g \in GN[a;\, b]$, причём*

$$\int\limits_a^b \lambda f + \mu g\,dx = \lambda\int\limits_a^b f\,dx + \mu\int\limits_a^b f\,dx.$$

Доказательство:

$\exists F, G \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b]\setminus E)$, где E не более чем счётно, причём $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)\ \ \forall x \in [a;\, b]\setminus E$. Тогда $\lambda F + \mu G \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b]\setminus E)$, причём $(\lambda F + \mu G)' = \lambda f + \mu g\ \ \forall x \in [a;\, b]\setminus E$. ■

Теорема 2.3 (Аддитивность обобщённого интеграла Ньютона)**.**

1) Пусть $f \in GN[a;\, b]$*. Тогда* $\forall [c;\, d] \subset [a;\, b] \quad f \in GN[c;\, d]$*.*

2) Пусть $f \in GN[a;\, c] \cap GN[c;\, b]$*, где* $c \in (a;\, b)$*. Тогда* $f \in GN[a;\, b]$*, причём*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

1) $\exists F \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b] \setminus E)$, где E не более чем счётно, причём $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a;\, b] \setminus E$, в частности $\forall x \in [c;\, d] \setminus E_1$, где $E_1 \subset E$ – не более чем счётное множество.

2) $\exists F \in C[a;\, c] \cap C[c;\, b]$. Тогда при соответствующем выборе аддитивной константы $F \in C[a;\, b]$. Кроме этого, $F \in D[a;\, c] \setminus E_1$ и $F \in D[c;\, b] \setminus E_2$, где E_1 и E_2 не более чем счётны, то $F \in D[a;\, b] \setminus E$, где $E = E_1 \cup E_2$ – не более чем счётное множество, причём

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b] \setminus E.$$

Так как $F(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

■

Теорема о замене переменной. Теорема об интегрировании по частям

Теорема 2.4 (Теорема о замене переменной)**.** *Пусть* $f \in GN[a;\, b]$ *и функция* $\varphi \in C[\alpha;\, \beta] \cap D([\alpha;\, \beta] \setminus E)$*, где* E *не более чем счётно, строго возрастает, причём* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) = b$*. Тогда* $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \in GN[\alpha;\, \beta]$ *и*

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как $f \in GN[a;\, b]$, то $\exists F \in C[a;\, b] \cap D[a;\, b] \setminus E_1$, где E_1 не более чем счётно, причём $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b] \setminus E_1$. Так как φ – биекция, то $\varphi^{-1}(E_1) = E_2$

не более чем счётно. Пусть $E_3 = E_2 \cup E$, тогда E_3 не более чем счётно. Тогда $F(\varphi(t)) \in C[\alpha;\, \beta] \cap D[\alpha;\, \beta] \setminus E_3$ как композиция непрерывных и дифференцируемых функций, причём $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in [\alpha;\, \beta] \setminus E_3$. Тогда получаем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(x)\Big|_{a}^{b} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

■

Теорема 2.5 (Теорема об интегрировании по частям)**.** *Пусть $u, v \in C[a;\, b] \cap \cap D[a;\, b] \setminus E$, где E не более чем счётно, причём $u'(x)v(x) \in GN[a;\, b]$. Тогда $v'(x)u(x) \in GN[a;\, b]$, причём*

$$\int\limits_{a}^{b} v'(x)u(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} u'(x)v(x)\, dx.$$

Доказательство:

Так как $u'(x)v(x) \in GN[a;\, b]$, то $\exists F \in C[a;\, b] \cap D[a;\, b] \setminus E_1 \colon\; F'(x) = u'(x)v(x) \quad \forall x \in \in [a;\, b] \setminus E_1$, где E_1 не более чем счётно. Пусть $E_2 = E \cup E_1$, тогда E_2 не более чем счётно. Тогда $G(x) = u(x)v(x) - F(x) \in C[a;\, b] \cap D[a;\, b] \setminus E_2$, причём

$$G'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) - u'(x)v(x) = v'(x)u(x) \qquad \forall x \in [a;\, b] \setminus E_2.$$

Равенство определённых интегралов следует из линейности операции подстановки $\Big|_{a}^{b}$. ■

Лестница Кантора

Рассмотрим множество Кантора $C = [0;\, 1] \setminus \{\Delta_m^k\}$, где Δ_m^k – m-й интервал, вынимаемый на k-м шаге построения множества (нумерация шагов и нумерация интервалов на каждом шаге начинается с 1).

Построим функцию $K(x)$, заданную на отрезке $[0;\, 1]$ и называемую *лестницей Кантора*. Пусть $K(0) = 0$ и $K(1) = 1$. Далее на каждом интервале Δ_m^k будем задавать значение как среднее арифметическое двух уже имеющихся соседних значений слева и справа от интервала:

1) $K(x) = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \forall x \in \Delta_1^1;$

2) $K(x) = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \quad \forall x \in \Delta_1^2; \qquad K(x) = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{2} = \dfrac{3}{4} \quad \forall x \in \Delta_2^2;$

$\vdots$

Мы построили функцию $K(x)$ при $x \in [0;\,1] \setminus C$. Пусть

$$K(x) = \sup_{t \in \Delta_m^k,\ \Delta_m^k < x} K(t) \qquad \forall x \in C.$$

Теперь $K(x)$ определена при $x \in [0;\,1]$. Исследуем свойства этой функции.

Утверждение 2.2. $K(x)$ *не убывает на* $[0;\,1]$.

Доказательство:

1) Если $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in \Delta_m^k$, то $K(x_1) = K(x_2)$.

2) Если $x_1 < x_2$ и $x_1 \in \Delta_{m_1}^{k_1}$, $x_2 \in \Delta_{m_2}^{k_2}$, то $K(x_1) < K(x_2)$.

3) Если $x_1 < x_2$ и $x_1 \in \Delta_m^k$, $x_2 \in C$, то $K(x_1) \leqslant K(x_2)$.

4) Если $x_1 < x_2$ и $x_1, x_2 \in C$, то $\exists \Delta_n^k\colon\ x_1 < \Delta_n^k < x_2$. Тогда $K(x_1) < K(x_2)$.

■

Утверждение 2.3. $K(x) \in C[0;\,1]$.

Доказательство:

Предположим, что $K \notin C[0;\,1]$ и x_0 – точка разрыва. Так как $K(x)$ – монотонная функция, то x_0 – точка разрыва 1-го рода. Тогда $\exists (\alpha;\,\beta)$, не покрываемый значениями $K(x)$. Это невозможно, так как все значения вида $\dfrac{p}{2^k}$ принимаются функцией $K(x)$. Значит, наше предположение неверно. Тогда $K(x) \in C[0;\,1]$. ■

Утверждение 2.4. $K(x) \in D([0;\,1] \setminus C)$, *причём* $K'(x) = 0 \ \ \forall x \in [0;\,1] \setminus C$.

Доказательство:

Точка, дополнительная к канторову множеству, лежит на одном из интервалов Δ_m^k, на которых $K(x)$ постоянна, а тогда $K'(x) = 0$ на этом интервале. ■

Этот пример показывает, что в определении обобщённого интеграла Ньютона нельзя исключительное не более чем счётное множество заменить на исключительное множество меры 0 (если не накладывать дополнительные требования), иначе интеграл не будет обладать свойством единственности (с точностью до аддитивной константы). В самом деле, например, производная константы на отрезке $[0;\,1]$ равна 0 и производная $K(x)$ на отрезке $[0;\,1]$ тоже равна 0.

Лекция 3

Мотивация построения интеграла Римана

Пусть S – площадь криволинейной трапеции, задаваемой функцией $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$. Разобьём её на меньшие трапеции с площадями S_k точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, как показано на рисунке. Пусть $x_0 = a$ и $x_n = b$.

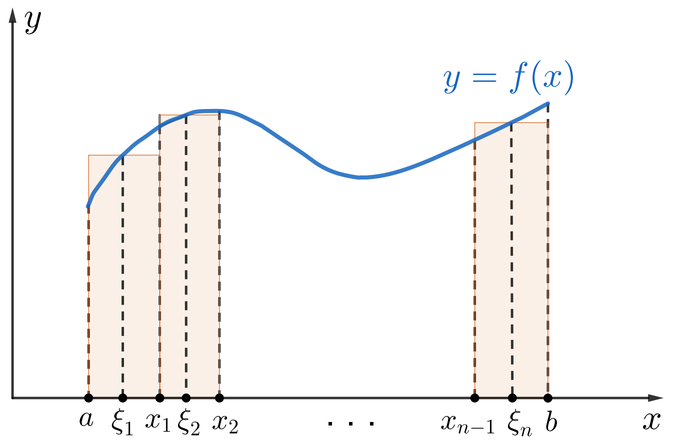

Рис. 3.1: Разбиение криволинейной трапеции

Тогда $S = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \Pi_k$, где Π_k – площадь k-го прямоугольника (на рисунке эти прямоугольники выделены цветом). Пусть $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ и $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ – точка, в которой верхняя сторона k-го прямоугольника проходит через график $y = f(x)$. Тогда $\Pi_k = f(\xi_k)\Delta_k$. Значит, $S \approx \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k$, при этом чем мельче делать разбиение, тем больше будет точность.

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть непрерывная функция плотности $f(x)$ задана на прямом стержне. Разобьём стержень на маленькие стержни. Тогда масса стержня $M = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k$, где M_k – массы маленьких стержней. Так как $M_k \approx f(\xi_k)\Delta_k$, где Δ_k – длина k-го стрежня, то $M \approx \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k$, при этом чем мельче делать разбиение, тем больше будет точность.

Как видно, разные задачи приводят к построению одного математического объекта.

Интеграл Римана

Определение 3.1. $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^{n}$ – *разбиение отрезка* $[a; b]$, где

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \text{и} \quad \Delta_k = [x_{k-1}; x_k].$$

Определение 3.2. $d(T) = \max\limits_k |\Delta_k|$ – *диаметр разбиения* T, где $|\Delta_k| = x_k - x_{k-1}$.

Определение 3.3. $T_\xi = \{(\xi_k,\, \Delta_k)\}_{k=1}^n$ – *отмеченное разбиение отрезка* $[a;\, b]$, где

1) $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ – разбиение отрезка $[a;\, b]$;

2) $\xi_k \in \Delta_k \;\; \forall k$.

Определение 3.4. $d(T_\xi) = d(T)$ – *диаметр отмеченного разбиения* T_ξ.

Определение 3.5. Пусть $\sigma_f(T_\xi) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)|\Delta_k| = \sum\limits_{T_\xi} f(\xi_k)|\Delta_k|$.

Функция f называется *интегрируемой по Риману на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\; d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f \in R[a;\, b]$.

Определение 3.6. $I = (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ – *определённый интеграл Римана.*

Свойства интеграла Римана

Теорема 3.1 (Единственность определённого инетграла Римана)**.** *Пусть* $f \in R[a;\, b]$*. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *единственный.*

Доказательство:

Предположим, что определённый интеграл Римана не единственен. Пусть I_1 и I_2 – различные определённые интегралы Римана функции $f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = \dfrac{|I_1 - I_2|}{2}$, получаем:

$$\exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\; d(T_\xi) < \delta_1 \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I_1| < \varepsilon;$$

$$\exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\; d(T_\xi) < \delta_2 \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I_2| < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и T_ξ – разбиение с диаметром $d(T_\xi) < \delta$. Тогда получаем:

$$2\varepsilon = |I_1 - I_2| \leqslant |I_1 - \sigma_f(T_\xi)| + |I_2 - \sigma_f(T_\xi)| < 2\varepsilon.$$

Получили противоречие. Значит, определённый интеграл Римана единственен. ■

Теорема 3.2 (Необходимое условие интегрируемости по Риману)**.** *Пусть* $f \in R[a;\, b]$. *Тогда* $\sup\limits_{[a;\, b]} |f(x)| < +\infty$.

Доказательство:

Предположим, что $\sup\limits_{[a;\, b]} |f(x)| = +\infty$. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I| < \varepsilon = 1.$$

Пусть $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$. Тогда $\exists j :\ \sup\limits_{x \in \Delta_j} |f(x)| = +\infty$. Пусть $T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$ фиксированы. Обозначим $\xi = \xi_j$. Тогда

$$\left| \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n f(\xi_k)|\Delta_k| + f(\xi)|\Delta_j| - I \right| < 1.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{I - 1 - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n f(\xi_k)|\Delta_k|}{|\Delta_j|} < f(\xi) < \frac{I + 1 - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n f(\xi_k)|\Delta_k|}{|\Delta_j|}.$$

Получили противоречие. Значит, $\sup\limits_{[a;\, b]} |f(x)| < +\infty$. ■

Теорема 3.3 (Сохранение неравенств)**.** *Пусть* $f \in R[a;\, b]$ *и* $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a;\, b]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Доказательство:

Предположим, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\varepsilon < 0$. По определению интегрируемости по Риману для этого значения ε имеем:

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

В частности $\sigma_f(T_\xi) < I + \varepsilon = 0$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^n f(\xi)k|\Delta_k| < 0$, то есть сумма неотрицательных чисел отрицательна. Получили противоречие. Значит, $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ■

Теорема 3.4 (Линейность определённого интегрела Римана)**.** *Пусть* $f, g \in R[a;\, b]$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lambda f + \mu g \in R[a;\, b]$, *причём*

$$\int\limits_a^b \lambda f + \mu g \, dx = \lambda \int\limits_a^b f \, dx + \mu \int\limits_a^b f \, dx.$$

Доказательство:

Так как $f, g \in R[a;\, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ получаем:

$$\exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta_1 \qquad \left|\sigma_f(T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)};$$

$$\exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta_2 \qquad \left|\sigma_g(T_\xi) - \int\limits_a^b g(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(|\mu| + 1)}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta$ имеем:

$$\left|\sigma_{\lambda f + \mu g}(T_\xi) - \left(\lambda \int\limits_a^b f \, dx + \mu \int\limits_a^b g \, dx\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \cdot \left|\sigma_f(T_\xi) - \int\limits_a^b f \, dx\right| + |\mu| \cdot \left|\sigma_g(T_\xi) - \int\limits_a^b g \, dx\right| < \varepsilon.$$

■

Сформулируем следствия.

Утверждение 3.1. *Пусть* $f, g \in R[a;\, b]$ *и* $f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a;\, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f \, dx \geqslant \int\limits_a^b g \, dx.$$

Доказательство:

$f - g \in R[a;\, b]$ и $(f - g)(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a;\, b]$. Тогда по теореме (3.3) получаем, что $\int\limits_a^b f - g \, dx \geqslant 0$. Отсюда по теореме (3.4) получаем, что $\int\limits_a^b f \, dx \geqslant \int\limits_a^b g \, dx$. ■

Утверждение 3.2. *Пусть $f \in R[a;\, b]$. Тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[a;\,b]} |f(x)| \cdot (b-a).$$

Доказательство:

$-\sup\limits_{x\in[a;\,b]} |f(x)|,\ \sup\limits_{x\in[a;\,b]} |f(x)| \in R[a;\, b]$ как константы. Так как

$$-\sup_{x\in[a;\,b]} |f(x)| \leqslant f(x) \leqslant \sup_{x\in[a;\,b]} |f(x)|,$$

то по утверждению (3.1) получаем:

$$-\sup_{x\in[a;\,b]} |f(x)| \cdot (b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \sup_{x\in[a;\,b]} |f(x)| \cdot (b-a).$$

■

Критерий Коши

Теорема 3.5 (Критерий Коши)**.**

$f \in R[a;\, b] \iff$

$$\iff \left(\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\colon\ \forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}) < \delta,\, d(T''_{\xi''}) < \delta \quad \left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})\right| < \varepsilon\right).$$

Доказательство:

Докажем $\Longleftarrow$.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – монотонно убывающая к 0 числовая последовательность. Пусть $\{\delta_n\}$ – монотонно убывающая числовая последовательность. Тогда получаем:

$$\forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta_n \qquad \left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})\right| < \varepsilon.$$

Тогда $\exists N\colon\ \forall n > N\ \ \varepsilon_n < \varepsilon$. Значит, $\forall n, m > N\ \ \exists T^n_\xi,\, T^m_\xi\colon\ d(T^n_\xi) < \delta_n,\, d(T^m_\xi) < \delta_m$. Тогда $d(T^n_\xi) < \delta_{\min\{n,\,m\}}$ и $d(T^m_\xi) < \delta_{\min\{n,\,m\}}$. Отсюда получаем:

$$\left|\sigma_f(T^n_\xi) - \sigma_f(T^m_\xi)\right| < \varepsilon_{\min\{n,\,m\}} < \varepsilon.$$

Тогда по критерию Коши для последовательности получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_f(T^n_\xi) = I$.

Пусть $\delta = \delta_{N+1}$. Тогда $\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta$ получаем:

$$|I - \sigma_f(T_\xi)| \leqslant \left|I - \sigma_f(T^{N+1}_\xi)\right| + \left|\sigma_f(T^{N+1}_\xi) - \sigma_f(T_\xi)\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Докажем $\Longrightarrow$.

Пусть $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_f(T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем:

$$\forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta \quad \left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})\right| \leqslant \left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - I\right| + \left|\sigma_f(T''_{\xi''}) - I\right| < 2\varepsilon.$$

■

Лекция 4

Аддитивность интеграла Римана

Теорема 4.1 (Аддитивность интеграла Римана)**.**

1) Пусть $f \in R[a;\, b]$. Тогда $\forall [c;\, d] \subset [a;\, b] \quad f \in R[c;\, d]$.

2) Пусть $f \in R[a;\, c] \cap R[c;\, b]$, где $c \in (a;\, b)$. Тогда $f \in R[a;\, b]$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

1) По критерию Коши (теорема (3.5)) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \ \forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}$ отрезка $[a;\, b]$ с диаметрами $d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta$ выполняется неравенство $\left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})\right| < \varepsilon$.

   Пусть $\tilde{T}'_{\xi'}, \tilde{T}''_{\xi''}$ – разбиения отрезка $[c;\, d]$ с диаметрами $d(\tilde{T}'_{\xi'}), d(\tilde{T}''_{\xi''}) < \delta$. Дополним оба разбиения до разбиения $[a;\, b]$ единообразно и так, что $d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < < \delta$. Тогда получаем:

$$\left|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})\right| = \left|\sigma_f(\tilde{T}'_{\xi'}) - \sigma_f(\tilde{T}''_{\xi''})\right| < \varepsilon.$$

   Значит, по критерию Коши (теорема (3.5)) $f \in R[c;\, d]$.

2) Пусть $I_1 = \int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $I_2 = \int\limits_c^b f(x)\,dx$. Так как $f \in R[a;\, c] \cap [c;\, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T^1_\xi \text{ отрезка } [a;\, c]\colon \ d(T^1_\xi) < \delta_1 \qquad |\sigma_f(T^1_\xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{4};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T^2_\xi \text{ отрезка } [c;\, b]\colon \ d(T^2_\xi) < \delta_2 \qquad |\sigma_f(T^2_\xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

   Пусть $\delta = \min\left\{\delta_1,\ \delta_2,\ \dfrac{\varepsilon}{4\sup\limits_{[a;\,b]}|f(x)| + 1}\right\}$ (sup имеет смысл, так как если $f(x)$ интегрируема на отрезке, то она ограничена на нём, значит, $f(x)$ ограничена на $[a;\, c]$ и на $[c;\, b]$). Тогда получаем (разбиения T^1_ξ и T^2_ξ будем выбирать соответствующими разбиению T_ξ):

$$\begin{aligned}
&\forall T_\xi \text{ отрезка } [a;\, b]\colon \quad d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_f(T_\xi) - (I_1 + I_2)| \leqslant \\
&\leqslant |\sigma_f(T_\xi) - \sigma_f(T_\xi^1) - \sigma_f(T_\xi^2)| + |\sigma_f(T_\xi^1) - I_1| + |\sigma_f(T_\xi^2) - I_2| < \\
&< |f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - f(\eta_1)(c - x_{j-1}) - f(\eta_2)(x_j - c)| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{[a;\, b]} |f(x)| \cdot (x_j - x_{j-1} + c - x_{j-1} + x_j - c) + \frac{\varepsilon}{2} < \\
&< 2\delta \cdot \sup_{[a;\, b]} |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Значит, $f \in R[a;\, b]$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

$\blacksquare$

Неопределённый интеграл Римана

Определение 4.1. Пусть $f \in R[a;\, b]$. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ называется *неопределённым интегралом Римана* при $x \in (a;\, b]$. Кроме этого, $F(a) = 0$. Если же $b < a$, то $\int\limits_a^x f(t)\,dt = -\int\limits_x^a f(t)\,dt$.

Леммы об интегрируемости по Риману

Введём обозначение $\int\limits_{[a;\, b]} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пусть $T = \{\Delta_k\}_{k=1}^n$ – разбиение $[a;\, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx.$$

Отсюда получаем: $f \in R[a;\, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \ d(T_\xi) < \delta \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta_k| - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right) \right| < \varepsilon$$

Лемма 4.1. *Пусть $f \in R[a;\, b]$, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^{n}\colon \ d(T_\xi) < \delta$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right) \right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall J \subset \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \left| \sum_{k\in J} \left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство:

Предположим, что

$$\exists T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^{n}\colon \ d(T_\xi) < \delta, \quad \exists J \subset \{n = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\left| \sum_{k\in J} \left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right) \right| - \varepsilon = \eta > 0.$$

Так как $f \in R[a;\, b]$, то $\forall k \notin J \ \ f \in R(\Delta_k)$. Тогда

$$\forall k \notin J \quad \exists \delta_k > 0\colon \quad \forall T_\xi^k \text{ отрезка } \Delta_k\colon \ d(T_\xi^k) < \delta_k < \delta$$

$$\left| \sigma_f(T_\xi^k) - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right| < \frac{h}{n}.$$

Теперь рассмотрим новое разбиение $\tilde{T}_\xi$ отрезка $[a;\, b]$, состоящее из (ξ_k, Δ_k), где $k \in J$, и T_ξ^k, где $k \notin J$. Причём $d(\tilde{T}_\xi) < \delta$. Тогда получаем:

$$\varepsilon > \left|\sum_{\tilde{T}_\xi}\left(f(\xi_j)|\tilde{\Delta}_j| - \int\limits_{\tilde{\Delta}_j} f(x)\,dx\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\sum_{k\in J}\left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right)\right| - \sum_{k\notin J}\left|\sigma_f(T_\xi^k) - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right| >$$

$$> \varepsilon + \eta - \sum_{k\notin J}\frac{\eta}{n} \geqslant \varepsilon.$$

Получили противоречие. Значит, предположение неверно, а лемма верна. ■

Лемма 4.2. *Пусть* $f \in R[a;\, b]$. *Тогда*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \;\; d(T_\xi) < \delta \qquad \sum_{T_\xi}\left|f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство:

Так как $f \in R[a;\, b]$, то

$$\exists\delta > 0\colon \quad \forall T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^n\colon \;\; d(T_\xi) < \delta \qquad \left|\sum_{T_\xi}\left(f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть

$$J^+ \subset \{1, 2, \ldots, n\}\colon \qquad f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \geqslant 0, \quad \text{где} \quad k \in J^+;$$

$$J^- \subset \{1, 2, \ldots, n\}\colon \qquad f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx < 0, \quad \text{где} \quad k \in J^-.$$

Тогда получаем:

$$\sum_{k\in J^+}\left|f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \sum_{k\in J^-}\left|f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Сложим эти два неравенства:

$$\sum_{T_\xi} \left| f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

■

Лекция 5

Ω-сумма

Определение 5.1. $\Omega_f(T) = \sum\limits_T \omega_f(\Delta_k)|\Delta_k|$ – *Ω-сумма для функции f*, определённая на разбиении $T = \{\Delta_k\}$ отрезка $[a;\, b]$, где $\omega_f(\Delta) = \sup\limits_{x',\, x'' \in \Delta} |f(x') - f(x'')|$ – *колебание функции f на отрезке Δ*.

Заметим, что $\Omega_f(T) \geqslant 0$.

Определение 5.2. T' – *продолжение (или размельчение) разбиения T*, если $\{x_k\} \subset \subset \{x'_l\}$.

Обозначение: $T' \prec T$.

Утверждение 5.1. *Если $T' \prec T$, то $\Omega_f(T') \leqslant \Omega_f(T)$.*

Доказательство:

Так как измельчение разбиения содержит конечное количество добавленных точек, которых не было в исходном разбиении, то достаточно доказать утверждение для случая добавления одной точки (так как этот процесс потом можно повторить нужное количество раз).

В случае добавления одной точки получаем для некоторого отрезка Δ из исходного разбиения: $\Delta = \Delta'_1 \cup \Delta'_2$, где отрезки Δ'_1 и Δ'_2 разделяются добавленной точкой. Тогда в $\Omega_f(T)$ слагаемое, соответствующее отрезку Δ заменится на два других слагаемых, для которых получаем:

$$\omega_f(\Delta'_1)|\Delta'_1| + \omega_f(\Delta'_2)|\Delta'_2| \leqslant \omega_f(\Delta) \cdot (|\Delta'_1| + |\Delta'_2|) = \omega_f(\Delta)|\Delta|.$$

■

Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Теорема 5.1 (Критерий Дарбу)**.**

$$f \in R[a;\, b] \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T\colon \;\; d(T) < \delta \qquad \Omega_f(T) < \varepsilon)\,.$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

Так как $f \in R[a;\, b]$, то по лемме (4.2) получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi = \{(\xi_k, \Delta_k)\}_{k=1}^n\colon \;\; d(T_\xi) < \delta$$

$$\sum_{k=1}^n \left| f(\xi_k)|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для разбиения T, у которого $d(T) < \delta$, выберем два отмеченных разбиения: $T_{\xi'}$ и $T_{\xi''}$. Тогда получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k') - f(\xi_k'')| \cdot |\Delta_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f(\xi_k')|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| f(\xi_k'')|\Delta_k| - \int\limits_{\Delta_k} f(x)\,dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Переходя к sup, получим: $\Omega_f(T) \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Докажем $\Longleftarrow$.

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \quad \forall T \colon \;\; d(T) < \delta \qquad \Omega_f(T) < \varepsilon.$$

Выберем два разбиения $T'_{\xi'}$ и $T''_{\xi''}$, у которых $d(T'_{\xi'}) < \delta$ и $d(T''_{\xi''}) < \delta$. Пусть $T \prec T'$ и $T \prec T''$, например, пусть $T = \{\Delta_k' \cap \Delta_l''\}_{k,\,l}$ (здесь учтены только нетривиальные пересечения, то есть такие, которые представляют собой отрезки). По разбиению T построим отмеченное разбиение $T_\xi = \{(\xi_{kl},\, \Delta_k' \cap \Delta_l'')\}_{k,\,l}$, где точки ξ_{kl} выбираем произвольно из соответствующих отрезков $\Delta_k' \cap \Delta_l''$. Заметим, что $d(T_\xi) < \delta$. Тогда получаем:

$$|\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T''_{\xi''})| \leqslant |\sigma_f(T'_{\xi'}) - \sigma_f(T_\xi)| + |\sigma_f(T''_{\xi''}) - \sigma_f(T_\xi)| =$$

$$= \left| \sum_{k} f(\xi_k') \sum_{l} |\Delta_k' \cap \Delta_l''| - \sum_{k,\,l} f(\xi_{kl}) |\Delta_k' \cap \Delta_l''| \right| +$$

$$+ \left| \sum_{l} f(\xi_l'') \sum_{k} |\Delta_k' \cap \Delta_l''| - \sum_{k,\,l} f(\xi_{kl}) |\Delta_k' \cap \Delta_l''| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,\,l} |f(\xi_k') - f(\xi_{kl})| \cdot |\Delta_k' \cap \Delta_l''| + \sum_{k,\,l} |f(\xi_l'') - f(\xi_{kl})| \cdot |\Delta_k' \cap \Delta_l''| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,\,l} \omega_f(\Delta_k') |\Delta_k' \cap \Delta_l''| + \sum_{k,\,l} \omega_f(\Delta_l'') |\Delta_k' \cap \Delta_l''| =$$

$$= \sum_{k} \omega_f(\Delta_k') |\Delta_k'| + \sum_{l} \omega_f(\Delta_l'') |\Delta_l''| = \Omega_f(T') + \Omega_f(T'') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши (3.5) $f \in R[a;\, b]$. ■

Сформулируем и докажем следствие (оно тоже называется критерием Дарбу).

Теорема 5.2 (Критерий Дарбу)**.**

$$f \in R[a;\, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T\colon \quad \Omega_f(T) < \varepsilon)\,.$$

Доказательство:

В силу теоремы (5.1) следствие $\Longrightarrow$ очевидно.

Докажем $\Longleftarrow$.

Имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T = \{\Delta_k\}_{k=1}^{n}\colon \quad \Omega_f(T) < \varepsilon.$$

Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4n\left(\sup\limits_{[a;\, b]} |f| + 1\right)}$. Заметим, что $\delta > 0$, так как $\sup\limits_{[a;\, b]} |f| < +\infty$. Выберем разбиение T' отрезка $[a;\, b]$ такое, что $d(T') < \delta$. Пусть $T'' = T' \cap T$. Тогда $T'' \prec T'$ и $T'' \prec T$. В силу утверждения (5.1) получаем: $\Omega_f(T'') \leqslant \Omega_f(T) < \varepsilon$.

Так как между T' и T'' существует не более $2n$ отличающихся отрезков, длина каждого из которых меньше δ и колебание на каждом из которых не превосходит колебания на всём отрезке $[a;\, b]$, то получаем:

$$\Omega_f(T') - \Omega_f(T'') < 2n\omega_f([a;\, b]) \cdot \delta < \varepsilon,$$

так как $\omega_f([a;\, b]) \leqslant 2 \sup\limits_{[a;\, b]} |f|$.

В итоге получаем:

$$\Omega_f(T') < \varepsilon + \Omega_f(T'') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Тогда по теореме (5.1) получаем, что $f \in R[a;\, b]$. ■

Достаточные условия интегрируемости по Риману

Теорема 5.3. *Если $f \in C[a;\, b]$, то $f \in R[a;\, b]$.*

Доказательство:

Так как $f \in C[a;\, b]$, то по теореме Кантора $f \in UC[a;\, b]$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall \Delta\colon \;\; d(\Delta) < \delta \qquad \omega_f(\Delta) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Выберем разбиение T отрезка $[a;\, b]$ такое, что $d(T) < \delta$. Тогда получаем:

$$\Omega_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(\Delta_k)|\Delta_k| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}|\Delta_k| = \varepsilon.$$

Значит, в силу теоремы (5.2) $f \in R[a;\, b]$. ■

Теорема 5.4. *Если f не убывает на $[a;\, b]$, то $f \in R[a;\, b]$.*

Доказательство:

В случае, когда $f \equiv \mathrm{const}$ на $[a;\, b]$, теорема тривиальна. Далее рассмотрим случай, когда $f \not\equiv \mathrm{const}$ на $[a;\, b]$.

Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Заметим, что $\delta > 0$. Выберем разбиение T отрезка $[a;\, b]$ такое, что $d(T) < \delta$. Тогда получаем:

$$\Omega_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_f(\Delta_k)|\Delta_k| < \delta \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega_f(\Delta_k) = \delta \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Значит, в силу теоремы (5.2) $f \in R[a;\, b]$. ■

В качестве примера можно привести функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Она не убывает на отрезке $[-1;\; 1]$, а значит, в силу теоремы (5.4) $f \in R[-1;\; 1]$. Заметим, что $f \notin N[-1;\; 1]$.

Лекция 6

Теорема об интегрируемости модуля функции

Теорема 6.1. *Если $f \in R[a;\, b]$, то $|f| \in R[a;\, b]$.*

Доказательство:

Заметим, что

$$\Omega_{|f|}(T) = \sum_T \omega_{|f|}(\Delta_k)|\Delta_k| \leqslant \sum_T \omega_f(\Delta_k)|\Delta_k| = \Omega_f(T).$$

Так как $f \in R[a;\, b]$, то по критерию Дарбу (теорема (5.2)) получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T\colon \quad \Omega_f(T) < \varepsilon.$$

Значит, $\Omega_{|f|}(T) < \varepsilon$. Тогда по критерию Дарбу (теорема (5.2)) $|f| \in R[a;\, b]$. ■

Липшицевы функции

Определение 6.1. Функция f удовлетворяет *условию Липшица на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists C > 0\colon \quad \forall x', x'' \in [a;\, b] \qquad |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|.$$

Обозначение: $f \in Lip[a;\, b]$.

Утверждение 6.1. *Если $f \in Lip[a;\, b]$, то $f \in C[a;\, b]$ (то есть $Lip[a;\, b] \subset C[a;\, b]$).*

Доказательство:

Так как $C[a;\, b] = UC[a;\, b]$, то достаточно доказать, что $Lip[a;\, b] \subset UC[a;\, b]$.

Пусть $f \in Lip[a;\, b]$. Выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Тогда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C}\colon \quad \forall x', x'' \in [a;\, b]\colon \quad |x' - x''| < \delta$$
$$|f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''| < C\delta = \varepsilon.$$

Значит, $f \in UC[a;\, b]$. ■

Утверждение 6.2. *Если $f \in C^1[a;\, b]$, то $f \in Lip[a;\, b]$ (то есть $C^1[a;\, b] \subset$ $\subset Lip[a;\, b]$).*

Доказательство:

Если $f \equiv \mathrm{const}$ на $[a;\, b]$, то утверждение тривиально. Далее рассмотрим случай $f \not\equiv \mathrm{const}$ на $[a;\, b]$.

Так как $f \in C^1[a;\, b]$, то $\exists C = \max\limits_{[a;\, b]} |f'(x)| > 0$. Тогда по теореме Лагранжа получаем:

$$\forall x', x'' \in [a;\, b] \qquad f(x') - f(x'') = f'(x' + \theta(x'' - x'))(x' - x''),$$

где $\theta \in [0;\, 1]$. Отсюда получаем:

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(x' + \theta(x'' - x'))| \cdot |x' - x''| \leqslant C|x' - x''|.$$

Значит, $f \in Lip[a;\, b]$. ■

Свойства неопределённого интеграла Римана

Теорема 6.2. *Пусть* $f \in R[a;\, b]$. *Тогда* $\int\limits_a^x f(t)\, dt \in Lip[a;\, b]$.

Доказательство:

Если $f \equiv \text{const}$ на $[a;\, b]$, то утверждение тривиально. Далее рассмотрим случай $f \not\equiv \text{const}$ на $[a;\, b]$.

Пусть $C = \sup\limits_{x \in [a;\, b]} |f(x)|$. Заметим, что $C < +\infty$, так как $f \in R[a;\, b]$, а значит, f ограничена. Тогда получаем:

$$\forall x', x'' \in [a;\, b] \qquad \left| \int\limits_a^{x'} f(t)\, dt - \int\limits_a^{x''} f(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{x''}^{x'} f(t)\, dt \right| \leqslant \sup\limits_{t \in [x'';\, x']} |x' - x''| \leqslant C|x' - x''|.$$

Значит, $\int\limits_a^x f(t)\, dt \in Lip[a;\, b]$. ■

Сформулируем следствие.

Утверждение 6.3. *Если* $f \in R[a;\, b]$, *то* $\int\limits_a^x f(t)\, dt \in C[a;\, b]$.

Теорема 6.3. *Пусть* $x_0 \in [a;\, b]$, $f \in R[a;\, b] \cap C(x_0)$. *Тогда* $\int\limits_a^x f(t)\, dt \in D(x_0)$ *и*

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x = x_0} \int\limits_a^x f(t)\, dt = f(x_0).$$

Доказательство:

Так как $f \in C(x_0)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall x \in [a;\, b] \cap \dot{U}_\delta(x_0) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Тогда получаем:

$$\left|\frac{\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0} - \frac{\int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt}{x-x_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int\limits_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}\right| \leqslant \sup_{t\in[x_0;\,x]} |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Значит, $\int\limits_a^x f(t)\,dt \in D(x_0)$, причём $\left.\dfrac{d}{dx}\right|_{x=x_0} \int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x_0)$. ■

Связь интеграла Римана и обобщённого интеграла Ньютона

Теорема 6.4. *Пусть* $f \in R[a;\, b] \cap GN[a;\, b]$. *Тогда*

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (GN)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как $f \in R[a;\, b]$, то

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon \quad \forall T_\xi\colon \; d(T_\xi)<\delta \qquad \left|\sigma_f(T_\xi) - (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f \in GN[a;\, b]$, то

$$\exists E = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}\colon \quad \exists F \in C[a;\, b] \cap D([a;\, b]\setminus E)\colon \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b]\setminus E$$

(если x_k – конечное множество, то доказательство упрощается). Тогда

$$F(x) = (GN)\int\limits_a^x f(t)\,dt, \qquad F(b)-F(a) = (GN)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Для точек $x \in E$ имеем:

$$\forall k \quad \exists \delta(x_k) > 0\colon \qquad \delta(x_k) < \min\left\{\frac{\delta}{2};\ \frac{\varepsilon}{2^{k+4}\left(\sup\limits_{[a;\,b]}|f|+1\right)}\right\},$$

$$\forall x \in U_{\delta(x_k)}(x_k) \qquad |F(x) - F(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+4}}.$$

Для точек $x \in [a;\,b] \setminus E$ имеем:

$$\forall x \in [a;\,b] \setminus E \quad \exists \delta(x) \in \left(0;\ \frac{\delta}{2}\right)\colon \qquad \forall y \in \dot{U}_{\delta(x)}(x)$$

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Заметим, что $\{U_{\delta(x)}(x),\ U_{\delta(x_k)}(x_k)\}$ – покрытие отрезка $[a;\,b]$. Тогда $\exists \{U_{\delta(x_n)}(x_n)\}_{n=1}^{N}$ конечное подпокрытие отрезка $[a;\,b]$. Без ограничения общности будем считать, что это наименьшее подпокрытие, причём $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$.

Пусть $y_0 = a$, $y_N = b$, $y_n \in U_{\delta(x_n)}(x_n) \cap U_{\delta(x_{n+1})}(x_{n+1})$ $\forall n = 1, 2, \ldots, N-1$. Тогда получили разбиение T отрезка $[a;\,b]:$ $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = b$. Разметим это разбиение точками x_n, получим отмеченное разбиение $T = \{(x_n,\ [y_{n-1},\ y_n])\}_{n=1}^{N}$. Заметим, что $d(T_\xi) < \delta$.

Получаем:

$$\left|F(b) - F(a) - (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} F(y_n) - F(y_{n-1}) - \sigma_f(T_\xi)\right| + \left|\sigma_f(T_\xi) - (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| <$$

$$< \left|\sum_{n=1}^{N}(F(y_n) - F(y_{n-1}) - f(x_n)(y_n - y_{n-1}))\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(|F(y_n) - F(x_n) - f(x_n)(y_n - x_n)| + |F(x_n) - F(y_{n-1}) - f(x_n)(x_n - y_{n-1})|\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{x_n \notin E}\left(|F(y_n) - F(x_n) - f(x_n)(y_n - x_n)|+\right.$$

$$+|F(x_n) - F(y_{n-1}) - f(x_n)(x_n - y_{n-1})|) + \sum_{x_n \in E} (|F(y_n) - F(x_n) - f(x_n)(y_n - x_n)|+$$

$$+|F(x_n) - F(y_{n-1}) - f(x_n)(x_n - y_{n-1})|) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{x_n \notin E} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(y_n - x_n + x_n - y_{n-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (GN)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$ ■

Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 6.5 (Формула Ньютона–Лейбница)**.** *Пусть* $f \in C[a;\, b]$. *Тогда* $f \in$ $\in R[a;\, b] \cap N[a;\, b]$, *причём*

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (N)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как $f \in C[a;\, b]$, то по теореме (5.3) получаем, что $f \in R[a;\, b]$. Тогда $F(x) = (R)\int\limits_a^x f(t)\,dt$, причём $F(x) \in D[a;\, b]$ и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b]$. Значит, $F(x)$ – неопределённый интеграл Ньютона. Тогда по теореме (6.4) получаем, что $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (N)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$ ■

Теорема 6.6. *Пусть* f *не убывает на* $[a;\, b]$. *Тогда* $f \in R[a;\, b] \cap GN[a;\, b]$, *причём*

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (GN)\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как f не убывает на $[a;\, b]$, то по теореме (5.4) получаем, что $f \in R[a;\, b]$. Тогда

$F(x) = (R)\int\limits_a^x f(t)\,dt$, причём $F(x) \in C[a;\,b] \cap D([a;\,b] \setminus E)$, где E не более чем счётно, и $F'(x) = f(x)\ \ \forall x \in [a;\,b] \setminus E$. Значит, $F(x)$ – обобщённый неопределённый интеграл Ньютона. Тогда по теореме (6.4) получаем, что $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = (N)\int\limits_a^b f(x)\,dx$. ■

Лекция 7

Теорема о замене переменной в интеграле Римана

Теорема 7.1. *Пусть* $f \in R[a;\, b]$, $\varphi \in D[\alpha;\, \beta]$, $\varphi' \in R[\alpha;\, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. *Пусть* φ *строго возрастает на* $[\alpha;\, \beta]$. *Тогда* $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha;\, \beta]$, *причём*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство:

Так как $\varphi' \in R[\alpha;\, \beta]$ и $f \in R[a;\, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0\colon\ \ \forall T\colon\ \ d(T) < \delta_1 \qquad \Omega_{\varphi'}(T) < \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a;\, b]} |f| + 1};$$

$$\exists \eta > 0\colon\ \ \forall T_\xi\colon\ \ d(T_\xi) < \eta \qquad \left| \sigma_f(T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Так как $\varphi \in D[\alpha;\, \beta]$, то $\varphi \in UC[\alpha;\, \beta]$. Тогда

$$\exists \delta_2 > 0\colon\ \ \forall t', t'' \in [\alpha;\, \beta]\colon\ \ |t' - t''| < \delta_2 \qquad |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \eta.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда получаем:

$$\forall T_\xi\colon\ \ d(T_\xi) < \delta \qquad \left| \sigma_{f(\varphi)\varphi'}(T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\cdot(t_k - t_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\cdot(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k))\cdot(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^n f(\varphi(\xi_k))\cdot(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \ominus$$

Так как $\varphi \in D[\alpha;\, \beta]$, то по теореме Лагранжа получаем ($\theta_k \in (0;\, 1)$):

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\xi_k)) \cdot (\varphi'(\xi_k) - \varphi'(t_{k-1} + \theta_k(t_k - t_{k-1}))) \cdot (t_k - t_{k-1}) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant$$

Выше $\Xi_k = \varphi(\xi_k)$, $x_k = \varphi(t_k)$, $x_{k-1} = \varphi(t_{k-1})$.

$$\leqslant \sup_{[a;\, b]} |f| \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega_{\varphi'}([t_{k-1};\, t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1}) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

■

Замечание 7.1. Если $\varphi \in C^1[\alpha;\, \beta]$, то $\varphi' \in R[a;\, b]$.

Функции ограниченной вариации

Определение 7.1. Функция f называется *функцией ограниченной вариации на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\sup_T \sum_T |f(x_k) - f(x_{k-1})| < +\infty,$$

где T – разбиение отрезка $[a;\, b]$.

Обозначение: $f \in VB[a;\, b]$.

Определение 7.2. $V_a^b f = \sup\limits_T \sum\limits_T |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ – *вариация функции f на отрезке* $[a;\, b]$.

Свойства функций ограниченной вариации

Утверждение 7.1. *Пусть f не убывает на $[a;\, b]$. Тогда $f \in VB[a;\, b]$, причём*

$$V_a^b f = f(b) - f(a).$$

Теорема 7.2. *Пусть $f, g \in VB[a;\, b]$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f + \mu g \in VB[a;\, b]$, причём*

$$V_a^b(\lambda f + \mu g) \leqslant |\lambda| V_a^b f + |\mu| V_a^b g.$$

Доказательство:

Для любого разбиения T отрезка $[a;\, b]$ имеем:

$$\sum_T |\lambda f(x_k) + \mu g(x_k) - \lambda f(x_{k-1}) - \mu g(x_{k-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_T \left(|\lambda| \cdot |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |\mu| \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})|\right).$$

■

Теорема 7.3.

1) Если $f \in VB[a;\, b]$, то $\forall [c;\, d] \subset [a;\, b]$ $\;f \in VB[c;\, d]$, причём $V_c^d f \leqslant V_a^b f$.

2) Пусть $f \in VB[a;\, c] \cap VB[c;\, b]$, где $c \in (a;\, b)$. Тогда $f \in VB[a;\, b]$, причём

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f.$$

Доказательство:

1) Для любого разбиения T отрезка $[c;\, d]$ имеем:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant |f(c) - f(a)| + \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(b) - f(d)| \leqslant V_a^b f.$$

2) Для любого разбиения T отрезка $[a;\, b]$ имеем:

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k \neq j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_j) - f(c)| +$$

$$+ |f(c) - f(x_{j-1})| = \sum_{k<j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_{j-1})| +$$

$$+ \sum_{k>j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_j) - f(c)| \leqslant V_a^c f + V_c^b f.$$

Тогда $V_a^b f \leqslant V_a^c f + V_c^b f$. Кроме этого, имеем:

$$V_a^b f = \sup_T \sum_T |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant \sup_{T \ni C} \sum_T |f(x_k) - f(x_{k-1})| = V_a^c f + V_c^b f.$$

Таким образом, $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

■

Теорема 7.4.

$$f \in VB[a;\, b] \iff \exists \text{ не убывающие на } [a;\, b]\ g, h\colon\ f = g - h \text{ и } V_a^b f = V_a^b g + V_a^b h.$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

Так как $f \in VB[a;\, b]$, то $\exists F(x) = V_a^x f \quad \forall x \in [a;\, b]$.

Пусть $g(x) \coloneqq \dfrac{1}{2}(F(x) + f(x))$ и $h(x) \coloneqq \dfrac{1}{2}(F(x) - f(x))$.

Покажем, что $g(x)$ не убывает на $[a;\, b]$ (далее $x_2 > x_1$):

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{2}(F(x_2) - F(x_1) + f(x_2) - f(x_1)) \geqslant \frac{1}{2}(V_{x_1}^{x_2} f - |f(x_2) - f(x_1)|) \geqslant 0.$$

Покажем, что $h(x)$ не убывает на $[a;\, b]$ (далее $x_2 > x_1$):

$$h(x_2) - h(x_1) = \frac{1}{2}(F(x_2) - F(x_1) + f(x_1) - f(x_2)) \geqslant \frac{1}{2}(V_{x_1}^{x_2} f - |f(x_2) - f(x_1)|) \geqslant 0.$$

Заметим, что $f(x) = g(x) - h(x)$. Теперь рассмотрим вариации:

$$V_a^b g + V_a^b h = \frac{1}{2}(V_a^b f + f(b) - f(a)) + \frac{1}{2}(V_a^b f + f(a) - f(b)) = V_a^b f.$$

Докажем $\Longleftarrow$.

Так как f – разность двух монотонных функций, то $f \in VB[a;\, b]$. ■

Теорема 7.5. *Если $f \in VB[a;\, b]$, то $f \in C([a;\, b] \setminus E)$, где E не более чем счётно, и все разрывы 1-го рода или устранимые.*

Теорема 7.6. *Если $f \in VB[a;\, b]$, то $f \in R[a;\, b] \cap GN[a;\, b]$, причём*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (GN)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Утверждение 7.2. *Если $F \in C^1[a;\, b]$, то $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b F'(x)\,dx$.*

Теорема 7.7. *Если $F \in C^1[a;\, b]$, то $V_a^b F = \displaystyle\int_a^b |F'(x)|\,dx$.*

Доказательство:

Так как $F'(x) \in C[a;\, b]$, то $F'(x) \in R[a;\, b]$. Тогда $|F'(x)| \in R[a;\, b]$. Отсюда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \quad d(T_\xi) < \delta \qquad \left|\sigma_{|F'|}(T_\xi) - \int_a^b |F'(x)|\,dx\right| < \varepsilon.$$

Пусть T – произвольное разбиение, а T' – такое разбиение, что $d(T') < \delta$. Тогда $d(T \cup T') < \delta$. Отсюда по теореме Лагранжа получаем:

$$\sum_{T} |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leqslant \sum_{T \cup T'} |F(x'_j) - F(x'_{j-1})| = \sum_{T \cup T'} |F'(\xi'_j)|(x'_j - x'_{j-1}) \leqslant$$

Здесь $\xi'_j \in (x'_{j-1};\, x'_j)$.

$$\leqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx + \varepsilon.$$

Значит, $V_a^b F \leqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx + \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что $V_a^b F \leqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx$.

Докажем теперь неравенство в обратную сторону. Используя теорему Лагранжа, получаем:

$$V_a^b F \geqslant \sum_{T'} |F(x'_j) - F(x'_{j-1})| = \sum_{T'} |F'(\xi'_j)|(x'_j - x'_{j-1}) \geqslant$$

Здесь $\xi'_j \in (x'_{j-1};\, x'_j)$.

$$\geqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx - \varepsilon.$$

Значит, $V_a^b F \geqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx - \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что $V_a^b F \geqslant \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx$.

Таким образом, $V_a^b F = \int\limits_a^b |F'(x)|\, dx$. ■

Лекция 8

Интеграл Римана – Стилтьеса

Определение 8.1. $\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ – *интегральная сумма Римана – Стилтьеса* функции f по функции g на отмеченном разбиении T_ξ.

Замечание 8.1. Интегральная сумма Римана – Стилтьеса функции f по функции $g(x) = x$ совпадает с интегральной суммой Римана функции f:

$$\sigma_{f,\,dx}(T_\xi) = \sigma_f(T_\xi).$$

Определение 8.2. f *интегрируема по g на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}\colon\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\quad \forall T_\xi\colon\quad d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначение: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$.

Свойства интеграла Римана – Стилтьеса

Утверждение 8.1 (Единственность интеграла Римана – Стилтьеса)**.** *Если f интегрируема по g на $[a;\, b]$, то интеграл единственный.*

Доказательство:

Предположим, что интеграл не единственен. Пусть I_1 и I_2 – различные интегралы f по g на $[a;\, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = |I_1 - I_2|$, получаем:

$$\exists \delta_1 > 0\colon\quad \forall T_\xi\colon\; d(T_\xi) < \delta_1 \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\exists \delta_2 > 0\colon\quad \forall T_\xi\colon\; d(T_\xi) < \delta_2 \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и T_ξ – разбиение с диаметром $d(T_\xi) < \delta$. Тогда получаем:

$$\varepsilon = |I_1 - I_2| \leqslant |I_1 - \sigma_f(T_\xi)| + |I_2 - \sigma_f(T_\xi)| < \varepsilon.$$

Получили противоречие. Значит, интеграл единственен. ■

Теорема 8.1 (Линейность интегрела Римана – Стилтьеса)**.** *Пусть f_1, f_2 интегрируемы по g на $[a;\, b]$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ интегрируема по g на $[a;\, b]$, причём*

$$\int\limits_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dg = \lambda_1 \int\limits_a^b f_1\,dg + \lambda_2 \int\limits_a^b f_2\,dg.$$

Доказательство:

Так как f_1, f_2 интегрируемы по g на $[a;\, b]$, то $\forall\varepsilon > 0$ получаем:

$$\exists\delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta_1 \qquad \left|\sigma_{f_1,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f_1\,dg\right| < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_1|+1)};$$

$$\exists\delta_2 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta_2 \qquad \left|\sigma_{f_2,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f_2\,dg\right| < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda_2|+1)}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta$ имеем:

$$\left|\sigma_{\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,\,dg}(T_\xi) - \left(\lambda_1\int\limits_a^b f_1\,dg + \lambda_2\int\limits_a^b f_2\,dg\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_1|\cdot\left|\sigma_{f_1,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f_1\,dg\right| + |\lambda_2|\cdot\left|\sigma_{f_2,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f_2\,dg\right| < \varepsilon.$$

■

Критерий Коши

Теорема 8.2 (Критерий Коши)**.**

f интегрируема по g на $[a;\, b]$ $\iff$

$$\iff \Big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon\ \forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}) < \delta,\ d(T''_{\xi''}) < \delta \quad \left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})\right| < \varepsilon\Big).$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

Пусть $I = \int\limits_a^b f\,dg$. Тогда получаем:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда $\forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta$ получаем:

$$\left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})\right| \leqslant \left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - I\right| + \left|\sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''}) - I\right| < \varepsilon.$$

Докажем $\Longleftarrow$.

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – монотонно убывающая к 0 числовая последовательность. Пусть $\{\delta_n\}$

– монотонно убывающая числовая последовательность. Тогда получаем:

$$\forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}\colon\ d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta_n \qquad \left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})\right| < \varepsilon.$$

Тогда $\exists N\colon\ \forall n > N\ \ \varepsilon_n < \varepsilon$. Значит, $\forall n, m > N\ \ \exists T^n_\xi, T^m_\xi\colon\ d(T^n_\xi) < \delta_n$, $d(T^m_\xi) < \delta_m$. Тогда $d(T^n_\xi) < \delta_{\min\{n,\,m\}}$ и $d(T^m_\xi) < \delta_{\min\{n,\,m\}}$. Отсюда получаем:

$$\left|\sigma_{f,\,dg}(T^n_\xi) - \sigma_{f,\,dg}(T^m_\xi)\right| < \varepsilon_{\min\{n,\,m\}} < \varepsilon.$$

Тогда по критерию Коши для последовательности получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{f,\,dg}(T^n_\xi) = I$.

Пусть $\delta = \delta_{N+1}$. Тогда $\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta$ получаем:

$$|\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I| \leqslant \left|\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - \sigma_{f,\,dg}(T^{N+1}_\xi)\right| + \left|\sigma_{f,\,dg}(T^{N+1}_\xi) - I\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

Свойства интеграла Римана – Стилтьеса (продолжение)

Теорема 8.3.

1) *Пусть f интегрируема по g на $[a;\, b]$. Тогда $\forall [c;\, d] \subset [a;\, b]$ f интегрируема по g на $[c;\, d]$.*

2) *Пусть f интегрируема по g на $[a;\, b]$. Тогда $\forall c \in (a;\, b)$*

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^c f\,dg + \int\limits_c^b f\,dg.$$

Доказательство:

1) По критерию Коши (теорема (8.2)) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall T'_{\xi'}, T''_{\xi''}$ отрезка $[a;\, b]$ с диаметрами $d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta$ выполняется неравенство $\left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})\right| < < \varepsilon$.

   Пусть $\tilde{T}'_{\xi'}, \tilde{T}''_{\xi''}$ – разбиения отрезка $[c;\, d]$ с диаметрами $d(\tilde{T}'_{\xi'}), d(\tilde{T}''_{\xi''}) < \delta$. Дополним оба разбиения до разбиения $[a;\, b]$ единообразно и так, что $d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < < \delta$. Тогда получаем:

$$\left|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})\right| = \left|\sigma_{f,\,dg}(\tilde{T}'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(\tilde{T}''_{\xi''})\right| < \varepsilon.$$

   Значит, по критерию Коши (теорема (8.2)) f интегрируема по g на $[c;\, d]$.

2) Так как f интегрируема по g на $[a;\, b]$, то в силу пункта (1) получаем, что f интегрируема по g на $[a;\, c]$ и на $[c;\, b]$. Пусть $I_1 = \int\limits_a^c f\,dg$, $I_2 = \int\limits_c^b f\,dg$, $I =$

$= \int\limits_a^b f\,dg$. Тогда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi^1 \text{ отрезка } [a;\, c]\colon \ \ d(T_\xi^1) < \delta_1 \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi^1) - I_1| < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T_\xi^2 \text{ отрезка } [c;\, b]\colon \ \ d(T_\xi^2) < \delta_2 \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi^2) - I_2| < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_3 > 0\colon \quad \forall T_\xi \text{ отрезка } [a;\, b]\colon \ \ d(T_\xi) < \delta_3 \qquad |\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда получаем (разбиения T_ξ^1 и T_ξ^2 будем выбирать соответствующими разбиению T_ξ):

$$\forall T_\xi \text{ отрезка } [a;\, b]\colon \ \ d(T_\xi) < \delta \qquad |I - (I_1 + I_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |I - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi)| + |I_1 - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi^1)| + |I_2 - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi^2)| < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что $I = I_1 + I_2$.

■

Теорема 8.4. *Пусть $f \in C[a;\, b]$, $g \in VB[a;\, b]$. Тогда f интегрируема по g на $[a;\, b]$.*

Доказательство:

Введём обозначение $g([x_{k-1};\, x_k]) \coloneqq g(x_k) - g(x_{k-1})$.

Так как $f \in C[a;\, b]$, то $f \in UC[a;\, b]$. Тогда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \ \ \forall \text{ отрезка } \Delta \subset [a;\, b]\colon \ |\Delta| < \delta \qquad \omega_f(\Delta) < \frac{\varepsilon}{V_a^b g + 1}.$$

Пусть $T'_{\xi'}$ и $T''_{\xi''}$ – разбиения отрезка $[a;\, b]$ с диаметрами $d(T'_{\xi'}), d(T''_{\xi''}) < \delta$. Пусть T_ξ – разбиение, состоящее из всех точек разбиений $T'_{\xi'}$ и $T''_{\xi''}$ и размеченное произвольно. Заметим, что $d(T_\xi) < \delta$. Тогда получаем:

$$|\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''})| \leqslant |\sigma_{f,\,dg}(T'_{\xi'}) - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi)| + |\sigma_{f,\,dg}(T''_{\xi''}) - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi)| =$$

$$= \left| \sum_k f(\xi'_k) g(\Delta'_k) - \sum_k \sum_l f(\xi_{kl}) g(\Delta'_k \cap \Delta''_l) \right| +$$

$$+ \left| \sum_l f(\xi''_l) g(\Delta''_l) - \sum_k \sum_l f(\xi_{kl}) g(\Delta'_k \cap \Delta''_l) \right| =$$

$$= \left| \sum_k \sum_l (f(\xi'_k) - f(\xi_{kl})) g(\Delta'_k \cap \Delta''_l) \right| + \left| \sum_l \sum_k (f(\xi''_l) - f(\xi_{kl})) g(\Delta'_k \cap \Delta''_l) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sum_l \omega_f(\Delta'_k)|g(\Delta'_k \cap \Delta''_l)| + \sum_l \sum_k \omega_f(\Delta''_l)|g(\Delta'_k \cap \Delta''_l)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{V_a^b g + 1} \cdot 2 \sum_k \sum_l |g(\Delta'_k \cap \Delta''_l)| < 2\varepsilon.$$

■

Лекция 9

Теорема об интегрировании по частям для интеграла Римана – Стилтьеса

Теорема 9.1 (Теорема об интегрировании по частям для интеграла Римана – Стилтьеса). *Пусть f интегрируема по g на $[a;\, b]$. Тогда g интегрируема по f на $[a;\, b]$, причём*

$$\int\limits_a^b g(x)\, df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Доказательство:

Так как f интегрируема по g на $[a;\, b]$, то

$$\exists I \in \mathbb{R}\colon\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon\quad \forall T_\xi\colon\quad d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_{f,\, dg}(T_\xi) - I| < \varepsilon.$$

Выберем разбиение $T_\xi = \{(\xi_k,\ [x_{k-1};\, x_k])\}_{k=1}^n$ с диаметром $d(T_\xi) < \dfrac{\delta}{2}$. Введём обозначения $\xi_0 \coloneqq a$ и $\xi_{n+1} \coloneqq b$. Учитывая, что $x_0 = a$ и $x_n = b$, получаем:

$$\sigma_{g,\, df}(T_\xi) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) f(x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_{k+1}) f(x_k) = g(\xi_n) f(b) - g(\xi_1) f(a) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)(g(\xi_k) - g(\xi_{k+1})) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - f(a)(g(\xi_1) - g(\xi_0)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)(g(\xi_{k+1} - g(\xi_k))) - f(b)(g(\xi_{n+1}) - g(\xi_n)) = f(x)g(x)\Big|_a^b -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(g(\xi_{k+1}) - g(\xi_k)) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \sigma_{f,\, dg}(\tilde{T}_x),$$

где $\tilde{T}_x = \{(x_k,\, [\xi_k;\, \xi_{k+1}])\}_{k=0}^n$ – отмеченное разбиение отрезка $[a;\, b]$, причём $d(\tilde{T}_x) < \delta$, так как $d(T_\xi) < \dfrac{\delta}{2}$. Отсюда получаем:

$$\left|\sigma_{g,\, df}(T_\xi) - \left(f(x)g(x)\Big|_a^b - I\right)\right| = \left|I - \sigma_{f,\, dg}(\tilde{T}_x)\right| < \varepsilon.$$

■

В качестве следствия сформулируем следующую теорему.

Теорема 9.2. *Пусть $f \in VB[a;\, b]$ и $g \in C[a;\, b]$. Тогда f интегрируема по g на $[a;\, b]$.*

Связь интеграла Римана – Стилтьеса с интегралом Римана

Теорема 9.3. *Пусть $f \in C[a;\, b]$, $g \in D[a;\, b]$ и $g' \in R[a;\, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как $g' \in R[a;\, b]$, то $g \in Lip[a;\, b]$. Тогда $g \in VB[a;\, b]$. Отсюда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \quad d(T_\xi) < \delta_1 \qquad \left|\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f\,dg\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $g' \in R[a;\, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T\colon \quad d(T) < \delta_2 \qquad \Omega_{g'}(T) < \frac{\varepsilon}{2\left(\max\limits_{[a;\,b]}|f| + 1\right)}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta$, используя теорему Лагранжа ($\theta \in \in (0;\, 1)$), получаем:

$$\left|\sigma_{fg'}(T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant |\sigma_{fg'}(T_\xi) - \sigma_{f,\,dg}(T_\xi)| + \left|\sigma_{f,\,dg}(T_\xi) - \int\limits_a^b f(x)\,dg(x)\right| <$$

$$< \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))\right| + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g'(\xi_k) - g'(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})\right| + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \max_{[a;\,b]}|f(x)| \sum_{k=1}^n \omega_{g'}([x_{k-1};\, x_k])(x_k - x_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Замечание 9.1. Если $g \in C^1[a;\, b]$, то $g' \in C[a;\, b]$, а тогда $g' \in R[a;\, b]$. Поэтому теорема выше верна для $g \in C^1[a;\, b]$.

Теорема 9.4 (Теорема об интегрировании по частям для интеграла Римана). *Пусть* $f, g \in D[a;\ b]$ *и* $f', g' \in R[a;\ b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл

Определение 9.1. Функция f называется *интегрируемой по Риману в несобственном смысле на* $[a;\ +\infty)$ и число I называется *несобственным интегралом Римана функции* f *на* $[a;\ +\infty)$, если

1) $\forall b > a \quad f \in R[a;\ b]$;

2) $\exists \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = I$.

Обозначения: $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$ и $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Замечание 9.2. Если $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Иначе говорят, что интеграл *расходится*.

Определение 9.2. Функция f называется *интегрируемой по Ньютону в несобственном смысле на* $[a;\ +\infty)$ и число I называется *несобственным интегралом Ньютона функции* f *на* $[a;\ +\infty)$, если

1) $\forall b > a \quad f \in N[a;\ b]$;

2) $\exists \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = I$.

Обозначения: $f \in \tilde{N}[a;\ +\infty)$ и $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично можно ввести другие несобственные интегралы. Для простоты далее мы будем рассматривать только функции, непрерывные на $[a;\ +\infty)$. Такие функции на любом конечном отрезке интегрируемы во всех смыслах, которые мы прошли. Поэтому далее не будем сосредотачиваться на том, в каком смысле мы рассматриваем несобственный интеграл, а будем концентрироваться на выполнении условия (2) из определения несобственного интеграла.

Определение 9.3. $f \in \tilde{R}[a;\, b)$ и $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad f \in R[a;\, b-\varepsilon]$;

2) $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = I$.

Замечание 9.3. В силу непрерывности интеграла Римана имеем: если $f \in R[a;\, b]$, то $f \in \tilde{R}[a;\, b)$, причём равны соответствующие интегралы.

Рассмотрим примеры несобственных интегралов.

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_0^b e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} (e^0 - e^{-b}) = 1.$

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{b^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1}$ при $p > 1$. При $p \leqslant 1$ соответствующий интеграл расходится.

3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x}\,dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\ln^{p-1} 2} - \frac{1}{\ln^{p-1} b}\right) = \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1} 2}$ при $p > 1$. При $p \leqslant 1$ соответствующий интеграл расходится.

4) Заметим, что $\int\limits_a^{+\infty} F'(x)\,dx = F(+\infty) - F(a)$, где $F(+\infty) = \lim\limits_{b \to +\infty} F(b)$.

5) В качестве следующего примера рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Аналогичный интеграл в обычном смысле не берётся в элементарных функциях. Тем не менее, в несобственном смысле его можно вычислить аналитически. Можно показать, что этот интеграл сходится (пока не будем этого делать). Тогда можно взять $b = \sqrt{n}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^b e^{-x^2}\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx \circleddash$$

Лемма 9.1. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in [0;\, n] \quad 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$.

Доказательство:

Докажем, что $e^{-t} \geqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ при $t \in [0;\, n]$. При $t = 0$ неравенство выполняется. Далее рассмотрим $t > 0$:

$$e^{-t} \geqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \iff -t \geqslant n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \iff -\frac{t}{n} \geqslant \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Последнее неравенство верно в силу того, что $-x \geqslant \ln(1 - x)$ (проверяется дифференцированием).

Аналогично можно показать, что $e^t \geqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$.

Докажем, что $e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{n} t^2 e^{-t}$:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n} t^2 e^{-t} \iff e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Используя неравенство Бернулли, получаем:

$$e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = e^{-t}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant e^{-t} \cdot e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

■

По доказанной лемме при $t = x^2$ получаем:

$$0 \leqslant e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n} x^4 e^{-x^2} \qquad \forall x \in [0;\ \sqrt{n}];$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}} 0\, dx \leqslant \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n\right) dx \leqslant \int\limits_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{n} x^4 e^{-x^2}\, dx;$$

$$0 \leqslant \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx - \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx.$$

Можно показать, что $\int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx$ сходится. Тогда $\dfrac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n\,dx.$

Теперь можем продолжить равенство, оставленное ранее. Используя замену $x=\sqrt{n}\sin t$, получаем:

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt =$$

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,d(\sin t) = 2n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t \sin^2 t\,dt =$$

$$= 2n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t\,dt - 2n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = 2n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t\,dt - 2nI_n;$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

По формуле Валлиса $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Лекция 10

Сумма ряда обратных квадратов

Как известно, ряд обратных квадратов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Теперь, используя несобственные интегралы, вычислим значение его суммы.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta a_n$, где $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = a_0$.

Покажем, что последовательность a_n представима в следующем виде:

$$\frac{a_n}{2} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx}. \tag{10.1}$$

Введём обозначения:

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx; \qquad I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx.$$

В конце прошлого семинара было показано, что $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$. Аналогичным способом получим рекуррентное соотношение для J_n:

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-1} x\,d(\sin x) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d(x^2\cos^{2n-1} x) =$$

$$= (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n-2} x \sin^2 x\,dx - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^{2n-1} x \sin x\,dx =$$

$$= (2n-1)(J_{n-1} - J_n) + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(\cos^{2n} x) = (2n-1)(J_{n-1} - J_n) - \frac{1}{n} I_n;$$

$$J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1} - \frac{1}{2n^2} I_n.$$

Теперь можем доказать формулу (10.1) для a_n:

$$\frac{J_n}{I_n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{J_{n-1}}{I_n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{1}{2n^2};$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2J_{n-1}}{I_{n-1}} - \frac{2J_n}{I_n} = a_{n-1} - a_n = \Delta a_{n-1}.$$

Так как $\{a_n\}$ – убывающая последовательность и $a_n > 0$, то по теореме Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0\colon \ \ \exists N_1\colon \ \ \forall n > N_1 \qquad a_n > 2\delta.$$

Значит, $\forall n > N_1 \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\, dx > \delta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx$. Проверим, действительно ли это так. Пусть n достаточно велико: $n > \sqrt{\dfrac{2}{\delta}}$. Тогда получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\delta - x^2)\cos^{2n} x\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (\delta - x^2)\cos^{2n} x\, dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{\delta}} (\delta - x^2)\cos^{2n} x\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} (\delta - x^2)\cos^{2n} x\, dx \geqslant \frac{\delta}{2n}\cos^{2n}\frac{1}{n} + 0 - \frac{\pi^3}{8}\cdot\cos^{2n}\sqrt{\delta} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит, $\exists N_2 > \sqrt{\dfrac{2}{\delta}}\colon \ \ \forall n > N_2 \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\delta - x^2)\cos^{2n} x\, dx > 0.$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N \quad a_n > 2\delta$ и $a_n < 2\delta$. Получили противоречие. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Таким образом, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{J_0}{I_0} = 2 \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Свойства несобственного интеграла

Выпишем свойства несобственного интеграла.

1) Если $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ единственный.

2) Пусть $f, g \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f + \mu g \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, причём

$$\int\limits_a^{+\infty} \lambda f + \mu g\,dx = \lambda \int\limits_a^{+\infty} f\,dx + \mu \int\limits_a^{+\infty} g\,dx.$$

3) Пусть $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$. Тогда $\forall b > a \quad f \in \tilde{R}[b;\ +\infty)$.

4) Пусть $f \in R[a; b] \cap \tilde{R}[a;\ +\infty)$. Тогда $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, причём

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

5) Если $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то $\int\limits_a^{x} f(t)\,dt \in C[a;\ +\infty]$.

Теорема 10.1. *Пусть $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$ и $\varphi \in C^1[a; \beta)$, φ строго возрастает на $[\alpha; \beta)$, причём $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta - 0) = +\infty$. Тогда $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in \tilde{R}[\alpha; \beta)$, причём*

$$\int\limits_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \int\limits_\alpha^{\beta-\varepsilon} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^{\varphi(\beta-\varepsilon)} f(x)\,dx;$$

$$\varepsilon \to +0 : \quad \int\limits_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

■

Теорема 10.2. *Пусть $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$ и $\{a_n\}$ – возрастающая последовательность, причём $a_0 = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx$ сходится, причём*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Теорема 10.3 (Критерий Коши)**.**

$$f \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \quad \iff \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall m, n > N \qquad \left|\int\limits_{m}^{n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon\right).$$

Случай неотрицательной подынтегральной функции

Утверждение 10.1. *Пусть $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant a$. Тогда $\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ не убывает.*

Теорема 10.4. *Пусть $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant a$. Тогда*

$$f \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \quad \iff \quad \sup_{[a;\ +\infty)} \left|\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\right| < +\infty.$$

Теорема 10.5. *Пусть $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant a$ и $\{a_n\}$ – возрастающая последовательность, причём $a_0 = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Тогда*

$$f \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \quad \iff \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx,$$

причём

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx.$$

Теорема 10.6 (Признак сравнения)**.** *Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \ \ \forall x \geqslant a$. Тогда:*

1) *если $g \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$;*

2) *если $f \notin \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то $g \notin \tilde{R}[a;\ +\infty)$.*

Теорема 10.7 (Асимптотический признак сравнения)**.** *Пусть* $f(x), g(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant a$ *и* $f(x) \asymp g(x)$ *при* $x \to +\infty$*. Тогда* $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \iff g \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$.

Теорема 10.8 (Асимптотический признак сравнения)**.** *Пусть* $f(x), g(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant a$ *и* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to +\infty$*. Тогда* $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \iff g \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$.

Теорема 10.9 (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** *Пусть* $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \geqslant 0$ *и* f *не возрастает на* $[0;\ +\infty)$*. Тогда*

$$f \in \tilde{R}[0;\ +\infty) \quad \iff \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Доказательство:

Положим в теореме (10.5) $a_n = n$. Тогда получим:

$$f \in \tilde{R}[0;\ +\infty) \quad \iff \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx.$$

В силу монотонности $f(x)$ имеем: $f(n) \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leqslant f(n-1)$. Значит, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n-1)$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx$ сходится, а если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,dx$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Таким образом,

$$f \in \tilde{R}[0;\ +\infty) \quad \iff \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

■

Абсолютная и условная сходимости несобственного интеграла

Определение 10.1. f *абсолютно интегрируема на* $[a;\ +\infty)$, если $|f| \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$.

Теорема 10.10. *Если* $|f| \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$*, то* $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$.

Доказательство:

Так как $|f| \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \ \ \forall m, n > N \qquad \int\limits_{m}^{n} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда $\left|\int\limits_m^n f\,dx\right| \leqslant \int\limits_m^n |f|\,dx < \varepsilon.$ ■

Определение 10.2. f *условно интегрируема на* $[a;\ +\infty)$, если $f \in \tilde{R}[a;\ +\infty)$, а $|f| \notin \tilde{R}[a;\ +\infty)$.

Теорема 10.11. *Пусть* $f \in C[a;\ +\infty)$, $g \in C^1[a;\ +\infty)$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)g(x)$, *где* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. *Тогда*

$$f(x)g(x) \in \tilde{R}[a;\ +\infty) \iff F(x)g'(x) \in \tilde{R}[a;\ +\infty),$$

причём

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx.$$

Признак Дирихле

Теорема 10.12 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $f \in C[a;\ +\infty)$, $g \in C^1[a;\ +\infty)$, *и* $\sup\limits_{[a;\ +\infty)} |F(x)| < +\infty$, *где* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, *и* g *не возрастает, причём* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. *Тогда:*

1) $-\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ *сходится абсолютно;*

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)$ *сходится;*

3) $\left|\int\limits_x^{+\infty} f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 2g(x) \sup\limits_{[a;\ +\infty)} |F(x)|.$

Доказательство:

1) $|-F(x)g'(x)| \leqslant -g'(x) \sup\limits_{[a;\ +\infty)} |F(x)|$, так как $-g'(x) \geqslant 0$ в силу невозрастания g. Так как интеграл от правой части неравенства сходится, то и интеграл от левой части неравенства тоже сходится по признаку сравнения. Значит, $-\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ сходится абсолютно.

2) Так как $F(x)g(x) = O(1) \cdot o(1) \to 0$ при $x \to +\infty$, то по теореме (10.11) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)$ сходится.

3) По теореме (10.11) получаем:

$$\left|\int\limits_x^{+\infty} f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \left|F(t)g(t)\Big|_x^{+\infty}\right| + \int\limits_x^{+\infty} |F(t)g'(t)|\,dt \leqslant 2g(x)\sup_{[a;\ +\infty)}|F(x)|,$$

так как

$$\left|F(t)g(t)\Big|_x^{+\infty}\right| \leqslant g(x)\sup_{[a;\ +\infty)}|F(x)|;$$

$$\int\limits_x^{+\infty} |F(t)g'(t)|\,dt \leqslant g(x)\sup_{[a;\ +\infty)}|F(x)|.$$

■

Лекция 11

Признак Абеля

Теорема 11.1 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $f \in C[a;\ +\infty)$, $g \in C^1[a;\ +\infty)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, а* g *возрастает, причём* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = C < +\infty$*. Тогда:*

1) $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ *сходится абсолютно, где* $F(x) = \int\limits_a^{x} f(t)\,dt$*;*

2) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)$ *сходится.*

Доказательство:

1) Так как $h(x)$ возрастает, то $|F(x)g'(x)| \leqslant \sup\limits_{[a;\ +\infty)} |F(x)|g'(x)$. А так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = C < +\infty$, то интеграл от правой части неравенства сходится, то и интеграл от левой части неравенства тоже сходится по признаку сравнения. Значит, $\int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ сходится абсолютно.

2) Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)g(x) = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \cdot C$, то по теореме (10.11) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)$ сходится.

■

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Пусть $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $x = (x^1,\ \ldots, x^n)$.

Определение 11.1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} = \left.\dfrac{df(x_0^1,\ \ldots, x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1},\ \ldots, x_0^n)}{dx^k}\right|_{x^k=x_0^k}$ – *частная производная функции* f *по переменной* x^k *в точке* x_0.

Определение 11.2. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Lh + o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

где

$$h = (h^1, \ldots, h^n), \quad \|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}, \quad o(\|h\|) = \|h\| \cdot o(1),$$
$$L = (L_1, \ldots, L_n), \quad Lh = L_1 h^1 + \ldots + L_n h^n.$$

Обозначение: $f \in D(x_0)$.

Теорема 11.2. *Если $f \in D(x_0)$, то $f \in C(x_0)$.*

Доказательство:

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0,$$

так как по неравенству Коши-Буняковского $|Lh| \leqslant \|L\| \cdot \|h\| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. ■

Теорема 11.3. *Если $f \in D(x_0)$, то $\forall k = 1, \ldots, n \;\; \exists \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0}$.*

Доказательство:

Пусть $h = (0, \ldots, 0, h^k, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h \to 0;$$
$$f(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}, x_0^k + h^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n) = L_k h^k + o(h^k) \quad \text{при} \quad h^k \to 0;$$
$$\exists \left.\frac{df(x_0^1, \ldots, x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n)}{dx^k}\right|_{x^k = x_0^k} = L_k = \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0}.$$

■

Определение 11.3. Функция f называется *гладкой в точке* x_0, если

$$\frac{\partial f}{\partial x^k} \in C(x_0) \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Обозначение: $f \in C^1(x_0)$.

Теорема 11.4. *Если $f \in C^1(x_0)$, то $f \in D(x_0)$.*

Доказательство:

Представим общее приращение функции в виде приращений вдоль отдельных координат:

$$f(x_0^1 + h^1, \ldots, x_0^n + h^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_0^1 + h^1, \ldots, x_0^k + h^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) -$$
$$- f(x_0^1 + h^1, \ldots, x_0^{k-1} + h^{k-1}, x_0^k, \ldots, x_0^n) \big) \circleddash$$

Применим теорему Лагранжа ($\theta_k \in (0;\,1)$):

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1 + h^1,\, \ldots,\, x_0^{k-1} + h^{k-1}, x_0^k + \theta_k h^k, x_0^{k+1},\, \ldots,\, x_0^n) \cdot h^k =$$

Так как $f \in C^1(x_0)$, то

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) + o(1) \right) \cdot h^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) \cdot h^k + o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

■

Дифференциал функции нескольких переменных

Определение 11.4. Пусть $f \in D(x_0)$. Тогда

$$df_{x_0}: \quad T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{f(x_0)}\mathbb{R};$$

$$df_{x_0}(h) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \cdot h^k.$$

– *дифференциал функции f в точке* x_0, где $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ – касательное n-мерное векторное пространство в точке x_0, а $T_{f(x_0)}\mathbb{R}$ – касательное 1-мерное векторное пространство в точке $f(x_0)$.

Замечание 11.1. Так как $dx^k(h) = h^k$, то

$$df_{x_0}(h) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \cdot h^k = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \cdot dx^k(h).$$

Короче можно написать так:

$$df_{x_0} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} dx^k,$$

где $df_{x_0} \in (T_{x_0}\mathbb{R}^n)^*$, а dx^k – базис в $(T_{x_0}\mathbb{R}^n)^*$, взаимный к $(1, 0,\, \ldots, 0)$, $(0, 1,\, \ldots, 0)$, $(0, 0,\, \ldots, 1)$.

Замечание 11.2. Дифференциал можно представить в виде произведения строки на столбец:

$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}.$$

Дифференциал отображения

Определение 11.5. $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – *отображение*, где $f = (f_1(x),\, \ldots,\, f_m(x))$.

Определение 11.6. Отображение f называется *дифференцируемым в точке* x_0, если

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Lh+o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h\to 0,$$

где L – матрица $m\times n$, h – столбец из n координат.

Обозначение: $f\in D(x_0)$.

Теорема 11.5.

$$f\in D(x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_j\in D(x_0) \quad \forall j=1,\,\ldots,m.$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

$$|f_j(x_0+h)-f_j(x_0)-L^jh|\leqslant \|f(x_0+h)-f(x_0)-Lh\|=o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Докажем $\Longleftarrow$.

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)-Lh\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}|f_j(x_0+h)-f_j(x_0)-L^jh|^2}=o(\|h\|) \ \text{ при } \ h\to 0.$$

■

Сформулируем следствие.

Утверждение 11.1.

$$L=\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0}$$

– *матрица Якоби.*

Определение 11.7. Пусть $f\in D(x_0)$. Тогда

$$df_{x_0}: \quad T_{x_0}\mathbb{R}^n\to T_{f(x_0)}\mathbb{R}^m;$$

$$df_{x_0}(h)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}.$$

– *дифференциал отображения* f *в точке* x_0.

Замечание 11.3. Так как $dx^k(h) = h^k$, то

$$df_{x_0}(h) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix} (h).$$

Короче можно написать так:

$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix},$$

где $df_{x_0} \in (T_{x_0}\mathbb{R}^n)^*$, а dx^k – базис в $(T_{x_0}\mathbb{R}^n)^*$, взаимный к $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $(0, 0, \ldots, 1)$.

Теорема 11.6. *Если $f \in D(x_0)$, то $\exists \dfrac{df_j}{dx^k}(x_0) \quad \forall j, k$.*

Теорема 11.7. *Если $f \in D(x_0)$, то $f \in C(x_0)$.*

Доказательство:
Так как $f \in D(x_0)$, то по теореме (11.5) $f_j \in D(x_0) \ \ \forall j$. Тогда по теореме (11.2) $f_j \in C(x_0)$. Так как покомпонентная непрерывность отображения равносильна непрерывности отображения, то $f \in C(x_0)$. ■

Определение 11.8. Отображение f называется *гладким в точке* x_0, если

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^k} \in C(x_0) \qquad \forall j, k.$$

Обозначение: $f \in C^1(x_0)$.

Теорема 11.8. *Если $f \in C^1(x_0)$, то $f \in D(x_0)$.*

Доказательство:
Так как $f \in C^1(x_0)$, то $f_j \in C^1(x_0) \ \ \forall j$. Тогда по теореме (11.4) $f_j \in D(x_0) \ \ \forall j$. Значит, $f \in D(x_0)$. ■

Свойства дифференциала

Теорема 11.9. *Пусть $f, g \in D(x_0)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda f + \mu g \in D(x_0)$, причём*

$$d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda\, df_{x_0} + \mu\, dg_{x_0}.$$

Доказательство:

$$(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) - (\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda(f(x_0 + h) - f(x_0)) + \mu(g(x_0 + h) - g(x_0)) =$$
$$= \lambda(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + \mu(dg_{x_0}(h) + o(\|h\|)) = (\lambda\, df_{x_0} + \mu\, dg_{x_0})(h) + o(\|h\|).$$

■

Теорема 11.10. *Пусть $f, g \in D(x_0)$. Тогда $fg \in D(x_0)$, причём*

$$d(fg)_{x_0} = g(x_0)\, df_{x_0} + f(x_0)\, dg_{x_0}.$$

Доказательство:

$$(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0) = f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) -$$
$$- f(x_0)g(x_0) = g(x_0 + h)(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + f(x_0)(dg_{x_0}(h) + o(\|h\|)) =$$
$$= (g(x_0) + o(1))(df_{x_0}(h) + o(\|h\|)) + f(x_0)(dg_{x_0}(h) + o(\|h\|)) =$$
$$= (g(x_0)\, df_{x_0} + f(x_0)\, dg_{x_0})(h) + o(\|h\|).$$

■

Лекция 12

Свойства дифференциала (продолжение)

Теорема 12.1. *Пусть $g \in D(x_0)$, причём $g(x_0) \neq 0$. Тогда $\dfrac{1}{g} \in D(x_0)$, причём*

$$d\left(\frac{1}{g}\right)_{x_0} = -\frac{1}{(g(x_0))^2}\, dg_{x_0}.$$

Доказательство:

Так как $g \in D(x_0)$, то по теореме (11.2) $g \in C(x_0)$. Так как $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{1}{g} \in C(x_0)$. Значит, $\dfrac{1}{g(x_0+h)} = \dfrac{1}{g(x_0)} + o(1)$ при $h \to 0$. Тогда получаем:

$$\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)} = -\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{g(x_0+h)g(x_0)} = -\frac{dg_{x_0} \cdot h + o(\|h\|)}{g(x_0)}\left(\frac{1}{g(x_0)} + o(1)\right) =$$

$$= -\frac{dg_{x_0} \cdot h}{(g(x_0))^2} + o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

■

Сформулируем следствие.

Утверждение 12.1. *Пусть $f, g \in D(x_0)$, причём $g(x_0) \neq 0$. Тогда $\dfrac{f}{g} \in D(x_0)$, причём*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = \frac{g(x_0)\, df_{x_0} - f(x_0)\, dg_{x_0}}{(g(x_0))^2}.$$

Доказательство:

Из теорем (11.10) и (12.1) получаем, что $\dfrac{f}{g} \in D(x_0)$, причём

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = d\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)_{x_0} = \frac{1}{g(x_0)}\, df_{x_0} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{dg_{x_0}}{(g(x_0))^2}\right) = \frac{g(x_0)\, df_{x_0} - f(x_0)\, dg_{x_0}}{(g(x_0))^2}.$$

■

Дифференцируемость сложной функции

Теорема 12.2 (Дифференцируемость сложной функции)**.** *Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ и $f \in D(x_0)$, $g \in D(t_0)$, где $x_0 = g(t_0)$. Тогда $f \circ g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, причём $f \circ g \in D(t_0)$ и $d(f \circ g)_{t_0} = df_{x_0} \cdot dg_{t_0}$ (произведение дифференциалов следует воспринимать как произведение соответствующих матриц).*

Доказательство:

Так как $g \in D(t_0)$, то $g \in C(t_0)$. Тогда $g(t_0+\tau) = g(t_0) + o(1)$ при $\tau \to 0$.

Так как $g \in D(t_0)$, то $g(t_0+\tau) - g(t_0) = dg_{t_0} \cdot \tau + o(\|\tau\|)$ при $\tau \to 0$.

Так как $f \in D(x_0)$, то $f(x_0+h) - f(x_0) = df_{x_0} \cdot h + \|h\| \cdot \alpha(h)$, где $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. Будем считать, что $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha \in C(0)$.

Положим $h = g(t_0+\tau) - g(t_0)$. Это возможно, так как в силу непрерывности g из $\tau \to 0$ следует $h \to 0$. Тогда получаем:

$$
\begin{aligned}
&f(g(t_0+\tau)) - f(g(t_0)) = df_{x_0}(g(t_0+\tau) - g(t_0)) + \|g(t_0+\tau) - g(t_0)\| \cdot \\
&\cdot \alpha(g(t_0+\tau) - g(t_0)) = df_{x_0}(dg_{t_0} \cdot \tau + o(\|t\|)) + O(\|\tau\|) \cdot o(1) = \\
&= (df_{x_0} \cdot dg_{x_0})\tau + o(\|\tau\|) \quad \text{при} \quad \tau \to 0.
\end{aligned}
$$

■

Сформулируем следствия.

Утверждение 12.2. *Пусть* $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Тогда в рамках условий теоремы (12.2) получаем:*

$$
\left.\frac{df \circ g}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0}.
$$

Утверждение 12.3. *Пусть* $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Тогда в рамках условий теоремы (12.2) получаем:*

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \left.\frac{\partial g}{\partial t^k}\right|_{t=t_0}.
$$

Утверждение 12.4. *Пусть* $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ g: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Тогда в рамках условий теоремы (12.2) получаем:*

$$
\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dg^k}{dt}\right|_{t=t_0}.
$$

Утверждение 12.5. *Пусть* $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ g: \ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. *Тогда в рамках условий теоремы (12.2) получаем:*

$$
\left.\frac{\partial f}{\partial t^j}\right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \left.\frac{dg^k}{dt^j}\right|_{t=t_0}.
$$

В качестве примера приведём расчёт производной функции t^t (ранее для этого надо было пользоваться экспоненциальным представлением). Введём обозначения

$x(t) = t$ и $y(t) = t$. Тогда получаем:

$$\frac{d}{dt}t^t = \frac{d}{dt}x^y = \frac{\partial x^y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial x^y}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = yx^{y-1} + x^y\ln x = t^t\cdot(1+\ln t).$$

Инвариантность формы первого дифференциала

Продемонстрируем инвариантность формы первого дифференциала:

$$d(f\circ g)_{t_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0} \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t^p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial t^p} \end{pmatrix}\right|_{t=t_0} \begin{pmatrix} dt^1 \\ \vdots \\ dt^p \end{pmatrix} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^p \end{pmatrix}.$$

$$df_{x_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}\right|_{x=x_0} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^p \end{pmatrix}.$$

Градиент функции

Определение 12.1. Пусть $f \in D(x_0)$. Тогда вектор $\nabla f_{x_0} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x^n}\right\}_{x=x_0}$ называется *градиентом функции f в точке x_0*.

Заметим, что $\nabla f_{x_0} \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

Теорема 12.3. *Вектор ∇f_{x_0} инвариантен относительно ортогональных преобразований координат.*

Доказательство:

Запишем ортогональное преобразование координат:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C^{-1} = C^T.$$

То есть $x^k = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} t^j$. Тогда получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial t^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t^j} = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \frac{\partial f}{\partial x^k};$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial t^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial t^n} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial t^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial t^n} \end{pmatrix}.$$

■

Определение 12.2. Пусть $e \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$, причём $\|e\| = 1$. Тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + te)$$

– *частная производная функции f по направлению e в точке $x = x_0$.*

Теорема 12.4. *Пусть $f \in D(x_0)$. Тогда $\left.\dfrac{\partial f}{\partial e}\right|_{x=x_0} = (\nabla f_{x_0},\, e)$.*

Доказательство:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x_0 + te) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \cdot \left.\frac{d(x_0^k + te^k)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x=x_0} \cdot e^k = (\nabla f_{x_0},\, e).$$

■

Заметим, что градиент ∇f_{x_0} задаёт направление наискорейшего возрастания функции f в точке x_0.

Утверждение 12.6. *Пусть $f \in D(x_0)$. Тогда $df_{x_0} :\ T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{f(x_0)}\mathbb{R}$, причём*

$$df_{x_0}h = (\nabla f_{x_0},\, h) \qquad \text{и} \qquad |df_{x_0}h| \leqslant \|\nabla f_{x_0}\| \cdot \|h\|.$$

Теорема 12.5 (Теорема о среднем)**.** *Пусть $f \in D(U(x_0))$. Тогда*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (\nabla f_{x_0 + \theta h},\, h),$$

где $\theta \in (0;\, 1)$.

Доказательство:

Пусть $\varphi(t) = f(x_0 + th)$. Заметим, что $\varphi(t) \in D[0;\, 1]$. Тогда по теореме Лагранжа получаем ($\theta \in (0;\, 1)$):

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=\theta};$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{x = x_0 + \theta h} h^k = (\nabla f_{x_0 + \theta h},\, h).$$

■

Сформулируем следствие.

Утверждение 12.7.

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leqslant \sup_{x \in U(x_0)} \|\nabla f\| \cdot \|h\|.$$

Лекция 13

Дифференцируемость обратной функции

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда матрица частных производных

$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби.

Далее разберём важный частный случай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. В этом случае матрица Якоби квадратная.

Вспомним теорему об обратной функции в одномерном случае.

Теорема 13.1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём f строго возрастает в некоторой окрестности $U^x(x_0)$, $f \in D(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U^y(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $\exists$ обратная функция f^{-1}, причём $f^{-1} \in D(y_0)$ и $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Теперь сформулируем аналогичную теорему в многомерном случае, но пока в упрощённом варианте.

Теорема 13.2. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, причём f – биекция некоторых окрестностей $U^x(x_0)$ и $U^y(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Пусть $f \in D(x_0)$ и $\det df_{x_0} \neq 0$. Тогда $f^{-1} \in D(y_0)$, причём $df^{-1}_{y_0} = (df_{x_0})^{-1}$.*

Доказательство:

Так как f – биекция окрестностей $U^x(x_0)$ и $U^y(y_0)$, то

$$\forall y = y_0 + h \in U^y(y_0) \quad \exists! x = x_0 + \tau \in U^x(x_0)\colon \quad f(x_0 + \tau) = y_0 + h.$$

То есть $x_0 + \tau = f^{-1}(y_0 + h)$.

Так как $f \in D(x_0)$, то

$$f(x_0 + \tau) - f(x_0) = df_{x_0}\tau + o(\|\tau\|) \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

То есть $h = df_{x_0}\tau + o(\|\tau\|)$ при $\tau \to 0$. Тогда получаем:

$$\left(df_{x_0}\right)^{-1} h = \tau + o(\|\tau\|) \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Так как $x_0 + \tau = f^{-1}(y_0 + h)$ и $x_0 = f^{-1}(y_0)$, то получаем:

$$f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0) = \left(df_{x_0}\right)^{-1} h + o(\|\tau\|) \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{13.1}$$

Теперь докажем, что $\tau \asymp h$ при $\tau \to 0$, то есть, что $\tau = O(h)$ при $h \to 0$ и $h = O(\tau)$ при $\tau \to 0$.

Так как $h = df_{x_0}\tau + o(\|\tau\|)$ при $\tau \to 0$, то $h = O(\tau)$ при $\tau \to 0$. Кроме этого, получаем:

$$\frac{h}{\|\tau\|} = df_{x_0}\frac{\tau}{\|\tau\|} + o(1) \quad \text{при} \quad \tau \to 0;$$

$$\frac{\|h\|}{\|\tau\|} \geqslant \left\| df_{x_0}\frac{\tau}{\|\tau\|} \right\| + o(1) \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Так как $\dfrac{\tau}{\|\tau\|}$ – единичный вектор и $\det df_{x_0} \neq 0$, то $\left\| df_{x_0}\dfrac{\tau}{\|\tau\|} \right\| > 0$. Значит, $\left\| df_{x_0}\dfrac{\tau}{\|\tau\|} \right\| \geqslant a \ \ \forall\tau$, где $a > 0$. Так как

$$\exists \tilde{U}^x(x_0)\colon \quad \forall x_0 + \tau \in \tilde{U}^x(x_0) \subset U^x(x_0) \qquad o(1) > -\frac{a}{2},$$

то

$$\forall x_0 + \tau \in \tilde{U}^x(x_0) \qquad \frac{\|h\|}{\|\tau\|} > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Тогда

$$\forall x_0 + \tau \in \tilde{U}^x(x_0) \qquad \|\tau\| < \frac{2}{a} \cdot \|h\|.$$

Значит, $\tau = O(h)$ при $h \to 0$.

В итоге из (13.1) получаем:

$$f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0) = (df_{x_0})^{-1}\, h + o(\|h\|) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Значит, $f^{-1} \in D(y_0)$, причём $df^{-1}_{y_0} = (df_{x_0})^{-1}$. ■

Частные производные второго порядка

Определение 13.1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, причём $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ $\forall x \in U(x_0)$ и $\exists \left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right)$. Тогда такая величина называется *частной производной второго порядка* и обозначается

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=x_0}.$$

В случае $m \neq k$ такая частная производная называется *смешанной*.

В случае $m = k$ используют обозначение $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x^j}^2}$.

Сформулируем определения, необходимые для доказательства следующей теоремы.

Определение 13.2.

$$\Delta_{h^j} f = f(x_0^1, \ldots, x_0^j + h^j, \ldots, x_0^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n)$$

– *первая разность.*

Определение 13.3.

$$\Delta_{h^k}\Delta_{h^j} f = \Delta^2_{h^k,\, h^j} f =$$

$$= f(x_0^1, \ldots, x_0^k + h^k, \ldots, x_0^j + h^j, \ldots, x_0^n) - f(x_0^1, \ldots, x_0^k + h^k, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n) -$$

$$- f(x_0^1, \ldots, x_0^k, \ldots, x_0^j + h^j, \ldots, x_0^n) + f(x_0^1, \ldots, x_0^k, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n)$$

– *вторая разность.*

Замечание 13.1. Заметим, что $\Delta^2_{h^k,\, h^j} f = \Delta^2_{h^j,\, h^k} f$.

Теорема 13.3 (Теорема Шварца)**.** *Пусть* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \in C(x_0)$. *Тогда*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}\right|_{x=x_0}.$$

Доказательство:

По теореме Лагранжа ($\theta_k, \theta_j \in (0;\,1)$) получаем:

$$\Delta^2_{h^k,\, h^j} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1, \ldots, x_0^k + \theta_k h^k, \ldots, x_0^j + h^j, \ldots, x_0^n) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1, \ldots, x_0^k + \theta_k h^k, \ldots, x_0^j, \ldots, x_0^n)\right) \cdot h^k =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0^1, \ldots, x_0^k + \theta_k h^k, \ldots, x_0^j + \theta_j h^j, \ldots, x_0^n) \cdot h^j h^k \ominus$$

В силу того, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \in C(x_0)$, получаем:

$$\ominus \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0) + o(1)\right) \cdot h^j h^k \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Аналогично получаем:

$$\Delta^2_{h^j,\, h^k} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}(x_0) + o(1)\right) \cdot h^k h^j \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Тогда в силу того, что $\Delta^2_{h^k,\,h^j} f = \Delta^2_{h^j,\,h^k} f$, получаем:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}\right|_{x=x_0}.$$

■

Определение 13.4. $f \in C^2(x_0)$, если все частные производные второго порядка непрерывны.

Замечание 13.2. В силу теоремы Шварца (13.3) для класса $C^2(x_0)$ все смешанные частные производные в точке x_0, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, совпадают.

Теорема 13.4 (Теорема Юнга)**.** *Пусть* $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}, \dfrac{\partial f}{\partial x^j} \in D(x_0)$. *Тогда*

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}\right|_{x=x_0}.$$

Доказательство:

По теореме Лагранжа ($\theta_k \in (0;\,1)$) получаем:

$$\Delta^2_{h^k,\,h^j} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1,\,\ldots,x_0^k+\theta_k h^k,\,\ldots,x_0^j+h^j,\,\ldots,x_0^n) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0^1,\,\ldots,x_0^k+\theta_k h^k,\,\ldots,x_0^j,\,\ldots,x_0^n)\right)\cdot h^k \ominus$$

В силу того, что $\dfrac{\partial f}{\partial x^k} \in D(x_0)$, получаем:

$$\ominus \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial {x^k}^2}(x_0)\cdot\theta_k h^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)\cdot h^j - \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial {x^k}^2}(x_0)\cdot\theta_k h^k + \right.$$

$$\left. + o(\|h\|)\right)\cdot h^k = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)\cdot h^j h^k + o\left(\|h\|^2\right) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Аналогично получаем:

$$\Delta^2_{h^j,\,h^k} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}(x_0)\cdot h^k h^j + o\left(\|h\|^2\right) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Тогда в силу того, что $\Delta^2_{h^k,\,h^j} f = \Delta^2_{h^j,\,h^k} f$, получаем:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}\right|_{x=x_0}.$$

■

Дифференциал второго порядка

Определение 13.5. Пусть $f \in D(U(x_0))$, то есть в окрестности $U(x_0)$ $\exists df_x h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Если $\forall h \quad df_x h \in D(x_0)$, то f называется *дважды дифференцируемой в точке* x_0.

Обозначение: $f \in D^2(x_0)$.

Замечание 13.3. $d(df_x h)_{x_0}\tau = d^2 f_{x_0}(h,\tau)$ – билинейная функция.

Утверждение 13.1.

$$df_x h \in D(x_0) \quad \forall h \quad \iff \quad \frac{\partial f}{\partial x^k} \in D(x_0) \quad \forall k.$$

Замечание 13.4. Так как

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} h^k\right)_{x_0} \tau = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)\cdot h^k \tau^j,$$

то $d^2 f_{x_0}(h,\tau)$ – симметричная билинейная функция. Тогда

$$d^2 f_{x_0}(h,h) = d^2 f_{x_0}(h) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)\cdot h^k h^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)\cdot dx^k(h)\, dx^j(h)$$

– симметричная квадратичная форма. Таким образом, получаем:

$$d^2 f_{x_0} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}\, dx^j\, dx^k.$$

Утверждение 13.2. *Если $f \in C^2(x_0)$, то $f \in D^2(x_0)$.*

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 13.6.

$$\left.\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{i_{m+1}} \partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_m}}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_{m+1}}}\right|_{x=x_0} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_m}}\right)$$

– *частная производная* $(m+1)$*-го порядка* функции f в точке $x = x_0$.

Утверждение 13.3. *Если $f \in C^m(x_0)$, то все смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.*

Определение 13.7.

$$d^{m+1}f_{x_0}(h_1, \ldots, h_{m+1}) = d(d^m f_x(h_1, \ldots, h_m))_{x_0} h_{m+1}$$

– *дифференциал* $(m+1)$*-го порядка* функции f в точке $x = x_0$.

Замечание 13.5. $d^{m+1}f_{x_0}(h_1, \ldots, h_{m+1})$ – симметричная полилинейная функция.

Определение 13.8. Если $\exists d^{m+1}f_{x_0}(h_1, \ldots, h_{m+1})$, то f называется $(m+1)$ *раз дифференцируемой в точке* x_0.

Обозначение: $f \in D^{m+1}(x_0)$.

Замечание 13.6.

$$d^{m+1}f_{x_0}(h) = d^{m+1}f_{x_0}(h, h, \ldots, h).$$

Лекция 14

Неинвариантность формы дифференциала второго порядка

Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Тогда $d^2f = \dfrac{d^2f}{dx^2}\,dx^2$ в случае независимой переменной x. Если же $x = x(t)$, то в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем:

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{df}{dx}\,dx\right) = \frac{d^2f}{dx^2}\,dx^2 + \frac{df}{dx}\,d^2x.$$

Таким образом, форма второго дифференциала, вообще говоря, неинвариантна.

Теперь пусть $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, а $x\colon \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ – линейное отображение, то есть $x_k = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{kj}t^j$. В этом случае получаем:

$$d^2f = d(df) = d\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k\right) = d\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^k}\sum_{j=1}^{p}a_{kj}dt^j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^l}\,dx^l\sum_{j=1}^{p}a_{kj}\,dt^j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^l}\,dx^l\,dx^k.$$

Таким образом, форма второго дифференциала инвариантна относительно линейных замен переменных.

Теорема Пеано

Вспомним теорему для одномерного случая.

Теорема 14.1 (Теорема Пеано для одномерного случая)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *причём* $f\in D^n(x_0)$. *Тогда*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n) \quad \textit{при} \quad h\to 0.$$

Замечание 14.1. Можно переписать формулу из теоремы (14.1) в следующем виде:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,d^kf_{x_0}(h) + o(h^n) \quad \text{при} \quad h\to 0,$$

где $d^0f_{x_0}(h) = f(x_0)$.

Замечание 14.2. Также мы считаем, что $D^0(x_0) = C(x_0)$.

Теперь сформулируем и докажем аналогичную теорему для многомерного случая.

Теорема 14.2 (Теорема Пеано для многомерного случая)**.** *Пусть* $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, *причём* $f \in D^n(x_0)$. *Тогда*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f_{x_0}(h) + o(\|h\|^n) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство:

Лемма 14.1. *Пусть* $\Phi(x) = \sum\limits_{i_1=1}^{m}\sum\limits_{i_2=1}^{m}\ldots\sum\limits_{i_j=1}^{m} a_{i_1 i_2 \ldots i_j} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_j}$. *Тогда:*

1) *если* $n < j$, *то* $d^n\Phi_{x=0}(h) = 0$;
2) *если* $n > j$, *то* $d^n\Phi_{x=0}(h) = 0$;
3) $d^j\Phi_{x=0}(h) = j! \cdot \Phi(h)$.

Доказательство:

1) Рассмотрим случай $n < j$. После дифференцирования n раз функции $\Phi(x)$ во всех полученных слагаемых останутся компоненты x. Тогда при подстановки $x = 0$ все эти слагаемые обратятся в 0.
2) Рассмотрим случай $n > j$. После дифференцирования j раз функции $\Phi(x)$ получим константу. Тогда следующее дифференцирование даст тождественный 0.
3) $$d^j\Phi(h) = \sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_j=1}^{n} a_{i_1\ldots i_j}\, d^j(x^{i_1}\ldots x^{i_j}) =$$
$$= j! \cdot \sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_j=1}^{n} a_{i_1\ldots i_j} h^{i_1}\ldots h^{i_j} = j!\cdot\Phi(h).$$

■

Лемма 14.2. *Пусть* $g \in D^n(x_0)$ *и* $d^k g_{x_0} = 0\ \ \forall k = 0, \ldots, n$. *Тогда*

$$g(x_0+h) = o(\|h\|^n) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство:

Докажем по индукции.

При $n = 0$ имеем: $g \in C(x_0)$ и $g(x_0) = 0$. Тогда $g(x_0+h) = o(1)$ при $h \to 0$ по критерию непрерывности.

При $n = 1$ имеем: $g \in D(x_0)$ и $g(x_0) = 0$, $dg_{x_0} = 0$. Тогда $g(x_0+h) = o(\|h\|)$ при $h \to 0$ по определению дифференцируемости.

Сделаем шаг индукции. По предположению индукции $g(x_0 + h) = o(\|h\|^n)$ при $n \to 0$. Пусть $g \in D^{n+1}(x_0)$ и $d^k g_{x_0} = 0\ \ \forall k = 0, \ldots, n+1$. Тогда $dg_x(h) \in D^n(x_0)$ и $d^k(dg_x(h))_{x_0} = 0\ \ \forall k = 0, \ldots, n$. По теореме о среднем получаем ($\theta \in (0; 1)$):

$$g(x_0 + h) = g(x_0 + h) - g(x_0) = (\nabla_{x_0+\theta h}, h) = dg_{x_0+\theta h}(h);$$

$$|g(x_0 + h)| \leqslant \|dg_{x_0+\theta h}\| \cdot \|h\| = o(\|h\|^n) \cdot \|h\| = o(\|h\|^{n+1}) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

■

Пусть $g(h) = f(x_0 + h) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f_{x_0}(h)$. Так как $g \in D^n(0)$ и

$$d^j g_{h=0}(\tau) = d^j f_{x_0}(\tau) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^j(d^k f_{x_0}(h))_{h=0}(\tau) =$$

$$= d^j f_{x_0}(\tau) - \frac{1}{j!}\, d^j(d^j f_{x_0}(h))_{h=0}(\tau) = d^j f_{x_0}(\tau) - d^j f_{x_0}(\tau) = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, n,$$

то $g(h) = o(\|h\|^n)$ при $h \to 0$. Отсюда получаем:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, d^k f_{x_0}(h) + o(\|h\|^n) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

■

Решение экстремальных задач

Определение 14.1. x_0 – *точка локального минимума функции* f, если

$$\exists \dot{U}(x_0)\colon \ \ \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad f(x) > f(x_0),$$

где $\dot{U}(x_0)$ – проколотая окрестность точки x_0.

Определение 14.2. x_0 – *точка локального максимума функции* f, если

$$\exists \dot{U}(x_0)\colon \ \ \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad f(x) < f(x_0),$$

где $\dot{U}(x_0)$ – проколотая окрестность точки x_0.

Определение 14.3. *Точка локального экстремума* – точка локального минимума или максимума.

Теорема 14.3 (Необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть $f \in D(x_0)$, причём x_0 – точка локального экстремума. Тогда $df_{x_0} = 0$.*

Доказательство:

Предположим, что $df_{x_0} \neq 0$. Тогда $\exists h \in T_{x_0}\mathbb{R}^n\colon\ df_{x_0}(h) > 0$. Отсюда получаем:

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = df_{x_0}(th) + o(t) = t(df_{x_0}(h) + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Так как

$$\exists \delta > 0\colon\ \ \forall t\colon\ |t| < \delta \qquad df_{x_0}(h) + o(1) > 0,$$

то

$$\forall t \in (0;\ \delta) \qquad f(x_0 + th) - f(x_0) > 0;$$

$$\forall t \in (-\delta;\ 0) \qquad f(x_0 + th) - f(x_0) < 0.$$

Значит, x_0 не может быть точкой локального экстремума. ■

Лекция 15

Решение экстремальных задач (продолжение)

Теорема 15.1 (Достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть $f \in D^2(x_0)$, причём $df_{x_0} = 0$. Тогда:*

1) *если $d^2 f_{x_0} > 0$, то есть $d^2 f_{x_0}(h) > 0 \quad \forall h \neq 0$, то x_0 – точка локального минимума;*

2) *если $d^2 f_{x_0} < 0$, то есть $d^2 f_{x_0}(h) < 0 \quad \forall h \neq 0$, то x_0 – точка локального максимума;*

3) *если $\exists h^+, h^- \in T_{x_0}\mathbb{R}^n: \ d^2 f_{x_0}(h^+) > 0$ и $d^2 f_{x_0}(h^-) < 0$, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

Доказательство:

1) Так как $df_{x_0} = 0$, то

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f_{x_0}(h) + o(\|h\|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(d^2 f_{x_0}\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + o(1) \right) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Так как $d^2 f_{x_0}(h) > 0 \ \ \forall h \neq 0$ и $\dfrac{h}{\|h\|}$ – компакт (поверхность единичной сферы в n-мерном пространстве), то $d^2 f_{x_0}\left(\dfrac{h}{\|h\|}\right) \geqslant a > 0$. Тогда получаем:

$$\exists \dot{U}(x_0): \ \ \forall x_0 + h \in \dot{U}(x_0) \qquad o(1) > -\frac{a}{2}.$$

Значит, $f(x_0 + h) > f(x_0) \ \ \forall h: \ x_0 + h \in \dot{U}(x_0)$.

Таким образом, x_0 – точка локального минимума.

2) Доказательство аналогично пункту (1).

3) Так как $df_{x_0} = 0$, то

$$f(x_0 + th^+) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f_{x_0}(th^+) + o(t^2) =$$

$$= t^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_{x_0}(h^+) + o(1) \right) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Так как $d^2 f_{x_0}(h^+) > 0$, то

$$\exists t^+ > 0: \ \ \forall t \in (0;\ t^+) \qquad \frac{1}{2} d^2 f_{x_0}(h^+) + o(1) > 0.$$

Значит, $f(x_0 + th^+) > f(x_0) \quad \forall t \in (0;\ t^+)$.

Аналогично можно получить, что $f(x_0+th^-) < f(x_0) \quad \forall t \in (0;\ t^-)$, где $t^- > 0$.

Таким образом, x_0 не является точкой локального экстремума.

■

Обсуждение неявных функций

Рассмотрим функцию $z = F(x, y)$.

Определение 15.1. Множество точек, для которых $F(x, y) = C = \mathrm{const}$, называется *линией уровня* функции $z = F(x, y)$.

Теперь рассмотрим функцию $w = F(x, y, z)$.

Определение 15.2. Множество точек, для которых $F(x, y, z) = C = \mathrm{const}$, называется *поверхностью уровня* функции $w = F(x, y, z)$.

Вернёмся к рассмотрению случая двух переменных.

Пусть $z = ax + by$ – линейная функция. Тогда $ax + by = C$ – линия уровня – прямая линия. Причём если $b \neq 0$, то $y = \dfrac{1}{b}(C - ax)$.

Теперь пусть $F(x, y) = x^2 + y^2$. Рассмотрим линию уровня $F(x, y) = 1$. Тогда $x^2+y^2 = 1$, то есть $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Так как в каждой допустимой точке x можно выбрать знак плюс или минус, то множество функций, задающих эту линию уровня, имеет мощность континуум. Но если мы ограничим рассмотрение только случаем непрерывных функций, то таких функций, задающих выбранную линию уровня, будет 2: $y = \sqrt{1 - x^2}$; $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Если же дополнительно зафиксировать, что график функции, описывающей линию уровня, должен проходить через определённую точку, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, то таких функций в данном примере будет не более одной.

Теперь пусть $F(x, y) = x^4 - y^2$. Рассмотрим линию уровня $F(x, y) = 0$. Тогда $x^4 - y^2 = 0$, то есть $y = \pm x^2$. В качестве точки для фиксации функции можно взять точку $(1; 1)$. Но непрерывных функций (и даже гладких), график которых проходит через эту точку, две: $y = x^2$; $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x^2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$. В этом примере мешает «плохая» точка $(0; 0)$.

Дело в том, что понятие неявной функции может быть только локальным, причём вблизи «хороших» точек.

Теорема о неявной функции

Теорема 15.2. *Пусть $F\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, причём выполнены следующие условия:*

1) $F,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \in C(U(x_0, y_0))$, *где* $U(x_0, y_0)$ *– некоторая окрестность точки* (x_0, y_0)*;*

2) $F(x_0, y_0) = C$*;*

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда:

1) $\exists U^x(x_0),\ U^y(y_0)\colon\quad U^x(x_0) \times U^y(y_0) \subset U(x_0, y_0)$ *и*

$$\forall x \in U^x(x_0) \qquad \exists! y \in U^y(y_0)\colon \quad F(x, y) = C,$$

то есть определена функция $y = f(x)$*;*

2) $f \in C(U^x(x_0))$*;*

3) если $F \in D(x_0, y_0)$*, то* $f \in D(x_0)$*, причём* $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$*;*

4) если $F \in C^1(U(x_0, y_0))$*, то* $f \in C^1(U^x(x_0))$*.*

Доказательство:

Без ограничения общности будем считать, что $C = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

1) Так как $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} \in C(U(x_0, y_0))$, то

$$\exists \tilde{U}(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)\colon \quad \forall (x, y) \in \tilde{U}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Заметим, что $\exists \tilde{U}^x(x_0),\ \tilde{U}^y(y_0)\colon\ \tilde{U}^x(x_0) \times \tilde{U}^y(y_0) \subset \tilde{U}(x_0, y_0)$.

Пусть $\Phi_{x_0}(y) = F(x_0, y)$. Заметим, что $\Phi'_{x_0}(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in \tilde{U}^y(y_0)$. Тогда $\Phi_{x_0}(y)$ строго возрастает.

Заметим, что $\exists \eta > 0\colon\ \ [y_0 - \eta;\ y_0 + \eta] \subset \tilde{U}^y(y_0)$. Пусть $U^y = (y_0 - \eta;\ y_0 + \eta)$. Тогда имеем:

$$\Phi_{x_0}(y_0 - \eta) < \Phi_{x_0}(y_0) < \Phi_{x_0}(y_0 + \eta),$$

то есть

$$F(x_0,\ y_0 - \eta) < 0 < F(x_0,\ y_0 + \eta).$$

Заметим, что $\exists \delta > 0\colon\ \ (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \subset \tilde{U}^x(x_0)$ и

$$\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta) \qquad F(x_0,\ y_0 - \eta) < 0 < F(x_0,\ y_0 + \eta),$$

так как $F \in C(U(x_0, y_0))$. Пусть $U^x(x_0) = (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$.

Пусть $\Phi_x(y) = F(x, y)$. Тогда $\Phi'_x(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Значит, $\Phi_x(y)$ строго возрастает. Тогда $\Phi_x(y_0 - \eta) < 0 < \Phi_x(y_0 + \eta)$. Значит, $\exists! y\colon\ \Phi_x(y) = 0 = F(x, y)$. Таким образом, определена функция $y = f(x)$.

2) $\forall x \in U^x(x_0)\ \ \forall \varepsilon > 0\colon\ (f(x) - \varepsilon;\ f(x) + \varepsilon) \subset U^y(y_0)$ имеем:

$$\exists \bar\delta > 0\colon\ (x - \bar\delta;\ x + \bar\delta) \subset U^x(x_0) \ \text{ и } \ \forall \bar x \in (x - \bar\delta;\ x + \bar\delta)$$

$$\exists! \bar y \in (f(x) - \varepsilon;\ f(x) + \varepsilon)\colon\quad F(\bar x, \bar y) = 0,$$

то есть $\bar y = f(\bar x) \in (f(x) - \varepsilon;\ f(x) + \varepsilon)$.

3) Так как $F \in D(x_0, y_0)$, то

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) +$$
$$+ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot \alpha(x, y),$$

где $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \alpha(x, y) = 0$ и $\alpha(x_0, y_0) = 0$.

Подставим $y = f(x)$. Так как $F(x, f(x)) = F(x_0, f(x_0)) = 0$, получаем:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) +$$
$$+ \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} \cdot \alpha(x, f(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0;$$
$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0))\right| =$$
$$= \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} \cdot |o(1)| \leqslant$$
$$\leqslant 2(|x - x_0| + |f(x) - f(x_0)|) \cdot |o(1)| \quad \text{при} \quad x \to x_0;$$
$$|f(x) - f(x_0)| \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - o(1)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x - x_0| \left|\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1)\right| \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Так как

$$\exists U(x_0)\colon\ \ \forall x \in U(x_0) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - o(1) > \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0| \cdot \frac{\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1)\right|}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = O(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Тогда можем продолжить неравенство:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0))\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2(|x - x_0| + |f(x) - f(x_0)|) \cdot |o(1)| = o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Поделим левую и правую части неравенства на $(x - x_0)$:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant o(1) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Устремим $x \to x_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 0.$$

Так как $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, то $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$.

4) Так как $F \in C^1(U(x_0, y_0))$, то равенство, аналогичное равенству $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$, выполняется в любой точке окрестности $U(x_0, y_0)$.

Тогда $f \in C^1(U^x(x_0))$.

■

Лекция 16

Теорема о неявной функции (продолжение)

Сформулируем следствие из теоремы (15.2).

Утверждение 16.1. *Пусть* $F \in C^1(U(x_0, y_0))$, $F(x_0, y_0) = C$, $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда* $\exists U^x(x_0)$, $U^y(y_0)\colon$ $U^x(x_0) \times U^y(y_0) \subset U(x_0, y_0)$ *и либо*

$$\forall x \in U^x(x_0) \;\; \exists! y \in U^y(y_0)\colon \quad F(x, y) = C \qquad (\text{тогда } y = f(x)),$$

либо

$$\forall y \in U^y(y_0) \;\; \exists! x \in U^x(x_0)\colon \quad F(x, y) = C \qquad (\text{тогда } x = g(y)).$$

Многомерная теорема о неявной функции

Теперь сформулируем и докажем более общую теорему.

Теорема 16.1. *Пусть* $F\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *и выполнены следующие условия:*

1) $F, \dfrac{\partial F}{\partial y} \in C(U(x_0, y_0))$ *(здесь x – n-мерный вектор, y – $(n+1)$-ая координата);*

2) $F(x_0, y_0) = C$;

3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда:

1) $\exists U^x(x_0)$, $U^y(y_0)\colon$ $U^x(x_0) \times U^y(y_0) \subset U(x_0, y_0)$ *и*

$$\forall x \in U^x(x_0) \qquad \exists! y \in U^y(y_0)\colon \quad F(x, y) = C,$$

то есть определена функция $y = f(x)$, где $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

2) $f \in C(U^x(x_0))$;

3) если $F \in D(x_0, y_0)$, *то* $f \in D(x_0)$, *причём* $df_{x_0} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}\, dx^k$;

4) если $F \in C^1(U(x_0, y_0))$, *то* $f \in C^1(U^x(x_0))$.

Доказательство:

Без ограничения общности будем считать, что $C = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

1) Так как $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} \in C(U(x_0, y_0))$, то

$$\exists \tilde{U}(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)\colon \quad \forall (x, y) \in \tilde{U}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Заметим, что $\exists \tilde{U}^x(x_0), \tilde{U}^y(y_0)\colon\ \tilde{U}^x(x_0) \times \tilde{U}^y(y_0) \subset \tilde{U}(x_0, y_0)$.

Пусть $\Phi_{x_0}(y) = F(x_0, y)$. Заметим, что $\Phi'_{x_0}(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0 \ \ \forall y \in \tilde{U}^y(y_0)$. Тогда $\Phi_{x_0}(y)$ строго возрастает.

Заметим, что $\exists \eta > 0\colon\ \ [y_0 - \eta;\ y_0 + \eta] \subset \tilde{U}^y(y_0)$. Пусть $U^y = (y_0 - \eta;\ y_0 + \eta)$. Тогда имеем:

$$\Phi_{x_0}(y_0 - \eta) < \Phi_{x_0}(y_0) < \Phi_{x_0}(y_0 + \eta),$$

то есть

$$F(x_0,\, y_0 - \eta) < 0 < F(x_0,\, y_0 + \eta).$$

Заметим, что $\exists U^x(x_0)\colon\ U^x(x_0) \subset \tilde{U}^x(x_0)$ и

$$\forall x \in U^x(x_0) \qquad F(x_0,\, y_0 - \eta) < 0 < F(x_0,\, y_0 + \eta),$$

так как $F \in C(U(x_0, y_0))$.

Пусть $\Phi_x(y) = F(x, y)$. Тогда $\Phi'_x(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Значит, $\Phi_x(y)$ строго возрастает. Тогда $\Phi_x(y_0 - \eta) < 0 < \Phi_x(y_0 + \eta)$. Значит, $\exists! y\colon\ \Phi_x(y) = 0 = F(x, y)$. Таким образом, определена функция $y = f(x)$.

2) Так как $y = f(x)\colon\ F(x, y) = 0 \ \ \forall x \in U^x(x_0)$, то

$$\forall x \in U^x(x_0) \ \ \forall y \in U^y(y_0) \ \ \exists U(x, y) \subset U^x(x_0) \times U^y(y_0)\colon$$

$$1)\ F,\ \frac{\partial F}{\partial y} \in C(U(x, y)); \quad 2)\ F(x, y) = 0; \quad 3)\ \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) > 0,$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in U(x, y)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\colon\ \ [y - \varepsilon;\ y + \varepsilon] \subset U^y(y_0)$ функция $F(x, \bar{y})$ строго возрастает. Значит, $F(x,\, y - \varepsilon) < 0 < F(x,\, y + \varepsilon)$. Отсюда получаем:

$$\exists \bar{U}^x(x)\colon \quad \forall \bar{x} \in \bar{U}^x(x) \qquad F(\bar{x},\, y - \varepsilon) < 0 < F(\bar{x},\, y + \varepsilon);$$

$$\exists! \bar{y} \in (y - \varepsilon;\ y + \varepsilon)\colon \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Значит, $\bar{y} = f(\bar{x})$. Таким образом, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \bar{U}^x(x)\colon \quad \forall \bar{x} \in \bar{U}^x(x) \qquad f(\bar{x}) \in (f(x) - \varepsilon;\ f(x) + \varepsilon).$$

3) Так как $F \in D(x_0, y_0)$, то

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0) \cdot (x^k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$+ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x_0^k\right)^2 + (y - y_0)^2} \cdot \alpha(x, y),$$

где $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha(x,y) = 0$ и $\alpha(x_0, y_0) = 0$.

Подставим $y = f(x)$. Так как $F(x, f(x)) = F(x_0, f(x_0)) = 0$, получаем:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0) \cdot (x^k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) +$$

$$+ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x_0^k\right)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} \cdot \alpha(x, f(x)) \quad \text{при} \quad x \to x_0;$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0) \cdot (x^k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) \right| =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x_0^k\right)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} \cdot |o(1)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x_0^k\right)^2} + |f(x) - f(x_0)| \right) \cdot |o(1)| \quad \text{при} \quad x \to x_0;$$

$$|f(x) - f(x_0)| \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - o(1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |(\nabla^x F,\, x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot o(1)| \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Так как

$$\exists U^x(x_0)\colon \quad \forall x \in U^x(x_0) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - o(1) > \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \|x - x_0\| \cdot \frac{\|\nabla^x F\| + o(1)}{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = O(\|x - x_0\|) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Тогда можем продолжить неравенство:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0) \cdot (x^k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (f(x) - f(x_0))\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x_0^k\right)^2} + |f(x) - f(x_0)|\right) \cdot |o(1)| = o(\|x - x_0\|) \quad \text{при} \quad x \to x_0;$$

$$f(x) - f(x_0) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^k}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}(x^k - x_0^k) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Устремим $x \to x_0$, получим: $df_{x_0} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}\, dx^k.$

4) Так как $F \in C^1(U(x_0, y_0))$, то равенство, аналогичное равенству $df_{x_0} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x^k}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}\, dx^k$, выполняется в любой точке окрестности $U(x_0, y_0)$.

Тогда $f \in C^1(U^x(x_0))$.

■

Сформулируем следствие из теоремы (16.1).

Утверждение 16.2. *Пусть $F \in C^1(U(x_0))$, $F(x_0) = C$, $\nabla F(x_0) \neq 0$, где x_0 – $(n+1)$-мерная точка. Тогда*

$$\exists k\colon\ \exists U^{x^k}(x_0^k),\ U^{x^1,\ldots,x^{k-1},x^{k+1},\ldots,x^{n+1}}(x_0^1,\ldots,x_0^{k-1},x_0^{k+1},\ldots,x_0^{n+1})\colon$$

$$U^{x^k}(x_0^k) \times U^{x^1,\ldots,x^{k-1},x^{k+1},\ldots,x^{n+1}}(x_0^1,\ldots,x_0^{k-1},x_0^{k+1},\ldots,x_0^{n+1}) \subset U(x_0)$$

и

$$\forall x^1,\ldots,x^{k-1},x^{k+1},\ldots,x^{n+1} \in U^{x^1,\ldots,x^{k-1},x^{k+1},\ldots,x^{n+1}}(x_0^1,\ldots,x_0^{k-1},x_0^{k+1},\ldots,x_0^{n+1})$$

$$\exists! x^k \in U^{x^k}(x_0^k)\colon \quad F(x) = C \qquad (\textit{тогда } x^k = f(x^1,\ldots,x^{k-1},x^{k+1},\ldots,x^{n+1})).$$

Лекция 17

Теорема о неявном отображении

Теперь сформулируем и докажем наиболее общую теорему.

Теорема 17.1. *Пусть $F\colon\ \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, то есть задана система*

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x,y) = 0 \end{cases},$$

где x – n-мерный вектор, y – m-мерный вектор, и выполнены следующие условия:

1) $F \in C^1(U(x_0, y_0))$;

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \neq 0.$

Тогда:

1) $\exists U^x(x_0),\, U^{y^1}(y_0^1),\, \ldots, U^{y^m}(y_0^m)\colon\quad U^x(x_0) \times \prod\limits_{k=1}^{m} U^{y^k}(y_0^k) \subset U(x_0, y_0)$ *и*

$$\forall x \in U^x(x_0) \qquad \exists! y \in \prod_{k=1}^{m} U^{y^k}(y_0^k)\colon \quad F(x,y) = 0,$$

то есть определено отображение $y = f(x)$, где $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;

2) $f \in C^1(U^x(x_0))$, причём

$$df_{x_0} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}^{-1}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}.$$

Доказательство:

Докажем методом математической индукции по переменной m.

База индукции: случай $m = 1$ соответствует частному случаю теоремы (16.1), которую мы уже доказали.

Докажем шаг индукции. Считаем, что для размерности $(m-1)$ вектора y теорема доказана. Необходимо доказать её для размерности m вектора y.

Так как $\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{(x_0,\,y_0)} \neq 0$, то в последней строке существует ненулевой элемент. Для определённости будем считать, что $\dfrac{\partial F_m}{\partial y^m}(x_0, y_0) \neq 0$ (если это не так, то можно перенумеровать переменные).

Так как $F \in C^1(U(x_0, y_0))$ и $F(x_0, y_0) = 0$, то $F_m \in C^1(U(x_0, y_0))$ и $F_m(x_0, y_0) = 0$.

Таким образом, по теореме (16.1) для функции $F_m\colon\ \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ получаем:

$$\exists U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}),\ U^{y^m}(y_0^m):$$
$$U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}) \times U^{y^m}(y_0^m) \subset U(x_0, y_0)$$

и

$$\forall (x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1}) \in U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1})\ \ \exists! y^m \in U^{y^m}(y_0^m):\quad F_m(x, y) = 0,$$

то есть определена функция $y^m = \varphi(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1})$, где $\varphi\colon\ \mathbb{R}^{n+m-1} \to \mathbb{R}$, причём

$$\varphi \in C^1(U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}))\ \text{ и }\ \frac{\partial \varphi}{\partial y^k} = -\frac{\dfrac{\partial F_m}{\partial y^k}}{\dfrac{\partial F_m}{\partial y^m}}.$$

Определим отображение $G\colon\ \mathbb{R}^{n+m-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ с помощью следующей системы:

$$\begin{cases} G_1(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1}) = 0 \\ \vdots \\ G_{m-1}(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1}) = 0 \end{cases},$$

где $G_k(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1}) = F_k(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1},\,\varphi(x, y^1,\,\dots,\,y^{m-1}))$.

Проверим выполнение условий доказываемой теоремы для отображения G.

Так как $F \in C^1(U(x_0, y_0))$ и $\varphi \in C^1(U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}))$, то $G \in C^1(U^{x,\,y^1,\,\dots,\,y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}))$.

Так как $y_0^m = \varphi(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1})$, то $G(x_0, y_0^1,\,\dots,\,y_0^{m-1}) = 0$.

Так как $\dfrac{\partial G_k}{\partial y^l} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y^l} + \dfrac{\partial F_k}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^l}$, то

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial G_{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^{m-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^1} + \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^{m-1}} + \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^{m-1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^k} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^m} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^k} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\partial F_m}{\partial y^m}} \left(\frac{\partial F_m}{\partial y^m} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial F_m}{\partial y^k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^m} & \cdots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y^{m-1}} \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\dfrac{\partial F_m}{\partial y^m}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, отображение G удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы. Тогда по предположению индукции получаем:

$$\exists U^x(x_0),\, U^{y^1}(y_0^1),\, \ldots, U^{y^{m-1}}(y_0^{m-1}) \colon$$

$$U^x(x_0) \times \prod_{k=1}^{m-1} U^{y^k}(y_0^k) \subset U^{x,\, y^1,\, \ldots,\, y^{m-1}}(x_0, y_0^1,\, \ldots, y_0^{m-1}) \qquad \text{и}$$

$$\forall x \in U^x(x_0) \quad \exists!(y^1,\, \ldots, y^{m-1}) \in \prod_{k=1}^{m-1} U^{y^k}(y_0^k) \colon \quad G(x, y^1,\, \ldots, y^{m-1}) = 0,$$

то есть определено отображение $y^k = g_k(x)$, где $k = 1, \ldots, m-1$ и $g_k \colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, причём $g_k \in C^1(U^x(x_0))$.

Теперь определим отображение $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$f_k(x) = g_k(x) \qquad \forall k = 1,\, \ldots, m-1;$$

$$f_m(x) = \varphi(x,\, g_1(x),\ \ldots,\ g_{m-1}(x)).$$

Проверим выполнение свойств построенного отображения f для выполнения теоремы.

$$\forall x \in U^x(x_0)\ \ \exists! y \in \prod_{k=1}^{m} U^{y^k}(y_0^k)\colon\quad F(x,y) = 0,$$

так как $F(x, f(x)) = F(x,\, g_1(x),\ \ldots,\, g_{m-1}(x),\, \varphi(x, g_1(x),\, \ldots, g_{m-1}(x))) = 0$.

Кроме этого, $f \in C^1(U^x(x_0))$, так как

$$f_k(x) = g_k(x) \in C^1(U^x(x_0))\ \ \forall k = 1,\, \ldots, m-1$$

и $f_m(x)$ – композиция непрерывно дифференцируемых в $U^x(x_0)$ функций φ и g_k, где $k = 1,\, \ldots, m-1$.

Осталось вывести формулу для df_{x_0}. Для этого продифференцируем равенство $0 = F(x, f(x))$ в точке (x_0, y_0):

$$0 = dF_{(x_0,\, y_0)}(dx, df(x)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x^n} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \\ dy^1 \\ \vdots \\ dy^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^m \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} dy^1 \\ \vdots \\ dy^m \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y^m} \end{pmatrix}^{-1}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{(x_0,\, y_0)} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}.$$

■

Сформулируем следствие из теоремы (17.1).

Утверждение 17.1. *Пусть* $F\colon\ \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, *причём* $F \in C^1(U(x_0)),\ \ F(x_0) = 0,$

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x^{n+m}} \end{pmatrix} = m$, *где* x_0 *–* $(n+m)$*-мерная точка. Тогда*

$$\exists \{k_1, \dots, k_m, j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n+m\}:$$

$$\exists U^{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}}(x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_n}),\ U^{x^{k_1}}(x_0^{k_1}), \dots, U^{x^{k_m}}(x_0^{k_m}):$$

$$U^{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}}(x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_n}) \times \prod_{l=1}^{m} U^{x^{k_l}}(x_0^{k_l}) \subset U(x_0)$$

и

$$\forall (x^{j_1}, \dots, x^{j_n}) \in U^{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}}(x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_n}) \ \ \exists! (x^{k_1}, \dots, x^{k_m}) \in \prod_{l=1}^{m} U^{x^{k_l}}(x_0^{k_l}):\ \ F(x) = 0.$$

Тогда $\begin{pmatrix} x^{k_1} \\ \vdots \\ x^{k_m} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x^{j_1} \\ \vdots \\ x^{j_n} \end{pmatrix}$, *где* $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *причём* $f \in C^1(U^{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}}(x_0^{j_1}, \dots, x_0^{j_n}))$.

Теорема об обратном отображении

Теорема 17.2. *Пусть* $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f \in C^1(U^x(x_0))$ *и* $\det df_{x_0} \neq 0$. *Пусть* $y_0 = f(x_0)$. *Тогда*

$$\exists U^y(y_0):\quad \forall y \in U^y(y_0)\ \ \exists! x \in U^x(x_0):\quad f(x) = y,$$

то есть определено обратное отображение $x = f^{-1}(y)$, *причём* $df_{y_0}^{-1} = (df_{x_0})^{-1}$.

Доказательство:

Пусть $F(x,y) = f(x) - y$. Тогда $F:\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, причём $F \in C^1(U^{x,y}(x_0, y_0))$, $F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$ и

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \det df_{x_0}.$$

Тогда по теореме (17.1) получаем:

$$\forall y \in U^y(y_0)\ \ \exists! x \in \prod_{k=1}^{n} U^{x^k}(x_0^k):\quad F(x,y) = 0 \quad (\text{то есть } f(x) = y).$$

Таким образом, определено обратное отображение $x = f^{-1}(y)$, причём $df_{y_0}^{-1} = (df_{x_0})^{-1}$. ■

Замечание 17.1. Отображение f, описываемое в теореме (17.2) называется диффеоморфизмом $f^{-1}(U^y(y_0))$ и $U^y(y_0)$.

Лекция 18

Вектор-функции

Определение 18.1. $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – *вектор-функция.*

Замечание 18.1. Если f – вектор-функция, то её можно записать в виде

$$f(t) = \{f_1(t),\, \ldots,\, f_n(t)\}.$$

Определение 18.2. Если $f \in C[a;\, b]$, то $f(t)$ называется *кривой в* $\mathbb{R}^n$.

Определение 18.3. Если $f \in D(t_0)$, то

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} = \left\{ \left.\frac{df_1}{dt}\right|_{t=t_0},\ \ldots,\ \left.\frac{df_n}{dt}\right|_{t=t_0} \right\}$$

– *производная вектор-функции в точке* $t = t_0$.

Замечание 18.2. Физический смысл: $\left.\dfrac{df}{dt}\right|_{t=t_0}$ – вектор мгновенной скорости.

Определение 18.4. Прямая

$$f(t_0) + \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_0} (t - t_0)$$

называется *касательной* к кривой $f(t)$.

Интегралы вектор-функций

Определение 18.5. Вектор-функция f называется *интегрируемой в смысле Ньютона на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists F \in D[a;\, b]\colon\quad \frac{dF}{dt} = f(t) \quad \forall t \in [a;\, b],$$

где $F\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Обозначение: $f \in N[a;\, b]$.

Определение 18.6. Пусть $f \in N[a;\, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

– *определённый интеграл Ньютона функции* f *на отрезке* $[a;\, b]$.

Определение 18.7. Вектор-функция f называется *интегрируемой в смысле Римана на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}^n\colon\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \ \exists \delta > 0\colon\ \ \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad \|\sigma_f(T_\xi) - I\| < \varepsilon,$$

где $\sigma_f(T_\xi) = \sum\limits_{T_\xi} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$.

Обозначение: $f \in R[a;\, b]$.

Утверждение 18.1.

$$f \in N[a;\, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_k \in N[a;\, b]\quad \forall k = 1,\, \ldots, n.$$

Утверждение 18.2.

$$f \in R[a;\, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_k \in R[a;\, b]\quad \forall k = 1,\, \ldots, n.$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

Так как $f \in R[a;\, b]$, то

$$\exists I = \{I_1,\, \ldots, I_n\}\colon\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \ \exists \delta > 0\colon\ \ \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad \|\sigma_f(T_\xi) - I\| < \varepsilon.$$

Так как $\|\sigma_f(T_\xi) - I\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sigma_{f_k}(T_\xi) - I_k\right)^2} < \varepsilon$, то

$$|\sigma_{f_k}(T_\xi) - I_k| < \varepsilon \quad \ \forall k = 1,\, \ldots, n.$$

Докажем $\Longleftarrow$.

Так как $f_k \in R[a;\, b]\ \ \forall k = 1,\, \ldots, n$, то

$$\forall k = 1,\, \ldots, n\ \ \ \exists I_k\colon\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \ \exists \delta_k > 0\colon\ \ \forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta_k \qquad |\sigma_{f_k}(T_\xi) - I_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Пусть $I = \{I_1,\, \ldots, I_n\}$ и $\delta = \min\{\delta_1,\, \ldots, \delta_k\}$. Тогда получаем:

$$\forall T_\xi\colon\ d(T_\xi) < \delta \qquad |\sigma_{f_k}(T_\xi) - I_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad\ \forall k = 1,\, \ldots, n;$$

$$\|\sigma_f(T_\xi) - I\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\sigma_{f_k}(T_\xi) - I_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

■

Утверждение 18.3. *Интеграл Ньютона функции* $f\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}^n$ *обладает свойствами единственности, линейности, аддитивности.*

Утверждение 18.4. *Интеграл Римана функции* $f\colon [a;\, b] \to \mathbb{R}^n$ *обладает свойствами единственности, линейности, аддитивности. Кроме того, неопределённый интеграл Римана есть непрерывная функция, дифференцируемая в точках непрерывности функции* f.

Теорема 18.1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Если* $f \in C[a;\, b]$, *то* $f \in N[a;\, b] \cap R[a;\, b]$, *причём*

$$(N)\int\limits_a^b f\,dt = (R)\int\limits_a^b f\,dt.$$

Определение 18.8. Пусть $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Функция F называется *гладкой на отрезке* $[a;\, b]$, если $\dfrac{dF}{dt} \in C[a;\, b]$.

Обозначение: $F \in C^1[a;\, b]$.

Утверждение 18.5. *Пусть* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *и* $F \in C^1[a;\, b]$. *Тогда*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b \frac{dF}{dt}\,dt.$$

Длина кривой

Определение 18.9. Вектор-функция F называется *функцией ограниченной вариации на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\sup_T \sum_T \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| < +\infty,$$

где T – разбиение отрезка $[a;\, b]$.

Обозначение: $F \in VB[a;\, b]$.

Определение 18.10. $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} F = \sup\limits_T \sum\limits_T \|F(t_k) - F(t_{k-1})\|$ – *вариация* вектор-функции F на отрезке $[a;\, b]$.

Замечание 18.3. Если $F \in C[a;\, b]$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} F$ – длина кривой (длина пройденного пути).

Определение 18.11. Вектор-функция F называется *липшицевой на отрезке* $[a;\, b]$, если

$$\exists C > 0\colon \quad \forall t', t'' \in [a;\, b] \qquad \|F(t'') - F(t')\| \leqslant C \cdot |t'' - t'|.$$

Обозначение: $F \in Lip[a;\, b]$.

Утверждение 18.6. *Если $F \in Lip[a;\, b]$, то $F \in VB[a;\, b]$.*

Доказательство:

Пусть T – некоторое разбиение отрезка $[a;\, b]$. Тогда

$$\sum_T \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| \leqslant C \cdot \sum_T |t_k - t_{k-1}| = C(b-a).$$

■

Утверждение 18.7. *Если $F \in C^1[a;\, b]$, то $F \in Lip[a;\, b]$.*

Доказательство:

Используя теорему Лагранжа ($\theta_k \in (0;\, 1)$), получаем:

$$\|F(t'') - F(t')\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(F_k(t'') - F_k(t')\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(F_k'(t' + \theta_k(t'' - t'))\right)^2} \cdot |t'' - t'| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\max_{[a;\, b]} |F_k'(t)|\right)^2} \cdot |t'' - t'|.$$

Так как $\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\max_{[a;\, b]} |F_k'(t)|\right)^2} = C < +\infty$, где $C = \mathrm{const}$, то $F \in Lip[a;\, b]$. ■

Теорема 18.2. *Пусть $F \in C^1[a;\, b]$. Тогда $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F = \int\limits_a^b \left\|\frac{dF}{dt}\right\| dt$.*

Доказательство:

Лемма 18.1. *Пусть $f \in C[a;\, b]$. Тогда $\left\|\int\limits_a^b f(t)\, dt\right\| \leqslant \int\limits_a^b \|f(t)\|\, dt$.*

Доказательство:

$\forall$ отмеченного разбиения $T_\xi = \{\xi_j, [t_{j-1}; t_j]\}_{j=1}^m$ отрезка $[a; b]$ имеем:

$$\|\sigma_f(T_\xi)\|^2 = \sum_{k=1}^n (\sigma_{f_k}(T_\xi))^2 = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f_k(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f_k(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \cdot \sum_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1}) \sum_{k=1}^n f_k(\xi_j) \sum_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^n f_k(\xi_j) \sum\limits_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ – скалярное произведение двух векторов: с компонентами $f_k(\xi_j)$ и с компонентами $\sum\limits_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$. Так как скалярное произведение векторов не превосходит произведения длин этих векторов, то получаем:

$$\leqslant \sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1}) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2(\xi_j)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1}) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2(\xi_j)}\right) \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2}.$$

Так как $\|\sigma_f(T_\xi)\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n \left(\sum\limits_{i=1}^m f_k(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2}$, то получаем:

$$\|\sigma_f(T_\xi)\| \leqslant \sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2(\xi_j)} \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sigma_{\|f\|}(T_\xi).$$

■

$\forall$ разбиения T отрезка $[a; b]$, используя утверждение (18.5), получаем:

$$\sum_T \|F(t_j) - F(t_{j-1})\| = \sum_T \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{dF}{dt}\, dt \right\| \leqslant \sum_T \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{dF}{dt} \right\| dt = \int_a^b \left\| \frac{dF}{dt} \right\| dt.$$

Таким образом, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F \leqslant \int\limits_a^b \left\| \dfrac{dF}{dt} \right\| dt$.

С другой стороны, так как $\dfrac{dF}{dt} \in C[a;\, b]$, то по теореме Кантора $\dfrac{dF}{dt} \in UC[a;\, b]$. Тогда получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall t', t'' \in [a;\, b]\colon \ |t'' - t'| < \delta \qquad \left\| \frac{dF}{dt}(t'') - \frac{dF}{dt}(t') \right\| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда $\forall$ разбиения T отрезка $[a;\, b]$ такого, что $d(T) < \delta$, получаем:

$$\int\limits_a^b \left\| \frac{dF}{dt} \right\| dt = \sum_T \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{dF}{dt} \right\| dt \leqslant \sum_T \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\left\| \frac{dF}{dt}(t_j) \right\| + \left\| \frac{dF}{dt}(t) - \frac{dF}{dt}(t_j) \right\| \right) dt =$$

$$= \sum_T \left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{dF}{dt}(t_j)\, dt \right\| + \sum_T \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{dF}{dt}(t) - \frac{dF}{dt}(t_j) \right\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_T \left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{dF}{dt}(t)\, dt \right\| + \sum_T \left\| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{dF}{dt}(t) - \frac{dF}{dt}(t_j) \right) dt \right\| +$$

$$+ \sum_T \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{dF}{dt}(t) - \frac{dF}{dt}(t_j) \right\| dt \leqslant \sum_T \| F(t_j) - F(t_{j-1}) \| +$$

$$+ 2 \sum_T \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left\| \frac{dF}{dt}(t) - \frac{dF}{dt}(t_j) \right\| dt \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_T (t_j - t_{j-1}) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что $\int\limits_a^b \left\| \dfrac{dF}{dt} \right\| dt \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F$.

В итоге получаем, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, F = \int\limits_a^b \left\| \dfrac{dF}{dt} \right\| dt$. ■

Лекция 19

Длина кривой (продолжение)

Сформулируем и докажем следствие из теоремы (18.2).

Утверждение 19.1. *Пусть* $f\colon\ [a;\, b] \to \mathbb{R}$ *и* $f \in C^1[a;\, b]$. *Тогда*

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

– длина кривой, задаваемой графиком функции $y = f(x)$ *на отрезке* $[a;\, b]$.

Доказательство:

Это следует из теоремы (18.2) для вектор-функции $(x,\, f(x))\colon\ [a;\, b] \to \mathbb{R}^2$. ■

Касательное пространство

Определение 19.1. Пусть $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, где $0 < k < n$, причём $F \in C^1(U(x_0))$, $F(x_0) = 0$ и $\operatorname{rank} dF_{x_0} = n - k$. Тогда $S = \{x \in U(x_0)\colon\ F(x) = 0\}$ – *гладкая* k*-мерная поверхность в точке* x_0.

Определение 19.2. Вектор $h \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ называется *касательным к гладкой поверхности* S, если $dF_{x_0}h = 0$.

Утверждение 19.2. *Множество касательных векторов к* S *– линейное подпространство в касательном пространстве* $T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

Определение 19.3. Это подпространство обозначается $T_{x_0}S$ и называется *касательным пространством к* S.

Приведём примеры.

1) Пусть $F\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) = 0$$

– касательная прямая к кривой, задаваемой уравнением $F = 0$ в окрестности точки $(x_0;\, y_0)$, ортогональная градиенту функции F в этой точке.

2) Пусть $F\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

– касательная плоскость к поверхности, задаваемой уравнением $F = 0$ в окрестности точки $(x_0;\, y_0;\, z_0)$, ортогональная градиенту функции F в этой точке.

3) Пусть $(F;\, G)\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial G}{\partial y}(y-y_0) + \dfrac{\partial G}{\partial z}(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

– касательная прямая к кривой, задаваемой уравнениями $F = 0$ и $G = 0$ в окрестности точки $(x_0;\, y_0;\, z_0)$, ортогональная плоскости, натянутой на градиенты функций F и G в этой точке.

Лемма Люстерника

Лемма 19.1 (Лемма Люстерника)**.** *Пусть* $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, *где* $0 < k < n$, *причём* $F \in C^1(U(x_0))$, $F(x_0) = 0$ *и* $\operatorname{rank} dF_{x_0} = n-k$. *Тогда:*

1) $\forall h \in T_{x_0}S$ $\exists$ *окрестность начала координат* $U^t(0)$ *и отображение* $x\colon\ U^t(0) \to \mathbb{R}^n$ *такие, что*

$$x \in C^1(U^t(x_0)), \quad x(0) = x_0, \quad F(x(t)) = 0 \ \ \forall t \in U^t(0), \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = h.$$

2) Пусть $\exists$ *окрестность начала координат* $U^t(0)$, *в которой задано отображение* $x\colon\ U^t(0) \to \mathbb{R}^n$, *причём*

$$x \in C^1(U^t(x_0)), \quad x(0) = x_0, \quad F(x(t)) = 0 \ \ \forall t \in U^t(0).$$

Тогда $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} \in T_{x_0}S$.

Доказательство:

1) $\forall h \in T_{x_0}S$ имеем: $dF_{x_0}h = 0$. Так как $\operatorname{rank} dF_{x_0} = n-k$, то некоторый из максимальных по размеру миноров матрицы dF_{x_0} не равен 0. Без ограничения общности будем считать, что это минор по последним координатам:

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^n} \end{vmatrix}\right|_{x_0} \neq 0.$$

Тогда получаем:

$$\begin{pmatrix} h^{k+1} \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^k} \end{pmatrix}_{x_0} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^k \end{pmatrix}.$$

Кроме этого, по теореме о неявном отображении (17.1) получаем:

$$\exists U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k),\ U^{x^{k+1}}(x_0^{k+1}),\ \dots,\ U^{x^n}(x_0^n)\colon$$

$$U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k)\times\prod_{j=k+1}^{n}U^{x^j}(x_0^j)\subset U(x_0)\quad\text{и}$$

$$\forall(x^1,\dots,x^k)\in U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k)\quad\exists!(x^{k+1},\dots,x^n)\in\prod_{j=k+1}^{n}U^{x^j}(x_0^j)\colon$$

$$F(x)=0\qquad(\text{то есть } (x^{k+1},\dots,x^n)=f(x^1,\dots,x^k)),$$

где $f\colon\ \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{n-k}$, причём $f\in C^1(U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k))$ и

$$df_{(x_0^1,\dots,x_0^k)}=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x^{k+1}} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \dots & \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{x_0}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x^k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^k}\end{pmatrix}_{x_0}.$$

Теперь можем построить окрестность $U^t(0)$ и функцию $x\colon\ U^t(0)\to\mathbb{R}^n$:

$$\exists U^t(0)\colon\ \ \forall t\in U^t(0)\qquad(x_0^1+th^1,\ \dots,\ x_0^k+th^k)\in U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k);$$

$$x(t)=\big(x_0^1+th^1,\ \dots,\ x_0^k+th^k,$$
$$f_{k+1}(x_0^1+th^1,\ \dots,\ x_0^k+th^k),\ \dots,\ f_n(x_0^1+th^1,\ \dots,\ x_0^k+th^k)\big).$$

Так как $f\in C^1(U^{x^1,\dots,x^k}(x_0^1,\dots,x_0^k))$, то $x(t)\in C^1(U^t(0))$. При этом в силу определения функции f получаем, что $F(x(t))=0\ \ \forall t\in U^t(0)$. Остаётся показать, что $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=h$:

$$\left.\frac{dx_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=h^1,\qquad\dots,\qquad\left.\frac{dx_k(t)}{dt}\right|_{t=0}=h^k,$$

$$\left.\frac{dx_{k+1}(t)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^{k}\left.\frac{\partial f_{k+1}}{\partial x^j}\right|_{t=0}\cdot h^j=-\sum_{j=1}^{k}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^{k+1}}(x_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x^j}(x_0)}\cdot h^j,$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{dx_n(t)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^{k}\left.\frac{\partial f_n}{\partial x^j}\right|_{t=0}\cdot h^j=-\sum_{j=1}^{k}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^n}(x_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x^j}(x_0)}\cdot h^j.$$

2) Так как $0 = F(x(t))\ \ \forall t \in U^t(0)$, то

$$0 = dF_{x_0}\, dx = dF_{x_0} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} dt.$$

В силу произвольности выбора dt получаем, что $dF_{x_0} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Значит, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \in T_{x_0}S$.

■

Условный локальный экстремум

Определение 19.4. Пусть $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а S – k-мерная гладкая поверхность в точке x_0. Тогда x_0 – *точка локального минимума функции f на поверхности S*, если

$$\exists U(x_0):\quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap S \qquad f(x) > f(x_0).$$

Можно дать следующее эквивалентное определение.

Определение 19.5. Пусть $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а $F(x) = 0$ – уравнение, задающее k-мерную гладкую поверхность в точке x_0. Тогда x_0 – *точка условного локального минимума функции f при условии $F(x) = 0$*, если

$$\exists U(x_0):\quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \land F(x) = 0 \qquad f(x) > f(x_0).$$

Условие $F(x) = 0$ в этом случае называется *связью*.

Определение 19.6. Пусть $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а S – k-мерная гладкая поверхность в точке x_0. Тогда x_0 – *точка локального максимума функции f на поверхности S*, если

$$\exists U(x_0):\quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap S \qquad f(x) < f(x_0).$$

Можно дать следующее эквивалентное определение.

Определение 19.7. Пусть $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а $F(x) = 0$ – уравнение, задающее k-мерную гладкую поверхность в точке x_0. Тогда x_0 – *точка условного локального максимума функции f при условии $F(x) = 0$*, если

$$\exists U(x_0):\quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \land F(x) = 0 \qquad f(x) < f(x_0).$$

Условие $F(x) = 0$ в этом случае называется *связью*.

Определение 19.8. *Условный локальный экстремум* – условный локальный максимум или минимум.

Теорема 19.1 (Необходимое условие условного локального экстремума)**.** *Пусть $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, причём*

$$f, F \in C^1(U(x_0)), \qquad F(x_0) = 0, \qquad \operatorname{rank} dF_{x_0} = n - k.$$

Пусть x_0 – точка условного локального экстремума функции f при условии $F(x) = 0$. Тогда

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}\colon \quad \nabla_{x_0} f = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \nabla_{x_0} F_j.$$

Доказательство:

Пусть заданы окрестность $U^t(0)$ начала координат и функция $x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ такие, что $x \in C^1(U^t(0))$ и $F(x(t)) = 0$. Тогда функция $\varphi(t) = f(x(t))$ имеет в точке $t = 0$ локальный экстремум. Значит, по теореме Ферма $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\nabla_x f,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \right) = 0.$$

Следовательно, $(\nabla_{x_0} f,\, h) = 0 \ \ \forall h \in T_{x_0} S$, где S – поверхность, задаваемая уравнением $F(x) = 0$. Значит, $\nabla_{x_0} f \perp T_{x_0} S$.

Кроме этого, векторы $\nabla_{x_0} F_1,\ \ldots,\ \nabla_{x_0} F_{n-k}$ линейно независимы, так как $\operatorname{rank} df_{x_0} = n - k$, и $\nabla_{x_0} F_j \perp T_{x_0} S \ \ \forall j = 1, \ldots, n-k$ по определению касательного пространства.

Таким образом, вектор $\nabla_{x_0} f$ лежит в пространстве размерности $n - k$, базисом которого являются векторы $\nabla_{x_0} F_1,\ \ldots,\ \nabla_{x_0} F_{n-k}$. Тогда

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}\colon \quad \nabla_{x_0} f = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \nabla_{x_0} F_j.$$

■

Замечание 19.1. В силу линейности градиента из теоремы (19.1) получаем:

$$\nabla_{x_0} \left(f - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j \right) = 0,$$

что эквивалентно следующему:

$$d \left(f - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j \right)_{x_0} = 0.$$

Определение 19.9. $L(x) = f(x) - \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$ *– функция Лагранжа.*

Теперь можем переформулировать теорему (19.1).

Теорема 19.2. *Пусть* $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, *причём*

$$f, F \in C^1(U(x_0)), \qquad F(x_0) = 0, \qquad \operatorname{rank} dF_{x_0} = n - k.$$

Пусть x_0 *– точка условного локального экстремума функции* f *при условии* $F(x) = 0$. *Тогда*

$$\exists \lambda_1,\, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}\colon \quad dL_{x_0} = 0.$$

Лекция 20

Условный локальный экстремум (продолжение)

Теорема 20.1 (Достаточное условие условного локального экстремума). *Пусть* $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, *причём*

$$f, F \in C^2(U(x_0)), \qquad F(x_0) = 0, \qquad \operatorname{rank} dF_{x_0} = n-k.$$

Пусть $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}: \quad dL_{x_0} = 0$, *где* $L(x) = f(x) - \sum\limits_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$ *– функция Лагранжа. Тогда:*

1) *если* $d^2L_{x_0}h > 0 \quad \forall h \neq 0:\ \ h \in T_{x_0}S$, *то* x_0 *– точка условного локального минимума функции* f *при условии* $F(x) = 0$*;*

2) *если* $d^2L_{x_0}h < 0 \quad \forall h \neq 0:\ \ h \in T_{x_0}S$, *то* x_0 *– точка условного локального максимума функции* f *при условии* $F(x) = 0$.

Доказательство:

Докажем только для случая условного локального минимума. Доказательство для случая условного локального максимума выполняется аналогично.

Предположим, что доказываемое неверно, то есть $d^2L_{x_0}h > 0 \ \ \forall h \neq 0\colon\ h \in T_{x_0}S$, но x_0 не является точкой условного локального минимума функции f при условии $F(x) = 0$. Тогда

$$\exists \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\colon\ \ \lim_{m\to\infty} x_m = x_0, \quad x_m \neq x_0, \quad F(x_m) = 0, \quad f(x_m) \leqslant f(x_0).$$

Теперь построим последовательность векторов следующим образом: $h_m = \dfrac{x_m - x_0}{\|x_m - x_0\|}$. Заметим, что из-за нормировки $\|h_m\| = 1$. В силу секвенциальной компактности единичной сферы из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists m_l\colon\ \ \exists \lim_{l\to\infty} h_{m_l} = h,$$

причём в силу непрерывности нормы получаем, что $\|h\| = 1$. Тогда для соответствующих точек x_{m_l} по теореме Лагранжа ($\theta_j \in (0;\, 1)$) имеем:

$$0 = F_j(x_{m_l}) - F_j(x_0) = d_{x_0+\theta_j(x_{m_l}-x_0)}F_j(x_{m_l} - x_0) = d_{x_0+\theta_j(x_{m_l}-x_0)}F_j h_{m_l};$$

$$\lim_{l\to\infty} d_{x_0+\theta_j(x_{m_l}-x_0)}F_j h_{m_l} = d_{x_0}F_j h = 0 \qquad \forall j.$$

Значит, $dF_{x_0}h = 0$, то есть $h \in T_{x_0}S$.

Теперь рассмотрим приращение функции Лагранжа на точках выбранной подпоследовательности:

$$L(x_{m_l}) - L(x_0) = f(x_{m_l}) - f(x_0);$$

$$L(x_{m_l}) - L(x_0) = \frac{1}{2}d^2L_{x_0}(x_{m_l} - x_0) + o(\|x_{m_l} - x_0\|^2) \quad \text{при} \quad l \to \infty;$$

$$f(x_{m_l}) - f(x_0) = \|x_{m_l} - x_0\|^2 \cdot \left(\frac{1}{2}d^2L_{x_0}h_{m_l} + o(1)\right) \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Так как $\lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2}d^2L_{x_0}h_{m_l} + o(1)\right) = \frac{1}{2}d^2L_{x_0}h > 0$ и $\|x_{m_l} - x_0\|^2 > 0$, то

$$\exists N\colon\ \ \forall l > N \qquad f(x_{m_l}) - f(x_0) > 0,$$

что противоречит предположению. ■

Функциональные последовательности

Определение 20.1. $f_n(x)$ – *функциональная последовательность*, где $n \in \mathbb{N}$, то есть это функция двух переменных, одна из которых натуральная.

Определение 20.2. $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in E \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ на E.

Распишем понятие предела подробнее: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ на E, если

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon\ \ \forall n > N \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение 20.3. $f_n(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon\ \ \forall n > N \quad \forall x \in E \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на E.

Определение 20.4. $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$, если

$$\forall[\alpha;\, \beta] \subset (a;\, b) \qquad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \ \text{ на } \ [a;\, \beta].$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ локально равномерно внутри $(a;\, b)$.

Распишем понятие равномерной сходимости подробнее: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ локально равномерно внутри $(a;\, b)$, если

$$\forall[\alpha;\, \beta] \subset (a;\, b) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon\ \ \forall n > N \quad \forall x \in [\alpha;\, \beta] \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В качестве примера рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$ на полуинтервале $[0; 1)$. На этом множестве $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$, при этом не обладает равномерной сходимостью на интервале $(0; 1)$, но обладает локальной равномерной сходимостью внутри интервала $(0; 1)$.

Теорема 20.2. *Пусть* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *и* $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ *на* E ($f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ *и* $g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g$ *на* E). *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\lambda f_n + \mu g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda f + \mu g \quad \textit{на} \quad E \qquad (\lambda f_n + \mu g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g \quad \textit{на} \quad E).$$

Доказательство:

Докажем только для случая равномерной сходимости.

Так как $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g$ на E, то $\forall \varepsilon > 0$ имеем:

$$\exists N_1\colon \quad \forall n > N_1 \quad \forall x \in E \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda| + 1)};$$

$$\exists N_2\colon \quad \forall n > N_2 \quad \forall x \in E \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|\mu| + 1)}.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N \;\; \forall x \in E$ имеем:

$$|\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) - \lambda f(x) - \mu g(x)| \leqslant |\lambda| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |\mu| \cdot |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

■

Теорема 20.3 (Супремум-критерий равномерной сходимости)**.**

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{на} \quad E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_E |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Доказательство:

Так как

$$(\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на E равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \qquad \sup_E |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

■

Функциональные ряды

Определение 20.5. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится всюду на* E, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, то есть $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(x)$ на E, где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм.

Определение 20.6. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E, если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на E, где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм.

Определение 20.7. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится локально равномерно внутри* $(a; b)$, если $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S(x)$ локально равномерно внутри $(a; b)$, где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм.

Теорема 20.4. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) = g(x)$ *(равномерно) на* E. *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda f(x) + \mu g(x) \quad \textit{(равномерно) на } \; E.$$

Теорема 20.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Доказательство:

Это верно в силу того, что

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x) + \sum_{j=k}^{n} f_j(x),$$

где $\sum\limits_{j=1}^{k-1} f_j(x)$ не зависит от n. ■

Сформулируем следствие из теоремы (20.5).

Утверждение 20.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда остаток ряда* $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ *на* E.

Доказательство:

Это верно в силу теоремы (20.5) и того, что $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. ■

Теорема 20.6 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**.**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство:

Докажем $\Longrightarrow$.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E, то $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \qquad |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| = |r_n(x) - r_{n+p}(x)| \leqslant |r_n(x)| + |r_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Докажем $\Longleftarrow$.

Так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon,$$

то

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Тогда по критерию Коши сходимости числового ряда получаем:

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

Значит, из того, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon,$$

при $p \to \infty$ получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon,$$

то есть $|r_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на E. Значит, по теореме (20.1) получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ равномерно на E. ■

Теорема 20.7 (Необходимое условие сходимости функционального ряда)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E*. Тогда* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ *на* E*.*

Доказательство:

Так как $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ и $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S$, то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$. ■

Теорема 20.8 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{E} |f_n(x)| < +\infty$*. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E*.*

Доказательство:

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{E} |f_n(x)| < +\infty$, то по критерию Коши получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{E} |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n > N \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E$ имеем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{E} |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда (20.6) получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E. ■

Лекция 21

Функциональные ряды (продолжение)

Определение 21.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на E, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на E.

Утверждение 21.1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* E, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Теорема 21.1 (Необходимое условие сходимости функционального ряда)**.** *Пусть* $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)$ *и* $\Delta b_n(x) = b_n(x) - b_{n+1}(x)$. *Пусть* $S_n(x)b_{n+1}(x)$ *сходится равномерно на* E. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* E *тогда и тольк тогда, когда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Доказательство:

В прошлом семестре было получено следующее представление ряда:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x) = S_n(x)b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k(x)\Delta b_k(x). \tag{21.1}$$

В силу того, что $S_n(x)b_{n+1}(x)$ сходится равномерно на E, получаем то, что требовалось доказать. ■

Признак Дирихле

Теорема 21.2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n(x)$ *и* $\Delta b_n(x) = b_n(x) - b_{n+1}(x)$. *Пусть* $\sup\limits_{n,\,x} |S_n(x)| < +\infty$, $b_n(x) \geqslant b_{n+1}(x)$ $\forall x \in E$ *и* $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ *на* E. *Тогда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* E;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* E*, причём*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x);$$

3) $|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \sup\limits_{m,\,x} |S_m(x) - S_n(x)| \cdot \sup\limits_{x} |b_{n+1}(x)|.$

Доказательство:

1) Так как $b_k(x) \geqslant b_{k+1}(x) \ \ \forall x \in E$, то $\Delta b_k(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in E$. Тогда получаем:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)\Delta b_k(x)| \leqslant \sup_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \Delta b_k \leqslant \sup_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta b_k(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot b_{n+1}(x) \leqslant \sup_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sup_{x} |b_{n+1}(x)|.$$

Заметим, что $\sup\limits_{n,\,x} |S_n(x)| = \text{const}$, тогда $\left\{\sup\limits_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sup\limits_{x} |b_{n+1}(x)|\right\}$ – последовательность, зависящая только от n. Причём в силу условия $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на E, получаем, что $\sup\limits_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sup\limits_{x} |b_{n+1}(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Действительно, по супремум-критерию равномерной сходимости (20.3) получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \qquad \sup_{x} |b_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{\sup\limits_{n,\,x} |S_n(x)| + 1}.$$

Следовательно,

$$\forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)\Delta b_k(x)| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда (20.6) получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |S_n(x)\Delta b_n(x)|$ сходится равномерно на E.

2) Так как

$$\sup_{x} |S_n(x)b_{n+1}(x)| \leqslant \sup_{n,\,x} |S_n(x)| \cdot \sup_{x} |b_{n+1}(x)| \to 0,$$

то по теореме (21.1) и равенству (21.1) получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на E, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)\Delta b_n(x).$$

3) Так как

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k(x) - S_n(x))\Delta b_k(x),$$

то

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \sup_{m,\,x} |S_m(x) - S_n(x)| \cdot \sup_{x} |b_{n+1}(x)|.$$

■

Признак Абеля

Теорема 21.3 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* E. *Пусть* $b_n(x) \geqslant b_{n+1}(x) \quad \forall x \in E$ *и* $\sup\limits_{n,\,x} |b_n(x)| < +\infty$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на* E.

Доказательство:

Так как

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x) = (S_{n+p}(x) - S_n(x))b_{n+p+1}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k(x) - S_n(x))\Delta b_k(x),$$

то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant |(S_{n+p}(x) - S_n(x))b_{n+p+1}(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |(S_k(x) - S_n(x))\Delta b_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k>n,\,x} |S_k(x) - S_n(x)| \cdot (|b_{n+p+1}(x)| + |b_{n+1}(x)| + |b_{n+p+1}(x)|) \leqslant$$

$$\leqslant 3 \cdot \sup_{k>n,\,x} |S_k(x) - S_n(x)| \cdot \sup_{n,\,x} |b_{n+1}(x)|.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на E и $\sup\limits_{n,\,x} |b_n(x)| < +\infty$, то получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \qquad \sup_{k>n,\,x} |S_k(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot \sup\limits_{n,\,x} |b_{n+1}(x)| + 1}.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N$ (выбранное выше) такое, что

$$\forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Значит, по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда (20.6) получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. ■

Признак Дини

Теорема 21.4 (Признак Дини)**.** *Пусть*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \;\; \text{на} \;\; [a;\, b], \qquad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in [a;\, b], \qquad f_n, f \in C[a;\, b].$$

Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *на* $[a;\, b]$.

Доказательство:

Рассмотрим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Так как $f_n, f \in C[a;\, b]$, то $r_n(x) \in C[a;\, b]$. Так как $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \;\; \forall x \in [a;\, b]$, то $r_n(x) \geqslant r_{n+1}(x) \;\; \forall x \in [a;\, b]$.

Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ на $[a;\, b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \;\; \forall x \in [a;\, b]$. Так как $r_n(x) > 0$ $\forall x \in [a;\, b]$, то получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(x) > 0\colon \;\; \forall n \geqslant N(x) \qquad r_n(x) < \varepsilon.$$

В частности, $r_{N(x)}(x) < \varepsilon$. Так как $r_{N(x)}(t) \in C[a;\, b]$, то получаем:

$$\exists U(x)\colon \;\; \forall t \in U(x) \qquad r_{N(x)}(t) < \varepsilon.$$

Так как $\{U(x)\}_{x \in [a;\, b]}$ – покрытие $[a;\, b]$, то $\exists \{U(x_k)\}_{k=1}^{K}$ – покрытие $[a;\, b]$.

Пусть $N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_K)\}$. Так как

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [a;\, b] \quad \exists k\colon \;\; x \in U(x_k),$$

то $r_{N(x_k)}(x) < \varepsilon$. Тогда получаем: $r_n(x) \leqslant r_N(x) \leqslant r_{N(x_k)}(x) < \varepsilon$.

Значит, $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[a;\, b]$. Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[a;\, b]$. ■

Утверждение 21.2 (Следствие)**.** *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x) \;\; \text{на} \;\; [a;\, b], \qquad f_n(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a;\, b], \qquad f_n, S \in C[a;\, b].$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a;\, b]$.

Лекция 22

Теорема о перестановке предельных переходов

Теорема 22.1. *Пусть* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *на проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *точки* x_0 *и* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \ \ \forall n$. *Тогда:*

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Доказательство:

1) Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\dot{U}(x_0)$, то по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n, m > N \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \ \ \forall n$, то получаем:

$$\exists \dot{U}_n(x_0) \subset \dot{U}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad |a_n - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

$$\exists \dot{U}_m(x_0) \subset \dot{U}(x_0)\colon \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad |a_m - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $\dot{\dot{U}}(x_0) \subset \dot{U}_n(x_0) \cap \dot{U}_m(x_0)$. Тогда $\forall x \in \dot{\dot{U}}(x_0)$ получаем:

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - f_n(x)| + |a_m - f_m(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Тогда по критерию Коши получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2) Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1\colon \quad \forall n > N_1 \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\dot{U}(x_0)$, то

$$\exists N_2\colon \quad \forall n > N_2 \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Пусть $n > N$. Так как $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \quad \forall n$, то

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subset \dot{U}(x_0) \qquad |f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ получаем:

$$|f(x) - a| \leqslant |a - a_n| + |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Значит, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

3) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

■

Утверждение 22.1 (Следствие). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *точки* x_0 *и* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \quad \forall n$. *Тогда:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$.

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

Теорема 22.2. *Пусть* $f_n \in C[a;\, b]$ *и* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *на* $[a;\, b]$. *Тогда* $f \in C[a;\, b]$.

Доказательство:

Так как $f_n \in C[a;\, b]$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$. Тогда по теореме (22.1) получаем:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

■

Утверждение 22.2 (Следствие 1). *Пусть* $f_n \in C[a;\, b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $[a;\, b]$. *Тогда* $S \in C[a;\, b]$.

Утверждение 22.3 (Следствие 2)**.** *Пусть* $f_n \in C(a;\, b)$ *и* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$*. Тогда* $f \in C(a;\, b)$*.*

Доказательство:

Заметим, что

$$\forall x_0 \in (a;\, b) \quad \exists [\alpha;\, \beta]\colon \quad x_0 \in [\alpha;\, \beta] \subset (a;\, b).$$

Так как по теореме (22.2) $f \in C[\alpha;\, \beta]$, то $f \in C(x_0)$. ■

Утверждение 22.4 (Следствие 3)**.** *Пусть* $f_n \in C(a;\, b)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$*. Тогда* $S \in C(a;\, b)$*.*

Утверждение 22.5 (Следствие 4)**.** *Пусть*

$$f_n \in C[a;\, b], \qquad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a;\, b], \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;\, b].$$

Тогда

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \quad \text{на} \quad [a;\, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in C[a;\, b].$$

Доказательство:

« $\Longrightarrow$ » следует из теоремы (22.2).

« $\Longleftarrow$ » следует из признака Дини (21.4). ■

Утверждение 22.6 (Следствие 5)**.** *Пусть*

$$f_n \in C[a;\, b], \qquad f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a;\, b], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{сходится равномерно на} \ [a;\, b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad S(x) \in C[a;\, b].$$

Дифференцируемость функциональных последовательностей

Теорема 22.3. *Пусть:*

1) $f_n(x_0)$ *сходится, где* $x_0 \in [a;\, b]$*;*

2) $f_n \in D[a;\, b]$*;*

3) $f'_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ *на* $[a;\, b]$*.*

Тогда:

1) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *на* $[a;\,b]$*;*

2) $f \in D[a;\,b]$*;*

3) $f'(x) = g(x)$.

Доказательство:

1) Так как $f'_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ на $[a;\,b]$, то по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1\colon \quad \forall n, m > N_1 \quad \forall x \in [a;\,b] \qquad |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Так как $f_n(x_0)$ сходится, то по критерию Коши получаем:

$$\exists N_2\colon \quad \forall n, m > N \qquad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n, m > N \quad \forall x \in [a;\,b]$, применяя теорему Лагранжа ($\theta \in (0;\,1)$), получаем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| =$$
$$= |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |(f'_n - f'_m)(x_0 + \theta(x - x_0))| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;\,b]$.

2) Пусть $\varphi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t}$, где $t \in [a;\,b]$ – некоторая фиксированная точка, $x \in \dot{U}(t) \subset [a;\,b]$ (при $t = a$ или b рассматриваем только часть проколотой окрестности, лежащую внутри отрезка $[a;\,b]$). Тогда $\forall n, m > N$ по теореме Лагранжа ($\theta \in (0;\,1)$) получаем:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t))|}{|x - t|} =$$
$$= |f'_n(t + \theta(x - t)) - f'_m(t + \theta(x - t))| < \varepsilon.$$

Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;\,b]$, то $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$ на $\dot{U}(t)$. Так как $f_n \in D[a;\,b]$, то $\exists \lim\limits_{x\to t} \varphi_n(x) = f'_n(t)$. Тогда по теореме (22.1) получаем, что $\exists \lim\limits_{x\to t} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(t)$, причём $f'(t) = g(t)$. В силу произвольности выбора $t \in [a;\,b]$ получаем, что $f \in D[a;\,b]$.

3) В силу произвольности выбора $t \in [a;\, b]$ из $f'(t) = g(t)$ получаем, что $f'(x) = g(x)$.

■

Утверждение 22.7 (Следствие 1)**.** *Пусть:*

1) $f_n(x_0)$ *сходится, где* $x_0 \in (a;\, b)$*;*

2) $f_n \in D(a;\, b)$*;*

3) $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$*.*

Тогда:

1) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$*;*

2) $f \in D(a;\, b)$*;*

3) $f'(x) = g(x)$*.*

Утверждение 22.8 (Следствие 2)**.** *Пусть:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится, где* $x_0 \in [a;\, b]$*;*

2) $f_n \in D[a;\, b]$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ *равномерно на* $[a;\, b]$*.*

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *равномерно на* $[a;\, b]$*;*

2) $S \in D[a;\, b]$*;*

3) $S'(x) = g(x)$*.*

Утверждение 22.9 (Следствие 3)**.** *Пусть:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *сходится, где* $x_0 \in (a;\, b)$*;*

2) $f_n \in D(a;\, b)$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$*.*

Тогда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *локально равномерно внутри* $(a;\, b)$;

2) $S \in D(a;\, b)$;

3) $S'(x) = g(x)$.

Теорема о перестановке предела и интеграла

Теорема 22.4. *Пусть* $f_n \in N[a;\, b]$ *и* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ *на* $[a;\, b]$. *Тогда* $f \in N[a;\, b]$, *причём*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Доказательство:

Пусть $F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt$. Тогда $F_n(a) = 0$ (сходится), $F_n \in D[a;\, b]$, $F_n' \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a;\, b]$. Тогда по теореме о дифференцируемости предельной функции (22.3) получаем, что $F_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F$ на $[a;\, b]$, $F \in D[a;\, b]$, $F' = f$ на $[a;\, b]$.

Значит, $f \in N[a;\, b]$, причём $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. ■

Утверждение 22.10 (Следствие)**.** *Пусть* $f_n \in N[a;\, b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = S(x)$ *равномерно на* $[a;\, b]$. *Тогда* $S \in N[a;\, b]$, *причём*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Теорема 22.5. *Пусть* $f_n \in R[a;\, b]$ *и* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ *на* $[a;\, b]$. *Тогда* $f \in R[a;\, b]$, *причём*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Доказательство:

Так как $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a;\, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \quad \forall x \in [a;\, b] \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Зафиксируем $n > N$. Так как $f_n \in R[a;\, b]$, то по критерию Дарбу (5.1) получаем:

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall T\colon \; d(T) < \delta \qquad \sum_T \omega_{f_n}(\Delta_k)|\Delta_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как

$$\omega_f(\Delta_k) = \sup_{x',\, x'' \in \Delta_k} |f(x') - f(x'')| \leqslant \sup_{x',\, x'' \in \Delta_k} (|f_n(x') - f_n(x'')| +$$

$$+ |f(x') - f_n(x')| + |f(x'') - f_n(x'')|) \leqslant \omega_{f_n}(\Delta_k) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{(b-a)},$$

то $\forall T\colon \quad d(T) < \delta$ имеем:

$$\sum_T \omega_f(\Delta_k)|\Delta_k| \leqslant \sum_T \omega_{f_n}(\Delta_k)|\Delta_k| + \frac{2}{3}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Дарбу (5.1) получаем, что $f \in R[a;\, b]$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \; d(T_\xi) < \delta_1 \qquad \left| \sigma_f(T_\xi) - \int\limits_a^b f\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $f_n \in R[a;\, b]$, то

$$\exists \delta_2 > 0\colon \quad \forall T_\xi\colon \; d(T_\xi) < \delta_2 \qquad \left| \sigma_{f_n}(T_\xi) - \int\limits_a^b f_n\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall T\colon \; d(T_\xi) < \delta$ получаем:

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\, dx - \int\limits_a^b f_n(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int\limits_a^b f(x)\, dx - \sigma_f(T_\xi) \right| + \left| \int\limits_a^b f_n(x)\, dx - \sigma_{f_n}(T_\xi) \right| +$$

$$+ |\sigma_{f-f_n}(T_\xi)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \left| \sum_{T_\xi} (f(\xi_k) - f_n(\xi_k))|\Delta_k| \right| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

■

Утверждение 22.11 (Следствие)**.** *Пусть* $f_n \in R[a;\,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = S(x)$ *равномерно на* $[a;\,b]$*. Тогда* $S \in R[a;\,b]$*, причём*

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Лекция 23

Функциональное пространство

Рассмотрим $C[a;\, b]$ (множество всех функций, непрерывных на $[a;\, b]$) как линейное нормированное пространство, в котором в роли векторов выступают функции, а норма определяется следующим образом: $\|f\| = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |f(x)|$ (это называется нормой равномерной сходимости).

Определение 23.1. Линейное нормированное пространство X называется *полным*, если $\forall$ последовательности $\{x_n\}$ векторов пространства X такой, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n, m > N \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

верно, что $\exists x \in X\colon\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Теорема 23.1. $C[a;\, b]$ *– полное линейное нормированное пространство.*

Доказательство:

Пусть $f_n \in C[a;\, b]$ и

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n, m > N \qquad \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Так как $\|f_n\| = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |f_n(x)|$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n, m > N \quad \forall x \in [a;\, b] \qquad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{23.1}$$

Тогда по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем, что $\exists f(x)\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[a;\, b]$. Так как $f_n \in C[a;\, b]$, то по теореме (22.2) $f \in C[a;\, b]$.

Устремим $m \to \infty$. Тогда из (23.1) получаем:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n, m > N \quad \forall x \in [a;\, b] \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Так как $\|f_n\| = \max\limits_{x\in[a;\,b]} |f_n(x)|$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \quad \forall n > N \qquad \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. ■

Степенные ряды

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$. Возникают, например, следующие задачи: анализ свойств $f(x)$, нахождение $f(x)$ при известных c_n, нахождение c_n при известной $f(x)$.

Рассмотрим систему степенных функций: $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Определение 23.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ – *степенной ряд*, где c_n – *коэффициенты степенного ряда.*

Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ – сумма степенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда

Определение 23.3. $R \in [0;\ +\infty]$ – *радиус сходимости степенного ряда* – величина, определяемая *формулой Коши-Адамара*:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

где считаем, что $\dfrac{1}{0} = +\infty$ и $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Теорема 23.2.

1) $\exists R$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится $\forall x$: $|x-x_0| < R$ и расходится $\forall x$: $|x-x_0| > R$;

2) R определяется по формуле Коши-Адамара.

Доказательство:

Воспользуемся признаком Коши сходимости ряда:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x - x_0|^n} = |x - x_0| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Рассмотрим разные случаи:

1) $R = 0$. Так как $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится только при $x = x_0$.

2) $R = +\infty$. Так как $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ сходится $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) $R \in (0;\ +\infty)$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится при $\dfrac{|x - x_0|}{R} < 1$ и расходится при $\dfrac{|x - x_0|}{R} > 1$.

■

Замечание 23.1. Сходимость и расходимость в признаке Коши понимаются в сильных смыслах: если ряд сходится, то абсолютно, а если ряд расходится, то даже общий член ряда не стремится к 0. Случаи сходимости и расходимости в слабых смыслах могут наблюдаться только в концах интервала сходимости.

Свойства степенного ряда

Теорема 23.3. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, *где* $R > 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *сходится локально равномерно внутри* $|x-x_0| < R$.

Доказательство:

Рассмотрим два случая:

1) $R = +\infty$. Так как

$$\forall M > 0 \quad \forall x\colon\ |x-x_0| \leqslant M \qquad |c_n(x-x_0)^n| \leqslant |c_n|M^n$$

и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|M^n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на $|x-x_0| \leqslant M$. В силу произвольности выбора $M > 0$ получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится локально равномерно внутри $\mathbb{R}$.

2) $0 < R < +\infty$. Так как

$$\forall \delta > 0 \quad \forall x\colon\ |x-x_0| \leqslant R-\delta \qquad |c_n(x-x_0)^n| \leqslant |c_n|(R-\delta)^n$$

и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|(R-\delta)^n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на $|x-x_0| \leqslant R-\delta$. В силу произвольности выбора $\delta > 0$ получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится локально равномерно внутри $|x-x_0| < R$.

■

Теорема 23.4. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \in C(x_0-R;\ x_0+R)$, *где* $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

Доказательство:

Так как функциональный ряд сходится локально равномерно внутри $(x_0-R;\ x_0+R)$ и $c_n(x-x_0)^n \in C(x_0-R;\ x_0+R)$, то по теореме (22.2) получаем, что $f(x) \in C(x_0-R;\ x_0+R)$. ■

Вспомним признак Абеля, который также называется первой теоремой Абеля.

Теорема 23.5 (Первая теорема Абеля). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a;\ b]$ *и* $b_n(x)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $b_n(x) \leqslant b_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a;\ b]$*;*

2) $\sup\limits_{n,\,x} |b_n(x)| < +\infty$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a;\ b]$.

Теорема 23.6 (Вторая теорема Абеля). *Пусть*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \qquad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad 0 < R < +\infty$$

и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ *сходится. Тогда* $f(x) \in C[x_0;\ x_0+R]$.

Доказательство:

Так как $c_n R^n$ не зависит от x, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ сходится равномерно на $[x_0;\ x_0+R]$.

Последовательность $\left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n$ обладает следующими свойствами:

1) $\left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n \geqslant \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^{n+1} \quad \forall x \in [x_0;\ x_0+R]$;

2) $\sup\limits_{n,\,x} \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n = 1$.

Таким образом, по первой теореме Абеля (так как направление знака пункте неравенства в (1) непринципиально) получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0;\ x_0+R]$. Тогда по теореме (22.2) получаем, что $f(x) \in C[x_0;\ x_0+R]$. ■

Теорема 23.7.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-x_0)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1},$$

где $x \in \langle x_0 - R;\ x_0 + R\rangle$, где «угловые» скобки соответствуют «круглым» или «квадратным», если ряд в соответствующих граничных точках расходится или сходится соответственно.

Доказательство:

Так как $c_n(t-x_0)^n \in C\langle x_0 - R;\ x_0 + R\rangle$, то члены $c_n(t-x_0)^n$ интегрируемы. Кроме этого, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n$ сходится равномерно на $\langle x_0 - R;\ x_0 + R\rangle$. Значит, Интеграл и сумму можно менять местами. ■

Утверждение 23.1 (Следствие)**.** *Степенной ряд можно сколько угодно раз интегрировать внутри области сходимости, при этом область сходимости не уменьшится (может только увеличиться за счёт присоединения граничных точек).*

Теорема 23.8. *Пусть R – радиус сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, а R' – радиус сходимости ряда, полученного почленным дифференцированием. Тогда $R' = R$.*

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ – ряд, полученный почленным дифференцированием. Его радиус сходимости определяется по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R'} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|c_n|}.$$

Так как

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{n-n+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то

$$\frac{1}{R'} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|}\right) \ominus$$

Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то получаем:

$$\ominus \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, $R' = R$. ■

Теорема 23.9.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \in D(x_0 - R;\ x_0 + R) \quad \text{и} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Доказательство:

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ имеет радиус сходимости R, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ сходится локально равномерно внутри $(x_0-R;\ x_0+R)$. Тогда по утверждению (22.9) получаем доказываемое. ■

Замечание 23.2. Область сходимости ряда, полученного почленным дифференцированием, может «уменьшиться» за счёт исключения граничных точек.

Утверждение 23.2 (Следствие).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \in C^{\infty}(x_0-R;\ x_0+R).$$

Теорема 23.10. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *и* $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. *Пусть* $f(x_k) = g(x_k)$, *где* $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ *и* $x_k \neq x_0$. *Тогда* $f(x) = g(x)$ *(то есть* $c_n = b_n$*).*

Доказательство:

Так как ряд сходится равномерно, то

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_k-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lim_{k\to\infty}(x_k-x_0)^n = c_0.$$

Аналогично получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_k) = b_0$. Тогда в силу того, что $f(x_k) = g(x_k)$ получаем, что $c_0 = b_0$.

Пусть $f_1(x) = \dfrac{f(x)-c_0}{x-x_0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^{n-1}$, где $x \neq x_0$. Так как ряд сходится равномерно, то аналогично получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_1(x_k) = c_1$. Аналогично определим $g_1(x)$ и получим, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_1(x_k) = b_1$. Значит, $c_1 = b_1$.

Аналогично получаем, что $c_n = b_n\ \ \forall n = 2, 3, \ldots$. ■

Лекция 24

Ряд Тейлора

На прошлой лекции мы показали, что при $R > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \in C^{\infty}(x_0 - R;\ x_0 + R) \cap C\langle x_0 - R;\ x_0 + R\rangle,$$

где «угловые» скобки соответствуют «круглым» или «квадратным», если ряд в соответствующих граничных точках расходится или сходится соответственно.

Предположим, что мы некоторую функцию $f(x)$ сумели представить в виде суммы степенного ряда. Тогда встаёт задача нахождения коэффициентов c_n. Для этого возьмём k-ю производную функции f в точке x_0, получим: $f^{(k)}(x_0) = k!c_k$. Тогда $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Определение 24.1. Пусть $f \in C^{\infty}(x_0)$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

Обозначение: $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.

Утверждение 24.1. *Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ – ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.*

Утверждение 24.2. *Пусть $f \in C^{\infty}(x_0)$ и $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема 24.1. *Пусть $f \in C^{\infty}(x_0 - a;\ x_0 + a)$ и*

$$\exists M, q > 0\colon \quad \forall x \in (x_0 - a;\ x_0 + a) \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant Mq^n.$$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - a;\ x_0 + a)$.

Доказательство:

Используя остаточный член в форме Лагранжа ($\theta \in (0; 1)$), получаем:

$$|R_n(f, x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M(q|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тогда по утверждению (24.2) получаем, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - a;\ x_0 + a).$$

■

Разложение конкретных функций в ряд Тейлора

Теорема 24.2.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство:

Так как n-е производные e^x, $\sin x$, $\cos x$ в некоторой точке x ограничены, то по теореме (24.1) получаем то, что требовалось доказать. ■

Теорема 24.3.

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n,$$

где $x \in (-1;\ 1)$, если $m \leqslant -1$; $x \in (-1;\ 1]$, если $-1 < m < 0$; $x \in [-1;\ 1]$, если $m > 0$, $m \notin \mathbb{N}$.

Доказательство:

Так как

$$((1+x)^m)^{(n)} = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

то, используя остаточный член в форме Коши ($\theta \in (0;\ 1)$), для $x_0 = 0$ получаем:

$$R_n(f,x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \right| =$$

$$= \frac{|m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n)|}{n!}(1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n |x|^{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n)|}{n!} \cdot \max\left\{1,\ (1+x)^{m-1}\right\} \cdot 1 \cdot |x|^{n+1} \circleddash$$

Так как по теореме Гаусса $\dfrac{|m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-n)|}{n!} = O\left(\dfrac{1}{n^{m+1}}\right)$, то получаем:

$$\circleddash\ O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \cdot |x|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall x \in (-1;\ 1).$$

Тогда по утверждению (24.2) получаем, что $(1+x)^m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n \ \ \forall x \in (-1;\ 1)$.

Так как $-1 < m < 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n$ сходится при $x = 1$, а при $m > 0$, $m \notin \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n$ сходится при $x = \pm 1$, то по второй теореме Абеля (23.6) получаем то, что требовалось доказать. ■

Утверждение 24.3 (Следствие)**.**

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \forall x \in (-1;\ 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in [-1;\ 1];$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in [-1;\ 1].$$

Доказательство:

1) Так как
$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \forall x \in (-1;\ 1),$$
то
$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \forall x \in (-1;\ 1],$$
так как ряд полученный сходится при $x = 1$.

2) Так как
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \forall x \in (-1;\ 1),$$
то
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in [-1;\ 1],$$
так как ряд полученный сходится при $x = \pm 1$.

3) Так как
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \qquad \forall x \in (-1;\ 1),$$
то
$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in [-1;\ 1],$$

так как ряд полученный сходится при $x = \pm 1$.

∎

Тригонометрические ряды

Определение 24.2. $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ – *тригонометрический ряд.*

Утверждение 24.4.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 8^n x \in C(-\infty;\ +\infty),$$

но $\nexists f'(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

Так как $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{1}{2^n}\sin 8^n x\right| = \dfrac{1}{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \sin 8^n x$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Тогда $f \in C(\mathbb{R})$.

Так как $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\sin 8^n x\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \cos 8^n x$, то ряд, полученный почленным дифференцированием, расходится. Но это ещё не значит, что $f(x)$ не имеет производной.

Пусть $x = x_0 + h_k^+$, где $h_k^+ = \dfrac{\pi}{2\cdot 8^k}$. Тогда для разностного отношения получаем:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h_k^+)-f(x_0)}{h_k^+} = \frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0) =$$

$$= \frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0) + \frac{1}{h_k^+}\cdot\frac{1}{2^k}(\sin 8^k(x_0+h_k^+) - \sin 8^k x_0) +$$

$$+ \frac{1}{h_k^+}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0).$$

Рассмотрим $n \geqslant k+1$. Тогда из того, что

$$8^n(x_0+h_k^+) = 8^n x_0 + \frac{\pi}{2}\cdot 8^{n-k} \qquad \text{и} \qquad \frac{\pi}{2}\cdot 8^{n-k} \,\vdots\, 2\pi,$$

получаем, что $\sin 8^n(x_0+h_k^+) = \sin 8^n x_0$. Значит,

$$\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0) = 0.$$

Рассмотрим $n \in [1;\ k-1]$. Тогда, учитывая, что модуль разности синусов не превосходит модуля разности их аргументов, получаем:

$$|\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0| \leqslant |8^n(x_0+h_k^+) - 8^n x_0| = \frac{\pi}{2}\cdot 8^{n-k};$$

$$\left|\frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0)\right| \leqslant \frac{1}{h_k^+}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}|\sin 8^n(x_0+h_k^+) - \sin 8^n x_0| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\cdot 8^k\cdot\sum_{n=1}^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4^n\cdot 8^{-k}\right) < \frac{4^k}{3}.$$

Рассмотрим $n = k$. Тогда

$$\frac{1}{h_k^+}\cdot\frac{1}{2^k}(\sin 8^k(x_0+h_k^+) - \sin 8^k x_0) = \frac{2}{\pi}\cdot 4^k(\cos 8^k x_0 - \sin 8^k x_0).$$

Пусть теперь $x = x_0 + h_k^-$, где $h_k^- = -\dfrac{\pi}{2\cdot 8^k}$. Тогда для разностного отношения получаем:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h_k^-)-f(x_0)}{h_k^-} = \frac{1}{h_k^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^-) - \sin 8^n x_0) =$$

$$= \frac{1}{h_k^-}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^-) - \sin 8^n x_0) + \frac{1}{h_k^-}\cdot\frac{1}{2^k}(\sin 8^k(x_0+h_k^-) - \sin 8^k x_0) +$$

$$+ \frac{1}{h_k^-}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^-) - \sin 8^n x_0).$$

Аналогично получаем:

$$\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^-) - \sin 8^n x_0) = 0;$$

$$\left|\frac{1}{h_k^-}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}(\sin 8^n(x_0+h_k^-) - \sin 8^n x_0)\right| < \frac{4^k}{3};$$

$$\frac{1}{h_k^-}\cdot\frac{1}{2^k}(\sin 8^k(x_0+h_k^-) - \sin 8^k x_0) = \frac{2}{\pi}\cdot 4^k(\cos 8^k x_0 + \sin 8^k x_0).$$

Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$\max\{|\cos t - \sin t|,\ |\cos t + \sin t|\} \geqslant 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $x = x_0 + h_k$, где $h_k = \begin{cases} h_k^+, & \text{если} \quad \cos 8^k x_0 - \sin 8^k x_0 \geqslant 1 \\ h_k^-, & \text{иначе} \end{cases}$. Тогда для модуля разностного отношения получаем:

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k}\right| \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot 4^k - \frac{1}{3} \cdot 4^k = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}\right) \cdot 4^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

так как $\dfrac{2}{\pi} > \dfrac{1}{3}$. Значит, $\nexists f'(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$. ■

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ