МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

СОЛОДОВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
НЕДОЛИВКО ЮЛИЮ НИКОЛАЕВНУ

Содержание

Лекция 1. Множества. Функции множеств. Множество натуральных чисел 6
Введение . . . 6
Обозначения теории множеств . . . 6
Операции над множествами . . . 6
Отношение. Функции множеств . . . 8
Множество натуральных чисел . . . 12

Лекция 2. Целые, рациональные и действительные числа 13
Теорема о существовании наименьшего элемента непустого подмножества 13
Равномощные множества . . . 13
Счетные множества . . . 14
Целые числа . . . 15
Рациональные числа . . . 16
Действительные числа . . . 17

Лекция 3. Принципы полноты. Числовые последовательности 21
Ограниченные множества, sup и inf . . . 21
Принцип полноты Вейерштрасса . . . 22
Принцип Архимеда . . . 22
Числовые последовательности . . . 23
Принцип полноты Кантора . . . 23
Теорема о неравномощности действительных и натуральных чисел . . . 24
Предел числовой последовательности . . . 25
Ограниченные последовательности . . . 27

Лекция 4. Числовые последовательности. Продолжение 28
Теорема об отделимости . . . 28
Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности . . . 28
Свойства сходящихся последовательностей и их пределов . . . 31
Вычисление квадратного корня . . . 35

Лекция 5. Константа Эйлера. Числовые ряды 36
Скорость сходимости последовательностей . . . 36
Неравенство Бернулли . . . 37
Бином Ньютона . . . 38
Константа Эйлера (число e) . . . 39
Числовые ряды . . . 42

Лекция 6. Числовые ряды (продолжение). Подпоследовательности 44
Сходимость числовых рядов. Свойства . . . 44
Остаток числового ряда . . . 46
Знакопостоянные ряды . . . 47
Подпоследовательность. Частичный предел . . . 48

Теорема Больцано 50
Критерий Коши 51

Лекция 7. Сходимость числовых рядов. Критерий Коши **52**
Критерий Коши для последовательностей (продолжение) 52
Критерий Коши для рядов 53
Теорема о сходимости средних 55
Теорема Штольца 56

Лекция 8. Открытые и замкнутые множества на прямой **59**
Теорема Штольца (следствие) 59
Открытые и замкнутые множества 61

Лекция 9. Принцип Больцано. Принцип Кантора. Частичные пределы последовательностей. Предел функции **66**
Принцип Больцано 66
Принцип Кантора 66
Частичные пределы последовательностей 67
Предел функции 68

Лекция 10. Свойства пределов функций. Критерий Коши. Непрерывность функции в точке **72**
Свойства пределов функций 72
Бесконечно малые и бесконечно большие функции 72
Теорема о зажатой функции 76
Критерий Коши 76
Теорема Вейерштрасса 77
Непрерывность функции в точке 79

Лекция 11. Точки разрыва. Непрерывность на множестве. Теоремы Вейерштрасса. Теоремы Коши. Равномерная непрерывность **80**
Предел композиции двух непрерывных функций 80
Классификация точек разрыва функции 81
Непрерывные на множестве функции 83
Первая и вторая теоремы Вейерштрасса 84
Первая и вторая теоремы Коши 85
Равномерная непрерывность функции 87

Лекция 12. Непрерывность функций. Первый и второй замечательные пределы. Отношения эквивалентности бесконечно малых **88**
Теорема Кантора 88
Теоремы об обратной функции 89
Первый замечательный предел 90
Непрерывность некоторых функций 91
Второй замечательный предел 93
Эквивалентность функций, функции одного порядка 94

Лекция 13. Порядок малости функций. Дифференциал и производная функции в точке 96
Порядок малости функций . . . 96
Производная и дифференциал функции в точке . . . 99

Лекция 14. Свойства производных. Производные n-го порядка 103
Теорема о производной сложной функции . . . 103
Теорема о производной обратной функции . . . 104
Таблица производных 1-го порядка . . . 105
Производная n-го порядка . . . 106
Правило Лейбница . . . 107
Таблица производных n-го порядка . . . 107

Лекция 15. Левая и правая производные. Теоремы о среднем 108
Левая и правая производные в точке . . . 108
Точки локального экстремума . . . 108
Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума) . . . 109
Теоремы о среднем . . . 110
Теорема о равенстве левых (правых) производных и предела слева (справа) производной . . . 112
Теоремы о связи монотонности функции и постоянства знака производной на отрезке . . . 113
Теорема о дифференцировании неравенств . . . 114

Лекция 16. Теорема Лопиталя. Формула Тейлора 115
Теорема Лопиталя . . . 115
Многочлен Тейлора . . . 117
Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) . . . 117
Глобальные формулы Тейлора (с остаточным членом в форме Коши и Лагранжа) . . . 118

Лекция 17. Формула Тейлора для некоторых функций. Выпуклые и вогнутые функции 120
Многочлен Тейлора и оценка остаточного члена для некоторых функций . 120
Теоремы о точках локального экстремума . . . 123
Выпуклые и вогнутые функции . . . 125

Лекция 18. Выпуклые функции (продолжение) 127
Неравенства для выпуклых функций . . . 127
Теорема о непрерывности выпуклых функций . . . 128
Теоремы о производных выпуклой функции . . . 129
Достаточное условие выпуклости . . . 131

Лекция 19. Выпуклость функции (продолжение). Точка перегиба 132
Необходимые (достаточные) условия выпуклости. Критерий выпуклости . 132
Точка перегиба . . . 134

Приложения к доказательству неравенств 137

Лекция 20. Абсолютно сходящийся ряд. Расстановка скобок в ряде. Бесконечные произведения 139

Неравенство Коши 139
Абсолютно сходящийся ряд 140
Расстановка скобок в ряде 141
Бесконечные произведения 144
Представление $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в виде бесконечных произведений 146

Лекция 21. Приложения рядов и бесконечных произведений 147

Представление $\sin x$ и $\cos x$ в виде бесконечного произведения 147
Приложения рядов и бесконечных произведений 150

Лекция 22. Формула Стирлинга. Знакопостоянные ряды 154

Формула Стирлинга 154
Знакопостоянные ряды 157
Ряд, сходящийся безусловно 158
Признаки сравнения знакопостоянных рядов 160

Лекция 23. Обобщенный гармонический ряд и эталонный ряд с логарифмом 163

Обобщенный гармонический ряд и эталонный ряд с логарифмом 163
Теорема Коши о разрежении 166
Теоремы о рядах из частных 167

Лекция 24. Знакопеременные ряды 171

Условная сходимость рядов 171
Признак Лейбница 174
Ряд, преобразованный по Абелю 175

Лекция 25. Признаки условной сходимости числовых рядов. Произведение рядов 177

Признаки условной сходимости рядов 177
Произведение рядов 179

Лекция 1. Множества. Функции множеств. Множество натуральных чисел

Введение

Курс математического анализа в этом семестре будет построен следующим образом. Будет три больших раздела: понятие предела числовой последовательности[1] и функции[2], дифференциальное исчисление функции одной переменной и, наконец, числовые ряды.

Начнем мы с основ теории множеств. Изложения, касающиеся теории множеств, будут не очень строгими. Подробнее они будут рассмотренны в курсе математической логики.

Обозначения теории множеств

Определим множество как объект, которому могут принадлежать и не принадлежать некоторые элементы. Обозначения: $a \in A$ (a принадлежит A) и $a \notin A$ (a не принадлежит A).

Кроме того, нам понадобится *пустое множество* $\emptyset$, то есть множество, которому не принадлежит ни один элемент.

$A \subset B$ (A *содержится* B), если из того, что $a \in A$ следует, что $a \in B$.

Очевидно, что $\emptyset \subset A$, $A \subset A$. Кроме того, вложение множеств транзитивно:

$$A \subset B, \quad B \subset C \;\Rightarrow\; A \subset C.$$

Равенство множеств $A = B$ означает, что

$$A \subset B \;\wedge\; B \subset A.$$

Операции над множествами

Итак, определили объекты, с которыми мы будем работать (множества). Рассмотрим **операции над множествами**.

1. *Объединение* двух множеств:
$$A \cup B.$$
Здесь
$$a \in A \cup B \iff a \in A \vee a \in B.$$

2. *Пересечение* двух множеств:
$$A \cap B.$$
Здесь
$$a \in A \cap B \iff a \in A \wedge a \in B.$$

[1]То есть функции натурального аргумента.
[2]Действительного аргумента

3. *Разность* двух множеств:
$$A \setminus B.$$
Здесь
$$a \in A \setminus B \iff a \in A \cap a \notin B.$$

Кроме трех операций выше, существуют другие операции над множествами (зависящие от приведенных выше). На них мы останавливаться подробно не будем.

Обсудим **свойства операций над множествами**.

1. *Коммутативность* операций объединения и пересечения:
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. *Ассоциативность* этих же операций:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

3. *Дистрибутивность*:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, \tag{1}$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,. \tag{2}$$

Докажем свойство дистрибутивности. Начнем с (1):
$$a \in (A \cup B) \cap C \iff a \in A \cup B \wedge a \in C \iff (a \in A \vee a \in B) \cap a \in C \iff$$
$$\iff (a \in A \wedge a \in C) \vee (a \in B \wedge a \in C) \iff a \in A \cap C \vee a \in B \cap C \iff$$
$$\iff a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)\,.$$
Аналогично доказывается (2).

4. (Закон Моргана)
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\,, \tag{3}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,. \tag{4}$$

Докажем (3):
$$a \in A \setminus (B \cup C) \iff a \in A \wedge a \notin (B \cup C) \iff a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) \iff$$
$$\iff (a \in A \wedge a \notin B) \wedge (a \in A \wedge a \notin C) \iff a \in (A \setminus B) \wedge a \in (A \setminus C) \iff$$
$$\iff a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\,.$$
Аналогично для (4):
$$a \in A \setminus (B \cap C) \iff a \in A \cap (a \notin B \cap C) \iff a \in A \cap (a \notin B \vee a \notin C) \iff$$
$$\iff (a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in A \wedge a \notin C) \iff a \in A \setminus B \wedge a \in A \setminus C \iff$$
$$\iff a \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,.$$

Отношение. Функции множеств

Введем (пока нестрого) *мощность множества*:

$$\operatorname{card}\emptyset = 0,$$

$$\operatorname{card} A = 1,\ \text{если}\ \exists\ a:\ \ A\setminus\{a\} = \emptyset,$$

$$\operatorname{card} A = 2,\ \text{если}\ \exists\ a:\ \operatorname{card} A\setminus\{a\} = 1$$

и так далее. Мощности, равной 2, нам пока будет достаточно.

Множество $\{a, b\}$ из двух элементов называется (неупорядоченной) *парой*. Для упорядоченных пар[3] используется обозначение (a, b).

Определение 1.1. Пусть заданы множества A и B. Их *декартовым произведением* называется множество

$$A\times B = \{(a, b)\mid a\in A,\quad b\in B\}\,.$$

а) б)

Рис. 1.1. а) Отношение $\mathrm{R}\subset A\times B$; б) Функция $f:\ A\to B$

Определение 1.2. Произвольное подмножество $\mathrm{R}\subset A\times B$ назвается *отношением* (рис. 1.1, а).

Говорят, что *a находится в отношении R с b ($a\,R\,b$)*, если $(a, b)\in R$.

Обсудим *виды отношений.*

1. R называется *отношением эквивалентности на $A\times A$*, если
   1) $a\,\mathrm{R}\,a$;
   2) $a\,\mathrm{R}\,b \iff b\,\mathrm{R}\,a$;
   3) $a\,\mathrm{R}\,b,\quad b\,\mathrm{R}\,c\Rightarrow a\,\mathrm{R}\,c.$

   Типичным отношением эквивалентности является равенство чисел.

   Утверждение 1.1. *Отношение R эквивалентности разбивает A на непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).*

[3] Не будем подробно останавливаться на них.

Доказательство. Возьмем два подмножества A_1 и A_2, внутри каждого из которых все элементы попарно эквивалентны. Предположим, что их пересечение непусто:

$$A_1 \cap A_2 = a.$$

Тогда $\forall\, a_1 \in A_1$, $\forall\, a_2 \in A_2$

$$a_1 \,\mathrm{R}\, a, \quad a_2 \,\mathrm{R}\, a,$$

откуда получаем, что

$$a_1 \,\mathrm{R}\, a_2.$$

Итак, A_1 и A_2 либо состоят из одних и тех же элементов, либо их пересечение пусто. □

2. R называется *отношением порядка*, если
   1) $a \,\mathrm{R}\, a$;
   2) $a \,\mathrm{R}\, b,\ b \,\mathrm{R}\, c \Rightarrow a \,\mathrm{R}\, c$.

3. R – *отношение линейного порядка*, если R – отношение порядка и
   2') $a \,\mathrm{R}\, b$ или $b \,\mathrm{R}\, a$.

   Типичным отношением линейного порядка является $\leq$ (рис. 1.2, прямая является отношением равенства).

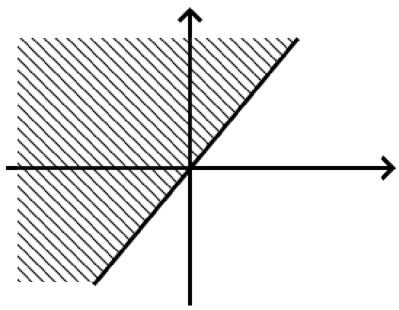


Рис. 1.2. Отношение линейного порядка $\leq$

Определение 1.3. Отношение R называется *функцией* из A в B:

$$f:\ A \ \to\ B,$$

если выполнены следующие свойства:

1. $\forall\, a \in A\ \exists\, b \in B$ такое, что $a \,\mathrm{R}\, b$, то есть

$$f(a) = b.$$

2. Если

$$a \,\mathrm{R}\, b_1, \quad a \,\mathrm{R}\, b_2,$$

то $b_1 = b_2$.

Графически изображая определение 1.3, получим знакомый нам из школьного курса математики график функции (рис. 1.1, б).

Определение 1.4. Пусть даны два отображения[4]

$$f: A \to B,$$

$$g: B \to C.$$

Тогда *композицией функций f и g* называется отображение

$$g \circ f: A \to C,$$

определяемое по следующему правилу:

$$g \circ f(a) = g\left(f(a)\right).$$

Утверждение 1.2. *Пусть даны отображения*

$$f: A \to B,$$

$$g: B \to C,$$

$$h: C \to D.$$

Тогда

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \tag{5}$$

Доказательство. Распишем для произвольного элемента $a \in A$

$$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g\left(f(a)\right) = h\left(g\left(f(a)\right)\right) = h\left(g \circ f(a)\right) = h \circ (g \circ f)(a).$$

□

Свойство (5) называется свойством *ассоциативности.*

Разберем некоторые частные случаи отображений.

1. Отображение
$$f: A \to B,$$
называется *инъекцией*, если $\forall\ a_1 \neq a_2 \in A$
$$f(a_1) \neq f(a_2).$$

2. Отображение
$$f: A \to B,$$
называется *сюръекцией*, если $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A$ такое, что
$$f(a) = b.$$

[4]Термины *функция* и *отображение* являются синонимами.

3. Отображение
$$f:\ A\ \to\ B,$$
называется *биекцией*, если выполнены пункты 1 и 2 одновременно (то есть отображение является и инъекцией, и сюръекцией).

Определение 1.5. Пусть $X \subset A$. Тогда $f(X)$ называется *образом* X,
$$f(X) = \{\, y \in B \,|\, \exists\ x \in X:\ f(x) = y \,\}\,.$$

Определение 1.6. Пусть $Y \subset B$. Тогда $f^{-1}(Y)$ называется *прообразом* Y,
$$f(X) = \{\, x \in A:\ f(x) \in Y \,\}\,.$$

В терминах образа и прообраза определения инъекции и сюръекции можно дать следующим образом. Отображение является *инъекцией*, если прообраз одноэлементного множества состоит не более, чем из одного элемента. Отображение является *сюръекцией*, если образ множества A равен B.

Теорема 1.1. *(Об обратном отображении) Пусть*
$$f:\ A\ \to\ B$$
– биекция. Тогда $\exists$
$$f^{-1}:\ B\ \to\ A,$$
где
$$f^{-1}(b) = a,\ \text{если } f(a) = b.$$
При этом f^{-1} *– биекция.*

Доказательство. Проверим, что f^{-1} является функцией.

Для $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A$ такое, что
$$f^{-1}(b) = a,$$
так как f – сюръекция. Свойство 1 из определения 1.3 выполнено.

Далее, из
$$f^{-1}(b) = a_1 \wedge f^{-1}(b) = a_2$$
следует, что $a_1 = a_2$, так как f – инъекция. Следовательно, свойство 2 из определения функции тоже выполнено, f^{-1} является функцией.

Проверим теперь, что f^{-1} является биекцией.

Проверим, что f^{-1} – инъекция. Покажем, что из того, что
$$f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) = a, \tag{6}$$
следует, что $b_1 = b_2$. Для этого достаточно переписать (6) как
$$f(a) = b_2,\quad f(a) = b_1.$$

Проверим теперь, что f^{-1} – сюръекция. Покажем, что $\forall\ a \in A\ \exists\ b \in B$ такое, что
$$f^{-1}(b) = a,$$
что эквивалентно тому, что
$$f(a) = b.$$
Из определения 1.3 получаем, что это верно. $\square$

Множество натуральных чисел

Перейдем к множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Оно определяется аксиоматически. Приведем часть аксиом, так называемые **аксиомы Пеано**.

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ (n+1) \in \mathbb{N}$ – следующий элемент.
2. $\exists\ 1 \in \mathbb{N}$, который не является следующим.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \neq 1\ \exists!\ (n-1) \in \mathbb{N}$ такой, что n – следующий для $n-1$.
4. (Аксиома индукции) Пусть $M \subset \mathbb{N}$ такое, что $1 \in M$ и из того, что $n \in M$, следует, что $n+1 \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $M = \mathbb{N}$.

Определим операции на $\mathbb{N}$, используя аксиому индукции. Сложение:

$$n + (m+1) = (n+m) + 1.$$

Умножение:

$$n \cdot 1 = n, \quad n(m+1) = nm + n.$$

Утверждение 1.3. *На множестве* $\mathbb{N}$ $\exists!$ *линейный порядок такой, что*

$$n \leq n+1.$$

Доказательство. Отметим, что доказательство будет приведено не в полной мере, поскольку и аксиоматика рассматривается неполная.

Во-первых,

$$1 \leq 1.$$

Далее, рассмотрим множество

$$E_n = \{n \text{ – самый большой }\}.$$

Тогда

$$E_n = E_n \cup \{n+1\}.$$

Очевидно, что

$$m \leq n+1\ \forall\, m \in E_n,$$

так как

$$m \leq n \leq n+1.$$

□

Лекция 2. Целые, рациональные и действительные числа

Теорема о существовании наименьшего элемента непустого подмножества

Напомним, на прошлой лекции мы познакомились с элементами теории множеств, разобрались, что такое функция, и начали строить действительные числа (начали с $\mathbb{N}$).

Докажем еще одно важное свойство натуральных чисел.

Теорема 2.1. $\forall\ M \subset \mathbb{N}\ \exists$ *наименьший элемент множества* M.

Доказательство. Обозначим
$$\mathbb{N} \setminus M = A.$$
Предположим, что в M нет наименьшего элемента.

Тогда $1 \in A$, Иначе $1 \in M$, откуда 1 – наименьший.

Пусть $n \in A$. Тогда $n+1 \in A$. Действительно, иначе получаем
$$n \in A, \quad n+1 \in M,$$
то есть $n+1$ – наименьший.

По аксиоме индукции получаем, что $A = \mathbb{N}$, то есть $M = \emptyset$. ☐

Введем понятие последовательности.

Определение 2.1. Функция
$$f:\ \mathbb{N}\ \to\ A$$
называется *последовательностью* и обозначается $\{a_n\}$.

Вернемся к обсуждению последовательностей позже.

Равномощные множества

Определение 2.2. A и B *равномощны*:
$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B,$$
если $\exists$ биекция
$$f:\ A\ \to\ B.$$

Проверим, что равномощность – это отношение эквивалентности:

1. $\operatorname{card} A = \operatorname{card} A$, здесь в качестве биекции рассматривается тождественное отображение
$$e:\ A\ \to\ A,$$
$$e(a) = a, \quad \forall\ a \in A.$$

2. Если
$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B, \tag{7}$$
то
$$\operatorname{card} B = \operatorname{card} A.$$
Действительно, (7) означает, что найдется
$$f:\ A \ \to \ B$$
– биекция. Но тогда
$$f^{-1}:\ B \ \to \ A$$
тоже является биекцией.

3. Пусть
$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B, \quad \operatorname{card} B = \operatorname{card} C.$$
Тогда
$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} C.$$
Действительно, по условию, $\exists$ биекции
$$f:\ A \ \to \ B,$$
$$g:\ B \ \to \ C.$$
Тогда
$$g \circ f:\ A \ \to \ C$$
– биекция.

Итак, равномощность являетя отношением эквивалетности, все множества разбиваются на классы эквивалентности. Можно показать, что все конечные множества разбиваются на классы эквивалентности в зависимости от числа элементов.

Счетные множества

Определение 2.3. A – *счетное*, если
$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathbb{N}.$$

Отметим, что можно вводить не отношение эквивалентности, а отношение порядка:
$$\operatorname{card} A \le \operatorname{card} B,$$
если $\exists$ инъекция
$$f:\ A \ \to \ B.$$

На этом варианте останавливаться подробнее мы не будем.

Теорема 2.2. *Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Тогда M конечно либо счетно (не более чем счетно).*

Доказательство. Предположим, что $M = \emptyset$. Тогда

$$\operatorname{card} M = 0.$$

Пусть теперь $M \notin \emptyset$. Тогда $\exists$ наименьший элемент n_1.

Если $M \setminus \{n_1\} = \emptyset$, то

$$\operatorname{card} M = 1.$$

Если $M \setminus \{n_1\} \neq \emptyset$, то $\exists$ наименьший элемент n_2.

Продолжим рассуждения аналогичным образом. На K шаге предположим, что

$$M \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_K\} = \emptyset.$$

Тогда

$$\operatorname{card} M = K.$$

Пусть теперь

$$M \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_K\} \neq \emptyset.$$

Тогда $\exists$ наименьший элемент n_{K+1} в множестве $M \setminus \{n_1, n_2, \ldots, n_K\}$.

Согласно аксиоме индукции, возможность шагать каждый раз гарантирует, что конструкция выше устроена для всех $K \in \mathbb{N}$. Иными словами, если рассуждения не прерываются на некотором шаге, $\exists$ биекция

$$f : \mathbb{N} \to M$$

по правилу

$$K \mapsto n_K.$$

$\square$

Следствие. Любое подмножество счетного множества не более, чем счетно.

Целые числа

Начнем расширять множество натуральных чисел.

Определение 2.4. *Множество целых чисел* определяется как

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Напомним, натуральные числа мы умеем складывать, умножать и сравнивать. В случае целых чисел нужно расширить эти операции на 0 и отрицательные числа, ввести операцию вычитания. В итоге получим, что $\mathbb{Z}$ – коммутативное ассоциативное кольцо.

Отметим, что, конечно, не для любого подмножества $\mathbb{Z}$ $\exists$ наименьший элемент.

Утверждение 2.1.

$$card\, \mathbb{Z} = card\, \mathbb{N}.$$

Доказательство. Биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ строится следующим образом (рис. 2.1).

$\square$

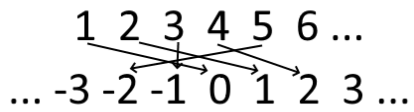


Рис. 2.1. Биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$

Рациональные числа

Перейдем к $\mathbb{Q}$ – рациональным числам. Рассмотрим пары вида

$$(p, q), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N},$$

причем

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2), \tag{8}$$

если

$$p_1 q_2 = p_2 q_1.$$

Нетрудно проверить, что (8) является отношением эквивалентности на множестве всех целочисленных пар. Эти классы эквивалентности обозначаются p/q – это и есть *рациональные числа*.

Запишем свойства рациональных чисел.

1. $a + b = b + a$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. $\exists$ элемент 0 такой, что
$$a + 0 = 0 + a = a;$$
4. $\forall\ a\ \exists$ элемент $(-a)$ такой, что
$$a + (-a) = (-a) + a = 0;$$
5. $ab = ba$;
6. $(ab)c = a(bc)$;
7. $\exists$ элемент 1 такой, что
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a;$$
8. $\forall\ a \neq 0\ \exists$ элемент a^{-1} такой, что
$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1;$$
9. $a(b + c) = ab + ac$;
10. Верно
$$a \leq b \wedge b \leq a \iff a = b;$$

11. $\forall\ a, b$
$$a \le b \vee b \le a.$$

12. Верно, что
$$a \le b \wedge b \le c \ \Rightarrow\ a \le c;$$

13. Если $a \le b$, то
$$a + c \le b + c;$$

14. Если $a, b \ge 0$, то $ab \ge 0$;

15. (Аксиома Архимеда) $\forall\ a \in \mathbb{Q}\ \exists$ элемент $n \in \mathbb{N}$ такой, что
$$-n > a.$$

Если свойства 1 – 14 выполняются для некоторого объекта, такой объект называется *архимедовым полем.*

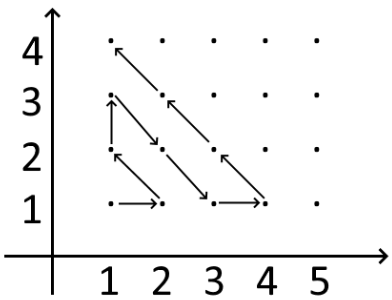


Рис. 2.2. Счетность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Теорема 2.3. *Декартово произведение* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *– счетное.*

Доказательство. Занумеруем все пары (p, q) в следующем порядке (рис. 2.2):
$$(1,1) \ \rightarrow\ (2,1) \ \rightarrow\ (1,2) \ \rightarrow\ (3,1) \ \rightarrow\ (2,2) \ \rightarrow\ (1,3) \ \rightarrow\ \ldots$$
□

Следствие.
$$\operatorname{card}\mathbb{Q} = \operatorname{card}\mathbb{N}.$$

Действительные числа

Отметим, что существуют числа, рациональными не являющиеся. Рассмотрим $2^{\mathbb{N}}$ – множество, элементами которого являются подмножества множества $\mathbb{N}$. Например,
$$\{1, 2, 4\} \in 2^{\mathbb{N}}.$$

Теорема 2.4.

$$card\, 2^{\mathbb{N}} > card\, \mathbb{N},$$

то есть $\nexists$ *биекции*

$$f:\ \mathbb{N}\ \to\ 2^{\mathbb{N}}.$$

Доказательство. Сопоставим каждому элементу $\in 2^{\mathbb{N}}$ набор из 0 и 1 следующим образом: на i месте будет стоять 1, если i принадлежит данному подмножеству, и 0 иначе. Например,

$$\{1,2,4\}\ \to\ (1,1,0,1,0,0,\ldots),$$

$$\emptyset\ \to\ (0,0,\ldots,0,\ldots),\quad \mathbb{N}\ \to\ (1,1,\ldots,1,\ldots).$$

Итак, у нас есть биекция

$$2^{\mathbb{N}}\ \leftrightarrow\ \text{ последовательности из 0 и 1.}$$

Предположим противное. Пусть $\exists$ биекция

$$f:\ \mathbb{N}\ \to\ 2^{\mathbb{N}}.$$

Занумеруем последовательности из 0 и 1:

$$\begin{gathered} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1k}\ldots \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2k}\ldots \\ \ldots \\ a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kk}\ldots \end{gathered}$$

Здесь $a_{11}=1$ и так далее. Итак, получаем матрицу, бесконечную вправо и вниз. По предположению, строками этой матрицы являются все элементы из $2^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим

$$1-a_11,\ 1-a_{22},\ 1-a_{33},\ \ldots\in 2^{\mathbb{N}},$$

так как все a_{ii} равны 0 или 1. С другой стороны, эта последовательность не является элементом $2^{\mathbb{N}}$ по построению бесконечной матрицы. $\square$

Дополним аксиомы выше еще одной. Структура, обладающая этими 16 аксиомами, называется *действительными числами* $\mathbb{R}$.

16. (Аксиома полноты) $\forall\ A,B\in\mathbb{R}$, $A,B\neq\emptyset$ и $A\le B$, то есть

$$\forall\ a\in A,\quad \forall\ b\in B\ a\le b,$$

$$\exists\ c\in\mathbb{R}:\ A\le c\le B. \tag{9}$$

Здесь $A\le c$, если

$$\forall\ a\in A\ a\le c.$$

Отметим, что в таком случае аксиому 15 можно убрать. Этот момент будет рассмотрен позднее.

Покажем, что модель действительных чисел, удовлетворяющая аксиомам выше, существует. В качестве модели возьмем **десятичные числа**. Итак, рассмотрим наборы вида

$$a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots,$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, a_n – последовательность цифр, то есть натуральных чисел от 0 до 9. Запретим a_n оканчиваться цифрами 9:

$$0,199\ldots9\ldots = 0,2.$$

Отметим, что для чисел вида

$$0,133\ldots3\ldots = 0,1(3)$$

аналогичное сокращение придумать нельзя.

Для двух бесконечных дробей a, b

$$\underline{a} + \underline{b} \leq a + b \leq \overline{a} + \overline{b},$$

где $\overline{a}$ и $\underline{a}$ – округление сверху и снизу соответственно. Итак, суммой бесконечных дробей называется число, лежащее между всеми суммами округлений сверху и снизу.

Аналогично для операции умножения.

Обсудим операции сравнения. Например,

$$a < b.$$

Здесь руководствуемся следующим правилом:

$$\begin{array}{rcl}
a_0 < b_0 & \Rightarrow & a < b \\
a_0 = b_0,\ a_1 < b_1 & \Rightarrow & a < b \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_0 = b_0,\ \ldots,\ a_n = b_n,\ a_{n+1} < b_{n+1} & \Rightarrow & a < b
\end{array}$$

Легко проверить, что для модели бесконечных десятичных дробей первые 14 аксиом (см. выше) выполняются.

Проверим аксиому (9).

Утверждение 2.2. *На множестве бесконечных десятичных дробей выполнена аксиома полноты.*

Доказательство. Возьмем $\forall\ A, B \neq \emptyset$ – подмножества множества бесконечных десятичных дробей, причем $A \leq B$.

1. Пусть
$$A \leq 0 \leq B.$$
В таком случае все доказано. В качестве точки c можно взять 0.

2. Пусть $\exists\ a \in A$, $a > 0$. Отсюда $B > 0$. Итак, множество B имеет вид

$$B = \{b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots\}, \quad b_0 \geq 0, \quad b_i \geq 0.$$

Возьмем множество всех целых частей чисел B. Это множество представляет собой подмножество $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Обозначим через c_0 наименьшую целую часть B. Заметим, что в B, во-первых, нет ни одной целой части, меньшей c_0, а во-вторых, есть хотя бы одна целая часть, равная c_0.

Обозначим

$$B_0 = \{c_0, b_1 \dots b_n \dots \in B\}.$$

Далее, обозначим через c_1 – наименьшую из b_1 дробей B,

$$B_1 = \{c_0, c_1 b_2 \dots \in B_0\}.$$

В силу аксиомы индукции данную процедуру можно продолжать бесконечно. Получаем

$$c = c_0, c_1 \dots c_n \dots.$$

Отметим, что c – бесконечная дробь. Предположим противное. Пусть у c в «хвосте» есть только 9. Это означает, что в самом B оказалось число, заканчивающееся только 9. Такого быть не может.

Очевидно, что

$$c \leq B.$$

Покажем, что $A \leq c$. Предположим, что это не так. Пусть $\exists\ a \in A$, $a > c$. Это значит, что

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad \dots, \quad a_n = c_n, \quad a_{n+1} > c_{n+1}.$$

Получаем, что

$$a_0, a_1 \dots a_n \dots > c_0, c_1 \dots c_{n+1} b_{n+2} \dots.$$

Противоречие.

$\square$

Лекция 3. Принципы полноты. Числовые последовательности

Ограниченные множества, $\sup$ и $\inf$

Напомним, в прошлый раз мы познакомились с аксиоматикой действительных чисел и рассмотрели конкретную их модель (десятичные дроби). Аксиома, отличающая рациональные числа от действительных, – это аксиома полноты.

Завершим разговор о свойствах действительных чисел. Запишем некоторые важные принципы.[5]

Напомним аксиому полноты: $\forall\ A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что

$$A, B \neq 0, \quad A \leq B,$$

$\exists\ c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$A \leq c \leq B.$$

Здесь

$$A \leq B \iff \forall\ a \in A,\ \ \forall\ b \in B\ a \leq b,$$

$$A \leq c \iff \forall\ a \in A\ a \leq c.$$

Определение 3.1. Число $c \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью множества* A, если $A \leq c$, то есть

$$\forall\ a \in A\ a \leq c.$$

Число $c \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью A, если $A \geq c$, то есть

$$\forall\ a \in A\ a \geq c.$$

Определение 3.2. A *ограничено сверху*, если $\exists$ верхняя грань A.

A *ограничено снизу*, если $\exists$ нижняя грань A.

A *ограничено*, если A ограничено сверху и снизу.

Определение 3.3. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* A:

$$M = \sup A,$$

если M – нименьшая верхняя грань, то есть $\forall$ верхней грани c

$$M \leq c$$

и M – верхняя грань.

Аналогично, число $m \in \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* A:

$$m = \inf A,$$

если m – наибольная нижняя грань, то есть $\forall$ нижней грани c верно

$$m \geq c$$

и m – нижняя грань.

[5] При некоторых дополнительных условиях эти принципы эквивалентны аксиоме полноты. На их эквивалентности мы останавливаться не будем.

Принцип полноты Вейерштрасса

Теорема 3.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ и A ограничено сверху. Тогда* $\exists \sup A$.

Доказательство. Пусть B – множество верхних граней A. Тогда

$$B \subset \mathbb{R}, \quad B \neq \emptyset \text{ и } A \leq B.$$

Отсюда по аксиоме полноты $\exists\ c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$A \leq c \leq B.$$

Покажем, что

$$c = \sup A.$$

Из того, что $A \leq c$, следует, что c – верхняя грань. Из того, что $c \leq B$, следует, что c – наименьшая из верхних граней A. ☐

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ и A ограничено снизу. Тогда* $\exists \inf A$.

Теоремы 3.1 и 3.2 в совокупности называются *принципом полноты Вейерштрасса.*

Принцип Архимеда

Выведем из принципа полноты Вейерштрасса принцип Архимеда (аксиома 15).

Теорема 3.3. *(Принцип Архимеда)* $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $n > a$.

Доказательство. (От противного) Предположим, что $\exists\ a \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$n \geq a.$$

Тогда

$$\exists \quad \sup \mathbb{N} = M.$$

Число $M - 1$ не является верхней гранью. Тогда $\exists\ n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$n > M - 1,$$

откуда $n + 1 \in \mathbb{N}$,

$$n + 1 > M.$$

Получаем противоречие. ☐

Числовые последовательности

Определение 3.4. Последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ называется *числовой последовательностью.*

Замечание 3.1. Кроме этого, может быть $a_n \in \mathbb{C}$ (элементы принимают комплекснозначные значения). В таком случае последовательность также называется числовой, но отдельно оговаривается, что ее значения – комплексные числа.

Определение 3.5. $a_n \nearrow$ (*нестрого возрастает, не убывает*), если

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1} \leq 0.$$

Аналогично, $b_n \searrow$ (*нестрого убывает, не возрастает*), если

$$\Delta b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0.$$

Принцип полноты Кантора

Определение 3.6. *Отрезком* $[a, b]$ называется множество

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \quad a \leq x \leq b\}, \quad b > a.$$

Определение 3.7. $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$.

Очевидно, что для последовательности вложенных отрезков выполняется вложение

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.4. *(Принцип полноты Кантора) Пусть $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вложенных отрезков. Тогда $\exists \ c \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$c \in [a_n, b_n] \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Заметим, что A и B – непустые счетные множества. Выведем их свойства.

Для $\forall \ k, m \in \mathbb{N}$ докажем, что

$$a_k \leq b_m.$$

Возможны три случая:

1. Для $k = m$ – очевидно;

2. При $k < m$
$$a_k \leq a_m < b_m;$$

3. При $k > m$
$$a_k < b_k \leq b_m.$$

Итак,
$$A \leq B.$$

В силу аксиому полноты $\exists\ c$ такая, что
$$A \leq c \leq B,$$

то есть $\forall\ k, m$
$$a_k \leq c \leq b_m.$$

В частности, при $k = m = n$
$$a_n \leq c \leq b_n.$$

□

Теорема о неравномощности действительных и натуральных чисел

Теорема 3.5.
$$card\,\mathbb{R} \neq card\,\mathbb{N}.$$

Докажем вместо теоремы 3.5 следующую теорему. Из нее автоматически следует теорема 3.5, так как $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 3.6.
$$card\,[a, b] \neq card\,\mathbb{N}.$$

Доказательство. (От противного) Предположим, что
$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}.$$

Обозначим $[a, b] = \Delta_0$ и разобъем Δ_0 на 3 отрезка. $\exists$ отрезок Δ_1, $x_1 \notin \Delta_1$. Рахобъем Δ_1 на 3 отрезка. Далее, $\exists$ отрезок Δ_2:
$$x_1,\ x_2 \notin \Delta_2.$$

Продолжая рассуждения, на n-ом шаге получим, что $\exists$ отрезок Δ_n такой, что
$$x_1,\ \ldots,\ x_n \notin \Delta_n, \quad \Delta_n \subset \Delta_{n-1}.$$

Тогда
$$\exists\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

С другой стороны, $c \neq x_n\ \forall\ n$ (по построению). Приходим к противоречию. □

Следствие.

$$\exists\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Замечание 3.2. Например, в качестве x из следствия теоремы 3.5 можно взять $\sqrt{2}$.

Утверждение 3.1. $\forall\ a < b \in \mathbb{R}\ \exists\ c \in \mathbb{Q}$ *такое, что*

$$a < c < b.$$

Доказательство. Рассмотрим число $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$. По принципу Архимеда, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > \frac{1}{b-a}$. Отсюда

$$b - a > \frac{1}{n}.$$

Тогда для дробей вида $\{k/n\}$ $\exists\ k$ такое, что

$$a < \frac{k}{n} < b.$$

□

Предел числовой последовательности

Начнем обсуждение теории последовательности. Запишем двойное неравенство

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \tag{10}$$

Говорят, что это *интервал с центром в точке* a. Множество x, удовлетворяющих (10), будем обозначать $U_\varepsilon(a)$. Если радиус окрестности ε не имеет значения[6], пишут просто $U(a)$.

Определение 3.8. Число a называется *пределом* последовательности x_n:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Утверждение 3.2. $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff$ *вне любой окрестности лежит не более конечного числа* x_n.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Выберем $\forall\ \varepsilon > 0$. По определению, $\exists\ N$ такой, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff x_n \in U_\varepsilon(a).$$

[6]То есть какое-то ε выбрано, но для нас не имеет значения, какое именно.

$\Leftarrow$ По условию, $\forall\ \varepsilon > 0$

$$x_{n_1}, \ldots, x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a),$$

а все остальные члены последовательности принадлежат окрестности $U_\varepsilon(a)$. Положим

$$N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

□

Следствие. (Локальное свойство предела) Пусть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Последовательность y_n отличается на конечное число элементов. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Определение 3.9. Если

$$\exists\ a = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

то последовательность x_n – *сходящаяся.* Иначе x_n – *расходящаяся.*

Теорема 3.7. *Пусть x_n – сходящаяся. Тогда*

$$\exists!\ a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. (От противного). Пусть $\exists$ два предела последовательности x_n:

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad a_2 = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad a_1 \neq a_2.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{3}.$$

Тогда $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$|x_n - a_1| < \varepsilon,$$

и $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$|x_n - a_2| < \varepsilon.$$

Положим

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$|x_n - a_1| < \varepsilon \wedge |x_n - a_2| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|a_1 - a_2| \leq |a_1 - x_n| + |a_2 - x_n| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a_1 - a_2|.$$

□

Ограниченные последовательности

Определение 3.10. Говорят, что последовательность a_n *ограничена сверху*, если множество всех ее элементов $\{a_n\}$ ограничено сверху.

Аналогично, последовательность a_n *ограничена снизу*, если множество всех ее элементов $\{a_n\}$ ограничено снизу.

Наконец, последовательность a_n *ограничена*, если множество ее элементов $\{a_n\}$ ограничено. В этом случае для последовательности a_n прибегают к обозначению

$$a_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Теорема 3.8. *Если последовательность a_n – сходящаяся, то*

$$a_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. По условию, $\exists\ a \in \mathbb{R}$ такое, что $\exists\ N$, $\forall\ n > N$

$$a - 1 < a_n < a + 1.$$

Положим

$$m = \min\{a_1, \ldots, a_N, a-1\}, \quad M = \max\{a_1, \ldots, a_N, a+1\}.$$

Тогда

$$m \le a_n \le M\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Лекция 4. Числовые последовательности. Продолжение

Теорема об отделимости

Теорема 4.1. *(Об отделимости) Пусть*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad a > 0.$$

Тогда $\exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\exists\ N$, $\forall\ n > N$

$$x_n > \delta.$$

Доказательство. Положим

$$\delta = \frac{a}{2} > 0.$$

Возьмем $\delta = \varepsilon$. Тогда для выбранного ε $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$x_n > a - \varepsilon = \delta.$$

□

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 4.1. Последовательность x_n называется *бесконечно малой*:

$$x_n = o(1), \quad n \to \infty,$$

если

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Утверждение 4.1. *Пусть*

$$x_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$x_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Иногда используют обозначение[7]

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

□

Замечание 4.1. Отметим, что для неограниченных последовательностей

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \tag{11}$$

для $\forall\ \varepsilon$ при **некоторых** n. Для бесконечно больших последовательностей (11) будет выполняться для **всех** n, начиная с некоторого N.

Утверждение 4.2. *x_n является бесконечно большой $\iff$ $1/x_n$ является бесконечно малой.*

Доказательство. Действительно, если

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon},$$

то

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon.$$

□

Теорема 4.2. *Пусть*

$$x_n = o(1) \text{ и } y_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Тогда

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\lambda x_n + \mu y_n = o(1), \quad n \to \infty;$$
2. $x_n y_n = o(1)$;
3. *если* $z_n = O(1)$, *то*
$$x_n z_n = o(1).$$

Доказательство. 1. Фиксируем $\forall\ \varepsilon > 0$. По условию,

$$x_n = o(1),$$

[7] Конечно, бесконечно большая последовательность x_n сходящейся не является. Это общепринятое обозначение.

а значит, $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Аналогично,

$$y_n = o(1),$$

откуда $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{|\mu| + 1}.$$

Положим

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$|\lambda x_n + \mu y_n| < \varepsilon.$$

3. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По условию,

$$z_n = O(1),$$

откуда $\exists\ M$ такое, что $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$|z_n| < M.$$

Далее,

$$x_n = o(1),$$

откуда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$|x_n z_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

2. Так как $y_n = o(1)$, то $y_n = O(1)$ и в силу пункта 3 утверждение доказано.

$\square$

Следующая теорема покажет, что поведение всех сходящихся последовательностей сводится к поведению бесконечно малых.

Теорема 4.3.

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

тогда и только тогда, когда

$$x_n = a + o(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Распишем условие существования предела x_n: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{12}$$

Запись (12) и означает, что

$$x_n - a = o(1), \quad n \to \infty.$$

$\Leftarrow$ Очевидно.

$\square$

Свойства сходящихся последовательностей и их пределов

Выведем из теоремы 4.3 и свойств бесконечно малых свойства последовательностей, связанные с арифметическими операциями.

Теорема 4.4. *Пусть*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\exists \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b;$$
2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$;
3. *Пусть* $b \neq 0$. *Тогда*
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. Так как

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

по теореме 4.3,

$$x_n = a + o(1).$$

Аналогично, так как

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

$$y_n = b + o(1).$$

1. Распишем
$$\lambda x_n + \mu y_n = \lambda\,(a + o(1)) + \mu\,(b + o(1)) = \lambda a + \mu b + \lambda o(1) + \mu o(1) = \lambda a + \mu b + o(1).$$
Отсюда
$$\exists \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b.$$
2. Распишем
$$x_n y_n = (a + o(1))\,(b + o(1)) = ab + ao(1) + bo(1) + o(1)o(1) = ab + o(1),$$
откуда
$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$
3. Наконец, так как $b \neq 0$, $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\exists\ N\colon \forall\ n > N$
$$|y_n| > \delta \iff \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{\delta}.$$
Следовательно, $y_n = O(1)$. Распишем
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - a y_n}{b y_n} = \frac{1}{b y_n}\,(b(a + o(1) - a(b + o(1)) = O(1)o(1) = o(1).$$

Отсюда

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + o(1), \quad n \to \infty,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

□

Теорема 4.5. *Пусть*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и $a > 0$*. Тогда* $\exists\ N$ *такое, что* $\forall\ n > N$

$$x_n > 0.$$

Доказательство. По теореме 4.1 об отделимости, $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\exists\ N$, $\forall\ n > N$

$$x_n > \delta > 0.$$

□

Следствие. Пусть

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и $a > b$. Тогда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$x_n > b.$$

Доказательство. Применим теорему 4.5 к последовательности

$$y_n = x_n - b,$$

для которой, очевидно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = a - b$$

и $a - b > 0$. Тогда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$y_n > 0 \iff x_n > b.$$

□

Следствие. Пусть

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и $a < b$. Тогда $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$x_n < b.$$

Сформулируем обратное свойство. Обратим внимание, что в обратном свойстве неравенство нестрогое.

Теорема 4.6. *Пусть* $\exists\ N$ *такое, что* $\forall\ n > N$

$$x_n \geq b$$

и

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда

$$a \geq b.$$

Доказательство. (От противного) Предположим, что $a < b$. Тогда $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$x_n < b.$$

Получаем противоречие. □

Теорема 4.7. *Пусть*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \exists \lim_{n\to\infty} z_n,$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

и $\exists\ N$ *такое, что* $\forall\ n > N$

$$x_n \leq y_n \leq z_n.$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Замечание 4.2. Иногда утверждение теоремы 4.8 записывают следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} x_n \leq & y_n & \leq z_n \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & c & \end{array}$$

Замечание 4.3. Обратим внимание, что если

$$x_n \ \to\ a, \quad z_n \ \to\ b,$$

то y_n, $x_n \leq y_n \leq z_n$, **не обязано** сходится к c, где $a \leq c \leq b$ (так как, возможно, y_n вообще не будет иметь предела).

Ключевым моментом же теоремы 4.8 является то, что если x_n и y_n последовательности имеют один и тот же предел, предел y_n обязательно $\exists$ (и равен этому же числу).

Доказательство. (Теорема 4.8) Фиксируем $\forall\ \varepsilon > 0$. Так как

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

$\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$|x_n - c| < \varepsilon,$$

откуда

$$x_n > c - \varepsilon.$$

Аналогично, так как

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

$\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$|z_n - c| < \varepsilon,$$

откуда имеем

$$z_n < c + \varepsilon.$$

Положим

$$\widehat{N} = \max\{N, N_1, N_2\}.$$

Тогда $\forall\ n > \widehat{N}$

$$c - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < c + \varepsilon,$$

откуда получаем, что $\forall\ n > \widehat{N}$

$$|y_n - c| < \varepsilon.$$

□

Теорема 4.8. *(Вейерштрасса) Пусть $x_n \nearrow$, то есть*

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1} \le 0,$$

и x_n ограничена сверху. Тогда x_n сходится.

Дополнение *x_n сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup x_n.$$

Доказательство. Пусть $a = \sup x_n$. Тогда

1. $\forall\ n \in \mathbb{N}$
$$x_n \le a;$$

2. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что
$$x_N > a - \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$a - \varepsilon < x_n \le x_n \le a < a + \varepsilon,$$

откуда

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

□

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4.9. *(Вейерштрасса) Пусть $x_n \searrow$ и ограничена снизу. Тогда x_n сходится.*

Следствие. Пусть $x_n \nearrow$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff x_n$ ограничена сверху.

Пусть $x_n \searrow$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff x_n$ ограничена снизу.

Таким образом, на классе монотонных последовательностей ограниченность является не только необходимым, но и достаточным условием.

Вычисление квадратного корня

Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \tag{13}$$

1. $\forall\ n \geq 2$

$$x_n \geq \sqrt{a}.$$

Действительно, это следует из того, что

$$\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

2. Вычислим

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0.$$

Поэтому $x_n \searrow$.

Поэтому по теореме 4.9 Вейерштрасса

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

так как x_{n+1} – это последовательность x_n без x_1.

Перейдем к пределу в обеих частях формулы (13) для x_{n+1}. Получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right),$$

откуда получим

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Решая это уравнение, получаем, что

$$x = \sqrt{a}.$$

Итак, вычисляя последовательно итерации (13), мы приблизимся к $\sqrt{a}$. Обсудим точность такого приближения. Вычислим характеристику

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} \overset{(13)}{=} \frac{x_n^2 + a - 2x_n}{x_n^2 + a + 2x_n} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{a}}{x_{n-1} + \sqrt{a}}\right)^{2^2} = \ldots = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)^{2^n}.$$

Отсюда

$$0 \leq \left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)^{2^n} < \varepsilon,$$

если

$$N = \log_2 \log_{\left|\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right|} \frac{2\sqrt{a}}{\varepsilon}.$$

Лекция 5. Константа Эйлера. Числовые ряды

Скорость сходимости последовательностей

Напомним, в конце прошлой лекции разобрали следующий пример:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Эта последовательность удовлетворяет теореме 4.9 Вейерштрасса, то есть сходится.

Дополнительно установили, что

$$0 \le x_n - \sqrt{a} < 2\sqrt{a}q^2, \quad q = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}, \quad |q| < 1,$$

то есть установили не только факт сходимости, но и то, *как* сходится последовательность.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

Это означает, что для любой выбранной погрешности, начиная с некоторого номера, все x_n мало отличаются от $\sqrt{a}$ (меньше, чем заданная погрешность). Этого достаточно в теории. На практике нам важно понимать, как быстро мы приблизимся к пределу последовательности. Это зависит от того, как устроена функция $N(\varepsilon)$.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Пусть

   $$x_n = \frac{1}{n^p}, \quad p > 0.$$

   Здесь

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

   Это означает, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$

   $$\frac{1}{n^p} < \varepsilon,$$

   откуда

   $$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}. \tag{14}$$

   В частности, если $p = 1$,

   $$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

2. Пусть

   $$x_n = q^n, \quad 0 < q < 1.$$

   Тогда

   $$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

то есть $\forall\ \varepsilon\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$q^n < \varepsilon.$$

Отсюда

$$N(\varepsilon) = \log_{1/q} \frac{1}{\varepsilon}. \tag{15}$$

Отметим, что логарифм (15) сходится медленнее, чем степенная функция (14), а значит, для одного и того же ε в случае $x_n = q^n$ $N(\varepsilon)$ будет меньше. Получаем, что q^n сходится быстрее, чем $\frac{1}{n^p}$.

3. Наконец, рассмотрим

$$q^{2^n}, \quad 0 < q < 1.$$

Здесь

$$\lim_{n\to\infty} q^{2^n} = 0,$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$q^{2^n} < \varepsilon,$$

откуда

$$N(\varepsilon) = \log_2 \log_{1/q} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Такая последовательность, очевидно, будет сходится к 0 еще быстрее, чем первая и вторая.

Неравенство Бернулли

Теорема 5.1. *(Неравенство Бернулли) Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$x_k > -1\ \forall\ k$;*
2. *Все x_k одного знака.*

Тогда

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{16}$$

Доказательство. Проведем доказательство (16) по индукции.

Пусть $n = 1$. Тогда $1 + x_1 \geq 1 + x_1$.

Шаг индукции $n \Rightarrow n + 1$. Предположим, что верно

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Покажем, что в таком случае

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

Распишем

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1+x_{n+1}) = 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k + \sum_{k=1}^{m} x_k x_{n+1} \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

$\square$

Следствие. Пусть $x > -1$. Тогда $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \tag{17}$$

Бином Ньютона

Определение 5.1. Число

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{18}$$

называется *числом Чезаро (числом сочетаний)*.

Обсудим свойства (18):

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^k = C_n^{n-k}\ \forall\ k = 0, \ldots, n$;
3. Верно
$$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{19}$$
Убедимся в справедливости (19). Распишем
$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!(n-k+k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Теорема 5.2. *(Бином Ньютона)*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $n = 1$. $a + b = C_1^0 b + C_1^1 a$.

Шаг индукции $n \Rightarrow n+1$. Распишем

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = a^{n+1} + b^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^k b^{n+1-k} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.$$

□

Отметим, что в следствии к неравенству Бернулли (формула (17) важно требование $x > -1$. Действительно, для $x > 0$ (17) следует из бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \ldots$$

Константа Эйлера (число e)

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{20}$$

Такая последовательность встречается, например, при вычислении банковских вкладов. Предположим[8], мы положили 1 рубль под 100% на год. Через год мы получим

$$1 + 1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

рублей. В другом месте нам предлагают выплату процентов 2 раза в год. За год в этом месте мы получим

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Рассуждения можно продолжать и дальше. Покажем, что сумма денег на вкладе растет не бесконечно, то есть что (20) ограничена.

Утверждение 5.1. *Последовательность (20) $x_n \nearrow$, причем возрастает строго, то есть*

$$x_n < x_{n+1}.$$

[8]Это, конечно, шутливый пример, но x_n (20) и число e играют важную роль в математическом анализе.

Доказательство. Распишем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right). \quad (21)$$

Воспользуемся (17). Тогда

$$(21) \geq \left(1+\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Отметим, что из последнего неравенства видно, что рост x_n небольшой. □

Покажем, что x_n (20) ограничена. Для этого рассмотрим последовательность

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (22)$$

Очевидно,

$$x_n < y_n.$$

Утверждение 5.2. *Последовательность (22) $y_n \searrow$, причем убывает строго:*

$$y_{n-1} > y_n.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2-1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1+\frac{1}{(n-1)(n+1)^2} > 1.$$

□

Итак,

$$y_n \searrow, \quad x_n \nearrow.$$

По аналогии с вложенными отрезками, $\forall\ k, m$

$$x_k < y_m.$$

Действительно, возможны следующие варианты. Пусть $k = m$. Утверждение очевидно.

Пусть $k < m$. Тогда $x_k < x_m < y_m$.

Наконец, пусть $k > m$. Тогда $x_k < y_k < y_m$.

Опираясь на записанное выше, мы можем сделать следующие выводы.

1. $x_n < y_1 = 4 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. По теореме 4.8 Вейерштрасса,

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

2. $y_n > x_1 = 2$. По теореме 4.9 Вейерштрасса,

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Запишем очевидное соотношение:

$$y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Переходя в выражении выше к пределу $n \to \infty$, получим, что

$$y = x = e, \quad 2 \le e \le 4.$$

Это число и называется *константой Эйлера.*[9]

Продолжим делать выводы.

3. Справедлива оценка

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{23}$$

4. Возьмем ln от (23). Получим

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

5. Вычитая из всех частей (23) $(1 + 1/n)^n$, получим, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n}.$$

Итак, мы можем оценить скорость сходимости последовательности x_n к e. $\forall \ \varepsilon > 0$ $\exists \ N$ такое, что $\forall \ n > N$

$$e - x_n < \varepsilon,$$

где

$$N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon}.$$

[9] Ее точное значение

$$e = 2,7\ldots.$$

Числовые ряды

Начнем разговор о числовых рядах. *Числовым рядом* называется сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Строго говоря, написанное выше не является определением, так как не уточняет, какой смысл вкладывается в бесконечную сумму.

Определение 5.2. *Частичной суммой ряда* называется

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 5.3. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*, если

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Число S называется *суммой числового ряда.*

Иначе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Пример 5.1. 1. Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1. \tag{24}$$

Напомним, в школьном курсе математики формула (24) называлась суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Частичная сумма такого ряда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ \to\ \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

2. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta x_n.$$

Здесь

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \ldots + x_n - x_{n+1} = x_1 - x_{n+1} \ \to\ x_1 - a = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta x_n.$$

В частности, возьмем

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\Delta x_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Утверждение 5.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^k} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \tag{25}$$

Если под знаком $\prod$ уменьшить каждую скобку на j/n, получим, с одной стороны, большую сумму, с другой, произведение будет состоять только из 1:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{26}$$

В силу неравенства Бернулли (формула (16))

$$(26) > 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} >$$

$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Итак, получаем, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{2n}{2n-1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Обе «зажимающие» последовательности $\to\ e$, а значит, и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ \to\ e, \quad n \to \infty.$$

□

Лекция 6. Числовые ряды (продолжение). Подпоследовательности

Сходимость числовых рядов. Свойства

Напомним, на прошлой лекции начали изучать числовые ряды, разобрали несколько примеров. Из оценки

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{2n}{2n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

получили представление

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{27}$$

Продолжим говорить о свойствах рядов. Напомним, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Теорема 6.1. *Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Тогда*

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + \mu b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

□

Теорема 6.2. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления частичной суммы в следующем виде:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

□

Теорема 6.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится.

В силу локального свойства предела S_{n-1} сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Тогда

$$\sum_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

□

Разберем несколько примеров на применение необходимого условия сходимости (теорема 6.3).

Пример 6.1. 1. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad |q| \geq 1 \ \textit{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} (1)^n$$

расходятся.

2. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx, \quad x \neq \pi k,$$

расходятся. Действительно, предположим противное для ряда из $\sin nx$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0.$$

В силу локального свойства предела получаем, что и

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0.$$

Раскрывая скобки в $(n+1)x$, получим, что

$$\lim_{n\to\infty} (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0.$$

Получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin^2 nx + \cos^2 nx\right) = 0.$$

Противоречие. Для ряда из $\cos nx$ аналогично.

Остаток числового ряда

Определение 6.1. Число

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{28}$$

называется *остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

r_m (28) – числовая последовательность, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (и не определено иначе).

Теорема 6.4. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} r_m = 0,$$

или, другими словами,

$$r_m = o(1), \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из представления

$$r_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

□

Обсудим, как выглядит остаток ряда для некоторых частных случаев.

Пример 6.2. 1. Для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1,$$

остаток имеет вид

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{m+1}}{1-q}.$$

2. Для

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

остаток ряда равен

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{m+1}.$$

3. Оценим остаток ряда из факториалов (27):

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\ldots\right)=\frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{m+2}}=$$

$$=\frac{m+2}{m!(m+1)^2}>\frac{1}{m!m}.$$

Итак, из пункта 3 получаем, что

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}<\frac{1}{m!m},$$

откуда

$$0<e-\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}<\frac{1}{m!m}.$$

Утверждение 6.1.

$$e\notin\mathbb{Q}.$$

Доказательство. (От противного) Пусть $e\in\mathbb{Q}$, то есть $e=p/q$. Тогда

$$0<e-\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}<\frac{1}{q!q}.$$

Отсюда

$$0<eq!-q!\sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}<\frac{1}{q}.$$

Получаем, что в середине двойного неравенства записано целое число (так как множитель $q!$ сокращает все знаменатели). Пришли к противоречию. □

Знакопостоянные ряды

Определение 6.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *знакопостоянным*, если $a_n\geq 0$.

Теорема 6.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, $a_n\geq 0$, *сходится* $\iff$ S_n *ограничена сверху.*

Доказательство. Следует из того, что в случае знакопостоянного ряда $S_n\nearrow$. □

В завершение темы скажем несколько слов о преимуществе рядов. По определению,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Предположим, что мы вычисляем число e приближенно. По известной зависимости $N(\varepsilon)$ находим N и для этого N вычисляем приближенное значение. Затем ε меняется. Нам необходимо снова вычислить $N(\varepsilon)$, затем вычислить соответствующий член последовательности. Вычисления, сделанные ранее, здесь не используются.

Возьмем теперь представление

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Для заданного ε вычисляем приближенное значение (то есть находим $N(\varepsilon)$ первых членов ряда). Если позднее нам требуется более точная оценка, мы вычисляем еще некоторое количество следующих членов ряда и добавляем их к уже известному результату.

Кроме того, оценка скорости сходимости для представления e в виде последовательности гораздо хуже:

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{4}{n}$$

против

$$0 < e - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m!m}.$$

Подпоследовательность. Частичный предел

Мы приближаемся к обсуждению достаточно сложной (и важной) теоремы. Прежде, чем перейти к конструкциям, которые помогут в доказательстве этой теоремы, скажем еще несколько слов о рядах (последовательностях).

Когда мы рассматриваем ряд (последовательность), возникает вопрос о его (ее) сходимости. Тут разделяют две задачи. Первая, более сложная, состоит в нахождении суммы ряда (предела последовательности).

Вторая задача (чаще решаемая) состоит в том, чтобы определить, сходится ли вообще ряд (последовательность). Мы рассматривали некоторые необходимые или достаточные условия сходимости. Так, например, условие "если последовательность сходится, она ограничена"является необходимым условием сходимости. Конечно, оно не гарантирует, что рассматриваемая ограниченная последовательность будет являться сходящейся. Достаточные условия, наоборот, могут только сказать, сходится ли последовательность, удовлетворяющая им (и ничего не скажут о последовательностях, для которых эти условия не выполняются).

Хотелось бы иметь более универсальное утверждение. Кроме того, было бы удобно узнавать скорость сходимости, а не только сам факт ее наличия (отсутствия). Такая теорема существует. Чтобы ее доказать, надо начать с некоторого предварительного рассмотрения расходящихся последовательностей.

Определение 6.3. Пусть дана последовательность x_n. Если задана строго возрастающая последовательность n_k натуральных чисел, то x_{n_k} называется *подпоследо-*

вательностью[10] n_k.

Определение 6.4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *частичным пределом последовательности* x_n, если $\exists\ x_{n_k}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Теорема 6.6. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и b – частичный предел x_n, то $b = a$.

Доказательство. По условию, $\exists\ n_k$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b,$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K$ такое, что $\forall\ k > K$

$$|x_{n_k} - b| < \varepsilon.$$

Кроме того, по условию $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Положим

$$\widehat{N} = \max\left\{N, K\right\}.$$

Тогда $\forall\ n > \widehat{N}$

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

и, так как $n_k \geq k$, $\forall\ k > \widehat{N}$

$$|x_{n_k} - b| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|a - b| \leq |x_{n_k} - a| + |x_{n_k} - b| < 2\varepsilon.$$

$\square$

Теорема 6.7. *Пусть $x_n \nearrow$ и a – частичный предел x_n. Тогда*

$$\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Доказательство. По условию, $\exists\ n_k$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a,$$

[10] Напомним, что последовательности являются функциями натурального аргумента. Если использовать обозначение, аналогичное обозначению для функций вообще, подпоследовательность можно записать как $x(n(k)$. Отметим, однако, что для последовательностей запись со скобками не используется.

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K$ такое, что $\forall\ k > K$

$$a - \varepsilon < x_{n_k} \leq a.$$

Положим $N = n_{K+1}$. Тогда $\forall\ n > N$

$$a - \varepsilon < x_{n_{K+1}} \leq x_n \leq a,$$

откуда получаем, что

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\square$

Теорема Больцано

Теорема 6.8. *(Больцано) Пусть x_n ограничена. Тогда $\exists\ n_k$ такая, что*

$$\exists\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Доказательство. Если x_n ограничена, то $\exists\ [a, b]$ такой, что

$$x_n \in [a, b]\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Разобьем $[a, b]$ пополам и обозначим через Δ_1 ту половину, в которой находится бесконечное число элементов x_n. Тогда $\exists\ n_1$ такое, что

$$x_{n_1} \in \Delta_1.$$

Разобьем Δ_1 пополам и обозначим через Δ_2 ту половину, которая содержит бесконечное число x_n. Тогда $\exists\ n_2 > n_1$ такое, что

$$x_{n_2} \in \Delta_2.$$

Прервемся и запишем дополнение к принципу вложенных отрезков.

Теорема 6.9. *Если Δ_n вложены и стягиваются (длины стремятся к нулю), то*

$$\exists!\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n,$$

или, иными словами,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{c\}.$$

Доказательство. Из принципа вложенных отрезков,

$$\exists\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} n_k.$$

Предположим, что таких точек больше, чем одна. Пусть

$$\exists\ c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Тогда

$$0 < |c_2 - c| \leq b_n - a_n,$$

откуда получаем, что $c_2 = c$. □

Вернемся к доказательству теоремы 6.8 Больцано. Продолжая рассуждения выше, построим Δ_n – последовательность стягивающихся отрезков. По только что доказанной теореме,

$$\exists!\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n,$$

причем

$$c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},$$

так как

$$|c - x_{n_k}| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

и в силу теоремы о зажатой последовательности. □

Критерий Коши

Теорема 6.10. *(Критерий Коши сходимости числовой последовательности) x_n сходится $\iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n, m > N$*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Из того, что x_n сходится, следует, что

$$\exists\ a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Отсюда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и $\forall\ m > N$

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и получаем, что

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Доказательство будет продолжено на следующей лекции. □

Лекция 7. Сходимость числовых рядов. Критерий Коши

Критерий Коши для последовательностей (продолжение)

Теорема 6.10. *(Критерий Коши сходимости последовательности) x_n сходится $\iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такой, что $\forall\ n, m > N$*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Основная сложность заключается в том, что число a (предел последовательности, если она сходится) нам неизвестно.

Положим[11] $\varepsilon = 1$. По условию, $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n, m > N$

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Положим $m = N + 1$ для удобства. Тогда $\forall\ n > N$

$$|x_n - x_{N+1}| < 1 \iff x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1.$$

Положим

$$A = \min\{x_1,\, x_2,\, \dots\, x_N,\, x_{N+1} - 1\}, \quad B = \max\{x_1,\, x_2,\, \dots, x_N,\, X_{N+1} + 1\}.$$

Тогда $\forall\ n \in \mathbb{N}\ x_n \in [A, B]$, то есть x_n ограничена. По теореме 6.8 Больцано, $\exists\ n_k$, $\exists\ a \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что такое a является пределом всей последовательности. Имеем следующее. $\forall\ \varepsilon\ \exists\ K$ такое, что $\forall\ k > K$

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

$\exists\ N$ такое, что $\forall\ n, m > N$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Положим

$$\overline{N} = \max\{K, N\}.$$

Если $k > \overline{N}$, то $k > K$ и

$$n_k \geq k > N.$$

Поэтому $\forall\ k, n > \overline{N}$

$$|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon.$$

Фиксируем $n > \overline{N}$. Тогда $\forall\ k > \overline{N}$

$$|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon.$$

[11] Вообще говоря, можно взять любое число.

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим, что

$$|a - x_n| \le \varepsilon.$$

Итак, получаем, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \overline{N}$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| \le \varepsilon.$$

□

Обсудим, какие еще выводы можно сделать из критерия Коши (теорема 6.10).

Утверждение 7.1. *Пусть* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ *такое, что* $\forall\ m, n > N$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ n > N$

$$|x_n - \lim_{n\to\infty} x_n| \le \varepsilon.$$

Следствие. x_n расходится $\iff$ $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\ N\ \exists\ m, n > N$ такие, что

$$|x_n - x_m| \ge \varepsilon.$$

Критерий Коши для рядов

Теорема 7.1. *(Критерий Коши сходимости числового ряда) Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ *такое, что* $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Напомним, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

сходится. По критерию Коши для последовательностей (теорема 6.10), $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n, m > N$

$$|S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Без ограничения общности предположим, что $m > n$, то есть

$$m = n + p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$|S_m - S_n| = |S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

□

Следствие. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\iff$ $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, N\ \exists\, n > N$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение критерия Коши для рядов (теорема 7.1).

Утверждение 7.2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится.*

Заметим, что в этом случае используют обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Доказательство. Оценим сумму

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $p = n$, $\varepsilon = 1/2$. $\square$

Утверждение 7.3. *Следующий ряд сходится:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} < +\infty.$$

Доказательство. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

при $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. $\square$

Утверждение 7.4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log_2 n} = +\infty.$$

Доказательство. Оценим

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}} \frac{1}{k\log_2 k} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{n+m-1}+1}^{2^{n+m}} \frac{1}{k\log_2 k} \geq \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=2^{m+n-1}+1}^{2^{n+m}} \frac{1}{2^{n+m}(n+m)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2(n+m)} > \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}.$$

$\square$

Утверждение 7.5.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} < +\infty.$$

Доказательство. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k \ln^2 k} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} < \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)\ln k} <$$

$$< \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln k} = \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+p)} < \frac{1}{\ln n} < \varepsilon.$$

Здесь

$$N(\varepsilon) = e^{1/\varepsilon}.$$

Заметим, однако, что для $\varepsilon = 0.01$ уже получаем

$$N(\varepsilon) = e^{100},$$

то есть исходный ряд сходится очень медленно. □

Теорема о сходимости средних

Пусть дана последовательность x_n. Возьмем среднее[12] первых n чисел:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Теорема ниже принадлежит Чезаро. Мы, конечно, не рассматриваем ее вариант только для средних арифметических.

Теорема 7.2. *(Чезаро) Пусть*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a.$$

Доказательство. Положим

$$z_n = x_n - a,$$

$$\overline{\sigma_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_n - a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - a = \sigma_n - a.$$

Покажем, что из того, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = 0,$$

[12]Мы ограничимся только одним из возможных способов, как можно усреднить сумму первых n чисел.

следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} \overline{\sigma_n} = 0$$

(то есть будем доказывать теорему для бесконечно малой последовательности). Распишем

$$\overline{\sigma_n} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} z_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} z_k + \sum_{k=N+1}^{n} z_k\right), \quad n > N.$$

Выберем N. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$|z_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} z_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} z_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} z_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Пример 7.1. Возьмем последовательность

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

Предела, очевидно, она не имеет. При усреднении, однако, последовательность $\to$ $1/2$. Поэтому теорема 7.2 в обратную сторону не верна.

Теорема Штольца

Теорема 7.3. *(Штольца) Пусть x_n и y_n удовлетворяют следующим условиям:*

1. $y_n \nearrow$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
3. *Верно, что*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a.$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Замечание 7.1. Сравним условие теоремы 7.3 Штольца с условием теоремы 7.2 Чезаро. В теореме 7.3 в качестве первой последовательности нужно взять

$$x_1 + \ldots + x_n,$$

а в качестве второй последовательности – просто n. Таким образом, теорема 7.3 Штольца обобщает теорему 7.2 Чезаро.

Доказательство. (Теорема 7.3 Штольца) Введем последовательность

$$z_n = x_n - a y_n.$$

Тогда

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} - x_n - a(y_{n+1} - y_n).$$

Пусть доказано, что из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} = 0, \tag{29}$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = 0. \tag{30}$$

Тогда утверждение теоремы доказано.

Итак, утверждение теоремы сведено к бесконечно малым (как и для теоремы 7.2 Чезаро). Покажем, что (29) $\Rightarrow$ (30). $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \iff |z_{n+1} - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}\left(y_{n+1} - y_n\right). \tag{31}$$

Обратим внимание, что в правой записи (31) с $|y_{n+1} - y_n|$ снят модуль.

Далее, $\forall\ n > N_1$ оценим

$$|z_n - z_{N_1+1}| \le \sum_{k=N_1+1}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) = \frac{\varepsilon}{2}\left(y_n - y_{N_1+1}\right).$$

Кроме того, $\exists\ N > N_1$ такое, что $\forall\ n > N$

$$\left|\frac{z_{N_1+1}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$\left|\frac{z_n}{y_n}\right| \le \frac{|z_{N_1+1}|}{y_n} + \frac{|z_n - z_{N_1+1}|}{y_n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Пример 7.2. Пусть

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad y_n = \ln n.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n$. Для этих двух последовательностей выполняются условия теоремы 7.3 Штольца, а значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1,$$

так как по теореме о зажатой последовательности

$$1=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}>\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}>\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\ \to\ 1.$$

Лекция 8. Открытые и замкнутые множества на прямой

Теорема Штольца (следствие)

Напомним, в конце прошлой лекции мы доказали следующую теорему.

Теорема 7.3. *(Штольца) Пусть x_n и y_n удовлетворяют следующим условиям:*

1. $y_n \nearrow$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;
3. *Верно, что*
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a.$$

Тогда
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

В качестве следствия из теоремы 7.3 Штольца мы вывели следующее (пример 7.2):
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} = 1.$$
В определенном смысле это означает, что
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n, \quad n \geq N, \tag{32}$$
где N – некоторый номер.

Чтобы придать выражению 32 строгий математический смысл, рассмотрим последовательность
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$
Вычислим ее первую разность:
$$x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$
то есть $x_n \searrow$.

Рассмотрим последовательность[13]
$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n,$$

[13]Здесь мы воспользуемся приемом, которым уже пользовались при рассмотрении числа e.

связанную с x_n, очевидно, следующим образом:

$$y_n + \frac{1}{n} = x_n.$$

Очевидно, $y_n < x_n$. Далее, оценим первую разность:

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Таким образом, $y_n \nearrow$.

Выберем $\forall\ k, m \in \mathbb{N}$ и покажем, что

$$y_k < x_m. \tag{33}$$

Возможны три случая.

1. Если $k = m$, то соотношение (33) доказано.
2. Если $k < m$, то
$$y_k < y_m < x_m.$$
3. Наконец, если $k > m$, то
$$y_k < x_k < x_m.$$

Отсюда получаем, что выполнена оценка

$$y_n \le y_n < x_n \le x_1,$$

а значит,

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \gamma,$$
$$y_n < \gamma < x_n \ \forall\ n.$$

Отсюда

$$0 < x_n - \gamma < x_n - y_n,$$

что эквивалентно двойному неравенству

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \frac{1}{n}.$$

Получаем, что $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, $\forall\ n > N(\varepsilon)$

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma < \varepsilon.$$

На этом мы завершаем разговор о теории последовательностей (к которым, конечно, мы будем возвращаться и далее).

Открытые и замкнутые множества

Прежде, чем перейти к изучению предела функции и непрерывности, поговорим немного о топологии действительной прямой $\mathbb{R}$.

Напомним, ε-окрестностью точки a называется множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x: \ |x-a| < \varepsilon\}.$$

В некоторых случаях (когда нам неважно значение ε) мы будем обозначать для краткости множество выше как $U(a)$.

Проколотой ε-окрестностью точки a называется множество

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\},$$

или, в других терминах,

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a) = \{x: \ 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Аналогично, если нам не важно значение ε,

$$\overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}.$$

Рассмотрим теперь множество $A \subset \mathbb{R}$.

Определение 8.1. Точка a называется *внутренней точкой* A, если

$$\exists\, U(a): \ U(a) \subset A.$$

Определение 8.2. Точка a называется *внешней точкой* A, если

$$\exists\, U(a): \ U(a) \subset \mathbb{R} \setminus A.$$

Определение 8.3. a называется *граничной точкой* A, если $\forall\, U(a)$

$$U(a) \cap A \neq \emptyset \wedge U(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset.$$

Определение 8.4. $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки являются внутренними.

Определение 8.5. $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus A$ – открытое.

Пример 8.1. $\mathbb{R}$ и $\emptyset$ являются открытыми и замкнутыми множествами одновременно. Это единственные примеры таких множеств на прямой.

Интервал (a, b) – открытое множество, а отрезок $[a, b]$ – замкнутое.

Обсудим некоторые свойства открытых и замкнутых множеств.

Теорема 8.1. *1. Пусть G_λ – открытые. Тогда $\cup_{\lambda\in\Lambda}$ – открытое.*

2. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^n$ – открытые. Тогда $\cap_{k=1}^n G_k$ – открытое.

Доказательство. 1. Пусть

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda, \quad a \in G.$$

Тогда $\exists\ \lambda_0 \in \Lambda$ такое, что

$$a \in G_{\lambda_0}.$$

По условию, G_{λ_0} открыто, а значит,

$$\exists\ U(a) \subset G_{\lambda_0}.$$

Отсюда получаем, что

$$U(a) \subset G.$$

2. Пусть

$$G = \bigcap_{k=1}^{n} U_k(a), \quad a \in G.$$

Тогда $\forall\ k$, $1 \le k \le n$

$$a \in G_k.$$

Тогда $\forall\ k$

$$\exists\ U_k(a) \subset G_k.$$

Положим

$$U(a) = \bigcap_{k=1}^{n} U_k(a)$$

– это окрестность с

$$\varepsilon = \max\left\{\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n\right\}.$$

Тогда

$$U(a) \subset G.$$

□

Следствие. 1. Пусть E_λ, $\lambda \in \Lambda$ – замкнутые. Тогда $\cap_{k=1}^{n} E_k$ – тоже замкнутое.

2. Пусть E_k, $1 \le k \le n$ – замкнутые. Тогда $\cup_{k=1}^{n} E_k$ тоже является замкнутым.

Доказательство. Воспользуемся определением 8.5.

1. Достаточно применить теорему 8.1 к представлению

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\mathbb{R} \setminus E_\lambda\right).$$

2. Аналогично, достаточно воспользоваться представлением

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \left(\mathbb{R} \setminus E_k\right).$$

$\square$

Теорема 8.2. *Пусть $G \subset \mathbb{R}$ – открытое множество, $G \neq \emptyset$, $G \neq \mathbb{R}$. Тогда G – не более чем счетное объединение непересекающихся интервалов или открытых лучей.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$. Введем

$$A = \{a \in \mathbb{R}: \ a < x_0 \text{ и } a \in G\}\,, \quad B = \{b \in \mathbb{R}: \ b > x_0 \text{ и } b \in G\}\,.$$

A и B не пусты, так как

$$\exists\, U_\varepsilon(x_0): \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset G.$$

Пусть A является неограниченным снизу. Тогда положим

$$\alpha = -\infty.$$

Если же A ограничено снизу, то

$$\alpha = \inf A.$$

Аналогично, если B является неограниченным сверху, то

$$\beta = +\infty,$$

а если B ограничено сверху, то

$$\beta = \sup B.$$

Получаем, что интервал

$$(\alpha, \beta) \subset G.$$

Пусть $\alpha > -\infty$. Тогда $\alpha \notin G$. Действительно, если $\alpha \in G$, то

$$\exists\, U(\alpha) \subset G,$$

то есть

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset G,$$

и значит,

$$\alpha \neq \inf A.$$

Аналогично для β. Проходясь по каждому $x_0 \in G$, получим все интервалы вида (α, β). По построению, интервалы не пересекаются.

Покажем, что таких интервалов не более, чем счетно. Выберем внутри каждого интервала рациональную точку. Двум выбранным рациональным точкам не может соответствовать один и тот же интервал. Итак, каждому интервалу соответствует только одна выбранная рациональная точка. Множество всех выбранных точек $\subset \mathbb{Q}$ – счетному множеству. Таким образом, количество интервалов не более чем счетно.

$\square$

Определение 8.6. a – предельная точка множества A, если $\forall\, \overset{\circ}{U}(a)$

$$\overset{\circ}{U}(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Теорема 8.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) E замкнуто;

2) E содержит все граничные точки;

3) E содержит все предельные точки.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) По условию, E замкнуто, то есть $\mathbb{R} \setminus E$ открыто. Пусть a – граничная точка E. Тогда $a \notin \mathbb{R} \setminus E$, так как $\mathbb{R} \setminus E$ состоит только из точек, внешних к E. Отсюда получаем, что $a \in E$.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть E содержит все граничные точки. Возможны два случая:

a – внутренняя точка E. Тогда a является предельной и $a \in E$.

б) a – внешняя точка. Тогда a не предельная точка.

в) a – граничная точка. Если a – предельная, то $a \in E$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть E содержит все предельные точка. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus E$. Тогда a не является предельной точкой E, то есть $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ такая, что

$$\overset{\circ}{U}(a) \cap E = \emptyset.$$

Отсюда получаем, что

$$U(a) \cap E = \emptyset.$$

Значит, $\mathbb{R} \setminus E$ открыто, то есть E замкнуто.

□

Наконец, обсудим в качестве примера нетривиальное замкнутое множество. Напомним, замкнутым множеством, например, является $[a,b]$ – отрезок, так как

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty).$$

Пример 8.2. (Канторово множество) Рассмотрим следующую конструкцию. Разобьем отрезок $[0,1]$ на три равные части и выкинем интервал $(1/3, 2/3)$. Каждый из оставшихся отрезков $[0,1/3]$ и $[2/3,1]$ в свою очередь также разобьем на 3 части и выкинем интервал посередине (то есть $(1/9, 2/9)$ для $[0,1/3]$ и $(7/9, 8/9)$ для $[2/3,1]$) (рис. 8.1).

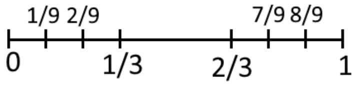


Рис. 8.1. Канторово множество (построение)

Продолжая описанную процедуру счетное количество раз, получаем множество, записываемое следующим образом:

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k} \left(\frac{k-1}{3^n}, \frac{k}{3^n} \right), \tag{34}$$

где k таковы, что их троичное разложение содержит только 0 или 2. Например,

$$2_3 = 2, \quad 8_3 = 22, \ldots$$

Множество (34) называется *канторовым множеством* и обладает следующими свойствами:

1. C – замкнутое множество;
2. Сумма длин выкинутых интервалов равна
$$\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}_{=1/3\cdot 2/3} + \underbrace{\frac{4}{27}}_{1/3(2/3)^2} + \ldots = 1.$$
3. Как видно из свойства 2, в результате построения C из отрезка $[0,1]$ выкинуто большинство точек. Однако, например, все концы интервалов $\in C$.

   Оказывается, что кроме концов интервалов, C содержит и другие точки:
$$\operatorname{card} C = \operatorname{card} 2^{\mathbb{N}}.$$
   Несложно убедиться, что все числа, троичное разложение которых состоит из 0 и 2. Множество всех последовательностей такого вида несчетно.

Лекция 9. Принцип Больцано. Принцип Кантора. Частичные пределы последовательностей. Предел функции

Принцип Больцано

Теорема 9.1. *(Принцип Больцано) Любое ограниченное бесконечное множество имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть E – ограниченное бесконечное множество. Тогда $\exists$ $[a, b]$ такой, что

$$E \subset [a, b].$$

Разобьем $[a, b]$ пополам и обозначим через Δ_1 ту половину, которая содержит бесконечно много точек E. Продолжим рассуждения аналогичным образом. На n шаге разобьем Δ_{n-1} пополам и обозначим через Δ_n ту половину, которая содержит бесконечно много точек E.

Повторяя рассуждения и далее, получим Δ_n – последовательность стягивающихся отрезков.

$$\exists!\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Для $\forall$ $U(c)$ $\exists$ n такое, что

$$\Delta_n \subset U(c).$$

По построению, Δ_n содержит бесконечно много точек E. Отсюда получаем, что $U(c)$ содержит бесконечно много точек E. Значит, $\overset{\circ}{U}$ содержит хотя бы одну точку. $\square$

Принцип Кантора

Говорят, что $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ *покрывает* E, если

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) \supset E.$$

Теорема 9.2. *(Принцип Кантора) Пусть* $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ *покрывает* $[a, b]$. *Тогда* $\exists$ *набор* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}_{k=1}^n$ *покрывает* $[a, b]$.

Доказательство. Предположим противное.

Разобьем $[a, b]$ напополам и обозначим через Δ_1 ту половину, которую нельзя покрыть конечной подсистемой $(a_{\lambda_k}, b_{\lambda_k})$. Продолжим рассуждения аналогичным образом. На n шаге разобьем Δ_{n-1} пополам и обозначим через Δ_n ту половину, которую нельзя покрыть конечной подсистемой $(a_{\lambda_k}, b_{\lambda_k})$.

Бесконечно продолжаем процесс. Получим, что

$$\exists!\ c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

$c \in [a, b]$, откуда следует, что $\exists\ \lambda_0$ такое, что

$$(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \ni c.$$

Отсюда получаем, что $\exists\ n$ такое, что

$$\Delta_n \subset (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}).$$

Получаем противоречие. ☐

Частичные пределы последовательностей

Теорема 9.3. *a – частичный предел последовательности $x_n \iff \forall\ U(a)$ содержит бесконечно много членов x_n.*

Доказательство. $\Rightarrow$ $\exists\ x_{n_k} \to a$, то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K$ такое, что $\forall\ k > K$

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ U_\varepsilon(a)$

$$x_{n_{K+1}}, x_{n_{K+2}}, \ldots \in U_\varepsilon(a).$$

$\Leftarrow$ Положим $\varepsilon = 1$. Тогда $U_1(a)$ содержит x_{n_1}.

Пусть $\varepsilon = 1/2$. Тогда $U_{1/2}(a)$ содержит x_{n_2}, $n_2 > n_1$.

Продолжим построение. На k шаге положим $\varepsilon = 1/k$. Тогда $U_{1/k}(a)$ содержит x_{n_k}, $n_k > n_{k-1}$.

Получим, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a,$$

так как

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}.$$

☐

Теорема 9.4. *Множество частичных пределов x_n замкнуто.*

Доказательство. Обозначим через E множество частичных пределов.

Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus E$. Тогда $\exists\ U(a)$, содержащая не более чем конечное число членов x_n.

$\forall\ b \in U(a)\ \exists\ U(b) \subset U(a)$. Отсюда $U(b)$ содержит не более чем конечное число членов x_n. Получаем, что $b \in \mathbb{R} \setminus E$.

Итак, $\forall\ a \in \mathbb{R} \setminus E\ \exists\ U(a) \subset \mathbb{R} \setminus E$, откуда получаем, что $\mathbb{R} \setminus E$ открыто. ☐

Утверждение 9.1. *Пусть x_n ограничена. Тогда существуют наименьший и наибольший частичные пределы:*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf E = \min E, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup E = \max E.$$

Замечание 9.1. Будем считать, что если x_n является неограниченной сверху, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

а если x_n является неограниченной снизу, то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Теорема 9.5. *x_n сходится* $\iff$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как x_n сходится, $E = \{a\}$, откуда получаем, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a.$$

$\Leftarrow$ Пусть

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a.$$

Рассмотрим $\forall\, U(a)$. Если левее $U(a)$ лежит бесконечно много членов последовательности, то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n < a.$$

Значит, левее $U(a)$ лежит не более чем конечное число x_n.

Аналогично, если правее $U(a)$ лежит бесконечно много x_n, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n > a.$$

Значит, правее $U(a)$ лежит не более чем конечное число x_n.

Итого получаем, что вне $U(a)$ лежит не более чем конечное число x_n. Отсюда

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\square$

Предел функции

Пусть a – предельная точка E. В определениях ниже будем считать, что $f(x)$ определена на E.

Определение 9.1. (В смысле Коши) Число A называется *пределом $f(x)$ в точке a*:

$$A = \lim_{E\ni x\to a} f(x),$$

если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in E$ таких, что

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполняется неравенство (рис. 9.1)

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

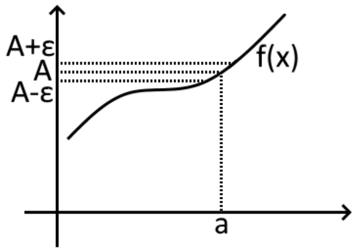


Рис. 9.1. $|f(x) - A| < \varepsilon$

Существует альтернативное определение предела функции в точке.

Определение 9.2. (В смысле Гейне) Число A называется *пределом* $f(x)$ *в точке* a:

$$A = \lim_{E \ni x \to a} f(x),$$

если $\forall\ x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \in E$

$$f(x_n)\ \to\ A.$$

Теорема 9.6. *Определение 9.1* $\iff$ *определение 9.2.*

Доказательство. $\Rightarrow$ По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E$,

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тогда для $\forall\ x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \in E\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$0 < |x_n - a| < \delta.$$

Отсюда получаем, что $\forall\ n > N$

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Предположим, что утверждение неверно, из определения 9.2 не следует определение 9.1. Иными словами, $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\ \delta > 0\ \exists\ x \in E$,

$$0 < |x - a| < \delta,$$

но

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Пусть $\delta = 1$. Тогда $\exists\ x_1 \in E,\ x_1 \neq a$ такое, что

$$|x_1 - a| < 1,$$

но

$$|f(x_1) - A| \geq \varepsilon.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, на k шаге выберем $\delta = 1/k$. Для него $\exists\ x_k \in E$, $x_k \neq a$ такое, что

$$|x_k - a| < \frac{1}{k},$$

но

$$|f(x_k) - A| \geq \varepsilon.$$

Таким образом, можно построить $x_k \in E$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$, но

$$f(x_k) \not\to A.$$

Получаем противоречие.

$\square$

Теорема 9.7. *Пусть* $\exists\ \mathring{U}(a)$ *такая, что*

$$f(x) = g(x)\ \forall\ x \in E \cap \mathring{U}(a).$$

Тогда $\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) \iff$

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} g(x) \text{ и } \lim_{E \ni x \to a} f(x) = \lim_{E \ni x \to a} g(x).$$

Доказательство. Пусть

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a)$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a) \cap \mathring{U}(a)$

$$|g(x) - A| < \varepsilon.$$

$\square$

Из теоремы 9.7 вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 9.8. *Пусть*

$$f(x) = g(x)\ \forall\ x \in E \setminus \{a\}.$$

Тогда

$$\lim_{E \ni x \to a} f(x) = \lim_{E \ni x \to a} g(x).$$

Теорема 9.9. *Если* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, *то он единственный.*

Доказательство. (От противного) Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x\to a} f(x) = B.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ x \in E$,

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

$\exists\ \delta_2$ такое, что $\forall\ x \in E$,

$$0 < |x - a| < \delta_2$$

выполняется

$$|f(x) - B| < \varepsilon.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{3} > 0, \quad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Тогда $\forall\ x \in E$,

$$0 < |x - a| < \delta$$

верна следующая оценка:

$$|A - B| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|A - B|.$$

Получаем противоречие. $\square$

Лекция 10. Свойства пределов функций. Критерий Коши. Непрерывность функции в точке

Свойства пределов функций

Теорема 10.1. *Пусть*

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x).$$

Тогда $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $f(x)$ *ограничена на* $\overset{\circ}{U}(a) \cap E$ *(*$f(x)$ *локально ограничена в точке* $x = a$, $f(x) = O(1)$, $E \ni x \to a$*).*

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда (по определению предела) $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x) - A| < 1 \iff A - 1 < f(x) < A + 1.$$

□

Теорема 10.2. *Пусть*

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A > 0.$$

∂ Тогда $\exists\ \eta > 0$, $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$ *такие, что* $\forall\ x \in A \cap \overset{\circ}{U}(a)$

$$f(x) > \eta.$$

Доказательство. Положим

$$\eta = \frac{A}{2}.$$

Тогда для $\varepsilon = \eta\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Откуда получаем, что

$$f(x) > A - \varepsilon = A - \eta = A - \frac{A}{2} = \eta.$$

□

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 10.1. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой*:

$$f(x) = o(1), \quad E \ni x \to a,$$

если

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = 0,$$

то есть $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Определение 10.2. $f(x)$ называется *бесконечно большой*, если $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$
$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Утверждение 10.1. *$f(x)$ является бесконечно большой, $E \ni x \to a \iff 1/f(x)$ является бесконечно малой, $E \ni x \to a$.*

Теорема 10.3. *1. $\forall\ \lambda, \eta \in \mathbb{R}$*
$$\lambda o(1) + \eta o(1) = o(1), \quad E \ni x \to a;$$

2. $o(1)O(1) = o(1)$, $E \ni x \to a$;

3. $o(1)o(1) = o(1)$, $E \ni x \to a$.

Доказательство. 1. Пусть
$$f(x) = o(1), \quad g(x) = o(1), \quad E \ni x \to a.$$

Тогда $\forall\ x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in E$
$$g(x_n) = o(1), \quad f(x_n) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Отсюда по соответствующей теореме для последовательностей
$$\lambda f(x_n) + \mu g(x_n) = o(1), \quad n \to \infty.$$

В силу произвольности x_n получаем, что
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = o(1), \quad E \ni x \to a.$$

2. Пусть
$$f(x) = o(1), \quad g(x) = O(1), \quad E \ni x \to a.$$

Тогда $\forall\ x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in E$
$$f(x_n) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Из того, что
$$g(x) = O(1), \quad E \ni x \to a,$$
получаем, что $\exists\ \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ такая, что $g(x)$ ограничена на $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$. Но для $\delta > 0$ $\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$
$$|x_n - a| < \delta.$$

Отсюда $g(x_n)$ ограничена $\forall\ n > N$, а значит,
$$g(x_n) = O(1).$$

Получаем, что
$$f(x_n)g(x_n) = o(1)O(1) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Отсюда
$$f(x)g(x) = o(1), \quad E \ni x \to a.$$

3. Является следствием пункта 2.

□

Теорема 10.4. $\exists \lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = A + o(1), \quad E \ni x \to a.$$

Теорема 10.5. *Пусть*

$$\exists \lim_{E\ni x\to a} f(x) = A \text{ и } \exists \lim_{E\ni x\to a} g(x) = B.$$

Тогда

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\exists \lim_{E\ni x\to a} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda A + \mu B;$$
2. *Существует*
$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)g(x) = AB;$$
3. *Если $B \neq 0$, то*
$$\exists \lim_{E\ni x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением из теоремы 10.4:

$$f(x) = A + o(1), \quad g(x) = B + o(1), \quad E \ni x \to a.$$

1. Распишем
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda\left(F + o(1)\right) + \mu\left(B + o(1)\right) =$$
$$= \lambda A + \mu B + (\lambda o(1) + \mu o(1)) = \lambda A + \mu B + o(1).$$
2. Аналогичным образом покажем
$$f(x)g(x) = (A + o(1))\,(B + o(1)) =$$
$$= AB + (Ao(1)) + (Bo(1)) = AB + o(1).$$
3. Из того, что $B \neq 0$, следует, что $\exists\ \eta > 0$, $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$ такие, что $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}(a)$
$$|g(x)| > \eta,$$
эквивалентно тому, что
$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|\eta|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{g(x)} = O(1), \quad E \ni x \to a.$$
Тогда
$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B(A + o(1)) - A(B + o(1))}{Bg(x)} = \frac{1}{B}\frac{1}{g(x)}\,(Bo(1) - Ao(1)) =$$
$$= O(1)o(1) = o(1).$$

□

Перейдем к свойствам, связанным с неравенствами.

Теорема 10.6. *Пусть* $\exists \lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$. *Тогда* $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $\forall\ x \in E\cap \overset{\circ}{U}(a)$

$$f(x) > 0.$$

Теорема 10.7. *Пусть* $\exists \lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A > B$. *Тогда* $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $\forall\ x \in E\cap \overset{\circ}{U}(a)$

$$f(x) > B.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 10.6 к функции

$$g(x) = f(x) - B.$$

□

Теорема 10.8. *Пусть* $\exists \lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$ *и* $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $\forall\ x \in E\cap \overset{\circ}{U}(a)$

$$f(x) \geq B.$$

Тогда

$$A \geq B.$$

Доказательство. По условию, $\forall\ x_n \to a$, $x_n \neq 0$ и $x_n \in E$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Пусть

$$\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_\delta(a).$$

$\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \delta.$$

Тогда $\forall\ n > N$

$$f(x_n) \geq B.$$

Тогда

$$A \geq B.$$

□

Теорема о зажатой функции

Докажем теорему, аналогичную теореме о зажатой последовательности.

Теорема 10.9. *(О зажатой функции) Пусть* $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $\forall\ x \in E \cap \overset{\circ}{U}(a)$

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Пусть, кроме того, $\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} g(x)$, $\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} h(x)$ *и*

$$\lim_{E \ni x \to a} g(x) = \lim_{E \ni x \to a} h(x).$$

Тогда

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = \lim_{E \ni x \to a} g(x) = \lim_{E \ni x \to a} h(x).$$

Доказательство. По условию, $\forall\ x_n \to a$, $x_n \ne a$ и $x_n \in E$

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} h(x_n) = A.$$

Пусть

$$\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_\delta(a).$$

$\exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$|x_n - a| < \delta.$$

Для $\forall\ n > N$

$$g(x_n) \le f(x_n) \le h(x_n).$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A,$$

откуда получаем (в силу произвольности x_n), что

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A.$$

□

Критерий Коши

Теорема 10.10. *(Критерий Коши)* $\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall$ $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ *такое, что* $\forall\ x', x'' \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x' \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$A = \lim_{E \ni x \to a} f(x).$$

Аналогично, для тех же ε и δ верно, что $\forall\, x'' \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x', x'' \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Возьмем $\forall\, x_n \to a$, $x_n \neq a$ и $x_n \in E$. Для $\delta > 0$ из условия $\exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$

$$|x_n - a| < \delta,$$

откуда $\forall\, n, m > N$

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши для последовательностей получаем, что

$$\exists \lim_{E \ni x \to a} f(x) = A,$$

где A – некоторое (неизвестное) значение.

Покажем, что A не зависит от выбора x_n. Пусть

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(x'_n) = B \neq A.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_1,\, x'_1,\, x_2,\, x'_2, \ldots$$

Обозначим эту последовательность через y_n. Очевидно, $y_n \to a$. По доказанному выше,

$$\exists \lim_{n \to \infty} f(y_n),$$

но такой предел не может существовать. Получаем противоречие.

$\square$

Теорема Вейерштрасса

Определение 10.3. Число A называется *правым пределом функции $f(x)$ в точке a*:

$$\lim_{E \ni x \to a+0} f(x) = A,$$

если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in E$ и $a < x < a + \delta$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Правый предел часто обозначают следующим образом:

$$A = f(a + 0).$$

Определение 10.4. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ *в точке* a:

$$\lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = A,$$

если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in E$ и $a - \delta < x < a$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$A = f(a-0).$$

Замечание 10.1. Правый и левый предел могут не совпадать в случае, когда функция не является непрерывной (рис. 10.1).

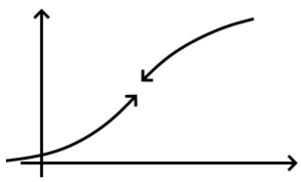


Рис. 10.1. Несовпадение односторонних пределов у разрывной функции

Напомним, что $f(x)$ возрастает на E, если $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) < f(x_2),$$

и не убывает на E, если $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

Теорема 10.11. *(Вейерштрасса) Пусть* $f(x)$ *не убывает на* $(a-\delta, a) \cap E$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и*

$$f(x) = O(1), \quad E \ni x \to a - 0$$

($\exists\ \eta > 0$ *такое, что* $f(x)$ *ограничена на* $E \cap (a - \eta, a)$*).*

Тогда

$$\exists \lim_{E \ni x \to a-0} f(x).$$

Доказательство. В силу ограниченности $f(x)$,

$$\exists \sup_{E \cap (a-\eta, a)} f(x) = A.$$

Выберем $\forall\ \varepsilon > 0$. Число $A-\varepsilon$ не является верхней гранью, то есть $\exists\ x_\varepsilon \in E \cap (a-\eta, a)$ такое, что

$$A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le A.$$

Положим

$$\delta = a - x_\varepsilon > 0.$$

Тогда $\forall\ x \in E$, $a - \delta < x < a$ имеем

$$A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < f(x) \le A.$$

Это и означает, что A является искомым пределом. □

Непрерывность функции в точке

Определение 10.5. Говорят, что $f(x)$ *непрерывна в точке a по множеству E*:

$$f(x) \in C(a) \text{ по множеству } E,$$

если

1. $\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)$;
2. $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Запишем определение 10.5 по-другому.

Определение 10.5. $f(x) \in C(a)$ по множеству E, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in E$,

$$|x - a| < \delta,$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Отметим, что $f(x) \in C(a) \iff$

$$f(x) = f(a) + o(1), \quad E \ni x \to a.$$

Теорема 10.12. *Пусть $f(x) \in C(a)$. Тогда*

$$f(x) = O(1), \quad E \ni x \to a.$$

Теорема 10.13. *Пусть $f(x) \in C(a)$ и $f(a) > 0$. Тогда $\exists\ \eta > 0$, $\exists\ U(a)$ такие, что $\forall\ x \in E \cap U(A)$*

$$f(x) > \eta.$$

Теорема 10.14. *Пусть $f(x), g(x) \in C(a)$ по множеству E. Тогда*

1. *$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*
$$\lambda f + \mu g \in C(a);$$
2. *$f(x)g(x) \in C(a)$;*
2. *Если $g(a) \neq 0$, то*
$$\frac{f(x)}{g(x)} \in C(a).$$

Лекция 11. Точки разрыва. Непрерывность на множестве. Теоремы Вейерштрасса. Теоремы Коши. Равномерная непрерывность

Предел композиции двух непрерывных функций

Теорема 11.1. *Пусть*

$$\exists \lim_{x\to b} f(x) = c \text{ и } \exists \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Кроме того, $\exists \overset{\circ}{U}(a)$ *такая, что* $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$

$$g(x) \neq b.$$

Тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f\circ g(x) = c.$$

Доказательство. По условию,

$$\lim_{x\to b} f(x) = c,$$

то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(b)$

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to a} g(x) = b,$$

то есть для $\delta > 0\ \exists\, \eta > 0$ такое, что $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a)$

$$|g(x) - b| < \delta.$$

Пусть

$$\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_{\eta_1}(a).$$

Тогда положим

$$\eta = \{\eta, \eta_1\}.$$

$\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_{\eta_2}(a)$ имеем

$$g(x) \in \overset{\circ}{U}_\delta(a),$$

откуда получаем, что

$$|f(g(x)) - c| < \varepsilon.$$

□

Теорема 11.2. *Пусть* $f(x) \in C(b)$ *и*

$$\exists \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Тогда

$$\exists \lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f(b).$$

Доказательство. Требуется показать, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a)$

$$|f\left(g(x)\right) - f(b)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Если $g(x) \neq b$, то (35) выполняется в силу теоремы 11.1. Если же x таково, что $x \in \overset{\circ}{U}_\eta(a)$ и $g(x) = b$, то

$$|f(b) - f(b)| < \varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть $g \in C(a)$, $f \in C\left(g(a)\right)$. Тогда

$$f \circ g \in C(a).$$

Классификация точек разрыва функции

Рассмотрим теперь случаи, когда функция непрерывной не является. Принято следующее описание «плохих» точек (точек, в которых нарушается непрерывность).

Напомним, $f(a-0)$ ($f(a+0)$) – предел функции в точке a слева (справа), $f(a)$ – значение функции в точке a.

1. Пусть $\exists\ f(a-0)$, $\exists\ f(a+0)$ и

   $$f(a-0) = f(a+0) = f(a).$$

   Тогда

   $$f \in C(a).$$

   Действительно, по условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1$ такое, что $\forall\ x \in (a-\delta_1, a)$

   $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

   $\exists\ \delta_2$ такое, что $\forall\ x \in (a, a+\delta_2)$

   $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

   Положим

   $$\delta = \lim\left\{\delta_1, \delta_2\right\}.$$

   Тогда $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

   $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. Пусть
$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a).$$
Тогда a – точка *устранимого разрыва* (рис. 11.1, а).

3. Пусть $\exists\ f(a-0),\ f(a+0)$, но
$$f(a-0) \neq f(a+0).$$
Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке *a разрыв I рода (скачок)* (рис. 11.1, б).

4. Иначе a – точка *разрыва II рода* (рис. 11.1, в, г).

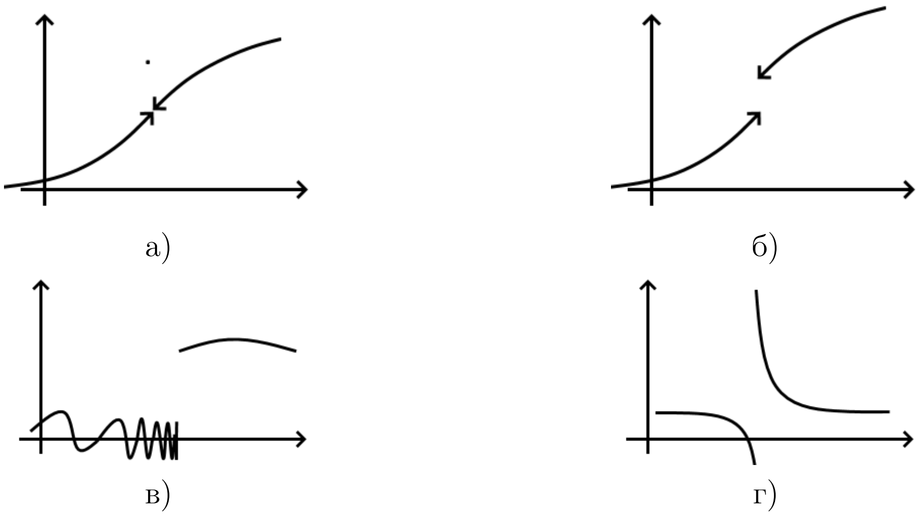


Рис. 11.1. Точки разрыва: а) устранимая, б) I рода, в-г) II рода

Теорема 11.3. *Пусть $f(x)$ не убывает на (a, b). Тогда множество точек разрыва не более чем счетно и все они являются разрывами I рода.*

Доказательство. Выберем $\forall\ x_0 \in (a, b)$. По теореме 10.11 Вейерштрасса,
$$\exists\ f(x_0-0), \quad \exists\ f(x_0+0)$$
и
$$f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x-0+0).$$
Возможны следующие ситуации.

1. Если
$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0),$$
то $f \in C(x_0)$.

2. Если
$$f(x_0-0) < f(x_0+0),$$
то x_0 – точка разрыва I рода.

Для $\forall\ x_1, x_2$ в силу монотонности функции

$$(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0)) \cap (f(x_2 - 0), f(x_2 + 0)) = \emptyset.$$

Таких интервалов не более чем счетно. $\square$

Непрерывные на множестве функции

Перейдем к непрерывным на множестве функциям. Напомним, все свойства функции делятся на локальные и глобальные. К локальным, например, относится

$$f(x) = O(1), \quad x \to a,$$

так как речь идет о некоторой окрестности точки a. Другим примером локального свойства является непрерывность функции в точке: $f(x) \in C(a)$.

Глобальным свойством, например, будет являться

$$|f(x)| \leq 2\ \forall\ x \in [1, 2].$$

Различие между глобальными и локальными свойствами не всегда четкое, так как глобальные свойства могут быть записаны не так явно, как выше, а получаться выполнением локальных свойств функции в каждой точке некоторого множества. Именно к таким свойствам относится непрерывность функции на множестве.

Определение 11.1. Говорят, что функция *непрерывна на множестве* E:

$$f(x) \in C(E),$$

если $f(x) \in C(x_0)\ \forall\ x_0 \in E$.

Утверждение 11.1. *Пусть* $f, g \in C(E)$. *Тогда*

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\lambda f + \mu g \in C(E);$$
2. $fg \in C(E)$;
3. *Если* $g \neq 0\ \forall\ x \in E$, *то*
$$\frac{f}{g} \in C(E).$$

Определение 11.2. Функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$:

$$f(x) \in C[a, b],$$

если

$$\forall\ x \in (a, b)\ f \in C(x),$$
$$\exists\ f(a + 0) = f(a) \text{ и } \exists\ f(b - 0) = f(b).$$

Отметим, что $C[a, b]$ является линейным пространством, сохраняет операцию произведения (и частного, если функция в знаменателе не обращается на $[a, b]$ в ноль). Сохраняется и свойство непрерывности для композиции функций.

Первая и вторая теоремы Вейерштрасса

Теорема 11.4. *(Первая теорема Вейерштрасса) Пусть* $f(x) \in C[a,b]$. *Тогда* $f(x)$ *ограничена на* $[a,b]$.

Доказательство. Пусть, например, $f(x)$ является неограниченной сверху, то есть

$$\sup_{[a,b]} f(x) = +\infty.$$

Число 1 не является верхней гранью, то есть $\exists\ x_1 \in [a,b]$ такое, что

$$f(x_1) > 1.$$

Число 2 не является верхней гранью, то есть $\exists\ x_2 \in [a,b]$ такое, что

$$f(x_2) > 2.$$

Продолжим рассуждения аналогичным образом. Число n не является верхней гранью, то есть $\exists\ x_n \in [a,b]$ такое, что

$$f(x_n) > n.$$

Итак, построили последовательность $x_n \in [a,b]$ со свойством

$$f(x_n) > n.$$

Так как x_n ограничена, $\exists\ x_{n_k} \to c$. Из того, что

$$a \le x_{n_k} \le b \ \forall\ k,$$

вытекает, что

$$a \le c \le b,$$

то есть $cin[a,b]$. Далее,

$$f(x_{n_k}) \ \to \ f(c),$$

так как $f \in C(c)$ и $x_{n_k} \to c$ по определению 9.2 Гейне. Следовательно, $f(x_{n_k})$ ограничена, но

$$f(x_{n_k}) > n_k \ge k.$$

Получаем противоречие. □

Теорема 11.5. *(Вторая теорема Вейерштрасса) Пусть* $f(x) \in [a,b]$. *Тогда* $\exists$ $x_{\max} \in [a,b]$ *такое, что*

$$f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Обозначим

$$M = \sup_{[a,b]} f(x).$$

Доказано (теорема 11.4 Вейерштрасса), что $M < +\infty$.

Пусть

$$f(x) < M \ \forall \ x \in [a, b].$$

Тогда

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \in C[a, b].$$

Заметим, что

$$\sup_{[a,b]} g(x) < +\infty.$$

Представим $\sup\limits_{[a,b]} g(x)$ в виде

$$\sup_{[a,b]} g(x) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

откуда

$$f(x) \leq M - \varepsilon.$$

Получаем противоречие, так как

$$M = \sup_{[a,b]} f(x).$$

□

Первая и вторая теоремы Коши

Теорема 11.6. *(Первая теорема Коши) Пусть $f \in C[a, b]$ и*

$$f(a)f(b) < 0.$$

Тогда $\exists$ c такое, что

$$f(c) = 0.$$

Доказательство. Разобьем $[a, b]$ пополам. Тогда

$$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \text{ или } f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b) < 0 \text{ или } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ – все доказано. Иначе обозначим через a_1 и b_1 концы той половины, где

$$f(a_1)f(b_1) < 0.$$

Продолжим рассуждения аналогичным образом. На n шаге разобьем $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ пополам. Если

$$f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=0,$$

останавливаемся. Иначе обозначим через a_n и b_n концы той половины, что

$$f(a_n)f(b_n)<0. \tag{36}$$

Имеем два случая:

1. Процесс остановится, то есть c найдена.

2. Иначе построим последовательность стягивающихся отрезков. Тогда

$$\exists\,!\; c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n], \quad c \in [a,b], \quad c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad f \in C(c).$$

   Перейдем к пределу в неравенстве (36):

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f^2(c) \geq 0.$$

   Отсюда получаем, что $f(c)=0$.

□

Сформулируем вторую теорему Коши как дополнение к первой теореме Коши (теорема 11.6).

Теорема 11.7. *(Вторая теорема Коши) Пусть* $f \in C[a,b]$. *Тогда* $\forall\, C \in [f(a), f(b)]$ $\exists\, c \in [a,b]$ *такое, что*

$$f(c)=C.$$

Доказательство. Пусть

$$g(x)=f(x)-C.$$

Тогда $g \in C[a,b]$ и $g(a)g(b)<0$. По первой теореме Коши (теорема 11.6) получаем, что $\exists\, c \in [a,b]$ такое, что

$$g(c)=0,$$

то есть

$$f(c)=C.$$

□

Равномерная непрерывность функции

Запишем еще раз определение непрерывности функции на множестве. $f \in C(E)$ $\iff$ $\forall\, x' \in E\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall x''$,

$$|x'' - x'| < \delta,$$

выполнено

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Определение 11.3. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве*[14] E:

$$f(x) \in \mathrm{UC}\,(E),$$

если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x', x'' \in E$ таких, что

$$|x'' - x'| < \delta,$$

выполнено

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Аналогично записывается определение для промежутка[15] $\langle a, b\rangle$.

Очевидно,

$$C(E) \supset \mathrm{UC}\,(E).$$

Обратное вложение неверно. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 \in C\,(\mathbb{R})\,, \quad \notin \mathrm{UC}\,(\mathbb{R})\,.$$

Это хорошо видно на графике функции (рис. 11.2). Чем выше мы берем интервал значений функции $< \varepsilon$, тем быстрее $\delta \to 0$.

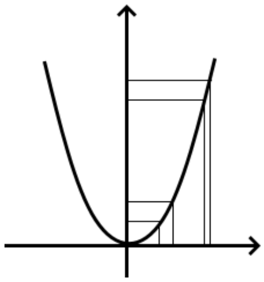


Рис. 11.2. $f(x) \in C(\mathbb{R})$, но $f(x) \notin \mathrm{UC}\,(\mathbb{R})$

Однако оказывается, что для отрезков эти два класса функций совпадают:

$$C[a, b] = \mathrm{UC}\,[a, b].$$

[14] Подчеркнем, что равномерная непрерывность может быть *только* на множестве.

[15] Знак $<$ означает либо ((конец не принадлежит множеству), либо [(конец принадлежит множеству).

Лекция 12. Непрерывность функций. Первый и второй замечательные пределы. Отношения эквивалентности бесконечно малых

Теорема Кантора

Теорема 12.1. *(Кантора) Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $f \in UC[a,b]$.*

Доказательство. Выберем $\forall\, x \in [a,b]$. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(x) > 0$ такое, что $\forall\, x' \in U_{\delta(x)}(x) \cap [a,b]$

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим

$$\left\{U_{\delta(x)/2}\right\}_{x \in [a,b]}$$

– покрытие $[a,b]$. По теореме Гейне – Бореля, $\exists\, \{x_k\}_{k=1}^n$ такой, что

$$\left\{U_{\delta(x_k)/2}(x_k)\right\}_{k=1}^n$$

– покрытие $[a,b]$.

Положим

$$\delta = \min_{1 \le k \le n} \frac{\delta(x_k)}{2}.$$

Рассмотрим $\forall\, x', x'' \in [a,b]$ такие, что

$$|x' - x''| < \delta.$$

Покажем, что тогда

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Так как $x' \in [a,b]$, $\exists\, k$ такое, что

$$x' \in U_{\delta(x_k)/2}(x_k).$$

Оценим

$$|x'' - x_k| \le |x'' - x'| + |x' - x_k| < \frac{\delta(x_k)}{2} + \frac{\delta(x_k)}{2} < \delta(x_k).$$

Следовательно,

$$|f(x') - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|f(x'') - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, показали, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x', x'' \in [a,b]$ таких, что

$$|x' - x''| < \delta,$$

выполнено

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 12.1 связана со следующим понятием.

Определение 12.1. Пусть $f(x)$ задана на $[a,b]$. *Модулем непрерывности* f называется величина

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x',x''\in[a,b]\\ |x'-x''|<\delta}} |f(x') - f(x'')|\,.$$

Отметим, что

$$\omega_f(\delta) \searrow 0.$$

Теоремы об обратной функции

Теорема 12.2. *Пусть $f(x) \in C[a,b]$ и строго возрастает на $[a,b]$. Тогда $\exists\ f^{-1}(y)$ на $[f(a), f(b)]$ и $f^{-1} \in C\,[f(a), f(b)]$.*

Доказательство. Во-первых, $f(x)$ инъективна, так как $f \nearrow$.
$\forall\ C \in (f(a), f(b))\ \exists\ c \in (a,b)$ такое, что

$$f(c) = C$$

(по теореме 11.7 Коши). Следовательно, $f(x)$ сюръективна. Отсюда получаем, что f биекция.

По теореме об обратной функции, $\exists\ f^{-1}(y)$.

Далее, окажем, что $\forall\ y_n \in [f(a), f(b)]$, $\forall\ y_n \in [f(a), f(b)]$,

$$y_n \to y_0,$$

выполнено

$$x_n = f^{-1}(y_n) \to x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Предположим противное:

$$x_n \not\to x_0.$$

Так как x_n ограничена,

$$\exists\ \overline{x} \in [a,b]$$

и

$$\overline{x} \neq x_0,$$

откуда

$$f(x_{n_k}) \to f(\overline{x}),$$

так как исходная функция $f(x)$ непрерывна. Значит,

$$y_{n_k} \to f(\overline{x}) \wedge y_{n_k} \to y_0.$$

Получаем противоречие. □

Теорема 12.3. *Пусть $f(x) \in C(a,b)$ и $f(x) \nearrow$ на (a,b).*
Тогда $\exists\ f^{-1}(y)$ на $(f(a+0), f(b-0))$ и $f^{-1} \in C\,(f(a+0), f(b-0))$.

Доказательство. $f(x)$ инъективна, так как $f \nearrow$.
$\forall \ \in (f(a+0), f(b-0))$ $\exists\ \delta > 0$ такое, что

$$C \in [f(a+\delta), f(b-\delta)]\,.$$

По теореме 11.7 Коши, $\exists\ c \in [a+\delta, b-\delta]$ такое, что

$$f(c) = C.$$

Отсюда f – сюръекция. Следовательно, $\exists\ f^{-1}(y)$ на $(f(a+0), f(b-0))$.

Докажем непрерывность обратной функции. $\forall\ y_0 \in (f(a+0), f(b-0))$ $\exists\ \delta > 0$ такое, что

$$y_0 \in [f(a+0), f(b-0)]\,.$$

На отрезке $[a+\delta, b-\delta]$ выполнены все условия теоремы 12.2. Значит,

$$f^{-1} \in C\,[f(a+\delta), f(b-\delta)]\,.$$

В частности,

$$f^{-1} \in C(y_0).$$

□

Первый замечательный предел

Теорема 12.4. *(Первый замечательный предел)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

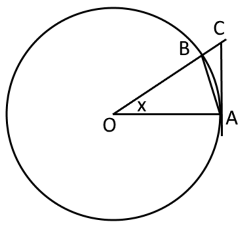


Рис. 12.1. Вспомогательные построения на единичной окружности

Доказательство. Рассмотрим малый положительный угол x на единичной окружности (рис. 12.1). Здесь CA – касательная,

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\sin x, \tag{37}$$

$$S_{\text{сект.}OAB} = \frac{1}{2}x, \tag{38}$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x. \tag{39}$$

Из (37 – 39) следует, что[16]

$$|\sin x| < |x| < |tgx|, \quad x \in U(0). \tag{40}$$

Разделив (40) на $\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Здесь мы опускаем знак модуля, так как при малых x все соотношения положительны. Наконец, перевернув соотношения, получим

$$\begin{array}{ccccc} \cos x < & & \frac{\sin x}{x} & & < 1 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

по теореме о зажатой функции. □

Непрерывность некоторых функций

Отметим еще раз важное неравенство, которое было использовано при доказательстве теоремы 12.4:

$$|\sin x| < |x|, \quad x \in \overset{\circ}{U}(0).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Воспользуемся этим фактом при доказательстве следующего утверждения.

Утверждение 12.1.

$$\sin x, \cos x \in C\left(\mathbb{R}\right).$$

Доказательство. □

Следствие.

$$\operatorname{tg} x \in C\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad \operatorname{ctg} x \in C\left(\pi k, \pi + \pi k\right).$$

Следствие.

$$\arcsin x \in C[-1, 1], \quad \operatorname{arctg} x \in C\left(\mathbb{R}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sin x \in C\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin x \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\operatorname{tg} x \in C\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \sin x \nearrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда утверждение следствия вытекает из теоремы об обратной функции. □

[16] Для отрицательных x показывается аналогично

Перейдем к обсуждению показательной функции[17]. напомним,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$

$$a^{r_1} < a^x < a^{r_2}, \quad r_1 < x < r_2,$$

где r_1 и $r_2 \in \mathbb{Q}$.

Утверждение 12.2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 1.$$

Доказательство. Пусть $a > 1$. Покажем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$

$$a^{1/n} < 1+\varepsilon \iff a < (1+\varepsilon)^n \Leftarrow a < 1 + n\varepsilon \Leftarrow n > \frac{a}{\varepsilon}.$$

Итак, в качестве N выберем

$$N(\varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon}.$$

При $a < 1$ воспользуемся представлением

$$a^{1/n} = \frac{1}{(a^{-1})^{1/n}}.$$

□

Теорема 12.5.

$$a^x \in C(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Докажем, что $a^x \in C(0)$. Пусть $a > 1$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$ такое, что $\forall$ $n > N_1$

$$a^{1/n} < 1+\varepsilon.$$

Для $\forall\ x$, $0 \le x \le 1/n$

$$a^x \le a^{1/n} < 1+\varepsilon.$$

Далее, $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$

$$a^{-1/n} > 1-\varepsilon.$$

Для $\forall\ x$, $-1/n \le x \le 0$

$$a^x > 1-\varepsilon.$$

Положим

$$N = \max\{N_1, N_2\}, \quad \delta = 1/N.$$

Тогда для $\forall\ x \in U_\delta(0)$

$$1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon.$$

Теперь, если $a < 1$, то

$$a^x = \frac{1}{(a^{-1})^{-x}}.$$

[17]На построении показательной функции мы останавливаться не будем.

Покажем, наконец, что $a^x \in C(x_0)$. Представим a^x в виде

$$a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}.$$

Здесь $a^{x_0} = \mathrm{const}$, а

$$a^{x-x_0} \in C(x_0), \text{ т.к. } a^t \in C(0).$$

□

Следствие.

$$\ln x \in C(0, +\infty).$$

Доказательство. Заметим, что

$$e^x \in C(-\infty, +\infty) \text{ и } \nearrow.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы об обратной функции, а значит, $\ln x$ является монотонной непрерывной на интервале функцией. □

Следствие.

$$x^\alpha \in C(0, \infty).$$

Доказательство. Следует из представления

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

□

Наконец, можем сделать следующий вывод.

Утверждение 12.3. *Все элементарные*[18] *являются непрерывными на всей области определения.*

Второй замечательный предел

Перейдем к обсуждению второго замечательного предела для функций. Напомним, ранее мы уже рассматривали аналогичный предел для последовательностей.

Теорема 12.6. *(Второй замечательный предел)*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Доказательство. Запишем следующую оценку:

$$\left(1 + \frac{1}{[x^{-1}+1]}\right)^{x^{-1}} \le (1+x)^{1/x} = \left(1 + \frac{1}{x^{-1}}\right)^{x^{-1}} \le \left(1 + \frac{1}{[x^{-1}]}\right)^{[x^{-1}]+1}.$$

Пусть

$$x_n \to 0, \quad x_n \ne 0.$$

[18] Функции, которые получаются из перечисленных выше применением арифметических операций и операции композиции

Тогда $[x_n^{-1}]$ образуют подпоследовательность чисел n. Таким образом,

$$\begin{array}{ccccc} \left(1+\frac{1}{[x^{-1}+1]}\right)^{x^{-1}} & \le & (1+x)^{1/x} & \le & \left(1+\frac{1}{[x^{-1}]}\right)^{[x^{-1}]+1} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & e & & \end{array}$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Доказательство. Следует из того, что

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{1/x}.$$

□

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доказательство. Пусть

$$x=\ln(1+t),\quad t\to 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

□

Следствие.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Доказательство. Распишем предел как

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

□

Эквивалентность функций, функции одного порядка

Определение 12.2. Пусть $f(x)=o(1)$ и $g(x)=o(1)$, $x\to a$. Тогда говорят, что f *эквивалентно* g:

$$f\sim g,\quad x\to a,$$

если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Утверждение 12.4. *«$\sim$» является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Проверим выполнение условий:

1. $f \sim f$:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)} = 1;$$

2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$:
$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1, \text{ т.к. } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1;$$

3. $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f \sim h$:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

$\square$

Итак, «$\sim$» – отношение эквивалентности, а значит, все бесконечно малые функции разбиваются на классы эквивалентности.

Рассмотрим также более слабое отношение порядка.

Определение 12.3. Пусть $f(x) = o(1)$, $g(x) = o(1)$, $x \to a$. Тогда f *одного порядка с* g, $x \to a$:
$$f \asymp g, \quad x \to a,$$
если $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$ такая и $\exists\ C_1, C_2 > 0$ такие, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}(a)$
$$C_1 g \leq f \leq C_2 g.$$

Утверждение 12.5. *«$\asymp$» – отношение эквивалентности.*

Доказательство. 1. $f \asymp f$: положим $C_1, C_2 = 1$;

2. $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$: положим
$$C_1^1 = \frac{1}{C_2}, \quad C_2^1 = \frac{1}{C_1}.$$
Тогда
$$\frac{1}{C_2}f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{C_1}f(x);$$

3. $f \asymp g$, $g \asymp h \Rightarrow f \asymp h$. Действительно, по условию,
$$C_1 g \leq f \leq C_2 g, \quad C_3 g \leq h \leq C_4 h,$$
откуда
$$C_1 C_3 h \leq f \leq C_2 C_4 h.$$

$\square$

Лекция 13. Порядок малости функций. Дифференциал и производная функции в точке

Порядок малости функций

Напомним определения, введенные нами в конце прошлой лекции.

Определение. Пусть $f(x) = o(1)$, $g(x) = o(1)$, $x \to a$. Тогда f *эквивалентно* g, $x \to a$:

$$f \sim g, \quad x \to a,$$

если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

и f *одного порядка с* g, $x \to a$:

$$f \asymp g, \quad x \to a,$$

если $\exists\ \mathring{U}(a)$ такая и $\exists\ C_1, C_2 > 0$ такие, что $\forall\ x \in \mathring{U}(a)$

$$C_1 g \leq f \leq C_2 g.$$

Оба этих отношения, напомним, являются отношениями эквивалентности.

Утверждение 13.1. *$f \sim g$, $x \to a \Rightarrow f \asymp g$, $x \to a$.*

Доказательство. По условию, $f \sim g$, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

откуда получаем, что $\exists\ \mathring{U}_\delta(a)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}_\delta(a)$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2},$$

то есть

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x).$$

□

Перейдем к конкретным примерам. Напомним, ранее рассматривали первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{41}$$

Отсюда следуют и пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$$

Подставим в (41) $\arcsin t$ вместо x. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\arcsin t}=1.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg} t}=1.$$

На основании записанного выше (и второго замечательного предела) выпишем таблицу эквивалентности функций:

$$\begin{gathered}
\sin x\sim x,\quad x\to 0,\\
\operatorname{tg} x\sim x,\quad x\to 0,\\
1-\cos x\sim x,\quad \frac{x^2}{2}\to 0,\\
\arcsin x\sim x,\quad x\to 0,\\
\operatorname{arctg} x\sim x,\quad x\to 0,\\
\ln(1+x)x\sim x,\quad x\to 0,\\
e^x-1\sim x,\quad x\to 0,\\
(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x,\quad x\to 0,
\end{gathered}\tag{42}$$

Определение 13.1. Пусть $f(x)=o(1)$, $g(x)=o(1)$, $x\to a$. Тогда

$$f(x)=o\left(g(x)\right),\quad x\to a,$$

или, другими словами, f *стремится к* 0 *быстрее, чем* g *(f является бесконечно малой более высокого порядка, чем g)*, если

$$f(x)=g(x)\cdot o(1).$$

Определение 13.2. (Отношение нестрогого порядка) Пусть $f(x)=o(1)$, $g(x)=o(1)$, $x\to a$. Тогда

$$f(x)=O\left(g(x)\right),\quad x\to a,$$

или, другими словами, f *стремится к* 0 *не медленнее, чем* g *(имеет порядок малости не меньше, чем g*, если

$$f(x)=g(x)\cdot O(1).$$

Введенные выше определения называют *o-символикой.*

Утверждение 13.2. *Пусть $g(x)=o(1)$, $x\to a$. Тогда*

1. $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\lambda o(g(x))+\mu o(g(x))=o(g(x));$$

2. $o(g(x))O(1) = o(g(x))$*;*

3. $o(o(g(x)) = o(g(x))$*.*

Доказательство. 2. Распишем

$$o(g(x))O(1) = g(x)o(1)O(1) = g(x)o(1) = o(g(x)).$$

3. Наконец, распишем

$$o(o(g(x))) = o(g(x)o(1)) = g(x)o(o(1)) = g(x)o(1) = o(g(x)).$$

□

Утверждение 13.3. *Пусть* $g(x) = o(1)$*,* $x \to a$*. Тогда*

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda O(g(x)) + \mu O(g(x)) = o(g(x));$$

2. $O(g(x))O(1) = O(g(x))$*;*

3. Справедливы равенства

$$O(O(g(x))) = O(g(x)),$$
$$O(o(g(x))) = o(g(x)),$$
$$o(O(g(x))) = o(g(x)).$$

Утверждение 13.4. *Пусть* $f(x) \sim g(x)$*,* $x \to a$*. Тогда*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Доказательство. Так как $f(x) \sim g(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1),$$

то есть

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to a.$$

□

Запишем уточненную таблицу эквивалентности функций, опираясь на утверждение 13.4:

$$\sin x = x + o(x),$$
$$\operatorname{tg} x = x + o(x),$$
$$1 - \cos x = x + o(x),$$
$$\arcsin x = x + o(x),$$
$$\operatorname{arctg} x = x + o(x),$$
$$\ln(1 + x)x = x + o(x),$$
$$e^x - 1 = x + o(x),$$
$$(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x).$$

Производная и дифференциал функции в точке

Рассмотрим следующий пример. Пусть материальная точка движется по закону

$$y = f(x),$$

где x – время.

Вычислим среднюю скорость материальной точки на отрезке времени $[x_0, x]$:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если отрезок времени достаточно мал, средняя скорость примерно равна мгновенной скорости в точке x_0:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx v_{\text{мгн.}}(x_0), \ \textit{если } x - x_0 \approx 0.$$

Определение 13.3. Пусть

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{43}$$

Тогда эта величина называется *производной функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается $f'(x_0)$.

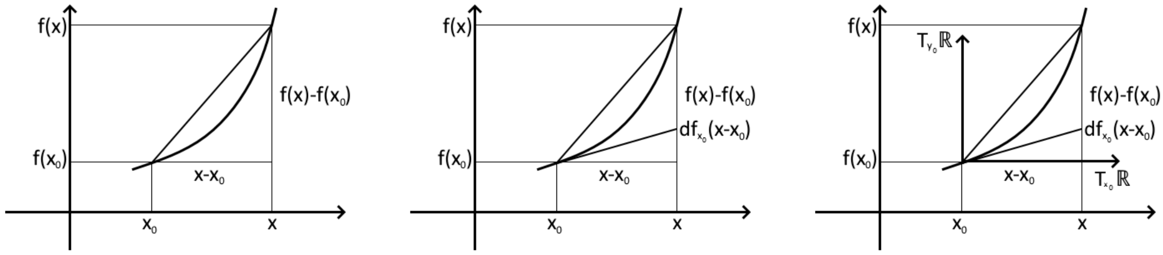


Рис. 13.1. а) $f'(x_0)$, б) $df_{x_0}(x - x_0)$, в) касательное пространство $T\mathbb{R}$ в точке (x_0, y_0)

Заметим, что соотношение под знаком предела (43) – величина тангенса наклона прямой, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$ (рис. 13.1, а). При $x \to x_0$ секущая прекращается в касательную. Таким образом, $f'(x_0)$ – тангенс угла наклона касательной к $f(x)$ в точке x_0.

Определение 13.4. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x_0*, обозначение: $f(x) \in D(x_0)$, если приращение функции допускает следующее представление[19]:

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Заметим, что следующее утверждение уникально для функций 1 переменной.

[19] То есть допускает в качестве главного слагаемого разложения линейное.

Утверждение 13.5. $f \in D(x_0) \iff \exists\ f'(x_0)$.

Доказательство. По определению дифференцируемости,

$$f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)+o(x-x_0),\ \ x \to x_0 \iff \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A+o(1),\ \ x \to x_0 \iff$$

$$\iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A = f'(x_0).$$

□

Определение 13.5. Пусть $f \in D(x_0)$. Тогда *дифференциалом* $f(x)$ *в точке* x_0 называется

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0)h.$$

Вернемся к рис. 13.1, а). Здесь $df_{x_0}(x-x_0)$ – приращение касательной к $f(x)$ в точке x_0 (рис. 13.1, б).

Часто удобно рассматривать дифференциал в другой системе координат[20] с началом координат в точке $(x_0, f(x_0))$ (рис. 13.1, в).

Итак,

$$df_{x_0} :\ T_{x_0}\mathbb{R}\ \to\ T_{f(x_0)}\mathbb{R}.$$

Утверждение 13.6. *(Необходимое условие дифференцируемости) Если* $f \in D(x_0)$, *то* $f \in C(x_0)$.

Доказательство. Имеет место следующее представление:

$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) = o(1)+o(1) = o(1), \quad x \to x_0.$$

Таким образом,

$$f(x) = f(x_0)+o(1), \quad x \to x_0, \tag{44}$$

то есть $f \in C(x_0)$. □

Сравним (44) с представлением для $f(x) \in D(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x-x_0)+o(x-x_0), \quad x \to x_0.$$

Таким образом, разложение для дифференцируемой функции уточняет разложение для непрерывной функции.

Утверждение 13.7. *Если* $f(x) = C$, $x \in U(x_0)$, *то*

$$f'(x_0) = 0.$$

Теорема 13.1. *Пусть* $f, g \in D(x_0)$. *Тогда*

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0);$$

[20]Вообще говоря, мы рассматриваем *касательное пространство.*

2. Справедлива формула

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

3. Если $g(x_0) \neq 0$, то

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)};$$

4. Если $g'(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. 1. Вычислим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lambda \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

2. Распишем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Вычислим

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

4. Воспользуемся доказанными выше свойствами:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g(x_0)}{g^2(x_0)}\right).$$

□

Аналогичные свойства справедливы и для df_{x_0}.

Теорема 13.2. *Пусть $f, g \in D(x_0)$. Тогда*

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$d(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda df(x_0) + \mu dg(x_0);$$

2. *Справедлива формула*

$$d\,(fg)\,(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0);$$

3. *Если* $g(x_0) \neq 0$, *то*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на определении дифференциала:

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$$

и применении теоремы 13.1. □

В заключение лекции скажем еще несколько слов о приращении. Если

$$f(x) = x,$$

то

$$f'(x_0) = 1.$$

Приращение

$$f(x) - f(x_0) = x - x_0.$$

Таким образом,

$$dx_{x_0} = h.$$

Принято обозначать

$$dx = h.$$

Всюду далее определение *дифференциала* будет иметь следующий вид:

$$df_{x_0} = f'(x_0)dx.$$

Лекция 14. Свойства производных. Производные n-го порядка

Теорема о производной сложной функции

Теорема 14.1. *Пусть* $g(t) \in D(t_0)$,

$$g(t_0) = x_0$$

и $f(x) \in D(x_0)$.

Тогда $f \circ g \in D(t_0)$, *причем*

$$(f \circ g)'_t(t_0) = f'_x(x_0) g'_t(t_0).$$

В частности,

$$df \circ g = f'_c g'_t dt.$$

Доказательство. Так как $f(x) \in D(x_0)$,

$$f(x) - f(x_0) = f'_x(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Здесь

$$o(x - x_0) = (x - x_0)o(1) = (x - x_0)\alpha(x), \quad \alpha(x) = o(1), \quad x \to x_0.$$

Доопределим

$$\alpha(x_0) = 0.$$

Тогда $\alpha in C(x_0)$.

Далее, $g \in D(t_0)$, тогда

$$g(t) - g(t_0) = g'_t(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0), \quad t \to t_0.$$

Тогда

$$f(g(t)) - f(g(t_0)) = f'_x(x_0)(g(t) - g(t_0)) + (g(t) - g(t_0))\,\alpha(g(t)) =$$

$$= f'_x(x_0)g'_t(t_0)(t - t_0) + f'_x(x_0)o(t - t_0) + g'_t(t_0)(t - t_0)\alpha(g(t)) + o(t - t_0)\alpha(g(t)) =$$
$$= f'_x(x_0)g'_t(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0).$$

Здесь

$$\alpha(g(t)) = o(1),$$

так как

$$g(t) \ \to \ g(t_0) = x_0$$

в силу необходимого условия дифференцируемости. По теореме о пределе композиции

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(g(t)) = \alpha\left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right) = 0.$$

□

Выпишем еще раз дифференциал из теоремы:

$$df(g) = f'_x g'_t dt.$$

Пусть $y = y(x)$. Тогда

$$dy = y'_x dx.$$

Пусть $x = x(t)$. Тогда

$$dy = y'_x x'_t dt = y'_x dx. \tag{45}$$

Наблюдение (45) называется *свойством инвариантности формы первого дифференциала.*

Теорема о производной обратной функции

Теорема 14.2. *Пусть f строго возрастает и непрерывна на $U_\delta(x_0)$ и, кроме того, $f \in D(x_0)$ и $f'(x_0) \neq 0$.*

Тогда $\exists\ f^{-1}(y)$ строго возрастает и непрерывна на $(f(x_0 - \delta + 0), f(x_0 + \delta - 0))$ и, кроме того, $f^{-1} \in D(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ и

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Распишем

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y)\right)} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \left(f^{-1}\right)'(y_0).$$

□

Пусть $x(t)$ строго возрастает и непрерывна на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Тогда

$$\exists\ x^{-1} = t(x)$$

возрастает и непрерывна на $(x(t_0 - \delta + 0), x(t_0 + \delta - 0))$.

Пусть $y(t) \in C\left(x(t_0 - \delta + 0), x(t_0 + \delta - 0)\right)$. Тогда $y\left(t(x)\right) \in C\left(t_0 - \delta, t_0 + \delta\right)$. Отметим, что $y\left(t(x)\right)$ часто записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in U_\delta(t_0).$$

Называется такой объект *функцией, заданной параметрически.*

Следствие. Пусть $x(t) \nearrow$ и непрерывна на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $x, y \in D(t_0)$,

$$x'(t_0) \neq 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Тогда $y \in D(x_0)$ и

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Доказательство. Распишем

$$y'_x(x_0) = (y \circ t)'(x_0) = y'_t(t_0) t'_x(x_0) = y'_t(t_0) \frac{1}{x'_t(t_0)}.$$

□

Таблица производных 1-го порядка

Выведем производные 1-го порядка от элементарных функций.

$$(C)' = 0,$$

$$(x^\alpha)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = x_0^\alpha \lim_{x \to x_0} \frac{\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x-x_0}{x_0}} \frac{1}{x_0} = \alpha x_0^{\alpha-1},$$

$$(\sin x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0,$$

$$(\cos x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \sin \frac{x + x_0}{2} = -\sin x_0,$$

$$(\operatorname{tg} x)'_{x=x_0} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'_{x=x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0},$$

$$(\operatorname{ctg} x)'_{x=x_0} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'_{x=x_0} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\sin y)'_{y=\arcsin x_0}} = \frac{1}{\cos \arcsin x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_{y=\operatorname{arctg} x_0}} = \cos^2 \operatorname{arctg} x_0 = \frac{1}{1 + x_0^2},$$

$$(e^x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0},$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\ln x)'_{x=x_0} = \frac{1}{(e^y)'_{y=\ln x_0}} = \frac{1}{e^{\ln x_0}} = \frac{1}{x_0},$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$(\operatorname{arcth} x)'_{x=x_0} = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'_{y=\operatorname{arcth} x_0}} = \operatorname{cth}^2 \operatorname{arcth} x_0 = \frac{1}{1-x_0^2},$$

$$(\operatorname{arcsh} x)'_{x=x_0} = \left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)_{y=\operatorname{arcsh} x_0}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \operatorname{arcsh} x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}.$$

Отсюда можно сделать следующий вывод. Любая элементарная функция имеет производную там, где определена.

Производная n-го порядка

Везде далее разговор будет идти только о производных (но не дифференциале) n-го порядка.

Определение 14.1. Пусть $f(x) \in D\left(U(x_0)\right)$ и $f'(x) \in D(x_0)$. Тогда 2-*й производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется

$$f''(x_0) = \left(f'(x)\right)'_{x=x_0}.$$

Слушателям курса хорошо знакомо из курса физики ускорение – производная скорости, то есть скорость изменения скорости. О геометрическом смысле второй производной мы будем говорить позднее.

Отметим, что определение 14.1 выделено нами отдельно из-за физического и геометрического смысла. Общее определение для n (в том числе $n = 2$) имеет следующий вид.

Определение 14.2. Пусть $\forall\ x \in U(x_0)\ \exists\ f^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n-1)} \in D(x_0)$. Тогда *производной n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0* называется

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'_{x=x_0}.$$

Теорема 14.3. *Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$ и $g^{(n)}(x_0)$. Тогда*

$$\exists\ \left(\lambda f + \mu g\right)^{(n)}(x_0)\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

и

$$\left(\lambda f + \mu g\right)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0) + \mu g^{(n)}(x_0).$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Далее,

$$\left(\lambda f + \mu g\right)^{(n)}(x_0) = \left(\left(\lambda f + \mu g\right)^{(n-1)}\right)'_{x_0} = \left(\lambda f^{(n-1)} + \mu g^{(n-1)}\right)'_{x_0} =$$

$$= \lambda\left(f^{(n-1)}\right)'_{x=x_0} + \mu\left(g^{(n-1)}\right)'_{x=x_0} = \lambda f^{(n)}(x_0) + \mu f^{(n)}(x_0).$$

$\square$

Теорема 14.4. *Пусть* $\exists\ f^{(n)}(x_0)$ *и*

$$x(t) = at + b.$$

Тогда

$$\exists\ (f \circ x)^{(n)}(t_0) = a^n f^{(n)}(x_0), \quad x_0 = x(t_0).$$

Доказательство. Распишем

$$(f \circ x)^{(n)}(t_0) = \Big((f \circ x)^{(n-1)}\Big)'_{t=t_0} =$$

$$= \big(a^{n-1} f^{(n-1)}(x)\big)'_{t=t_0} = a^n f^{(n)}(x_0), \quad x_0 = x(t_0).$$

□

Правило Лейбница

Теорема 14.5. *(Правило Лейбница) Пусть* $\exists\ f^{(n)}(x_0)$ *и* $g^{(n)}(x_0)$. *Тогда*

$$\exists\ (fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0), \quad f^{(0)} = f. \tag{46}$$

Доказательство. Воспользуемся методом индукции.

Заметим, что при $n = 1$ (46) превращается в правило взятия производной от произведения:

$$(f)' = f'g + fg'.$$

Перейдем к шагу индукции. Распишем

$$(fg)^{(n+1)}(x_0) = \big((fg)^{(n)}\big)'_{x=x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}(x_0) =$$

$$= f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k+1)}(x_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k+1)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}(x_0).$$

□

Таблица производных n-го порядка

Заметим, что проще всего вычисляются производные n-го порядка от многочленов.

Выпишем производные n-го порядка от некоторых функций:

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)\, x^{\alpha - n},$$

$$(\ln x)^{(n)} = \left(x^{-1}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right).$$

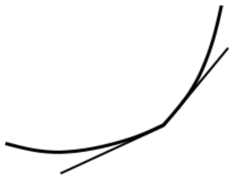


Рис. 15.1. У $f(x)$ $\exists$ $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, но $\nexists$ $f'(x_0)$

Лекция 15. Левая и правая производные. Теоремы о среднем

Левая и правая производные в точке

Определение 15.1. Пусть

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0).$$

Тогда такой предел называется *левой производной в точке.*

Аналогично, пусть

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0).$$

Такой предел называется *правой производной в точке.*

Типичная ситуация, когда $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, изображена на рис. 15.1.

Утверждение 15.1. *Если $f \in D(x_0)$, то*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Точки локального экстремума

Определение 15.2. x_0 называется *точкой строгого локального минимума*, если $\exists\ \mathring{U}(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) > f(x_0).$$

Аналогично, x_0 называется *точкой строгого локального максимума*, если $\exists\ \mathring{U}(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) < f(x_0).$$

Определение 15.3. x_0 называется *точкой нестрогого локального минимума*, если $\exists\ \mathring{U}(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Аналогично, x_0 называется *точкой нестрогого локального максимума*, если $\exists\ \mathring{U}(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) \leq f(x_0).$$

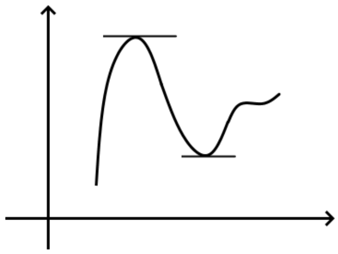


Рис. 15.2. Необходимое условие локального экстремума

Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума)

Теорема 15.1. *(Теорема Ферма, необходимое условие локального экстремума) Пусть x_0 – точка локального минимума $f(x)$ и $f \in D(x_0)$. Тогда (рис. 15.2)*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. По условию, $\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Тогда
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$
$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \leq 0.$$

2. $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \geq 0.$$

Получаем, что
$$0 \geq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0,$$
откуда
$$f'(x_0) = 0.$$

Аналогично рассматривается случай локального максимума. □

Следствие. (Алгоритм поиска глобального экстремума) Пусть $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$, x_0 – точка глобального максимума. Тогда

$$x_0 = a \vee x_0 = b \vee f'(x_0) = 0.$$

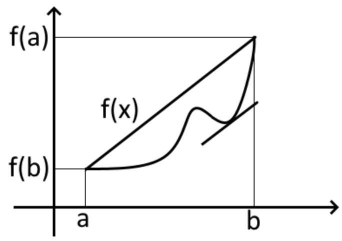


Рис. 15.3. Иллюстрация к теореме 15.3 Лагранжа

Теоремы о среднем

Теорема 15.2. *(Ролля) Пусть* $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда* $\exists\ c \in (a,b)$ *такая, что*

$$f'(c) = 0,$$

или, иными словами, $\exists\ \theta,\ 0 < \theta < 1$,

$$f'\left(a + \theta(b-a)\right) = 0.$$

Доказательство. Из того, что $f \in C[a,b]$, следует, что $\exists\ x_1$ – точка глобального минимума и $\exists\ x_2$ – точка глобального максимума.

Возможны следующие два случая.

1. $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда
$$f(x) = \text{const}$$
и
$$f'(c) = 0\ \forall\ c \in (a,b).$$

2. $f(x_1) < f(x_2)$. Тогда
$$f(x_1) \neq f(a) \neq f(b) \vee f(x_2) \neq f(a) \neq f(b).$$
Тогда
$$x_1 \in (a,b) \vee x_2(a,b),$$
откуда получаем, что
$$f'(x_1) = 0 \vee f'(x_2) = 0.$$

□

Теорема 15.3. *(Лагранжа) Пусть* $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$. *Тогда* $\exists\ c \in (a,b)$ *такая, что (рис. 15.3, касательная в точке c параллельна хорде)*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

или, иными словами, $\exists\ \theta \in (0,1)$ *такое, что*

$$f'\left(a + \theta(b-a)\right) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{47}$$

Доказательство. Пусть
$$g(x) = f(x) - \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Тогда $g \in C[a,b] \cap D(a,b)$. Хотим, чтобы
$$g(a) = g(b),$$
то есть
$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b,$$
то есть
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Функция g удовлетворяет условиям теоремы 15.2 Ролля. Тогда $\exists\ c \in (a,b)$ такая, что
$$g'(c) = 0 \iff f'(c) = \lambda.$$
$\square$

Замечание 15.1. Формулу (47) иногда записывают в следующем виде:
$$f(b) - f(a) = f'\left(a + \theta(b-a)\right)(b-a).$$
Такую запись удобно использовать для оценки приращения:
$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|\,(b-a).$$

Пусть функция задана параметрически:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

Теорема 15.4. *(Коши о среднем) Пусть $x(t), y(t) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ и*
$$x'(t) \neq 0\ \forall\ t \in (a,b).$$
Тогда $\exists\ c \in (a,b)$ такая, что
$$\frac{y'(c)}{x'(c)} = \frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)}.$$

Доказательство. Положим
$$g(t) = y(t) - \lambda x(t), \quad g \in C[a,b] \cap D(a,b).$$
Хотим, чтобы
$$g(a) = g(b),$$
тогда
$$\lambda = \frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)}.$$

Здесь $x(a) \neq x(b)$, иначе $x(t) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ и $x(b) = x(a)$, откуда

$$\exists\, c \in (a,b):\ x'(c) = 0.$$

Итак, λ выбрана корректно. Тогда по теореме 15.2 Ролля $\exists\, c \in (a,b)$ такое, что

$$g'(c) = 0,$$

то есть

$$y'(c) = \lambda x'(c),$$

откуда

$$\frac{y'(c)}{x'(c)} = \lambda.$$

□

Теорема о равенстве левых (правых) производных и предела слева (справа) производной

Теорема 15.5. *1. Пусть $f \in D(x_0 - \delta, x_0)$ и*

$$\exists\, f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f'(x)$$

и $f \in C(x_0)$. Тогда

$$\exists\, f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0).$$

2. Пусть $f \in D(x_0, x_0 + \delta)$ и

$$\exists\, f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x)$$

и $f \in C(x_0)$. Тогда

$$\exists\, f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

Доказательство. Докажем пункт 1. По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ такое, что $\forall$ $x \in (x_0 - \eta, x_0)$

$$|f'(x) - f'(x_0 - 0)| < \varepsilon.$$

Для $\forall\ x \in (x_0 - \eta, x_0)$ по теореме Лагранжа

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0 - 0)\right| = \left|f'\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right) - f'(x_0 - 0)\right|,$$

где $\theta \in (0,1)$, так как $f \in C[x, x_0] \cap D(x, x_0]$. Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0 - 0)\right| < \varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть $f \in C(x_0) \cap D\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\right)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0}$. Тогда $f \in D(x_0)$ и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Следствие. Пусть $f \in D(a, b)$. Тогда f' может иметь исключительно разрывы II рода.

Доказательство. По следствию выше, f' не может иметь устранимых разрывов.

Предположим, что f' имеет разрыв I рода, то есть

$$f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0) \iff f\_-(x_0) \neq f'_+(x_0).$$

Получаем противоречие. □

Теоремы о связи монотонности функции и постоянства знака производной на отрезке

Теорема 15.6. *Пусть $f(x)$ не убывает на (a, b) и $f \in D(a, b)$. Тогда*

$$f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in (a, b).$$

Доказательство. Для $\forall\, x_0 \in (a, b)$ $\forall\, x \in (a, b)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

откуда

$$f'(x_0) \geq 0.$$

□

Теорема 15.7. *Пусть $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ и*

$$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a, b).$$

Тогда f возрастает на $[a, b]$.

Доказательство. $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'\left(x_1 + \theta(x_2 - x_1)\right)(x_2 - x_1) > 0.$$

□

Теорема о дифференцировании неравенств

Теорема 15.8. *Пусть*

$$\exists\ f^{(n)}(x),\quad g^{(n)}(x),\ \forall\ x \in (x_0, x_0+\delta),$$

и $f^{(n-1)}, g^{(n-1)} \in C(x_0)$. *Пусть*

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\quad 0 \le k \le n-1$$

и

$$f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x),\quad x \in (x_0, x_0+\delta).$$

Тогда

$$f(x) > g(x),\quad x \in (x_0, x_0+\delta).$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi = f - g.$$

Тогда

$$\varphi^{(k)}(x_0) = 0,\quad 0 \le k \le n-1,$$

и

$$\varphi^{(n)}(x) > 0,\quad x \in (x_0, x_0+\delta).$$

Тогда $\varphi^{(n-1)}(x)$ возрастает на $[x_0, x_0+\delta)$. Значит,

$$\varphi^{(n-1)}(x) > \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим наконец, что

$$\varphi(x) > 0.$$

Отсюда

$$f(x) > g(x).$$

□

Лекция 16. Теорема Лопиталя. Формула Тейлора

Теорема Лопиталя

Напомним, для последовательностей у нас была следующая теорема Штольца.

Теорема 7.3. *(Штольца) Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

последовательность $y_n \searrow$,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A.$$

Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

Сформулируем аналог теоремы Штольца для функций. Здесь нам, кроме случая, когда пределы функций равны ∞, будет интересен и случай, когда обе функции $\to 0$.

Теорема 16.1. *(Лопиталя) Пусть* $f, g \in D\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\right)$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

и $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Тогда из того, что*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

следует, что

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. По условию, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$\left|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - A\right| < \varepsilon.$$

Полагаем

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Тогда $f, g \in C(x_0)$. Для $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ $f, g \in C[x_0, x] \cap D(x_0, x)$. Тогда по теореме 15.4 Коши

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - A\right| = \left|\frac{f'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{g'\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)} - A\right| < \varepsilon.$$

Напомним, здесь $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. $\square$

Теорема 16.2. *(Лопиталя) Пусть* $f, g \in D\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\right)$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

и, кроме того,

$$g'(x) \neq 0 \;\forall\; x \in \overset{\circ}{U}(x_0).$$

Тогда из того, что

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

следует, что

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall\; x_1, x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$, где δ – размер окрестности из условия, $x_2 < x_1$. Тогда по теореме 15.4 Коши

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)} = \frac{f'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}, \quad 0<\theta<1.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_2)}{g(x_2)} = \frac{f(x_1)}{g(x_2)} + \frac{f'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)} - \frac{f'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}\frac{g(x_1)}{g(x_2)}.$$

Фиксируем $\forall\; \varepsilon > 0$. Тогда $\exists\; \eta > 0$, $\eta < \delta$ и такое, что[21] $\forall\; x \in (x_0, x_0+\eta)$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем $\forall\; x_1 \in (x_0, x_0+\eta)$. Тогда $\forall\; x_2$, $x_0 < x_2 < x_1$, $\forall\; \theta \in (0,1)$

$$\left|\frac{f'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\exists\; \zeta > 0$, $\zeta < x_1 - x_0$, $\forall\; x_2 \in (x_0, x_0+\zeta)$

$$\left|\frac{f(x_1)}{g(x_2)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right| < \frac{\varepsilon/3}{|A|+\varepsilon/3}.$$

Итак, $\forall\; x_2 \in (x_0, x_0+\zeta)$

$$\left|\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - A\right| \leq \left|\frac{f\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1)}{g(x_2)}\right| + \left|\frac{f'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}{g'\left(x_2+\theta(x_1-x_2)\right)}\right|\left|\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right| < \varepsilon.$$

□

Замечание 16.1. Заметим, что теорему 16.1 можно доказать тем же способом, которым мы доказывали теорему 16.2. Мы воспользовались другим, более простым способом.

[21] Для левой полуокрестности утверждение доказывается аналогично.

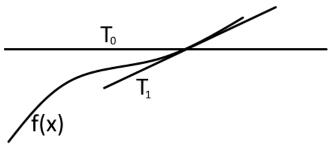


Рис. 16.1. Приближение $f(x)$ многочленами $T_0(x)$ и $T_1(x)$

Многочлен Тейлора

Определение 16.1. Пусть $\exists\ f^{(n)}(x_0)$. Тогда многочлен

$$T_n(f,x_0,x)=T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора n-й степени функции $f(x)$ в точке x_0.*

Например[22],

$$T_0(x)=f(x_0),\quad T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Нам уже известно, что если $f\in C(x_0)$, то

$$f(x)=T_0(x)+o(1),\quad x\to x_0.$$

Таким образом, $T_0(x)$ – самый лучший из многочленов нулевой степени, которые приближают $f(x)$, $x\to x_0$. Далее, если $f\in D(x_0)$,

$$f(x)=T_1(x)+o(x-x_0),\quad x\to x_0.$$

Очевидно, $T_1(x)$ приближает $f(x)$, $x\to x_0$, лучше, чем $T_0(x)$ (рис. 16.1).

Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано)

Теорема 16.3. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) Пусть $\exists$ $f^{(n)}(x_0)$. Тогда*

$$f(x)=T_n(x)+o(x-x_0)^n,\quad x\to x_0.$$

Доказательство. Вычислим следующий предел, воспользовавшись правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}=$$
$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=0.$$

□

[22] Под $\exists\ f^{(0)}(x_0)$ будем подразумевать, что $f\in C(x_0)$.

Замечание 16.2. Теорема 16.3 позволяет легко вычислять пределы функций. С другой стороны, с помощью такой формулировки мы не можем приблизительно вычислять значения функций в точке.

Глобальные формулы Тейлора (с остаточным членом в форме Коши и Лагранжа)

Теорема 16.4. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши) Пусть* $f^{(n)} \in C(x_0)$ *и* $\exists\ f^{(n+1)}(x)\ \forall\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Тогда*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n, \quad 0 < \theta < 1. \tag{48}$$

Замечание 16.3. Формула (48), как правило, позволяет очень точно оценить аппроксимацию. Проблема может возникнуть, только если $f^{(n+1)}$ является очень большой.

Доказательство. (Теорема 16.4) Рассмотрим

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad x \in \overset{\circ}{U}(x_0). \tag{49}$$

Здесь

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = f(x) - T_n(x), \quad \varphi \in C(x_0), \quad \varphi \in D\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\right), \tag{50}$$

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Из того, что $\varphi \in C(x_0)$, следует, что $\varphi \in C[x_0, x]$.

Таким образом, для $\varphi(t)$ выполняются все условия теоремы 15.3 Лагранжа. Итак,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'\left(x_0 + t\left(x - x_0\right)\right). \tag{51}$$

Записывая выражение (51) с учетом (50), получим

$$-\frac{f(x) - T_n(x)}{x - x_0} = -\frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{n!}(x - x_0)^n(1-\theta)^n.$$

Умножив обе части выражения на $x - x_0$ и сократив знак «−» в обеих частях, получим в точности (48). $\square$

Наконец, сформулируем и докажем главную теорему.

Теорема 16.5. *(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)*
Пусть $f^{(n)} \in C(x_0)$ *и* $\exists\ f^{(n+1)}(x)\ \forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$. *Тогда*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi(t) = (x - t)^{n+1}.$$

Воспользуемся теоремой 15.4 Коши:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{\psi'\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

С учетом свойств $\varphi(t)$ получаем

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n(1 - \theta)^n}{(n+1)(x - x_0)^n(1 - \theta)^n} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}}{(n+1)}.$$

$\square$

Лекция 17. Формула Тейлора для некоторых функций. Выпуклые и вогнутые функции

Многочлен Тейлора и оценка остаточного члена для некоторых функций

Напомним, в прошлый раз установили, что имеет место представление

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \tag{52}$$

где $T_n(x)$ – некоторый многочлен, а $R_n(x)$ – остаток, то есть функция представима в виде основной (большой) более просто устроенной части и более сложно устроенного, но малого остатка. В прошлый раз мы доказали три теоремы. Напомним кратко их содержание.

1. (Пеано) Если $\exists\ f^{(n)}(x_0)$, то

$$R_n(x) = o(x-x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

Отметим, что это требование этой теоремы – минимальное требование для существования $T_n(x)$.

2. (Лагранжа) Если $f^{(n)} \in C(x_0)$ и $\exists f^{(n+1)}(x)\ \forall\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}$$

3. (Коши) В тех же условиях, которые требуются в пункте 2 (для записи остатка в форме Лагранжа),

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n. \tag{53}$$

Отметим, что помимо трех вышеперечисленных, есть и другие виды $R_n(x)$. Прежде, чем перейти к формуле Тейлора для конкретных функций, напомним общий вид многочлена Тейлора:

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^(k)(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Очевидно, чтобы быстро выписать многочлен Тейлора заданной функции, нужно уметь быстро вычислять производные n-го порядка этой функции в заданной точке. Ниже мы будем пользоваться таблицей производных n-го порядка.

1. Пусть

$$f(x) = e^x.$$

Тогда
$$(e^x)^{(n)} = e^x, \quad (e^x)^{(n)}\,|_{x=0}\,,$$
откуда
$$T_n(e^x, 0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Далее,
$$f(x) = \cos x.$$
Тогда
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad (\cos x)^{(n)}\,|_{x=0}\, = \cos\frac{\pi}{2}n,$$
$$T_{2n}\left(\cos x, 0, x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

3. Пусть
$$f(x) = \sin x.$$
Тогда
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad (\sin x)^{(n)}\,|_{x=0}\, = \sin\frac{\pi}{2}n,$$
откуда
$$T_{2n-1}\left(\sin x, 0, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

4. Пусть
$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$
Тогда
$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n},$$
$$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)}\,|_{x=0}\, = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,,$$
$$T_n\left((1+x)^\alpha, 0, x\right) = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k, \quad C_\alpha^0 = 1, \quad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}. \tag{54}$$

5. Пусть
$$f(x) = \ln(1+x).$$
Тогда
$$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (\ln(1+x))^{(n)}\,|_{x=0}\, = (-1)^{n-1}(n-1)!, \tag{55}$$
$$T_n\left(\ln(1+x), 0, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}. \tag{56}$$

Закроем вопрос с формулой Пеано. Напомним, для

$$f(x) = e^x$$

мы ранее пользовались следующей асимптотикой (42):

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x \to 0.$$

Это, очевидно, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для $n = 1$. Общая же формула с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

где n мы можем взять любым[23].

Поговорим чуть подробнее о теоремах 16.5 и 16.4 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Коши) и о том, как их применять для вычисления реального значения функций с хорошей степенью приближения.

В качестве примера возьмем опять

$$f(x) = e^x = T_n(x) + R_n(x),$$

где (воспользуемся теоремой 16.5)

$$|R_n(x)| \leq \frac{\max(1, e^x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Тогда для $x = 1$

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Напомним, отдельно полученная оценка для e имела вид $\frac{1}{n!n}$.

Аналогично оцениваются тригонометрические функции.

Оценим

$$f(x) = \ln(1 + x),$$

воспользовавшись остаточным членом в форме Коши (теорема 16.4). Мы выбираем эту теорему, так как производная логарифма растет достаточно быстро (формула (55)), а (53) имеет компенсационный множитель $(1 - \theta)^n$. Итак,

$$\left| \ln(1 + x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{n!}{(1 + \theta x)^{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{n!}} (1 - \theta)^n = \frac{|x|^{n+1}}{1 + \theta x} \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n. \quad (57)$$

Замечание 17.1. Договоримся, что в (56) $|x| < 1$.

С ограничением $|x| < 1$ получим

$$(57) \leq \max\left\{1, \frac{1}{1 + x}\right) |x|^{n+1}.$$

[23]Выбор n зависит, конечно, от задачи.

6. Найдем
$$T_n\left(\operatorname{arctg} x, 0, x\right).$$
Итак,
$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$
С учетом (54)
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} C_{-1}^{k} x^{2k} + o(x^{2k}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2k}). \tag{58}$$
Заметим, что в правой части (58) записан многочлен Тейлора для $\frac{1}{1+x^2}$. Поэтому
$$(-1)^k x^{2k} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$
Таким образом,
$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(2k-1)} |_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(2k)} |_{x=0} = (-1)^k (2k)!$$
В свою очередь,
$$\frac{1}{1+x^2} = \left(\operatorname{arctg} x\right)'.$$
Тогда
$$\left(\operatorname{arctg} x\right)^{(2k)} |_{x=0} = 0, \quad \left(\operatorname{arctg} x\right)^{(2k+1)} |_{x=0} = (-1)^k (2k)!$$
Наконец, запишем многочлен Тейлора для $\operatorname{arctg} x$:
$$T_{2n+1}\left(\operatorname{arctg} x, 0, x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

7. Вычислить
$$T_n\left(\arcsin x, 0, x\right)$$
остается в качестве упражнения. Подсказка: нужно воспользоваться тем, что
$$\left(\arcsin x\right)' = \left(1 - x^2\right)^{-1/2},$$
и (54).

Теоремы о точках локального экстремума

Напомним необходимое условие локального экстремума.

Теорема 15.1. *(Ферма) Пусть $f \in D(x_0)$ и x_0 – точка локального максимума (минимума). Тогда*
$$f'(x) = 0.$$

Отметим, что следующие две теоремы, которые будут рассмотрены, применимы в разных ситуациях (хотя есть случаи, когда выполняются обе).

Теорема 17.1. *Пусть* $f \in D\left(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right) \cap C(x_0)$ *и*

1. *Выполнено*

$$f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \wedge f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Тогда x_0 *– точка строгого локального минимума.*

2. *Выполнено*

$$f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \wedge f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Тогда x_0 *– точка строгого локального максимума.*

Доказательство. Докажем пункт 1. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$f \in C[x, x_0] \cap D(x, x_0) \text{ и } f'(x) < 0.$$

Значит, выполнено достаточное условие строгой монотонности функции, f убывает на $[x, x_0]$. Значит,

$$f(x) > f(x_0). \tag{59}$$

Аналогично, $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f \in C[x_0, x] \cap D(x_0, x) \text{ и } f'(x) > 0.$$

Таким образом, выполнено достаточное условие строгой монотонности, f возрастает на $[x_0, x]$. Таким образом,

$$f(x) > f(x_0). \tag{60}$$

Соединяя (59) и (60), получим, что $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$f(x) > f(x_0).$$

□

Теорема 17.2. *Пусть* $\exists\ f''(x_0)$ *и*

1. *Выполнено*

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0.$$

Тогда x_0 *– точка строгого локального минимума.*

2. *Выполнено*

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0.$$

Тогда x_0 *– точка строгого локального максимума.*

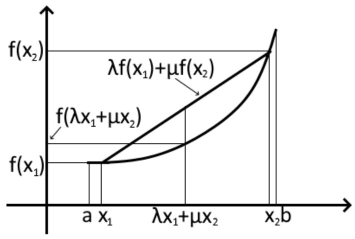


Рис. 17.1. Выпуклая функция

Доказательство. Докажем пункт 1. Так как $\exists\ f''(x_0)$, выполнена теорема 16.3 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = T_2\left(f, x_0, x\right) + o(x - x_0)^2, \quad x \to x_0. \tag{61}$$

С учетом, что

$$f'(x_0) = 0,$$

(61) записывается как

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2 = f(x_0) + (x - x_0)^2\left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)\right).$$

– это почти парабола с ветвями, направленными вверх. $\exists\ \mathring{U}(x_0)$ такая, что $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) > 0.$$

Отсюда $\forall\ x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) > f(x_0).$$

$\square$

Замечание 17.2. На практике в одномерном случае теорема 17.2 используется не так часто.

Отметим, что из доказательства теоремы 17.2 следует, что, как правило, функции вблизи точек экстремума выглядят как параболы.

Выпуклые и вогнутые функции

Определение 17.1. $f(x)$ *(строго) выпукла (вогнута)* на $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall\ x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, \quad \forall\ \lambda, \mu > 0: \quad \lambda + \mu = 1,$$

выполнено (рис. 17.1)

$$f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) < (>) \lambda f(x_1) + \mu(x_2).$$

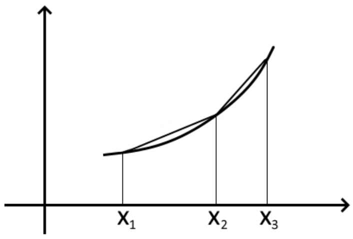


Рис. 17.2. Иллюстрация к (62)

$f(x)$ *нестрого выпукла (вогнута)* на $\langle a,b\rangle$, если

$$\forall\ x_1,x_2\in\langle a,b\rangle, \forall\ \lambda,\mu>0: \quad \lambda+\mu=1,$$

выполнено

$$f\left(\lambda x_1+\mu x_2\right)\le(\ge)\lambda f(x_1)+\mu(x_2).$$

Лемма 17.1. *Пусть* $f(x)$ *строго (нестрого) выпукла на* (a,b)*. Тогда*

$$\forall\ x_1,x_2,x_3\in(a,b):\ x_1<x_2<x_3,$$

выполнено

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<(\le)\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{62}$$

Доказательство. Графически утверждение леммы означает, что тангенс угла наклона хорды для выпуклых функций при движении вправо для трех последовательно взятых точек растет (рис. 17.2).

Так как $x_2\in(x_1,x_3)$, то $\exists\ \lambda,\mu>0$ такие, что $\lambda+\mu=1$ и

$$x_2=\lambda x_1+\mu x_2.$$

Подставим это представление в (62) (будем доказывать для строгой выпуклости). Получим

$$\frac{f\left(\lambda x_1+\mu x_3\right)-f(x_1)}{\lambda x_1+\mu x_3-x_1}<\frac{f(x_3)-f\left(\lambda x_1+\mu x_2\right)}{x_3-\lambda x_1-\mu x_3}.$$

Преобразуем:

$$\frac{f\left(\lambda x_1+\mu x_3\right)-f(x_1)}{\mu(x_3-x_1)}<\frac{f(x_3)-f\left(\lambda x_1+\mu x_2\right)}{\lambda(x_3-x_3)},$$

домножим обе части на знаменатели:

$$\lambda\left(f\left(\lambda x_1+\mu x_3\right)-f(x_1)\right)<\mu\left(f(x_3)-f\left(\lambda x_1+\mu x_3\right)\right),$$

и, наконец, раскрывая скобки, получим

$$f\left(\lambda x_1+\mu x_3\right)<\lambda f(x_1)+\mu f(x_3).$$

□

Лекция 18. Выпуклые функции (продолжение)

Неравенства для выпуклых функций

Напомним определение выпуклости функции.

Определение 17.1. $f(x)$ *строго (нестрого) выпукла на* $\langle a, b\rangle$, если

$$\forall\ x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, \quad \forall\ \lambda, \mu > 0: \ \lambda + \mu = 1,$$

выполнено (рис. 17.1)

$$f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) < (\leq)\lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

В прошлый раз мы доказали следующее утверждение.

Лемма 17.1. *Пусть* $f(x)$ *строго (нестрого) выпукла на* (a, b),

$$x_1, x_2, x_3 \in (a, b): \ x_1 < x_2 < x_3.$$

Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < (\leq)\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

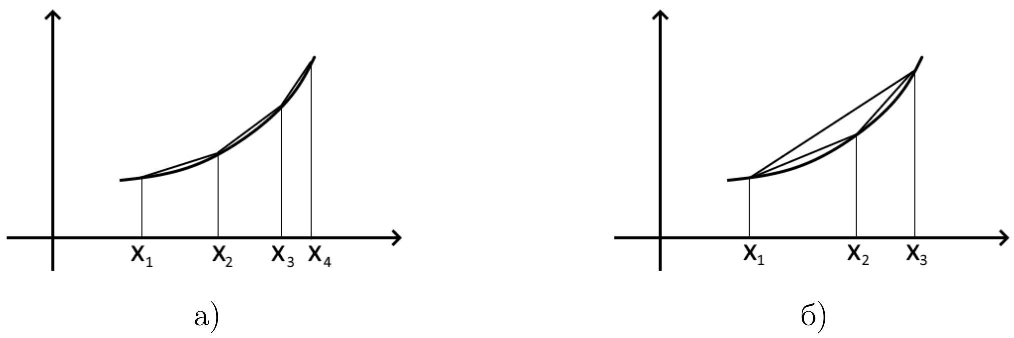


Рис. 18.1. Иллюстрация к а) (63), б) (64)

Следствие. Пусть $f(x)$ строго (нестрого) выпукла на (a, b),

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a, b): \ x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Тогда

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < (\leq)\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}. \tag{63}$$

Доказательство. Рассмотрим (рис. 18.1, а). Утверждение следствия состоит в том, что тангенс угла наклона хорды, соединяющей x_1 и x_2, меньше тангенса угла наклона хорды, соединяющей x_3 и x_4. доказательство состоит в том, сравнить обе хорды с хордой, соединяющей точки x_2 и x_3. По теореме 17.1, получаем, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

$\square$

Теорема 18.1. *Пусть $f(x)$ строго (нестрого) выпукла на (a, b),*

$$x_1, x_2, x_3 \in (a, b): \; x_1 < x_2 < x_3.$$

Тогда

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < (\leq) \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{64}$$

Доказательство. Графически утверждение теоремы представлено на рис. **??**, б. Докажем утверждение для строгой выпуклости $f(x)$. Утверждение для нестрогой выпуклости доказывается аналогично.

Так как $x_2 \in (x_1, x_3)$, $\exists\ \lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$ такие, что

$$x_2 = \lambda x_1 + \mu x_3. \tag{65}$$

Подставим (65) в (64):

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(\lambda x_1 + \mu x_3)}{x_3 - \lambda x_1 - \mu x_3}.$$

Группируя, получим

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(\lambda x_1 + \mu x_3)}{\lambda (x_3 - x_1)}.$$

Сокращая знаменатели, получим

$$\lambda f(x_3) - \lambda f(x_1) < f(x_3) - f(\lambda x_1 + \mu x_3),$$

откуда

$$f(\lambda x_1 + \mu x_3) < \lambda f(x_1) + \mu f(x_3).$$

□

Теорема о непрерывности выпуклых функций

Теорема 18.2. *Пусть $f(x)$ выпукла на (a, b). Тогда $f \in C(a, b)$.*

Доказательство. Для $\forall\ x_0 \in (a, b)$ $\exists\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a, b)$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_0 < x_3 < x_4.$$

Тогда $\forall\ x \in (x_2, x_3) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Положим

$$M = \max\left\{\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right|, \left|\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}\right|\right\} + 1.$$

Для $\forall\ \varepsilon > 0$ положим

$$\delta = \min\left\{x_0 - x_2, x_3 - x_0, \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

Для $|x - x_0| < \delta$ оценим

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0| < \varepsilon.$$

□

Теоремы о производных выпуклой функции

Теорема 18.3. *Пусть $f(x)$ выпукла на (a,b). Тогда $\forall\ x_0 \in (a,b)$*

$$\exists\ f'_-(x_0) \text{ и } f'_+(x_0).$$

Доказательство. $\forall\ x_0 \in (a,b)$, $\forall\ x \in (a,x_0)$ рассмотрим

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

Функция $g_{x_0}(x)$ обладает следующими свойствами.

1. $g_{x_0}(x)$ не убывает на (a,x_0). Действительно, $\forall\ x_1, x_2 \in (a,x_0)$, $x_1 < x_2$,
$$g_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \le \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} = g_{x_0}(x_2).$$
2. $g_{x_0}(x)$ ограничена сверху на (a,x_0): $\exists\ x_3 \in (x_0,b)$ такое, что $\forall\ x \in (a,x_0)$
$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \le \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Вейерштрасса о монотонной сходимости:

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} g_{x_0}(x) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0)$$

по определению.

Аналогично для $f'_+(x_0)$. □

Замечание 18.1. Отметим, что теорема 18.3 говорит о существовании односторонних производных выпуклой функции. Самой производной $f'(x)$ может и не быть. В качестве примера такой функции можно рассмотреть

$$f(x) = |x|$$

в точке $x_0 = 0$.

Теорема 18.4. *Пусть $f(x)$ выпукла на (a,b). Тогда $\forall\ x_0 \in (a,b)$*

$$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0).$$

Доказательство. Для $\forall\ x_0 \in (a,b)$, $\forall\ x_1 \in (a,x_0)$ и $\forall\ x_2 \in (x_0,b)$ имеет место

$$g_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_0} = h_{x_0}(x_2). \tag{66}$$

Перейдем в (66) к пределу при $x_1 \to x_0 - 0$:

$$\lim_{x\to x_0-0} g_{x_0}(x_1) = f'_-(x_0) \le h_{x_0}(x_2).$$

Аналогично, перейдем в (66) к пределу при $x_2 \to x_0 + 0$:

$$\lim_{x_2\to x_0+0} h_{x_0}(x_2) = f'_+(x_0) \ge f'_-(x_0).$$

□

Теорема 18.5. *Пусть $f(x)$ выпукла на (a,b). Тогда $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$,*

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2).$$

Доказательство. Для $\forall\ x \in (x_1, x_2)$

$$h_{x_1}(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = g_{x_2}(x). \tag{67}$$

Отсюда

$$\lim_{x\to x_1+0} h_{x_1}(x) = f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) = \lim_{x\to x_2-0} g_{x_2}(x).$$

□

Теорема 18.6. *Пусть $f(x)$ строго выпукла на (a,b). Тогда $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$,*

$$f'_+(x_1) < f'_-(x_2).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями (67). Справедливы соотношения

$$f'_+(x_1) = \lim_{x\to x_1+0} h_{x_1}(x) \leq h_{x_1}(x) \leq g_{x_2}(x) \leq \lim_{x\to x_2-0} g_{x_2}(x) = f'_-(x_2).$$

Предположим, что

$$f_+(x_1) = f'_-(x_2).$$

Тогда $\forall\ x$

$$h_{x_1}(x) = g_{x_2}(x),$$

что невозможно. □

Следствие. Пусть $f(x)$ строго (нестрого) выпукла на (a,b). Тогда $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ возрастают (не убывают) на (a,b).

Доказательство. $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < f'_-(x_2), \quad x_1 < x_2.$$

□

Следствие. Пусть $f(x)$ выпукла на (a,b). Тогда $f'(x)$ существует во всех точках (a,b) за исключением не более чем счетного множества.

Доказательство. Пусть

$$E = \left\{x \in (a,b) :\ f'_-(x) \neq f'_+(x)\right\}.$$

По условию,

$$f'_-(x) \neq f'_+(x).$$

Тогда

$$f'_-(x) < f'_+(x).$$

Для $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$,

$$\left(f'_-(x_1), f'_+(x_1)\right) \cap \left(f'_-(x_2), f'_+(x_2)\right) = \emptyset,$$

так как

$$f'_+(x_1) < f'_-(x_2).$$

Получаем, что

$$\left\{\left(f'_-(x), f'_+(x)\right)\right\}_{x\in E}$$

– семейство непересекающихся интервалов. Тогда таких интервалов не более чем счетно. Значит, E не более чем счетно. □

Теорема 18.7. *Пусть f строго (нестрого) выпукла на (a, b) и $f \in D(a, b)$. Тогда f' возрастает (не убывает) на (a, b).*

Доказательство. Доказательство следует из того, что

$$f'(x) = f'_-(x).$$

□

Достаточное условие выпуклости

Теорема 18.8. *Пусть $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ и $f'(x)$ возрастает (не убывает) на (a, b). Тогда $f(x)$ строго (нестрого) выпукла на $[a, b]$.*

Доказательство. Выберем $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b]$, $\forall\ \lambda, \mu > 0$ такие, что

$$\lambda + \mu = 1.$$

Тогда

$$f \in C\left[x_1, \lambda x_1 + \mu x_2\right] \cap D\left(x_1, \lambda x_1 + \mu x_2\right).$$

Итак, для $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. Значит,

$$f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) - f(x_1) = f'\left(x_1 + \theta_1 \mu(x_2 - x_1)\right) \mu\left(x_2 - x_1\right), \quad \theta_1 \in (0, 1).$$

Аналогично,

$$f \in C\left[\lambda x_1 + \mu x_2, x_2\right] \cap D\left(\lambda x_1 + \mu x_2, x_2\right). \tag{68}$$

Тогда

$$f(x_2) - f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = f'\left(x_2 - \theta_2 \lambda(x_2 - x_1)\right) \lambda(x_2 - x_1), \quad \theta_2 \in (0, 1). \tag{69}$$

Отсюда получаем, что имеет место неравенство

$$f'\left(x_1 + \theta_1 \mu(x_2 - x_1)\right) < f'\left(x_2 - \theta_2 \lambda(x_2 - x_1)\right).$$

Умножим (68) на λ, а (69) – на μ, и сравним их. Получим

$$\lambda\left(f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) - f(x_1)\right) < \mu\left(f(x_2) - f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right)\right).$$

Раскрывая скобки, получим

$$f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) < \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

□

Лекция 19. Выпуклость функции (продолжение). Точка перегиба

Необходимые (достаточные) условия выпуклости. Критерий выпуклости

Напомним условия выпуклости в терминах монотонности первой производной, которые были рассмотрены в прошлый раз.

Теорема. *Пусть $f \in D(a,b)$ и строго (нестрого) выпукла на (a,b). Тогда $f'(x)$ возрастает (не убывает) на (a,b).*

Теорема. *Пусть $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ и $f'(x)$ возрастает (не убывает) на (a,b). Тогда $f(x)$ строго (нестрого) выпукла на $[a,b]$.*

В теоремах ниже мы будет требовать от функции большую гладкость. За счет этого условия теоремы будут проще.

Теорема 19.1. *Пусть $\exists\ f''(x)\ \forall\ x \in (a,b)$ и $f(x)$ выпукла. Тогда*

$$f''(x) \geq 0\ \forall\ x \in (a,b).$$

Доказательство. Так как $\exists\ f''(x)$, $\forall\ x \in (a,b)$, $f \in D(a,b)$. Так как $f(x)$ выпукла на (a,b), по теореме получаем, что $f'(x)$ не убывает на (a,b).

Так как $f'(x) \in D(a,b)$, по теореме получаем, что

$$\left(f'\right)'(x) = f''(x) \geq 0\ \forall\ x \in (a,b).$$

□

Замечание 19.1. Отметим, что даже если потребовать строгую выпуклость в теореме 19.1, **нельзя** утверждать, что $f''(x)$ будет положительна (а не просто неотрицательна).

Например,

$$f(x) = x^4$$

строго выпукла на $\mathbb{R}$, но

$$f''(0) = 0.$$

Сформулируем обратную теорему.

Теорема 19.2. *Пусть $\exists\ f''(x)\ \forall\ x \in (a,b)$ и $f(x) \in C[a,b]$. Пусть*

$$f''(x) > 0\ \forall\ x \in (a,b).$$

Тогда $f(x)$ строго выпукла на $[a,b]$.

Доказательство. Так как

$$f''(x) = \left(f'\right)'(x) > 0\ \forall\ x \in (a,b),$$

$f'(x)$ возрастает на (a,b).

Так как $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ и $f'(x)$ возрастает на (a,b), получаем, что $f(x)$ строго выпукла на $[a,b]$. □

Теорема 19.3. *$f(x)$ строго (нестрого) выпукла на $\langle a,b\rangle \iff \forall\ x_0 \in \langle a,b\rangle\ \exists\ k\in\mathbb{R}$ такое, что $\forall\ x\in\langle a,b\rangle\setminus\{x_0\}$*

$$f(x) > (\geq) f(x_0) + k(x-x_0).$$

Такая прямая (рис. 19.1) называется опорной.

а) б)

Рис. 19.1. Опорная прямая: а) единственная, б) множество (если $\nexists\ f'(x_0)$)

Теорема 19.3 дает эквивалентное определение выпуклости функции.

Определение 19.1. *$f(x)$ выпукла на $\langle a,b\rangle$*, если $\forall\ x_0\in\langle a,b\rangle$ существует опорная прямая.

Доказательство. (Теорема 19.3)

$\Rightarrow$ Так как $f(x)$ строго выпукла на $\langle a,b\rangle$, то $\forall\ x_0\in\langle a,b\rangle$ (за исключением, возможно, точки a) $\exists\ f'_-(x_0)$ и

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} < f'_-(x_0)\ \forall\ x\in<a,x_0). \tag{70}$$

Умножая обе части неравенства (70) на x_0-x, получим

$$f(x) > f'_-(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0)\ \forall\ x\in<a,x_0).$$

Аналогично, $f(x)$ строго выпукла на $\langle a,b\rangle$, поэтому $\forall\ x_0\in\langle a,b\rangle$ (за исключением, возможно, точки b) $\exists\ f'_+(x_0)$ и

$$h_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'_+(x_0)\ \forall\ x\in(x_0,b\rangle.$$

Отсюда получаем, что

$$f(x) > f(x_0) + f'_+(x_0)(x-x_0)\ \forall\ x\in(x_0,b\rangle.$$

Заметим, что

$$f'_-(x_0)\leq f'_+(x_0).$$

Тогда $\forall\ k$ такого, что

$$f'_-(x_0)\leq k\leq f'_+(x_0), \tag{71}$$

выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0) + k(x - x_0), \quad x \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_0\}.$$

Отметим, что если $f(x)$ дифференцируема в x_0, отрезок (71) превращается в одну точку

$$k = f'(x_0),$$

опорная прямая единственна и является касательной к функции в точке x_0. Если же x_0 – точка излома[24], то опорных прямых множество (рис. 19.1, б).

$\Leftarrow$ Пусть у функции есть опорная прямая, то есть $\forall\ x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $\forall\ \lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, в точке $\lambda x_1 + \mu x_2$ есть опорная прямая: $\exists\ k \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall$ $x \in \langle a, b\rangle \setminus \{\lambda x_1 + \mu x_2\}$

$$f(x) > f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) + k\left(x - \lambda x_1 - \mu x_2\right).$$

В частности,

$$f(x_1) > f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) - k\mu\left(x_2 - x_1\right), \tag{72}$$

$$f(x_2) > f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) + k\lambda(x_2 - x_1). \tag{73}$$

Домножим (72) на λ, (73) на μ и сложим их. Получим

$$\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) > f\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right),$$

откуда получаем, что f строго выпукла на $\langle a, b\rangle$.

$\square$

Точка перегиба

В определении ниже будем прямо предполагать, что функция $f(x)$ дифференцируема. В общем случае это условие не является обязательным для точек перегиба. Такие точки перегиба мы рассматривать не будем.

Определение 19.2. Пусть $f \in D(x_0)$. Точка x_0 называется *точкой перегиба* $f(x)$, если $\exists\ \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ такая, что

1. Либо для $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{74}$$

для $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{75}$$

(рис. 19.2, а);

[24] Единственный возможный случай для точки, в которой $\nexists\ f'(x)$.

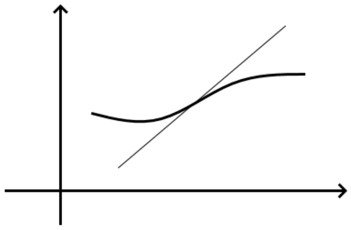
2. Либо для $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

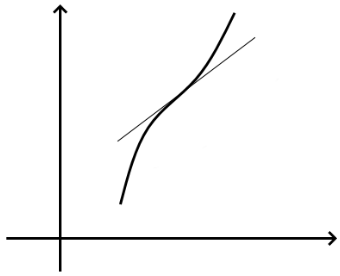
для $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(рис. 19.2, б).



а)



б)

Рис. 19.2. Точка перегиба

Отметим, что два подпункта определения 19.2, конечно, описывают разные типы точек перегиба. Будем называть точку перегиба, для которой выполняется 1-й (2-й) пункт определения, *точкой перегиба I (II) типа.*

Теорема 19.4. *Пусть* $\exists\ f''(x_0)$ *и* x_0 *– точка перегиба. Тогда*

$$f''(x_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть x_0 – точка перегиба I типа. Тогда $\exists$ число $\delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнены неравенства (74) и (75).

Из того, что $\exists\ f''(x_0)$, следует, что для $f(x)$ в окрестности x_0 $\exists$ формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2, \quad x \to x_0.$$

Тогда $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$(x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right) > 0,$$

откуда $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем

$$\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) > 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right) \geq 0,$$

то есть
$$f''(x_0) \geq 0.$$
Аналогично, $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$$(x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right) < 0,$$
откуда получаем, что $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$$\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) < 0.$$
Тогда
$$\lim_{x \to x_0 + 0} \left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1) \right) \leq 0,$$
то есть
$$f''(x_0) \leq 0.$$
Следовательно,
$$f''(x_0) = 0.$$
□

Теорема 19.5. *Пусть $f \in D(x_0)$ и $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\exists\ f''(x)\ \forall\ x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ и*

1. *Либо $f''(x) > 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \wedge f''(x) < 0\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$;*
2. *Либо $f''(x) < 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \wedge f''(x) > 0\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Тогда x_0 – точка перегиба $f(x)$.

Доказательство. Докажем пункт 1 теоремы. Из условия следует, что
$$f(x) \in C(x_0 - \delta, x_0],$$
$$\exists\ f''(x)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ и } f''(x) > 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0).$$
Отсюда получаем, что $f(x)$ строго выпукла на $(x_0 - \delta, x_0]$. Тогда $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Аналогично, $f(x) \in C[x_0, x_0 + \delta)$, $\exists\ f''(x)\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$ и
$$f''(x) < 0\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta).$$
Отсюда получаем, что $f(x)$ строго вогнута на $[x_0, x_0 + \delta)$. Тогда $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
□

Теорема 19.6. *Пусть* $\exists\ f'''(x_0)$ *и*

$$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0.$$

Тогда x_0 *– точка перегиба* $f(x)$.

Доказательство. Пусть

$$f'''(x_0) > 0.$$

Из того, что $\exists\ f'''(x_0)$, следует, что $f(x)$ раскладывается в окрестности x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + o(x - x_0)^3, \quad x \to x_0. \tag{76}$$

Перепишем (76) в виде

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)^3 \left(\frac{f'''(x_0)}{6} + o(1)\right).$$

Заметим, что $\exists\ \delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$$\frac{f'''(x_0)}{6} + o(1) > 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\operatorname{sgn}\,(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = \operatorname{sgn}\,(x - x_0)^3\ \forall\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0).$$

$\square$

Отметим, что теорема 19.6 применима даже в случае, когда в x_0 не происходит смены выпуклости.

Приложения к доказательству неравенств

Теорема 19.7. *(Неравенство Йенсена) Пусть* f *выпукла на* $\langle a, b\rangle$. *Тогда*

$$\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle,\ \forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

выполнено неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{77}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. При $n = 2$ (77), очевидно, верно.

Предположим, что для n (77) верно. Тогда

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}x_k\right)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right). \tag{78}$$

В силу выпуклости,

$$(78) \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right) f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}x_k\right) + \lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right).$$

□

Лекция 20. Абсолютно сходящийся ряд. Расстановка скобок в ряде. Бесконечные произведения

Неравенство Коши

Напомним, в прошлый раз мы доказали следующую теорему.

Теорема 19.9. *(Неравенство Йенсена) Если $f(x)$ выпукла на $\langle a, b\rangle$, то*

$$\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle, \quad \forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

выполнено неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{79}$$

Теорема 20.1. *(Неравенство Коши) Для $\forall\ x_1, \ldots, x_n > 0$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}. \tag{80}$$

Доказательство. Применим для доказательства неравенства (80) аппарат выпуклых функций.

Рассмотрим

$$f(x) = -\ln x, \quad x > 0.$$

Очевидно, $f(x)$ дважды дифференцируема, а значит, к ней применимо достаточное условие выпуклости. Вычислим

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0\ \forall\ x > 0.$$

Отсюда получаем, что $f(x)$ выпукла. Значит, к $f(x)$ применимо неравенство Йенсена (79). Положим

$$\lambda_k = \frac{1}{n}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Тогда

$$-\ln \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(-\ln x_k\right),$$

откуда и получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

□

Абсолютно сходящийся ряд

Вернемся к обсуждению числовых рядов. Напомним основных факты о рядах, которые мы уже успели разобрать.

Определение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*, а S называется *его суммой*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

если

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

где

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ расходится.

Теорема. *(Критерий Коши)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\forall\, \varepsilon\ \exists\, N$ *такое, что* $\forall\, n > N$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Теорема. *(Критерий Вейерштрасса) Пусть* $a_n \geq 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$

$$\sup_n S_n < +\infty.$$

Везде далее будем использоваться следующее обозначение. Если $a_n \geq 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то будем обозначать это как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

а если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то будем использовать обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{81}$$

Замечание 20.1. Отметим, что обозначение (81) неприменимо к знакопеременным рядам. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

расходится, но его частичные суммы $\not\to +\infty$ (их предела вообще не существует).

Определение 20.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Теорема 20.2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $\forall\ n > N$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Отметим, что существуют ряды, которые сходятся, но не сходятся абсолютно. Такие ряды мы разберем подробно чуть позднее.

Расстановка скобок в ряде

Напомним следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся. Тогда* $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$$

сходится.

Обсудим, какие еще операции с рядами аналогичны операциям с конечными суммами. По ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_n, \quad 0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$$

По сути, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ – это ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором некоторым образом расставлены скобки.

Теорема 20.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$\sum_{j=1}^{k} A_j = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} a_n = \sum_{n=1}^{n_k} a_n = S_{n_k}.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

откуда

$$\exists \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = S.$$

□

Пример 20.1. Вернемся к примеру

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Этот ряд, очевидно, не сходится. Если же мы в нем расставим скобки следующим образом:

$$(-1+1) + (-1+1) + \ldots,$$

то получим ряд из 0. Очевидно, такой ряд сходится.

Данный пример показывает, что утверждение теоремы 20.3 в обратную сторону в общем случае неверно.

Обсудим, при каких условиях теорема 20.3 верна в обратную сторону.

Теорема 20.4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *и* $\sup\limits_{k}(n_k - n_{k-1}) < +\infty$. *Тогда из того, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится, следует, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится,

$$S_{n_k} \ \to \ S.$$

Для $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ k$ такое, что

$$n_k < n \leq n_{k+1}.$$

Напомним,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Рассмотрим

$$|S_n - S_{n_k}| = \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} a_j\right| = \left|\sum_{j=n_k+1}^{n} a_j\right| \leq \sup_k (n_k - n_{k-1}) \max_{n_k<n\leq n_{k+1}} |a_n| \ \to \ 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

□

Пример 20.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Работать с таким рядом не очень удобно. Расставим скобки в нем следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

В таком случае выполняются условия теоремы 20.4. Итак, сходимость исходного ряда равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n)}.$$

Для этого ряда воспользуемся критерием Коши:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(2k-1)2k} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(2k-1)2k} + \frac{1}{2k(2k+1)} = \sum_{k=2n}^{2n+2p} \frac{1}{k(k-1)} < \varepsilon,$$

так как ранее мы разбирали, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ сходится.

Теорема 20.5. *Пусть $sgn\, a_n = const$, $n_k < n \leq n_{k+1}$. Тогда из того, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Доказательство. Из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ следует, что

$$S_{n_k} \ \to\ S \text{ и } S_{n_{k+1}} \ \to\ S.$$

Для $\forall\ n$, $n_k < n \le n_{k+1}$, тогда

$$\begin{array}{ccccc} S_{n_k} \le & S_n & \le S_{n_{k+1}} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & S & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} S_{n_k} \ge & S_n & \ge S_{n_{k+1}} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \\ & S & \end{array}$$

$\square$

Бесконечные произведения

Определение 20.2. *Бесконечным произведением* называется

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \dots p_n \dots, \quad p_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Частичным произведением называется

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Если

$$\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0,$$

то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится* и число

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

называется *значением этого бесконечного произведения.*

Замечание 20.2. Заметим, что из множества значений членов бесконечного произведения мы исключаем значение 0. Действительно, если $p_n \neq 0$, $\forall\ n$, то сходимость произведения не изменится при выкидывании конечного числа его членов. Если же среди p_n встретился хотя бы 0, все произведение будет равно 0 даже если все остальные перемножаемые числа «плохие».

Теорема 20.6. *Пусть* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Доказательство. По условию,

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0,$$

то есть
$$\exists \lim_{n\to\infty} P_n = P,$$
а значит,
$$\exists \lim_{n\to\infty} P_{n-1} = P.$$
Тогда
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

□

Напомним, когда мы работали с рядами, мы рассматривали ряд из первых разностей
$$\sum_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}).$$
Его аналогом для произведения будет произведение частных
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Покажем, что
$$\prod \lim_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$
Распишем
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\dots\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}} \;\to\; a_1, \quad n\to\infty.$$

Итак,
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a_1.$$

Заметим, что условие
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$
здесь можно заменить сходимостью a_n к любому конечному значению $C \neq 0$. В таком случае
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{C}.$$

Пример 20.3. Рассмотрим
$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad a_n = \frac{n-1}{n}.$$
По доказанному выше,
$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = a_2 = \frac{1}{2}.$$

Теорема 20.7. *Пусть $p_n > 0$. Тогда*

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

Доказательство. Доказательство следует из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \ln p_k = \ln \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Отметим, что теперь становится ограничение $P \neq 0$ в определении 20.2. Действительно, если $P = 0$, то произведение сходится, но $\ln P = -\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ не будет сходиться. □

Представление $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в виде бесконечных произведений

Выведем представление в виде бесконечных произведений $\sin x$ и $\cos x$. Эти представления играют важную роль в теории функции комплексного переменного. Вывести их можно элементарными соображениями (пусть и довольно длинными).

Теорема 20.8.

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{\pi(2n-1)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 20.1.

$$\sin(2k+1)x = \sin x P_k\left(\sin^2 x\right),$$

$$\cos(2k+1)x = \cos Q_k\left(\sin^2 x\right),$$

где P_k и Q_k – многочлены степени, не большей k.

Доказательство. Докажем по индукции. Для $k = 0$ утверждение очевидно.

Распишем теперь

$$\sin(2k+1)x = \sin\left((2k-1)x + 2x\right) - \sin\left(2k-1\right)x \cos 2x +$$

$$+ \cos\left(2k-1\right)x \sin 2x = \left(1 - 2\sin^2 x\right) \sin x P_{k-1}\left(\sin^2 x\right) + 2 \sin x \cos^2 x Q_{k-1}\left(\sin^2 x\right),$$

$$\cos(2k+1)x = \cos(2k-1)x \cos 2x - \sin\left(2k-1\right)x \sin 2x =$$

$$= \left(1 - 2\sin^2 x\right) \cos x Q_{k-1}\left(\sin^2 x\right) - 2 \cos x \sin^2 x P_{k-1}\left(\sin^2 x\right).$$

□

Лекция 21. Приложения рядов и бесконечных произведений

Представление $\sin x$ и $\cos x$ в виде бесконечного произведения

Теорема 20.13.

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right), \tag{82}$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2 (2n-1)^2}\right). \tag{83}$$

Замечание 21.1. Формулы (82) и (83) понимаются в следующем смысле. В точках, где функция не обращается в 0, проблем не возникает. Если же в правой части встретился сомножитель, обращающий произведение в 0, обе части следует поделить на него. Оставшаяся часть бесконечного произведения будет сходиться.

Напомним техническую лемму, доказанную нами в прошлый раз.

Лемма 20.1.

$$\sin(2k+1)x = \sin x P_k\left(\sin^2 x\right),$$

$$\cos(2k+1)x = \cos x Q_k\left(\sin^2 x\right),$$

где P_k и Q_k – многочлены степени не выше k.

Лемма 21.1.

$$\frac{\sin x}{(2k+1)\sin\frac{x}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right), \tag{84}$$

$$\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2k+1}}\right). \tag{85}$$

Доказательство. Согласно лемме 20.1,

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = P_k\left(\sin^2 x\right).$$

Отметим, что

$$P_k\left(\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}\right) = 0.$$

Итак, у многочлена P_k имеется k различных корней, а значит, P_k раскладывается в соответствующее произведение. Поэтому

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = C\prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right). \tag{86}$$

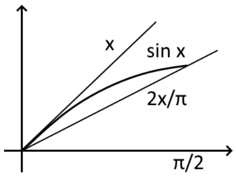


Рис. 21.1. Оценка $\sin x$ линейными функциями

Найдем C, подставив в (86) $x = 0$ (в левой части перейдем к пределу при $x \to 0$):

$$2k + 1 = C.$$

Сделаем теперь в (86) замену

$$x = \frac{t}{2k+1}.$$

Получим

$$\frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2k+1}} = (2k+1) \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{t}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}} \right).$$

Разделив обе части на $2k+1$, получим (84).

Аналогично докажем формулу (85). По лемме 20.1,

$$\frac{\cos(2k+1)x}{\cos x} = Q_k \left(\sin^2 x\right).$$

Здесь

$$Q_k \left(\sin^2 \frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{2k+1} \right) = 0,$$

у многочлена Q_k k различных корней. Тогда

$$\frac{\cos(2k+1)x}{\cos x} = C \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{2k+1}} \right). \tag{87}$$

Подставляя в (87) $x = 0$, получим, что $C = 1$. Выполняя замену $x = \frac{t}{2k+1}$, получим (85). □

Замечание 21.2. Устремляя $k \to \infty$, получим (84) $\to$ (82), (85) $\to$ (83). Такой переход некорректен, так как кроме аргументов тригонометрических функций, k содержится в самом $\prod$. Правильный результат при использовании такого перехода получается случайно.

Доказательство. (Теорема 20.13) Заметим, что в (84) и (85) x – фиксированное число, а $k \to \infty$. Поэтому можем считать, что $k > x$.

Запишем (84) следующим образом:

$$\frac{\sin x}{(2k+1)\sin \frac{x}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}} \right) \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi n}{2k+1}} \right). \tag{88}$$

Отметим, что в этом заключается главная идея доказательства. Первое из произведений в правой части (88) имеет фиксированную длину, а растет с ростом k только второе из них.

Будем считать $m > x^4$. Теорема о предельном переходе[25] применима к первому из произведений в (88). Устремим в (88) $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin x}{(2k+1)\sin\frac{x}{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right) \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right),$$

откуда

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) R_m(x), \tag{89}$$

где

$$R_m(x) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right).$$

Отметим, что предел $R_m(x)$ существует по теореме о пределе частного.

Оценим выражение под знаком предела в $R_m(x)$:

$$1 \geq \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}\right) \geq 1 - \sum_{n=m+1}^{k} \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi n}{2k+1}}. \tag{90}$$

Отметим, что (рис. 21.1)

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$(90) \geq 1 - \frac{1}{4}\sum_{n=m+1}^{k} \frac{x^2}{n^2} > 1 - \frac{x^2}{4m} > 1 - \frac{1}{4\sqrt{m}}.$$

Итак, получили, что

$$\begin{array}{ccccc} 1 - \frac{1}{4\sqrt{m}} & \leq & R_m(x) & \leq & 1 \\ \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & 1 & & \end{array}$$

Перейдем к пределу при $m \to \infty$ в (89). Получим

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, представим (85) следующим образом:

$$\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2k+1}} = \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2k+1}}\right) \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2k+1}}\right), \quad m > x^4 + \frac{1}{2}.$$

[25] О неприменимости этого приема для всего выражения речь шла в замечании выше.

Устремляя $k \to \infty$, получим

$$\cos x = \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right) R_m(x), \quad R_m(x) = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2k+1}}\right). \quad (91)$$

Оценим выражение под знаком предела в $R_m(x)$:

$$1 \geq \prod_{n=m+1}^{k} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2k+1}}{\sin^2 \frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2k+1}}\right) \geq 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=m+1}^{k} \frac{x^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \geq 1 - \frac{x^2}{4\left(m-\frac{1}{2}\right)} \geq 1 - \frac{1}{4\sqrt{m-\frac{1}{2}}}.$$

Устремляя в (91) $m \to \infty$, получим формулу (83). □

Приложения рядов и бесконечных произведений

Применим наши знания о рядах и произведениях для изучения последовательностей.

Утверждение 21.1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ *сходится.*

В случае сходимости

$$a_m - \lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=m}^{\infty} (a_n - a_{n+1}).$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что

$$a_m - a_n = \sum_{k=m}^{n-1} a_k - a_{k+1}.$$

□

Утверждение 21.2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \iff \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ *сходится.*

В случае сходимости

$$\frac{a_m}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \prod_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что

$$\frac{a_m}{a_n} = \prod_{k=m}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

□

Пример 21.1. Пусть

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Распишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \right).$$

Напомним, для $\ln n$ справедливо следующая оценка:

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}. \tag{92}$$

Тогда

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \frac{1}{m+1}. \tag{93}$$

Итак, ряд из первых разностей сходится. По утверждению 21.1,

$$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = \gamma,$$

$$a_m - \gamma = \sum_{n=m}^{\infty} (a_n - a_{n+1}).$$

В силу (93), справедлива оценка

$$0 \leq a_m - \gamma \leq \frac{1}{m} \ \forall\ m.$$

Итак, получили, что справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad 0 \leq O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Прежде, чем приступить к рассмотрению других примеров, запишем еще одну оценку для логарифма:

$$\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \ln \frac{k-1}{k} = -\ln \frac{k}{k-1} = -\ln \left(1 + \frac{1}{k-1} \right) < -\frac{1}{k}$$

в силу неравенства (92). Таким образом,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) < -\frac{1}{n}. \tag{94}$$

Пример 21.2. Рассмотрим

$$a_n = \sqrt{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Здесь

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{2n+2}{2n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+\frac{1}{2}}.$$

Мы видим, что произведение первых соотношений устроено проще, чем исходная последовательность (как и в прошлом примере ряд из первый разностей был устроен проще).

Оценим $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$. С одной стороны,

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{n^2+n+\frac{1}{4}}{n^2+n}\right) < 0.$$

С другой,

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{2}\left(\ln \frac{n+\frac{1}{2}}{n} + \ln \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)\right) >$$

$$> -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Отсюда получаем оценку

$$0 < \sum_{k=m}^{n} \ln \frac{a_k}{a_{k+1}} > -\frac{1}{4} \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) > -\frac{1}{4m}.$$

Итак, по утверждению 21.2 получаем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = C \neq 0,$$

$$\frac{a_m}{C} = \prod_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{\sum\limits_{n=m}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}}.$$

Справедлива оценка

$$1 \geq \frac{a_m}{C} \geq e^{-\frac{1}{4m}}, \quad C \geq a_n \geq Ce^{-\frac{1}{4m}}.$$

Вычислим C. Напомним, что

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Распишем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)}{(2k+1)} (2k!)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2}(2n+1) - \lim_{n\to\infty} a_n^2 \frac{2n+1}{n} = \frac{2}{\pi}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Итак, для $\forall\ n$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{1}{4n}},$$

откуда получаем следующее асимптотическое представление:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В следующий раз мы разберем формулу Стирлинга, которая дает асимптотическое представление для $n!$.

Лекция 22. Формула Стирлинга. Знакопостоянные ряды

Формула Стирлинга

Напомним, на прошлой лекции мы установили следующую асимптотику:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Сегодня мы займемся получением другой интересной асимптотики, а именно докажем формулу Стирлинга.

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n n!}$$

и исследуем ее на сходимость. Воспользуемся тем, что

$$a_n \ \to \ C \neq 0 \ \iff \ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \ \textit{сходится.}$$

Представим

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n^n e(n+1)}{(n+1)^{n+1}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Заметим, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2} \text{ сходится } \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) \text{ сходится.}$$

Преобразуем логарифм:

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Напомним, ранее у нас было следующее неравенство:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Докажем усиленное неравенство:

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{6n} + \frac{2}{3\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{6(n+1)}. \tag{95}$$

Обозначим

$$\frac{1}{n} = x, \quad x > 0.$$

Тогда (95) превращается в следующее:

$$\frac{x}{1+\frac{x}{2}} < \ln(1+x) < \frac{x}{6} + \frac{2x}{3\left(1+\frac{x}{2}\right)} + \frac{x}{6(1+x)}. \tag{96}$$

При $x = 0$ все части (96) принимают значение 0. Согласно теореме о дифференцировании неравенств, достаточно доказать, что неравенство сохраняется при дифференцировании (96).

Итак, возьмем от (96) производную. Получим

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{6} + \frac{2}{3\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{1}{6(1+x)^2}. \tag{97}$$

Левое из неравенств (97) очевидно:

$$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{4}} < \frac{1}{1+x}.$$

Перейдем к правому из неравенств (97). Преобразуем его:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}\right) < \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) < \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right).$$

Приведя к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{6}\frac{x^2}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} < \frac{1}{6}\frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

Это, очевидно, верно.

Воспользуемся теперь доказанным неравенством (95). Умножим его на $n + 1/2$. Получим

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{6} + \frac{1}{12n} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Вычитая из всех частей 1, получим

$$0 < -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

то есть

$$0 > \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Отсюда

$$0 > \sum_{k=n}^{m} \ln\frac{a_k}{a_{k+1}} > -\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) > -\frac{1}{12n}.$$

Итак, ряд из логарифмов (а значит, и бесконечное произведение) сходится, а значит,

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = C \neq 0.$$

Тогда

$$\frac{a_m}{C} = \prod_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Из записанного выше справедлива оценка

$$e^0 \geq \frac{a_m}{C} \geq e^{-\frac{1}{12m}},$$

или, в другой записи,

$$Ce^{-\frac{1}{12m}} \leq a_m \leq C.$$

Отсюда

$$n! \sim \frac{\sqrt{n}}{C} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad C \neq 0. \tag{98}$$

Выведем, чему равна C из (98). Справедливы следующие соотношения:

$$(2n)!! \sim \frac{\sqrt{n}}{C} \left(\frac{2n}{e}\right)^n, \quad (2n)! \sim \frac{\sqrt{2n}}{C} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

Отсюда

$$(2n-1)!! \sim \sqrt{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^n,$$

а значит,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда получаем, что

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Итак, мы доказали, что справедлива оценка

$$\frac{e^{-\frac{1}{12n}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n n!} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда

$$\sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Отсюда получаем следующее асимптотическое равенство:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Это и есть *формула Стирлинга.*

Знакопостоянные ряды

Перейдем к обсуждению знакопостоянных рядов. Для определенности считаем члены ряда ≥ 0 (для ≤ 0 все аналогично).

Теорема 22.1. *Пусть* $a_n \geq 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *ограничена.*

Напомним, что то, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, мы записываем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Теорема 22.1 дает работать со знакопостоянными рядами так же, как и с обычными (конечными) суммами.

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k = \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}, \quad 0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

Напомним следующую теорему.

Теорема. $\sum\lim\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится.*

В случае знакопостоянных рядов верно и обратное.

Теорема 22.2. *Пусть* $a_n \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *сходится. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. По условию, $\sum\lim\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, то есть последовательность частичных сумм $\sum\limits_{m=1}^{k} A_m$ сходится при $k \to \infty$. Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{k} A_m = \sum_{n=1}^{n_k} a_n$$

– подпоследовательность $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m$.

S_n не убывает, S_{n_k} сходится, а значит, и S_n сходится. □

Следствие. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится.

Напомним, в конечных суммах мы можем переставлять слагаемые произвольным образом с сохранением результата. Оказывается, то же верно и для знакопостоянных рядов.

Пусть

$$\sigma(n): \ \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$$

– перестановка.

Теорема 22.3. *Пусть* $a_n \geq 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 22.1. Проверим, что последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ ограничена. Справедлива тривиальная оценка

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k,$$

где

$$N = \max\left\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\right\}.$$

Получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Проводя аналогичные рассуждения для обратной перестановка, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Таким образом, получили, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

$\square$

Ряд, сходящийся безусловно

Определение 22.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно, если $\forall\ \sigma$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится.

Утверждение 22.1. *Пусть* $a_n \geq 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится безусловно.*

Определение 22.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Теорема 22.4. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно, причем $\forall$ перестановки σ выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| < +\infty,$$

то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится абсолютно.

Обозначим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

$\exists\ N_2$ такое, что

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - S\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{N_2} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_2} a_k - S\right|, \quad n > N,$$

где

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Наконец, оценим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)} - S\right| \leq \sum_{k=N_2+1}^{\infty} |a_k| + \left|\sum_{k=1}^{N_2} a_k - S\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Признаки сравнения знакопостоянных рядов

Теорема 22.5. *Пусть* $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство. Оба утверждения следуют из тривиального неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

□

Теорема 22.6. *Пусть* $a_n, b_n > 0$ *и*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда

1. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

2. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Доказательство. Так как $a_n, b_n > 0$, рассмотрим конечное произведение их отношений:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} \iff \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}.$$

Тогда

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n, \quad b_n \geq \frac{b_1}{a_1} a_n$$

и для утверждений теоремы справедлив предыдущий признак сравнения. □

Доказательство следующего признака следует из теоремы 22.5.

Теорема 22.7. *Пусть* $a_n, b_n > 0$ *и* $a_n \asymp b_n$, *то есть* $\exists\, C_1, C_2 > 0$ *такие, что*

$$C_1 a_n \le b_n \le C_2 a_n.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие. Пусть $a_n, b_n > 0$ и $a_n \sim b_n$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Таким образом, для исследования на сходимость достаточно уметь выделять главную часть членов ряда.

Далее рассмотрим признаки, которые позволяют сравнивать рассматриваемые ряды с некоторыми рядами, свойства которых хорошо известны.

Напомним,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

при $0 < q < 1$ сходится, а при $q \ge 1$ – расходится.

Теорема 22.8. *(Даламбера) Пусть* $a_n > 0$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1.$$

Тогда

$$\sum \lim_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Если

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1,$$

то

$$\sum \lim_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Доказательство. 1. Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{(q+\varepsilon)^{n+1}}{(q+\varepsilon)^n}.$$

По теореме 22.6 получаем, что исходный ряд сходится.

2. Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon - 1,$$

откуда

$$a_{n+1} \ge a_n,$$

а значит, $a_n \not\to 0$.

$\square$

Итак, признак Даламбера работает для рядов, последовательность членов которых похожа на геометрическую прогрессию.

Докажем признак Коши, который дает немного лучший результат.

Теорема 22.9. *(Коши) Пусть* $a_n \geq 0$. *Если*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Если

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Доказательство. 1. Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N$ такое, что $\forall\, n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1 \iff a_n < (q+\varepsilon)^n.$$

2. Из условия следует, что $\exists\, n_k$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q > 1.$$

Отсюда $\exists\, K$ такое, что $\forall\, k > K$

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1,$$

откуда $\forall\, k > K$

$$a_{n_k} > 1. \tag{99}$$

Итак, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

□

Пример 22.1. Обсудим условие (99). Например, ряд может иметь вид

$$0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + 0 \ldots$$

В этом случае 1 встречаются очень редко, но их бесконечно много, и поэтому ряд будет расходиться.

Заметим также, что в данном примере работает признак Коши, но не будет работать признак Даламбера.

Лекция 23. Обобщенный гармонический ряд и эталонный ряд с логарифмом

Обобщенный гармонический ряд и эталонный ряд с логарифмом

Разберем эталонный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Напомним, ранее мы уже выяснили, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Утверждение 23.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty, \quad p \leq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty, \quad p > 1.$$

Доказательство. Пусть $p \leq 1$. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Чтобы доказать утверждение для $p > 1$, сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 23.1.

$$(1-x)^{-p} > 1 + px, \quad \forall\, p > 0, \quad x \in (0,1). \tag{100}$$

Доказательство. Заметим, что для $x = 0$ в обеих частях неравенства (100) стоят 1. Убедимся, что соотношение верно для продифференцированного неравенства (а следовательно, и исходного):

$$p(1-x)^{-p-1} > p.$$

□

Лемма 23.2.

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \ \forall\, p > 1. \tag{101}$$

Доказательство. Заметим, что при $p = 2$ (101) превращается в тривиальную оценку

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

которая использовалась для доказательства сходимости соответствующего ряда.

Домножим обе части (101) на $p-1$ и n^{p-1}. Сгруппировав, получим

$$1+\frac{p-1}{n^p}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-(p-1)}.$$

Это неравенство выполняется в силу утверждения леммы 23.1. □

Вернемся к доказательству утверждения. Воспользуемся в очередной раз критерием Коши. Распишем

$$\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k^p}<\frac{1}{p-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{1}{(k-1)^{p-1}}-\frac{1}{k^{p-1}}\right)<$$
$$<\frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}<\varepsilon,\quad \forall\, n>N(\varepsilon)=\frac{1}{((p-1)\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

□

Утверждение 23.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}=+\infty,\quad p\le 1,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}<+\infty,\quad p>1.$$

Доказательство. Пусть $p\le 1$. Распишем

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}}\frac{1}{k\ln^p k}\ge\sum_{k=2^n+1}^{2^{2n}}\frac{1}{k\ln k}\ge\frac{1}{4\ln 2}.$$

Случай $p>1$ доказывается с помощью следующей леммы.

Лемма 23.3.

$$\frac{1}{n\ln^p n}<\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\ln^{p-1}(n-1)}-\frac{1}{\ln^{p-1} n}\right).\tag{102}$$

Доказательство. Умножим обе части (102) на $p-1$ и $\ln^{p-1} n$. Сгруппировав элементы неравенства, получим

$$1+\frac{p-1}{n\ln n}<\left(\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right)^{p-1}=\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-(p-1)}.$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$1+\frac{p-1}{\ln n}\frac{1}{n}<1+\frac{p-1}{\ln n}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=1-(p-1)\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}<\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-(p-1)}.$$

Здесь первое из неравенств было доказано ранее в курсе. □

□

Теорема 23.1. *Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тогда

$$a_n \asymp \frac{1}{n^p}.$$

Следствие. Пусть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff p > 1.$$

Доказательство. (Теорема 23.1) Рассмотрим последовательность

$$b_n = a_n n^p.$$

Выясним, сходится ли произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$. Напомним, если такое произведение сходится, то $b_n \to \text{const} \neq 0$.

Распишем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда получаем, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n/b_{n+1}$ сходится. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = C \neq 0.$$

Следовательно,

$$a_n \sim \frac{C}{n^p}, \quad C \neq 0.$$

□

Теорема 23.2. *Пусть*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right).$$

Тогда

$$a_n \asymp \frac{1}{n\ln^p n}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 23.1. Рассмотрим

$$b_n = a_n n \ln^p n.$$

Произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

сходится, так как

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n \ln^2 n} \right) \right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right)^{-p} = 1 + O\left(\frac{1}{n \ln^2 n} \right).$$

Тогда

$$\exists \lim_{n \to \infty} b_n = C \neq 0,$$

откуда получаем, что

$$b_n \sim \frac{C}{n \ln^p n}.$$

□

Теорема Коши о разрежении

Теорема 23.3. *(Коши о разрежении) Пусть $a_n \geq 0$ и не возрастает. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k < +\infty.$$

Обозначим

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k = b_n.$$

Справедлива следующая оценка:

$$\frac{2^n}{2} a_{2^n} \leq b_n \leq 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Отсюда и получаем утверждение теоремы. □

Пример 23.1. Проверим по теореме 23.3 Коши о разрежении расходимость следующего ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n} = +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Теоремы о рядах из частных

Напомним, среди рядов с членами вида $\frac{1}{n^p}$ граничным является ряд из $\frac{1}{n}$ (при $p > 1$ ряд сходится, $p <= 1$ – расходится). Аналогично для рядов с членами вида $\frac{1}{n \ln^p n}$ граничным является ряд с $\frac{1}{n \ln n}$.

Сформулируем более общее утверждение.

Теорема 23.4. *Пусть* $a_n > 0$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

то есть для

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

выполнено $S_n \nearrow +\infty$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} = +\infty, \quad p \leq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p} < +\infty, \quad p > 1.$$

Доказательство. 1. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m > n$ такое, что

$$S_m > 2S_n,$$

так как

$$\lim_{m\to\infty} S_m = +\infty.$$

Считаем $S_n > 1$.

Рассмотрим

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k^p} \geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_m} = \frac{S_m - S_n}{S_m} > \frac{1}{2}.$$

2. Докажем сначала, что[26]

$$\frac{a_n}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^p} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right). \tag{103}$$

Домножим обе части (103) на $(p-1)S_n^{p-1}$. Сгруппировав элементы неравенства и воспользовавшись тем, что

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

[26]Как легко заметить, эта оценка похожа на оценку леммы 23.2.

получим

$$1+(p-1)\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n} < \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)^{p-1}.$$

Далее,

$$1+(p-1)\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) < \left(1-\left(1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)\right)^{-(p-1)}. \tag{104}$$

Подставляя в лемму 23.1 $(1-S_{n-1}/S_n)$, получим, что неравенство (104), а следовательно, и (103) выполняются.

Вернемся к утверждению теоремы. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_n}{S_n^p} < \frac{1}{p-1}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right) < \frac{1}{(p-1)}\frac{1}{S_n^{p-1}} < \varepsilon\ \forall\ n > N(\varepsilon).$$

□

Вернемся к примерам выше. Рассмотрим $a_n = 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$, $S_n = n$. Тогда

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{1}{n^p},$$

то есть теорема 23.4 обобщает правило сходимости для ряда $\sum \frac{1}{n^p}$.

Аналогично, пусть $a_n = \frac{1}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty,$$

$$S_n \sim lnn.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{S_n^p} \sim \frac{1}{n\ln^p n}.$$

Обсудим еще один момент, связанный с теоремой 23.4. Из утверждения теоремы следует, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n} = +\infty,$$

хотя

$$\frac{a_n}{S_n} \ll a_n,$$

или, по-другому,

$$\frac{a_n}{S_n} = o(a_n).$$

Таким образом, не существует наименьшего расходящегося ряда (для каждого расходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum a_n/S_n$ меньше, но также является расходящимся). Обратим внимание, что условие $a_n > 0$ здесь является важным.

Убедимся, что неверно и обратное утверждение, то есть не существует наибольшего сходящегося ряда.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 23.4.

$$(1-x)^p < 1-px, \quad x,p \in (0,1). \tag{105}$$

Доказательство. При $x=1$ получим $1=1$. Итак, достаточно доказать, что верно неравенство, полученное из (105) дифференцированием:

$$-p(1-x)^{p-1} < -p.$$

Это неравенство эквивалентно

$$(1-x)^{p-1} > 1,$$

которое, очевидно, выполняется. □

Теорема 23.5. *Пусть $a_n > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, то есть для*

$$r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

выполняется условие $r_{n-1} \searrow 0$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^p} = +\infty, \quad p \geq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^p} < +\infty, \quad 0 < p < 1.$$

Доказательство. 1. Для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ такого, что $r_n < 1$ $\exists\, m > n$ такое, что

$$r_m < r_n/2.$$

Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{r_{k-1}^p} \geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{r_{n-1}} \geq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{r_n} = \frac{r_n - r_m}{r_n} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Докажем следующее неравенство:

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^p} < \frac{1}{1-p}\left(r_{n-1}^{1-p} - r_n^{1-p}\right), \quad 0 < p < 1. \tag{106}$$

Умножим обе части (106) на $p-1$ и разделим на r_n^{1-p}. Получим

$$(1-p)\frac{a_n}{r_{n-1}} < 1 - \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{1-p},$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\underbrace{\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{1-p}}_{=\left(1-\left(1-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)\right)^{1-p}} < 1-(1-p)\left(1-\frac{r_n}{r_{n-1}}\right).$$

Воспользовавшись леммой 23.4, получаем, что (106) выполняется.

Вернемся к утверждению теоремы. Оценим

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{r_{k-1}^p} < \frac{1}{1-p} \sum_{k=n+1}^{m} \left(r_{k-1}^{1-p} - r_k^{1-p}\right) < \frac{1}{1-p} r_n^{1-p} < \varepsilon \ \forall\ n > N.$$

□

Итак, предположим, у нас есть самый большой сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Тогда по теореме 23.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < +\infty,$$

хотя

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \gg a_n.$$

Таким образом, не существует наибольшего сходящегося ряда.

Лекция 24. Знакопеременные ряды

Условная сходимость рядов

Ранее мы доказали следующий важный результат.

Теорема 22.8. *Пусть* $a_n, b_n > 0$, $a_n \asymp b_n$.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Напомним, главный принцип исследования на сходимость знакопостоянных рядов заключается в следующем.

Теорема. *Пусть* $a_n > 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\iff \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - O(1)$.

Откажемся от условия постоянности знака. Возможны три случая.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (абсолютно).
3. Наконец, возможен следующий случай:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty. \tag{107}$$

На нем мы и остановимся подробнее.

Введем обозначения

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \le 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \ge 0 \end{cases} \tag{108}$$

Утверждение 24.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, но* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что в обозначениях (108)

$$a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-,$$

откуда

$$a^+ = \frac{1}{2}\left(|a| + a\right), \quad a^- = \frac{1}{2}\left(|a| - a\right).$$

Тогда частичные суммы рядов из условия записываются как

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} a_k\right), \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^- = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

При $n \to \infty$ обе этих последовательности расходятся, так как представляют собой линейную комбинацию сходящейся и расходящейся последовательностей. $\square$

Теорема 24.1. *(Римана) Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, но* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. *Пусть* $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Тогда

$$\exists\, \sigma :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S.$$

Доказательство. 1. Пусть $S \in \mathbb{R}$. По утверждению 24.1, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$. Обозначим через n_1^+ число такое, что

$$\sum_{n=1}^{n_1^+ - 1} a_n^+ \le S < \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+.$$

Аналогично, по утверждению 24.1, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$. Обозначим через n_1^- число такое, что

$$\sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^- < S \le \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^- - 1} a_n^-.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, построим 2 последовательности:

$$n_k^+ :\ \sum_{n=1}^{n_k^+ - 1} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^-} a_n^- \le S < \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_{k-1}^-} a_n^-, \tag{109}$$

$$n_k^- :\ \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^-} a_n^- < S \le \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^- - 1} a_n^-. \tag{110}$$

Вычитая из всех частей двойного неравенства (109) его правую часть, а из всех частей (110) – левую, получим

$$-a_{n_k}^+ \le S - \left(\sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_{k-1}^-} a_n^-\right) < 0,$$

$$0 < S - \left(\sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^-} a_n^-\right) \leq a_{n_k}^-.$$

Выберем теперь перестановку σ. $1, 2, 3, \ldots n_1^+$ остаются те, что $a_k^+ > 0$. Далее берем из $1, 2, 3, \ldots, n_1^-$ такие, что $a_k^- > 0$ и так далее. Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^- + \sum_{n=n_1^++1}^{n_2^+} a_n^+ - \sum_{n=n_1^-+1}^{n_2^+} a_n^- + \ldots + \sum_{n=n_{k-1}^++1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=n_{k-1}^-+1}^{n_k^-} a_n^- + \ldots$$

Отметим, что получившийся ряд – это исходный ряд с расставленными скобками. Для его частичных сумм верны следующие соотношения:

$$\left|\sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_{k-1}^-} a_n^- - S\right| \leq a_{n_k}^+, \quad \left|\sum_{k=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{n=1}^{n_k^-} a_n^- - S\right| \leq a_{n_k}^-.$$

2. Пусть $S = +\infty$. По утверждению 24.1, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$.

Пусть n_1^- – первый номер такой, что $a_{n_1^-}^- > 0$. Тогда

$$\exists\ n_1^+ :\ \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ > a_{n_1^-}^- + 1.$$

Далее, пусть n_2^- – первый номер, больший n_1^- и такой, что $a_{n_2^-}^- > 0$. Тогда

$$\exists\ n_2^+ :\ \sum_{n=1}^{n_2^+} a_n^+ > a_{n_1^-}^- + a_{n_2^-}^- + 2.$$

Продолжим рассуждения аналогичным образов. На k шаге выберем n_k^- – первый номер, больший n_{k-1}^- и такой, что $a_{n_k^-}^- > 0$. Тогда

$$\exists\ n_k^+ :\ \sum_{n=1}^{n_k^+} a_n > \sum_{m=1}^{k} a_{n_m^-}^- + k.$$

Возьмем перестановку, устроенную следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+ - a_{n_1^-}^- + \sum_{n=n_1^++1}^{n_2^+} a_n^+ - a_{n_2^-}^- + \ldots + \sum_{n=n_{k-1}^++1}^{n_k^+} a_n^+ - a_{n_k^-}^- + \ldots.$$

Частичная сумма преобразованного таким образом ряда

$$\sum_{n=1}^{n_k^+} a_n^+ - \sum_{m=1}^{k} a_{n_m^-}^- > k.$$

□

Признак Лейбница

Перейдем к обсуждению того, в каких случаях ряды вида (107) (знакопеременные ряды) сходятся.

Важный частный случай знакопеременных рядов – знакочередующиеся ряды.

Теорема 24.2. *(Признак Лейбница) Пусть $b_n > 0$, $b_n \searrow 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ сходится.*

Доказательство. Сгруппируем ряд из условия теоремы следующим образом:

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots$$

Эти два ряда равносходятся. Отметим, что у преобразованного ряда все слагаемые (каждая скобка) ≥ 0:

$$b_1 - b_2 \geq 0, \text{ т.к. } b_1 \geq b_2, \quad b_3 - b_4 \geq 0, \text{ т.к. } b_3 \geq b_4, \ldots$$

Воспользуемся признаком сравнения числовых рядов. Все слагаемые преобразованного ряда оцениваются сверху следующим образом:

$$b_1 - b_2 \leq b_1 - b_2 + b_2 - b_3, \quad b_3 - b_4 \leq b_3 - b_4 + b_4 - b_5, \ldots. \tag{111}$$

Однако

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \ldots = b_1.$$

Итак, больший ряд в (111) сходится, а значит, сходится и меньший ряд (а следовательно, и исходный).

Оценим

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \leq b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - b_4 + \ldots = b_1.$$

□

Следствие. Пусть $b_n \searrow 0$. Тогда

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \leq b - 1.$$

Следствие. Пусть $b_n \searrow 0$. Тогда

$$|r_n| \leq b_{n+1}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k.$$

Когда мы рассматривали знакопостоянные ряды, важную роль играла скорость стремления членов ряда к нулю. Заметим, что для знакопеременных рядов это не так. Например, в формулировке теоремы 24.2 (признак Лейбница) нет ограничений на скорость стремления b_n к 0, только на монотонность. За счет требования монотонности и происходит компенсация знаков. Рассмотрим рис. 24.1. Здесь последовательность, отмеченная черными точками, монотонна и компенсируется, а красными – накапливает «+».

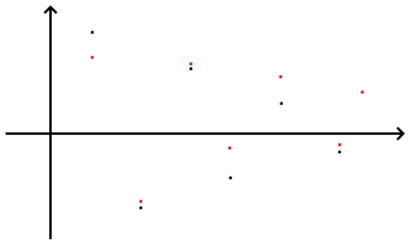


Рис. 24.1. Примеры накопеременных рядов

Ряд, преобразованный по Абелю

Перейдем к общему случаю. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – знакопеременный. В общем случае его члены представляют в виде

$$c_n = a + nb_n,$$

где a_n отвечает за компенсацию знаков, а b_n – за регулярное (монотонное) стремление $\to 0$.

Обозначим, как и раньше,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n.$$

Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \quad S_0 = 0.$$

В таком случае частичная сумма исходного ряда представима в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1})\, b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k + S_n b_n - S_0 b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Delta b_k + S_n b_n.$$

Фактически этим преобразованием мы доказали следующую теорему.

Теорема 24.3. *(Абеля) Пусть* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n b_n$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится* $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ *сходится.*

Отметим, что в некоторых ситуациях *ряд, преобразованный по Абелю*

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$$

сходится лучше, чем исходный $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Вернемся к признаку Лейбница (теорема 24.2). Здесь

$$a_n = (-1)^{n+1}, \quad b_n \searrow 0, \quad S_n = O(1),$$

откуда

$$S_n b_n \to 0,$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ сходится $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ сходится. Отметим, что преобразованный ряд является знакопостоянным (положительным). С такими рядами мы уже умеем работать.

Лекция 25. Признаки условной сходимости числовых рядов. Произведение рядов

Признаки условной сходимости рядов

Продолжим обсуждение знакопеременных рядов. В прошлый раз мы доказали следующие результаты.

Теорема 25.4. *(Признак Лейбница) Пусть $b_n > 0$, $b_n \searrow 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ сходится, причем*

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k\right| \leq b_{n+1}.$$

Напомним, признак Лейбница является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 25.5. *(Абеля) Пусть a_n, b_n таковы, что*

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n b_{n+1}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(b_n - b_{n+1})$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(b_n - b_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} S_n b_{n+1}. \tag{112}$$

Равенство в (112) понимается в том смысле, что обе части либо одновременно существуют, либо одновременно не существуют.

Заметим, что на практике члены рассматриваемого ряда приходится разбивать в произведение $a_n b_n$, руководствуясь собственными соображениями. Как правило, a_n отвечает за перемену знаков, а b_n регулярна. Так, в теореме 25.4 (признак Лейбница)

$$a_n = (-1)^{n+1}.$$

Здесь

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1}_{n} = \begin{cases} 0, & n \text{ четно}, \\ 1, & n \text{ нечетно} \end{cases} \qquad S_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Тогда (112) записывается как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(b_n - b_{n+1})$$

– по сути, в этом случае преобразованный по Абелю ряд является рядом из первых разностей и сходится абсолютно.

Сформулируем следствия из теоремы 25.5. Эти следствия принято называть *признаками условной сходимости числовых рядов.*

Теорема 25.1. *(Признак Дирихле) Пусть a_n и b_n такие, что*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} = O(1), \quad b_n \searrow 0.$$

Тогда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ *сходится абсолютно;*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n;$$

3. *Справедлива оценка*

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq 2 \sup_n |S_n| b_{n+1}.$$

Теорема 25.2. *Утверждение теоремы следует из теоремы 25.5 Абеля.*

1. *Справедлива оценка*

$$|S_n \Delta b_n| \leq \sup_n |S_n| \Delta b_n.$$

Ряд из первых разностей сходится, $\sup\limits_n |S_n| = const$, а значит, по признаку сравнению сходится и ряд из $S_n \Delta b_n$.

2. *Справедливо соотношение*

$$S_n b_{n+1} = O(1) o(1) = o(1),$$

а значит, исходный и преобразованный по Абелю ряды равносходятся. Сходимость преобразованного ряда мы доказали выше, поэтому и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

3. *Распишем*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (S_k - S_n) \Delta b_k\right| \leq 2 \sup_n |S_n| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta b_k = 2 \sup_n |S_n| b_{n+1}.$$

Теорема 25.3. *(Признак Абеля) Пусть a_n и b_n таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $b_n \nearrow C$. Тогда*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n$ *сходится абсолютно;*

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. 1. По условию, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $S_n = O(1)$,

$$|S_n \Delta b_n| \le \sup_n |S_n| \left(-\Delta b_n\right).$$

2. Распишем

$$\lim_{n\to\infty} S_n b_{n+1} = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

тогда по теореме 25.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \Delta b_n + C \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

Замечание 25.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

По признаку Лейбница этот ряд сходится. Однако, если мы умножим члены этого ряда на ограниченную последовательность $(-1)^{n+1}$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^{n+1}$$

расходится.

Возникает вопрос: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, на какую b_n можно его умножить?

Ответ: $b_n \nearrow C$ или $b_n \searrow C$.

Произведение рядов

Ранее мы уже складывали и вычитали ряды, умножали на числа, расставляли скобки между членами ряда.

Напомним распределительный закон, известный из школьного курса:

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd.$$

Хотим научиться перемножать ряды, то есть определить

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Рассмотрим бесконечную матрицу

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \tag{113}$$

Надо понять, в каком порядке складывать элементы (113). Существуют разные способы суммирования. Мы рассмотрим суммирование в смысле Коши[27].

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_2b_1 \to & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \overset{+}{a_1}b_1 & \overset{-}{a_2}b_1 & \overset{+}{a_3}b_1 & \dots \\ \overset{-}{a_1}b_2 & \overset{+}{a_2}b_2 & a_3b_2 & \dots \\ \overset{+}{a_1}b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

а) б)

Рис. 25.1. а) Произведение в смысле Коши, б) Отсутствие компенсации знаков

Определение 25.1.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

где (рис. 25.1, а)

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k},$$

называется *произведением в смысле Коши.*

Теорема 25.4. *(Коши) Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB.$$

[27]Почему мы рассматриваем этот способ, станет более понятно в следующем семестре, когда мы будем рассматривать степенные ряды.

Доказательство. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \iff \sup_n \sum_{k=1}^{n} |a_k| < +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty \iff \sup_n \sum_{k=1}^{n} |b_k| < +\infty,$$

получим, что

$$\sum_n \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right) < +\infty. \tag{114}$$

Раскрыв в (114) скобки, получим сумму всех чисел внутри квадрата

$$\begin{matrix} |a_1||b_1| & \dots & |a_n||b_1| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_1||b_n| & \dots & |a_n||b_n| \end{matrix}$$

Запишем теперь сумму элементов в верхнем треугольнике (с центром в верхнем левом углу):

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_1| + |a_1||b_2| + \ldots + \ldots < +\infty,$$

так как эта сумма меньше, чем сумма всех элементов квадрата, а та в силу (114) ограничена. Отсюда

$$a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + \ldots$$

сходится абсолютно. Значит, мы можем расставить скобки в соответствии с определением 25.1:

$$a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + \ldots$$

– такой ряд тоже сходится абсолютно. □

Теорема 25.5. *(Мертенса) Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB.$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, $\exists\ N_1$ такое, что $\forall\ n > N_1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon,$$

откуда
$$\left|A-\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$
Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\exists\ N_2$ такое, что $\forall\ n > N_2$
$$\left|B-\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \varepsilon.$$
Положим
$$N = \max\left\{N_1, N_2\right\}.$$
Тогда $\forall\ n > 2N$
$$\sum_{m=1}^{n} c_m = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n} a_k b_{m+1-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{m=k}^{n} b_{m+1-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{m=1}^{n+1-k} b_m = \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{m=1}^{n+1-k} b_m + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \sum_{m=1}^{n+1-k} b_m.$$
Тогда
$$\left|AB-\sum_{m=1}^{n} c_m\right| = \left|AB - B\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{m=n+2-k}^{\infty} b_m - \sum_{k=N+1}^{n} a_k \sum_{m=1}^{n+1-k} b_m\right| \le$$
$$\le |B|\left|A-\sum_{k=1}^{N} a_k\right| + \sum_{k=1}^{N}|a_k|\left|\sum_{m=n+2-k}^{\infty} b_m\right| + \sum_{k=N+1}^{n}|a_k|\left|\sum_{m=1}^{n+1-k} b_m\right| < \varepsilon|B| +$$
$$+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + \sup_n\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|\varepsilon.$$
□

Обратим внимание, что в доказательстве теоремы 25.4 не имеет значения, как именно суммировать ряд, так как имеет место абсолютная сходимость. В теореме 25.5 Мертенса крайне важно, что суммирование ведется именно таким образом. В противном случае результат был бы другим.

Заметим, что мы не можем сформулировать более слабого условия, чем условие теоремы 25.5 Мертенса.

Пример 25.1. Рассмотрим
$$a_n = b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$
Ряд с такими членами сходится (по признаку Лейбница). Тогда (в смысле Коши)
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n+1-(k+1)}}{\sqrt{n+1-k}}.$$

Преобразуя, получим

$$c_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}.$$

Записывая матрицу (113), получим следующую картину (рис. 25.1, б). Компенсация знаков будет только в том случае, если выбрать правильный способ обхода матрицу. Складывая по диагонали (в смысле Коши), с учетом оценки

$$|c_n| \geq n \frac{2}{n+1} \geq 1$$

получим разброс в частичных суммах.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ