ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 2

ФОМЕНКО
ТАТЬЯНА НИКОЛАЕВНА

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

1 Лекция 1. Интегральная сумма. Определенный интеграл Римана. Суммы Дарбу **9**

1.1 Интегральная сумма 9

1.2 Определенный интеграл Римана 13

1.2.1 Необходимое условие существования определенного интеграла Римана 13

1.2.2 Суммы Дарбу и их свойства 15

2 Лекция 2. Свойства сумм Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций **19**

2.1 Основная лемма Дарбу 23

2.2 Критерии интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ 25

2.3 Классы интегрируемых на $[a,b]$ функций 28

3 Лекция 3. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла **30**

3.1 Основные (элементарные) свойства определенного интеграла Римана . 34

4 Лекция 4. Теоремы о среднем значении для определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом **41**

5 Лекция 5. Замена переменной и интегрирование по частям. Несобственные интегралы первого рода **46**

5.1 Примеры 46

5.2 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле 47

5.3 Несобственные интегралы первого рода. Вычисление. Интеграл Дирихле 50

5.4 Критерий Коши. Признаки сравнения 52

6 Лекция 6. Признак Дирихле. Абсолютная и условная сходимость. Несобственные интегралы второго рода **57**

6.1 Признак Дирихле (Дирихле-Абеля). Интегралы Френеля и Эйлера-Пуассона 57

6.2 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода . . . 60
6.3 Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле . . . 62
6.4 Несобственные интегралы второго рода . . . 63

7 Лекция 7. Главное значение несобственного интеграла. Спрямляемые кривые и их длина 66
7.1 Главное значение (по Коши) несобственного интеграла . . . 66
7.2 Приложения определенного интеграла . . . 67
7.3 Кусочно-линейные функции. Ломаная . . . 69
7.4 Спрямляемые кривые. Свойства . . . 70
7.5 Вычисление длины дуги кривой . . . 73

8 Лекция 8. Квадрируемые плоские фигуры и их площади 76
8.1 Следствия из формулы длины кривой. Примеры . . . 76
8.2 Плоские фигуры. Многоугольные фигуры и их площадь . . . 80
8.3 Квадрируемость плоской фигуры. Примеры . . . 81
8.4 Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора . . . 84
8.5 Площадь криволинейного сектора . . . 86

9 Лекция 9. Кубируемые пространственные тела и их объемы 88
9.1 Геометрический смысл определенного интеграла . . . 88
9.2 Кубируемость и объем пространственного тела . . . 90
9.3 Кубируемость цилиндрического тела . . . 93
9.4 Объемы тел вращения . . . 95
9.5 Вычисление физических величин . . . 97

10 Лекция 10. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Методы хорд и касательных решения уравнений 99
10.1 Геометрическая идея приближенных методов . . . 99
10.2 Формулы приближенных методов и оценки погрешностей . . . 101
10.3 Вывод оценки погрешности для метода прямоугольников . . . 104
10.4 Приближенные методы хорд и касательных решения уравнений вида $f(x) = 0$ . . . 107

11 Лекция 11. Пространство R^n 112

11.1 Погрешность методов хорд и касательных приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ . . . 112

11.2 Пространство R^n . . . 113

11.3 Точки в R^n. Открытые и замкнутые множества. Линейно связное множество . . . 116

11.4 Последовательности точек в R^n. . . . 118

11.5 Теорема Больцано-Вейерштрасса . . . 121

12 Лекция 12. Функции многих переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных 124

12.1 Функции многих переменных. Предел функции многих переменных . . 124

12.2 ε - окрестности конечных точек и бесконечности в R^n. Условия Коши. Критерий Коши. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные пределы . . . 126

12.3 Двойные и повторные пределы. Бесконечно малые функции нескольких переменных . . . 128

12.4 Непрерывность функции нескольких переменных в точке. Точки разрыва 131

13 Лекция 13. Локальные и глобальные свойства непрерывной функции нескольких переменных. Дифференцирование функции нескольких переменных 133

13.1 Лемма о повторном пределе . . . 133

13.2 Связь непрерывности функции по совокупности переменных с непрерывностью функции по переменной . . . 134

13.3 Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции . . . 136

13.4 Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Теорема о промежуточном значении . . . 138

13.5 Теоремы Вейерштрасса. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора 140

13.6 Дифференцирование функции нескольких переменных. Частная производная . . . 141

14 Лекция 14. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференциал и частные производные сложной функции 143

14.1 Примеры вычисления частных производных 143

14.2 Связь дифференцируемости и непрерывности. Геометрический смысл понятия дифференцируемости функции 144

14.3 Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных 147

14.4 Дифференциал функции нескольких переменных. Дифференциал и частные производные сложной функции 148

15 Лекция 15. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных. Градиент и производная по направлению. Частные производные и дифференциалы высших порядков 150

15.1 Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных 150

15.2 Инвариантность формы записи дифференциала нескольких переменных. Формулы вычисления дифференциалов некоторых функций . . . 151

15.3 Градиент функции и производная по направлению 152

15.4 Геометрический смысл и свойства градиента 154

15.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков. Две теоремы о равенстве смешанных частных производных 156

16 Лекция 16. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум функции нескольких переменных 158

16.1 Теоремы о равенстве смешанных частных производных 158

16.2 Дифференциалы высших порядков 159

16.3 Формула Тейлора для функции нескольких переменных 161

16.4 Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие существования локального экстремума 164

17 Лекция 17. Квадратичные формы и их свойства. Достаточные условия существования локального экстремума функции нескольких переменных 167

17.1 Квадратичные формы. Критерий Сильвестра 167

17.2 Достаточные условия существования локального экстремума 169

17.3 Частный случай: функции двух переменных 172

18 Лекция 18. Неявные функции. Система неявных функций 176

18.1 Неявные функции. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявной функции 176

18.2 Доказательство теоремы. Существование и непрерывность 177

18.3 Доказательство теоремы. Дифференцируемость 180

18.4 Существование, непрерывность и дифференцируемость обратной функции одной переменной. Система неявных функций 182

19 Лекция 19. Условный локальный экстремум функции нескольких переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа 185

19.1 Гладкая зависимость и независимость функций 185

19.2 Достаточные условия гладкой независимости функций 187

19.3 Условный локальный экстремум функции нескольких переменных . . . 188

19.4 Необходимые условия существования условного локального экстремума 190

19.5 Метод неопределенных множителей Лагранжа. Необходимые условия по методу Лагранжа 191

20 Лекция 20. Достаточные условия существования условного локального экстремума. Числовые ряды. Ряды с положительными членами 193

20.1 Достаточные условия для отыскания условного локального экстремума по методу Лагранжа 193

20.2 Пример отыскания условного локального экстремума 194

20.3 Числовые ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда 195

20.4 Ряды с положительными членами 198

20.5 Признаки сравнения рядов 199

20.6 Признак Даламбера сходимости ряда 201

21 Лекция 21. Признаки сходимости рядов с положительными членами 204

21.1 Признак Коши (радикальный) сходимости рядов 204

21.2 Сравнение признаков Даламбера и Коши 206

21.3 Интегральный признак Маклорена-Коши. Ряд Дирихле 208

21.4 Признак Раабе 211

22 Лекция 22. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость, теоремы Римана и Коши. Признак Дирихле-Абеля сходимости знакопеременных рядов 213

22.1 Сравнение признака Раабе с признаками Даламбера и Коши. Признак Гаусса . . . 213

22.2 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость . . . 214

22.3 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящихся рядов . . . 216

22.4 Теорема Коши о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов . . . 218

22.5 Признак сходимости Дирихле-Абеля. Признак Лейбница . . . 219

23 Лекция 23. Арифметические операции над сходящимися рядами. Бесконечные произведения и двойные ряды 222

23.1 Пример (признак Дирихле-Абеля) . . . 222

23.2 Арифметические операции над сходящимися рядами . . . 222

23.3 Бесконечные произведения. Связь с числовыми рядами . . . 225

23.4 Двойные ряды . . . 227

23.5 Методы Чезаре и Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов . 230

Лекция 1. Интегральная сумма. Определенный интеграл Римана. Суммы Дарбу

Интегральная сумма

Рассматриваем некоторый отрезок $[a,b]$ на числовой оси. Функция $f(x)$ определена на этом отрезке.

Введем вспомогательные понятия.

Определение 1.1. *Разбиением отрезка* $[a,b]$ *называется такая совокупность точек* $\{X_k\}, \quad k = 0,1,\cdots N >$ *где* $x_0 = 0,\cdots,x_k < x_{k+1}\cdots,x_N = b$

Рис. 1.1. Разбиение отрезка

Для такого разбиения вводится понятие **диаметр или мелкость разбиения** $\{X_k\}$ обычно обозначают $d = d(\{x_k\})$. Это максимальная длина промежутков между точками. Записывается так:

$$d = d(\{X_k\}) := \max_{x \leqslant k \leqslant N} x_k - x_{k-1}$$

Определение 1.2. *Объединение двух разбиений*

Возьмем $\{X_k\}, \quad \{Y_j\}$ *с конечным числом точек. Концевые точки - точки* $a, \quad b$, *расстояние между соседними точками обязательно не нулевое и положительное. Тогда объединение будет выглядеть так:*

$$\{X_k\} \cup \{Y_j\}$$

С точки зрения разбиения это будет новое разбиение, у которого своя нумерация точек:

$$\{X_k\} \cup \{Y_j\} = \{Z_m\}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

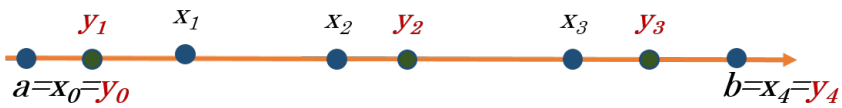

Рис. 1.2. Новое разбиение

Точки нумеруются в порядке возрастания.

Это новое разбиение

$$z_0 = a < z_1 = y_1 < z_2 = x_1 < z_3 = x_2 < z_4 = y_2 < z_5 = x_3 < z_6 = y_3 < z_7 = b$$

Точки z – это точки нового разбиения. Чтобы определить диаметр разбиения, нужно рассмотреть все промежутки между точками первого и второго разбиений, найти максимум. Мелкость нового разбиения получим как максимум такого расстояния.

Определение 1.3. *Измельчением разбиения* $\{X_k\}$ *на том же отрезке* $[a,b]$ *называется такое разбиение* $\{Z_m\}$*, что каждая точка первого разбиения является и точкой второго разбиения, но там могут быть дополнительные точки:*

$$\{X_k\} < \{Z_m\}$$

Обычно рассматривают строгое включение, то есть в этом множестве есть дополнительные точки (хотя бы одна). Если их нет, это тривиальное равенство.

Если есть хотя бы одна дополнительная точка, мелкость разбиения не обязательно уменьшится, поскольку максимальное расстояние между точками тоже может сохраниться.

Перейдем к построению вспомогательного понятия для определенного интеграла Римана.

Определение 1.4. *Размеченное разбиение – это пара* $(\{X_k\},\{\xi_k\})$*, где точка* $X_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Теперь можно составить понятие **интегральной суммы**, соответствующей размеченному разбиению.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 1.5. *Пусть задано размеченное разбиение* $\tau = (\{X_k\}, \xi)$, *где* $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$. *То есть мелкость разбиения определяется:*

$$d = \max_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

Определим интегральную сумму:

$$\sigma_f = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(X_k, \xi) :=$$

$$:= \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \delta X_k = \sigma_f(X_k, \xi_k)$$

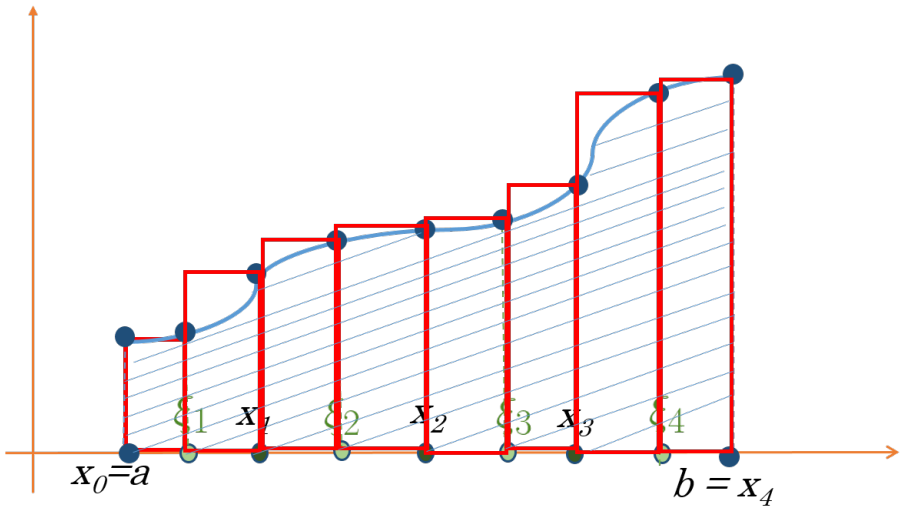

Рис. 1.3. Геометрический смысл интегральной суммы

Геометрический смысл интегральной суммы – это площадь ступенчатой фигуры, заштрихованной на рисунке **1.3**.

Определение 1.6. *Предел интегральных сумм*

Число A *называется пределом интегральных сумм* σ_f *при мелкости* d *разбиений,* $d \to 0$, $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$ *существует такое* $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого разбиения* X_k *с мелкостью разбиения* $> \Delta$ *и любого набора* ξ_k, *где* ξ_k *принадлежит отрезку* $[x_{k-1}, x_k]$ *будет следовать, что если мы рассмотрим разность между интегральной*

суммой, построенной по этому размеченному разбиению, модуль разности между интегральной суммой и числом A будет меньше ε:

$$|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} f(\xi)\Delta x_k - A| < \varepsilon$$

Предел интегральных сумм не зависит от того, разбивается ли отрезок $[a,b]$ на равные или неравные промежутки. Важно, чтобы мелкость (максимальное расстояние между точками была достаточно маленькой).

Число A является пределом интегральных сумм по размеченному разбиению при единственном условии: мелкость разбиений стремится к нулю. Запись:

$$A = \lim \sigma_f(\{X_k\},\{\xi_m\}) \quad \textit{при условии} d(\{X_n\}) \to 0$$

Теорема 1.1. *Теорема о единственности предела интегральных сумм*

Пусть известно, что

$$\exists \lim_{d\to 0} \sigma_f = A$$

Пусть на этом же отрезке

$$\exists \lim_{d\to 0} \sigma_f = B$$

Тогда утверждается, что $a = B$.

Доказательство.

Рассмотрим модуль разности $|A-B|$:

$$|a-B| \leqslant |A-\sigma_f| + |\sigma_f - B|$$

Поскольку по условию теоремы эти пределы существуют, то это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_1 = \Delta(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$$

такое, что при $d < \sigma, \Rightarrow |A-\sigma_f| < \frac{\varepsilon}{2}$.
С другой стороны, для того же самого ε есть и второй предел B, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_2 = \Delta(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$$

такое, что при $d < \Delta_2, \Rightarrow |B-\sigma_f| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если теперь возьмем минимум из этих двух чисел, то

$$\forall \Delta, 0 < \Delta \leqslant min \Delta_1, \Delta_v \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow при \quad d < \Delta \Rightarrow$$

$$d < \sigma, \Rightarrow |A - \sigma_f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d < \Delta_2, \Rightarrow |B - \sigma_f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $|A - B| = |A - \sigma_f| + |\sigma_f - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Получаем, что два вещественных числа, A и B отличаются друг от друга меньше, чем любое положительное число.

Отсюда следует, что их разность равна нулю, то есть они совпадают:

$$|A - B| = 0, \quad \Rightarrow A = B$$

Что и требовалось доказать. ■

Определенный интеграл Римана

Определение 1.7. *Определенным интегралом (Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел (если существует) такого вида:*

$$\lim_{d \to 0} \sigma_f(X_k, \xi_k), \quad d = d(x_k)$$

$$\lim_{d \to 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

Для существования предела есть необходимые и достаточные условия.

Необходимое условие существования определенного интеграла Римана

Если интеграл существует, говорят, что **функция $f(x)$ интегрируема** по Риману на отрезке $[a,b]$.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 1.2. *Необходимое условие интегрируемости.*

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она обязательно ограничена на этом промежутке. То есть множество значений функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ ограничено.

Иначе можно сказать, что существует такая положительная константа m, что модуль $f(x)$ не превосходит этой константы для всех x из заданного отрезка.

Доказательство.

Докажем от противного - предположим, что функция не ограничена и придем к противоречию.

Пусть $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$.Тогда если возьмем произвольное разбиение X_k найдется такой отрезок разбиения, (пусть k_0), что $f(x)$ не ограничена на отрезке $[x_{k-1}, x_{k_0}]$.

Рассмотрим последовательность разбиений X_k^n таких, что $d_n = dX_k^n = \frac{1}{n}$, то есть $d \to 0$.

Выберем на соответствующих отрезках ξ_k, где $k \neq k_0$ абсолютно произвольно (любые). На отрезке, где функция не ограничена, ($[x_{k-1}, x_{k_0}]$) выберем ξ_{k_0} так, что значение функции будет сколь угодно большим по модулю. То есть:

$$|f(\xi_{k_0}^n)| \cdot \Delta x^n > n + |\sum_{k \neq k_0} f(\xi_k^n) \cdot \Delta x_k^n|$$

Тогда рассмотрим модуль полной интегральной суммы по размеченному разбиению:

$$|\sigma_f(x_k^n, \xi_k^n)| = |\sum_k f(\xi_n^n)\Delta x_k^n| \geqslant |f(\xi_{k_0}^n)\Delta x_{k_0}^n| - |\sum_{k \neq k_0} f(\xi_k^n)\Delta x_k^n| > n$$

Тогда получаем, что при $n \to \infty$ сумма $|\sum_k f(\xi_n^n)\Delta x_k^n|$ тоже стремится к бесконечности, поскольку она всегда больше n. Отсюда следует, что

$$\sigma_f(X_K^N, \xi_k^n) \to \infty \quad n \to +\infty$$

Получаем противоречие с интегрируемостью функции f на $[a,b]$. Если функция интегрируема, то интегральные суммы стремятся к конечному пределу, а не к бесконечности.

Теорема доказана. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поясним неравенство

$$|\sum_k f(\xi_n^n)\Delta x_k^n| \geqslant |f(\xi_{k_0}^n)\Delta x_{k_0}^n| - |\sum_{k\neq k_0} f(\xi_k^n)\Delta x_k^n|$$

Использовано неравенство

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|$$

Доказательство.

$$|a| = |a+b-b| \leqslant |a+b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a+b| \geqslant |a| - |b|$$

■

Суммы Дарбу и их свойства

Рассматриваем только ограниченные на $[a,b]$ функции $f(x)$, потому что неограниченные функции не могут быть интегрируемы.

Возьмем любое разбиение X_k на отрезке $[a,b]$. На каждом из промежутков этого отрезка функция ограничена. Значит у нее обязательно есть супремум и инфинум.

Пусть M – $\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, m – $\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Обозначим M_k $\sup\limits_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)$, m_k – $\inf\limits_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)$.

Определение 1.8. *Верхней (нижней) суммой Дарбу для функции f и разбиения X_k называются выражения для* ***верхней*** *суммы:*

$$\overline{S_f} - \overline{S_f}(X_k) := \sum_k M_k \Delta x_k$$

для ***нижней*** *суммы:*

$$\underline{S_f} - \underline{S_f}(X_k) := \sum_k m_k \Delta x_k$$

Эти суммы служат решающим инструментом для отыскания достаточных условий для интегрируемости по Риману данных функций.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 1.3. *Шесть свойств сумм Дарбу.*

Пусть $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, пусть задано разбиение отрезка $[a,b]$. Сформулируем ряд свойств сумм Дарбу для этого разбиения.

1) $\forall \xi_k, \quad \xi_k \quad \in \quad [x_{k-1}, x_k]$:

$$\underline{S} \leqslant \sigma_f(X_k, \xi_k) \leqslant \overline{S}$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \xi_k', \quad$ *что*

$$(\sigma_f(X_k, \xi_k') - \underline{S}) < \varepsilon$$

Для этого же ε существует (ξ_k''), что

$$(\overline{S} - \sigma_f(X_k, \xi_k'')) < \varepsilon$$

3) пусть разбиение Y_m– это измельчение разбиения X_k. Тогда

$$\underline{S}' = \underline{S}'(y_m)$$

$$\overline{S}' = \overline{S}'(y_m)$$

Тогда: $\underline{S} \leqslant \underline{S}'$, а $\overline{S}' \leqslant \overline{S}$. То есть нижняя сумма Дарбу не уменьшается при измельчении разбиения, а верхняя сумма Дарбу не увеличивается.

4) Возьмем два произвольных разбиения. Пусть X_k и Z_m – два произвольных разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда нижняя сумма любого из них не превосходит верхней суммы любого другого или того же самого.

Обозначим их верхнюю и нижнюю суммы Дарбу:

$$\underline{S}', \overline{S} \quad \text{для разбиения} \quad X_k$$

$$\underline{\hat{S}}, \hat{S} \quad \text{для разбиения} \quad Z_m$$

Тогда нижняя сумма одного разбиения не превосходит верхней суммы другого:

$$\underline{S} \leqslant \hat{\overline{S}}$$

Аналогично, нижняя сумма второго разбиения не превосходит верхней суммы первого:

$$\underline{\hat{S}} \leqslant \overline{S}$$

5) Существует супремум всевозможных нижних сумм по всевозможным разбиениям ($\underline{I}$) - ***нижний интеграл Дарбу*** *для функции f на данном отрезке.*

И, поскольку все верхние суммы ограничены снизу любой нижней суммой, то существует инфинум всевозможных верхних сумм ($\overline{I}$), который называется ***верхним интегралом Дарбу*** *для функции f на данном отрезке.*

Для любого разбиения X_k и его нижней и верхней сумм Дарбу верно, что

$$\underline{S} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}$$

6) Если к разбиению $\{X_k\}$ добавлены l новых точек (делается измельчение этого разбиения), и $\underline{S}'$ и $\overline{S}'$ – это суммы Дарбу для полученного разбиения, то между старыми и новыми суммами Дарбу возникают следующие неравенства:

$$\underline{S}' - \underline{S} \leqslant (M-m)ld$$

$$\overline{S} - \overline{S}' \leqslant (M-m)ld$$

Здесь d – это мелкость (диаметр) исходного разбиения $\{X_k\}$.

Доказательство.

Доказательство 1 очевидно.

$$\forall \xi_k \quad m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k \Rightarrow \underline{S} \leqslant \sigma_f \leqslant \overline{S}$$

Доказательство 2 Так как $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} \{f(x)\}$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \xi_k'$, что

$$m_k \leqslant f(\xi_k') < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \sum_k m_k \Delta x \leqslant \sum_k f(\xi_k')\Delta x_k < \sum_k (m_k + \frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_k =$$

$$= \underline{S} + \varepsilon$$

$$\sigma_f' - \underline{S} < \varepsilon$$

Аналогично доказывается, что

$$\overline{S} - \sigma_f'' < \varepsilon$$

Доказательство 3

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Добавим к разбиению $\{X_k\}$ новую точку $\{\eta\}$. Сравним верхние суммы Дарбу:

$$\overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$\overline{S}' = \sum_{k \neq k_0} M_k \Delta x_k + M_{k_0}^1 (\eta - x_{k_o - 1}) + M_{k_0}^2 (xk_0 - \eta)$$

Здесь $M_{k_0}^1 = \underset{x_{k_o-1} \leqslant x \leqslant \eta}{Sup} \{f(x)\}, \quad M_{k_0}^2 = \underset{\eta \leqslant x \leqslant x_{k_0}}{Sup} \{f(x)\}$

Ясно, что $M_{k_0}^1 \leqslant M_{k_0}$ и $Mk_0{}^2 \leqslant M_{k_0}$. Отсюда получаем, что

$$M_{k_0}^1 (\eta - x_{k_o - 1}) + M_{k_0}^2 (xk_0 - \eta) \leqslant m_{k_0} (\Delta x_{k_0})$$

$$\Rightarrow \overline{S}' \leqslant \overline{S}$$

Неравенство доказано. Для нижних сумм доказательство аналогично. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2. Свойства сумм Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций

Продолжение доказательства теоремы о шести свойствах сумм Дарбу.

Доказательство 4.

Пусть имеется два произвольных разбиения отрезка $[a,b]$ $\{X_k\}$ и $\{Y_j\}$.

Обозначим их верхнюю и нижнюю суммы Дарбу:

$$\underline{S}, \overline{S} \quad \textit{для разбиения} \quad \{X_k\}$$

$$\overline{S}', \underline{S}' \quad \textit{для разбиения} \quad \{Y_j\}$$

Нужно доказать, что нижняя сумма одного разбиения не превосходит верхнюю сумму другого разбиения.

Для доказательства этого свойства рассмотрим объединение двух разбиений:

$$\{X_k\} \cup \{y_j\} = \{Z_m\}$$

Очевидно, что разбиение $\{Z_m\}$ будет измельчением первого и второго разбиений.

Обозначим для нового разбиения $\{Z_m\}$ верхнюю и нижнюю суммы Дарбу:

$$\overline{S}'' \quad \textit{и} \quad \underline{S''}$$

Тогда получим:

$$\underline{S} \leqslant \underline{S}'' \leqslant \overline{S}'' \leqslant \overline{S}'$$

$$\underline{S} \leqslant \overline{S}'$$

Аналогично меняем суммы:

$$\underline{S}' \leqslant \underline{S}'' \leqslant \overline{S}'' \leqslant \overline{S}$$

$$\underline{S}' \leqslant \overline{S}$$

Что и требовалось доказать: для любой пары двух произвольных разбиений отрезка $[a,b]$ нижняя сумма одного разбиения не превосходит верхней суммы другого.

Доказательство 5.

Из доказательств свойств 3 и 4 следует, что любая нижняя сумма любого разбиения не превосходит любой верхней суммы любого разбиения. То есть зафиксируем какую-то верхнюю сумму разбиения, то все нижние суммы любых разбиений удовлетворяют неравенству:

$$\underline{S}' \leqslant \overline{S}$$

Иначе можно сказать, что совокупность всех нижних сумм Дарбу ограничена сверху любой верхней суммой, а совокупность всех верхних сумм Дарбу ограничена снизу любой нижней суммой.

Следовательно, существует супремум всевозможных нижних сумм по всевозможным разбиениям:

$$\exists \quad \sup_{\underline{S}} = \underline{I}$$

$\underline{I}$ называется **нижним интегралом Дарбу**. Аналогично отсюда следует, что существует инфинум всевозможных верхних сумм по всевозможным разбиениям:

$$\exists \quad \inf_{\overline{S}} = \overline{I}$$

$\overline{I}$ называется **верхним интегралом Дарбу**.

Поскольку верхний и нижний интегралы Дарбу являются супремумом и инфинумом, ясно, что для любых разбиений нижняя сумма Дарбу не превосходит нижнего интеграла, а верхний интеграл не превосходит любой верхней суммы Дарбу:

$$\underline{S} \leqslant \underline{I}, \quad \overline{I} \leqslant \overline{S}$$

Покажем, что $\underline{I} \leqslant \overline{I}\overline{S}$.

Предположим противное. Пусть $\overline{I} < \underline{I}$. Тогда:

$$\underline{I} = \overline{I} + \gamma, \quad \gamma > 0$$

По определению верхнего интеграла Дарбу (поскольку это инфинум) для некоторого разбиения существует такая верхняя сумма Дарбу $\overline{S}'$, что:

$$\overline{I} \leqslant \overline{S}' < \overline{I} + \frac{\gamma}{2}$$

Аналогично по определению нижнего интеграла Дарбу (это супремум, верхняя граница множества) существует для некоторого разбиения существует нижняя сумма $\underline{S}''$ такая, что:

$$\underline{I} - \frac{\gamma}{2} < \underline{S}'' \leqslant \underline{I}$$

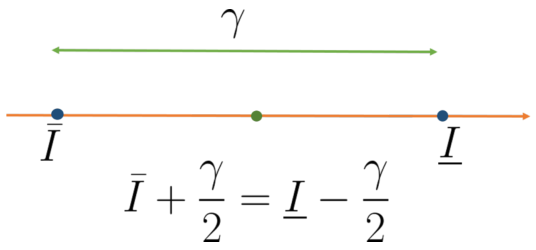

Рис. 2.1. Графическое доказательство

Из неравенств $\overline{S}' < \bar{I} + \frac{\gamma}{2}$ и $\underline{I} - \frac{\gamma}{2} < \underline{S}''$ следует, что найденная верхняя сумма $\overline{S}'$ меньше, чем нижняя сумма $\underline{S}''$, чего по доказанному **свойству 3** быть не может.

Отсюда следует, что **для любых** нижних и верхних сумм имеется неравенство:

$$\underline{S} \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant \overline{S}$$

Доказательство 6.

Формулировка свойства 6:

Если к разбиению $\{X_k\}$ добавлены l новых точек (делается измельчение этого разбиения), и $\underline{S}'$ и $\overline{S}'$ – это суммы Дарбу для полученного разбиения, то между старыми и новыми суммами Дарбу возникают такие неравенства:

$$\underline{S}' - \underline{S} \leqslant (M - m)ld$$

$$\overline{S} - \overline{S}' \leqslant (M - m)ld$$

Здесь d – это мелкость исходного разбиения $\{X_k\}$ Требуется доказать эти неравенства.

Добавим к разбиению $\{X_k\}$ одну новую точку:

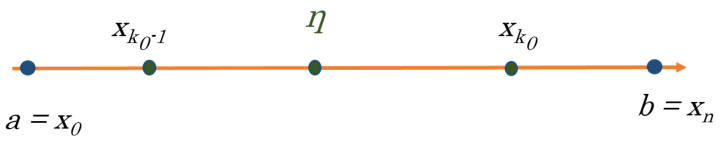

Рис. 2.2. Добавлена точка η

Если рассмотрим нижнюю сумму исходного разбиения $\underline{S}$, получим:

$$\underline{S} = \sum_k M_k \Delta x_k$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Нижняя сумма для нового разбиения:

$$\underline{S}' = \sum_{k \neq k_0} M_k \Delta x + m_{k_0}^1 (\eta - x_{k_0 - 1}) + m_{k_0}^2 (x_{k_0} - \eta)$$

Здесь $m_{k_0}^1$ и $m_{k_0}^2$ – это инфинумы:

$$m_{k_0}^1 = \inf_{x_{k_0-1} \leqslant x \leqslant \eta} \{f(x)\}$$

$$m_{k_0}^2 = \inf_{\eta \leqslant x \leqslant x_{k_0}} \{f(x)\}$$

Тогда получим:

$$\underline{S}' - \underline{S} = m_{k_0}^1 (\eta - x_{k_0-1}) + m_{k_0}^2 (x_{k_0} - \eta) - m_{k_0}(x_{k0} - x_{k_0-1}) =$$

$$= (m_{k_0}^1 - m_{k_0})(\eta - x_{k_0-1}) + (m_{k_0}^2 - m_{k_0})(x_{k_0} - \eta)$$

Очевидно, что:

$$(m_{k_0}^1 - m_{k_0}) \leqslant (M - m)$$

$$(m_{k_0}^2 - m_{k_0}) \leqslant (M - m)$$

То есть инфинум не превосходит значений супремума на всем отрезке $[a, b]$. То есть:

$$(m_{k_0}^1 - m_{k_0})(\eta - x_{k_0-1}) + (m_{k_0}^2 - m_{k_0})(x_{k_0} - \eta) \leqslant (M - m)\Delta x_{k_0} \leqslant (M - m)d$$

Вывод: при добавлении одной новой точки к разбиению $\{X_k\}$ получаем, что

$$\underline{S}' - \underline{S} \leqslant (M - m)d$$

При добавлении еще новой точки $\underline{S}'$ еще увеличится на величину, снова не превосходящую $(M - m)d$. И так далее.

Поэтому при добавлении l точек

$$\underline{S}'' - \underline{S} \leqslant (M - m)ld$$

Что и требовалось доказать. Первое неравенство доказано. Аналогично доказывается, что

$$\overline{S} - \overline{S}' \leqslant (M - m)ld$$

Теорема о шести свойствах сумм Дарбу доказана.

Основная лемма Дарбу

Еще одно важно свойство сумм и интегралов Дарбу - это лемма, которая называется **основная лемма Дарбу**

Интегралы Дарбу определяется как супремум всевозможных нижних сумм Дарбу и инфинум всевозможных верхних сумм Дарбу. Лемма провозглашает, что

$$\underline{I} = \lim_{d \to 0} \underline{S}$$

$$\overline{I} = \lim_{d \to 0} \overline{S}$$

Доказательство.

Докажем утверждение для верхних сумм Дарбу. Верхний интеграл Дарбу – это инфинум всевозможных верхних сумм Дарбу для всевозможных разбиений отрезка $[a,b]$.

Проведем рассуждение для верхнего интеграла Дарбу $\overline{I}$.

По определению

$$\overline{I} = \inf f\{\overline{S}\}$$

Отсюда вытекает, что для любого ε больше нуля существует такое разбиение $x = \{X_k\}$, что его верхняя сумма Дарбу $\overline{S}$ будет удовлетворять некоторому неравенству:

$$\overline{I} \leqslant \overline{S} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

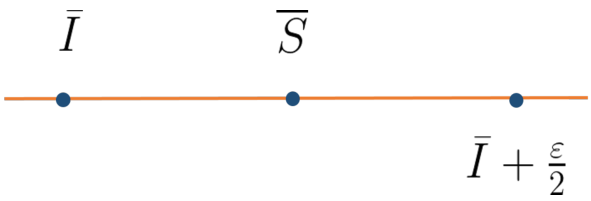

Рис. 2.3. Лемма Дарбу

Пусть в разбиении $\{X_k\}$ содержится $q+1$ точка.

Нужно доказать, что верхний интеграл – это предел верхних сумм. Для этого для любого ε нужно найти такое число, что если мелкость любого разбиения меньше этого числа, то тогда соответствующая верхняя сумма будет располагаться в интервале от верхнего интеграла до верхнего интеграла плюс ε.

Рассмотрим разбиение $\{Y_j\}$ с маленькой мелкостью $d = d(y)$, которая не превосходит некоторого числа

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)}$$

К разбиению $y = \{Y_j\}$ присоединим точки разбиения $x = \{X_k\}$, то есть объединим два разбиения. Концевые точки разбиений совпадают, поэтому новых точек можно добавить не более, чем $q-1$.

Получим новое разбиение $z = \{Z_n\}$.

Обозначим:

$\overline{S}$ – верхняя сумма Дарбу для разбиения $x = \{X_k\}$.

$\overline{S}'$ – верхняя сумма Дарбу для разбиения $y = \{Y_j\}$.

$\overline{S}''$ – верхняя сумма Дарбу для разбиения $z = \{Z_n\}$.

Разбиение $\{Z_n\}$ является объединением двух разбиений $\{X_k\}$ и $\{Y_j\}$, то есть это измельчение и того, и другого.

Тогда верхняя сумма нового разбиения будет располагаться так:

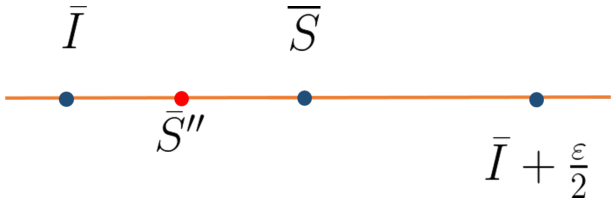

Рис. 2.4. $\overline{S}''$ разбиения $\{Z_n\}$

Сравним эту сумму $\overline{S}''$ с верхней суммой для разбиения $\{Y_i\}$:

$$\overline{S}' - \overline{S}'' \leqslant (M-m)(q-1)d \leqslant (M-m)(q-1)\frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит верхняя сумма Дарбу для разбиения $\{Y_j\}$ на рисунке будет размещаться так:

Таким образом верхняя сумма Дарбу для разбиения $\{X_k\}$ располагается на интервале от $\bar{I}$ до $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$. $\overline{S}''$ не превышает $\overline{S}$, поэтому располагается чуть левее (или совпадает) $\overline{S}$. Размещение $\overline{S}'$ – правее верхнего интеграла $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$. То есть интервал, в который попала верхняя сумма Дарбу для мелкого разбиения $\{Y_j\}$, будет таким:

$$\bar{I} \leqslant \overline{S}' < \bar{I} + \varepsilon$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

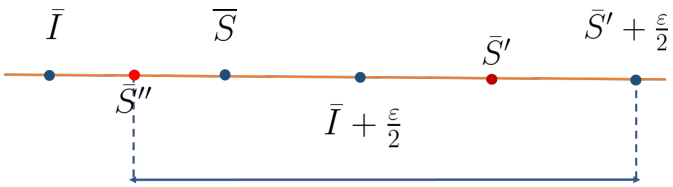

Рис. 2.5. $\overline{S}'$ разбиения $\{Y_j\}$

Вывод: для любого разбиения $\{Y_j\}$ с мелкостью $\delta(\varepsilon)$, которая не превосходит $\frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)}$ его верхняя сумма $\overline{S}'$ удовлетворяет условию $\bar{I} \leqslant \overline{S}' < \bar{I} + \varepsilon$. То есть

$$\overline{S}' \quad \in U_\varepsilon(\bar{I})$$

$$\bar{I} = \lim_{d \to 0} \overline{S}$$

Что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что

$$\underline{I} = \lim_{d \to 0} \underline{S}$$

■

Зная основные свойства сумм и интегралов Дарбу можно получить необъодимые и достаточные условия интегрируемости функции на заданном отрезке.

Критерии интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$

Сформулируем и докажем две теоремы.

Теорема 2.1. *Критерий интегрируемости* ***в терминах сумм Дарбу****.*

Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного ε существовало такое разбиение $\{X_k\}$, зависящее от ε, что его верхняя и нижняя суммы Дарбу удовлетворяют условию:

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$$

Доказательство.

Нужно доказать необходимость и достаточность условия. Докажем **необходимость**.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке a,b. То есть:

$$\exists \lim_{d\to 0} \delta_f = I = \int_a^b f(x)dx$$

По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\frac{\varepsilon}{4}) > 0$, что для любого разбиения $\{X_k\}$ с мелкостью $d < \delta$ будет верно, что:

$$|I - \delta_f(\{X_k\}\{\underset{\forall}{\xi_k}\})| < \frac{\varepsilon}{4}$$

По свойствам сумм Дарбу существует такой набор $\{\xi_k'\}$ в разбиении $\{X_k\}$, что

$$|\delta_f(\{X_k\}\{\xi_k\}) - \underline{S}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Аналогично существует другой набор $\{\xi_k''\}$ в разбиении $\{X_k\}$, что

$$|\delta_f(\{X_k\}\{\xi_k\}) - \overline{S}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Здесь $\overline{S}$ и $\underline{S}$ – суммы Дарбу для разбиения $\{X_k\}$.

При этом какие бы точки мы не брали (для $\{\xi_k'\}$ и $\{\xi_k''\}$), будет выполняться неравенство:

$$|I - \delta_f(\{X_k\}\{\underset{\forall}{\xi_k}\})| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Объединяя полученные неравенства, имеем:

$$|\overline{S} - \underline{S}| \leqslant |\overline{S} - \delta_f(\{X_k\},\{\xi_k''\})| + |\delta_f(\{X_k\},\{\xi_k''\}) - I| + |I - \delta_f(\{X_k\},\{\xi_k'\})| +$$

$$+|\delta_f(\{X_k\},\{\xi_k''\}) - \underline{S}|$$

Каждый из модулей меньше, чем $\frac{\varepsilon}{4}$, потому что для любых промежуточных точек ξ_k разница с интегралом меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. То есть получаем, что

$$|\overline{S} - \underline{S}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

$$|\overline{S} - \underline{S}| = \varepsilon$$

Необходимость доказана.

Вторая часть теоремы - **достаточность**.

Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что $f(x)$ интегрируема.

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\{X_k\}$, что его разность верхней и нижней суммы Дарбу меньше ε.

Известно, что

$$\underline{S} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S} \Rightarrow \underline{I} - \overline{I} \leqslant \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$$

По основной лемме Дарбу I будет являться пределом нижних и верхних сумм.

$$I = \lim_{\to 0} \overline{S} = \lim_{\to 0} \underline{S}$$

$$\Rightarrow \overline{S} - \underline{S} \underset{d \to 0}{\to} 0$$

В силу неравенства $\underline{S} \leqslant \delta_f \leqslant \overline{S}$, то есть так как нижняя сумма не превосходит любой интегральной суммы, и интеграл Дарбу тоже находится в таком же неравенстве $\underline{S} \leqslant I \leqslant \overline{S}$, то отсюда следует, что

$$\exists \lim_{d \to 0} I - \delta_f = 0$$

Это означает, что $\delta_f \to I$. То есть

$$\exists \lim_{d \to 0} \delta_f = I = \int_a^b f(x)dx$$

То есть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Теорема доказана. ■

Рассмотрим второй критерий интегрируемости.

Теорема 2.2. *Критерий интегрируемости функции* ***в терминах интегралов Дарбу****.*

Для того чтобы $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$.

Доказательство.

Докажем **необходимость**.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Докажем, что тогда ее верхний и нижний интегралы совпадают: $\underline{I} = \overline{I}$.

По **теореме 2.1** если функция f интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\{X_k\}$, что $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$.

Так как $\underline{S} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}$, то

$$\overline{I} - \underline{I} \leqslant \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$$

Так как ε произвольно, то отсюда следует, что эти интегралы Дарбу совпадают: $\overline{I} = \underline{I}$.

Докажем **достаточность**.

Пусть известно, что интегралы Дарбу совпадают: $\overline{I} = \underline{I} = I$ для функции $f(x)$.

Покажем, что тогда она интегрируема.

По основной лемме Дарбу

$$I = \lim_{d\to 0}\overline{S} = \lim_{d\to 0}\underline{S}$$
$$\Rightarrow \overline{S} - \underline{S} \underset{d\to 0}{\to} 0$$

Поскольку $\underline{S} \leqslant \delta_f \leqslant \overline{S}$ и $\underline{S} \leqslant I \leqslant \overline{S}$, то $\delta_f - I \to 0$:

$$|\delta_f - I| \leqslant \overline{S} - \underline{S} \underset{d\to 0}{\to} 0$$

Отсюда следует, что

$$\exists \lim_{d\to 0}\delta_f = I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Это означает, что функция f интегрируема.

Теорема доказана. ■

Ссылаясь на доказанные критерии можно рассмотреть, для каких классов функций работают эти критерии.

Классы интегрируемых на $[a,b]$ функций

Теорема 2.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство.

По теореме Кантора если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке. То есть для $\forall\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{b-a}) > 0$, что для любых

точек x_1, x_2, лежащих на этом отрезке, для которых выполняется условие $|x_1 - x_2| < \delta$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{X_k\}$ с мелкостью $d < \delta$.

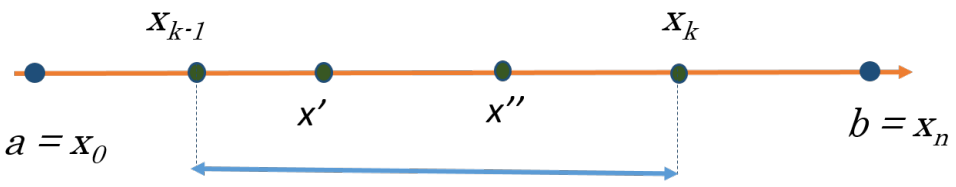

Рис. 2.6. Точки x' и x''

$$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Отсюда понятно, что $\sup\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{|f(x') - f(x'')|\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Рассмотрим $\overline{S}, \underline{S}$ для $\{X_k\}$.

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_k (M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_k \Delta x_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать. ■

Задача. Доказать по определению супремума и инфинума, что $\sup\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x') - f(x'')\} = \sup\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} - \inf\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}$.

Исходя из ранее использованных обозначений

$$\sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x')\} = M_k$$

$$\inf_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} = m_k$$

условие задачи можно записать так: $\sup\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x') - f(x'')\} = M - k - m_k$

Решить самостоятельно.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла

Введем обозначения.

Будем говорить, что функция f интегрируема $[a,b]$: $f \in R[a,b]$.

Функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$: $f \in C[a,b]$.

Теорема 3.1. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема. Иная запись: $f \in R[a,b]$*

Доказательство.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{X_k\}$. Разность верхних и нижних сумм Дарбу для этого разбиения

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_k (M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant \sum_k (M_k - m_k)d$$

Здесь d – это мелкость (диаметр разбиения $\{X_k\}$). Тогда

$$\sum_k (M_k - m_k)d = d\sum_k (M_k - m_k)$$

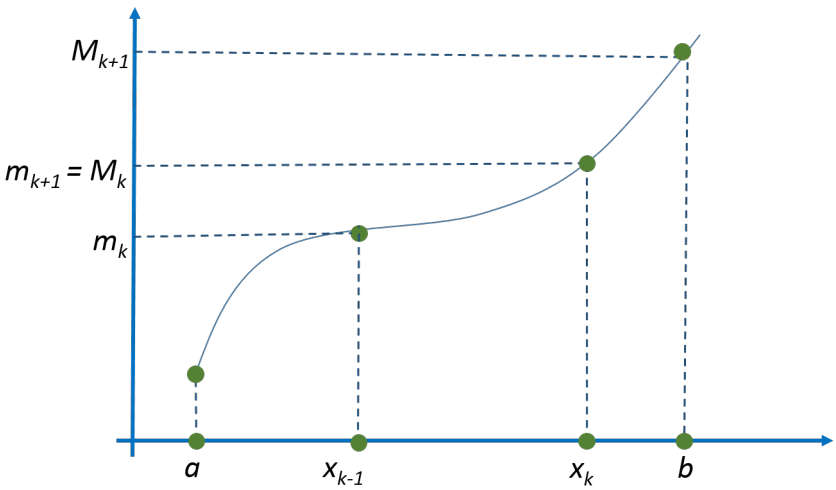

Рис. 3.1. Монотонная функция

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сумма $\sum_k (M_k - m_k)$, рассматриваемая на отрезке $[a,b]$, будет равна разности между супремумом и инфинумом функции на всем отрезке $[a,b]$

$$\sum_k (M_k - m_k) = d(M-m)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ для любого разбиения $\{x_k\}$, где мелкость разбиения не превышает $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, будет такой:

$$\overline{S} - \underline{S} \leqslant d(M-m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(M-m)(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Получили искомое неравенство. То есть для монотонной функции для любого ε достаточно взять разбиение с хорошей мелкостью, удовлетворяющей условию, тогда получается верное неравенство. Отсюда следует, что функция интегрируема: $f \in R[a,b]$.

Что и требовалось доказать. ■

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке a,b и множество точек ее разрыва таково, что для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом открытых интервалов с суммарной длиной $l < \varepsilon$.*

Тогда функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть ее множество точек разрыва для любого $\varepsilon > 0$ покрыта конечным числом интервалов (q интервалами) с суммарной длиной $l < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$.

Для доказательства вычтем из отрезка все интервалы, которыми покрыто множество точек разрыва функции. Обозначим интервалы $\{J_j\}, 1 \leqslant j \leqslant q$:

$$[a,b] \bigcup_{j=1}^{q}$$

Если из отрезка убрали q-штук открытых интервалов, получится объединение замкнутых отрезков:

$$[a,b] \bigcup_{j=1}^{q} = \bigcup_{k \leqslant 1}^{N} I_k, \quad \text{где} \quad N \leqslant q+1$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

На каждом отрезке I_k функция $f(x)$ непрерывна, поскольку никаких точек разрыва уже нет. Отсюда следует, что $f(x)$ равномерно непрерывна на этом отрезке I_k.

Тогда можно для любого ε подобрать такое $\delta_k\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) > 0$, что для любого разбиения отрезка $[I_k]$ с мелкостью d_k, не превосходящее δ_k.

Следовательно, разность значений функции на любом элементарном отрезке разбиения будет меньше $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

То есть при мелкости $d_k \leqslant \delta_k$ для любых точек x_1, x_2, лежащих на элементарном отрезке такого разбиения $(\{X_m\})|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Для каждого отрезка будет свое разбиение с достаточной мелкостью такой, чтобы обеспечить неравенство:

$$(|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Взяв $\delta \leqslant \min\{\delta_k\}$, получим, что для любых разбиений отрезка I_k с мелкостью d_k, не превосходящей δ, получим неравенство $(|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Объединим все такие разбиения отрезков I_k с мелкостью $d_k < \delta$.

Получим разбиение всего отрезка $[a,b]$, в котором участвуют отрезки разбиений всех отрезков I_k и, кроме того, в нем будут участвовать замыкания интервалов, покрывающих точки разрыва.

Осталось рассмотреть разность верхней и нижней сумм Дарбу для большого разбиения.

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{[x_{i-1},x_i]\in\cup I_k} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{[x_{i-1},x_i]\in\cup \overline{J_j}} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Разность можно оценить следующим образом:

$$\overline{S} - \underline{S} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \underbrace{\sum_{[x_{i-1},x_i]\in\cup \overline{J_j}} \Delta x_i}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2(M-m)}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Получили нужное равенство.

Комментарий

В сумме $\sum\limits_{[x_{i-1},x_i]\in\cup I_k} (M_i - m_i)\Delta x_i$ мы использовали, что $(M_i - m_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{[x_{i-1},x_i]\in\cup I_k} (M_i - m_i)\Delta x_i < \sum_i \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum \Delta x_i$$

Поскольку $\sum \Delta x_i < (b-a)$, можно добавить еще одно неравенство:

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Теорема доказана. ■

Следствие из теоремы 3.2

Если $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва на интервале a,b, то отсюда следует, что $f(x)$ интегрируема.

Теорема 3.3. *Теорема Лебега*

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет множество точек разрыва, которое для любого ε можно покрыть не более, чем счетным множеством открытых интервалов с суммарной (общей) длиной $l \leqslant< \varepsilon$.

Пусть l_j – длина интервала J_j. Тогда

$$l = \lim_{N \to +\infty} \sum_{1}^{N} l_j < \varepsilon$$

Отсюда следует, что f интегрируема на $[a,b]$

Следствие из теоремы Лебега

Если у функции f не более, чем счетное множество точек разрыва, то f интегрируема.

Теорема 3.4. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и M,m – это ее супремум и инфинум:*

$$\sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = M$$

$$\inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\} = m$$

Пусть функция ϕ является непрерывной на отрезке $[m,M]$. Тогда если возьмем композицию $\phi(f(x))$, то такая композиция интегрируема на $[a,b]$.

Следствие из теоремы 3.4

В частности:

1) Если $f(x) \neq 0$ для всех $x \in [a,b]$ и если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то и функция $\frac{1}{f(x)}$ тоже интегрируема на отрезке a,b.

Если функция $\frac{1}{f(x)}$ не обращается в ноль, ее можно фактически рассматривать как композицию:

$$\phi(y) - \frac{1}{y}$$

2) Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то тогда сложная функция $f^2(x)$ тоже интегрируема на $[a,b]$.

Чтобы получить квадрат, нужно применить функцию $\phi(y) = y^2$, которая непрерывна.

Если взять композицию двух интегрируемых функций, она не всегда будет интегрируема.

Основные (элементарные) свойства определенного интеграла Римана

Основные свойства можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3.5. *Семь простейших свойств интеграла Римана.*

Кроме семи свойств есть еще два соглашения, которые обозначим под номером 0*:*

*0)**Соглашения**.*

0.1. Принято считать, что если точки a и b равны, отрезок вырождается в точку и $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует и равен 0*.*

0.2. Чаще всего подразумевается, что $a > b$, отрезок рассматривается слева направо. Но в некоторых выкладках он рассматривается наоборот. Тогда принято считать, что $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

*1) **Линейность**.*

Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то для любых α и β (для любых вещественных чисел) функция, которая представляет собой линейную комбинацию $\alpha f + \beta g$, тоже интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x)dx + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b + \beta g \int\limits_a^b g(x)dx$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) ***Интегрируемость произведения***

Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то произведение fg является интегрируемой функцией на $[a,b]$:

$$f,g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g(x) := f(x) \cdot g(x), то f \cdot g \in R[a,b]$$

3) ***Аддитивность по отрезку***

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то для любого отрезка $[c,d]$ который содержится в отрезке $[a,b]$, функция f будет интегрируема и на отрезке $[c,d]$.

Для любой точки c, лежащей в интервале $[a,b]$ верно, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) ***Неотрицательность***

4-a) Если функция $f(x) \geqslant 0$ для любого x, принадлежащего отрезку $[a,b]$, и f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

4-b) Если функция $f(x) \geqslant 0$ для любого x, принадлежащего отрезку $[a,b]$, и f интегрируема на отрезке $[a,b]$, и существует такая точка c, принадлежащая отрезку $[a,b]$, такая, где $f(x)$ непрерывна в точке c и $f(c) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

5-a) Пусть имеются две функции f и g, обе интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и известно, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из этого отрезка. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

5-b) Если функции f и g, интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и известно, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из этого отрезка. И существует такая точка c на отрезке $[a,b]$,

что f и g непрерывны в точке c, и значения этих функций находятся в строгом неравенстве $f(x) < g(x)$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

6) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, известно, что $\int_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$.

7) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на отрезке $[a,b]$, и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Доказательство.

1) Рассмотрим интегральную сумму $\delta_{\alpha f+\beta g}$ для разбиения $\{X_k\}$ отрезка $[a,b]$. Выберем разметку $\{\xi_k\}$. Составим интегральную сумму:

$$\delta_{\alpha f+\beta g} = \left[\sum \alpha f(\xi) + \beta g(\xi_k)\right]\Delta x_k =$$

$$= \alpha \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_k g(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k = \delta_f$$

$$\sum_k g(\xi_k)\Delta x_k = \delta_g$$

Переходя к пределу при мелкости $d \to 0$ получим требуемое равенство:

$$\int_a^b (\alpha f(x)dx + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b + \beta g \int_a^b g(x)dx$$

Что и требовалось доказать.

2) Докажем, что произведение двух интегрируемых функций интегрируемо.

Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$.

$$f(x) \cdot g(x) = (f(x) + g(x))^2 \textit{или} \quad (f(x) - g(x))^2$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По первому свойству известно, что сумма и разность интегрируемых функций интегрируема. Тогда

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\left[(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\right]$$

Покажем, что если функция f интегрируема, то f^2 тоже интегрируема.То есть $f^2\in R[a,b]$.

Рассмотрим какое-то разбиение и рассмотрим разность верхней и нижней сумм для функции f^2:

$$\overline{S}_{f^2}-\underline{S}_{f^2}$$

Предположим, что $\inf\{f(x)\}m>0$. Заметим, что $\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f^2(x)\}=M^2$.

Здесь $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. При этом

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f^2(x)\}=m^2$$

Аналогично на каждом отрезке разбиения $\{X_k\}$ такие же соотношения:

$$M_k(f^2)=M_k^2;\quad m_k(f^2)=m_k^2$$

Дальше можем рассмотреть разность верхней и нижней сумм Дарбу для функции $f^2(x)$.

$$\overline{S}_{f^2}-\underline{S}_{f^2}=\sum_k(M^2-m^2)\Delta x_k=$$

$$=\sum_k(M_k+m_k)(M_k-m_k)\Delta x_k$$

$$\sum_k(M_k+m_k)\leqslant 2M$$

$$\overline{S}_{f^2}-\underline{S}_{f^2}=2M\sum_k(M_k-m_k)\Delta x$$

Видим, что при достаточно малой мелкости d разбиения $\{X_k\}$

$$\sum_k(M_k-m_k)\Delta x=\overline{S}_f-\underline{S}_f<\frac{\varepsilon}{2M}$$

Тогда

$$2M\sum_k(M_k-m_k)\Delta x<\varepsilon$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда вывод, что для любого ε при достаточно малой мелкости разбиения получается, что

$$\overline{S}_f^2 - \underline{S}_f^2 < \varepsilon$$

Отсюда следует, что функция f^2 интегрируема.

Но это частный случай, когда $\inf\{f(x)\}m > 0$. Поэтому рассмотрим общий случай без указанного условия.

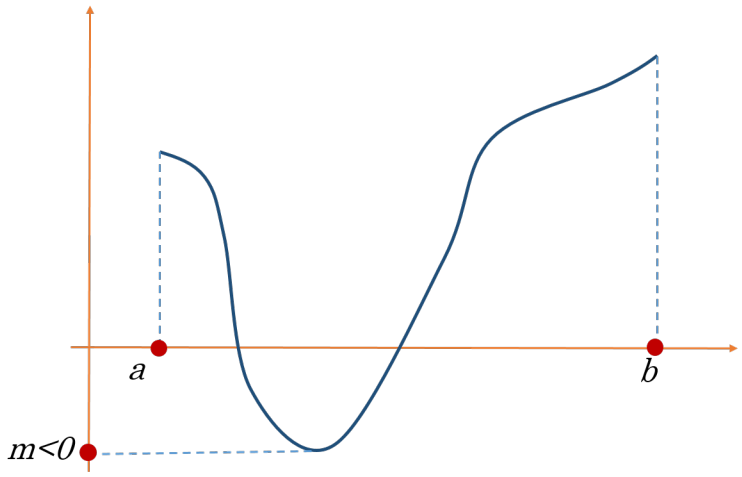

Рис. 3.2. $\inf\{f(x)\}m < 0$

Добавим константу и рассмотрим функцию $y = f(x) + \alpha$. Тогда $\inf\{f(x)\}\widehat{m} > 0$.

В этом случае график будет таким:

Тогда для функции $\widehat{f}(x) = f(x) + \alpha$ очевидно, что $\widehat{f}$ интегрируема, поскольку f интегрируема, а α - константа. Тогда по предыдущему рассуждению $\widehat{f}^2$ тоже интегрируема.

$$\widehat{f}^2(x) = (f(x) + \alpha)^2 =$$
$$= f(x)^2 + 2(\alpha \cdot f(x)) + \alpha^2$$

Видим, что $f^2(x)$ интегрируема, $f(x)$ тоже интегрируема. Если умножить ее на константу, она тоже будет интегрируема. Константа интегрируема. Тогда

$$f(x)^2 = \widehat{f}^2(x) - 2\alpha f(x) - \alpha^2$$

При этом $\widehat{f}^2(x) - 2\alpha f(x) - \alpha^2$ – интегрируемы. Поэтому их линейная комбинация тоже интегрируема. Отсюда следует, что $f^2(x)$ – интегрируемая функция.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

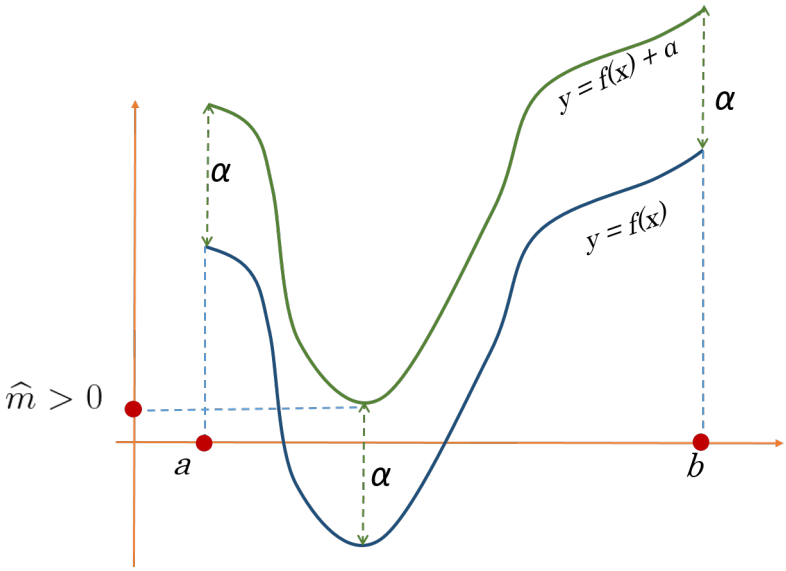

Рис. 3.3. $y = f(x) + \alpha, \quad \inf\{f(x) + \alpha\}\widehat{m} > 0$

Общий случай доказан. Отсюда можно считать доказанной интегрируемость произведения: $f \cdot g$ интегрируема. Что и требовалось доказать.

3) **Аддитивность**.

Если функция f интегрируема на отрезке $[\alpha, b]$, то покажем, что она интегрируема и на меньшем отрезке.

Рис. 3.4. Отрезок, разбиение

Если рассмотрим любое разбиение $\{X_k\}$, содержащее точки c и d, то разность верхней и нижней сумм Дарбу для функции f можно представить как сумму двух слагаемых:

$$\overline{S}_f - \underline{S}_f = \underset{x_{k-1}, x_k \in [c,d]}{\overline{S}'_f - \underline{S}'_f} + \underset{x_{k-1}, x_k \notin [c,d]}{\overline{S}'_f - \underline{S}'_f}$$

Если рассмотреть только первую сумму, то ясно, что $\underset{x_{k-1}, x_k \in [c,d]}{\overline{S}}{}'_f$ не превосходит всю сумму.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Так как $f \in R[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\{X_k\}$, что

$$\overline{S}' - \underline{S}' < \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{S}' - \underline{S}' < \varepsilon, \quad \textit{то есть} \quad f \in R[c,d]$$

Покажем аддитивность.

Пусть теперь $c \in (a,b)$. Так как $f \in R[a,b]$, то $f \in R[,b]$.

Рассмотрим любое разбиение $\{X_k\}$, содержащее точку c.

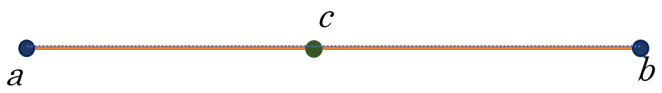

Рис. 3.5. $c \in \{X_k\}$

$$\delta_f[a,c] = \delta_f[a,b] + \delta_f[c,b] \quad \textit{при} \quad d \to 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b$$

Поскольку предел суммы равен сумме пределов, **свойство 3** доказано. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4. Теоремы о среднем значении для определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом

Доказательство.

Доказательство **теоремы 3.5**. Продолжение.

Свойство 4

4-a) Если $f \in R[a,b], \quad f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \leqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0.$

Поскольку функция неотрицательна во всех точках отрезка $[a,b]$, то для любого размеченного разбиения $(\{x_k\},\{\xi_k\})$ можно записать интегральную сумму функции по этому разбиению:

$$\delta_f = \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k$$

Сумма всегда неотрицательна, поскольку $\Delta x_k > 0, \quad f(\xi_k) \geqslant 0$. Известно, что предельный переход от неотрицательных функций дает неотрицательный результат:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Что и требовалось доказать.

4-b) Условия те же:

$f \in R[a,b], \quad f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \leqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$, при этом существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = \gamma > 0$, и $f(x)$ непрерывна в точке c

Нужно доказать, что $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

При условиях из пункта a) интеграл неотрицательный. Воспользуемся дополнительным условием.

Известно, что если функция непрерывна в точке c и не равна нулю в этой точке, то ее знак сохраняется в некоторой окрестности.

Тогда для $\varepsilon = \frac{\gamma}{2} > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x таких, что

$$|x-c| < \delta, \quad f(x) - f(c) < \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma - \frac{\gamma}{2} < f(x) < \gamma + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{\gamma}{2}$$

Рассмотрим некоторое размеченное разбиение $(\{X_k\},\{\xi_k\}$.Составим интегральную сумму δ_f для этого разбиения, разбив ее на несколько частей:

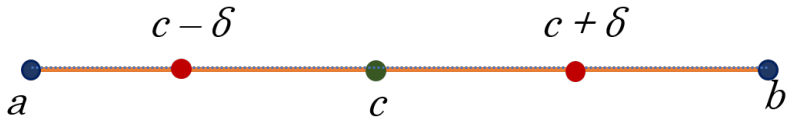

Рис. 4.1. Точка c лежит внутри $[a,b]$

Пусть точка c лежит внутри $[a,b]$. (Рисунок 4.1).

$$\delta_f = \sum_{[x_{k-1},x_k]}^{(c-\Delta,c+\Delta)} f(\xi_k)\Delta x + \sum_{\substack{ост.\\ слаг.}} f(\xi_k)dx$$

Поскольку $f(\xi_k) > \frac{\gamma}{2}$ и $\sum_{\substack{ост.\\ слаг.}} f(\xi_k)dx \geqslant 0$ получим:

$$\delta_f = \frac{\gamma}{2}\cdot 2\delta + \sum_{\substack{ост.\\ слаг.}} f(\xi_k) > \gamma\cdot\delta > 0$$

Интегральная сумма будет больше выражения $\gamma\cdot\delta$ при достаточно мелком разбиении. Тогда:

$$\Rightarrow \lim_{d\to 0}\delta_f = \int_a^b f(x)dx \geqslant \gamma\cdot\delta > 0$$

Что и требовалось доказать.

5) **Свойство 5**.

Рассматриваются две интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функции f и g. Известно, что:

Для 5-a):

$$f(c) \leqslant g(x), \quad \forall x\in[a,b] \underset{\Rightarrow}{?} \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

Для 5-b): При $f(c)\leqslant g(x), \forall x\in[a,b]$ существует такая точка c на отрезке $[a,b]$, что $f(c) < g(c)$ и функции f и g непрерывны в точке c.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Нужно доказать, что

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Для доказательства рассмотрим функцию $\phi(x) := \gamma(x) - f(x)$. Поскольку эти функции интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то $\phi \in R[a,b]$ и $\phi(x) \geqslant 0 \forall x \in [a,b]$.

По п.4. $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$, это эквивалентно $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$.

Пункт **5-a** доказан.

Докажем **5-b**.

Если выполнены условия для пунктов $5-a$ и $5-b$ одновременно, тогда для функции $\phi(x)$ существует такая точка c на отрезке $[a,b]$, что $\phi(c) > 0$ и $\phi(x)$ непрерывна в точке c.

По доказанному выше **пункту 4** имеем, что:

$$\int_a^b \phi(x)dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Пункт **5-b** доказан.

Замечание к п.4-b

Рис. 4.2. Точка c совпадает с a или b

Если $c = b$, то есть находится на конце отрезка, то существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε, при котором:

$$\forall x \in [b-\delta, b] \quad f(x) > \frac{\gamma}{2}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойство 6.

Если функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$.

Это утверждение можно доказывать от противного.

Предположим, что существует хотя бы одна точка c, лежащая на отрезке $[a,b]$, такая, что $f(c) > 0$.

Если функция непрерывна на всем отрезке $[a,b]$, значит, она непрерывна и в точке c. Она неотрицательна, а в точке c больше нуля. Тогда по пункту **4-b**

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0$$

Это противоречит условию $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Что и требовалось доказать.

Свойство 7. Два утверждения: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на отрезке $[a,b]$, и

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Для доказательства потребуется известное неравенство для $\forall a,b \in \mathbb{R}$:

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|$$

Возьмем две любые точки x_1 и x_2 на отрезке $[a,b]$. Тогда, воспользовавшись неравенством, для значений функции в этих точках получим:

$$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|$$

Возьмем разбиение $\{X_k\}$. Предположим, что точки x_1 и x_2 принадлежат какому-то элементарному отрезку этого разбиения: $x_1' x_2 \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда для них будет верно неравенство $||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|$.

Если такое неравенство выполняется для всех пар точек, то для супремумов будет аналогичное неравенство:

$$\sup\{||f(x_1)| - |f(x_2)||\} \leqslant \sup\{|f(x_1) - f(x_2)|\}$$

$$\sup\{||f(x_1)|-|f(x_2)||\} = \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{|f(x)|\} - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{|f(x)|\}$$
$$\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\} = \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{f(x)\} - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{f(x)\}$$

Обозначим:

$$\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{f(x)\} = M_k$$
$$\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{f(x)\} = m_k$$
$$\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{|f(x)|\} = \widehat{M_k}$$
$$\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k}\{|f(x)|\} = \widehat{m_k}$$

Рассмотрим разность сумм Дарбу для разбиения $\{|X_k\}$, чтобы проверить критерий интегрируемости функции модуля в терминах сумм Дарбу:

$$\overline{S}_{|f|} - \underline{S}_{|f|} = \sum_k(\widehat{M_k} - \widehat{m}_k)\Delta x_k \leqslant \sum_k(M_k - m_k)\Delta x_k = \overline{S}_f - \underline{S}_f$$

Поскольку функция f интегрируема, то можно подобрать такое разбиение, чтобы $\overline{S}_f - \underline{S}_f < \varepsilon$. Тогда получим, что и $\overline{S}_{|f|} - \underline{S}_{|f|} < \varepsilon$

Отсюда следует, что по критерию интегрируемости $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то есть:

$$|f| \in R[a,b]$$

Интегрируемость $|f|$ доказана. Чтобы доказать неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$, рассмотрим интегральные суммы. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 5. Замена переменной и интегрирование по частям. Несобственные интегралы первого рода

Примеры

Если функция f интегрируема, то интеграл с переменным верхним переделом является непрерывной функцией. Если в некоторой точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна то в этой точке интеграл с переменным верхним пределом будет дифференцируема. Ее производная равна $f(x_0)$. Отсюда следует, что если f непрерывна на всем отрезке, то появляется первообразная функция, определенная на отрезке $[a,b]$ такая, что ее производная равна функции f. В силу этого, была доказана теорема о формуле Ньютона-Лейбница. Можно вычислять определенный интеграл от непрерывной функции, если известна первообразная функция как разность первообразных.

Замечания

Пример 5.1. *Когда функция $f(x)$ не интегрируема, но существует ее первообразная.*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

Вычисляется производная этой функции:

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} + x^2\cos\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функция $f(x)$ — не ограничена и отсюда следует, что она не является интегрируемой.

$$f \notin R[0,1]$$

Пример 5.2. *Рассматривается функция Римана:*

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in Q \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(m,n) — взаимно простые числа. Эта функция непрерывна в точках x иррациональных и разрывна во всех рациональных точках. Интеграл этой функции равен 0.

$$\int_0^1 R(x)dx = 0$$

Однако, у этой функции нет первообразной. Если бы существовало первообразная $F(x)$ такая, что $F'(x) = R(x)$, то у функции $F'(x)$ не могло бы быть разрывов первого рода.

$$F'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x_0 + 0} F'(\xi)$$

Получается, что предел справа производной должен быть равен правой производной.

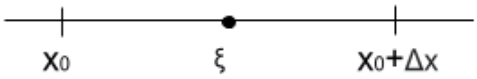

Рис. 5.1. Точка ξ

Если функция — дифференцируема, то ее производная равна и левой и правой производной.

$$F'(x_0) = F'_+(x_0) = F'_-(x_0)$$

Таким образом, не может быть разрыва первого рода. Функция Римана интегрируема, но у нее нет первообразной.

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Два основных метода вычисления неопределенного интеграла — это замена переменной и интегрирование по частям. Формула Ньютона-Лейбница говорит о том, что эти методы можно использовать для вычисления определенного интеграла.

Теорема 5.1. *Замена переменной в определенном интеграле.*

Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a,b]$ и требуется вычислить интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Применяется формула Ньютона-Лейбница. Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$. Если существует такая функция $\varphi(t)$, что $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ — непрерывны на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$, причем:

$$\varphi([\alpha,\beta]) = [a,b]$$

$$\varphi(\alpha) = a = \min_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \{\varphi(t)\}$$

$$\varphi(\beta) = b = \max_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \{\varphi(t)\}$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Первообразную для второго интеграла можно вычислить следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$$

Доказательство.

$$F(\varphi(t))' = F'(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(t)$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta$$

Таким образом, можно доказать следующее:

$$F(b) = F(\varphi(\beta))$$

$$F(a) = F(\varphi(\alpha))$$

■

Пример 5.3. *Необходимо вычислить следующее:*

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2x++1)^5} = \begin{pmatrix} t = 2x+1 \\ x = \dfrac{t-1}{2} = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt = \dfrac{1}{2}dt \\ t \in [3;5] \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{2(-4)x^4}\Bigg|_3^5 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{625} - \frac{1}{81}\right)$$

Вычисляется этот интеграл подставлением первообразной.

Теорема 5.2. *Интегрирование по частям.*

Пусть функции $U(x), V(x), U'(x), V'(x)$ — непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл:

$$\int_a^b U \cdot V' dx = U \cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V \cdot U' dx$$

Эта формула есть интегрирование по частям в определенном интеграле.

Доказательство.

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Функция $U \cdot V$ является первообразной. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница можно написать следующий интеграл:

$$\int_a^b (U' \cdot V + U \cdot V')dx = U \cdot V\Big|_a^b$$

Таким образом, доказывается следующее:

$$\int_a^b U \cdot V' \cdot dx = U \cdot V\Big|_a^b - \int_a^b V \cdot U' \cdot dx$$

■

Пример 5.4. *Необходимо вычислить следующий интеграл:*

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot dx = \begin{pmatrix} U = \operatorname{arctg} x \\ dV = dx \\ V = x \\ dU = \dfrac{1}{1+x^2}dx \end{pmatrix} = x \cdot \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 V \cdot \frac{1}{1+x^2}dx =$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

Несобственные интегралы первого рода. Вычисление. Интеграл Дирихле

Когда определяется определенный интеграл Римана, то предполагается, что область изменения переменной — это отрезок, а изменение функции тоже должно быть ограниченным. Поэтому в обычном определенном интеграле и область изменения переменной, и область изменения значений функций — это ограниченные множества. Переход к несобственному интегралу снимает хотя бы одно из этих требований. Рассматриваются несобственные интегралы первого рода. Интегралы первого рода характеризуются тем, что у них область изменения переменной не ограничена.

Определение 5.1. *Пусть функция $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке $[a,b]$. Несобственным интегралом от $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ называется следующее выражение:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. Если же этот предел не существует совсем или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Рассматривают также следующие виды несобственных интегралов первого рода:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx := \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{a} f(x)dx \tag{5.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(x)dx \tag{5.2}$$

Предполагается, что функция $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке, входящих в область изменения переменной либо $(-\infty;a)$, или на всей числовой оси $((-\infty;+\infty))$.

Интегралы видов (5.1) и (5.2) сводятся к основному виду несобственного интеграла первого рода. Интеграл (5.1) можно записать следующим образом:

$$x=-y \quad \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{-a}^{B} f(-y)dy = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{-a}^{B} \tilde{f}(y)dy = \int\limits_{-a}^{+\infty} \tilde{f}(y)dy$$

В интеграле (5.2) можно сделать следующее преобразование:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

Вычисление несобственного интеграла происходит с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Пусть $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тогда на любом отрезке:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\left(F(x)\Big|_{a}^{B}\right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} F(B)-F(a) = F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

Пример 5.5. *Необходимо вычислить следующий интеграл:*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Пример 5.6. *Вычисляется интеграл Дирихле первого рода. Необходимо найти при каком значении α интеграл сходится и расходится.*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Используется неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \ln|x|, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases} \\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln|x| = +\infty \end{cases}$$

Таким образом, получается, что при $\alpha > 1$ интеграл сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ интеграл расходится.

Критерий Коши. Признаки сравнения

Так как несобственный интеграл:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B)$$

то критерий Коши необходимо формулировать для существования конечного предела на бесконечности функции $F(B)$.

Теорема 5.3. *Чтобы несобственный интеграл сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых чисел b_1, b_2, $\delta < b_1 < b_2$. Отсюда следует, что:*

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| = |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$$

Пример 5.7. *Функция $f(x)$ необязательно ограничена для определения несобственного интеграла.*

$$g(x) = \begin{cases} n, & x = n \in N \\ 0, & x \neq n \end{cases}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

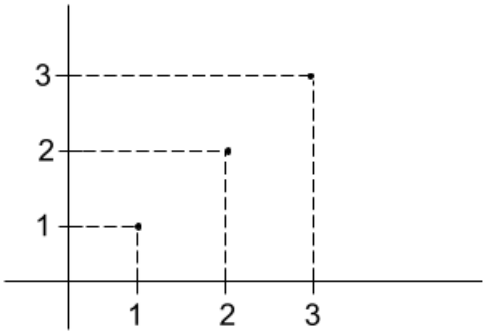

Рис. 5.2. График функции $g(x)$

На любом отрезке $[a,b]$ функция $g(x)$ ограничена тем, что $g(x)$ не превосходит целые части числа b.

$$g(x) \leqslant [b]$$

Однако $g(x)$ не ограничена на всем промежутке $[1,+\infty)$. Таким образом, $g(x)$ — интегрируема на любом промежутке $[1,a]$ и интеграл равен 0.

$$g(x) \in R[1;a] \quad a > 1 \quad \int\limits_1^a g(x)dx = 0 \to \int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = 0$$

Достаточное условие сходимости и расходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения

Теорема 5.4. *Общий признак сравнения.*

Пусть $f,g \in R[a;b]$, $b > a$ — интегрируемы.

1) *Пусть:*

$$|f(x)| \leqslant g(x), \quad g(x) \geqslant 0$$

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty$$

Интеграл сходится. Тогда утверждается следующее:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Если есть следующее неравенство:

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$$

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *расходится, то и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Доказательство.

1) Если известно, что интеграл от функции $g(x)$ сходится, то можно сформулировать это следующим образом. По условию $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx < \infty$ эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых b_1, b_2 таких, что $\delta < b_1 < b_2$. Следовательно:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx < \varepsilon$$

По критерию Коши существует предел интеграла:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

2) Необходимо сформулировать условие расходимости интеграла. Так как интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > a$ существует b_1, b_2 такие, что $a < \delta < b_1 < b_2$, что интеграл:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx \geqslant \varepsilon$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

■

Теорема 5.5. *Частный признак сравнения с интегралом Дирихле первого рода.*

Пусть $f(x) \in R[c;d]$, $[c;d] \in [a;+\infty)$ *— интегрируема.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) *Пусть:*

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \frac{c}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad x \in [a; +\infty)$$

Тогда интеграл сходится:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

2) *Пусть известно, что функция:*

$$\frac{c}{x^\alpha} \leqslant f(x) \quad x \in [a; +\infty) \quad \alpha \geqslant 1$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Доказательство.

Так как $c \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то по теореме 5.4 следует доказательство. ■

Теорема 5.6. *Теорема 5.5 в предельной форме. Пусть* $f(x) \in R[c;d]$, $[c;d] \in [a;+\infty)$ *— интегрируема.*

1) *Пусть существует:*

$$\lim_{x \to +\infty} (|f(x)| \cdot x^\alpha) = C \quad \alpha > 1$$

Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

2) *Пусть существует:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot x^\alpha = K > 0, \quad \alpha \leqslant 1$$

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*

Доказательство.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x > \delta$:

$$||f(x)| \cdot x^\alpha - C| < \varepsilon \leftrightarrow C - \varepsilon < |f(x)| \cdot x^\alpha < C + \varepsilon \to |f(x)| < \frac{C+\varepsilon}{x^\alpha}$$

Следовательно, по теореме 5.5:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$$

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $a < \delta$, что для любого $x > \delta$:

$$|f(x)x^\alpha - K| < \varepsilon \leftrightarrow K - \varepsilon < f(x) \cdot x^\alpha < K + \varepsilon$$

$$K > 0 \to K - \varepsilon > 0$$
$$f(x) > \frac{K-\varepsilon}{x^\alpha}, \quad \alpha \geqslant 1$$

Следовательно, по теореме 5.5 несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Признак Дирихле. Абсолютная и условная сходимость. Несобственные интегралы второго рода

Признак Дирихле (Дирихле-Абеля). Интегралы Френеля и Эйлера-Пуассона

Теорема 6.1. *Пусть $f \in R[a,B]$, $B > a$ имеет первообразную $F(x)$, которая определена и ограничена на интервале $[a,+\infty)$, т.е. существует $M > 0$, что:*

$$|F(x)| \leqslant M$$

Пусть функция $g(x)$ — монотонна на $[a,+\infty)$ и $g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
Существует $g'(x)$ — непрерывная на $[a,+\infty)$. Тогда утверждается следующее:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx < \infty$$

Доказательство.

Необходимо показать по критерию Коши, что для любого > 0 существует такое число $B > a$, что для любых b_1, b_2 таких, что $B < b_1 < b_2$. Следовательно:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon$$

Предполагается, что $g(x)$ не возрастает:

$$g(x) \geqslant 0$$

Соответственно:

$$g'(x) < 0$$

Рассматривается следующий интервал, которому применяется метод интегрирования по частям:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(x)F(x)\Big|_{b_1}^{b_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx\right| =$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \left| g(b_2)F(b_2) - g(b_1)F(b_1) + \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)(-g'(x))dx \right|$$

$$\leqslant |g(b_2)||F(b_2)| + |g(b_2)||F(b_2)| + \int\limits_{b_1}^{b_2} |F(x)|(-g'(x))dx$$

$$\leqslant M(g(b_2) + g(b_1) - g(b_2) + g(b_1)) = 2Mg(b_1) < \varepsilon, \quad g(b_1) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Это верно для достаточно больших b_1. Таким образом, несобственный интеграл сходится. ■

Оказывается, что теорема 6.1 верна и без третьего условия. Это доказывается с помощью использования второй теоремы о среднем значении для определенного интеграла.

Теорема 6.2. *1) Пусть $f \in R[a,B]$, $B > a$ и существует $F(x)$ на $[a,+\infty)$, которая имеет производную $F'(x) = f(x)$ и существует $M > 0$ такое, что:*

$$|F(x)| \leqslant M$$

2) Функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$. В этом случае тоже утверждается, что:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx < \infty$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right|$$

Применяется вторая теорема о среднем. По этой теореме существует ξ, которая находится между b_1 и b_2.

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx \right| = \left| g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx \right| =$$

$$= |g(b_1)(F(\xi) - F(b_1)) + g(b_2)(F(b_2) - F(\xi))$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\leqslant |g(b_1)||F(\xi)-F(b_1)|+|g(b_2)||F(b_2)-F(\xi)| \leqslant 2M(|g(b_1)|+|g(b_2)|) < \varepsilon, \quad |g(b_i)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Так как $g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, то это верно для достаточно больших b_1, b_2. ■

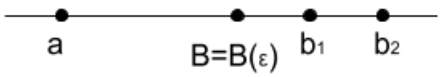

Рис. 6.1. b_1, b_2 на оси

Эту теорему также называют теоремой Дирихле-Абеля. С помощью признака Дирихле можно исследовать сходимость некоторых характерных интегралов. Некоторые функции приходиться задавать в виде таблицы. К таким неопределенным интегралам относятся интегралы Френеля и Эйлера-Пуассона.

Пример 6.1. *1) Интегралы Френеля широко используются в оптике.*

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Доказывается сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)2xdx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(x^2)2x\cdot\frac{1}{x}dx < \infty$$

$\sin(x^2)2x$ *имеет первообразную* $-\cos(x^2)$.

$$|-\cos(x^2)| \leqslant 1$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

2) Интеграл Эйлера-Пуассона.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^a}dx < \infty \quad \left(= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода

Определение 6.1. *Говорят, что интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно, если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, а* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *расходится, то говорят, что* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится условно.*

Лемма 6.1. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *сходится, то и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство.

Доказывается эта лемма по критерию Коши. Рассматривается интеграл при достаточно больших числах b_1, b_2.

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon$$

при достаточно больших $b_1 < b_2$. Так как интеграл сходится, то для любого ε существует:

$$B = B(\varepsilon) > a, \quad B < b_1 < b_2$$

■

Пример 6.2. *Исследование несобственного интеграла на абсолютную и условную сходимость. Рассматривается следующий интеграл:*

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

Необходимо найти при каких значениях α *интеграл* I *сходится абсолютно, условно или расходится.*

Интеграл рассматривается с точки зрения признака Дирихле. Функция $f(x) = \sin x$ *имеет ограниченную первообразную* $F(x) = -\cos x$.

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{to} 0, \quad \alpha > 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рис. 6.2. Сходимость интеграла

Следовательно, по признаку Дирихле-Абеля интеграл I сходится при $\alpha > 0$.

Рассматривается сходимость абсолютно:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx = \left(|\sin x| \geqslant \sin^2 x\right) \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^\alpha} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$ *расходится при* $0 < \alpha \leqslant 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Получается интеграл Дирихле, который сходится при $\alpha > 1$.

Если $\alpha \leqslant 0$, *то интеграл можно рассматривать по критерию Коши.*

$$\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geqslant \int\limits_{2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{2\pi n}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = 1$$

$$\frac{1}{x^\alpha} \geqslant 1 \quad \forall x \in [2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$$

Необходимо найти такое число $\varepsilon = 1 > 0$ *по критерию Коши, что для любого* $B > 1$ *нашли такие числа:*

$$b_1 = 2\pi n \quad b_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

такие, что:

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geqslant \varepsilon_0 = 1, \quad \alpha \leqslant 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) *Интеграл сходится абсолютно при* $\alpha > 1$.

2) *Интеграл сходится условно при* $0 < \alpha \leqslant 1$.

3) *Интеграл расходится при* $\alpha \leqslant 0$

Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле

Несобственные интегралы можно вычислять с помощью формулы Ньютона-Лейбница, но также можно применять метод замены переменной или интегрирование по частям. Рассматривается **замена переменной**. Пусть требуется вычислить интеграл следующего вида:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

Если существует такая функция $\varphi(t)$, которая непрерывна и имеет непрерывную производную. Функция $\varphi(t)$ определена на некотором промежутке $[\alpha; +\infty)$ и возрастает $\varphi(\alpha) = a$.

$$\varphi \in C[a; +\infty) \quad \varphi' \in C[a; +\infty) \quad f \in C[a; +\infty)$$

φ определена на промежутке $(-\infty; \alpha)$ и убывает $\varphi(\alpha) = a$. Тогда получится следующее:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{-\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Рассматривается **интегрирование по частям**.

$$\int\limits_a^{+\infty} U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} V(x)U'(x)dx \tag{6.1}$$

Пусть существует предел:

$$\lim_{x\to+\infty} U(x)V(x) = A < \infty$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда интегралы сходятся или расходятся одновременно. В случае их сходимости верна формула (6.1)

Записывается интегрирование по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b U \cdot V' dx = U \cdot V \Big|_a^b - \int_a^b V \cdot U' dx$$

Несобственный интеграл получается при $b \to +\infty$. Пусть существует предел:

$$\lim_{b \to +\infty} U(b)V(b) = U(\infty)V(\infty)$$

Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке $[a; b-\delta]$, $0 < \delta < b-a$ и $f(x)$ не ограничена на интервале $[a; b)$.

Определение 6.2. *Несобственным интегралом второго рода на промежутке* $[a; b]$ *с особенностью в точке* b *называется предел:*

$$\lim_{\delta \to +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Пусть $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке во множестве:

$$D = [a; c) \cup (c; b] = [a; b] \backslash \{c\}$$

Определение 6.3. *Несобственным интегралом второго рода с особенностью в точке* $c \in (a; b)$ *от* $f(x)$ *называется следующий предел:*

$$J = \int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \gamma \to +0}} \left(\int_a^{c-\alpha} + \int_{c+\gamma}^b \right) f(x)dx = \lim_{\alpha \to +0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\gamma \to +0} \int_{c+\gamma}^b f(x)dx$$

Если оба предела существуют и конечно, то интеграл J *сходится. Если нет, то интеграл* J *расходится.*

Связь с несобственным интегралом первого рода

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть есть интеграл с особенностью в точке b:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{pmatrix} t = \dfrac{1}{b-x} \\ x = b - \dfrac{1}{t} \\ dx = \dfrac{dt}{t^2} \end{pmatrix} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \tilde{f}(t)dt$$

Любой интеграл второго рода можно свести к несобственному интегралу первого рода.

Пример 6.3. *Рассматривается следующий интеграл, необходимо найти значение α, при которых этот интеграл сходится:*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{pmatrix} t = \dfrac{1}{b-x} \\ x = b - \dfrac{1}{t} \\ dx = \dfrac{dt}{t^2} \end{pmatrix} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \cdot t^{-\alpha}} = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$$

Получается интеграл Дирихле первого рода, который сходится при $2-\alpha > 1$ или $\alpha < 1$, а расходится при $2-\alpha \leqslant 1$ или $\alpha \geqslant 1$.

Удобно рассматривать интеграл Дирихле второго рода:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln(x)\Big|_0^1 = \infty, & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} 1-\alpha-0 = 1-\alpha, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, интеграл Дирихле второго рода сходится при $\alpha < 1$, а расходится при $\alpha \geqslant 1$. Формируется критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода с особенностью в точке b на промежутке $[a;b]$.

Теорема 6.3. *Чтобы несобственный интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало бы $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых c_1, c_2 таких, что:*

$$b - \delta < c_1 < c_2 < b$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда получается следующее:

$$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Теорема 6.4. *Частный признак сравнение.*

1) *Пусть:*

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^\alpha}, \quad \alpha < 1$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится.*

2) *Пусть:*

$$\frac{c}{x^\alpha} \leqslant f(x), \quad f(x) \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 1$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Главное значение несобственного интеграла. Спрямляемые кривые и их длина

Главное значение (по Коши) несобственного интеграла

Интеграл первого рода определяется следующим образом. Предполагается, что функция $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке $[a;b]$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_{B}^{A} f(x)dx$$

Определение 7.1. *Главным значением (по Коши) несобственного интеграла I называется:*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$$

$v.p.$ — главное значение.

Пример 7.1. *Рассматривается главное значение следующего интеграла:*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\ dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \sin x\ dx = \lim_{A\to+\infty} (-\cos x)\Big|_{-A}^{A} = 0$$

Если рассматривается нечетная функция, то получается четная первообразная. Рассматривается четная функция:

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(\arctan\Big|_{-A}^{A} \right) = \lim_{A\to+\infty} 2\arctan A = \pi$$

Рассматривается главное значение несобственного интеграла второго рода. Пусть задан несобственный интеграл с особенностью в точке $c \in (a;b)$:

$$J = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

Предполагается, что функция $f(x)$ — интегрируема на любом отрезке $[e;d]$.

$$[e;d] \subset [a;c) \cup (c;b]$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 7.2. *Главным значением несобственного интеграла J называется следующая величина:*

$$v.p. \int_a^b f(x)dx := \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} + \int_{c+\alpha}^b\right) f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\alpha\to+0}\int_{c+\alpha}^b f(x)dx$$

Пример 7.2. *Необходимо вычислить главное значение следующего несобственного интеграла:*

$$c\in(a;b) \quad \int_a^b \frac{dx}{x-c} := \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} + \int_{c+\alpha}^b\right)\frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\ln|x-c|\left(\Big|_a^{c-\alpha} + \Big|_{c+\alpha}^b\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}(\ln|-\alpha| - \ln|a-c| + \ln|b-c| - \ln|\alpha|) = \ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$$

Приложения определенного интеграла

Рассматривается вычисление длины дуги кривой.

Определение 7.3. *Плоская кривая — это геометрическое место точек, которое можно обозначить следующим образом:*

$$K = \{(x,y)|x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta],\ \varphi,\psi\in C[\alpha;\beta]\}$$

При $t=\alpha$ получается начальная точка кривой. При $t=\beta$ получается конечная точка кривой.

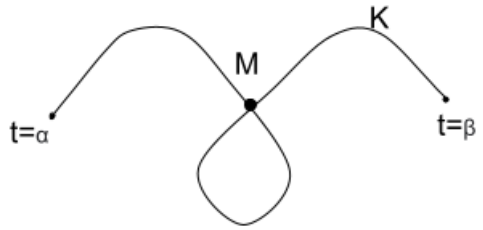

Рис. 7.1. Плоская кривая

Кратная точка кривой — это точка $M(x_0,y_0)$ такие, что существуют 2 значения t_1 и t_2, $t_1<t_2$, что кривая проходит эту точку дважды.

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\psi(t_1) = \psi(t_2) = y_0$$

$$\alpha < t_1 < t_2 < \beta$$

Определение 7.4. *Простая кривая — это такая кривая K, у которой нет кратных точек.*

Замечание. *m -кратные точки при $m > 2$:*

$$\exists\ t_1, ..., t_m \quad \varphi(t_1) = ... = \varphi(t_m)$$

$$\exists\ t_1, ..., t_m \quad \psi(t_1) = ... = \psi(t_m)$$

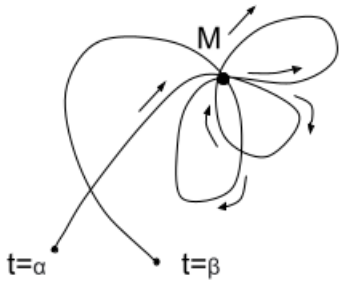

Рис. 7.2. m -кратные точки

В некоторых случаях плоскую кривую можно разбить на кусочки и на каждом кусочке она будет удовлетворять определению простой кривой т.е. у нее не будет кратных точек.

Определение 7.5. *Замкнутая простая кривая — это такая кривая K, у которой нет кратных точек при $t \in [a;b]$, но $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ и $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$.*

$$A(\phi(\alpha), \psi(\alpha)) = B(\phi(\beta), \psi(\beta))$$

Определение 7.6. *Параметризуемая кривая — это такая кривая K, что отрезок $[\alpha;\beta]$ разбивается на конечное число отрезков вида $[t_{K-1};t_K]$, $1 \leqslant K \leqslant N$, что часть кривой на одном из этих отрезков является простой кривой $K_{[t_{K-1};t_K]}$.*

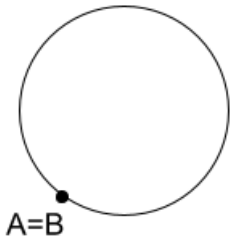

Рис. 7.3. Замкнутая простая кривая

Кусочно-линейные функции. Ломаная

Определение 7.7. *Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$ называется кусочно - линейной, если существует разбиение $\{x_K\}$ этого отрезка.*

$$K = 1,2,...,N \quad x_0 = a, \quad x_N = b, \quad x_{K-1} < x_K$$

$f(x)$ задается следующим образом:

$$f(x) = a_K x + b_K$$

$$a_{K+1}x_K + b_{K+1} = a_K x_K + b_K$$

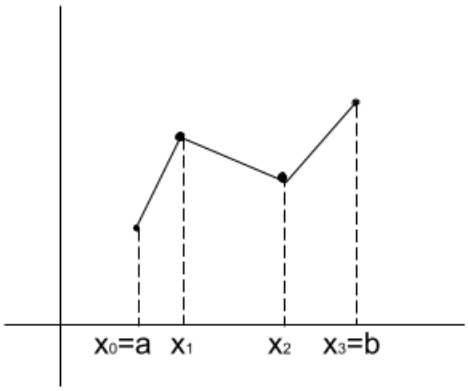

Рис. 7.4. Кусочно-линейная функция

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 7.8. *Ломанной линией называется такая кривая l, которая представляет собой геометрическое место точек.*

$$l: \ \{(x;y)|x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]\}$$

φ,ψ *— кусочно - линейны для некоторого разбиения* $\{t_K\}$ *отрезка* $[\alpha;\beta]$.

Определение 7.9. *Говорят, что ломанная l вписана в кривую K, если ее узлы т.е. точки с координатами* $(\varphi(t_K),\psi(t_K))$ *лежат на кривой K.*

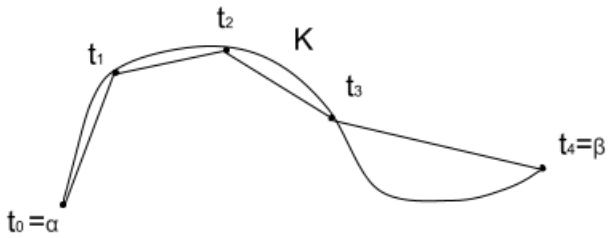

Рис. 7.5. Ломанная l вписана в кривую K

Отрезки ломанной l на $[t_{k-1};t_K]$ называется ее звеньями.

Спрямляемые кривые. Свойства

Рассматривается простая кривая K.

Определение 7.10. *Кривая K называется спрямляемой, если совокупность длин всевозможных ломанных, вписанных в K, ограничена сверху т.е. существует:*

$$\underset{l<K}{Sup}\{|l|\}=|K|$$

Это число $|K|$ называется длиной кривой K.

Замечание. Если ломанная l вписана в кривую K и ее узлы соответствуют разбиению $\{t_K\}$ отрезка $[\alpha;\beta]$, то при измельчении этого разбиения т.е. при добавлении новых точек длина ломанной $|l|$ не уменьшается, а может только увеличиться.

$$|AC|<|AB|+|BC|$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

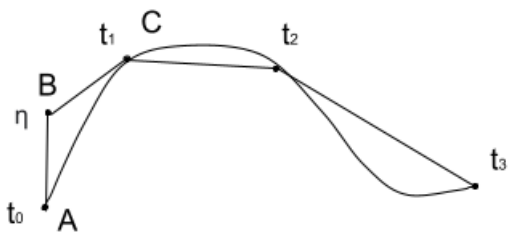

Рис. 7.6. Измельчение разбиения

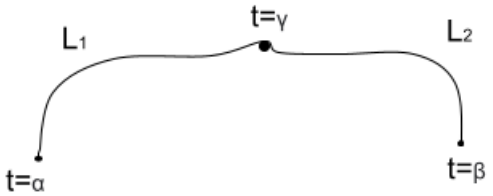

Рис. 7.7. Простые кривые

Теорема 7.1. *Пусть:*

$$L = L_1 \cup L_2$$

Кривая L спрямляема тогда и только тогда, когда спрямляемы обе кривые L_1, L_2 и длина этой кривой совпадает с суммой длин.

$$|L| = |L_1| + |L_2|$$

Доказательство.

Рассматриваются любые ломанные

$$l_1 < L_1, l_2 < L_2$$

$$l_1 \cup l_2 = l < L \longrightarrow |l_1| + |l_2| = |l| \leqslant |L|$$

Если взять любую $\tilde{l} < L$, то добавив узел с $t = \gamma$ получится ломанная $\hat{l}$ такую, что:

$$|\tilde{l}| \leqslant \hat{l} \leqslant |L|$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l_\varepsilon, l_\varepsilon < L$$

$$|L| - \varepsilon < |l_\varepsilon| \leqslant |L|$$

Добавив узел в точке $t = \gamma$ получится:

$$\hat{l}_\varepsilon = \hat{l}_1 + \hat{l}_2, \quad \hat{l}_i < L_i \quad i = 1,2$$

$$|L| - \varepsilon < |l_\varepsilon| \leqslant \hat{l}_1 + \hat{l}_2 \leqslant |L|$$

$$\exists \underset{l_i < L_i}{Sup}\{|l_i|\} = |L_i| \longrightarrow |L_1| + |L_2| \leqslant |L|$$

Необходимо показать, что он равны. Предполагается противное:

$$|L| - (|L_1| + |L_2|) = \alpha > 0$$

Так как L — спрямляема, то для $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ существует такая ломанная $l_{\frac{\alpha}{2}} < L$ такая, что при добавлении узла при $t = \gamma$, получится $\hat{l}_{\frac{\alpha}{2}} < L$.

$$\hat{l}_{\frac{\alpha}{2}} = \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2$$

$$|L| - \frac{\alpha}{2} < |l_{\frac{\alpha}{2}}| \leqslant |\tilde{l}_1| + |\tilde{l}_2| \leqslant |L|$$

Таким образом, получается противоречие.

Пусть известно, что эти 2 кривые спрямляемы. Необходимо показать, что L спрямляема и ее длина равна сумме длин этих кривых.

$$|L| = |L_1| + |L_2|$$

$$\forall \varepsilon < 0 \ \exists \ l_1, l_2, \quad l_i < L_i,$$
$$|L_i| - \frac{\varepsilon}{2} < |l_i| \leqslant |L_i|$$

Рассматривается произвольная ломанная, вписанная в L, к которой добавляется узел при $t = \gamma$. Тогда получится ломанная $\hat{l} < L$, которая представляет собой сумму двух ломанных.

$$\hat{l} = \hat{l}_3 + \hat{l}_2$$

$$|l| \leqslant |\hat{l}| = |\hat{l}_1| + |\hat{l}_2| \leqslant |L_1| + |L_2|$$

Отсюда следует, что кривая L — спрямляема.

$$|L| \leqslant |L_1| + |L_2|$$

Осталось доказать равенство.

Задача: предположить противное:

$$|L_1| + |L_2| - |L| = \delta > 0$$

Необходимо показать, что это приводит к противоречию. ■

Вычисление длины дуги кривой

Теорема 7.2. *Пусть задана кривая K:*

$$K : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]$$

$\psi, \psi', \varphi, \varphi'$ — непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда, кривая K — спрямляема и ее длина вычисляется по формуле:

$$|K| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2} dt = I$$

Доказательство.

Функция $f(t)$ — непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$ и интегрируема. Следовательно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_1 = \delta(\varepsilon) > 0$$

Для любого размеченного разбиения $(\{t_K\}, \{\xi_K\})$ интегральная сумма:

$$\sigma_f = \sigma_f(\{t_K\}, \{\xi_K\})$$

$$|\sigma_f - I| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7.1}$$

$$d < \delta_1$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

d — мелкость разбиения $\{t_K\}$. $\psi'(t)$ — непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$. Следовательно, можно найти:

$$\delta_2 = \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right) > 0$$

$$|t_1 - t_2| < \delta_2$$

$$|\psi'(t_1) - \psi'(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \tag{7.2}$$

Пусть есть произвольная ломанная, вписанная в кривую, с узлами в точках t_k.

$$|l| = \sum_{K=1}^{N} \sqrt{(\varphi(t_1) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_1) - \psi(t_{k-1}))^2}$$

Существуют точки ξ_K, η_K, которые лежать на отрезке $[t_{k-1};t_K]$ такие, что:

$$|l| = \sum_{K=1}^{N} \sqrt{[\varphi'(\xi_K)]^2 + [\psi'(\eta_K)]^2}\Delta t_K \leqslant \sum_{K=1}^{N} \sqrt{(Sup\varphi'(t))^2 + (Sup\psi'(t))^2}\Delta t_K \leqslant S$$

Длины всех ломанных ограничены сверху. Следовательно, кривая K — спрямляема.

$$|K| - \frac{\varepsilon}{3} < |L_\varepsilon| \leqslant |K|$$

Оценивается разность между интегральной суммой и длиной ломанной. Для ломанной l_ε соответствует некоторое разбиение на отрезке $[\alpha;\beta]$. Происходит измельчение этого разбиения так, чтобы мелкость полученного разбиения была меньше, чем $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Получится ломанная $\bar{l} < K$.

$$|K| - |\bar{l}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Причем одновременно выполнены и неравенства (7.1) и (7.2).

$$||l| - \sigma_f| = \sum_R \sqrt{(\varphi'(\xi_K))^2 + (\psi'(\eta_K))^2}\Delta t_K - \sum \sqrt{(\varphi'(\xi_K))^2 + (\psi'(\xi_K))^2}\Delta t_K$$

Применяется следующее рассуждение:

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| = \left|\frac{b^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\right| \leqslant \left|\frac{b^2-c^2}{|b|+|c|}\right| = ||b|-|c|| \leqslant |b-c|$$

$$||l| - \sigma_f| \leqslant \sum_K \left|\sqrt{(\varphi'(\xi_K))^2 + (\psi'(\eta_K))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_K))^2 + (\psi'(\xi_K))^2}\right|\Delta t_K$$

$$\leqslant \sum_K \left| \psi'(\xi_K) - \psi'(\eta_K) \right| \Delta t_K < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$||K| - I| \leqslant ||K| - |\bar{l}|| + ||\bar{l}| - \sigma_f| + |\sigma_f - I| < \varepsilon$$

Таким образом, длина кривой равна значению интеграла.

$$|K| = I$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8. Квадрируемые плоские фигуры и их площади

Следствия из формулы длины кривой. Примеры

Кривая L задана параметрически:

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

$\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ — непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

$$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2} dt$$

Рассматривается интеграл с переменным верхним пределом.

$$|L_\xi| = l(\xi) = \int\limits_{\alpha}^{\xi} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

Записывается производная этой функции:

$$dl = l'_\xi \cdot d\xi = \sqrt{(\varphi'(\xi))^2 + (\psi'(\xi))^2} d\xi$$

Это выражение называется дифференциалом длины дуги (кривой).

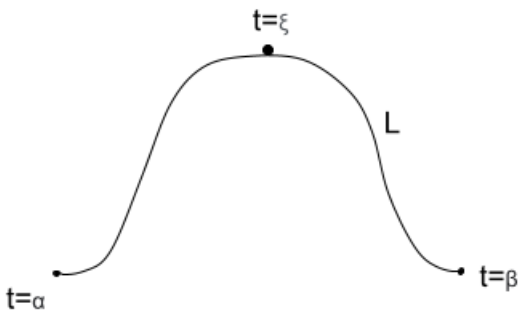

Рис. 8.1. Точка ξ на кривой

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следствие 8.1. *Пусть кривая L задана следующим образом:*

$$L : y = f(x)$$

$f(x), f'(x)$ — непрерывны на отрезке $[a;b]$. Эту кривую можно представить параметрически, где в роли параметра выступает сама переменная x. Следовательно, эта кривая — спрямляема.

$$L : \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

Длина этой кривой вычисляется следующим образом:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Следствие 8.2. *Пусть кривая задана в полярных координатах следующим образом:*

$$L: \ r = r(\varphi) \leftrightarrow L : \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Задаются полярная ось и полярный угол. У каждой точки имеются 2 координаты.

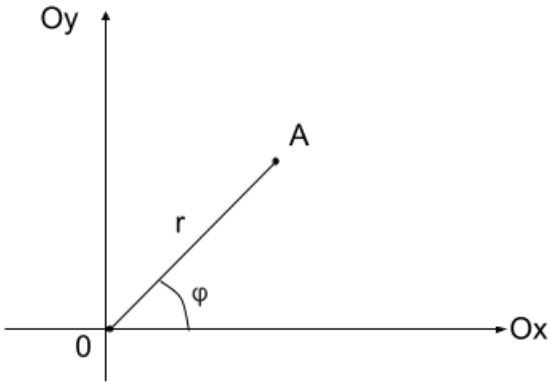

Рис. 8.2. Полярные координаты

Предполагается, что φ меняется на некотором отрезке $[\alpha;\beta]$. $r(\varphi), r'(\varphi)$ — непрерывны на $[\alpha;\beta]$.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

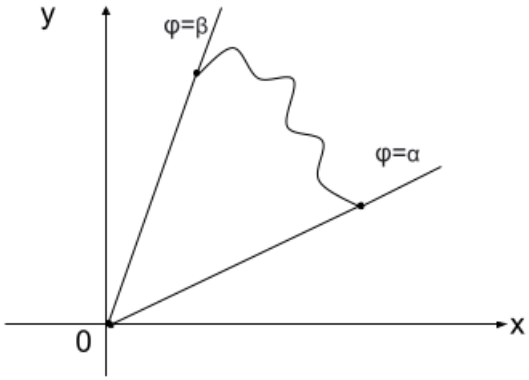

Рис. 8.3. Кривая L

Длина этой кривой вычисляется следующей формулой:

$$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2} d\varphi$$

Доказательство.

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$$
$$y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$$
$$(x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2$$

■

Пример 8.1. *Кривая K задана следующим образом:*

$$K : y = x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

Длина кривой вычисляется следующим образом:

$$|K| = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \sqrt{4+9x} dx = \begin{pmatrix} t = 4+9x \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\int\limits_4^{40} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{18\cdot 3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{40} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

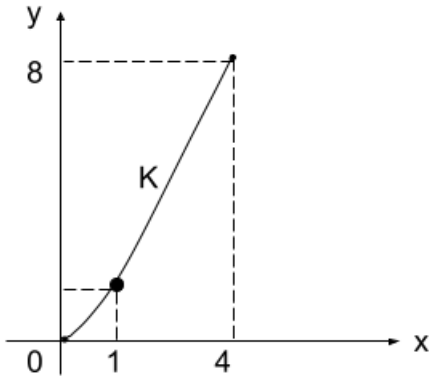

Рис. 8.4. Кривая K

Пример 8.2. *Кривая K задана следующим образом:*

$$K : r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Эта кривая называется кардиоидой.

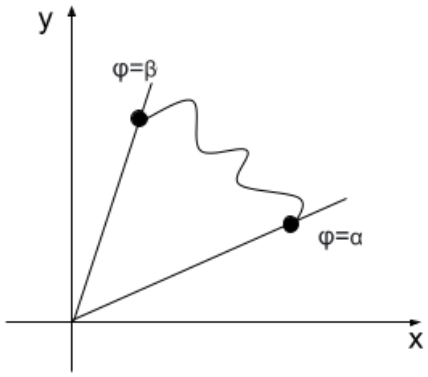

Рис. 8.5. Кривая K — кардиоида

Длина этой кривой вычисляется следующим образом:

$$|K| = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = 8\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если задается пространственная кривая, то задаются 3 координаты:

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \eta(t) \end{cases}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

$\varphi, \varphi', \psi, \psi', \eta, \eta'$ — непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$. Следовательно, кривая L — спрямляема и ее длина вычисляется следующим образом:

$$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2 + (\eta')^2}\, d\varphi$$

Плоские фигуры. Многоугольные фигуры и их площадь

Определение 8.1. *Плоская фигура — это любое ограниченное множество точек плоскости.*

Определение 8.2. *Простейшая многоугольная фигура — это фигура, составленная из конечного числа многоугольников, не имеющих общих внутренних точек. Внутренняя точка x_0 фигуры — это такая точка, что существует такой шарик, который содержится целиком в этой фигуре.*

Внешняя точка y_0 фигуры — это такая точка, что существует шарик с центром в этой точке, который содержится в дополнении этой фигуры. Граничная точка z_0 фигуры — это точка, которая не является ни внутренней, ни внешней.

Возможно, что точка z_0 принадлежит фигуре или дополнению этой фигуры. Для любого $r > 0$ в шарике $B(z_0, r)$ есть точки y, лежащие в фигуре, и точки z, лежащие вне этой фигуры.

Определение 8.3. *Граница фигуры — это совокупность все граничных точек.*

$$\partial\Phi = \{x \in R^2\}$$

Свойства площадей многоугольных фигур

Пусть есть две многоугольные фигуры: F_1 и F_2.

1) Π — площадь.

$$\Pi(F_1) \geqslant 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

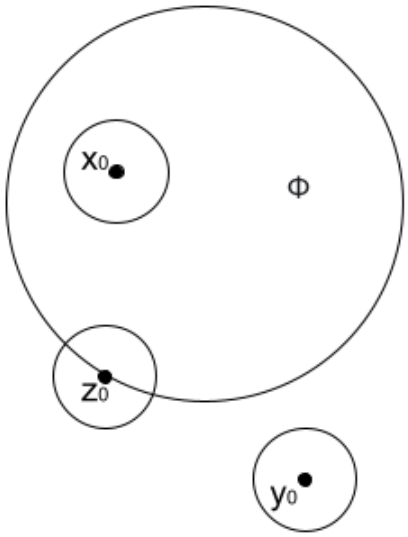

Рис. 8.6. Внутренняя, внешняя, граничная точки

2)
$$F_1 \subseteq F_2 \to \Pi(F_1) \leqslant \Pi(F_2)$$

3)
$$F_1 \cong F_2 \to \Pi(F_1) = \Pi(F_2)$$

4) Если $F_1 \cap F_2$ не содержит внутренних точек, то площадь:

$$\Pi(F_1 \cup F_2) = \Pi(F_1) + \Pi(F_2)$$

Квадрируемость плоской фигуры. Примеры

Пусть F, Q — многоугольные фигуры такие, что для заданной фигуры Φ верно следующее включение:

$$F \subseteq \Phi \subseteq Q$$

$$\Pi(F) \leqslant \Pi(Q)$$

$$\exists \sup_{F \subseteq \Phi} \{\Pi(F)\} = \Pi_*(\Phi)$$

$\Pi_*(\Phi)$ — нижняя площадь фигуры Φ.

$$\exists \inf_{\Phi \subseteq Q} \{\Pi(Q)\} = \Pi^*(\Phi)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\Pi^*(\Phi)$ — верхняя площадь фигуры *Phi*.

Определение 8.4. *Плоская фигура* Φ *называется квадрируемой тогда и только тогда, когда нижняя площадь совпадает с верхней площадью и это число называется площадью фигуры* Φ.

$$\Pi_*(\Phi) = \Pi^*(\Phi) = \Pi(\Phi)$$

Теорема 8.1. *Чтобы фигура* Φ *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* F, Q *многоугольные фигуры такие, что* $F \subseteq \Phi \subseteq Q$ *и их площади:*

$$\Pi(Q) - \Pi(F) < \varepsilon$$

Доказательство.

Пусть фигура Φ — квадрируема. Это означает, что нижняя площадь совпадает с верхней площадью.

$$\Pi_*(\Phi) = \Pi^*(\Phi) = \Pi(\Phi)$$

По определению *sup* и *inf* для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие фигуры F, Q, что:

$$\Pi_*(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} < \Pi(F) \leqslant \Pi_*(\Phi)$$

$$\Pi^*(\Phi) \leqslant \Pi(Q) < \Pi^*(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Pi(Q) - \Pi(F) < \varepsilon$$

Пусть выполнены условия теоремы. Тогда:

$$\Pi(F) \leqslant \Pi_*(\Phi) \leqslant \Pi^*(\Phi) \leqslant \Pi(Q)$$

$$\Pi^*(\Phi) - \Pi_*(\Phi) < \varepsilon$$

Таким образом, разность этих площадей равна 0.

$$\Pi_*(\Phi) = \Pi^*(\Phi) = \Pi(\Phi)$$

Следовательно, фигура Φ — квадрируема. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 8.2. *Чтобы фигура* Φ *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлись бы 2 квадрируемы фигуры* F_1, F_2*:*

$$F_1 \subseteq \Phi \subseteq F_2$$

$$\Pi(F_2) = \Pi(F_1) < \varepsilon$$

$$F \subseteq F_1 \subseteq \Phi \subseteq F_2 \subseteq Q$$

Теорема 8.3. *Фигура* Φ *— квадрируема тогда и только, тогда когда площадь ее границы определена и равна 0.*

$$\Pi(\partial\Phi) = 0$$

Теорема 8.4. *Если фигура* Φ *представляет собой часть плоскости, ограниченную спрямляемой замкнутой кривой* K*:*

$$\partial\Pi = K$$

$$\Pi(\partial\Phi) = 0$$

Площадь спрямляемой кривой равна 0.

Пример 8.3. *Круг квадрируем. Чтобы доказать квадируемость, необходимо построить многоугольную фигуру, которая содержится в этом круге и фигуру, которая ее содержит.*

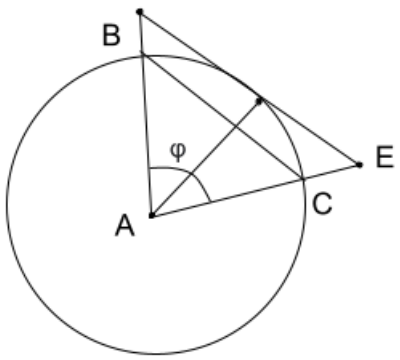

Рис. 8.7. Квадрируемый круг

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сравниваются площади треугольника ABC (T_1) и треугольника ADE (T_2).

$$\Pi(T_1) = r\cos\frac{2\pi}{2n}\cdot r\sin\frac{2\pi}{2n}$$

$$\Pi(T_2) = r^2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}$$

$$\Pi(T_2)-\Pi(T_1) = r^2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\left(\cos^2\frac{2\pi}{2n}-1\right) = r^2\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}}{\frac{2\pi}{2n}}\cdot\frac{2\pi}{2n}\left(\cos^2\frac{2\pi}{2n}-1\right)$$

$$\Pi(Q)-\Pi(F) = \Pi(\Pi(T_2)-\Pi(T_1)) = r^2\pi\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\left(\cos^2\frac{\pi}{n}-1\right)\to 0$$

Пример 8.4. *Не квадрируемая фигура.*

Пусть есть фигура M:

$$M = \{A\in B(0,1)\big|A(r_1,r_2),\ r_1r_2\in Q\}$$

$$\Pi_*(M) = 0$$

$$\Pi^*(M) = \pi$$

Нижняя и верхняя площади не совпадают, поэтому фигура M — не квадрируема. Любая точка A является граничной. Вся фигура M состоит из граничных точек.

$$M = \partial M$$

Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора

Пусть задана функция:

$$y = f(x),\quad f(x)\geqslant 0\quad a\leqslant x\leqslant b$$

Определение 8.5. *Криволинейная трапеция T_f на отрезке $[a;b]$ — это множество, ограниченное графиком $f(x)$, осью Ox, и прямыми:*

$$L_1:\ x = a$$

$$L_2:\ x = b$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

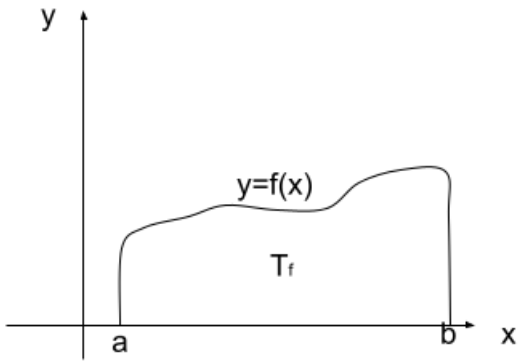

Рис. 8.8. Криволинейная трапеция

Утверждение 8.1. *В описанных условиях если функция $f(x)$ — непрерывна, то криволинейная трапеция T_f — квадрируема и ее площадь имеет следующий вид:*

$$\Pi(T_f) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство.

Так как функция $f(x)$ — непрерывна, то она интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$. Это значит, что по критерию интегрируемости для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{x_k\}$ такое, что верхние суммы и нижние суммы Дарбу отличаются следующим образом:

$$\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$$

Записывается верхняя сумма Дарбу:

$$\overline{S} = \sum_K M_K \Delta x_K$$

Записывается нижняя сумма Дарбу:

$$\underline{S} = \sum_K m_K \cdot \Delta x_K$$

Криволинейная трапеция разбивается на 4 части. Если рассматривается верхняя сумма, то на каждом участке берется максимальное значение функции в качестве высоты. Если рассматривается нижняя сумма, то берется самое минимальное значение функции.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

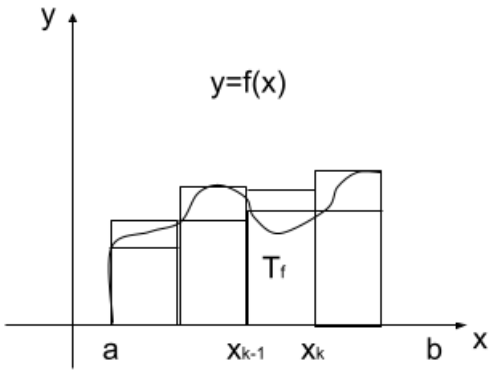

Рис. 8.9. Разбиение Криволинейной трапеции

$$\underline{S} = \Pi(F)$$

$$\overline{S} = \Pi(Q)$$

$$F \subset T_f \subset Q$$

$$\Pi(Q) - \Pi(F) < \varepsilon$$

Следовательно, криволинейная трапеция T_f — квадрируема. Отсюда вытекает, что площадь этой трапеции вычисляется следующим образом:

$$\Pi(T_f) = \int_a^b f(x)dx = I$$

$$\Pi_*(T_f) = I_* = I$$

$$\Pi^(T_f) = I^* = I$$

■

Площадь криволинейного сектора

Пусть задана функция:

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 8.2. *Если функция $r(\varphi)$ — непрерывна, то криволинейный сектор — квадрируем и его площадь вычисляется следующем образом6*

$$\Pi(S_{r(\varphi)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

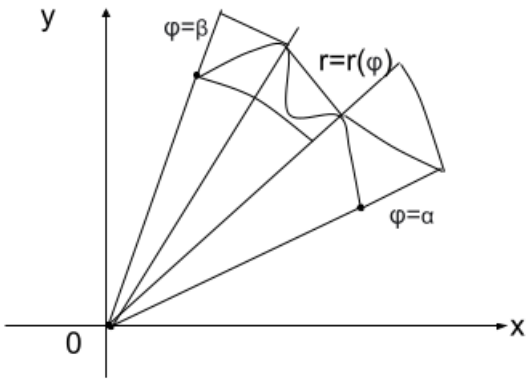

Рис. 8.10. Криволинейный сектор

Доказательство.

Для разбиения $\{t_K\}$ рассматривается суммы Дарбу.

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\sum_K R_K \Delta\varphi_K = \Pi(Q_2)$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\sum_K r_K \Delta\varphi_K = \Pi(Q_1)$$

r_K, R_K — наименьшее и наибольшее значение функции $r(\varphi)$, где $t_{K-1} \leqslant \varphi \leqslant t_K$.

Фигуры Q_1 и Q_2 — квадрируемы, так как их площади — это конечные суммы площадей круговых секторов.

$$Q_1 \subset S_{r(\varphi)} \subset Q_2$$

Так как $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ — интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\{t_K\}$:

$$\overline{S} - \underline{S} = \Pi(Q_2) - \Pi(Q_1) < \varepsilon$$

Следовательно, криволинейный сектор $S_{r(\varphi)}$ — квадрируем. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Кубируемые пространственные тела и их объемы

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a;b]$ и меняет знак в конечном числе точек.

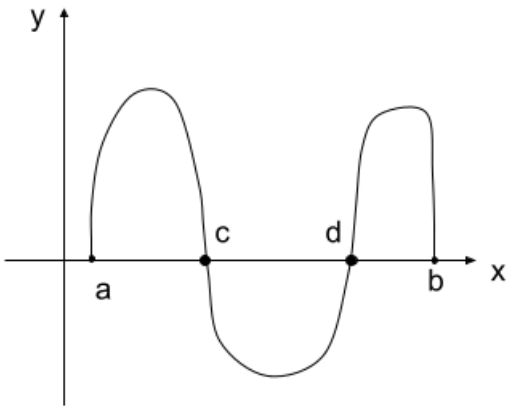

Рис. 9.1. График функции $f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^d - \int\limits_a^b\right) f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

Таким образом, можно сформулировать геометрический смысл определенного интеграла, который равен альтернированной сумме площадей криволинейных трапеций, определенных участками, где функция $f(x)$ сохраняет знак.

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

Пример 9.1. *Пусть задана функция и необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченную осью Ox и аркой синусоиды на промежутке $[0;\pi]$:*

$$f(x) = \sin\ x$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

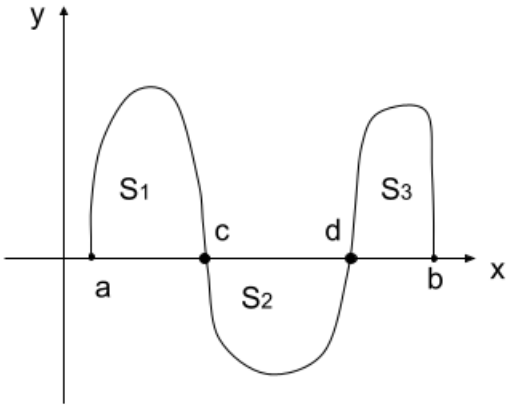

Рис. 9.2. Фигура S

Площадь этой фигуры вычисляется следующим образом:

$$S = \int_0^{\pi} \sin\ x\ dx = (-\cos\ x)\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Пример 9.2. *Необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой:*

$$K:\ r = 1 + \cos\varphi$$

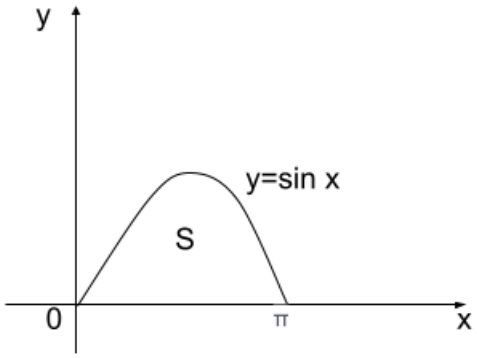

Рис. 9.3. Фигура $\tilde{S}$

Применяется формула для вычисления площади криволинейного сектора.

$$\tilde{S} = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2(\varphi)d\varphi\right) = \int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi =$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \left(\varphi + 2\sin\ \varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin\ 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

Кубируемость и объем пространственного тела

Определение 9.1. *Пространственное тело — это любое ограниченное множество в пространстве R^3.*

Определение 9.2. *Простейшее многогранное тело — это тело, составленное из многогранников, попарное пересечение которых не содержит их общих внутренних точек. A — внутренняя точка для тела T, если существует $B(A,r) \subseteq T$:*

$$B(A,r) := \{B \in R^3 \quad |d(A;B) < r\} \quad r > 0$$

$$d(A;B) := \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)}, \quad A(x_A, y_A, z_A) \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

C — внешняя точка для тела T, если:

$$C \in R^3 \backslash T$$

$$B(C;r) \subset R^3 \backslash T$$

Если точка не является ни внутренней, ни внешней, то в любом шарике с центром в этой точке обязательно найдутся точки из тела T и его дополнения. Точка E называется граничной для тела T, если в шарике $B(E;r)$ существует точки из T и его дополнения $R^3 \backslash T$.

Граница тела T обозначается как:

$$\partial T := \{E \in R^3\}$$

Определение 9.3. *Тело T называется кубируемым, если:*

$$\underset{Q_1 \subseteq T}{Sup}\{V(Q_1)\} = V_*(T) = V^*(T) = \underset{Q_2 \subseteq T}{inf}\{V(Q_2)\}$$

где Q_1, Q_2 — многоугольные тела, причем $V_*(T)$ — нижний объем тела T, $V^*(T)$ — верхний объем тела T.

$$Q_1 \subseteq T \subseteq Q_2$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

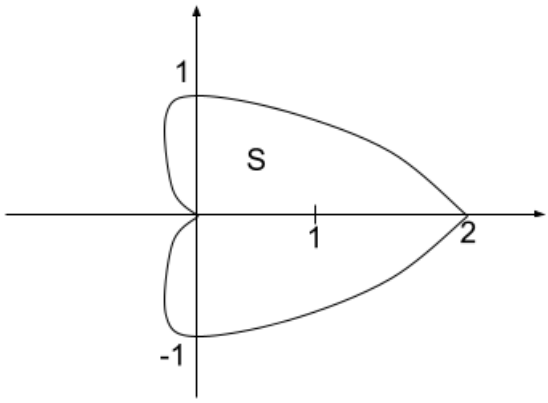

Рис. 9.4. Тело T

Теорема 9.1. *Критерий кубируемости тела.*

Чтобы тело T было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon < 0$ нашлись бы такие многогранные тела Q_1, Q_2:

$$Q_1 \subseteq T \subseteq Q_2$$

$$V(Q_2) - V(Q_1) < \varepsilon$$

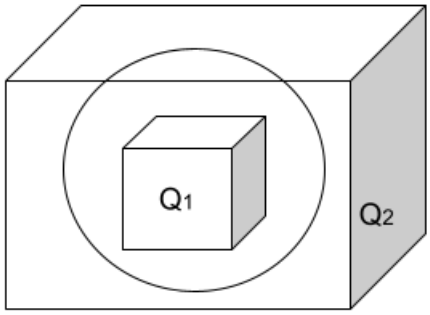

Рис. 9.5. Критерий кубируемости тела

Доказательство.

Пусть тело T — кубируемо, т.е. его нижний объем совпадает с верхним объемом.

$$V_*(T) = V^*(T)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По определению sup и inf для любого $\varepsilon > 0$ существует:

$$Q_1 \subseteq T \quad V_*(T) - \frac{\varepsilon}{2} < V(Q) \leqslant V^*(T)$$

$$T \subseteq Q_2 \quad V^*(T) \leqslant V(Q_2) < V^*(T) + \frac{\varepsilon}{2}$$

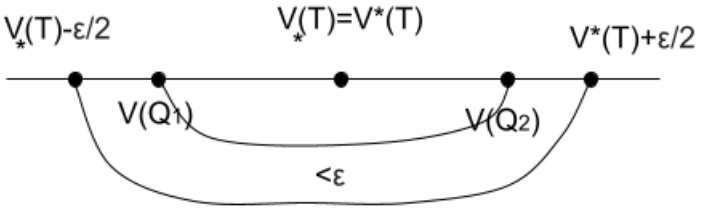

Рис. 9.6. Объем тела T

Пусть выполнены условия теоремы.

$$V(Q_1) \leqslant V_*(T) \leqslant V^*(T) \leqslant V(Q_2)$$

$$V(Q_2) - V(Q_1) < \varepsilon$$

Таким образом, было доказано следующее:

$$V^*(T) - v_*(T) < \varepsilon$$

$$V_*(T) = V^*(T) = V(T)$$

Тело T — кубрируемо. ■

Теорему 9.1 можно переформулировать в терминах границы тела T.

Теорема 9.2. *Тело T — кубируемо тогда и только тогда, когда объем его границы определен и равен 0.*

$$V(\partial T) = 0$$

Доказательство.

$$Q_2 \backslash \overset{*}{Q}_1 \supseteq \partial T$$

$\overset{*}{Q}_1$ — открытый многогранник. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 9.3. *В теореме 9.1 вместо многогранных тел Q_1, Q_2 можно использовать кубируемые тела. Чтобы тело T было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали такие 2 кубируемые тела F_1, F_2 такие, что:*

$$F_1 \subseteq T \subseteq F_2$$

$$V(F_2) - V(F_1) < \varepsilon$$

Задача: доказать теорему 9.3.

Кубируемость цилиндрического тела

Пусть заданы 2 параллельные плоскости P_1, P_2 и прямая ортогональная каждой плоскости.

$$L \perp P_i, \quad i = 1, 2$$

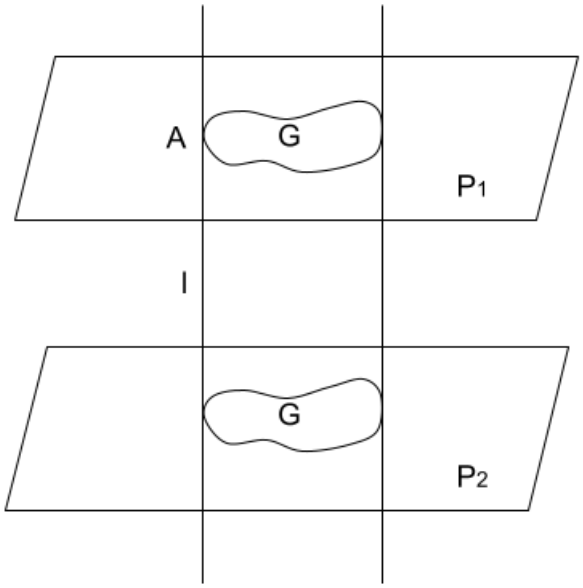

Рис. 9.7. Параллельные плоскости

Рассматривается плоская фигура G на плоскости P_1.

$$G \cong G'$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поверхность, которую образует передвижение прямой по граничным точкам, называется цилиндрической поверхностью. Получается прямой цилиндр Ц с основанием G. Необходимо найти условие, при котором цилиндр — кубируем.

Теорема 9.4. *Если основание G является квадрируемой фигурой, то цилиндрическое тело Ц является кубируемым и его объем равен:*

$$V(Ц) = П \cdot h$$

h — расстояние между P_1, P_2.

Доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют квадрируемые фигуры F, Q такие, что:

$$F \subseteq G \subseteq Q$$

$$\Pi(Q) - \Pi(F) < \frac{\varepsilon}{h}$$

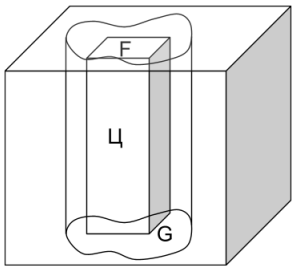

Рис. 9.8. Цилиндрические тела

Рассматриваются цилиндрические тела с основаниями F, Q.

$$Ц_F \subseteq Ц_G \subseteq Ц_Q$$

$$V(Ц_Q) = \Pi(Q) \cdot h$$

$$V(Ц_F) = \Pi(F) \cdot h$$

$$V(Ц_Q) - V(Ц_F) = (\Pi(Q) - \Pi(F)) \cdot h < \frac{\varepsilon}{h} \cdot h < \varepsilon$$

Таким образом, было доказано, что если основание цилиндрического тела — квадрируемо, то само тело — кубируемо. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Объемы тел вращения

Теорема 9.5. *Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Происходит вращение криволинейной трапеции T_f вокруг оси Ox. Полученное тело вращения является кубируемым и его объем равен:*

$$V(T_{Ox}^f) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Доказательство.

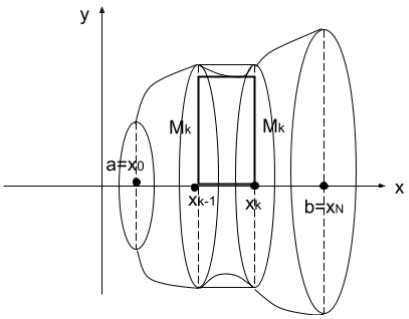

Рис. 9.9. Объем тел вращения

Каждая точка описывает окружность при вращении. Составляется интегральная сумма.

$$\pi M_K^2 \cdot \Delta x_K - \pi m_K^2 \Delta x_K$$

$$\overline{S} = \pi \sum_K M_K^2 \Delta x_K = V(Q_2)$$

$$\underline{S} = \pi \sum_K m_K^2 \Delta x_K = V(Q_1)$$

Так как f^2 — интегрируема, то для достаточно мелкого разбиения разность сумм Дарбу представляет собой:

$$\overline{S} - \underline{S} < \pi \sum_K M_K^2 \Delta x_K - \pi \sum_K m_K^2 \Delta x_K < \varepsilon$$

Q_1, Q_2 — кубируемые тела такие, что:

$$Q_1 \subseteq T_{Ox}^f \subseteq Q_2$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$V(Q_2) - V(Q_1) < \varepsilon$$

Таким образом, тело вращения T_{Ox}^f — кубируемо.

$$V(T_{Ox}^f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

■

Теорема 9.6. *Пусть задан криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ непрерывной на отрезке $[\alpha;\beta]$. Тогда тело вращения, полученное вращением этого сектора $S_{r(\varphi)}$ вокруг полярной оси, является кубируемым и его объем равен:*

$$V(S_{r(\varphi)}) = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\ \varphi\ d\varphi$$

Пример 9.3. *Необходимо найти объем тела вращения криволинейной трапеции, ограниченной аркой синусоиды вокруг оси Ox.*

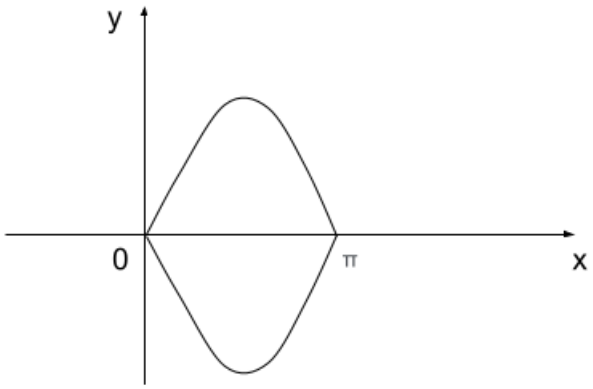

Рис. 9.10. Объем тела вращения криволинейной трапеции

Объем тела вращения задается по следующей формуле:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2\ x\ dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 9.4. *Необходимо найти объем тела T вращения кардиоиды $r(\varphi) = 1 + \cos\ \varphi$ вокруг полярной оси.*

$$V(T) = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\ \varphi)^3 \sin\ \varphi\ d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(1+3\cos\ \varphi+3\cos^2\ \varphi+\cos^3\ \varphi)\sin\ \varphi\ d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-\cos\ \varphi - 3\frac{\cos^2\ \varphi}{2} - 3\frac{\cos^3\ \varphi}{3} - \frac{\cos^4\ \varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}(2+0+2+0) = \frac{8\pi}{3}$$

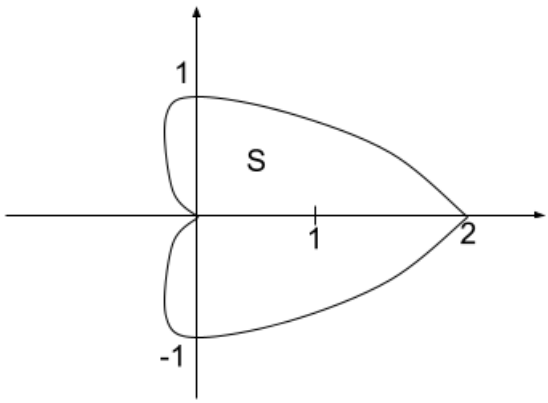

Рис. 9.11. Объем тела вращения кардиоиды

Вычисление физических величин

Пусть задана плотность $\rho(x)$ стержня в точке x. Тогда масса стержня равна:

$$M \approx \sum_K \rho(\xi_K)\cdot\Delta x_K \underset{d\to 0}{\to} \int_{\alpha}^{\beta}\rho(x)dx = M$$

Используя этот интеграл, можно вычислить весь электрический заряд на данном участке провода.

Пусть на тело A прилагается сила $F(x)$ в точке x — непрерывная функция. Тогда работу R можно вычислить следующим образом:

$$R \approx \sum_K F(\xi_K)\cdot\Delta x_K \underset{d\to 0}{\to} \int_a^b F(x)dx = R$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

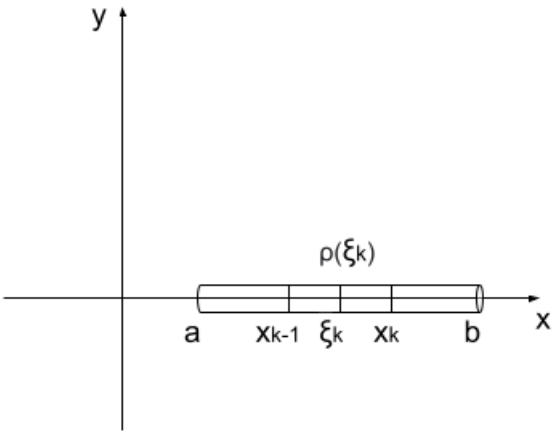

Рис. 9.12. Плотность стержня

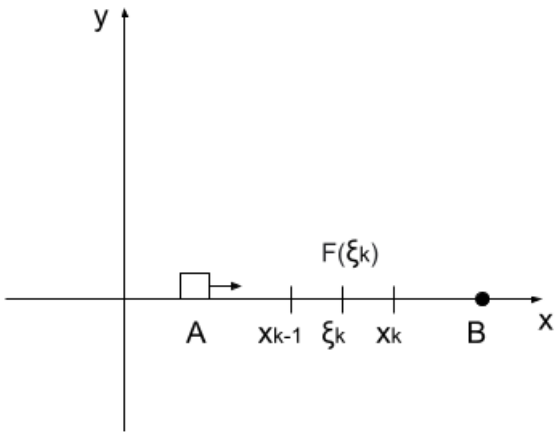

Рис. 9.13. Сила $F(x)$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Методы хорд и касательных решения уравнений

Геометрическая идея приближенных методов

Рассматриваются три простейшие методы вычисления интеграла. Определенный интеграл представляет собой предел интеграл сумм, стремящихся к нулю интегральных сумм. Совокупность точек — это разбиение $\{x_K\}$. Мелкость d — это максимальная длина отрезков. соединяющих соседние точки.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{K=1}^{N} f(\xi_K)\Delta x_K$$

$$\Delta x_K = x_K - x_{K-1}$$

$$x_0 = a, x_N = b$$

$$x_K < x_{K+1}$$

Вместо интегральной суммы можно рассматривать суммы интегралов в силу аддитивного свойства определенного интеграла. Этот интеграл можно рассматривать с точки зрения следующего равенства:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{K=1}^{N}\int_{x_{K-1}}^{x_K} f(x)dx$$

Пусть разбиение записывается следующим образом:

$$\Delta x_K = \frac{b-a}{n}$$

Каждое слагаемое этой суммы вычисляется приближенно. Поэтому рассматривается геометрическая идея приближенных методов.

Пусть $f(x)$ - непрерывна. Первый метод — это метод прямоугольников. Берется середина этого отрезка, значение функции в середине и рассматривается прямоугольник с высотой равной значению функции в этой точке. Вместо площади криволинейной трапеции рассматривается площадь прямоугольника.

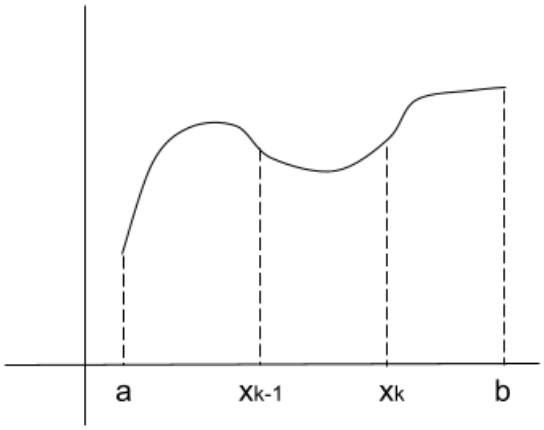

Рис. 10.1. Геометрический смысл интеграла

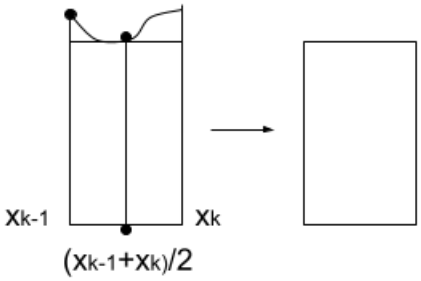

Рис. 10.2. Метод прямоугольника

S_1 — площадь прямоугольника.

$$S_1 = f\left(\frac{x_{K-1}+x_K}{2}\right)\Delta x_K$$

Следующий метод — это метод трапеции. Вместо площади криволинейной трапеции рассматривается площадь настоящей трапеции. S_2 — площадь трапеции. Используются полусуммы оснований.

$$S_2 = \frac{f(x_{K-1})+f(x_K)}{2} \times \Delta x_K$$

Третий метод заключается в следующем. Площадь криволинейной трапеции заменяется на площадь другой криволинейной трапеции. Проводится парабола через три равные точки.

$$S_3 = \int\limits_{x_{K-1}}^{x_K} (Ax^2+Bx+C)dx$$

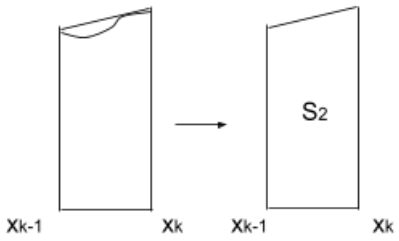

Рис. 10.3. Метод трапеции

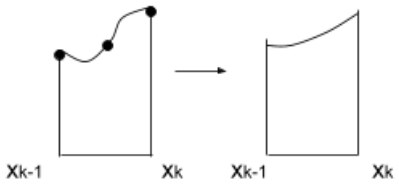

Рис. 10.4. Замена трапеции

Задачей является посчитать, что будет представлять собой приближенные значения интеграла по каждому методу и посмотреть на погрешности каждого метода.

Формулы приближенных методов и оценки погрешностей

Метод прямоугольников

Все отрезки разбиения рассматриваются как:

$$\Delta x_K = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{x_{K-1}+x_K}{2}\right)\Delta x_K + R_{\text{прям}} = \frac{b-a}{n}\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{x_{K-1}+x_K}{2}\right) = S^n_{\text{прям}} + R^n_{\text{прям}}$$

R^n — остаточный член.

$$|R^n_{\text{прям}}| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

f, f', f'' — непрерывны на $[a;b]$.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Метод трапеции

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{K=1}^{n}\left((\frac{f(x_{K-1})+f(x_K)}{2}\right) + R^n_{\text{прям}} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{K=1}^{n-1}f(x_k)\right) + R^n_{\text{прям}}$$

$$|R^n_{\text{прям}}| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^n(x)|$$

Метод парабола называется также методом Симпсона.

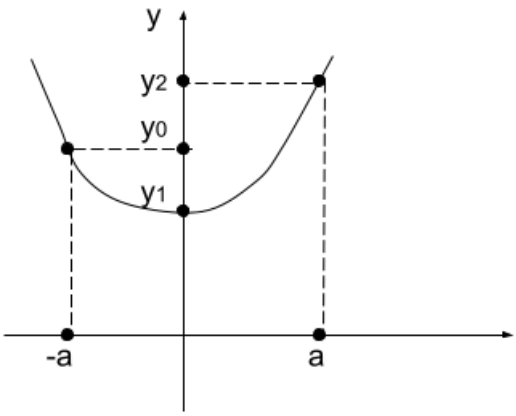

Рис. 10.5. Метод парабола

Задается квадратный трехчлен:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y(-a) = Aa^2 - Ba + C = y_0$$

$$y(0) = C = y_1$$

$$y(a) = Aa^2 + Ba + C = y_2$$

Получается система из трех уравнений, чтобы найти коэффициенты A, B, C.

$$2Ba = y_2 - y_0 \Longrightarrow B = \frac{y_2 - y_0}{2a}$$

$$Aa^2 - \frac{y_2 - y_0}{2a}a + y_1 = y_0$$

$$A = \frac{1}{a^2}\left(y_0 - y_1 + \frac{y_2 - y_0}{2}\right) = \frac{1}{2a^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

Необходимо найти интеграл от этого квадратного трехчлена, с помощью которого приближенно вычисляется интеграл.

$$\int\limits_{-a}^{a}(Ax^2 + Bx + C)dx = \left(\frac{Ax^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{-a}^{a} = A\frac{2a^3}{3} + 0 + 2Ca =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \cdot \frac{1}{2a^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2a \cdot y_1 = a\left(\frac{1}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2y_1\right) =$$

$$= \frac{a}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1) = \frac{a}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Рассматривается перенос модели.

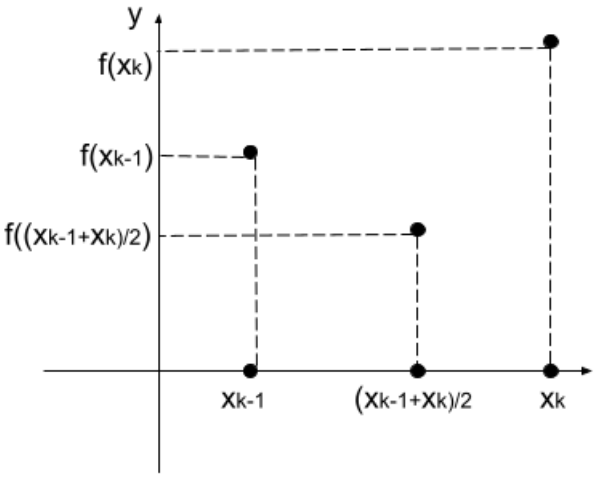

Рис. 10.6. Перенос модели

$$a \longrightarrow \frac{b-a}{2n}$$

$$y_0 \longrightarrow f(x_{K-1})$$

$$y_1 \longrightarrow f\left(\frac{x_{K-1} + x_K}{2}\right)$$

$$y_2 \longrightarrow f(x_K)$$

Происходят замены в интеграле:

$$\int\limits_{x_{K-1}}^{x_K} f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{K-1}) + 4f\left(\frac{x_{K-1} + x_K}{2}\right) + f(x_K)\right]$$

Таким образом, можно записать интеграл на всем промежутке $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\sum_{K=1}^{n}\left[f(x_{K-1}) + 4f\left(\frac{x_{K-1}+x_K}{2}\right) + f(x_K)\right] + R^n_{\text{параб}} =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{x_{K-1}+x_K}{2}\right) + 2\sum_{K=1}^{n-1} f(x_K)\right) + R^n_{\text{параб}}$$

Записывается оценка погрешности:

$$|R^n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n)}(x)|$$

Предполагается, что функция — дифференцируема и все производные нужного порядка — непрерывны на $[a;b]$.

Пример 10.1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \ldots$$

Используя метод Симпсона, можно вычислить приближенное значение числа π с заданной точностью.

Вывод оценки погрешности для метода прямоугольников

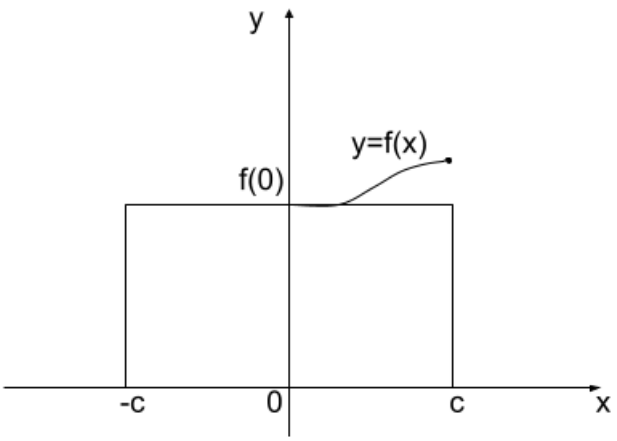

Рис. 10.7. Метод прямоугольников

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = f(0)\cdot 2c + R_0$$

В методе прямоугольников нас интересует только середина этого отрезка, значение функции в этой точке приближенно приравнивается площади прямоугольника. Предполагается, что функции f, f', f'' — непрерывны на отрезке $[-c;c]$. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

Следовательно, $F(x)$ — трижды дифференцируема.

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = F(c) - F(-c) = \Psi(c)$$

Вводится новая функция $\Psi(x)$, которая тоже трижды дифференцируема:

$$\Psi(x) := F(x) - F(-x), \quad x \in [-c;c]$$

Применяется Формула Тейлора с центральной точкой 0. Происходит разложение функции $\Psi(x)$ в точке c по формуле Маклорена:

$$\Psi(c) = \Psi(0) + \frac{\Psi'(0)}{1!}c + \frac{\Psi''(0)}{2!}c^2 + \frac{\Psi'''(\xi)}{3!}c^3 \quad \xi \in (0;c)$$

Таким образом, можно вычислить следующее:

$$\Psi(c) = F(c) - F(-c) = \int_{-c}^{c} f(x)dx$$

$$\Psi(0) = 0$$

$$\Psi'(x) = F'(x) - F'(-x)(-1) = f(x) + f(-x)$$

Подставляется производная в 0:

$$\Psi'(0) = 2f(0)$$

$$\Psi''(x) = f'(x) + f'(-x)(-1) = f'(x) - f'(-x)$$

$$\Psi''(0) = 0$$

$$\Psi'''(x) = f''(x) - f''(-x)(-1) = f''(x) + f''(-x)$$
$$\Psi'''(\xi) = f''(\xi) + f''(-\xi)$$

Записывается интеграл с подставлениями:

$$\int\limits_{-c}^{c} f(x)dx = 2f(0)c + \frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{3!}c^3 = 2f(0)c + \frac{2 \times \frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2}}{3!}c^3 =$$

$$= 2f_(0) \times c + \frac{f''(\eta)}{3}c^3$$

Поскольку функция непрерывна, то среднее арифметическое значение расположено между наибольшим и наименьшим значениями. А когда функция непрерывна на отрезке, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения и проходит через любое промежуточное значение. Так как $f''(x)$ - непрерывна, то по теореме о промежуточном значении существует такая точка $\eta \in (-\xi;\xi)$, что:

$$f''(\eta) = \frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2}$$

Происходит перенос этого интеграла на отрезок $[x_{K-1};x_K]$:

$$\int\limits_{x_{K-1}}^{x_K} f(x)dx = 2f\left(\frac{x_{K-1} + x_K}{2}\right)\frac{b-a}{2n} + R_k^n$$

$$R_k^n = \frac{f^n(\eta_K)}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3$$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{K=1}^{n} f\left(\frac{x_{K-1} + x_K}{2}\right) + R^n_{\text{прям}}$$

$$R^n_{\text{прям}} = \sum_{K=1}^{n} R_K = \frac{(b-a)^3}{24n^3}\frac{\sum\limits_{K=1}^{n} f''(\eta_K)}{n} \times n == \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\zeta)$$

Так как $f''(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то существует точка $\zeta \in (a;b)$ такая, что:

$$f''(\zeta) = \frac{\sum\limits_{K=1}^{n}(\eta_K)}{n}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Необходимо оценить погрешность:

$$|R^n| = \frac{(b-a)^3}{24n^2}|f''(\zeta)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$$

Аналогичным образом вычисляется оценка погрешности метода трапеции и параболы.

Приближенные методы хорд и касательных решения уравнений вида $f(x) = 0$

Пусть задана $f(x)$ на $[a;b]$. Необходимо найти точку, где функция превращается в 0.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$f(x), f'(x)$ — непрерывны на $[a;b]$ и кроме того, выполнено одно из следующих условий:

- $f'(x)$ не убывает:
$$f'(x) > 0$$
- $f'(x)$ не возрастает:
$$f'(x) < 0$$
- $f'(x)$ не убывает:
$$f'(x) < 0$$
- $f'(x)$ не возрастает:
$$f'(x) > 0$$

Рассматривается первый случай, когда $f'(x)$ не убывает и $f'(x) > 0$. Геометрическая идея заключается в следующем.

Берется любая точка графика и соединяется с концевой точкой графика так, чтобы получилась хорда. Из условия, что функция непрерывна и $f(a)f(b) < 0$ следует, что существует точка $c \in [a;b]$ такая, что:

$$f(c) = 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

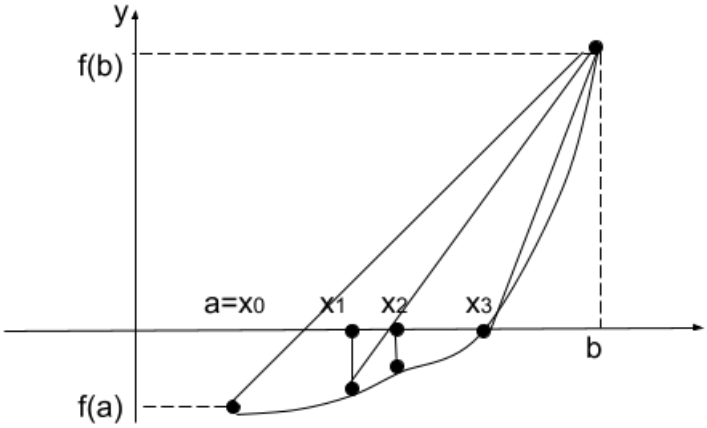

Рис. 10.8. Метод хорд

Выражение для хорды записывается следующим образом:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot (x_1 - a) = 0$$

Необходимо найти точку x_1, где хорда пересекает ось абсцисс.

$$x = \frac{-f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)} + a = x_0 - \frac{f(x_0)(b - x_0)}{f(b) - f(x_0)}$$

Таким образом, можно построить последовательность точек x_n, удовлетворяющие следующим условиям:

$$x_0 = a \quad x_{n+1} x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

Рассматривается отображение:

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{f(x)(b-x)}{f(b)f(x)}, & x \in [a;b) \\ b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}, & x = b \end{cases}$$

$F(x)$ — непрерывна на $[a;b]$.

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Теорема 10.1. *В описанных условиях последовательность $\{x_n\}$, где $x_0 = a$ и $x_{n+1} = F(x_n)$ имеет свойство:*

$$x_n < c \to x_{n+1} \leqslant c, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Известно, что:

$$x_0 = a < c$$

Пусть $x_n < c$:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(f(c) - f(x_n))(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$
$$f(c) = 0$$

Применяется формула Лагранжа:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f'(\xi)(c - x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(c) + f(c) - f(x_n)} = x_n + \frac{f'(\xi)(c - x_n)(b - x_n)}{f(\eta)(b - c) + f'(\xi)(c - x_n)} =$$

$$= (f'(\eta) \geqslant f'(\xi)) \leqslant x_n + \frac{f'(\xi)(c - x_n)(b - x_n)}{f'(\xi)(b - x_n)} = x_n + c - x_n = c$$

Последовательность $\{x_n\}$ монотонно не убывает и ограничена сверху. Следовательно, она сходится.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha, \quad \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)(b - \alpha)}{f(b) - f(\alpha)}$$
$$f(\alpha) = 0 \to \alpha = c$$

c — единственный изолированный корень.

Замечание. Точка c — это такая точка, что $c = F(c)$. Такая точка называется неподвижной точкой отображения F. ■

Метод касательных

Пусть выполнены те же условия, которые описаны выше, и рассматривается ситуация, где $f'(x)$ не убывает и $f'(x) > 0$.

Из точки графика проводится касательная и находится точка x_1, где она пересекает ось абсцисс.

Рассматривается касательная к графику $f(x)$ в точке с координатами $(b; f(b))$.

$$y = f(b) + f'(b)(x_1 - b)$$

$$x_0 = b$$
$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

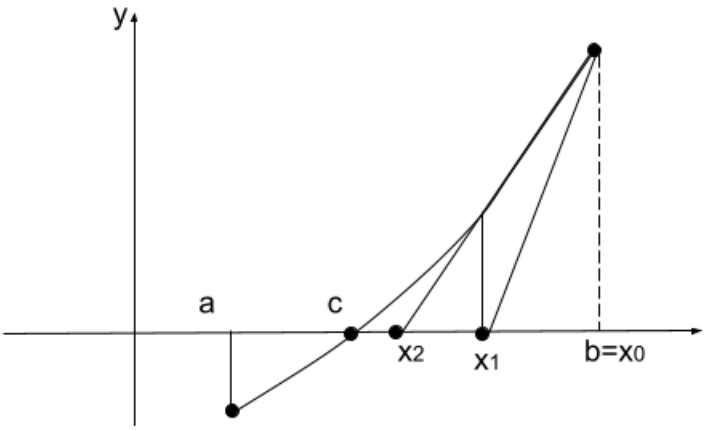

Рис. 10.9. Метод касательной

Таким образом, можно построить последовательность точек $\{x_n\}$ такую, что:

$$x_0 = b, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Предполагается следующее:

$$f'(x) > 0$$

Теорема 10.2. *Построенная последовательность $\{x_n\}$, где $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, удовлетворяет условию:*

$$x_n > c, \quad x_{n+1} < x_n$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$$

Доказательство.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)}$$

Применяется формула Лагранжа:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(\xi)(x_n - c)}{f'(x_n)} \geqslant x_n - (x_n - c) = c$$

$$x_{n+1} \geqslant c$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно, x_n не возрастает и ограничена снизу.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} \gamma$$

$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}, \quad f(\gamma) = 0$$

$$\gamma = c$$

Таким образом, точка c — неподвижна для отображения Φ.

$$c = \Phi(c)$$

■

Лекция 11. Пространство R^n

Погрешность методов хорд и касательных приближенного решения уравнения $f(x) = 0$

Рассматривается непрерывная функция, которая на разных концах отрезка принимает значения разных знаков. Было доказано, что последовательность приближений сходится к корню этого уравнения. Была найдена оценка погрешностей методов хорд и касательных приближенного решения уравнения:

$$f(x) = 0$$

Была построена следующая последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$$

$$f(x_n) = f(x_n) - f(c)$$

Применяется формула Лагранжа и существует такая точка $\xi \in [x_n; c]$:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(c) = f'(\xi)(x_n - c)$$

Вытекает следующая оценка:

$$|x_n - c| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}\right| = \frac{|f(x_n)|}{m}$$

$f'(x)$ — непрерывна на $[a; b]$.

$$f'(x) > 0$$

$$\underset{a\leqslant x\leqslant b}{inf}\ \{f'(x)\} = m > 0$$

Оценка, полученная для метода метода хорд и касательных, записывается следующим образом:

$$|x_n - c| = \left|\frac{f(x_n)}{\underset{a\leqslant x\leqslant b}{inf}\ \{f'(x)\}}\right|$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

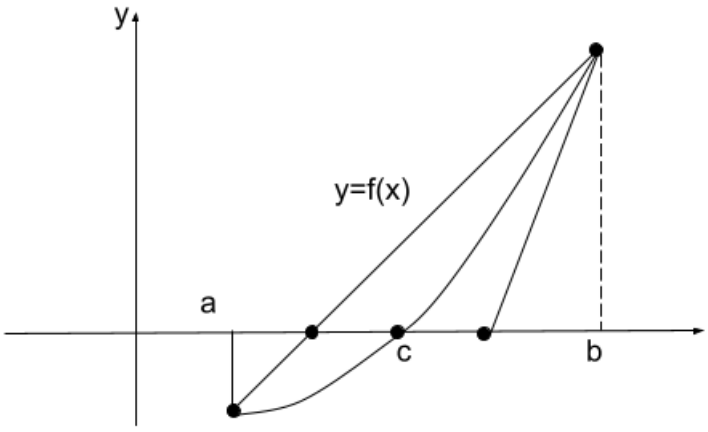

Рис. 11.1. Метод хорды и касательных

Пространство R^n

Пространство R^n (координатное пространство) — это совокупность таких точек, каждая из которых представляет собой упорядоченный набор вещественных чисел.

$$R^n := \{x = (x_1, ..., x_n) |\ x_k \in R, \quad \leqslant k \leqslant n\}$$

Линейные операции

Если имеются координаты $x, y \in R^n$, то определена операция сложения:

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in R^n$$

Если $\alpha \in R$ — вещественное число, то элемент пространства R^n имеет следующий вид:

$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \in R^n$$

Выполнены 8 аксиом линейного пространства. Эти операции:

1) коммутативны.

$$x + y = y + x$$

2) ассоциативны.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

3) имеется тривиальный элемент.

$$\theta = (0, ..., 0) \in R^n,\ \forall x \in R^n, \quad x + \theta = x$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4) существует единственный элемент.

$$\forall\ x \in R^n, \quad `(-x) = (-x_1, ..., -x_n), \quad x + (-x) = \theta$$

5) имеется операция умножения.

$$\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \quad \forall \alpha, \beta \in R$$

6)

$$1 \cdot x = x$$

7)

$$\alpha(x + 4) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

8)

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

Определяется размерность линейного пространства:

$$dim\ R^n = n$$

Основной базис $\{e_k\}$ записывается следующим образом:

$$e_k = (0, ..., 1, 0, ..., 0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

В этом линейном пространстве существует стандартное скалярное произведение.

$$\forall\ x, y \in R^n \quad < x, y >:= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

Скалярное произведение характеризуется билинейной функцией:

$$< x, y > \leqslant 0$$

$$< x, y > = 0, \quad x = \theta$$

$$< x, y > = < y, x >$$

$$< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 11.1. *Евклидово пространство — это линейное пространство конечной размерности со скалярным произведением.*

$$R^n < x, y >= E^n$$

Любое скалярное произведение задает норму:

$$\forall x \in R^n \quad ||x|| := \sqrt{< x, x >}$$

$$||x|| \leqslant 0$$

$$||x|| = 0, \quad x = \theta$$

Можно записать неравенство Коши Буняковского:

$$| < x, y > | \leqslant ||x|| \cdot ||y||$$

Следовательно, можно вывести неравенство треугольника (Минковского):

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$$

Норма порождает расстояние между элементами в пространстве R^n.

$$\rho(x, y) := ||x - y||$$

$$\rho(x, y) \geqslant 0$$

$$\rho(x, y) = 0 \quad x = y$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

Расстояние обладает неравенством треугольника:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall z \in R^n$$

Точки в R^n. Открытые и замкнутые множества. Линейно связное множество

Пусть $M \subseteq R^n$.

Определение 11.2. *Точка $a \in R^n$ называется внутренней для множества M, если $a \in M$ и существует $r > 0$ такое, что:*

$$B(a;r) := \{x \in R^n |\ \rho(x;a) < r\} \subseteq M$$

Определение 11.3. *Точка b называется внешней для множества M, если существует следующий шарик:*

$$B(b;r) \subseteq R^n \backslash M$$

Определение 11.4. *Точка c называется граничной для множества M, если c не внутренняя или не внешняя.*

$$x \in B(c;r) \cap M$$

$$y \in B(c;r) \cap R^n \backslash M$$

c не обязательно лежит в M.

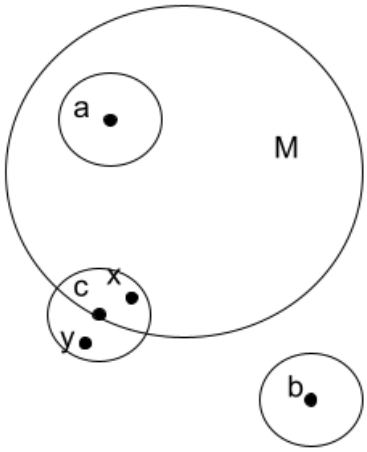

Рис. 11.2. Множество M

Определение 11.5. *Точка $z \in R^n$ называется предельной для множества M, если:*

$$\forall r \in R^n \quad B(z,r) \backslash \{z\} = \overset{\circ}{B}(z,r) \cap M \neq \varnothing$$

z не обязательно лежит в M.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 11.6. *Множество M, лежащее в R^n, называется открытым, если для любой точки x существует $r > 0$, что шарик:*

$$B(x;r) \subseteq M$$

Определение 11.7. *Говорят, что множество $Q \subseteq R^n$ — замкнуто тогда и только тогда, если дополнение $R^n \backslash Q$ — открыто.*

Задача. Доказать эквивалентность следующих 3 определений замкнутого множества в R^n.

Определение 11.8. *Множество M — замкнуто, если $R^n - M$ — открыто.*

Определение 11.9. *Множество M — замкнуто, если M содержит все свои граничные точки.*

Определение 11.10. *Множество M — замкнуто, если M содержит все свои предельные точки.*

Определение 11.11. *Непрерывной кривой в пространстве R^n называется геометрическое место точек K:*

$$K := \{x = (x_1, ..., x_n) |\ x_k = \varphi_k(t), \quad t \in [\alpha; \beta]\}$$

$\varphi_k(t)$ — непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

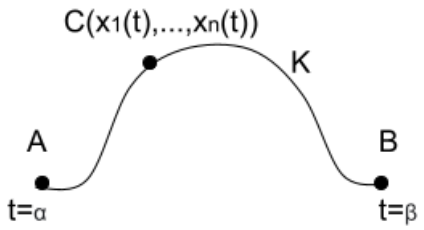

Рис. 11.3. Непрерывная кривая

Определение 11.12. *Множество $M \subseteq R^n$ называется линейно связным, если для любых точек $A, B \in M$ существует непрерывная кривая K, соединяющая эти точки.*

$$K := \{x = (x_1, ..., x_n) | x_k = \varphi_k(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$x(\alpha) = (\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_n(\alpha)) = A$$

$$x(\beta) = (\varphi_2(\beta), ..., \varphi_n(\beta) = B$$

$$K \subseteq M$$

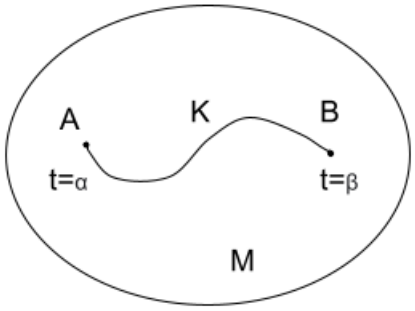

Рис. 11.4. Линейно-связное множество

Замкнутый шар записывается следующим образом:

$$\overline{B}(a;r) := \{x \in R^n |\ \rho(a;r) \leqslant r\}$$

Сфера определяется как:

$$S^{n-1}(a;r) := \{x \in R^n |\ \rho(x;a) = r\}$$

Задача. Доказать, что сфера S^{n-1} является границей как открытого шара, так и замкнутого.

Граница множества M обозначается как ∂M.

$$S^{n-1}(a;r) = \partial B(a;r)$$

$$S^{n-1}(a;r) = \partial \overline{B}(a;r)$$

Последовательности точек в R^n.

Пусть последовательность обозначается следующим образом:

$$\{x_m\} = \{(x_{m_1}, x_{m_2}, ..., x_{m_n})\}, \quad m \in N$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 11.13. *Говорят, что последовательность $\{x_m\}$ сходится к элементу $a \in R^n$ тогда и только тогда, когда для $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого $m > N$ верно, что:*

$$\rho(x_m, a) = ||x_m - a|| < \varepsilon$$

Определение 11.14. *Последовательность $\{x_m\}$ называется фундаментальной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого номера $m > N$, $l \in N$ верно, что:*

$$\rho(x_m, x_{m+l}) < \varepsilon$$

Лемма 11.1. *Последовательность $\{x_m\}$ в пространстве R^n сходится к элементу $a = (a_1, ..., a_n)$ тогда и только тогда, когда сходится каждая координатная последовательность.*

$$x_{m_k} \underset{m\to\infty}{\to} a_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$x_m \underset{m\to\infty}{\to} a$$

Доказательство.

Пусть последовательность сходится:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\to} a \leftrightarrow \rho(x_m, a) = ||x_m - a|| = \sqrt{\sum_{K=1}^{n} (x_{m_k} - a_k)^2} < \varepsilon$$

Следовательно:

$$\sum_{K=1}^{n} (x_{m_k} - a_k)^2 < \varepsilon^2$$

$$|x_{m_k} - a| < \varepsilon \to x_{m_k} \underset{m\to\infty}{\to} a_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Доказательство в обратную сторону записывается следующим образом. Пусть последовательность сходится:

$$x_{m_k} \underset{m\to\infty}{\to} a_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_k = N_k\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$$

$$|x_{m_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$(x_{m_k} - a_k)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$\sqrt{\sum_{K=1}^{n} (x_{m_k} - a_k)^2} < \varepsilon \leftrightarrow \rho(x_m, a) < \varepsilon$$

■

Лемма 11.2. *Последовательность $\{x_m\} \subset R^n$ — фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$ последовательность $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальна.*

Доказательство.

Пусть последовательность $\{x_m\} \subset R^n$ — фундаментальна. Это означает следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N = N(\varepsilon) \quad \forall m > N, \forall l \in N$$

$$\rho(x_m, x_{m+l}) < \varepsilon$$

$$\sqrt{\sum_{K=1}^{n} (x_{m_k} - x_{(m+l)_k})^2} < \varepsilon \to |x_{m_k} - x_{(m+l)_k}| < \varepsilon \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальна.

Доказательство в обратную сторону записывается следующим образом. Пусть последовательность $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальна. Это означает, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N_k = N_k(\varepsilon), \ \ \forall m > N, \ \forall l \in N$$

$$|x_{m_k} - x_{(m+l)_k}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$N = max\{N_k\}$$

$$\sqrt{\sum_{K=1}^{n} (x_{m_k} - x_{(m+l)_k})^2} < \varepsilon$$

Следовательно, последовательность $\{x_m\}$ — фундаментальна. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 11.1. *Критерий Коши сходимости последовательности в пространстве R^n.*

Чтобы последовательность $\{x_m\} \in R^n$ имела конечный предел a, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.

$$x_m \underset{m\to\infty}{\to} a$$

Доказательство.

Пусть последовательность $\{x_m\}$ сходится к a. Тогда Лемма 11.1 говорит о том, что каждая координатная последовательность сходится к соответствующей координате элемента a.

$$x_{m_k} \underset{m\to\infty}{\to} a_k$$

По критерию Коши для числовых последовательностей это происходит, когда $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальна. Если все последовательности $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальны, то лемма 11.2 говорит о том, что это верно тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_m\}$ — фундаментальна. ■

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 11.2. *Из любой ограниченной последовательности $\{x_m\} \subset R^n$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Определение 11.15. *Множество $M \subset R^n$ называется ограниченным, если существует $r > 0$, что:*

$$||x|| \leqslant r, \quad x \in M$$

Доказательство.

Пусть последовательности $\{x_m\}$ задана в координатной форме:

$$\{x_m\} = \begin{cases} x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}) \\ x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}) \\ x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) \\ x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) \end{cases}$$

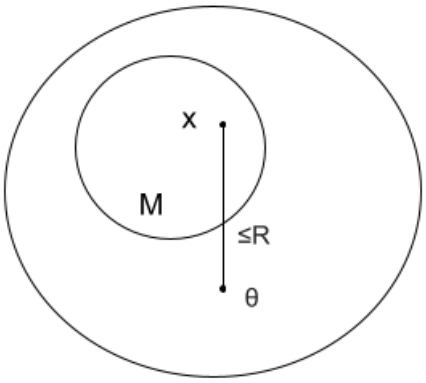

Рис. 11.5. Ограниченное множество

Рассматривается последовательность первых координат $\{x_{m1}\}$. Так как последовательность $\{x_m\}$ — ограничена, то существует $r > 0$, что:

$$||x_m|| \leqslant r \to |x_{m_k}| \leqslant r$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_{m_k}^2} \leqslant r$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_{m1}\}$ — ограничена. По теореме Больцано - Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность:

$$\{x_{m1}\} \to a_1$$

Во всех координатных последовательностях оставляются только члены с номерами из этой подпоследовательности. Получится некая подпоследовательность $\{x_{m_q}\}$, у которой последовательность первых координат $\{x_{m_q 1}\}$ сходится к a_1, а остальные последовательности $\{x_{m_q k}\}$ — ограничены. То же самое проделывается и с последовательностью вторых координат $\{x_{m_q 2}\}$. Из нее выбирается сходящаяся подпоследовательность $\{x_{\tilde{m}_2}\}$, которая сходится к элементу a_2. Во всех координатных последовательностях оставляются только члены с номерами $\{x_{\tilde{m}_k}\}$. Получится подпоследовательность $\{x_{\tilde{m}_k}\}$, где:

$$\{x_{\tilde{m}_1}\} \to a_1$$

$$\{x_{\tilde{m}_2}\} \to a_2$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а остальные последовательности $\{x_{\tilde{m}_k}\}$, $k > 2$ — ограничены. Поступая далее аналогично, на n шаге получится некоторую подпоследовательность $\{x_{\hat{m}_k}\}$, где координатные последовательности сходятся к a_k.

$$\{x_{\hat{m}_k}\} \underset{\hat{m}\to\infty}{\to} a_k$$

Полученная подпоследовательность $\{x_{\hat{m}}\}$ будет сходится к a, где:

$$a = (a_1, ..., a_n)$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12. Функции многих переменных. Предел и непрерывность функции многих переменных

Функции многих переменных. Предел функции многих переменных

Пусть есть функция f, определенная на множестве в пространстве R^n.

$$f : D_f \to R^n, \quad D_f \subseteq R^n$$

D_f — область определения. Если $x = (x_1, ..., x_n)$ — набор вещественных чисел, который принадлежит области определения, то функция имеет следующий вид и вводится новая переменная y:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in D_f$$

$$f(x) = f(x_1, ..., x_n) = y$$

Пример 12.1. *Необходимо найти область определения:*

$$f(x,y) = z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$9 - x^2 - y^2 \geqslant 0$$

Таким образом, область определения равна:

$$D_f = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

На плоскости получается круг радиуса 3. В пространстве R^3 график представляет собой полусферу.

Пример 12.2.

$$f(x,y) = z = \sqrt{\cos(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Область определения равна:

$$D_f := \{(x,y) |\ 2\pi n \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n\}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

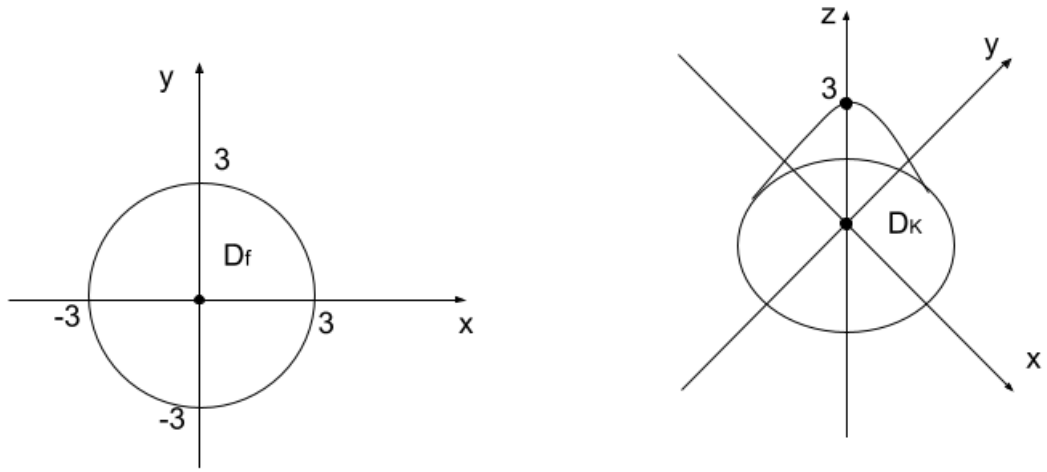

Рис. 12.1. Область определения круга

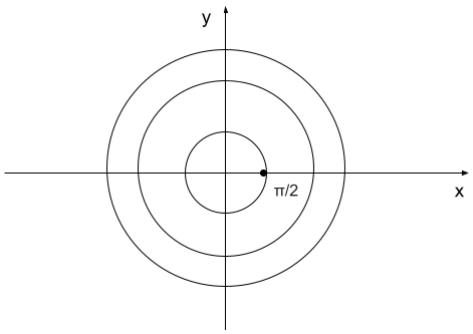

Рис. 12.2. Область определения

Каждой точке из области определения сопоставляется вещественное число, которое является значением функции.

Определение 12.1. *По Коши.*

Число A называется пределом функции нескольких переменных при $x \to a$ $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что:

$$x \in D_f, \quad 0 < ||x - a|| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

a — предельная точка для D_f.

Определение 12.2. *По Гейне.*

Число A называется пределом функции нескольких переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ при $x \to a$, если точка a — предельная точка для D_f и для любой последовательности

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\{x_m\} \subseteq D_f$:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\to} a, \quad x_m \neq a \to f(x_m) \underset{m\to}{\to} A$$

Лемма 12.1. *Определения предела функции нескольких переменных по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство аналогично случаю функции одной переменной.

ε - окрестности конечных точек и бесконечности в R^n. Условия Коши. Критерий Коши. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные пределы

Пусть:

$$\varepsilon > 0$$

$$a = (a_1, ..., a_n)$$

Тогда ε - окрестность точки a — это следующий шар:

$$B(a, \varepsilon) = \{xinR^n | \rho(x; a) < \varepsilon\} = U_\varepsilon(a)$$

Есть есть бесконечность в R^n, то это понимается как бесконечный горизонт. Говорят, что $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда:

$$||x|| \to \infty$$

ε - окрестность бесконечной точки в R^n — это множество:

$$U_\varepsilon(\infty) := \{x \in R^n | \ ||x|| > \varepsilon\}$$

$$U_\varepsilon(\infty) = R^2 \backslash B(0; \varepsilon)$$

Рассматриваются условия Коши в конечной и бесконечной точках в R^n.

Определение 12.3. *Функция нескольких переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет условиям Коши в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что:*

$$\forall x_1, x_2 \quad x_i \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \backslash \{a\}$$

Следовательно:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

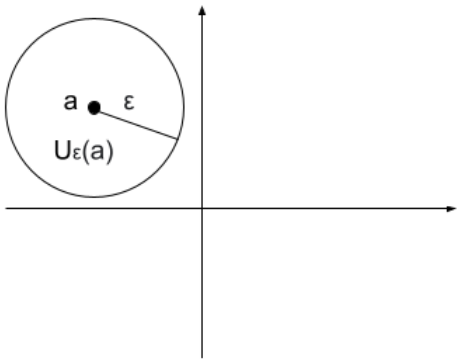

Рис. 12.3. ε - окрестность точки a

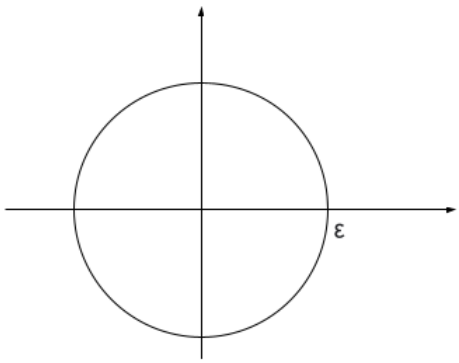

Рис. 12.4. ε - окрестность бесконечной точки

Определение 12.4. *Функция нескольких переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяет условиям Коши в бесконечно удаленной точке, если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что:*

$$\forall x_1, x_2 \quad x_i \in U_\delta(\infty) \to ||x_i|| > \delta$$

Следовательно:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Сформулируется критерий Коши существования предела функции в конечно или бесконечной точках.

Теорема 12.1. *Чтобы функция нескольких переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ имела конечный предел в точке $a \in R^n$ или $a = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла в этой точке a условиям Коши.*

Доказательство аналогично случаю одной переменной.

Теорема 12.2. *Пусть существуют следующие пределы:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = B$$

Тогда существует предел, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = A \pm B$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$$

$$B \neq 0, \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Доказательство аналогично случаю одной переменной.

Двойные и повторные пределы. Бесконечно малые функции нескольких переменных

Рассматривается функция двух переменных.

$$z = f(x,y)$$

Пусть она определена в прямоугольнике (проколотом):

$$\Pi(x_0,y_0) = \{(x,y)|\ 0 < |x-x_0| < d_1,\ \ 0 < |y-y_0| < d_2\}$$

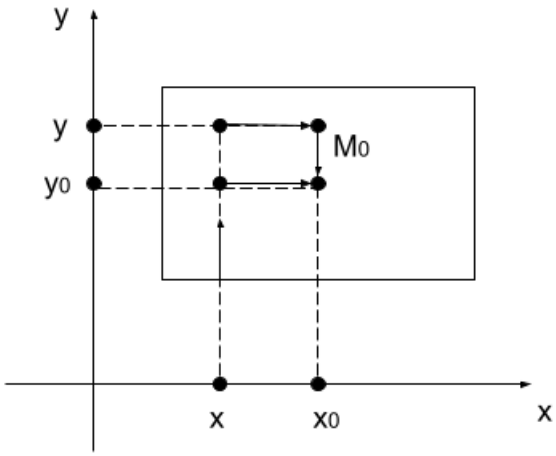

Рис. 12.5. Функция в прямоугольнике

Предполагается, что для любого y, удовлетворяющего условию $0 < |y-y_0| < d_2$, существует следующий предел:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда существует повторный предел, который записывается следующим образом:

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$$

Предполагается, что для любого x, удовлетворяющего условию $0<|x-x_0|<d_1$, существует следующий предел:

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x)$$

Тогда существует повторный предел, который записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$$

Необходимо найти условия, при которых эти 2 предела совпадают.

Лемма 12.2. *О равенстве повторных пределов.*

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотом прямоугольнике ($\Pi(x_0,y_0)\backslash M_0$) и пусть существуют пределы:

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad 0<|x-x_0|<d_1$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad 0<|y-y_0|<d_2$$

Пусть существует предел:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Тогда существуют повторные пределы:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = A$$

Пример 12.3. *Пусть задана функция:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$$

$$a=(0,0)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда существует следующий предел:

$$x \neq 0, \quad \lim_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(y) = 0$$

$$y \neq 0, \quad \lim_{x \to x_0} f(x,y) = \psi(x) = 0$$

Однако, не существует двойного предела:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

Так как если $y = kx$, то:

$$\lim_{x \to 0} f(x,kx) = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

Пример 12.4. *Пусть задана функция:*

$$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Рассматривается предел:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} g(x,y) = 0$$

Рассматривается случай, когда не существуют промежуточные пределы:

$$\lim_{y \to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}$$

$$\lim_{x \to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{y}$$

Определение 12.5. *Функция нескольких переменных $f(x) - f(x_1, ..., x_n)$ называется бесконечно малой в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если существует следующий предел:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Утверждение 12.1. *Асимптотическое представление функции нескольких переменных, имеющий конечный предел.*

Чтобы существовал предел:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A < \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела следующее представление:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

$\alpha(x)$ *— бесконечно малая функция при* $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$. Тогда:

$$\alpha(x) = \overline{o}(\beta(x))$$

$$\beta(x) \neq 0 \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a), \quad \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Непрерывность функции нескольких переменных в точке. Точки разрыва

Определение 12.6. *Пусть точка a является предельной для области определения D_f, где $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$. Функция f — непрерывна в точке a, если существует предел:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Если точка a изолирована для области определения D_f, то полагается, что $f(x)$ — непрерывна в точке a.

Определение 12.7. *По Коши.*

Пусть $a \in D_f$. $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что:

$$x \in D_f \quad ||x - a|| < \delta$$

Следовательно:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad x \in U_{\delta}(a)$$

Определение 12.8. *По Гейне.*

Пусть $a \in D_f$. $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности $\{x_m\} \subseteq D_f$, которая сходится в a. Следовательно:

$$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\to} f(a)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание. Непрерывность $f(x)$ в точке $a \in D_f$ означает, что:

$$\Delta f = f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\to} 0$$

$$x - a = (x_1 - a_1 = \Delta x_1, ..., x_n - a_n = \Delta x_n)$$

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$\Delta f \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$$

Такое приращение называется полным приращением.

$$\Delta x_k = x_k - a_k$$

Зафиксируются координаты точки $a = (a_1, ..., a_n)$ кроме a_k. Рассматривается следующее приращение:

$$\Delta_k f = f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)$$

Определение 12.9. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке a по переменной x_k, если:*

$$\Delta_k f \underset{\delta x_k \to 0}{\to} 0$$

Следовательно, существует предел:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k f = 0$$

Определение 12.10. *Точка a — предельная для области определения функции D_f, называется точкой разрыва функции f, если не выполнено условие непрерывности в точке a.*

Замечание. При $n \geqslant 2$, не существует конечной классификации точек разрыва функции $f(x)$.

Пример 12.5. *Рассматривается функция:*

$$f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (0, 0) \notin D_f$$

Не существует предела:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

Таким образом, $(0, 0)$ — точка разрыва.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13. Локальные и глобальные свойства непрерывной функции нескольких переменных. Дифференцирование функции нескольких переменных

Лемма о повторном пределе

Лемма 13.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в проколотом прямоугольнике, который представляет множество:*

$$\overset{\circ}{\Pi}(M_0) = \{M \in R^n |\ 0 < |x - x_0| < d_1, \quad 0 < |y - y_0| < d_2\}$$

$$M(x,y), \quad M_0(x_0, y_0)$$

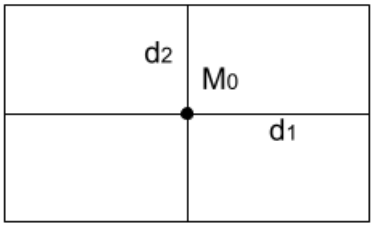

Рис. 13.1. Проколотый прямоугольник

Пусть существует предел:

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad 0 < |y - y_0| < d_2$$

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad 0 < |x - x_0| < d_1$$

Также существует предел при одновременном стремлении:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A$$

Тогда существуют повторные пределы:

$$\lim_{x \to x_0} \big(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \big) = \lim_{y \to y_0} \big(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \big) = A$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

По определению предела по Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что:

$$\forall M(x,y) \quad 0 < ||M - M_0|| < \delta$$

Следовательно:

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

Пусть есть шар со следующими координатами:

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \to \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ |y - y_0| < \delta \end{cases}$$

Так как:

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \to |\varphi(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Следовательно, существует повторный предел:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = A = \lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x,y)) = A$$

Аналогично:

$$|f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \to |\psi(x) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Следовательно, существует повторный предел:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = A = \lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x,y)) = A$$

■

Связь непрерывности функции по совокупности переменных с непрерывностью функции по переменной

Функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ называется непрерывной в точке $a = (a_1, ..., a_n)$, если ее полное приращение Δf, которая определяется как:

$$\Delta f := f(a + \Delta x) - f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, ..., a_n + \Delta x_n) - f(a_1, ..., a_n) \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ называется непрерывной в точке $a = (a_1, ..., a_n)$ по переменной x_k, если ее частное приращение записывается следующим образом:

$$\Delta_k f = f(a + \Delta_k x) - f(a) \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

$$\Delta_k x = (0, ..., 0, \Delta x_k, 0, ..., 0)$$

$$||\Delta_k x|| = |\Delta x_k|$$

Лемма 13.2. *Если функция $f(x)$ — непрерывна в точке a по совокупности переменных, то она непрерывна в точке a по каждой переменной x_k.*

Доказательство.

Дано следующее:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

Взяв частное приращение:

$$\Delta x = \Delta_k x \to f(a + \Delta_k x) - \varphi(a) \underset{||\Delta_k x|| \to 0}{\to} 0$$

$$||\Delta_k x|| = |\Delta x_k|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

■

Пример 13.1. *Обратное утверждение не всегда верно. Рассматривается функция двух переменных:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

В точке $a = (0, 0)$ функция непрерывна по каждой переменной.

$$\Delta_x f = f(x, 0) = 0$$

$$\Delta_y f = f(0, y) - 0 = 0$$

Из этих условий следует, что f — непрерывна в точке $(0, 0)$ по x и по y. Однако, предел при одновременном стремлении не существует:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

Таким образом, $f(x, y)$ — не является непрерывной по совокупности переменных в точке $(0, 0)$.

Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции

Теорема 13.1. *Функции $f(x), g(x)$ — непрерывны в точке a. Пусть f, g определены в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$. Тогда следующие функции тоже — непрерывны:*

$$f(x) \pm g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x)$$

Если в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$ $g(x) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ тоже непрерывна в точке a.

Доказательство аналогично случаю с одной переменной.

Непрерывность сложной функции

Пусть есть подмножество $T \subseteq R^q$, которое является областью определения.

$$T = D_{\varphi_i} \quad \varphi_i : \ T \to R, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Тогда можно рассматривать отображение вектор функции φ:

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$$

$$\varphi : \ T \to D_f \subseteq R^n$$

$$f : \ D_f \to R$$

$$t_0 \in T \subseteq R^q$$

$$t_0 = (t_{01}, ..., t_{0q})$$

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_{01}, ..., t_{0q}) = x_{0i}(t_0)$$

$$x(t_0) = (x_{01}(t_0), ..., x_{0n}(t_0)) \in D_f \subseteq R^n$$

Сложная функция определяется следующим образом:

$$f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

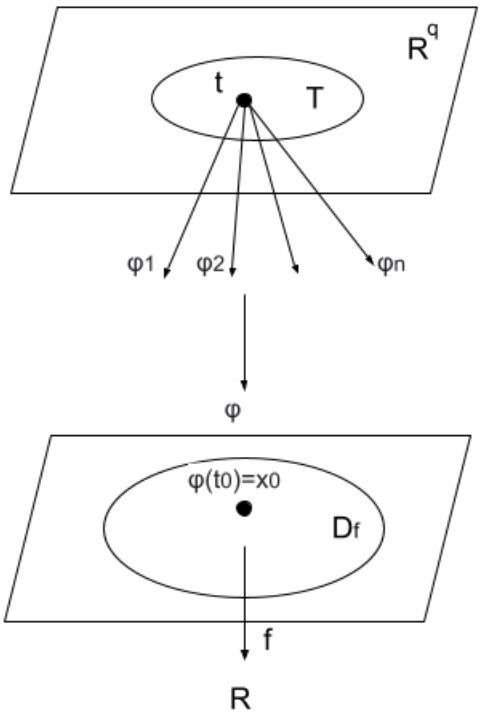

Рис. 13.2. Непрерывность сложной функции

Теорема 13.2. *В описанных условиях если функции $\varphi_i(t)$ — непрерывны в точке t_0, а функция $f(x)$ — непрерывна в точке x_0, то сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ будет непрерывна в точке t_0.*

Доказательство.

Используется определение непрерывности функции по Гейне. Для любой последовательности $\{t_m\}$:

$$t_m \underset{m\to\infty}{\to} t_0 \to \varphi_i(t_m) \underset{m\to\infty}{\to} \varphi_i(t_0)$$

Следовательно, имеется последовательность $\{x_i\}$:

$$x_i(t_m) = \varphi_i(t_m) \underset{m\to\infty}{\to} \varphi_i(t_0) = x_{0i}$$

$$x_m = (x_{m1}, ..., x(mn)) \to (x_{01}, ..., x_{0n})$$

Так как функция f — непрерывна:

$$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\to} f(x_0)$$

Следовательно:

$$F(t_m) = f(\varphi(t_m)) \underset{m\to\infty}{\to} f(\varphi(t_0)) = f(x_0) = F(t_0)$$

Вывод. Для любой последовательности t_m, которая сходится к t_0, получается что функция $F(t)$ — непрерывна:

$$F(t_m) \to F(t_0)$$

■

Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Теорема о промежуточном значении

Теорема 13.3. *Пусть функция $f(x)$ — непрерывна в точке $a = (a_1, ..., a_n)$ и определена в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$. Пусть $f(a) > 0$. Тогда существует $\delta > 0$такое, что:*

$$\forall x \in U_\delta(a), \quad f(x) \cdot f(a) > 0$$

Доказательство.

Доказательство аналогично случаю с одной переменной. По определению непрерывности предел функции:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) > 0$$

$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

$$\forall x \in U_\delta(a), \quad f(a) - \frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \frac{|f(a)|}{2}$$

■

Теорема 13.4. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на линейно - связном множестве $M \subseteq R^n$ и пусть $A, B \in M$.*

$$f(A) < f(B)$$

Тогда для любого числа μ:

$$f(A) < \mu < f(B)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

и для любой непрерывной кривой K существует точка $C \in K$, что:

$$f(C) = \mu$$

$$K := \{\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) |\ t \in [\alpha; \beta]\}$$

$$\varphi(\alpha) = A \quad \varphi(\beta) = B$$

Доказательство.

Кривая K задается с помощью непрерывных функций $\varphi_k(t)$, где:

$$\varphi_k(t) : [\alpha, \beta] \to M$$

Определена сложная функция на отрезке $[\alpha; \beta] \overset{f(\varphi(t))}{\to} R$. Так как φ_k — непрерывна в $\forall t \in [\alpha; \beta]$, то функции f и $F(t)$ — непрерывны.

$$F(\alpha) = f(A) < f(B) = F(\beta)$$

По теореме о промежуточном значении непрерывной функции одной переменной существует точка $\xi \in [\alpha; \beta]$, что $f(\xi) = \mu$.

$$F(\xi) = f(\varphi(\xi)) = f(C)$$

■

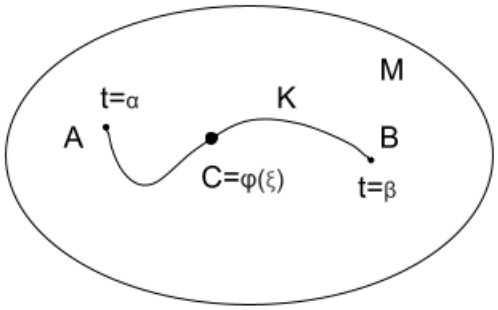

Рис. 13.3. Точка μ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теоремы Вейерштрасса. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Теорема 13.5. *Пусть функция $f(x)$ — непрерывна во всех точка в замкнутом ограниченном множестве $M \subset R^n$. Тогда $f(x)$ — ограничена на этом множестве M, т.е. существует такая константа $Q > 0$, что:*

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \forall x \in M$$

Доказательство аналогично случаю с одной переменной.

Теорема 13.6. *Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $M \subset R^n$. Тогда $f(x)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом множестве M, т.е. существуют такие точки $x_{наиб}$ и $x_{наим}$, что:*

$$f(x_{наиб}) = \sup_{x \in M}\{f(x)\}$$

$$f(x_{наим}) = \inf_{x \in M}\{f(x)\}$$

Доказательство аналогично случаю с одной переменной.

Равномерная непрерывность функции нескольких переменных

Определение 13.1. *Функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ равномерно непрерывна на множестве $M \subseteq R^n$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых 2 точек $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in M$:*

$$||\overline{x} - \overline{\overline{x}}|| < \delta$$

Следовательно, значение функций в этих точках:

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{\overline{x}})| < \varepsilon$$

Теорема 13.7. *Теорема Кантора для функции нескольких переменных.*

Пусть функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ — непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $M \subset R^n$. Тогда $f(x)$ — равномерно непрерывна на этом множестве.

Доказательство аналогично случаю с одной переменной.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференцирование функции нескольких переменных. Частная производная

Пусть задана функция нескольких переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ и точка $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$.

Определение 13.2. *Функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0, если полное приращение функции:*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

представимо в виде:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \overline{o}(||\Delta x||)$$

$\overline{o}(||\Delta x||)$ можно представить следующим образом:

$$\overline{o}(||\Delta x||) = \alpha(\Delta x) \cdot ||\Delta x||, \quad \alpha(\Delta x) \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

$$\overline{o}(||\Delta x||) = \frac{\overline{o}(||\Delta x||)}{||\Delta x||} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta x_k}{||\Delta x||} \cdot \Delta x_k \right) = \alpha_k \frac{\overline{o}(||\Delta x||)}{||\Delta x|| \cdot \dfrac{\Delta x_k}{||\Delta x||}} \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

$$\left| \frac{\Delta x_k}{||\Delta x||} \right| \leqslant 1$$

$$\overline{o}(||\Delta x||) = \alpha_{xi} + ... + \alpha_n x_n$$

$$\alpha_k \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

Таким образом, полное приращение можно представить следующим образом:

$$\Delta f = < A, \Delta x > + < \alpha, \Delta x >$$

Частная производная

Определение 13.3. *Частной производной функции $f(x)$ по переменной x_k в точке x_0 называется предел:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_k x) - f(x_0)}{\Delta x_k}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма 13.3. *Если $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0, то существуют частные производные по всем переменным в этой точке.*

Доказательство.

В определении дифференцируемости f берется приращение $\Delta x = \Delta_k x$. Тогда равенство имеет вид:

$$\Delta_k f = A_k \cdot \Delta x_k + \overline{o}(|\Delta x_k|)$$
$$\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k + \frac{\overline{o}(|\Delta x_k|)}{\Delta x_k}$$

Следовательно, существует предел:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = A_k + 0 = A_k = \frac{\partial f}{x_k}(x_0)$$

■

Определение 13.4. *Функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда полное приращение имеет следующий вид:*

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \overline{o}(||\Delta x||)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференциал и частные производные сложной функции

Примеры вычисления частных производных

Функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0, если полное приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\cdot \Delta x_i + \overline{o}(||\Delta x||)$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$$

$$x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$$

$\overline{o}(||\Delta x||)$ можно представить следующим образом:

$$\overline{o}(||\Delta x||) = \alpha(\Delta x)\cdot ||\Delta x||, \quad \alpha(\Delta x) \underset{||\Delta x||\to 0}{\to} 0$$

$$\overline{o}(||\Delta x||) = \frac{\overline{o}(||\Delta x||)}{||\Delta x||}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{||\Delta x||}\cdot \Delta x_i\right) = \alpha_i \frac{\overline{o}(||\Delta x||)}{||\Delta x||\cdot \dfrac{\Delta x_i}{||\Delta x||}} \underset{||\Delta x||\to 0}{\to} 0$$

Функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда полное приращение имеет следующий вид:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \Delta x_i$$

Пример 14.1. *Рассматривается функция $f(x,y,z)$ и необходимо вычислить частные производные:*

$$f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\cdot \ln x \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{\frac{y}{z}}\cdot \ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Все частные производные отличаются друг от друга. Было доказано, что если функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0, то существуют ее все частные производные по всем переменным в точке x_0. Это условие является необходимым, но не достаточным.

Пример 14.2. *Рассматривается функция двух переменных в точке $M_0(0,0)$:*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

Частные производные записываются следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Если функция $f(x,y)$ — дифференцируема в точке $M_0(0,0)$, тогда приращение выражается следующим образом:

$$f(x,y) - f(0,0) = 0\cdot x + 0\cdot y + \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\sqrt{|xy|} = \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

Получается следующий предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

Если бы существовал такой предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}} = \sqrt{\frac{k}{1+k^2}}$$

Это предел зависит от k, что означает, что такой предел не существует. Таким образом, функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой.

Связь дифференцируемости и непрерывности. Геометрический смысл понятия дифференцируемости функции

Лемма 14.1. *Если функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство.

Пусть $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции имеет следующий вид:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i =$$

$$= ||\Delta x|| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \alpha_i \right] \right) \frac{\Delta x_i}{||\Delta x||} \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

Следовательно, получается следующее:

$$\Delta f \underset{||\Delta x|| \to 0}{\to} 0$$

Это означает, что функция $f(x)$ — непрерывна в точке x_0. ■

Обратное утверждение неверно даже для $n = 1$. Функция $f(x) = |x|$ — непрерывна, но не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Геометрический смысл понятия дифференцируемости функции

Пусть задана поверхность:

$$S: \ f(x,y,z) = 0$$

Определение 14.1. *Плоскость P называется касательной к поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если при $M \to M_0$ угол между хордой $\vec{M_0M}$ и этой плоскостью P стремится к 0.*

$$P: \ A(x-x_0) + B(y-y_o) + C(z-z_0) = 0$$

$$(\vec{M_0M}, P) \underset{M \to M_0}{\to} 0$$

Пусть $f(x,y)$ — дифференцируема в точке $\tilde{M}_0(x_0,y_0)$. Рассматривается поверхность S представляет собой график f:

$$S: \ f(x,y) - z = 0$$

Необходимо показать, что плоскость P_f является касательной к графику S_f в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$P_f: \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{M}_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{M}_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

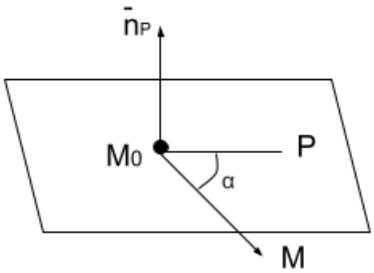

Рис. 14.1. Плоскость P

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

Рассматривается $\cos(\vec{M_0M}, P)$, где:

$$\vec{n}_P = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{M}_0); \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{M}_0); -1 \right\}$$

$$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\cos(\vec{M_0M}, \vec{n}_P) := \frac{< \vec{M_0M}, \vec{n}_P >}{||\vec{M_0M}|| \cdot ||\vec{n}_P||}$$

По неравенству Коши - Буняковского:

$$| < \vec{a}, \vec{b} > | \leqslant ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$$

Следовательно:

$$\frac{| < a, b > |}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||} \leqslant 1$$

Применяя это неравенство, можно получить:

$$\cos(\vec{M_0M}, \vec{n}_P) := \frac{< \vec{M_0M}, \vec{n}_P >}{||\vec{M_0M}|| \cdot ||\vec{n}_P||} =$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{M}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{M}_0)(y - y_0) - (z - z_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{M}_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{M}_0)\right)^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} =$$

$$= \frac{\overline{o}\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)}{K \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \leqslant \frac{1}{K} \frac{\overline{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \underset{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{\overset{M \to M_0}{\to}} 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом, угол между этими векторами записывается следующим образом:

$$(\vec{M_0M}, \vec{n}_P) \to \frac{\pi}{2}$$

Отсюда следует, что плоскость P_f — это касательная плоскость к графику функции S_f.

Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Если функция дифференцируема, то она непрерывна и у нее есть частные производные.

Теорема 14.1. *Пусть задана функция $f(x)$ и ее частные производные определены для любой точки $x \in U(x_0)$. Пусть ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ — непрерывны в точке x_0. Тогда функция $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0.*

Доказательство.

Необходимо показать, что функция дифференцируема, используя приращение функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Доказательство проводится для двух переменных. Задана функция $f(x,y)$ в точке $x_0(0,0)$.

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$$
$$- f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Применяется теорема Лагранжа:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha\right) \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta\right) \Delta y =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

α, β — бесконечно малое при $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Отсюда следует, что функция f — дифференцируема в точке (x_0, y_0). ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

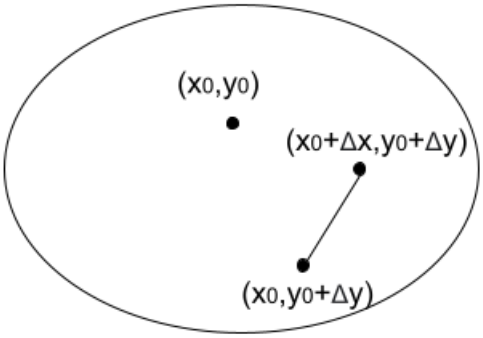

Рис. 14.2. Функция $f(x,y)$

Дифференциал функции нескольких переменных. Дифференциал и частные производные сложной функции

Пусть $f(x)$ — дифференцируема в точке x_0. Ее приращение можно написать в виде:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + \overline{o}(||\Delta x||)$$

Определение 14.2. *Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и значением дифференциала $f(x)$ в точке x_0 при заданном приращении Δx называется величина:*

$$df(x_0)\Delta x = df(x_0,\Delta x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i$$

Фактически дифференциал $df(x_0)$ — это линейная по каждой переменной функция, которая каждому вектору приращения ставит соответствие следующую линейную комбинация:

$$\Delta x \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i$$

Замечание. Если переменная $(x_1,...,x_n)$ независимы, то ее приращение есть ее дифференциал.

$$\Delta x_i = 1 \cdot dx_i = dx_i$$

$$df(x_0)(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot dx_i$$

$$\Delta x = dx = \{dx_1,...,dx_n\}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Дифференциал сложной функции

Пусть задана сложная функция $f(t) = f(\varphi(t))$, где $t \in D \subseteq R^n$ — это независимые переменные. $\varphi(t)$ — это вектор функции.

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)), \quad x_i = \varphi_i(t)$$

Функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ — определена на области $\varphi(D) \subseteq R^n$. Тогда $F(t)$ — сложная функция:

$$F(t) = f(\varphi(t))$$

Необходимо найти условия, при которых эта функция будет дифференцируема и вычислить ее частные производные.

Теорема 14.2. *Пусть в описанных условиях функция $\varphi_k(t)$ — дифференцируема в точке t_0 и функция $f(x)$ — дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда функция $F(t)$, которая является сложной функцией — дифференцируема в точке t_0 и ее частные производные вычисляются по следующему правилу:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных. Градиент и производная по направлению. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных

Теорема 15.1. *Пусть в описанных условиях функция $\varphi_k(t)$ — дифференцируема в точке t_0 и функция $f(x)$ — дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда функция $F(t)$, которая является сложной функцией — дифференцируема в точке t_0 и ее частные производные вычисляются по следующему правилу:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

Доказательство.

Записывается приращение:

$$\Delta F = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (\Delta x = \Delta f = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i + \overline{o}(||\Delta x||) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j + \overline{o}_i(||\Delta t||) \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j + \overline{o}_i(||\Delta t||) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \overline{o}(||\Delta t||) + ||\Delta t|| \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \cdot \frac{dt_j}{||\Delta t||} \right) + \frac{\overline{o}(||\Delta t||)}{||\Delta t||} \right] =$$

$$= (||\Delta t|| \to 0 \to \Delta \varphi_i = \Delta x_i \to 0 \to \alpha_i \to 0)$$

$$\left| \frac{dt_i}{||\Delta t||} \leqslant 1 \right.$$

$$\Delta t_j = dt_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В результате получается следующее выражение:

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0) \right) \Delta t_j + \overline{o}(||\Delta t||)$$

Приращение функции представлено в виде линейной комбинации приращений аргументов этой функции с коэффициентами, которые являются частными производными функции в точке t_0.

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) \Delta t_j + \overline{o}(||\Delta t||)$$

Следовательно, функция F — дифференцируема в точке t_0 и известны ее частные производные.

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

■

Инвариантность формы записи дифференциала нескольких переменных. Формулы вычисления дифференциалов некоторых функций

Пусть сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ — дифференцируема в точке t_0 и частные производные имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

Тогда можно записать дифференциал этой функции следующим образом:

$$df(x_0; dx) = dF(t_0; \Delta t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial t_j}(t_0) \cdot \Delta t_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0) \cdot \Delta t_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) d\varphi_i(t_0; \Delta t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Вывод. Если рассматривается дифференциал функции f, то это выражение можно записать следующим образом:

$$df(x_0;dx) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad \begin{cases} dx_i = \Delta x_i \\ dx_i = d\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0) dt_j, \quad x_i = \varphi_i(t) \end{cases}$$

Дифференциал имеет инвариантную форму записи. Таким образом, можно вывести правила дифференцирования некоторых функций.

$$d = d(x_0;dx)$$

$$d(cf) = c \cdot df$$

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$

$$(g(x) \neq 0) \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

Градиент функции и производная по направлению

Пусть задана функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, которая дифференцируема в точке x_0. Пусть задан некоторый вектор пространстве R^n:

$$\overline{e} = \{e_1, ..., e_n\} \in R^n$$

$$||\overline{e}|| = 1 \to \overline{e} = \{\cos\alpha_1, ..., \cos\alpha_n\}$$

$$\overline{e} = \{e_x; e_y\}$$

$$e_x = ||\overline{x}|| \cdot \cos\alpha, \quad \alpha = (\overline{e}, \vec{O}x)$$

$$\alpha_i = (\overline{e}, \vec{O}x_i)$$

Необходимо узнать какой будет функция при перемещении по пространству в направлении этого вектора. Рассматривается следующая функция:

$$F(t(x)) = F(x_0 + t \cdot e), \quad t > 0$$

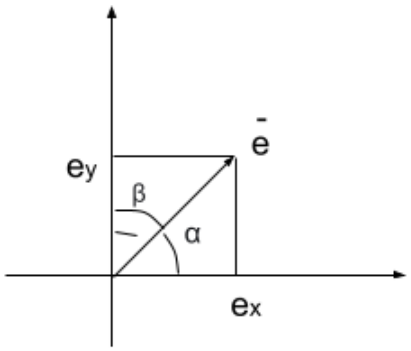

Рис. 15.1. Вектор пространстве R^n

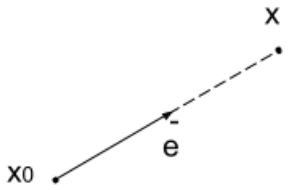

Рис. 15.2. Функция в направлении вектора

Необходимо найти скорость изменения функции при перемещении в направлении вектора.

Стартовая скорость вычисляется следующим образом:

$$\Delta F = F(x_0 + te) - F(x_0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta F}{t} = \frac{d}{dt}(F(x(t)))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\frac{dx_i}{dt}\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\cdot\cos\alpha_i = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$$

$$x_0 + te = (x_{01} + t\cos\alpha_{1,\ldots}x_{0n} + t\cos\alpha_n)$$

Таким образом, получается производная функция $F'(0)$ по направлению $\overline{e}$ в точке x_0. Эту формулу можно записать как скалярное произведение двух векторов:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) =< grad\ f(x_0), e >$$

$grad\ f(x_0)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x_0.

$$grad\ f(x_0) := \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right\}$$

Существует следующее обозначение — символический вектор:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Если принять такое обозначение, то производную по направлению вектора можно записать следующим образом:

$$grad\ f = \nabla f$$
$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) =< \nabla f, e >$$

Геометрический смысл и свойства градиента

Задана функция $f(x)$ в точке x_0.

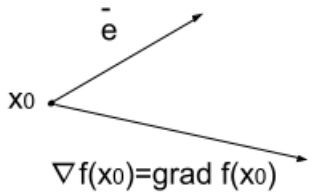

Рис. 15.3. Функция $f(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial e} =< grad\ f\Big|_{x_0}, e >= \cos(\nabla f(x_0), e) \cdot ||\nabla f(x_0)|| \cdot ||e||$$

$\frac{\partial f}{\partial e}$ — стартовая скорость изменения роста функции f при движении из точки x_0 по направлению $\bar{e}$. Необходимо найти $\bar{e}$, при котором стартовая скорость будет наибольшей. Известно, что максимальное значение cos тогда и только тогда, когда эти 2 вектора сонаправлены. Следовательно, максимальное значение производной по направлению $\bar{e}$ будет при:

$$e_f = \frac{grad\ f(x_0)}{||grad\ f(x_0)||}$$

Значение этой максимальной скорости вычисляется следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial e_f}\Bigg|_{x_0} =< grad\ f(x_0), \frac{grad\ f(x_0)}{||grad\ f(x_0)||} >=$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= \frac{1}{||grad\ f(x_0)||} < grad\ f(x_0), grad\ f(x_0) >= ||grad\ f(x_0)||$$

Любой вектор характеризуется двумя свойствами: ее длина или норма в многомерном пространстве и направление.

Вектор $grad\ f(x_0)$ в точке x_0 — ортогонален поверхности уровня функции f. Поверхность уровня f — это поверхность S, которая представляет собой геометрическое место точек:

$$S : f(x_1, ..., x_n) \equiv c, \quad c = const$$

Утверждение 15.1. *Функция f — дифференцируема в точке x_0 и можно вычислить ее градиент. Тогда градиент функции ортогонален поверхности уровня:*

$$grad\ f(x_0) \perp S$$

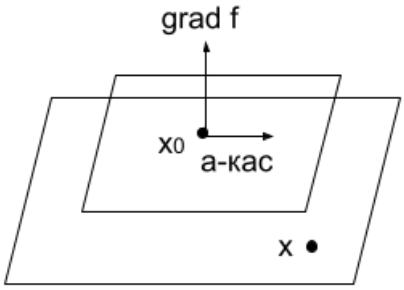

Рис. 15.4. Поверхность уровня S

Доказательство.

Пусть есть точка $x \in S$, $x \neq x_0$. При разных точках значение функции одинаково. Приращение функции записывается следующим образом:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$$

Это приращение записывается по правилу дифференцируемой функции:

$$\Delta f = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i + \overline{o}(||\Delta x||) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{\Delta x_i}{||\Delta x||} + \frac{\overline{o}(||\Delta x||)}{||\Delta x||}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

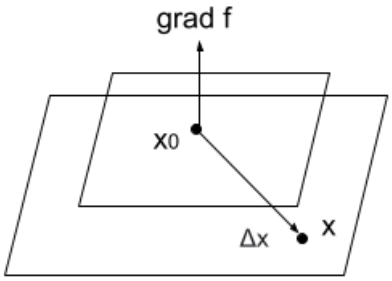

Рис. 15.5. Точка $x \in S, \quad x \neq x_0$

$$\left|\left|\frac{\Delta x}{||\Delta x||}\right|\right| = 1$$

При переходе в передел получается:

$$\Delta f = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot a_i + 0 \to < grad\ f(x_0), a_{\text{кас}}(x_0) >= 0$$

Следовательно:

$$grad\ f(x_0) \perp a_{\text{кас}}$$

Вектор ортогонален поверхности, если в этой точке у нее имеются касательные векторы. ■

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Две теоремы о равенстве смешанных частных производных

Пусть функция $f(x,y)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ — дифференцируема по y в точке (x_0, y_0). Тогда можно вычислить частную производную по y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Это выражение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = (f'_x)'_y$$

Пусть функция f — дифференцируема в окрестности (x_0, y_0)? и существуют ее производные как f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x_0, y_0). Необходимо выяснить, совпадают ли эти производные всегда.

Пример 15.1.

$$f(x,y) = \arctan\ xy$$

$$f'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}$$

$$f''_{xy} = \frac{1+x^2y^2 - y2xy\cdot x}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}$$

Таким образом, производные совпадают.

Пример 15.2.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}, \quad x_0 = y_0 = 0$$

$$f'_x = \lim_{x\to 0}\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y$$

$$f''_{xy} = -1$$

$$f'_y = \lim_{y\to 0}\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x$$

$$f''_{xy} = 1$$

Таким образом, эти производные не совпадают.

Определение 15.1. *Говорят, что функция $f(x)$ — n раз дифференцируема в точке x_0, если она $n-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$, и все ее частные производные $n-1$ порядка дифференцируемы в точке x_0.*

Теорема 15.2. *Функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда частные производные совпадают в точке M_0.*

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Лекция 16. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Теоремы о равенстве смешанных частных производных

Теорема 16.1. *Функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. Тогда частные производные совпадают в точке M_0.*

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Следствие 16.1. *Пусть функция $f(x)$ m раз дифференцируема. Тогда ее частные производные до порядка m не зависят от последовательности дифференцирования. Тогда смешанная частная производная записывается следующим образом:*

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha_1+\ldots+\alpha_n = m, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant m$$

Теорема 16.2. *Пусть в функции $f(x,y)$ существуют ее первые производные по f'_x, f'_y и вторые производные f''_{xy}, f''_{yx} в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$. Пусть вторые частные производные непрерывны в точке M_0. Тогда эти производные совпадают.*

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Доказательство.

Для доказательства рассматриваются вспомогательные функции.

$$\varphi(x) := f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$$

$$\psi(x) := f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$$

Приращение достаточно малое:

$$\Delta x = \Delta y = h$$

$$\Phi(x_0,y_0,h) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) -$$
$$-f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0) = \psi(y_0+h) - \psi(y_0)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Применяется формула Лагранжа:

$$\Phi(x_0,y_0,h) = \varphi'(x_o+\theta_1 h)\cdot h = \left[f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)\right]\cdot h =$$

$$= \psi'_y(y_0+\theta_2 h)\cdot h = \left[f'_y(x_0+h, y_0+\theta_2 h) - f'_y(x_0, y_0+\theta_2 h)\right]\cdot h, \quad 0<\theta_i<1$$

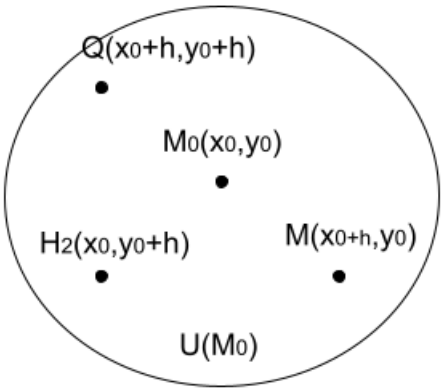

Рис. 16.1. Вспомогательные функции

$$\Phi(x_0,y_0,h) = f''_{xy}(x_o+\theta_1 h, y_0+\theta_3 h)\cdot h^2 = f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_2 h)\cdot h^2 = f''_{xy}(x_0,y_0)+\alpha =$$

$$= f''_{yx}(x_0,y_0)+\beta, \quad \alpha,\beta \underset{h\to 0}{\to} 0$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, получится, что вторые производные совпадают.

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$$

■

Дифференциалы высших порядков

Пусть задана функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$. Дифференциал функции записывается следующим образом:

$$df(x_0;dx) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)dx_i$$

$$dx = (dx_1,...,dx_n)$$

$$d = <\nabla, dx> = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 16.1. *Пусть функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ n раз дифференцируема. Дифференциалом n порядка от функции $f(x)$ в точке x_0 при приращении dx называется ее дифференциал от дифференциала предыдущего.*

$$d(d^{n-1}f(x_0;dx)) = d^n f(x_0;dx)$$

Рассматривается второй дифференциал:

$$d^2 f = d(d(f)) = d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot dx_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i\right]$$

Пример 16.1. *Рассматривается случай двух переменных $n = 2$. Задана функция, которая дважды дифференцируема.*

$$U = f(x,y)$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

$$d^2 f = d(f'_x)dx + f'_x \cdot d^2x + d(f'_y)dy + f'_y \cdot d^2y =$$

$$= (f''_{xx}dx + f''_{xy}dy)dx + (f''_{yx}dx + f''_{yy}dy)dy + f'_x d^2x + f'_y d^2y$$

Предполагается, что частные производные в данной точке совпадают:

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Тогда получается следующее выражение:

$$d^2 f = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2 + f'_x d^2x + f'_y d^2y =< \nabla, dx >^2 f + f'_x d^2x + f'_y d^2y$$

Применяется скалярное произведение на функции f.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x}^2 (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(dy)^2$$

Если переменные x, y — либо константы, или линейные функции, то их вторые дифференциалы будут равны 0.

$$d^2x = d^2y = 0$$

В этом случае, формула второго дифференциала упрощается:

$$d^2 f = (\nabla, dx)^2 f$$

Можно показать, что и m дифференциал функции тоже будет равен аналогичному выражению, если функция f дифференцируема в m раз:

$$d^m f = (\nabla, dx)^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f$$

Для раскрытия этой формулы используется формула полинома Ньютона. Если рассматривать вещественные числа $a_1, ..., a_n \in R$, то если берется сумма этих вещественных чисел получается следующее выражение:

$$(a_1 + ... + a_n)^m = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n = m}} \frac{m!}{(\gamma_1)! \cdot ... \cdot (\gamma_n)!} a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot ... \cdot a_n^{\gamma_n}$$

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Теорема 16.3. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Пусть функция $f(x)$ $m+1$ раз дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ в точке x_0. Тогда для любой точки $x \in U(x_0) \backslash \{x_0\}$ верна формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + ... + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + \frac{d^{m+1}(x_0 + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$$

$x_1, ..., x_n$ — независимые переменные.

Доказательство.

Рассматривается функция $F(t)$, которая определяется как:

$$F(t) := f(x_0 + t\Delta x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

Функция $F(t)$ $m+1$ раз дифференцируема в окрестности 0. Поэтому эту функцию можно разложить по формуле Маклорена.

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + ... + \frac{F^m(0)}{m!} + \frac{F^{m+1}(\theta)}{(m+1)!}$$

Записываются производные этой функции:

$$F(0) = f(x_0)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i = df(x_0, \Delta x)$$

$$F''(0) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \left.\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_0} \Delta x_i \Delta x_j = d^2(x_0; \Delta x)$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x_0; \Delta x)$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(x_0 + \theta; \Delta x)$$

Следовательно, для любой точки $x \in U(x_0) \backslash \{x_0\}$ верна формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + \frac{d^{m+1}(x_0 + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$$

■

Теорема 16.4. *Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остаточным в интегральной форме.*

Пусть функция $f(x)$ $m+1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0 и все частные производные $m+1$ порядка непрерывны в этой окрестности $U(x_0)$. Тогда верна следующая формула:

$$\forall x = x_0 + \Delta x \in U(x_0) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + \frac{1}{m!}\int_0^1 d^{m+1}(x_0 + t\Delta x)(1-t)^m dt$$

Доказательство.

Для доказательства используются вспомогательные функции. Рассматривается функция $F(t)$, которая определена как:

$$F(t) := f(x_0 + t\Delta x), \quad t \in [0; 1]$$

Происходит разложение этой функции по формуле Маклорена:

$$F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)dt = (dt = s(-(1-t))) = F(0) - F'(t)(1-t)\Big|_0^1 + \int_0^1 (1-t)F''(t)dt =$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= F(0) + F'(0) - F''(t)\frac{(1-t)^2}{2}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2 F''(t)dt =$$

$$= F(0) + F'(0)\frac{F''(0)}{2!} + \frac{1}{2!}\int\limits_0^1 F''(t)(1-t)^2 dt = \ldots =$$

$$= F(0) + F'(0)\frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^m(0)}{m!} + \frac{1}{m!}\int\limits_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt$$

Остаточный член получается следующего вида:

$$R_m = \frac{1}{m!}\int\limits_0^1 F^{(m+1)}(t)(1-t)^m dt$$

В результате получается следующее:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + \frac{1}{m!}\int\limits_0^1 d^{m+1} f(x_0 + t\Delta x)(1-t)^m dt$$

■

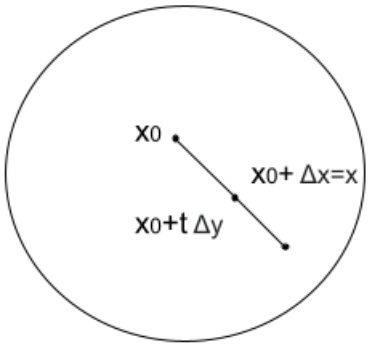

Рис. 16.2. Окрестность точки x_0

Теорема 16.5. *Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть функция $f(x)$ $m-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и m раз дифференцируема в точке x_0. Тогда для любой точки x $inU(x_0)\backslash\{x_0\}$ верна формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + ... + \frac{d^m f(x_0)}{m!} + \overline{o}(||\Delta x||^m)$$

Остаточный член получается следующим:

$$R_m = \overline{o}(||\Delta x||^m)$$

Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие существования локального экстремума

Определение 16.2. *Точка x_0 называется точкой (строгого) локального максимума (минимума) для функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $U(x_0)$, что для любой точки $x \in U(x_0)\backslash\{x_0\}$ будет верно при максимуме:*

$$f(x) < f(x_0)$$

при минимуме:

$$f(x) > f(x_0)$$

В обоих случая точка x_0 называется точкой (строго) локального экстремума.

Пример 16.2. *Пусть задана функция двух переменных:*

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Точка $M_0(0,0)$ — локальный минимум $f(x,y)$.

Теорема 16.6. *Необходимые условия локального экстремума. Пусть функция $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ — дифференцируема в точке x_0 и x_0 — это точка локального экстремума. Тогда отсюда необходимо следует, что все частные производные функции в точке x_0 равны 0 по всем переменным.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

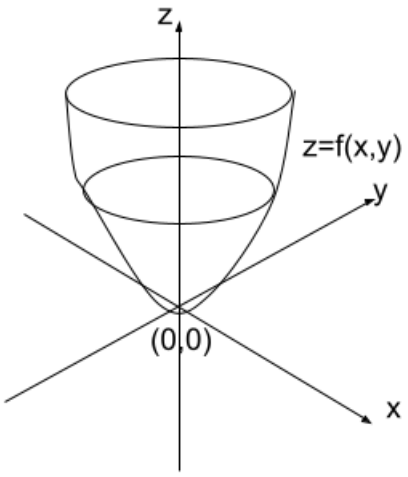

Рис. 16.3. $M_0(0,0)$ — локальный минимум

Пример 16.3. *Рассматриваются функция:*

$$\varphi(y) = f(0,y) = y^2$$

Следовательно, локальный минимум этой функции:

$$y = 0$$

Производная этой функции равна 0.

$$\varphi'(y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Пример 16.4. *Пусть задана функция:*

$$\psi(x) = f(x,0)$$

Следовательно, производная этой функции равна 0:

$$\psi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

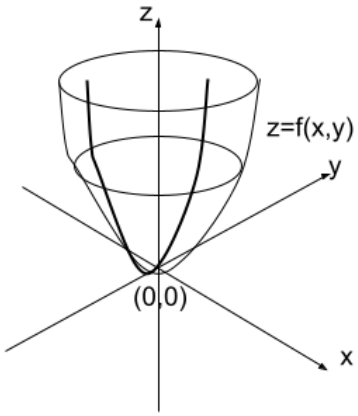

Рис. 16.4. Локальный минимум функции $\varphi(y)$

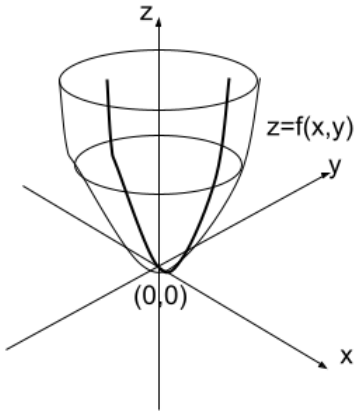

Рис. 16.5. Локальный минимум функции $\psi(x)$

Доказательство.

Функция $f(x)$ рассматривается как функция от одной переменной:

$$f(x) = f(x_1, x_{02}, ..., x_{0n}) = \varphi(x_1)$$

Для $\varphi(x_1)$ точка x_{01} — точка локального экстремума.

$$\varphi'(x_{01}) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)$$

Аналогично и для x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17. Квадратичные формы и их свойства. Достаточные условия существования локального экстремума функции нескольких переменных

Квадратичные формы. Критерий Сильвестра

Условие равенства нулю всех производных в точке x_0 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ для дифференцируемой функции $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ является необходимым, но не достаточным для существования локального экстремума.

Пример 17.1. *Рассматривается функция двух переменных:*

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

В любой окрестности, которая берется вокруг этой точки, есть значение, которое

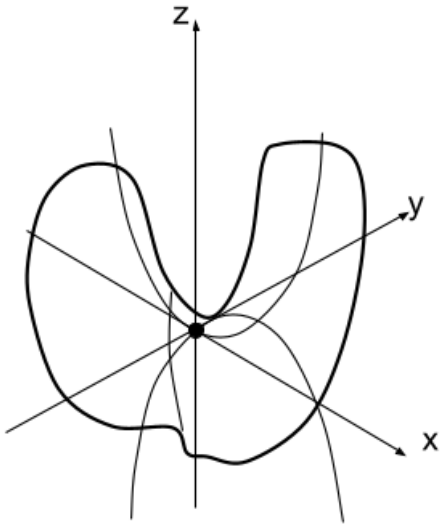

Рис. 17.1. Гиперболический параболоид

больше нуля и есть значение, которое меньше нуля нашей функции. Это точка не является точкой локального экстремума. Однако, если посчитать производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$$

Но $M_0(0;0)$ — не является точкой локального экстремума. Поэтому необходимо ввести дополнительные условия для существования локального экстремума.

Квадратичные формы

Квадратичной формой от переменных $h = (h_1, ..., h_n)$ называется выражение вида:

$$\Phi(h) = \sum a_i j h_i h_j, \quad A = (a_i j)$$

A — матрица квадратичной формы Φ. Если матрица A симметрична, т.е $a_i j = a_j i$, то и квадратичная форма Φ называется симметричной. Квадратичные формы различают по их значениям.

Определение 17.1. *Квадратичная форма $\Phi(h)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если:*

$$\Phi(h) > 0 \quad (\Phi(h) < 0), \quad \forall h \neq \theta$$

θ — тривиальный вектор. В обоих случаях говорят, что форма $\Phi(h)$ — знакоопределенная.

Определение 17.2. *Говорят, что $\Phi(h)$ — знакопеременная, если:*

$$\exists\ h', h'' \quad h', h'' \neq \theta, \quad \Phi(h') > 0 \quad \Phi(h'') < 0$$

Определение 17.3. *Говорят, что квадратичная форма $\Phi(h)$ —- квазизнакоопределенная, если:*

$$\forall h \in R^n, \quad \Phi(h) \geqslant 0 \quad (\Phi(h) \leqslant 0)$$
$$\exists \hat{h} \neq \theta, \quad \Phi(\hat{h}) = 0$$

К свойствам квадратичной формы относится следующая теорема.

Теорема 17.1. *Квадратичная форма $\Phi(h)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица $A = (a_i j)$ имеет свойства: все главные миноры A больше 0, т.е если матрица A имеет следующий вид:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{cases} A_1 = a_{11} > 0 \\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \\ A_n = det\ A > 0 \end{cases}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следствие 17.1. *Форма $\Phi(h)$ - отрицательно определена тогда и только тогда, когда первый, второй и последний миноры имеют следующее значение:*

$$A_1 < 0$$

$$A_2 > 0$$

$$A_n(-1)^n > 0$$

Достаточные условия существования локального экстремума

Теорема 17.2. *Пусть $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ — дважды дифференцируема в точке x_0. Переменные $(x_1, ..., x_n)$ - независимы. x_0 — стационарная точка:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Тогда если $d^2 f(x_0)$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то точка x_0 — точка локального экстремума. Если $d^2 f(x_0)$ — знакопеременная квадратичная форма, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Доказательство.

Рассматривается приращение функции и происходит разложение по теореме Тейлора.:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \overline{0}(||\Delta x||^2)$$

$$\Delta f = \frac{d^2 f(x_{0i}\Delta x)}{2!} + \overline{0}(||\Delta x||^2) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} f''_{x_i x_j}(x_0) dx_i dx_j + \overline{0}(||\Delta x||^2) =$$

$$= \rho^2 \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i j h_i h_j + \alpha(\rho) \right) = \Delta f$$

$$\frac{\Delta x_i}{||\Delta x||} = h_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = 1$$

$$h = (h_1, ..., h_n) \in S^{n-1} \subset R^n$$

Вводятся следующие обозначения:

$$||\Delta x|| = \rho$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\overline{o}(||\Delta x||^2)}{||\Delta x||^2} = \alpha = \alpha(\rho) \underset{\rho \to 0}{\to} 0$$

Квадратичная форма из выше написанного выражение записывается как:

$$\Phi(h) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i j h_i h_j$$

Если дифференциал функции:

$$d^2 f(x_{0i} \Delta x) > 0$$

Следовательно, квадратичная форма:

$$\Phi(h) > 0 \quad \forall h \neq \theta$$

$\Phi(h)$ — непрерывная функция на единичной сфере $S^{n-1} \in R^n$. S^{n-1} - замкнутое ограниченно множество. Тогда по второй теореме Вейерштрасса, непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве $\Phi(h)$ достигает наибольшего и наименьшего значений на S^{n-1}, т.е существует вектор:

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in S^{n-1} \quad \Phi(\xi) = \underset{h \in S^{n-1}}{inf} \{\Phi(h)\} = \mu > 0$$

так как:

$$\Phi(h) > 0, \quad \forall h \in S^{n-1}$$

Следовательно:

$$\forall h \in S^{n-1} \quad \Phi(h) \geqslant \mu$$

Необходимо доказать, что приращение тоже будет больше 0. Так как $\alpha(\rho) \to 0$, то при достаточно малом ρ:

$$|\alpha(\rho_0)| < \frac{\mu}{2} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \rho_0, \ \ \rho_0 < \delta \longrightarrow |\alpha(\rho_0)| < \varepsilon$$

Тогда:

$$\Phi(h) + \alpha(\rho_0) \geqslant \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} > 0, \quad \forall h \in S^{n-1}$$

Таким образом, приращение записывается следующим образом:

$$\Delta f = \rho^2(\Phi(h) + \alpha(\rho)) \geqslant \rho^2 \cdot \frac{\mu}{2} > 0$$

Отсюда следует, что точка x_0 — локальный минимум для функции $f(x)$. ■

Доказательство.

Если второй дифференциал:

$$d^2 f(x_0, \Delta x) < 0 \quad \forall \Delta x$$

Тогда:

$$-d^2 f(x_0; \Delta x) = d^2(-f)(x_{0i}; \Delta x) > 0$$

Таким образом, для функции $-f$ точка x_0 является локальным минимумом, а для функции f точка x_0 является локальным максимумом. ■

Доказательство.

Необходимо доказать, что если второй дифференциал является знакопеременной квадратичной формой, то никакого экстремума нет. Предполагается, что второй дифференциал $d^2 f(x_0; \Delta x)$ — знакопеременной квадратичной формы. Это означает, что существуют векторы $\Delta x'$ и вектор приращений $\Delta x''$, что:

$$d^2 f(x_{0i} \Delta x') > 0$$

$$d^2 f(x_{0i} \Delta x'') < 0$$

Тогда приращение записывается следующим образом:

$$\Delta f = \rho^2 (\Phi(h) + \alpha(\rho))$$

Следовательно:

$$\exists h', h'' \in S^{n-1}, \quad \Phi(h') > 0 \;\; \Phi(h'') < 0$$

$$\Delta x' = \rho h'$$

$$\Delta x'' = \rho h''$$

Так как $\alpha()\rho \underset{\rho \to 0}{\to} 0$, то при достаточно малом $\tilde{\rho}$ можно добиться, что:

$$\rho \leqslant \tilde{\rho}, \quad \alpha(\rho) < min \left\{ \frac{|\Phi(h')|}{2}, \frac{||\Phi(h'')}{2} \right\}$$

Следовательно, знаки будут разными:

$$sgn(\Phi(h') + \alpha(\rho)) = sgn\ \Phi(h') = 1$$

$$sgn(\Phi(h'') + \alpha(\rho)) = sgn\ \Phi(h'') = -1$$

$$\Delta f > 0, \quad \Delta x'$$

$$\Delta f < 0, \quad \Delta x''$$

$$\Delta f = \rho^2(\Phi(h) + \alpha(\rho))$$

Таким образом, точка x_0 не является точкой локальной экстремума. ■

Частный случай: функции двух переменных

Рассматривается функция двух переменных. Пусть задана функция:

$$U = f(x, y)$$

Следствие 17.2. *Функция $f(x,y)$ — дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Второй дифференциал в точке M_0 записывается следующим образом:*

$$d^2 f(M_0; \Delta x, \Delta y) = f''_{xx}(M_0)(dx)^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)(dy)^2$$

Следовательно, приращение записывается как:

$$\Delta f = a_{12}(dx)^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}(dy)^2 + \overline{o}((dx)^2 + (dy)^2)$$

$$\Delta f = \rho^2(a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 + \alpha(\rho^2))$$

Рассматривается матрица этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = a_{11}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Утверждение 17.1. *Если $A_2 > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ — точка локального экстремума. Если $A_2 < 0$, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.*

Доказательство.

Пусть $A_2 > 0$. Тогда $a_{11} \neq 0$. Приращение записывается как:

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{a_{11}} \left(a_{11}^2 h_1^2 + 2a_{11}a_{12}h_1h_2 + a_{12}^2 h^2 - a_{12}^2 h_2^2 + a_{22}a_{11}h_2^2 + \alpha(\rho)\right) =$$

$$= \frac{\rho^2}{a_{11}} \left((a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)h_2^2 + \alpha(\rho)\right)$$

Если $A_2 > 0$ и $a_{11} > 0$, тогда квадратичная форма:

$$\Phi(h_1, h_2) > 0 \to \Delta f > 0$$

Таким образом, точка $M_0(x_0, y_0)$ — точка локального минимума.

Если $A_2 > 0$, но $a_{11} < 0$, тогда по критерию Сильвестра квадратичная форма:

$$\Phi(h_1, h_2) < 0 \to \Delta f < 0$$

Таким образом, точка $M_0(x_0, y_0)$ — точка локального максимума.

Если $A_2 < 0$ и $a_{11} \neq 0$, тогда верна следующая формула:

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{a_{11}} \left((a_{11}h_1 + a_{12}h_2)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)h_2^2 + \alpha(\rho)\right)$$

Рассматриваются следующие векторы:

$$h_1' = 1$$

$$h_2' = 0$$

Тогда квадратичная форма будет иметь следующий вид:

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 \cdot \Phi(1, 0) = \frac{\rho^2}{a_{11}}(a_{11}^2 \cdot 1) = \rho^2 a_{11}$$

Получается знак такой же, как у a_{11}.

$$h_1'' = \frac{-a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$h_2'' = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$$

$$(h_1'')^2 + (h_2'')^2 = 1, \quad h_1'', h_2'' \in S^1$$

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 \cdot \Phi(h_1'', h_2'') = \frac{\rho^2}{a_{11}} A_2 \cdot \frac{a_{11}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \frac{\rho^2 a_{11} A_2}{a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

Получается знак противоположный знаку a_{11}.

$$\Delta x_i' = \rho h_i'$$

$d^2 f(M_0; \Delta x', \Delta y')$ и $d^2 f(M_0; \Delta x'', \Delta y'')$ имеют разные знаки. Таким образом M_0 не является точкой локального экстремума. ■

Доказательство.

Пусть определитель $A_2 < 0$ и $a_{11} = 0$. Тогда $a_{12} \neq 0$. Выражение приращения записывается следующим образом:

$$\Delta f = \rho^2 (2a_{12} h_1 h_2 + a_{12} g_2^2 + \alpha(\rho))$$

Второй дифференциал записывается как:

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 h_2 (2a_{12} h_1 + a_{22} h_2)$$

$$h_1^2 + h_2^2 = 1, \quad h_1, h_2 \in S^1$$

При достаточно малом $|h_2|$ знак суммы $2a_{12}h_1 + a_{22}h_2$ будет совпадать со знаком $2a_{12}h_1$. Тогда при таких $\tilde{h}_2$ имеется:

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 \tilde{h}_2 (2a_{12} h_1 + a_{22} \tilde{h}_2)$$

$$sgn(2a_{12}h_1 + a_{22}\tilde{h}_2) = sgn(2a_{12}h_2)$$

Тогда если берется $-\tilde{h}_2 > \tilde{h}_2$, то получится:

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 (-\tilde{h}_2)(2a_{12} h_1 + a_{22}(-\tilde{h}_2))$$

$$sgn(2a_{12}h_1 + a_{22}(\pm\tilde{h}_2)) = sgn(2a_{12}h_2)$$

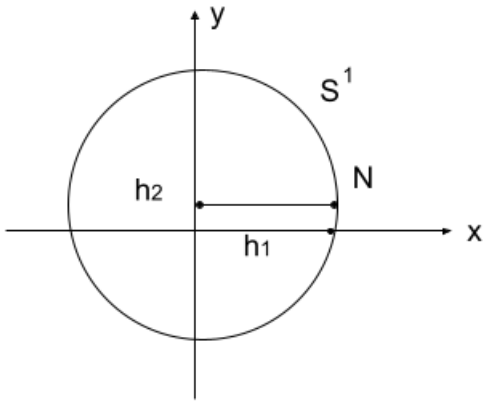

Рис. 17.2. Координаты N

Знаки для таких приращений разные.

$$d^2 f(M_0; \Delta x, \tilde{\Delta} y) = -d^2 f(M_0; \Delta x, \tilde{\Delta} y)$$

$$\Delta x = \rho h_1$$

$$\tilde{\Delta} y = \rho \tilde{h}_2$$

Таким образом, в точке M_0 локального экстремума нет. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18. Неявные функции. Система неявных функций

Неявные функции. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявной функции

Пусть задано функциональное уравнение:

$$F(u,x) = F(u,x_1,...,x_n) = 0, \quad x = (x_1,...,x_n) \tag{18.1}$$

Определение 18.1. *Неявной функцией, определяемой уравнением* (18.1)*, называется такая функция:*

$$u = \varphi(x)$$

заданная на некотором множестве $D \subseteq R^n$, такая, что для любой точки $x \in D$ верно равенство:

$$F(\varphi(x),x) = F(\varphi(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n) = 0$$

Теорема 18.1. *О существовании, непрерывности и дифференцируемости неявной функции.*

Пусть в некоторой точке $M_0(u_0,x_0)$ выполняется следующие условия:

1) $F(u_0,x_0) = 0$

2) F — дифференцируема в некоторой окрестности $V(M_0)$ в точке M_0.

3) Частные производные в точке M_0 отлично от 0:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) \neq 0$$

4) Частное производное $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x)$ — непрерывна в точке $M_0(u_0,x_0)$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что в $U_\delta(x_0) = U_\delta(x_{01},...,x_{0n})$ определена единственная функция:

$$u = \varphi(x)$$

$$F(\varphi(x),x) \equiv 0, \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Кроме того эта функция $u = \varphi(x)$ — непрерывна и дифференцируема в этой окрестности, причем ее частные производные вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Доказательство теоремы. Существование и непрерывность

Доказательство.

Проводится рассуждение для $n = 2$.

Предполагается, что:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) > 0$$

Это означает, что в точке M_0 функция $F(u, x_0)$ возрастает. Так как:

$$F(u_0, x_0) = 0$$

Тогда:

$$u > u_0, \quad F(u, x_0) > 0$$

$$u < u_0, \quad F(u, x_0) < 0$$

Эти условия выполняются на некотором интервале $(u_0 - \gamma, u_0 + \gamma)$. Задается произвольная $\varepsilon > 0$ и предполагается, что следующие точки лежат в окрестности $V(M_0)$:

$$(u_0 + \varepsilon, x_0), (u_0 - \varepsilon, x_0) \in V(M_0)$$

Предполагается, что точки:

$$u_1, u_2 \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \subseteq (u_0 - \gamma, u_0 + \gamma)$$

Так как $F(u, x)$ — дифференцируема в окрестности $V(M_0)$, то эта функция также непрерывна в окрестности $V(M_0)$. Так как выполняются следующие условия:

$$F(u, x_0) > 0$$

$$F(u_2, x_0) < 0$$

то существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x такой, что $||x - x_0|| < \delta$, будет выполняться:

$$F(u_1, x) > 0$$

$$F(u_2, x) < 0$$

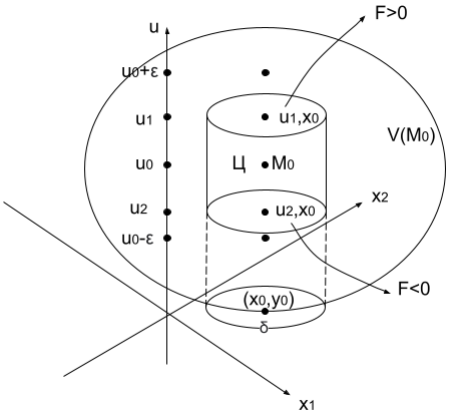

Рис. 18.1. Функция двух переменных

Рассматривается цилиндр Ц, где:

$$\text{Ц}: \begin{cases} u \in [u_2, u_1] \\ ||x - x_0|| < \delta \end{cases}$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) > 0$ и $\frac{\partial F}{\partial u}$ — непрерывна в точке M_0 следует, что $\frac{\partial F}{\partial u} > 0$ в некоторой окрестности $W(M_0)$.

$$W(M_0) \subset V(M_0)$$

$$\text{Ц} \subset W(M_0)$$

Отсюда следует, что F возрастает по переменной u.

Для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ если рассматривать функцию $F(u, x)$:

$$F(u_2, x) < 0$$

$$F(u_1, x) > 0$$

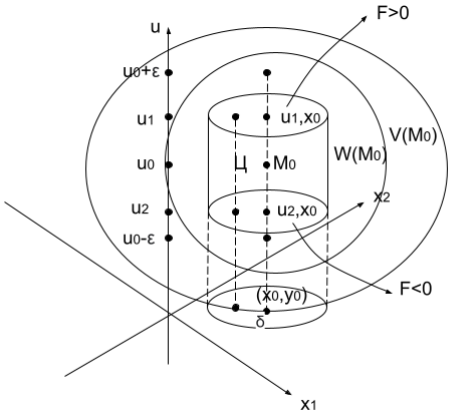

Рис. 18.2. Цилиндр

Функция F — непрерывна и возрастает на отрезке $[(u_2,x),(u_1,x)]$. Следовательно, существует единственная точка $(\varphi(x),x)$ на интервале между этими точками $((u_2,x),(u_1,x))$ такая, что:

$$F(\varphi(x),x) = 0$$

Таким образом, получится некоторое геометрическое место точек $(\varphi(x),x)$, которое характеризуется условием $x \in U_\delta(x_0)$. Это график некоторой единственной функции $\varphi(x)$, определенной на окрестности $U_\delta(x_0)$ и обладающая свойством, которое удовлетворяет условию:

$$F(\varphi(x),x) = 0, \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

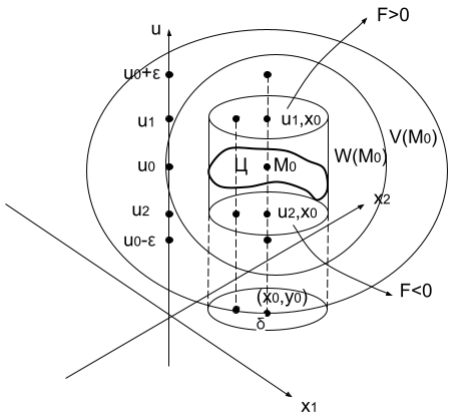

Рис. 18.3. Геометрическое место точек $(\varphi(x),x)$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно, $u = \varphi(x)$ — искомая неявная функция. Необходимо показать, что функция $\varphi(x)$ — непрерывна в этой окрестности. Сначала проверяется непрерывность в точке x_0. По построение цилиндра для произвольного $\varepsilon > 0$ было найдено такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если взять точку x_0, $||x - x_0|| < \delta$, то:

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| = |u_0 - \varphi(x)| < 0$$

Следовательно, $\varphi(x)$ — непрерывна в точке x_0. Аналогично доказывается непрерывность функции $\varphi(x)$ в любой точке $x \in U_\delta(x_0)$. ■

Доказательство теоремы. Дифференцируемость

Доказательство.

Необходимо проверить то, что функция $\varphi(x)$ — дифференцируема в точке x_0. Рассматривается функция ΔF:

$$\Delta F = F(u_0 + \Delta u, x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - F(u_0, x_{01}, x_{02})$$

$$\Delta u = \Delta\varphi = \varphi(x_{01} + \Delta x_1, x_{02} + \Delta x_2) - \varphi(x_{01}, x_{02})$$

$$u_0 = \varphi(x_{01}, x_{02})$$

В таком случае, функция F — дифференцируема:

$$\Delta F = 0$$

S — график функции.

Приращение записывается следующим образом:

$$\Delta F = 0 = \frac{\partial F}{\partial u}(M_0)\Delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \alpha\Delta\varphi + \beta\Delta x_1 + \gamma\Delta x_2$$

α, β, γ — бесконечно малые при:

$$\Delta\varphi \to 0$$

$$\Delta x_1 \to 0$$

$$\Delta x_2 \to 0$$

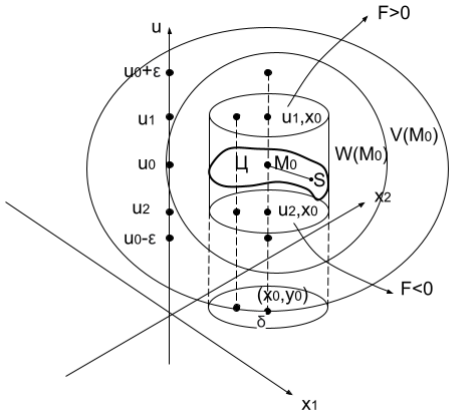

Рис. 18.4. S — график функции

В результате получается:

$$\Delta F = 0 = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \alpha\right)\Delta\varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(M_0) + \beta\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(M_0) + \gamma\right)\Delta x_2$$

Из этого уравнения выражается $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(M_0) + \beta\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \alpha\right)}\Delta x_1 - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(M_0) + \gamma\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \alpha\right)}\Delta x_2 =$$

$$= \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)} + \eta_1\right)\Delta x_1 + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)} + \eta_2\right)\Delta x_2 =$$

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}\Delta x_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}\Delta x_2 + \eta_1\Delta x_1 + \eta_2\Delta x_2$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ — дифференцируема. Частные производные этой функции записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_{01}, x_{02}) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}, \quad i = 1, 2$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

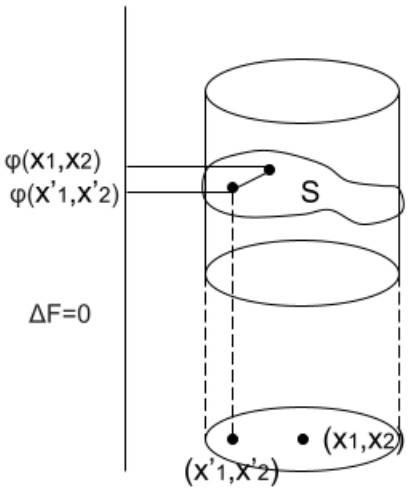

Рис. 18.5. $\varphi(x)$ — дифференцируема $\forall x$

Существование, непрерывность и дифференцируемость обратной функции одной переменной. Система неявных функций

Следствие 18.1. *Рассматривается функция от двух переменных:*

$$F(x,y) = f(x) - y = 0, \quad n = 1$$

Пусть:

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad y_0 = f(x_0)$$

Пусть функция $f(x_0)$ — дифференцируема в окрестности $U(x_0)$. Частные производные записываются следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = f'(x_0) \neq 0$$

$f'(x_0)$ — непрерывна в точке x_0. Тогда по теореме о неявной функции, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что в окрестности $U_\delta(x_0)$ существует единственным образом определенная функция:

$$x = \varphi(y)$$

$$F(\varphi(y),y) = f(\varphi(y)) - y = 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно:

$$\varphi(y) = f^{-1}(y)$$

$\varphi(y)$ *— непрерывна и дифференцируема в окрестности* $U_\delta(x_0)$ *и ее частная производная имеет следующий вид:*

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{(-1)}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)} = (f^{-1})'(y)$$

Система неявных функций

Пусть задана система функциональных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(u_1,...,u_n,x_1,...,x_n) = F_1(u,x) = 0 \\ F_m(u_1,...,u_m,x_1,...,x_m) = F_m(u,x) = 0 \end{cases} \tag{18.2}$$

Определение 18.2. *Системой неявных функций, определяемых системой* (18.2) *на некотором множестве* $D \subset R^n$ *и являющихся решением системы* (18.2) *на множестве* $D \subset R^n$ *называется системой функций:*

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1,...,x_n) \\ u_m = \varphi_m(x) = \varphi_m(x_1,...,x_m) \end{cases}$$

Таких, что:

$$F_i(\varphi_1(x),...,\varphi_m(x),x) \equiv 0, \quad \forall x \in D$$

Причем $\varphi_j(x)$ *— непрерывны и дифференцируемы на множестве* D.

Теорема 18.2. *О системе неявных функций.*

Пусть задана система функциональных уравнений (18.2) *и пусть* $F_i(u_0,x_0) = 0$ *в точке* $M_0(u_0,x_0)$. *Известно, что функции* F_i *— дифференцируемы в некоторой окрестности* $V(M_0)$ *в* R^{m+n}. *Пусть определитель Якоби от этой системы функций в точке* M_0 *имеет следующий вид:*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}, & ..., & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}, & ..., & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1}, & ..., & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ *— непрерывны в точке* M_0*. Тогда для* $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_2) > 0$ *существует такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, что в некоторой окрестности* $U_\delta(x_0)$ *определена единственная система неявных функций:*

$$u_i = \varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, ..., x_n)$$

Таких, что $\varphi_i(x)$ *— непрерывны и дифференцируемы в окрестности* $U_\delta(x_0)$ *и для любого* $x \in U_\delta(x_0)$ *верно следующее:*

$$|\varphi_(x) - u_{0i}| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Частные производные неявных функций $\varphi_i(x)$ *вычисляются из следующей системы уравнений:*

$$\frac{DF_1}{\partial x_j} := \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_1}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{DF_m}{\partial x_j} := \frac{\partial F_m}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_m}{\partial x_j} = 0$$

Основная матрица этой системы имеет определитель отличный от 0. Следовательно, частные производные $\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\}$ *вычисляются по правилу Крамера. Для каждого* j *есть своя система таких уравнений.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 19. Условный локальный экстремум функции нескольких переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Гладкая зависимость и независимость функций

Пусть заданы функции на некоторой области $D \subset R^n$:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, ..., x_n) \\ u_m = \varphi_m(x) = \varphi_m(x_1, ..., x_m) \end{cases} \tag{19.1}$$

Определение 19.1. *Говорят, что функция $\varphi_i(x)$ является зависимым (гладко) от остальных функций этого набора $\varphi_1, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n$ в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M_0(x_{01}, ..., x_{0n})$, если существует такая функция $\Phi(y_1, ..., y_{n-1})$ в некоторой окрестности $U(M_0)$, что:*

$$\varphi_i(x) = \Phi(\varphi_1(x), ..., \varphi_{i-1}(x), \varphi_{i+1}(x), ..., \varphi_n(x))$$

Причем $\Phi(y_1, ..., y_{n-1})$ — дифференцируема в области изменения своих переменных, когда $x \in U(M_0)$.

Определение 19.2. *Система дифференцируемых функций* (19.1) *называется (гладко) зависимой в некоторой окрестности $U(M_0)$, если хотя бы одна из этих функций гладко зависит от остальных функций в этой окрестности. Система* (19.1) *называется независимой в противном случае.*

Пример 19.1. *Пусть задана следующая система функций:*

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = x^2 + y^2 \\ \varphi_2(x, y) = x + y \\ \varphi_3(x, y) = xy \end{cases}$$

Необходимо показать, что эти функции зависимы в любой области.

$$\varphi_1(x, y) = (\varphi_2(x, y))^2 - 2\varphi_3(x, y), \quad (x, y) \in R^2$$

Следовательно, эта система $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — зависима в R^2.

Пример 19.2. *Пусть задана следующая система функций:*

$$\begin{cases} \psi_1(x,y) = x+y \\ \psi_2(x,y) = x-y \end{cases}$$

Необходимо показать, что эта система независима в любой области $D \subset R^2$, что в этой области содержится точка $(0,0)$. D — открытое множество. Прямая L_1 проходит через точку $(0,0)$.

$$L_1: \ x = y$$

$$\psi_1 = 2x$$

$$\psi_2 \equiv 0$$

Следовательно, на прямой L_1 ψ_1 никак не выражается через ψ_2.

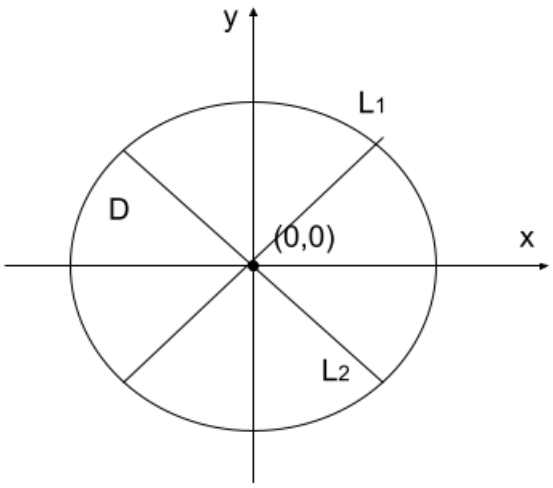

Рис. 19.1. независимая система функций

Если прямая L_2 проходит через точку $(0,0)$, то ψ_2 не выражается через ψ_1.

$$L_2: \ y = -x$$

$$\psi_1 \equiv 0$$

$$\psi_2 = 2x$$

Замечание. Понятие линейной зависимости функций является частным случаем гладкой зависимости.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Достаточные условия гладкой независимости функций

Теорема 19.1. *Функции $f_1(x), ..., f_m(x)$ — дифференцируемы в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M_0(x_{01}, ..., x_{0n})$.*

$$x = x_1, ..., x_, \in R^m$$

Пусть функции дифференцируемы и определитель Якоби этих функций отличен от 0 в точке M_0.

$$J = \frac{D(f_1, ..., f_m)}{D(x_1, ..., x_m)} \neq 0$$

Определитель представляет собой:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда при этих условиях система этих функций $\{f_1, ..., f_m\}$ независима в некоторой окрестности $U(M_0)$.

Доказательство.

Предполагается противное. Пусть система $\{f_1, ..., f_m\}$ — зависимая система функций. Существует функция f_i и дифференцируемая функция в некоторой окрестности $U(M_0)$, что функция f_i представляет собой:

$$f_i = \Phi(f_1, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_m), \quad \forall x \in U(M_0)$$

Это тождество можно дифференцировать:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial f_m}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m$$

Если рассматривать определитель, то получится следующее:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & ..., & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

i строка матрицы J есть линейная комбинация остальных ее строк с коэффициентами $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}$. Следовательно, определитель равен 0 ($J = 0$), что противоречит условию теоремы:

$$J \neq 0$$

Таким образом, система $\{f_1, ..., f_m\}$ — независима в этой окрестности $U(M_0)$.

Замечание. Это верно и при n переменных. ■

Условный локальный экстремум функции нескольких переменных

Пусть в области $D \subset R^{m+n}$ (открытое множество) задана функция:

$$u = f(x_1, ..., x_n . y_1, ..., y_m)$$

И система условий связи записывается следующим образом:

$$\tilde{D} : \begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases} \tag{19.2}$$

$$M_0(x_0, y_0) = M_0(x_{01}, ..., x_{0n}, y_{01}, ..., y_{0m}) \in \tilde{D} \subset D$$

$$\tilde{D} \subset D$$

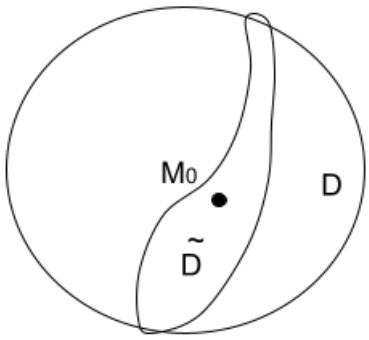

Рис. 19.2. Область D

Определение 19.3. *Точка M_0 называется точкой условного (строгого) локального максимума или минимума для функции $f(x,y)$ с условиями связи* (19.2)*, если существует такая окрестность $U(M_0)$ этой точки, что для любой точки $x,y \in U(M_0) \cap \tilde{D}$ значение функции при максимуме:*

$$f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

при минимуме:

$$f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

Пример 19.3. *Рассматривается функция двух переменных:*

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

Условия связи записываются следующим образом:

$$F(x,y) = y = 0$$

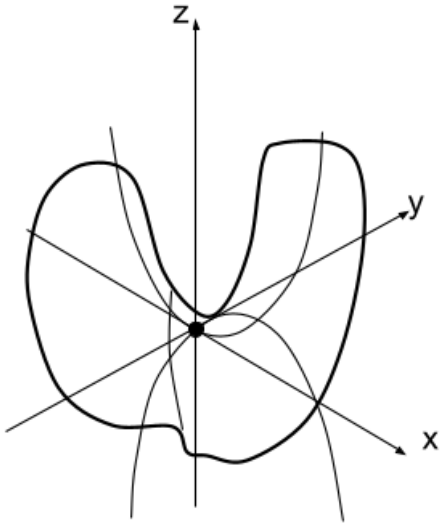

Рис. 19.3. Гиперболический параболоид

Точка $M_0(0,0)$ — это точка условного локального минимума для функции $f(x,y)$ с условием связи $y=0$. Точка $M_0(0,0)$ — это точка условного локального максимума для функции $f(x,y)$ с условием связи $x=0$.

Необходимые условия существования условного локального экстремума

Предполагается, что задана функция $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$, которая дифференцируема в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M(x_0,y_0) \in D \in R^{m+n}$. Заданы условия связи:

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \\ F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \end{cases} \tag{19.3}$$

$F_i(x,y)$ — дифференцируемы в некоторой окрестности $U(M_0)$. Пусть определитель Якоби представляет собой:

$$J = \frac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)} \neq 0$$

Все частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ в точке M_0 непрерывны. Тогда для заданной функции $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ выполнены все условия теоремы о системе неявных функций. По этой теореме в некоторой окрестности точки $\tilde{M}_0(x_{01},...,x_{0n})$ существуют единственным образом определенные функции:

$$y_1 = \varphi_1(x)$$

$$y_m = \varphi_m(x)$$

При подстановке этих функций в систему (19.3) получится следующее:

$$F_k(x,\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)_{\equiv}0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad \forall x \in U(x_0)$$

$$|\varphi_j(x) - y_{0j}| < \varepsilon_j, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

Задача сводится к отысканию обычного экстремума для следующей функции в окрестности $U_\delta(x_0)$:

$$f(x_1,...,x_n,\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_m(x_1,...,x_m)) = \Phi(x_1,...,x_n)$$

Необходимые условия для локального экстремума $\Phi(x)$ следующие:

$$d\Phi(x) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right|_{\tilde{M}_0} dx_1 + ... + \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right|_{\tilde{M}_0} dx_n = 0$$

Дифференциал имеет инвариантную форму записи.

$$\beta : df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m = 0$$

$dy_1, ..., dy_m$ выражаются через дифференциалы $dx_1, ..., dx_n$ с помощью дифференцирования условий связи.

$$|\alpha : \begin{cases} dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0 \\ dF_m = \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0 \end{cases}$$

Основная матрица — это определитель Якоби:

$$J \neq 0$$

Следовательно, $dy_1, ..., dy_m$ выражаются по правилу Крамера как линейные комбинации дифференциала $dx_1, ..., dx_n$. Если подставить их в равенство получится выражение:

$$df = A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n$$

Так как $x_1, ..., x_n$ — независимы, то:

$$A_1 = ... = A_n = 0$$

Вывод. Если в описанных условиях точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой условного локально экстремума, то необходимо, чтобы все коэффициенты были равны 0. Фактически каждая из этих констант есть дифференциал:

$$A_k = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right|_{\tilde{M}_0}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Метод неопределенных множителей Лагранжа. Необходимые условия по методу Лагранжа

Умножим равенства α на множители λ_i и сложим их с равенством β.

$$df + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dF_i = 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассматривается функция Лагранжа:

$$\psi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x,y)$$

Дифференциал функции Лагранжа:

$$d\psi(x,y,\lambda) = 0$$

$$d\psi = \frac{d\psi}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{d\psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{d\psi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{d\psi}{\partial y_m} dy_m$$

Пусть выполнены все предыдущие условия на функции $F_i(x,y)$. Подбираются параметры $\lambda_1, ..., \lambda_m$ так, чтобы все производные функции Лагранжа равны 0.

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{y_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y_m} = \dfrac{\partial f}{\partial y_m} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{y_m} = 0 \end{cases}$$

Основная матрица – это определитель Якоби:

$$J \neq 0$$

По правилу Крамера, существует единственное значение $\lambda_1, ..., \lambda_m$, которое является решением этой системы функций γ.

$$\psi_0 = \psi(x,y,\lambda_0) \to d\psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x_i} dx_i + ... + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Следовательно:

$$\left. \frac{\partial \psi_0}{\partial x_j} \right|_{M_0} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Необходимые условия по методу Лагранжа:

$$\delta : \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = ... = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y_1} = ... = \dfrac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0 \\ F_1(x,y) = 0 \\ F_m(x,y) = 0 \end{cases}$$

Переменные $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_m)$ — равноправны.

Лекция 20. Достаточные условия существования условного локального экстремума. Числовые ряды. Ряды с положительными членами

Достаточные условия для отыскания условного локального экстремума по методу Лагранжа

Пусть задана функция $f(x,y) = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$ — дважды дифференцируема в некоторой точке $M_0(x_0,y_0)$ и есть условие связи:

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_m(x,y) = 0 \end{cases} \tag{20.1}$$

Пусть выполнены условия теоремы о неявных функциях относительно $y_1,...,y_m$ для системы условий связи (20.1). Записывается функция Лагранжа:

$$\psi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x,y)$$

Пусть выполнены необходимые условия условного локального экстремума в точке M_0.

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right|_{M_0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\right|_{M_0} = 0$$

$$F_i(M_0) = 0$$

При наличии условия связи (20.1), то функции $\psi(x,y)$ и $f(x,y)$ совпадают. Следовательно, локальный экстремум функции $\psi(x,y)$ совпадает с локальным экстремумом функции $f(x,y)$. Необходимо рассмотреть второй дифференциал $d^2\psi$ и установить его знакоопределенность или знакопеременность.

$$\left.d^2\psi\right|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 \psi + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \cdot d^2 y_j$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$ подобраны так, чтобы производные по y в точке M_0 обращались в 0.

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\right|_{M_0} = 0$$

Тогда получается квадратичная форма от $dx_1, ..., dx_n$, $dy_1, ..., dy_m$:

$$\left.d^2\psi\right|_{M_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial}{\partial y_m}dy_m\right)^2 \psi$$

Учитывая, что dy_j выражаются через $dx_1, ..., dx_n$ в виде линейных комбинаций. Следовательно, второй дифференциал будет представлять собой квадратичную форму K только от переменных $dx_1, ..., dx_n$ следующего вида:

$$\left.d^2\psi\right|_{M_0} = K(dx_1, ..., dx_n)$$

Если эта квадратичная форма знакоопределенная, то существует условный локальный экстремум в точке (x_0, y_0). Если эта квадратичная форма знакопеременная, то условного локального экстремума в точке M_0 не существует. Если эта квадратичная форма квазизнакоопределенная, то ответ неясен.

Пример отыскания условного локального экстремума

Пример 20.1. *Рассматриваются функция от двух переменных и условия связи:*

$$f(x, y) = xy$$

$$F_1(x, y) = x + y - 1 = 0$$

Необходимо найти условный экстремум такой функции при таком условии связи. Составляется функция Лагранжа:

$$\psi(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Записываются необходимые условия по методу Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = y + \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = x + \lambda = 0 \\ \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что:

$$\lambda = -y = -x$$
$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_0 = -\frac{1}{2}$$

Вычисляется второй дифференциал в точке (x_0, y_0)*:*

$$d^2\psi = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 0 \cdot (dy)^2 = 2dxdy = -2(dx)^2$$

$$dF_1 = dx + dy = 0$$

$$dy = -dx$$

Это значение второго дифференциала — отрицательно определенное. Следовательно, в точке $\hat{M}_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ *будет условный локальный максимум для функции* $f(x,y)$ *при условии связи* $F_1(x,y) = 0$.

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости ряда

Определение 20.1. *Числовым рядом называют выражение вида:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a \in R \tag{20.2}$$

Определение 20.2. *Говорят, что числовой ряд* (20.2) *сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность его частичных сумм:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

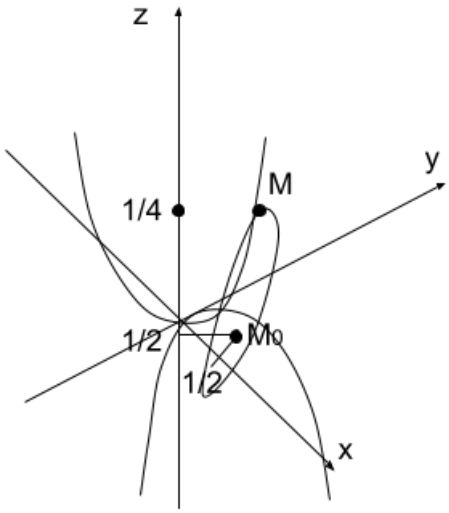

Рис. 20.1. График функции $f(x,y)$

$$S_n \underset{n\to\infty}{} S$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Пример 20.2.

$$0 < q < 1$$

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = S = \frac{1}{1-q}$$

Частичная сумма равна:

$$S_n = 1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-q} = S$$

Ряд (20.2) сходится тогда и только тогда, когда сходится следующий ряд:

$$c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad c \neq 0, c \in R$$

Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ тоже сходится.

Критерий Коши сходимости числового ряда

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 20.1. *Чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $N = N(\varepsilon)$*, что для любых* $n > N$ *и для любого натурального* p *было бы верно:*

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Доказательство.

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эквивалентна сходимости последовательности S_n его частичных сумм. А для этого необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любых $n > N$ и для любых натуральных p:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

■

Из этой теоремы вытекают необходимые условия сходимости ряда.

Следствие 20.1. *Если ряд* (20.2) *сходится, то необходимо (обязательно), чтобы выполнялось следующее условие:*

$$|a_m| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Доказательство.

Если ряд (20.2) сходится, то выполняется критерий Коши. В частности для $p = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$ и $p = 1$ верно, что:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_{m+1}| = 0$$

Необходимое условие, что $|a_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ не является достаточным.

■

Пример 20.3. *Рассматривается гармонический ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{20.3}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Необходимо показать, что этот ряд сходится. Необходимое условие выполнено:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Необходимо показать, что ряд (20.3) *расходится. По критерию Коши это значит, что найдется такое* $\varepsilon > 0$*, что для любого натурального числа* N *существует* $n > N$ *и натуральное* p*, что:*

$$|a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$$

Задается:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right| > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 \quad \forall n$$

Таким образом, ряд (20.3) *расходится.*

Ряды с положительными членами

Рассматривается следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0 \tag{20.4}$$

Так как все члены положительные, то отсюда следует, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ возрастает.

Теорема 20.2. *Ряд* (20.4) *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *— ограничена.*

Доказательство.

Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, то существует:

$$sup\ \{S_n\} = S$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Следовательно, ряд (20.4) сходится. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Признаки сравнения рядов

Теорема 20.3. *Пусть даны 2 ряда: ряд* (20.4) *и* (20.5).

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad b_k > 0 \tag{20.5}$$

Известно, что:

$$a_k \leqslant b_k$$

Если ряд (20.5) *сходится, то ряд* (20.4) *тоже сходится. Если ряд* (20.4) *расходится, то ряд* (20.5) *тоже расходится.*

Доказательство.

Пусть ряд (20.5) сходится. Тогда по предыдущей теореме ее последовательность частичных сумм $\{\tilde{S}_n\}$ — ограничена, где:

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$S_n \leqslant \tilde{S}_n$$

Следовательно, $\{S_n\}$ — ограничена. Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ сходится. Это означает, что и ряд (20.4) сходится.

Пусть ряд (20.4) расходится. Тогда последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ — не ограничена.

$$S_n \to +\infty$$

Так как:

$$S_n \leqslant \tilde{S}_n$$

тогда, $\{S_n\}$ — не ограничена. Следовательно, ряд (20.5) расходится. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 20.4. *Признак сравнения в предельной формулировке.*

Пусть для рядов (20.4) *и* (20.5) *верно:*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A \geqslant 0$$

Тогда если ряд (20.5) *сходится, то и ряд* (20.4) *сходится. Если ряд* (20.4) *расходится, то и ряд* (20.5) *расходится.*

Доказательство.

По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех натуральных $n > N$ будет выполняться условие:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$$

$$a_n < (A+\varepsilon)\cdot b_n$$

Если ряд (20.5) сходится, то и $(A+\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. По предыдущей теореме ряд (20.4) тоже сходится. ■

Дополнение. Если в условиях этой теоремы $A > 0$, то ряда (20.4) и (20.5) можно менять местами, т.е если существует предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A \geqslant 0$$

то существует предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_k} = \frac{1}{A} \geqslant 0$$

Следовательно, при $A > 0$ оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Теорема 20.5. *Признак сравнения дробей.*

Пусть даны ряды (20.4) *и* (20.5). *Известно, что:*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}, \quad k \in N$$

Тогда если ряд (20.5) *сходится, то и ряд* (20.4) *тоже сходится. Если ряд* (20.4) *расходится, то и ряд* (20.5) *тоже расходится.*

Доказательство.

Имеются следующие неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1} \leqslant \dfrac{b_2}{b_1} \\ \dfrac{a_3}{a_2} \leqslant \dfrac{b_3}{b_2} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \end{cases}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1}$$

Если ряд (20.5) сходится, то и ряд $\frac{a_1}{b_1}\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже сходится. По предыдущей теореме ряд (20.4) тоже сходится. Если ряд (20.4) расходится, то и ряд $\frac{a_1}{b_1}\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже расходится. Таким образом, ряд (20.5) тоже расходится. ■

Пример 20.4. *Пусть задан обобщенный гармонический ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Известно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *расходится.*

$$\frac{1}{k^{\alpha}} > \frac{1}{k}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ *тоже расходится.*

Признак Даламбера сходимости ряда

Теорема 20.6. *Признак Даламбера.*

Пусть задан ряд (20.4) *и известно, что:*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant d < 1$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0$$

Тогда ряд (20.4) *сходится. Если:*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$$

То ряд (20.4) *расходится.*

Пусть существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d$$

Тогда, если $d < 1$, *то ряд* (20.4) *сходится. Если* $d > 1$, *то ряд* (20.4) *расходится. Если* $d = 1$, *то ответ неясен.*

Доказательство.

Пусть:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant d < 1$$

Следовательно:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{d^{k+1}}{d^k}$$

Происходит сравнение ряда (20.4) с геометрической прогрессией, которая сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d^k$$

Таким образом, по признаку сравнения дробей ряд (20.4) тоже сходится. Если:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$$

Тогда нарушено необходимое условие сходимости и ряд (20.4) расходится:

$$a_{k+1} > a_k \to a_k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0$$

По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для любого $n > N$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - d \right| < \varepsilon$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$d - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon$$

Если $d > 1$, то $d - \varepsilon > 1$ при достаточно малом ε. Тогда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > d - \varepsilon > 1$$

Следовательно, ряд (20.4) расходится. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 21. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Признак Коши (радикальный) сходимости рядов

Теорема 21.1. *Пусть задан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0$$

Если:

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1, \quad \forall k \in N$$

то ряд (20.4) *сходится. Если:*

$$\sqrt[k]{a_k} > 1, \quad \forall k \in N$$

то ряд (20.4) *расходится.*

Доказательство.

Если:

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1, \longrightarrow a_k \leqslant q^k$$

Так как $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. По признаку сравнения рядов ряд (20.4) тоже сходится.

Если:

$$\sqrt[k]{a_k} > 1 \longrightarrow a_k > 1$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, то ряд (20.4) тоже расходится. ■

Теорема 21.2. *Признак Коши в предельной формулировке.*

Пусть задан ряд (20.4)*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0$$

Пусть существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$$

Тогда, если $q < 1$, то ряд (20.4) *сходится. Если $q > 1$, то ряд* (20.4) *расходится. Если $q = 1$, то ответ неясен.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

По условию, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon) \in N$, что для $\forall k, k > N$ верно следующее неравенство:

$$|\sqrt[k]{a_k} - q| < \varepsilon$$

$$q - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < q + \varepsilon$$

Если $q < 1$, то при малом ε:

$$q' = q + \varepsilon < 1$$

$$a_k < (q')^k < 1$$

По предыдущей теореме, ряд (20.4) сходится. Если $q > 1$, то при малом ε:

$$q - \varepsilon > 1 = \tilde{q} > 1$$

$$1 < \tilde{q} < \sqrt[k]{a_k}$$

$$\tilde{q}^k < a_k$$

Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{q}^k$ - расходится при $\tilde{q} > 1$, то ряд (20.4) тоже расходится. Если $q = 1$, то ответ неясен. ■

Пример 21.1. *Задан ряд, который расходится:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$$

Задан ряд, который сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \to 1$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сравнение признаков Даламбера и Коши

Необходимо найти какой из признаков сильнее.

Теорема 21.3. *Если для ряда* (20.4) *существует предел:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k > 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d$$

То существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q = d$$

Доказательство.

Рассматривается вспомогательная лемма.

Лемма 21.1. *Пусть дана последовательность x. Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

то существует предел средне арифметического этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = A$$

Доказательство.

По определению предела, для любого $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ что для $\forall n > N$ верно:

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассматривается разность:

$$\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - A\right| = \frac{|(x_1 - A) + (x_2 - A) + \ldots + (x_N - A) + (x_{N+1} - A) + \ldots + (x_n - A)|}{n}$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - A| + \ldots + |x_N - A|}{n} + \frac{|x_{N+1} - A| + \ldots + |x_n - A|}{n} < \frac{K}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n-N)}{n} \to \frac{\varepsilon}{2}$$

При достаточно больших n:

$$\frac{K}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{K}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n-N)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Вывод Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon)$, что при $n > \tilde{N}$ будет верно:

$$\frac{|x_1 + .. + x_n| - A}{n} < \varepsilon$$

Следовательно, существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + .. + x_n}{n} = A$$

■

Необходимо доказать, что если существует предел по Даламберу, то существует предел по Коши. Пусть задан предел по Даламберу:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = d$$

Рассматривается следующий предел:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}}} = e^{\ln\left[\left(a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}}\right)^{\frac{1}{k}}\right]} =$$

$$= e^{\frac{1}{k}\ln\left(a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}}\right)} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)}{k}}$$

Следовательно, предел этого выражения записывается следующим образом:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = e^{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\ln a_1 + \ldots + \ln\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)}{k}\right)}$$

Так как существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = d$$

Следовательно существует предел:

$$\lim_{k\to\infty} \ln \frac{a_k}{a_{k-1}} = \ln d$$

По доказанной Лемме предел:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\ln a_1 + \ldots + \ln \frac{a_k}{a_{k-1}}}{k}\right) = \ln d$$

Следовательно, предел по Коши:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = e^{\ln d} = d$$

Если предел сходится по признаку Даламберу, то предел сходится и по признаку Коши. Обратное утверждение не верно. ■

Пример 21.2. *Пусть задан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}}$$

Рассматривается предел:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}}} = \begin{cases}\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt[k]{2} = \frac{1}{2}\\ \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[k]{\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\sqrt[k]{a_k} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$$

Следовательно, по принципу Коши ряд сходится. Однако, если применить признак Даламбера, то получится следующее:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((-1)^{k+1}+3)2^{k+1}}{2^{k+2}((-1)^k+3)} = \frac{(-1)^{k+1}+3}{2((-1)^k+3)} = \begin{cases}\frac{1}{4}\\ \frac{4}{4} = 1\end{cases}$$

Таким образом, предела по признаку Даламбера не существует.

Интегральный признак Маклорена-Коши. Ряд Дирихле

Теорема 21.4. *Задан ряд* (20.4)*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \quad a_k > 0$$

Если существует $f(x)$ на $[1;+\infty)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ монотонно не возрастает на $[1;+\infty)$.

2) $f(k) = a_k, \quad \forall k \in N$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3) $f(x)$ *— интегрируема на* $[k,k+m] \subset [1;+\infty)$.

Тогда ряд (20.4) *сходится тогда и только тогда, когда интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство.

Для доказательства сходимости (расходимости) ряда (20.4) необходимо воспользоваться критерием Коши для сходимости ряда и критерием Коши для сходимости интеграла.

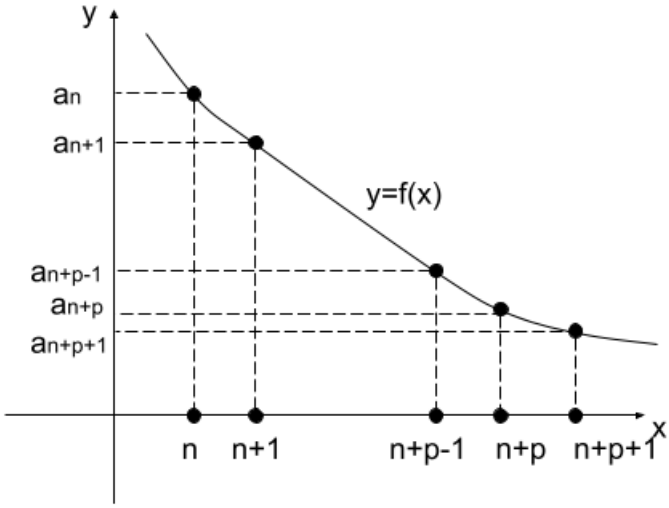

Рис. 21.1. Сходимость ряда

$$\int\limits_{n+1}^{n+p+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leqslant \int\limits_{n}^{n+p} f(x)dx$$

Если интеграл сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 1$ такое, что $\forall n > N$ и для любого натурально p:

$$\int\limits_{n}^{n+p} f(x)dx < \varepsilon$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Следовательно ряд (20.4) сходится. Если интеграл и расходится, то существует $\varepsilon_0 > 0$, что для $\forall N \in N$, что $\forall n > N$ и для любого натурально p, что:

$$\int\limits_{n+1}^{n+p+1} f(x)dx \geqslant \varepsilon_0$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \geqslant \varepsilon_0$$

Таким образом, по критерию Коши ряд (20.4) расходится. Аналогично, если ряд (20.4) сходится, то существует $\varepsilon_0 > 0$, что для $\forall N = N(\varepsilon) \in N$, что $\forall n > N$ и для любого натурально p, что:

$$\sum_{n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$\int\limits_{n}^{n+p+1} f(x)dx < \varepsilon$$

Таким образом, интеграл тоже сходится. ■

Пример 21.3. *Ряд Дирихле.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Необходимо найти значения α, при которых сходится заданный ряд. Рассматривается монотонная функция:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Рассматривается интеграл Дирихле (несобственный интеграл первого рода):

$$I(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$I(\alpha)$ сходится, если $\alpha > 1$. $I(\alpha)$ расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

Следовательно, по интегральному признаку ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. В частности $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Признак Раабе

Теорема 21.5. *Дан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0$$

Если:

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant q > 1$$

то ряд (20.4) *сходится. Если:*

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$$

то ряд (20.4) *расходится.*

Доказательство.

$$R_n < 1 \to 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

По признаку сравнения дробей из расходимости гармонического ряда следует, что ряд (20.4) расходится.

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant q > 1$$

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{q}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{q}{n}$$

Рассматривается следующее выражение:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + \gamma \cdot \frac{1}{n}, \quad \gamma \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

При достаточно больших n:

$$|\gamma| < q - \alpha$$

$$\alpha - q < \gamma < q - \alpha$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно, неравенство можно записать следующим образом:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1-\frac{\alpha}{n}+\gamma\frac{1}{n} > 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha-q}{n} = 1-\frac{q}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1-\frac{q}{n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{(n-1)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

По признаку сравнения дробей так как ряд $\sum\limits_{\infty}^{n=1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, так как $\alpha > 1$. Следовательно, ряд (20.4) тоже сходится. ■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 22. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость, теоремы Римана и Коши. Признак Дирихле-Абеля сходимости знакопеременных рядов

Сравнение признака Раабе с признаками Даламбера и Коши. Признак Гаусса

Пример 22.1. *Пусть задан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k = \alpha^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}, \quad \alpha > 0$$

По признаку Даламбера:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \alpha^{-\frac{1}{k}} \underset{k\to\infty}{\to} 1$$

В этом случае признак Даламбера не определяет, сходится этот ряд или нет. По признаку Коши:

$$\sqrt[k]{a_k} = \alpha^{-\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}}{k}\right)} \underset{k\to\infty}{\to} 1$$

Признак Коши тоже не определяет сходимость ряда. По признаку Раабе:

$$R_k = k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\left(1 - \alpha^{-\frac{1}{k}}\right) = \frac{\alpha^{-\frac{1}{k}} - 1}{-\frac{1}{k}} \underset{k\to\infty}{\ln \alpha}$$

Если $\ln\alpha > 1$ *и* $\alpha > e$*, то ряд сходится. Если* $\ln\alpha < 1$ *и* $\alpha < e$*, то ряд расходится. Если* $\alpha = e$*, то ответ неясен.*

Признак Гаусса

Пусть имеется ряд из положительных чисел:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k > 0 =$$

Предполагается, что член ряда необходимо представить в следующем виде:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta^2}{k^2}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

λ, μ — константа. $\{\theta\}$ — ограниченная последовательность. Если $\lambda > 1$, то ряд расходится. Если $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$, то ряд сходится. Если $\lambda < 1$, то ряд расходится. Если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то ряд сходится.

Пример 22.2. *Пусть задан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k = \alpha^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right)}, \quad \alpha > 0$$

По признаку Гаусса:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{\ln\alpha}{k}} = 1 + \frac{\ln\alpha}{k} + \frac{\ln^2\alpha}{2!k^2} + \overline{o}\left(\frac{1}{k^2}\right) = 1 + \frac{\ln\alpha}{k} + \frac{\theta_k}{k^2}$$

При $\alpha = e$:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{\theta_k}{k^2}$$

По признаку Гаусса ряд расходится.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Рассматривается ряд, где член ряда не предполагается как положительное число:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k \in R \tag{22.1}$$

Можно выделить 2 вида сходимости.

Определение 22.1. *Говорят, что ряд* (22.1) *сходится абсолютно, если сходится ряд* (22.2).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \tag{22.2}$$

Определение 22.2. *Говорят, что ряд* (22.1) *сходится условно, если этот ряд сходится, но ряд* (22.2) *расходится.*

Лемма 22.1. *Если ряд* (22.1) *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство.

Если ряд (22.2) сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ и любого натурального числа p верно:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |U_k| < \varepsilon$$

Тогда имеется:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |U_k| < \varepsilon$$

Таким образом, ряд (22.1) сходится. Обратное утверждение неверно. ■

Пример 22.3. *Пусть дан ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Рассматривается гармонический ряд, который расходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = S_N + R_N$$

Остаточный член представляет собой:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

Необходимо показать, что:

$$R_N \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

Таким образом, ряд сходится условно. Пусть N — четное, тогда $N+1$ — нечетное и член ряда записывается как:

$$a_{N+1} = (-1)^N\frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1}$$

$$a_{N+1} + a_{N+2} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N-2} > 0$$

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} < \frac{1}{N+1}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рис. 22.1. Член ряда

Следовательно:

$$R_N < \frac{1}{N+1}$$

Если N — нечетное, то:

$$|R_N| < |a_{N+1}| \to 0$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Абсолютная сходимость является более сильным условием, чем условная сходимость.

Теорема Римана о перестановке членов условно сходящихся рядов

Теорема 22.1. *Пусть задан ряд, который сходится условно:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k$$

Тогда ряды, составленные из положительных членов ряда и из модулей его отрицательных членов расходятся. Для любого вещественного числа A можно так переставить члены ряда, что полученный ряд будет сходиться к этому числу A.

Доказательство.

Пусть частичная сумма ряда сходится:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \underset{n\to\infty}{\to} S$$

P_n — сумма положительных членов ряда, входящих в S_n.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Q_n — сумма модулей отрицательных членов ряда, входящих в S_n. Следовательно, частичная сумма выражается как:

$$S_n = P_n - Q_n \underset{n\to\infty}{\to} S$$

Если бы $P_n \underset{n\to\infty}{\to} P$, то существовал бы и предел:

$$\lim Q_n = P - S$$

Аналогично, если бы $Q_n \underset{n\to\infty}{\to} Q$, то существовал бы и предел:

$$\lim P_n = S + Q$$

Однако, это невозможно, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ расходится.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = P_n + Q_n \to +\infty$$

Таким образом, $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ расходятся. Рассматривается вещественное число $A > 0$. Происходит суммирование положительных членов ряда до того момента, когда их сумма впервые превысит число A.

$$S_N > A$$

Далее прибавляются отрицательные члены ряда до тех пор, пока впервые получится сумма меньше A. Затем снова прибавляются положительные члены и т.д.

$$S_{N_2} < 2$$

На каждом таком этапе разность между суммой будет меньше, чем модуль последнего добавленного члена.

$$|S_{N_k} - A| < |A_{m_k}|$$

По необходимому признаку сходимости, так как ряд сходится, то $|a_{m_k}| \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{U}_k \to A$$

Замечание 22.1. *Аналогично можно доказать, что члены ряда можно переставить так, чтобы, полученный ряд сходился к $+\infty$ или к $-\infty$.*

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема Коши о перестановке членов абсолютно сходящихся рядов

Теорема 22.2. *Если заданный ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов получится снова абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть частичная сумма ряда сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = B$$

Тогда по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1 = N_1(\frac{\varepsilon}{2})$, что любая частичная сумма:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}, \quad \forall n > N_1$$

$$|S_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ сходится абсолютно, то по Критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2 = N_2(\frac{\varepsilon}{2})$, что для любого $n > N_2$ и натурального p верно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Предполагается, что:

$$N \geqslant max(N_1, N_2)$$

Тогда для любого $n > N$ и натурального p выполняются неравенства:

$$|S_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассматривается произвольно переставленный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{U}_k$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассматривается частичная сумма этого ряда, для которой существует номер $N_3, n > N_3$ в частичную сумму $\tilde{S}_n$ входят все слагаемые исходного ряда с номерами от 1 до N.

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{U}_k$$

Рассматривается частичная сумма:

$$|\tilde{S}_n - B| \leqslant |\tilde{S}_n - S_n| + |S_n - B| \leqslant \sum_{k>N_2+1}^{N_2+p} |U_k| + |S_N - B| < \varepsilon$$

Следовательно, переставленный ряд сходится к той же, самой сумме B:

$$\tilde{S}_n \underset{n\to\infty}{\to} B$$

Для доказательства абсолютной сходимости переставленного ряда к той же сумме следует провести те же рассуждения, что и выше, но уже не для ряда U_k, а для ряда $|U_k|$. ■

Признак сходимости Дирихле-Абеля. Признак Лейбница

Теорема 22.3. *Пусть дан ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k V_k$$

Пусть частичные суммы ряда, составленного из $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ *ограничены:*

$$|S_n| = |\sum_{k=1}^{\infty} U_k| \leqslant M$$

Пусть также известно, что:

$$V_k \underset{k\to\infty}{\to} 0, \quad |V_{k+1}| \leqslant |V_k|$$

Тогда заданный ряд сходится.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Применяется критерий Коши сходимости ряда. Рассматривается:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k V_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1})V_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}V_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} S_m V_m - \sum_{m=n}^{n+p-1} S_m V_{m+1}\right| = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p-1} S_m(V_m - V_{m+1})S_{n+p}V_{n+p} - S_n V_{n+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |S_m|(V_m - V_{m+1}) + |S_{n+p}|V_{n+p} + |S_n|V_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\sum_{m=n+1}^{n+p-1} (V_m - V_{m+1}) + V_{n+p} + V_{n+1}\right) =$$

$$= M(V_{n+1} - V_{n+p} + V_{n+p} + V_{n+1}) = 2M \cdot V_{n+1}| < 2M\frac{\varepsilon}{4M} - \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Так как $V_{n+1} \to 0$, то при достаточно большом номере n для $\forall \varepsilon > 0$:

$$V_{n+1} < \frac{\varepsilon}{4M}$$

В итоге, получается, что ряд сходится:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k \cdot V_k\right| < \varepsilon$$

■

Следствие 22.1. *Признак Лейбница.*

Пусть дан ряд такого вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k > 0$$

Так как:

$$a_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

То ряд сходится.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Частичная сумма ограничена. По признаку Дирихле этот ряд сходится.

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = -1 + 1 - ...(-1)^n = \begin{cases} 0, & n - \text{чет} \\ -1, & n - \text{нечет} \end{cases}$$

$$V_k \to 0$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 23. Арифметические операции над сходящимися рядами. Бесконечные произведения и двойные ряды

Пример (признак Дирихле-Абеля)

Пример 23.1. *Рассматривается ряд следующего вида:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, \quad x \in (0;\pi)$$

$$U_k = \cos kx, \quad V_k = \frac{1}{k} \to 0$$

Необходимо доказать, что ряд, составленный из таких членов, имеет ограниченные частичные суммы. Рассматривается частичная сумма этого ряда:

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx \sin\frac{x}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{(2x+1)x}{2}\right) - \sin\frac{(2x-1)x}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot 2 = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \quad x \neq 0$$

Таким образом, по признаку Дирихле-Абеля ряд сходится.

Арифметические операции над сходящимися рядами

Теорема 23.1. *Пусть даны 2 ряда, которые сходятся:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

Тогда ряд, составленный из сумм или разностей членов этих рядов, будет сходиться:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Рассматривается сходимость частичных сумм:

$$S_n^a = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_n^b = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = S_n^a \pm S_n^b \underset{n\to\infty}{\to} A \pm B$$

■

Теорема 23.2. *Пусть заданы ряды, которые сходятся абсолютно:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Тогда ряд, составленный из произведений вида $a_m b_l$, сходится абсолютно, и его сумма S равна $A \cdot B$, где:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Доказательство.

Рассматривается ряд и его частичная сумма:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_m b_l$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_m b_l$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть q — наибольший из номеров m и l, которые участвуют в этой частичной сумме S_n.

$$|S_n| \leqslant |(a_1 + ... + a_q)(b_1 + ... + b_q)| \leqslant (|a_1| + ... + |a_q|)(|b_1| + ... + |b_q|)$$

Так как ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно, то частичные суммы $\tilde{S}_n^a$ и $\tilde{S}_n^b$ ограничены. Следовательно, частичные суммы

$$S_n$$

ограничены по модулю.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_m b_l|$$

$$S_n \leqslant (|a_1| + ... + |a_q|)(|b_1| + ... + |b_q|) = \tilde{S}_n^a \times \tilde{S}_n^b$$

Для знака положительных рядов сходимость эквивалентна ограниченности частичных сумм. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_m b_l$ сходится абсолютно и сходится к числу D. Необходимо показать, что:

$$D = A \times B$$

Рассматривается последовательность частичных сумм:

$$\overset{=}{S}_N = \sum_{k=1}^{N} c_n \to D$$

Если существует подпоследовательность:

$$\{\overset{=}{S}_{N_k}\} \to A \times B$$

Тогда и вся последовательность будет сходится:

$$\{\overset{=}{S}_N\} \to A \times B$$

Поскольку ряд произведений можно нумеровать как угодно и по теореме Коши абсолютно сходящийся ряд при перестановки членов не меняет сходимость и суммы, то этот ряд можно занумеровать так, чтобы среди частичных сумм была подпоследовательность, сходящаяся к нужному числу.

$$a_i b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + ...$$

При такой нумерации существует подпоследовательность частичных сумм вида:

$$\{S_k^a \times S_k^b\} \to A \times B$$

Если подпоследовательность частичных сумм сходится, то и вся последовательность частичных сумм сходится:

$$\overset{=}{S}_n \to D = A \times B$$

■

Бесконечные произведения. Связь с числовыми рядами

Определение 23.1. *Бесконечным произведением называется выражение такого вида:*

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} U_k, \quad U_k > 0$$

Частичным n произведением называется выражение следующего вида:

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} U_k$$

Определение 23.2. *Говорят, что бесконечное произведение П сходится, если существует предел следующего вида:*

$$\lim_{\Pi \to \infty} \Pi n = A > 0$$

Теорема 23.3. *Необходимое условие сходимости бесконечного произведения.*

Если бесконечное произведение П сходится, то:

$$U_k \underset{k \to \infty}{\to} 1$$

Доказательство.

Рассматривается частичное произведение:

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} U_k \underset{n \to \infty}{\to} A$$

$$\Pi_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} U_k \underset{n \to \infty}{\to} A$$

Следовательно:

$$U_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to \frac{A}{A} = 1$$

■

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 23.2. *Рассматривается бесконечное произведение следующего вида:*

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

Рассматривается частичное произведение бесконечного произведения:

$$\Pi_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n})\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{3}$$

Таким образом бесконечное произведение сходится к $\frac{1}{3}$*:*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)\to\frac{1}{3}$$

Связь бесконечных произведений с числовыми рядами

Предполагается, что существует бесконечное произведение следующего вида:

$$\prod_{k=1}^{\infty}U_k=P$$

Рассматривается следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln U_k$$

Частичная сумма такого ряда:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln U_k=\ln(U_1\cdot\ldots\cdot U_n)=\ln(P_n)$$

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}U_k$$

Если:

$$P_N\underset{n\to\infty}{\to}P$$

Тогда:

$$\ln(P_n)\to\ln(P)$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln U_k$ сходится к $\ln P$

$$\ln P=S\Longleftrightarrow P=e^S$$

Доказано следующее утверждение:

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Утверждение 23.1. *Если бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} = P$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln U_k$ *тоже сходится.*

Рассматривается бесконечное произведение следующего вида:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+V_k), \quad V_k > -1$$

$$V_k > 0, \quad k > N_0$$

По утверждению бесконечное произведение сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+V_k)$$

Этот ряд сравнивается с рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k$$

Записывается предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+V_k)}{V_k} = 1$$

По предельному признаку сравнения рядов с положительными членами, ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+V_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k$ - сходятся (расходятся) одновременно.

Утверждение 23.2. *Бесконечное произведение вида:*

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty}(1+V_k)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k$$

Двойные ряды

Определение 23.3. *Двойной ряд — это бесконечная сумма элементов матрицы вида:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \dots \end{pmatrix}$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Запись двойного ряда:

$$\sum_{\substack{m,n \\ m\geqslant 1,\ n\geqslant 1}} a_{mn} \tag{23.1}$$

По матрице A можно сформировать еще 3 вида числовых рядов:

1) Повторный ряд типа (23.2):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) \tag{23.2}$$

2) Повторный ряд типа (23.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right) \tag{23.3}$$

3) Серия числовых рядов вида (23.4):

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \quad a_r = a_{mn} \tag{23.4}$$

Нумерация произвольна при условиях:

$$m \to \infty$$

$$n \to \infty$$

При такой нумерации охватываются все члены матрицы A.

Определение 23.4. *Говорят, что двойной ряд* (23.1) *сходится, если сходится последовательность его прямоугольных частичных сумм:*

$$\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}} a_{kl} = S_{mn}$$

Необходимо найти необходимые условия сходимости двойного ряда (23.1).

Утверждение 23.3. *Если ряд* (23.1) *сходится, то:*

$$a_{mn} \underset{\substack{m\to\infty \\ n\to+\infty}}{\to} 0$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Рассматривается общий член ряда и выражается через прямоугольные частичные суммы:

$$a_{mn} = S_{mn} - S_{(m-1)n} - \left(S_{mn-1} - S_{(m-1)(n-1)}\right) =$$

$$= S_{mn} - S_{m+n} - S_{m(n-1)} + S_{(m-1)(n-1)} \underset{\substack{m\to\infty \\ n\to+\infty}}{\to} 0$$

■

Определение 23.5. *Говорят, что повторный ряд* (23.2) *сходится, если сходятся все ряды "по строкам ":*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \to A_m$$

И сходится ряд из пределов:

$$\sum_{n=1} A_m = A$$

Определение 23.6. *Говорят, что повторный ряд типа* (23.3) *сходится, если сходятся все ряды "по столбцам ":*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = B_n$$

И сходится ряд из пределов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = B$$

Теорема 23.4. *Свойства двойных рядов. Если сходится двойной ряд* (23.1) *и сходятся ряды вида:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = A_m$$

то сходится повторный ряд (23.2).

Говорят, что ряд (23.1) *сходится абсолютно, если сходится ряд:*

$$\sum_{mn} |a_{mn}|$$

Если двойной ряд (23.1) *сходится абсолютно, то он сходится.*

Если $a_{mn} > 0$, то для сходимости ряда (23.1) *необходимо и достаточно, чтобы $|S_{mn}| \leqslant M$, т.е прямоугольные частичные суммы ограничены.*

Если из рядов (23.1), (23.2), (23.3), (23.4), *хотя бы один ряд сходится абсолютно, то тогда все эти ряды сходятся абсолютно, причем к одной и той же сумме.*

Пример 23.3. *Рассматривается следующая матрица:*

$$a_{mn} = \frac{1}{m+n}$$

Двойной ряд (23.1), *и повторные ряды* (23.2) *и* (23.3) *расходятся. Рассматривается следующая матрица:*

$$a_{mn} = \frac{1}{m^2 n^2}$$

Ряды (23.2), (23.3), (23.1) *сходится. Пусть есть матрица:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Прямоугольные частичные суммы записываются как:

$$S_{mn} = \begin{cases} 0, & m > 1 \\ 1, & n = m = 1 \end{cases}$$

Ряд (23.1) *сходится. Ряд* (23.2) *расходится. Ряд* (23.3) *сходится.*

Пусть есть матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Двойной ряд (23.1) *сходится, а повторные ряды* (23.2) *и* (23.3) *расходятся.*

Методы Чезаре и Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов

Была лемма о том, что если $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то существует предел:

$$n \to \infty \lim \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Обратное утверждение не верно.

Пример 23.4.

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

Рассматривается ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Записывается последовательность частичных сумм:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = \begin{cases} 0, & n - \text{чет} \\ 1, & n - \text{нечет} \end{cases}$$

Следовательно, ряд расходится. Однако если рассматривать предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} = \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m}{2m}\frac{1}{2}, & n = 2m \\ \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m+1}{2m+1}\frac{1}{2}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

То последовательность $\{S_n\}$ расходится.

Определение 23.7. *Метод Чезаре.*

Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по Чезаре, если с существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} = S$$

Определение 23.8. *Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ сходится по методу Пуассона - Абеля, если следующий ряд сходится:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot x^k = S(x), \quad x \in (0;1)$$

Причем существует предел этой суммы:

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = S$$

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ *сходится и:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = S$$

То:

$$S = \lim_{x \to 1-0} S(x)$$

Замечание 23.1. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится по Чезаре, то он сходится и по методу Пуассона - Абеля. Однако существуют примеры, где ряд сходится по методу Пуассона - Абеля, но не сходится по методу Чезаре.*

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ