ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

ФОМЕНКО
ТАТЬЯНА НИКОЛАЕВНА

ВМК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
ЧЕРНИКОВУ ПОЛИНУ ГЕОРГИЕВНУ

Оглавление

ЛЕКЦИЯ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 7

Литература 7
Элементы теории множеств 7
Операции над множествами 8
Числовая ось и бесконечные десятичные дроби 9
Точки числовой оси и их представления в виде бесконечных десятичных дробей 11
Сравнение бесконечных десятичных дробей 12
Множество вещественных чисел 13

ЛЕКЦИЯ 2. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ. 14

Супремум и инфимум 14
Приближение вещественных чисел рациональными числами 17

ЛЕКЦИЯ 3. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ОБРАТНОЕ ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО. 19

Понятия суммы и произведения вещественных чисел. Обратное вещественное число 19

ЛЕКЦИЯ 4. ОТОБРАЖЕНИЕ И МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ 25

Взаимно-однозначное отображение множеств 25
Мощность множества 26
Изоморфизм множеств с одинаковыми правилами и свойствами 27
Сравнение мощностей множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ 28
Аксиоматическое определение множества вещественных чисел с 3 правилами и 13 свойствами 30

ЛЕКЦИЯ 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 31

Последовательности. Понятие предела последовательности. 31
Ограниченные и неограниченные последовательности 31
Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б) последовательности 32
Свойства б.м. и б.б. последовательностей 32
Связь между б.м. и б.б. последовательностями 33
Предел последовательности 33

ЛЕКЦИЯ 6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД. МОНОТОННОСТЬ. 37

Арифметические операции над сходящимися последовательностями 37
Предельный переход в неравенствах для последовательностей 38
Расширенная числовая ось. Понятие ε-окрестностей конечных и бесконечных точек. 39
Монотонные последовательности и их свойства 40

ЛЕКЦИЯ 7. ЧИСЛО ЭЙЛЕРА. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 42

Число e как предел монотонной ограниченной последовательности 42
Предельные точки множества и последовательности 44

ЛЕКЦИЯ 8. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-ВЕЙЕРШТРАССА. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. 47

Верхний и нижний предел последовательности 49
Бесконечные предельные точки множества и последовательности 51

ЛЕКЦИЯ 9. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, КРИТЕРИЙ КОШИ. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. 52

Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности. 52
Свойства фундаментальных последовательностей 53
Функция одной переменной. Понятие предела функции. 54
Предел функции 54
Односторонние пределы 55

ЛЕКЦИЯ 10. КРИТЕРИЙ КОШИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ. 57

Бесконечные пределы и пределы на бесконечности 57
Связь односторонних пределов и обычного предела f(x) 59
Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б) функции вблизи т. *a* 59
Связь между б.б. и б.м. функциями 60
Асимптотическое представление функции, имеющей конченый предел 60
Асимптотическое сравнение функций. Термины Ландау. 61
Сравнение б.м. функций 61
Сравнение б.б. функций 61

ЛЕКЦИЯ 11. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ В ТОЧКЕ. 62

Предел «сверху» и «снизу» 63
Арифметические операции над сходящимися последовательностями 63
Предел сложной функции 63
Непрерывность функции в точке 65
Точки разрыва функции 65
Классификация точек разрыва 65

ЛЕКЦИЯ 12. ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫЙ ФУНКЦИЙ. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. 67

Локальные свойства непрерывных функций 67
Непрерывность сложной функции 68
Непрерывность функции на множестве. Глобальные свойства непрерывной функции. 69
Свойства функций непрерывных на сегменте 69
Равномерная непрерывность 70

ЛЕКЦИЯ 13. МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ. ТЕОРЕМА О ПРОХОЖДЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ 72

Колебание функции на отрезке [a;b] 72
Монотонная функция. Непрерывность обратной функции. 74
Обратная функция 74

ЛЕКЦИЯ 14. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. 79

Первый замечательный предел 83
Второй замечательный предел 84
Таблица эквивалентностей бесконечно малых функций 87

ЛЕКЦИЯ 15. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ Б.М. ФУНКЦИЙ 89

Производная и дифференциал функции одной переменной 89
Односторонние производные 90
Физический и геометрический смысл производной 90

Дифференциал функции 91
Производная сложной и обратной функции 91
Производная обратной функции 92
Инвариантность формы записи 1-го дифференциала 93

ЛЕКЦИЯ 16. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. 95

Правила вычисления дифференциалов от $f \pm$g, f+g, fg 95
Производные простейших элементарных функций 96
Применение 1-го дифференциала в приближенных вычислениях 98
Дифференцирование с помощью логарифмирования 99
Производные высших порядков 99
Формула Лейбница 99

ЛЕКЦИЯ 17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 101

Дифференцирование функций, заданных параметрически 101
Вектор-функция и её производные 102
Возрастание и убывание функции в точке 103
Локальный экстремум функции одной переменной 103
Свойства функций, дифференцируемых на интервале 104
Следствия из теоремы Лагранжа 105

ЛЕКЦИЯ 18. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА. ТЕОРЕМА КОШИ. 108

Теорема Коши 108
Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя. 108

ЛЕКЦИЯ 19. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА-МАКЛОРЕНА 111

Формула Тейлора 111
Следствия Формулы Тейлора 112
Теорема Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано 113
Оценка остаточного члена формулы Тейлора 113
Формулы Маклорена 114
Единственность разложения функции по формуле Тейлора 114

ЛЕКЦИЯ 20. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. 116

Неопределённый интеграл 117
Свойства неопределённого интеграла 117
Основные приёмы вычисления неопределённого интеграла 118
(замена переменной и интегрирование по частям) 118
Рациональные функции (дробей) 120
Краткие сведения о комплексных числах 120
Геометрический смысл и операции над комплексными числами 120

ЛЕКЦИЯ 21. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. 122

Интегрирование рациональной дроби 124

ЛЕКЦИЯ 22. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛА. 128

Интегрирование тригонометрических выражений 130
Интегрирование дробно-линейных иррациональностей 131
Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера 132
Подстановки по Эйлеру 133

Исследование функции и построение её графика 134

ЛЕКЦИЯ 23. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА. 137

Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба. 139
Перегиб графика функции *f(x)* на отрезке (*a;b*) 142

ЛЕКЦИЯ 24. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. АСИМПТОТЫ К ГРАФИКУ. 144

Достаточное условие перегиба 144
Асимптоты графика функции fx 147
Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на множестве 149

Лекция 1. Элементы теории множеств

Литература

- Математический анализ, В.А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл.Х. Сендов
- Вещественные числа и последовательности, И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко, Е.В. Хорошилова

Элементы теории множеств

Опр. *Множество* — это совокупность объектов произвольной природы, называемых его *элементами*.

Пустое множество — это условный символ ∅, означающий, что в нем нет ни одного элемента.

Кванторы

1) A ⊆ B - множество A является частью или совпадает с множеством B
2) A ⊂ B - A является частью множества B, но A ≠ B
3) x ∈ A - элемент x принадлежит множеству A
   x ∉ A - элемент x не принадлежит A
4) ∀ - любой
5) ∃ - существует хотя бы один
6) ∃! - существует и единственен

Способы задания множеств

1) Перечисление элементов
   A = {0, 1, 2}
2) Описание элементов множества словесно или формулой
   $B \subset \mathbb{N}$ B = $\{3k|\ k \in \mathbb{N}\}$= {3, 6, 9, …}
   B - все натуральные числа, кратные 3
3) С помощью характеристической функции

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Операции над множествами

1) A ∪ B - *объединение множеств* A и B - множество всех элементов, которые либо принадлежат A, либо принадлежат B
$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$
2) A ∩ B - *пересечение множеств* A и B
$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$
3) A\B - *дополнение множества* B до множества A
$$x \in (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$$
Если множества A и B совпадают, то (A\B) = ∅
$\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} = \mathrm{A}\backslash\mathrm{C} \Leftrightarrow B = C, B \subseteq \mathrm{A}, \mathrm{C} \subseteq \mathrm{A}$

На основе простых операций строятся более сложные, например, *симметрическая разность множеств (рис. 1.1)*.

$$A\Delta B \coloneqq (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B) \ \backslash \ (A \cap B$$

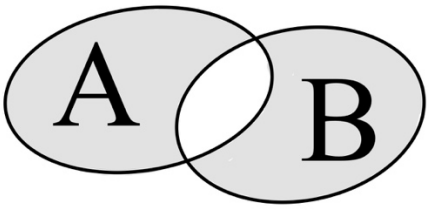


рис. 1.1 симметрическая разность множеств A и B

Свойства основных операций

1) $A \cup \varnothing = A$

2) $A \cup A = A$

3) $A \cup B = B \cup A$

4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

5) A\(A\B) = $A \cup B$ (если B⊆A, то A\(A\B)=B)

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7) (A\B) ∪ (A\C) = A\(B ∩ C) (*)

8) (A\B) ∩ (A\C) = A\(B ∪ C) (*)

Свойства 7 и 8 (*) называют *законами двойственности* или *законами де Моргана.*

Из (*) можно получить следующие свойства:

2') $A \cap A = A$

3') $A \cap B = B \cap A$

4') $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6') $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Числовая ось и бесконечные десятичные дроби

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, где

$\mathbb{N}$ - натуральные числа (1, 2, 3,…)

$\mathbb{Z}$ - целые числа (0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$)

$\mathbb{Q}$ - рациональные числа, q $\in \mathbb{Q}, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, НОД(m,n) = 1, т.е. взаимно простые

Однако, вещественных чисел недостаточно. Например, рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник со стороной 1 (рис. 1.2):

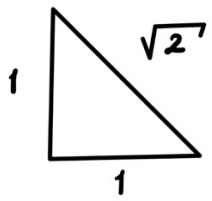


рис. 1.2 равнобедренный прямоугольный треугольник

По теореме Пифагора его гипотенуза будет равна $\sqrt{2}$. Однако $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Доказательство (от обратного):

Предположим, что $\sqrt{2}$ является рациональным числом. Тогда $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Возведем в квадрат и получим, что $2n^2 = m^2$, то есть $m \vdots 2$, m^2 кратно 4. Тогда $2n^2 = 4p \Rightarrow m^2 = 2p \Rightarrow n \vdots 2$, значит m и n кратны 2 и не являются взаимно простыми ⇒ противоречие. ■

Таким образом, $\sqrt{2}$ - иррациональное число. Аналогично, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ и т. п. - иррациональные числа.

Опр. *Ось* — это направленная прямая.

Опр. *Числовая ось* — это ось, на которой задано начало отсчета и масштаб измерения.

Рассмотрим горизонтальную прямую, зададим на ней направление точку отсчета O и масштаб измерения (рис. 1.3). Точки O

Сопоставим число 0, а фиксированной точке, отвечающей масштабу измерения, число 1. Откладывая от точки вправо фиксированные отрезки масштаба измерения, зададим натуральные числа 1, 2, 3, … Зададим целые числа, отметив слева точки симметричные относительно O натуральным числам. Чтобы отложить q ∈ $\mathbb{Q}, q = \frac{m}{n}$, отложим от O m точек, равных 1/n масштабного отрезка. Чтобы разделить отрезок на n равных частей, проведем через точку O под острым углом к отрезку прямую, отложим на этой прямой n одинаковых отрезков, соединим последнюю точку на прямой с концом масштабного отрезка и через оставшиеся точки проведем параллельные прямые, пересекающий масштабный отрезок (рис. 1.4).

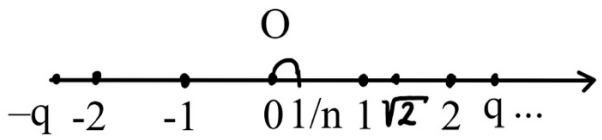


рис. 1.3 числовая прямая

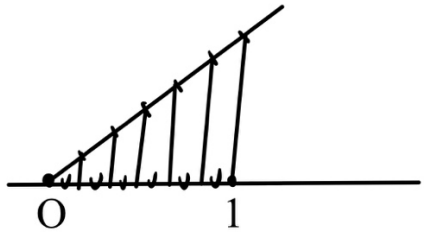


рис. 1.4 деление отрезка на равные части

Рациональные числа представимы бесконечными десятичными дробями. Например, $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0.5000 \ldots = 0{,}5(0)$; $\frac{1}{3} = 1,(3)$; $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Теперь любой точке числовой прямой сопоставим бесконечную десятичную дробь.

Точки числовой оси и их представления в виде бесконечных десятичных дробей

Способ 1

Рассматриваем $x > 0$ (справа от т. O, слева симметричный перенос) (рис. 1.5).

Точке x на числовой прямой буде сопоставлять бесконечную десятичную дробь по следующему правилу: $x \to a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$, где $0 \le x - a_0, a_1 a_2 \dots a_k < \frac{1}{10^k}$.

a_0 - наибольшее целое число и $a_0 + 1 > x$.

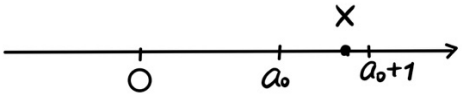


рис. 1.5 числовая прямая с x

Далее выбираем $\frac{a_1}{10}$ столько десятых долей, что $a_0 + \frac{a_1}{10} = a_0, a_1 \le x$, то есть $a_0, (a_1 + 1) > x$. И так далее выбирая a_i, построим десятичную дробь. Если число x иррационально, то $x \ne a_0, a_1 a_2 \dots a_k, \forall k \in \mathbb{N}$, то есть $x \to a_0, a_1 a_2 \dots a_k$ бесконечная десятичная дробь. Если $x \in \mathbb{Q}$, то $\exists N: x \to a_0, a_1 a_2 \dots a_N = x$, получается конечная десятичная дробь (если x представимо конечной десятичной дробью).

Способ 2 сопоставления точке x бесконечной десятичной дроби

Будем требовать, чтобы на каждом шаге число $a_0, a_1 a_2 \dots a_k < x$ и a_k выбирается по тому же принципу:

$a_0 < x$ - набольшее целое число, не превосходящее x;

$a_1: a_0 + \frac{a_1}{10} < x$, a_1 - наибольшее из таких чисел;

…

Если x не является рациональным, то способ 1 и способ 2 дают одинаковый результат.

Для случая $x \in \mathbb{Q}$, представимое конечной десятичной дробью возможны 2 варианта:

1) $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_N$ (способ 1)
2) $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_{N-1}(a-1)_N 9999 \dots$ (способ 2)

Сравнение бесконечных десятичных дробей

Пусть $0 < a = a_0, a_1 a_2 \dots a_N \dots$ и $0 < b = b_0, b_1 b_2 \dots b_N \dots$

Опр. Будем говорить, что $a < b \Leftrightarrow (a_0 < b_0) \vee ((a_0 = b_0) \wedge \dots \wedge (a_{k-1} = b_{k-1}) \wedge (a_k < b_k))$.

Опр. Будем говорить, что $a = b \Leftrightarrow (a_k = b_k)$ для $\forall k = 0, 1, 2 \dots$

Если $0 < a$ $(\forall a > 0)$, $c < 0, a > 0$, то $c < a$.

$0 \to 0{,}000 \dots$

Если $a < 0, b < 0$, то $a < b \Leftrightarrow |b| < |a|$, где $|a| = \max\{a, -a\}$.

$a = -a_0, a_1 a_2 \dots a_N \Rightarrow |a| = a_0, a_1 a_2 \dots a_N$

Сравним бесконечные десятичные дроби вида $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_N(0)$ и $\tilde{a} = a_0, a_1 a_2 \dots (a_N - 1)(9)$. По правилу сравнения $\tilde{a} < a$, однако для $\forall k \geq N$ добавим 1 к a_k $\tilde{a}$: $\tilde{a} + \frac{1}{10^k} = a_0, a_1 a_2 \dots (a_N - 1)9 \dots 9(9+1)999.. = a_0, a_1 a_2 \dots (a_N - 1 + 1)0 \dots 00999 \dots$

Тогда $\tilde{a} + \frac{1}{10^k} > a \Rightarrow$ различие между $\tilde{a}$ и a меньше любого положительного числа (рис. 1.6).

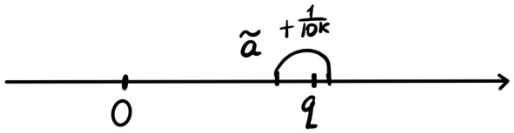


рис. 1.6 разница между a и a'

Соглашение

Поэтому принято считать, что бесконечно десятичные дроби вида $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_N(0)$ и $\tilde{a} = a_0, a_1 a_2 \dots (a_N - 1)(9)$ означают одно и то же рациональное число.

Поэтому дроби с 9 в периоде можно не рассматривать.

Таким образом, каждой точке числовой оси возможно сопоставить только одну бесконечную десятичную дробь.

Вывод: Каждой точке числовой оси соответствует единственная бесконечная десятичная дробь.

Множество вещественных чисел

Опр. *Множеством вещественных чисел* называется множество всевозможных бесконечных десятичных дробей со знаком + или -, исключая дроби с 9 в периоде.

Обозначение: $\mathbb{R}$

Транзитивность сравнения вещественных чисел

Утв. Пусть $a, b, c -$ положительные вещественные числа и $(a < b) \wedge (b < c) \Longrightarrow a < c$.

Доказательство:

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots a_m \dots$, $b = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots b_m \dots$, $c = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots c_m \dots$

По условию $a < b \Rightarrow a_k = b_k, k = 0, 1,2, \dots n-1,\ a_n < b_n$

$b < c\ \Rightarrow b_k = c_k, k = 0, 1,2, \dots m-1, b_m < c_m$.

Сравним a и с: $a_k = c_k, k = 0, 1,2, \dots n-1, a_n < c_n\ \Rightarrow a < c$.

Если $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots a_{m-1}, a_m, \dots, b = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots b_{m-1} b_m \dots$,

$c = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots c_{m-1} c_m \dots$

И $a_i = b_i, i = 0,1,2, \dots, m-1, a_m < b_m,\ c_j = b_j, j = 1,2,3 \dots, b_n < c_n$.

Тогда $a < c$, так как $a_k = c_k, k = 0, \dots, n-1, a_n < c_n$, то есть всегда $a < c$, и неравенство возникает в разряде k = min{m, n}.■

Утверждение доказано для положительных чисел, в остальных чисел все также верно из определений сравнения.

Лекция 2. Ограниченные и неограниченные подмножества вещественных чисел. Супремум и инфимум.

Пусть $M \subset \mathbb{R}$ (M$\neq \emptyset$)

Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *верхней (нижней) границей* множества M, если для $\forall x \in M\ x \leq M$.

Замечание: $x \leq M \Leftrightarrow (x < M) \vee (x = M)$.

Опр. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если у него существует верхняя (нижняя) граница.

Опр. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным,* если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Опр. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным сверху (снизу),* если у него нет верхней, нижней границы.

[Примеры]

1) [0,1] - ограниченное множество
2) $\mathbb{N}$ - не ограничено сверху, ограничено снизу 0

Нетрудно заметить, что у множества бесконечно много верхних (нижних) границ, так как всегда можно взять число правее (левее) на числовой оси.

Супремум и инфимум

Опр. *Супермумом* (точной верхней границей) множества M называется число $a \in \mathbb{R}$:

1) $\forall x \in M\ x \leq a$

2) $\forall \tilde{a} < a,\ \exists y \in M: \tilde{a} < y \leq a$

$a = supM$

Опр. Инфимумом (точной нижней границей) множества M называется число $b \in \mathbb{R}$:

1) $\forall x \in M\ x \leq b$
2)) $\forall \tilde{b} < b,\ \exists z \in M: b \leq z < \tilde{b}$
   $b = infM$

Замечание: $supM, infM$ могут принадлежать и не принадлежать M.

[Примеры]

1) M = {0, 1, 2}
   $2 \geq x, \forall x \in M$
   $\forall \tilde{a} < 2\ \exists y \in M: \tilde{a} < y \leq 2$ *(y=2)*
   $supM = 2, infM = 0.$

2) M = (0,1)
   $supM = 1 \notin M$
   $infM = 0 \notin M$

3) $\mathbb{Z}$ - неограниченное ни сверху, ни снизу множество.

Теорема 1. *(о существовании $supM$ и $infM$)*

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу). Тогда существует $supM$ $(infM)$.

Доказательство:

1) Пусть M состоит из положительных чисел и ограничено сверху. Покажем, что $\exists\, sup$, построив бесконечную десятичную дробь, удовлетворяющую условиям супремума. Для этого рассмотрим всевозможные целые части чисел, содержащихся в множестве M, и выберем максимум: $\bar{a}_0 = \max(a_0, b_0, c_0, \dots)$. Такой максимум существует, так как множество M ограничено сверху по условию некоторым натуральным числом.
   Выберем из M только те числа, у которых целая часть $\bar{a}_0$. Рассмотрим у выбранных чисел первые десятичные знаки и пусть $\bar{a}_1$ - максимум из этих знаков.

Далее рассмотрим в М числа вида: $a = \bar{a}_0, \bar{a}_1, a_2 \ldots$ Из этих чисел выберем число с максимальным вторым десятичным знаком и т.д. Продолжив эту конструкцию до бесконечности, получим бесконечную десятичную дробь $\bar{a} = \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \ldots \in \mathbb{R}$.

1.1) Покажем, что $\bar{a} = supM$. $\forall b \in M, b = b_0, b_1 b_2, \ldots \leq \bar{a}$. Пусть $\exists$ c $= c_0, c_1 \ldots c_n \ldots \in M: < c \Rightarrow \bar{a}_0 < c_0$, что невозможно, так как $\bar{a}$ выбиралось как максимальное число, или $\bar{a}_k = c_k, k = 0,1, \ldots, m-1$, $\bar{a}_m < c_m$, что тоже невозможно по построению $\bar{a} \Rightarrow \forall b \in M\ b \leq \bar{a}$.

1.2) Пусть $e < \bar{a}$. Покажем, что $\exists\ b \in M: e < b \leq \bar{a}$.
$e < \bar{a} \Rightarrow e_k = \bar{a}_k, k = 0,1,2, \ldots, m-1, e_m < \bar{a}_m$
$e = \bar{a}_0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{m-1} c_m \ldots$, $\quad c_m < \bar{a}_m$
Но по построению в множестве М содержится элемент вида d $= \bar{a}_0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{m-1} \bar{a}_m \ldots \Rightarrow e < d \leq \bar{a}$.

2) Пусть множество М состоит из неотрицательных чисел и ограничено снизу. Тогда $\exists\ infM$.
Рассуждаем аналогично случаю 1. На каждом шаге выбираем наименьший десятичный знак у чисел из М, у которых все предыдущие десятичные знаки уже являются минимальными. То есть на первом этапе выбираем $\underline{a}_0 = \min\{a_0, b_0, \ldots\}$ - наименьшее из целых частей всех чисел из М. Далее рассматриваем числа из М вида: $\underline{a}_0, a_1 a_2 \ldots$ и выбираем $\underline{a}_1 = \min\{a_1, b_1, \ldots\}$ и так далее. Повторяя эту процедуру до бесконечности, получаем бесконечную десятичную дробь $\underline{a} = \underline{a}_1 \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_n \ldots$
Остается показать, что $\underline{a} = infM$.

2.1) Покажем, что для $\forall x \in M: \underline{a} \leq x$.

От противного: пусть $\exists\ b \in M: b < \underline{a} \Rightarrow b_k = \underline{a}_k, k = 0,1, \ldots, n-1 \ldots, b_n < \underline{a}_n$, что невозможно по построению числа $\underline{a}$.

2.2) Покажем, что для $\forall c > \underline{a} \Rightarrow \exists\ d \in M$: $\underline{a} \leq d < c$

$\Rightarrow c_k = a_k, k = 0, \ldots, m-1, c_m > \underline{a}_m$

$c = \underline{a}_0, \underline{a}_1 \ldots \underline{a}_{m-1} c_m,\ c_m > \underline{a}_m$

Значит, в М существует элемент вида $d = \underline{a}_0, \underline{a}_1 \ldots \underline{a}_{m-1} \underline{a}_m \ldots \Rightarrow \underline{a} \leq d < c \Rightarrow \underline{a} = infM$.

3) Рассмотрим общий случай. Пусть множество M содержит какие-нибудь положительные числа и ограничено сверху, и $M^+ \subset M$ - все положительные числа из M $\Rightarrow supM = supM^+ = \bar{a}$.
4) Множество M содержит отрицательные числа и ограничено снизу, и $M_- \subset M$, где M_- - множество всех отрицательных чисел $\Rightarrow infM = infM_- = \underline{a}$.
   Чтобы найти $infM_-$, рассмотрим модули отрицательных чисел $\widehat{M}_- = \{|x|, x \in M\}$. $\widehat{M}_-$ - ограничено сверху $\Rightarrow$ по *теореме 1* $\exists\, sup\widehat{M}_- = \bar{a}$, тогда $-(\bar{a}) = infM_-$.
   Аналогично, если M состоит из отрицательных чисел, то $\exists\, supM = b$, причем $b = -inf\widehat{M} = -b$. ■

Приближение вещественных чисел рациональными числами

Лемма 1. Для $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$:

$$(\#)\begin{cases} \alpha_1 \le a \le \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \le \frac{1}{10^N} = 10^{-N} \end{cases}$$

Доказательство:

1) Пусть $a > 0, a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots a_N \dots$ Возьмем $\alpha_1 = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots a_N$, $\alpha_1 \le a$.

$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{10^N}$ - прибавим 1 в N-ом разряде. Тогда $\alpha_2 = a_0, a_1 \dots a_{N-1}(a_N + 1) \Rightarrow a \le \alpha_2$.

Заметим, что если $a \in \mathbb{Q}$, то в качестве α_1, α_2 можно взять $a = \alpha_1 = \alpha_2$.

2) В более общем случае, если $a = 0$, то $a = \alpha_1 = \alpha_2$ю
   Если $a < 0 \Rightarrow |a| > 0\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q},\ \alpha_1 < |a| < \alpha_2,\ \alpha_2 - \alpha_1 \le \frac{1}{10^N} \Rightarrow -\alpha_2 \le a \le -\alpha_1$ ■.

Лемма 2. Для $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \exists\, \gamma \in \mathbb{Q}$: $a < \gamma < b$.

Доказательство:

Пусть $0 < a < b, a = a_0, a_1 \dots a_n \dots, b = b_0, b_1 \dots b_n \dots \Rightarrow \exists\, m \in \{0,1,2 \dots\}: a_k = b_k$,

$k = 0,1, \dots, m-1, a_m < b_m$.

Тогда рассмотрим $\gamma = \begin{cases} a_0, a_1 \dots a_{m-1}(a_m+1)(0), \ \ a_m+1 < b_m \\ a_0, a_1 \dots a_{m-1}a_m 99 \dots 9(a_l+1), \ \ a_m+1 = b_m, \ \ a_l < 9 \end{cases}$

$a < \gamma < b$ ■.

Для множества рациональных чисел известны 3 правила: сравнения, сложения, умножения, удовлетворяющих 13 свойствам:

1) Сравнение транзитивно
2) $q, s \in \mathbb{Q}, \ q+s = s+q$ - коммутативность сложения
3) $q+(s+g) = (q+s)+g$ - ассоциативность сложения
4) $q+0 = q$ - нулевой элемент
5) $\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists! \ (-q)$ - противоположный по знаку элемент
6) $q \cdot s = s \cdot q$ - коммутативность умножения
7) $q \cdot (s \cdot g) = q \cdot s \cdot g$ - ассоциативность умножения
8) $\exists \ 1 \in \mathbb{Q}, \ q \cdot 1 = q$ - нейтральный элемент
9) $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0, \exists \frac{1}{q} = q^{-1}: q \cdot q^{-1} = 1$ - обратный элемент
10) $q \cdot (s+g) = q \cdot s + q \cdot g$ - дистрибутивность умножения относительно сложения
11) $q \leq s, \forall p \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ q+p \ \leq s+p$
12) $q \leq s, \forall p > 0 \ \ \Rightarrow q \cdot p \leq s \cdot p$
13) $\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists \ m \in \mathbb{N} \ \ q < m$ - аксиома Архимеда

Лекция 3. Сложение и умножение вещественных чисел. Обратное вещественное число.

Понятия суммы и произведения вещественных чисел. Обратное вещественное число.

Лемма 1. (из предыдущей лекции) Для $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$:

$$(\#)\begin{cases} \alpha_1 \le a \le \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \le \frac{1}{10^N} = 10^{-N} \end{cases} \begin{cases} \beta_1 \le b \le \beta_2 \\ \beta_2 - \beta_1 \le \frac{1}{10^N} = 10^{-N} \end{cases}$$

<u>Опр.</u> *Суммой вещественных чисел* $a, b \in \mathbb{R}$ называется вещественное число $a + b \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (#), верно, что

$$\alpha_1 + \beta_1 \le a + b \le \alpha_2 + \beta_2$$

<u>Опр.</u> *Произведением вещественных чисел* $a, b \in \mathbb{R}$ $0 < a, 0 < b$ называется вещественное число $a \cdot b \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (#), верно, что

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \le a \cdot b \le \alpha_2 \cdot \beta_2$$

Положим также, что для $a, b \in \mathbb{R}$ $ab = \begin{cases} |a| \cdot |b|, & \text{если } a, b - \text{одного знака} \\ -|a| \cdot |b|, & \text{если } a, b - \text{разных знаков} \end{cases}$

<u>Опр.</u> Пусть $a \ne 0$, $a \in \mathbb{R}$. *Обратным* к a числом называется число $\frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R}$, для которого выполняются условия:

$\frac{1}{\alpha_2} \le a^{-1} \le \frac{1}{\alpha_1}$ для α_1, α_2, удовлетворяющим (#) при $a > 0$.

Также положим $a^{-1} = -\frac{1}{|a|} = -|a| = -|a|^{-1}$, если $a < 0$.

Лемма 3. Сумма $a + b$ любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ существует и единственна.

Доказательство:

По определению $a+b$, выполняется $\alpha_1+\beta_1 \le a+b \le \alpha_2+\beta_2$ для $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$,

$\alpha_1+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2 \;\; \Rightarrow \alpha_1+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2$,

$\alpha_1+\beta_1$ - нижняя сумма, $\alpha_2+\beta_2$ - верхняя сумма, и $\{\alpha_1+\beta_1\}$ - ограничена сверху любой верхней суммой $\Rightarrow \sup\{\alpha_1+\beta_1\}=\gamma$.

Тогда по свойствам sup $\alpha_1+\beta_1 \le \gamma \le \alpha_2+\beta_2 \Rightarrow \gamma$ удовлетворяет определению суммы $\Rightarrow$ существование суммы доказано. Докажем единственность:

Пусть $\exists\, \gamma_1, \gamma_2,\;\; \gamma_1<\gamma_2 \;\Rightarrow\; \alpha_1+\beta_1 \le \gamma_1 < \gamma_2 \le \alpha_2+\beta_2$.

По *лемме 2* $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow\; \alpha_1+\beta_1 \le \gamma_1 < r_1 < r_2 < \gamma_2 \le \alpha_2+\beta_2$.

Пусть $r_2-r_1=d>0 \quad \Rightarrow\; (\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1) > r_2-r_1=d$

Однако, $(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1) < \frac{d}{3}+\frac{d}{3}=\frac{2d}{3}<d$ ■.

Лемма 4. Произведение $a \cdot b$ для $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ существует и единственно.

Доказательство:

Пусть $0<a, 0<b$. В (#) можно выбирать $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \cdot \beta_1 \le a \cdot b \le \alpha_2 \cdot \beta_2$

$\alpha_1 \cdot \beta_1 \le \alpha_2 \cdot \beta_1 \le \alpha_2 \cdot \beta_2 \quad \Rightarrow\; \alpha_1 \cdot \beta_1 \le \alpha_2 \cdot \beta_2$, $\{\alpha_2 \cdot \beta_2\}$ - ограничена снизу любым произведением $\alpha_1 \cdot \beta_1 \;\Rightarrow\; \exists \inf\{\alpha_2 \cdot \beta_2\}=\delta$.

По свойствам inf, $\alpha_1 \cdot \beta_1 \le \delta \le \alpha_2 \cdot \beta_2 \;\Rightarrow \delta$ - определяет $a \cdot b \Rightarrow$ существование доказано.

Докажем единственность. Пусть $\exists\, \delta_1, \delta_2,\; \delta_1 < \delta_2$ оба удовлетворяют определению $a \cdot b$

$\Rightarrow \alpha_1 \cdot \beta_1 \le \delta_1 < \delta_2 \le \alpha_2 \cdot \beta_2$.

По *лемме 2* $\exists\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \le \delta_1 < q_1 < q_2 < \delta_2 \le \alpha_2 \cdot \beta_2$.

Пусть $q_1-q_2=\varepsilon<0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 \cdot \beta_2-\alpha_1 \cdot \beta_1 > \varepsilon$.

Однако, $\alpha_2 \cdot \beta_2-\alpha_1 \cdot \beta_1 = \alpha_2(\beta_2-\beta_1)+\beta_2(\alpha_2-\alpha_1)$. Рассмотрим на числовой оси число (точку) $M \in \mathbb{Q}\;\; a \le M, b \le M$. Например, M -целая часть от *max(a,b)+1 (рис. 3.1).*

$M=b_0+1$ и можно рассмотреть $\alpha_2 \le M,\; \beta_2 \le M$.

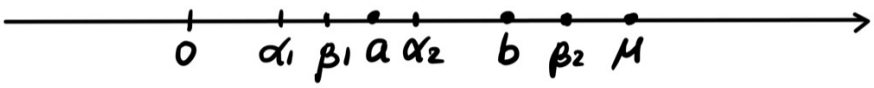


рис. 3.1

$\alpha_2 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \beta_1 \leq M(\beta_2 - \beta_1) + M(\alpha_2 - \alpha_1)$

Возьмем $\begin{cases} \beta_2 - \beta_1 < \frac{\varepsilon}{3M} \\ \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\varepsilon}{3M} \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \beta_1 \leq M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

$\Rightarrow a \cdot b$ - единственно $\Rightarrow$ лемма 4 доказана для $a > 0, b > 0$.

Если одно из чисел a, b равно 0, например, $a = 0$, то можно взять $\alpha_2 = \alpha_1 = 0 \Rightarrow$

$a \cdot b = 0 \cdot b = 0 \Rightarrow$ по определению существует и единственно $a \cdot b$ ■.

Лемма 5. Для $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, существует и единственно обратное число $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Доказательство:

Пусть $a > 0$, $0 < \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} \leq a^{-1} \leq \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\alpha_1}$

$\left\{\frac{1}{\alpha_2}\right\}$ – ограничено сверху $\forall$ числом b = $\frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \exists \sup\left\{\frac{1}{\alpha_2}\right\} = s$, и $\frac{1}{\alpha_2} \leq s \leq \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2$ s - удовлетворяет определению a^{-1}. Покажем единственность a.

Пусть $\exists\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{\alpha_2} \leq s_1 < s_2 \leq \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$: $\frac{1}{\alpha_2} \leq s_1 < r_1 < r_2 < s_2 \leq \frac{1}{\alpha_1}$

Пусть $r_2 - r_1 = c > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} > c$. Тогда можно выбрать $T \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$

$\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2} \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{T^2}$. Взяв $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \frac{cT^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \leq \frac{cT^2}{2T^2} = \frac{c}{2} < c$.

Итак, лемма 5 доказана полностью для положительного числа. Если $a < 0$, то по определению $a^{-1} = -|a|^{-1}$ ■.

Теорема 2. Введение правила сложения, умножения, сравнения вещественных чисел имеет 13 свойств: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

1) $a \leq b,\ b \leq c \ \Rightarrow a \leq c$ - транзитивность сравнения
2) $a + b = b + a$ - коммутативность сложения
3) $a + (b + c) = (a + b) + c$ - ассоциативность сложения
4) $a + 0 = a$ - нулевой элемент
5) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists!\ (-a)$ - противоположный по знаку элемент
6) $a \cdot b = b \cdot a$ - коммутативность умножения
7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ - ассоциативность умножения
8) $\exists\ 1 \in \mathbb{Q},\ a \cdot 1 = a$ - нейтральный элемент
9) $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists \frac{1}{a} = a^{-1}: a \cdot a^{-1} = 1$ - обратный элемент
10) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ - дистрибутивность умножения относительно сложения
11) $a \leq b, \forall c \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ a + c \ \leq b + c$
12) $a \leq b, \forall c > 0 \ \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
13) $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \ a < N$ - аксиома Архимеда

Доказательство:

1) Доказано ранее
2) $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2,$ удовлетворяющих (#), верно, что
   $\alpha_1 + \beta_1 \leq a + b \leq \alpha_2 + \beta_2$
   $\beta_1 + \alpha_1 \leq b + a \leq \beta_2 + \alpha_2$
   $a + b = b + a$
3) Аналогично
4) $0 = \beta_1 \leq 0 \leq 0 = \beta_2 \ \Rightarrow\ \alpha_1 + 0 \leq a + 0 \leq \alpha_2 + 0 \ \Rightarrow a + 0 = a$
5) $\alpha_1 \leq \alpha_2,\ \alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \ \Rightarrow\ -\alpha_2 \leq -a \leq -\alpha_1$
   $\alpha_1 - \alpha_2 \leq a + (-a) \leq \alpha_2 - \alpha_1 \ \Rightarrow 0$ подходит и в силу единственности суммы $a + (-a) = 0$
6) -9) доказываются аналогично свойствам 2-5

10) $\alpha_1 \leq a \leq\ \alpha_2,\ \ \beta_1 \leq b \leq \beta_2,\ \gamma_1 \leq c \leq \gamma_2$

    $\alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) \leq a(b + c) \leq \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2)$

    $\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 \leq ab + ac \leq \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2$

11) $a < b,\ c \in \mathbb{R}$

По лемме 2 $\exists\ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Q}\ \ a <\ \gamma_1 <\ \gamma_2 < b$

Можно взять $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2 \leq \gamma_1 <\ \gamma_2 \leq \beta_1 \leq b \leq \beta_2,$

Пусть $q_1 \leq c \leq q_2,\ q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$

$\alpha_1 + q_1 \leq a + c \leq \alpha_2 + q_2 < \beta_1 + q_1 \leq b + c \leq \beta_2 + q_2$

Достаточно так выбрать α_i, β_i, q_i $(i = 1,2)$, чтобы $\alpha_2 + q_2 < \beta_1 + q_1 \Leftrightarrow q_2 - q_1 < \beta_1 - \alpha_2$

Пусть α_2, β_1 уже выбраны, тогда $\beta_1 - \alpha_2 = d > 0$, то есть достаточно взять $q_2 - q_1 < d$

12) $c > 0,\ \gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{Q},\ \ \gamma_1 < c < \gamma_2$

Аналогично 11), $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2,\ \beta_1 \leq b \leq \beta_2$

Предположим, что $a > 0, b > 0,\ \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ i = 1,2$

$\alpha_1\gamma_1 \leq ac \leq \alpha_2\gamma_2 < \beta_1\gamma_1 \leq bc \leq \beta_2\gamma_2$

Достаточно подобрать $\alpha_2\gamma_2 < \beta_1\gamma_1$, то есть $\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 > 0$

$\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 = \gamma_1(\beta_1 - \alpha_2) - \alpha_2(\gamma_2 - \gamma_1) > 0 \Leftrightarrow (\gamma_2 - \gamma_1) < \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\beta_1 - \alpha_2)$

Достаточно взять $\gamma_2 - \gamma_1 < \frac{\Gamma}{M}(\beta_1 - \alpha_2) \leq \frac{\gamma_1}{\alpha_2}(\beta_1 - \alpha_2)$ (рис. 3.2)

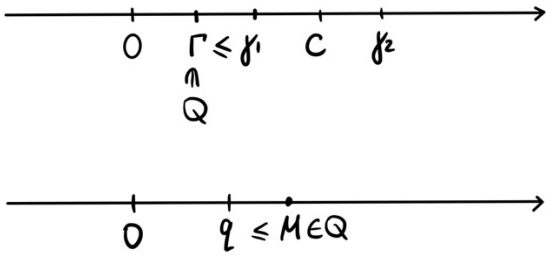


рис. 3.2

13) Аксиома Архимеда

$\forall a \in \mathbb{R},\ a = a_0, a_1 \ldots . a_n \ldots$

$|a| = a_0, a_1 \ldots . a_n \ldots$

$N = a_0 + 1 \in \mathbb{N}$ ■.

Лекция 4. Отображение и мощность множеств

Взаимно-однозначное отображение множеств

Опр. *Отображением* из множества A в множество B называется правило φ, по которому $\forall x \in A$ сопоставляют один элемент $y = \varphi(x) \in B$.

Опр. Отображение φ называется *инъективным,* если $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$. (рис. 3.1)

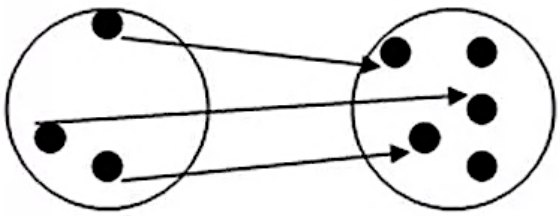


рис. 4.1 инъекция

Опр. Отображение φ называется *сюръективным,* если $\forall y \in B, \exists\, x \in A$: $\varphi(x) = y$. (рис. 3.2).

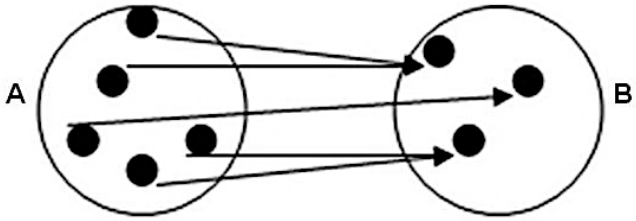


рис. 4.2 сюръекция

Опр. Отображение $\varphi: A \to B$ называется *взаимно-однозначным (биективным),* если оно инъективно и сюръективно. (рис. 3.3).

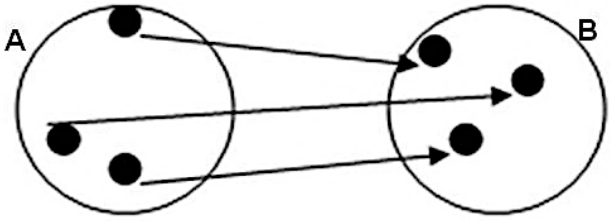


рис. 4.3 биекция

Если множества A и B конечны, то ∃ взаимно-однозначное отображение $\varphi: A \to B$ ⇔ количество элементов в них *одинаковое.*

Если множества A и B бесконечны ⇒ будем говорить, что A и B *эквивалентны* ⇔ ∃ взаимно-однозначное отображение $\varphi: A \to B$.

Если φ - взаимно-однозначное отображение, то $\exists\, \varphi^{-1}: B \to A$, $\varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = x, \forall x \in A$.

Мощность множества

<u>Опр.</u> Мощностью множества A называется математическая характеристика card(A) (или |A|), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $card(\emptyset) = 0$
2) A={1, 2, …, n}⇒ $card(A) = n$
3) $card(A) = card(B) \Leftrightarrow \exists\, \varphi: A \to B$ - взаимно-однозначное отображение
4) $card(A) \leq card(B)$, если $\exists\, \psi: A \to \psi(A) \subseteq B$, где $\psi: A \to \psi(A)$ - взаимно-однозначное отображение, $\psi(A) := \{y \in B | \exists\, x \in A,\ y = \psi(x)\}$. (рис.3.4).
   Если $\psi(A) = B \Rightarrow card(A) = card(B)$.

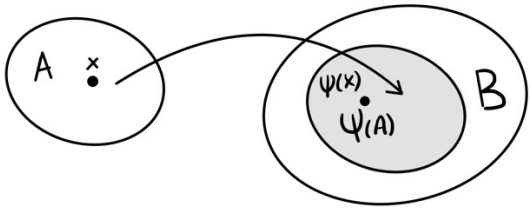


рис. 4.4 взаимно-однозначное отображение A в подмножество B

Замечание: $card(A) < card(B) \Leftrightarrow (card(A) \leq card(B)) \wedge (cardA) \neq card(B)$, то есть $\exists\, \psi: A \to C = \psi(A) \neq B$, но $\nexists\, \varphi: A \to B, \psi, \varphi$ - взаимно-однозначные.

Обозначения мощностей

$card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ - алеф-ноль

$card\big((0,1)\big) = card(\mathbb{R}) = C$- мощность континуум

Теорема Кантора. Множество мощностей (кардинальных чисел) бесконечно. В частности, $card(A) < card(P(A))$, где $P(A)$ - совокупность подмножеств в А, включая $\emptyset$ и А.

Доказательство:

[Пример] $A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{1\} = A\}, cardA = 1 < card\big(P(A)\big) = 2.$

В общем случае: $\forall A \neq \emptyset, B = P(A),\ \varphi: A \to B,\ \varphi(x) = \{x\} \subset A,\quad \varphi(A) \subset\neq B \Rightarrow cardA \leq card\big(P(A)\big)$. Покажем, что $cardA \neq cardB$. От противного: пусть $\exists\, \psi: A \to B$, ψ - взаимно-однозначное. Рассмотрим подмножество $M \subset B$, где $M = \{x \in A |\, x \notin \psi(x)\} \neq \emptyset$. $\emptyset \in P(A) \Rightarrow \exists\, x_0 \in A: \psi(x_0) > \emptyset \Rightarrow x_0 \in \psi(x_0) \neq \emptyset$.

$M \in P(A) = B, \exists!\, y \in A \Rightarrow \psi(y) = M.$

Если $y \in M \Rightarrow y \notin M = \psi(y)$. Если $y \notin M \Rightarrow y \in M = \psi(y)$ - противоречие из предположения о существовании взаимно-однозначного отображения из А в В ■.

Изоморфизм множеств с одинаковыми правилами и свойствами

Пусть А, В - множества, на которых заданы правила (сравнение, сложение, умножение), удовлетворяющие 13 свойствам, рассмотренными в лекции 2.

Опр. Будем говорить, что А и В с этими правилами и свойствами *изоморфны*, если:

1) $cardA = cardB$ и $\exists\, \varphi: A \to B$ - взаимно-однозначное
2) $\forall x, y \in A: x \leq y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$
3) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
4) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Опр. Будем говорить, что множество B с 3 правилами и 13 свойствами $(B, \leq, +, \cdot)$ является *расширением* множества $(A, \leq, +, \cdot)$, если $\exists\, \psi: A \to C \subset B$, где $\psi: A \to C$ определяет изоморфизм $\varphi: (A, \leq, +, \cdot) \to (C, \leq, +, \cdot)$, при этом множество C замкнуто в множестве C относительно операций умножения и сложения, то есть $\forall u, v \in C \Rightarrow$

$u + v \in C$, $u \cdot v \in C$.

Однако $(A, \leq, +, \cdot)$ *не изоморфно* $(B, \leq, +, \cdot)$.

Опр. $(A, \leq, +, \cdot)$ является *полным (неполным)* относительно этих 3 правил с 13 свойствами, если *не существует (существует)* его расширение относительно этих правил и свойств.

Сравнение мощностей множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

Лемма 6. $card(\mathbb{Q}) = \aleph_0 = card(\mathbb{N})$

Доказательство:

Зададим взаимно-однозначное отображение между $\gamma: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$q = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, НОД(m,n) = 1. Определим «высоту» $q: h(q) := |m| + n$ и пронумеруем все рациональные числа по высоте. Так:

$h(q)$	q
1	$0 = \frac{0}{1}$
2	-1, 1
3	$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$
…	…

Для ∀ значения h количество рациональных чисел $q, h(q) = h$ - конечно. Тогда нумеруя слева-направо, получим: $\varphi(0) = 1, \varphi(-1) = 2, \varphi(1) = 3 \ldots \Rightarrow \varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. ■

Поясним равенство $card\big((0,1)\big) = card(\mathbb{R}) = \mathrm{c}$. Рассмотрим функцию $f(x) = ctg(\pi x)$. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$.

Сравним $card(\mathbb{Q})$ и $card(\mathbb{R})$. Заметим, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{R}) = c$.

Лемма 7. $card(\mathbb{R}) = c \neq \aleph_0$

Доказательство:

Пусть $card(\mathbb{R}) = \aleph_0 = card\big((0,1)\big)$. Тогда множество (0, 1) можно занумеровать

$0, x_{11}x_{12} \ldots x_{1n} \ldots$
$0, x_{21}x_{22} \ldots x_{2n} \ldots$ = (0,1)
...

$0, x_{m1}x_{m2} \ldots x_{mn}$

Рассмотрим число $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_m \ldots$, где $b_k \notin \{0, 9, x_{kk}\}$, $b \in (0,1)$, но не содержится в списке этих элементов $\{x_m\}$. Если бы $b = x_l$, то $b_l = x_{ll}$, что запрещено по построению $\Rightarrow \aleph_0 < c$ ■.

Следствие: $(\mathbb{Q}, \leq, +, \cdot)$ и $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ не изоморфны $\Rightarrow (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ является расширением $(\mathbb{Q}, \leq, +, \cdot)$.

Теорема 2. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с 3 правилами: $\leq$, $+$, $\cdot$ и 13 свойствами, то есть арифметика вещественных чисел $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ является полной относительно этих правил и свойств. (без доказательства).

Замечание: множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ не является расширением $\mathbb{R}$, так как в нем нет правила сравнения.

Существует несколько подходов (моделей) построения множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Была рассмотрена модель, предложенная Вейерштрасса, как множество бесконечных десятичных дробей.

Аксиоматическое определение множества вещественных чисел с 3 правилами и 13 свойствами

Опр. *Множество вещественных чисел* — это множество, в котором введены 3 правила: сравнение, сложение и умножение, удовлетворяющие 13 свойствам, и которое является *полным* относительно этих правил и свойств.

Лекция 5. Последовательности вещественных чисел. Предел последовательности.

Последовательности. Понятие предела последовательности.

Опр. Последовательностью вещественных чисел называется любое отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $\forall n \in \mathbb{N}$ сопоставляют $x_n \in \mathbb{R}$:

$1 \to x_1$

$2 \to x_2$

…

$n \to x_n$

…

Обозначения: $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$, где x_n называется n-ым элементом последовательности.

[Примеры]

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
2) $\{n\} = \{1,2,3, \dots\}$
3) $\{\sin(n^2)\} = \{sin1, sin4, \dots\}$
4) $\left\{n^{(-1)^n}\right\} = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots\}$
5)

Ограниченные и неограниченные последовательности

Опр. Последовательность: $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \le a$$

Опр. Говорят, что $\{x_n\}$ *ограничена*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ *не ограничена сверху (снизу)*, если у нее нет верхней (нижней) границы.

В примерах:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена сверху, так как $\frac{1}{n} \leq 1$, ограничена снизу $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$
2) $\{n\}$ - не ограничена сверху
3) $\{\sin(n^2)\}$ - ограничена, -1$\leq \sin(n^2) \leq 1$
4) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ - не ограничена сверху, так как $2k^{(-1)^{2k}} = 2k$

Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б) последовательности

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \;\; |x_n| < \varepsilon$$

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\forall M > 0 \; \exists \; N = N(M) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \;\; |x_n| > M$$

В примерах:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ - б.м. $\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow \exists \; N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \;\varepsilon$
2) $\{n\}$ - б.б. $M > 0 \; \exists \; N = N(M) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, n > N > M$
3) $\{\sin(n^2)\}$ - не является ни б.б., ни б.б.
4) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ - не является б.б., так как не можем указать номер, начиная с которого все члены будут больше фиксированного М, аналогично не является б.м.

Опр. Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$, то говорят, что $\{x_n\}$ - *стационарная (постоянная)* $\Rightarrow$ ограничена.

Свойства б.м. и б.б. последовательностей

Лемма 1. Произведение огр. и б.м. последовательностей является б.м. последовательностью.

Доказательство:

Пусть задана $\{\alpha_n\}$ - б.м. и $\{u_n\}$ - огр., то есть

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \;\; |\alpha_n| < \varepsilon$ и

$\exists\, c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ \ |u_n| \le c.$

Рассмотрим последовательность $\{\alpha_n u_n\}$ - произведение $\{\alpha_n\}$ и $\{u_n\}$.

Возьмем $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c}$ для $\forall \varepsilon > 0\ \Rightarrow\ \exists\, N_1 = N(\tilde{\varepsilon})$ для $\forall n \in \mathbb{N}, n > N, |\alpha_n| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c}\ \Rightarrow$

$|\alpha_n u_n| = |\alpha_n|\,|u_n| < \frac{\varepsilon}{c}\, c = \varepsilon\ \Rightarrow\ \{\alpha_n u_n\}$ - б.м. ■.

Лемма 2. Пусть $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м. последовательности. Тогда $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ - б.м

Доказательство: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1\ \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N_2 = N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N_2\ \ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда, взяв $N \ge \max\{N_1, N_2\}$, получим $\forall\, n > N$ верно $|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■.

Замечание: если $\{\alpha_n\}$ - б.м., то для $\forall c \in \mathbb{R}\ \ \{c\alpha_n\}$ - б.м.

Связь между б.м. и б.б. последовательностями

Лемма 3. 1) Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ - б.б. Тогда $\{\frac{1}{\gamma_n}\}$ $(\gamma_n \ne 0)$ - б.м.

2) Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ - б.м., и $\alpha_n \ne 0$. Тогда $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ - б.б.

Доказательство:

1) $\forall M > 0\ \exists\, N = N(M) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ |\gamma_n| > M\ \Leftrightarrow\ \left|\frac{1}{\gamma_n}\right| < \frac{1}{M}$

   Если заранее взять для $\forall \varepsilon > 0$ число $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, то в итоге $\left|\frac{1}{\gamma_n}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon\ \Rightarrow \left\{\frac{1}{\gamma_n}\right\}$ - б.м.

2) $\forall M > 0$ и зададим $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0\ \Rightarrow \exists\, N = N(\varepsilon) = N(M) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ |\alpha_n| < \varepsilon = \frac{1}{M} \Leftrightarrow\ \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > M\ \Rightarrow \{\frac{1}{\alpha_n}\}$ - б.б. ■.

Предел последовательности

Опр. Число А называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N(\varepsilon) \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \;\; |x_n - A| < \; \varepsilon$$

Заметим, что если обозначить $x_n - A = \alpha_n$, то $\{\alpha_n\}$ - б.м.

Запись: $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Опр. Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися.*

В примерах 1-4:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Замечание: Последовательность $\{\alpha_n\}$ - б.м. $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Опр. Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$, если $\{\gamma_n\}$ - б.б.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$, если $\{z_n\}$ - б.б. и начиная с некоторого номера $z_n > 0$.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, если $\{u_n\}$ - б.б. и начиная с некоторого номера $z_n < 0$.

Иногда предел последовательности не существует. Например, $\{x_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1 \dots\}$, так как для $\forall$A $\exists$ $\varepsilon > 0$, что для $\forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n > N$: $|A - x_n| \geq \varepsilon$

Замечание: Последовательность $\{x_n\}$ имеет предел А $\Leftrightarrow x_n = A + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - б.м.

Теорема 1. *(о единственности предела последовательности)*

Всякая последовательность не может иметь более 1 предела.

Доказательство:

От противного. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B, \; A < B, \; B - A = \lambda > 0 \; \Rightarrow$ по определению предела для $\forall \varepsilon = \frac{\lambda}{3} > 0 \; \exists \; N_1(\varepsilon) \; \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \;\; |x_n - A| < \; \varepsilon = \frac{\lambda}{3} \;\; \Leftrightarrow \; A - \frac{\lambda}{3} < x_n < A + \frac{\lambda}{3}$

Аналогично, найдется такой номер $N_2(\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n > N_2$ $|x_n - B| < \varepsilon = \frac{\lambda}{3} \Leftrightarrow B - \frac{\lambda}{3} < x_n < B + \frac{\lambda}{3}$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, n > \max\{N_1, N_2\}$, что невозможно, так как

$(A - \frac{\lambda}{3};\ A + \frac{\lambda}{3}\ ) \cap (B - \frac{\lambda}{3};\ B + \frac{\lambda}{3}) = \emptyset$ (рис. 5.1) ■.

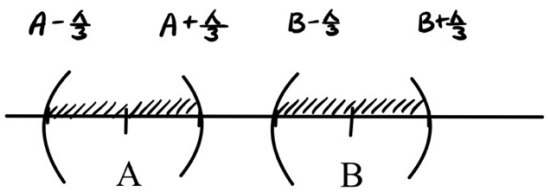


рис. 5.1 пересечение интервалов

Теорема 2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство:

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ $\Rightarrow$ для $\varepsilon = 1\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N$ $|x_n - A| < \varepsilon = 1 \Leftrightarrow A - 1 < x_n < A + 1$

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N, \dots\}$, то есть начиная с x_N все элементы последовательности лежат в интервале (A-1, A+1). Конечное число членов последовательности лежат за этим интервалом. Возьмем число $c = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |A-1|, |A+1|\} \Rightarrow |x_n| \le c$, то есть $\{x_n\}$ - ограничена ■.

Лемма 4. (*Отбрасывание членов последовательности*)

Пусть $\{x_n\}$последовательность. Свойства $\{x_n\}$ быть ограниченной (неограниченной), сходящейся к А, б.м. или б.б. сохраняются после удаления из нее любого конечного количества числа ее членов (с сохранением порядка нумерации оставшихся членов).

Доказательство:

1) Рассмотрим случай отбрасывания одного первого члена последовательности $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \Rightarrow \{\overline{x}_n\} = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n \dots\}$, где $\overline{x}_n = x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Пусть

$\{x_n\}$ -б.м., тогда $\varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ |x_n| < \varepsilon\ \ \Leftrightarrow |\overline{x}_{n-1}| < \varepsilon$, $\forall (n-1) = k > N - 1\ \Rightarrow \{\overline{x}_n\}$ - б.м.

2) Случай отбрасывания k первых членов также следует из предыдущих рассуждений.
3) Отбрасывания любых k членов $\{x_n\}$

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, \boldsymbol{x_{n_1}}, \dots \boldsymbol{x_{n_2}}, \dots, \boldsymbol{x_{n_m}} \dots\}$ чтобы отбросить выделенные члены, мы можем отбросить первые члены до $\boldsymbol{x_{n_m}}$ включительно, что справедливо из предыдущих рассуждений ■.

Лекция 6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход. Монотонность.

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B,\ A, B \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;
2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = AB$;
3) Если $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$

Доказательство:

1) Так как $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \ \Leftrightarrow\ x_n = A + \alpha_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \ \Leftrightarrow\ y_n = B + \beta_n \end{cases}$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – б. м. последовательности
$\Rightarrow x_n \pm y_n = (A \pm B) + (\alpha_n \pm \beta_n) \Leftrightarrow \exists\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$

2) $x_n y_n = (A + \alpha_n)(B + \beta_n) = AB + A\beta_n + B\alpha_n \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = AB$

3) Рассмотрим $\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha_n}{B+\beta_n} = \frac{B(A+\alpha_n)-A(B+\beta_n)}{y_n B} = \frac{BA+B\alpha_n-BA-A\beta_n}{y_n B} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n\right)$
$\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n$ – огр. Докажем, что $\frac{1}{y_n}$ - б.м. последовательность.
По условию $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ |y_n - B| <\ \varepsilon$.
Возьмем $\varepsilon = \frac{|B|}{2} \Rightarrow |y_n - B| < \frac{|B|}{2} \Rightarrow\ B - \frac{|B|}{2} < y_n < B + \frac{|B|}{2}$. Заметим, что и при $B > 0$, и при $B < 0$ $|y_n| > \frac{|B|}{2} \Rightarrow\ \left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|B|},\ \forall n,\ n > N\left(\frac{|B|}{2}\right)$
Рассмотрим $c = \max\left\{\left|\frac{1}{y_1}\right|, \dots, \left|\frac{1}{y_N}\right|, \frac{2}{|B|}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{y_n}\right| \le c$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – огр. $\Rightarrow\ \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{A}{B}\beta_n\right)$ есть огр. $\cdot$ б.м. $\Rightarrow$ б.м. $\Rightarrow\ \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} + \gamma_n$, где γ_n - б.м. ■.

Предельный переход в неравенствах для последовательностей

Теорема 3. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R}$, и $x_n \leq B,\ \forall x \in \mathbb{N}$. Тогда $A \leq B$.

Доказательство:

От обратного: пусть $B < A,\ \ A - B = \lambda > 0$ (рис. 6.1) $\Rightarrow |x_n - A| \geq \lambda$, что противоречит условию: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Альтернативное объяснение:

$|x_n - A| \geq \lambda$ противоречит $\forall \varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0\ \exists\ N = N\left(\frac{\lambda}{2}\right) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ |y_n - A| < \frac{\lambda}{2}$ ■.

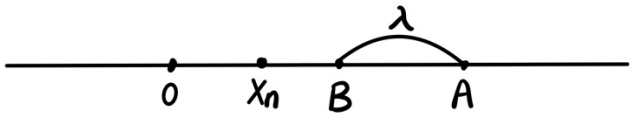


рис. 6.1 расположение на прямой

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, и $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \leq y_n$. Тогда $A \leq B$.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность $\{x_n - y_n\}\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A - B$. Кроме того, $x_n - y_n \leq 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \Rightarrow$ по теореме 3 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A - B \leq 0\ \ \Rightarrow\ \ A \leq B$ ■.

Теорема 4. *(Предельный переход в двойном неравенстве/ Теорема о двух эвольвентах (полицейских))*

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} y_n\ ,\ A \in \mathbb{R}$;

Пусть для последовательности $\{z_n\}$ верно, что $x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$;

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

По определению $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} \exists\, N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1\ \ |x_n - A| < \varepsilon \\ \exists\, N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N_2\ \ |y_n - A| < \varepsilon \end{cases}$

Возьмем $N \geq \max\{N_1, N2\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \begin{cases} |x_n - A| < \varepsilon \\ |y_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \\ A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow A - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < A + \varepsilon \Rightarrow |z_n - A| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ ■.

Расширенная числовая ось. Понятие -окрестностей конечных и бесконечных точек.

Представим бесконечную числовую ось вещественных чисел. Добавим к ней еще 2 точки: $+\infty$ и $-\infty$ (рис. 6.2). Теперь согнем ось, соединив $+\infty$ и $-\infty$ в ∞ (рис. 6.3).

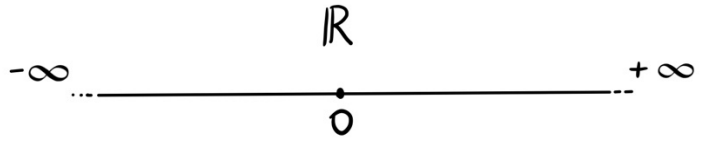


рис. 6.2 бесконечная ось с 2 дополнительными точками

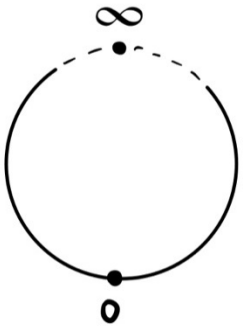


рис. 6.3 согнутая ось

Опр. Для $\varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$ *ε-окрестностью* точки a называется множество

$U_\varepsilon(a) \coloneqq (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ *(рис. 6.4).*

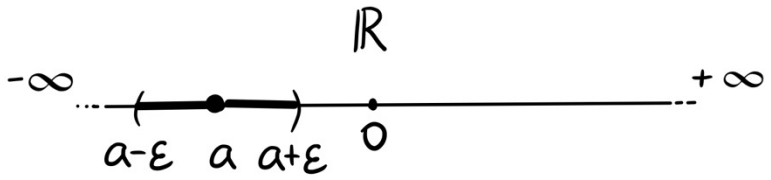


рис. 6.4 эпсилон-окрестность точки a

Аналогично определены $U_\varepsilon(-\infty) \coloneqq (-\infty; -\varepsilon)$ и $U_\varepsilon(+\infty) \coloneqq (+\infty; \varepsilon)$.

В терминах введенных -окрестностей дадим общее определение последовательности.

Опр. Число A (конечное, или $+\infty$, или $-\infty$) называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ x_n \in U_\varepsilon(A)$.

Монотонные последовательности и их свойства

Опр. Говорят, что $\{x_n\}$ *не убывает*, если $x_n \leq x_{n+1}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{x_n\}$ не возрастает, если $x_n \geq x_{n+1}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

В обоих случаях $\{x_n\}$ называется *монотонной*.

Опр. Говорят, что $\{x_n\}$ возрастает (убывает), если для $\forall n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) для $\forall n \in \mathbb{N}$ в обоих случаях $\{x_n\}$ называется *строго монотонной*.

Замечание: строго монотонная последовательность всегда является монотонной.

[Примеры]

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ - убывает
2) $\{y_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n^2}\right\}$ - возрастает
3) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \{b_n\} = \left\{\frac{1}{n^3}\right\} \Rightarrow a_n > b_n$ для $n > 1$

Однако, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то есть строгое неравенство при переходе к пределу становится равенством.

Теорема 5. Всякая монотонная ограниченная последовательность является сходящейся, то есть имеет конечный предел.

В частности, если последовательность $\{x_n\}$ не убывает (или возрастает) и ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

Если же последовательность $\{y_n\}$ не возрастает (или убывает) и ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}$.

Замечание: всякая монотонная последовательность автоматически ограничена с одной стороны.

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху (остальные случаи доказываются аналогично). Итак, $x_n \le x_{n+1}$, и $\exists M\colon\ x_n \le M, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \sup\{x_n\} = A$. Покажем, что A= $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. По определению sup:

1) $x_n \le A$
2) Для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_{n_0} \in \{x_n\}\ A - \varepsilon < x_{n_0} \le A$

Из условия неубывания $\{x_n\} \Rightarrow \forall n\colon n \ge n_0$ верно $A - \varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le A$ (рис. 6.5) $\Rightarrow \forall n\colon n \ge n_0\ |x_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ ■.

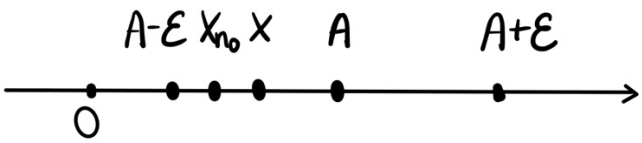


рис. 6.5 расположение точек на прямой

Лекция 7. Число Эйлера. Предельные точки множества и последовательности

Число e как предел монотонной ограниченной последовательности

Теорема 6. Последовательность $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Ее предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ - в честь Л. Эйлера (1707-1783).

Доказательство:

Сначала докажем вспомогательное утверждения:

1) *Формула Бинома Ньютона*: для $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ верно $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$, где $C_k^n := \frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_1^0 = 1,\ C_n^n = 1$.

Используем метод математической индукции:

<u>База индукции</u> n=1: $a + b = a + b$ - верно

<u>Шаг индукции</u>: если формула верна для некоторого n, то она верна и для n+1.

Тогда по принципу мат. индукции формула верна для $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}\right)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} = \left\{\begin{matrix} m = k+1 - \text{для первой суммы} \\ m = k - \text{для второй суммы} \end{matrix}\right\} \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} a^m b^{n+1-m} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n+1-m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) a^m b^{n+1-m} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^0 a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} C_n^m a^m b^{n+1-m} \ \blacksquare.
\end{aligned}
$$

Тогда по биному Ньютона

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-x+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} \quad (*)$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}$$

$\Rightarrow x_n < x_{n+1}$, то есть x_n - возрастает.

Покажем, что $\{x_n\}$ ограничена сверху. $x_n = (*) < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k-1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$

$\Rightarrow 2 \le x_n < 3, \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ ■.

Лемма. Число e является иррациональным.

Доказательство:

Из (*) получаем, что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!} = y_n \qquad (1)$$

Зададим $\forall k \in \mathbb{N}$ и возьмем $n > k$: $x_n < 2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$

Перейдем к пределу при n → ∞: $e \ge 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k$

$\{y_n\}$- возрастает $\Rightarrow$

$$y_n < e \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим: $e \le \sup\{y_n\} \le e \;\Rightarrow\; \sup\{y_n\} = e$, то есть $y_n \to e$, n → ∞.

Оценим разность $e - y_n$. Для этого оценим $y_{n+m} - y_n, m \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+m)}\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!})\,(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{n-1}} \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!}
\end{aligned}
$$

Итак, $y_{n+m} - y_n < \frac{n+2}{(n+1)^2 n!}$. Перейдем к пределу при , $m \to \infty$:

$$
e - y_n \le \frac{n+2}{n!\,(n+1)^2} < \left((n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n(n+2)\right) < \frac{1}{n!\,n}
$$

Итак, $0 < e - y_n < \frac{1}{n!n} \;\Rightarrow \exists\theta,\ 0 < \theta < 1 : e - y_n = \frac{\theta}{n!n} \;\Rightarrow e = y_n + \frac{\theta}{n!n}$

Пусть $e = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \frac{k}{m} = 2 + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$

Пусть $n > m :\; \frac{kn!n}{m} = n!\,n\left(2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \theta \;\Rightarrow\; \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \theta \;\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ■.

Приближенное вычисление числа e дают: $e \approx 2{,}718281828459045 \dots$

Предельные точки множества и последовательности

<u>Опр.1</u> Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной для множества* A ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$), если для $\forall\varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(a)\ \exists\, x \in A,\ x \neq a$ то есть $A \cap (U_\varepsilon(a)\backslash\{a\}) \neq \emptyset$

Обозначение: $U_\varepsilon(a)\backslash\{a\} = U_\varepsilon(a)$ - называется *проколотой окрестностью* точки a.

<u>Опр.2</u> Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной для множества* A ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$), если в $\forall$-окрестности содержится бесконечно много из A.

Лемма. Опр.1 и Опр.2 эквивалентны.

Доказательство:

1⇒ 2: рассмотрим последовательность $\varepsilon_k \to 0$. Для ε_1 $\exists a_1 \in A \cap (U_{\varepsilon_1}(a)\backslash\{a\})$ (рис. 7.1).

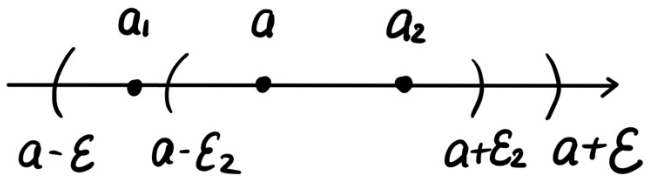


рис. 7.1 расположение точек последовательности на прямой

$\varepsilon_2 \leq |a - a_1| \;\Rightarrow\; \exists\, a_2 \in A \cap (U_{\varepsilon_2}(a)\backslash\{a\})$

$\varepsilon_3 \leq |a - a_2| \;\Rightarrow\; \exists\, a_3 \in A \cap (U_{\varepsilon_3}(a)\backslash\{a\})$ и т.д.

2 ⇒ 1: очевидно ■.

[Примеры]

1) *A = {0,1,2}* - нет предельных точек
2) *A = (0;1)* - $\forall x \in [0; 1]$ является предельной точкой для A

Замечание: предельная точка может принадлежать или нет множеству A.

<u>Опр1.</u> Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной для последовательности* $\{x_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(a)$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

<u>Опр2.</u> Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной для последовательности* $\{x_n\}$, если существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, что $x_{n_k} \to a, k \to \infty$.

<u>Опр.</u> Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью* $\{x_{n_k}\}$, если

$x_{n_k} \in \{x_{n_k}\}$ и $n_k < n_{k+1}$.

Замечание: предельные точки последовательности $\{x_n\}$ называют ее *частичными пределами.*

[Примеры]

1) $\{x_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$
   У множества {1, -1} нет предельных точек. Однако 1 и -1 являются предельными точками этой последовательности.
   $\{x_{2k}\} \to -1$ стационарная последовательность $x_{2k} = -1$
   $\{x_{2k-1}\} \to 1$ стационарная последовательность $x_{2k-1} = 1$

У последовательности может быть даже *континуум предельных точек.*

2) $\{z_n\} = \mathbb{Q} \cap (0; 1)$, то есть $\{z_n\}$ состоит из всех рациональных чисел интервала $(0; 1)$. Все рациональные числа в $(0; 1)$ занумеруем по возрастанию знаменателя, а числа с равными знаменателями - по их возрастанию.
   $\Rightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{6} \dots .\}$
   Можно показать, что $\forall$ вещественное число $\alpha = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots . \in [0; 1]$ является частичным пределом этой последовательности. Ясно, что $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$, а любое из чисел вида $0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ содержится в данное последовательности.
   Например, возьмем $\frac{1}{e} \approx 0{,}3678 \dots$. Рассмотрим 0,3 = x_{39}, так как
   $1 + 2 + \dots + 8 + 3 = \frac{8(8+1)}{2} + 3 = 39.$

Лекция 8. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательности.

Вернемся к примеру из предыдущей лекции.

$\{z_n\} = \mathbb{Q} \cap (0;1)$, то есть $\{z_n\}$ состоит из всех рациональных чисел интервала $(0;1)$. Все рациональные числа в $(0;1)$ занумеруем по возрастанию знаменателя, а числа с равными знаменателями - по их возрастанию.

$$\Rightarrow \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{6} \dots.\}$$

Можно показать, что $\forall$ вещественное число $\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2 \dots. \in [0;1]$ является частичным пределом этой последовательности. Ясно, что $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} 0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$, а любое из чисел вида $0,\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ содержится в данное последовательности.

Например, возьмем $\frac{1}{e} \approx 0{,}3678 \dots$. Рассмотрим 0,3 = $x_{n_1} = x_{39}$, так как$1 + 2 + \dots + 8 + 3 = \frac{8(8+1)}{2} + 3 = 39$.

0,36 = $x_{n_2} = x_{285}$

0,367 = $x_{n_3} = x_{48868}$

$\dots \Rightarrow \{x_{n_k}\} \to \frac{1}{e}, \ x \to \infty$

Теорема 7. *(Больцано-Вейерштрассе)*

У всякой ограниченной последовательности существует хотя бы одна предельная точка.

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$, $A \le x_n \le B$. Разделим отрезок [A;B] пополам и выберем ту половину, где существует бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Обозначим ее $[A_1; B_1]$. Затем разделим $[A_1; B_1]$ пополам и снова выберем половину, где бесконечно много членов $\{x_n\}$, это будет $[A_2; B_2]$, и так далее.

Получим счетное множество отрезков $\{[A_n; B_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, обладающее свойствами:

1) $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n} \to 0,\ n \to \infty$
2) $[A_{n+1}; B_{n+1}] \subset [A_n; B_n]$
3) В $\forall [A_n; B_n]$ бесконечно много членов $\{x_n\}$
4) $B_{n+1} \le B_n \Rightarrow \{B_n\}$ не возрастает и ограничена снизу числом A
5) $A_{n+1} \ge A_n \Rightarrow \{A_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом B

$\Rightarrow \{B_n\}$ имеет $\inf\{B_n\} = \gamma_1 \ge A$; $\{A_n\}$ имеет $\sup\{A_n\} = \gamma_2 \le B$.

Покажем, что $\gamma_1 = \gamma_2$. Пусть $\gamma_2 < \gamma_1 \ \Rightarrow\ \gamma_1 - \gamma_2 = d > 0$

$A_n < B_n;\ \sup\{A_n\} \le \inf\{B_n\}\ ;\ \gamma_2 \le \gamma_1$

По построению $[\gamma_2; \gamma_1] \subseteq [A_n; B_n]$, так как $A_n \le \gamma_2 < \gamma_1 \le B_n,\ n \in \mathbb{N}\ \Rightarrow B_n - A_n \ge d$

$\Rightarrow$ противоречие с тем, что $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n} \to 0$.

Для достаточно большого n $B_n - A_n < d \ \Rightarrow\ \gamma_1 = \gamma_2 = c \ \Rightarrow\ c \in \bigcap_n^\infty [A_n; B_n]$ (рис. 8.1).

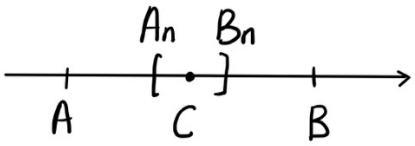


рис. 8.1 стягивающиеся отрезки [A;B]

Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, $x_{n_k} \to c,\ k \to \infty$.

Для этого в $\forall [A_n; B_n]$ выберем по одному члену последовательности $\{x_n\}$. Если $x_{n_1} \in [A_1; B_1]$, то из $\in [A_2; B_2]$ выберем x_{n_2} так, чтобы $n_2 > n_1$. Так как в $\in [A_k; B_k]$ бесконечно многочленов $\{x_n\}$, то всегда существует в нем член с бóльшим номером.

Если $x_{n_k} \in [A_k; B_k]$, то $\exists\, x_{n_{(k+1)}} \in [A_{k+1}; B_{k+1}],\ n_{k+1} > n_k \ \Rightarrow$ построили подпоследовательность x_{n_k}: $|x_{n_k} - c| \le B_k - A_k = \frac{B-A}{2^k} \to 0 \ \Rightarrow\ x_{n_k} \to c,\ k \to \infty$, то есть c - предельная точка, или частичный предел последовательности $\{x_n\}$ ■.

Следствие.Пусть задано бесконечное множество М, которое ограничено, то есть $\forall x \in M$ верно:

$A \leq x \leq B$. Тогда существует предельная точка $c \in [A; B]$ для М.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7. Строится система вложенных отрезков $\{[A_n; B_n]\}$, в $\forall [A_n; B_n]$ бесконечно много элементов М. $B_n - A_n = \frac{B-A}{2^n} \to 0$, $n \to \infty$; $[A_{n+1}; B_{n+1}] \subset [A_n; B_n]$ и так далее.

Верхний и нижний предел последовательности

Опр. Число $\overline{x}$ называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$, если $\overline{x}$ - наибольший из ее частичных пределов. Аналогично, *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$ называют наименьший из ее частичных пределов $\underline{x}$.

Обозначения: $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$

Теорема 8. У всякой *ограниченной* последовательности $\{x_n\}$

1) существует верхний и нижний пределы $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ и $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ и

2) для $\forall \varepsilon > 0$ вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon;\ \overline{x} + \varepsilon)$ содержится не более конечного числа членов $\{x_n\}$.

Доказательство:

Пусть $A \leq x_n \leq B,\ \forall n \in \mathbb{N}$. По *теореме 7* существует предельная точка $c \in [A; B]$ для $\{x_n\} \Rightarrow$ множество предельных точек П не пусто $\Pi \neq \emptyset$ и П ограничено, то есть $\forall x \in \Pi \Rightarrow A \leq x \leq B$. Тогда $\exists\ \sup\Pi = \overline{x}$, $\exists\ inf\Pi = \underline{x}$. Покажем, что $\overline{x}$ - верхний, а $\underline{x}$ - нижний пределы $\{x_n\}$.

Рассмотрим $\overline{x}$ и покажем, что $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$. По определению sup

1) $\forall x \in \Pi,\ x \leq \overline{x}$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in \Pi,\ \overline{x} - \varepsilon < y < \overline{x}$

Для $\forall\delta > 0,\ 0 < \delta < y - (\overline{x} - \varepsilon)$ и рассмотрим $U_\delta(y)$ (рис. 8.2).

$U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(\overline{x})$ так как $y \in \Pi$ то в $U_\delta(y)$ - бесконечно много членов $\{x_n\} \Rightarrow$ в $U_\varepsilon(\overline{x})$ бесконечно много членов $\{x_n\} \Rightarrow \overline{x}$ - предельная точка для $\{x_n\}$. Аналогично доказывается, что $inf\Pi = \underline{x}$ тоже является предельной точкой для $\{x_n\}$.

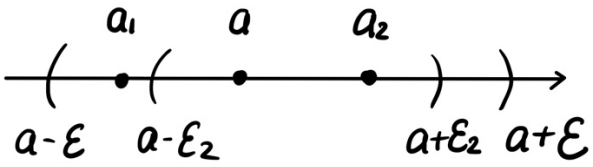


рис. 8.2 расположение предельных точек и окрестностей

$\overline{x}, \underline{x} \in \Pi$ (рис. 8. 3).

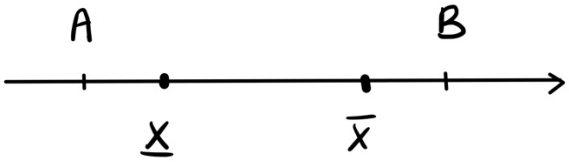


рис. 8.3 расположение supП и infП

Покажем, что $\overline{x}$ - наибольшая из предельных точек $\{x_n\}$. От обратного: пусть $\exists\ b \in \Pi$, $b > \overline{x}$. Это невозможно, так как $\overline{x} = sup\Pi$. Аналогично, $\underline{x}$ - наименьшая предельная точка $\Rightarrow$ *:* $\overline{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, $\underline{x} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Покажем теперь, что для $\forall\varepsilon > 0$ вне $(\underline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon)$ находится не более конченого числа членов $\{x_n\}$. Пусть $\overline{x} + \varepsilon < B$. Покажем, что на $[\overline{x} + \varepsilon; B]$ не более конечного числа членов $\{x_n\}$. От противного: пусть на $[\overline{x} + \varepsilon; B]$бесконечно много членов $\{x_n\} \Rightarrow$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subseteq [\overline{x} + \varepsilon; B]$. Тогда $\{x_{n_k}\}$ - ограничена и по *теореме 7* для нее существует предельная точка $c \in [\overline{x} + \varepsilon; B]$. Легко проверить, что предельная точка подпоследовательности является и предельной точкой самой последовательности $\Rightarrow c \in \Pi$. Это невозможно, так как $c > \overline{x} = sup\Pi$.

Аналогично можно показать, что для $\forall\varepsilon > 0$ на$[A;\ \underline{x} - \varepsilon]$ не более конечного числа членов $\{x_n\}$.

Пусть, например, наибольший из номеров n таких, что $x_n \in [\overline{x} + \varepsilon; B]$ равен $N_1(\varepsilon)$.

Пусть $N_2(\varepsilon)$ - наибольший из номеров n таких, что $x_n \in [A;\ \underline{x} - \varepsilon]$ (рис. 8.4).

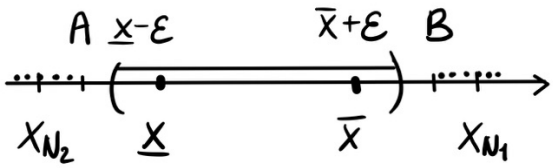


рис. 8.4 расположение членов с номерами N1 и N2

Тогда $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$, то для $\forall n, n > N\ x_n \in (\underline{x} - \varepsilon; \overline{x} + \varepsilon)$ ■.

Следствие. Пусть задано бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, ограниченное сверху и снизу

$\forall x \in M\ A \leq x \leq B$. Тогда множество предельных точек M не пусто, в нем существуют наибольшая и наименьшая предельные точки. Кроме того, для $\forall \varepsilon > 0$ вне $(\underline{m} - \varepsilon; \overline{m} + \varepsilon)$ лежит не более конечного числа точек из M. Здесь $\underline{m}, \overline{m}$ - наименьшая и наибольшая предельные точки M.

Бесконечные предельные точки множества и последовательности

Пусть $\{x_n\}$ - не ограничена сверху $\Rightarrow\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists x_n > N$, то есть $\exists\, x_{n_N} > N$, то есть $\exists$ подпоследовательность $x_{n_N} \to +\infty$, $N \to \infty$. В этом случае говорят, что $+\infty -$ предельная точка $\{x_n\}$ - верхний предел. Аналогично, если $\{x_n\}$ - не ограничена снизу, то $\exists\, x_{n_m} \to -\infty, m \to \infty$ и $-\infty -$ предельная точка $\{x_n\}$ - нижний предел.

Лекция 9. Фундаментальные последовательности, критерий Коши. Функция одной вещественной переменной. Предел функции.

Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* (последовательностью Коши), $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n, n > N, \forall m \in \mathbb{N} \ |x_n - x_{n+m}| < \varepsilon$

Отрицание фундаментальности: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}: \ \exists n, n > N, \exists m \in \mathbb{N} \ |x_n - x_{n+m}| \geq \varepsilon$

[Примеры]

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n, n > N, \forall m \in \mathbb{N} \ |x_n - x_{n+m}| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+m)^2}\right| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$n^2 \geq \frac{1}{[\varepsilon]+1} \Longrightarrow \{x_n\}$ –фундаментальна

2) $\{y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}$

$$|x_n - x_{n+m}| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m} = \{m = n\} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N, \exists \, m = n \ |y_n - y_{n+m}| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

$\Longrightarrow \{y_n\}$ – не фундаментальна

Свойства фундаментальных последовательностей

1) $\forall$ фундаментальная $\{x_n\}$ ограничена

Доказательство:

Возьмем $\varepsilon = 1$ $\exists N = N(1) \in \mathbb{N}$: $\forall n, n_0 > N, \forall m \in \mathbb{N}$ $\left|x_{n_0} - x_{n_0+m}\right| < 1 \Longrightarrow x_{n_0} - 1 < x_{n_0+m} < x_{n_0} + 1 \Longrightarrow \left|x_{n_0+m}\right| \leq \max\{\left|x_{n_0} - 1\right|, \left|x_{n_0+m} + 1\right|\}$

Тогда для $M \geq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, \left|x_{n_0} - 1\right|, \left|x_{n_0+m} + 1\right|\}$ $\Longrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq M$ $\Longrightarrow \{x_n\}$ ограничена.

2) У всякой фундаментальной последовательности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, x_{N+m} \in U_\varepsilon(x_N)$

Доказательство следует из определения.

Критерий ($\Leftrightarrow$) какого-либо свойства А в математике называется необходимое и достаточное условие выполнения этого свойства А.

(А) $\Longrightarrow$ необходимое условие

Достаточное условие $\Longrightarrow$ (А) ■.

Теорема 9. *(Критерий Коши сходимости последовательности)*

Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, то есть

$$\{x_n\} \text{ сходится} \Leftrightarrow \text{фундаментальна}$$

Доказательство:

<u>*Необходимость*</u>. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Покажем, что тогда $\{x_n\}$ фундаментальна.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$: $\forall n, n > N, \forall m \in \mathbb{N}$ $|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $|x_n - x_{n+m}| \leq |x_n - A| + |A - x_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\Longrightarrow \{x_n\}$ - фундаментальная.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна $\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ - ограничена $\Longrightarrow$ $\exists\{x_{n_k}\}$ подпоследовательность, которая имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = A$. Покажем, что $x_n \to A$. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна для $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$: $\forall n, n > N_1, \forall m \in \mathbb{N}$ $|x_n - x_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для этого же $\varepsilon > 0$ $\exists\, N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall k, k > N_2 \Longrightarrow n_k \geq k > N_2$ $\left|x_{n_k} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда для $\forall n, n > N_1$ рассмотрим $|x_n - A|$.

$|x_n - A| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - A\right| < \varepsilon \Longrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ при $n_k \geq k > N_1$ и $n_k \geq k > N_2$ $k > \max\{N_1, N_2\}$ ■.

Функция одной переменной. Понятие предела функции.

Опр. Говорят, что на множестве $D \subseteq \mathbb{R}$ определена функция f: D $\to$ $\mathbb{R}$, если для $\forall x \in D$ по правилу f сопоставляется число $f(x) \in \mathbb{R}$ называется образом точки x при действии f. $E = E_f \coloneqq \{y \in \mathbb{R} |\ \exists\, x \in D, f(x) = y\}$ - область значений f.

D - область определения f.

Способы задания функций:

1) *Аналитический* - формулой
   $f(x) = sinx, f(x) = x^3$ ...

2) *Табличный* - для случая, когда D конечно

$x \in D$	*a*	*b*	...
f(x)	*f(a)*	*f(b)*	...

3) *Графический*
   График в декартовой системе координат

Предел функции

Пусть точка a является предельной для области D_f определения f.

Опр. (*По Коши*) Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* при x $\to a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a) \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

Замечание: $x \in D_f \cap U_\delta^0(a) \Leftrightarrow x \in D_f$ и $0 < |x - a| < \delta$ то есть проколотая окрестность

Опр. (*По Гейне*) Число A называется *пределом функции* f при x $\to a$, если для $\forall\, \{x_n\}$, $x_n \in D_f,\; x_n \to a,\; x_n \neq a \;\Longrightarrow\; f(x_n) \to A,\; n \to \infty$

Лемма. Два определения предела функции по коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство:

Коши $\Longrightarrow$ Гейне. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ выполнено по Коши. Рассмотрим $\forall x_n \to a,\; x_n \in D_f,\; x_n \neq a$. По определению по Коши

для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D_f \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$.

Для $\delta > 0 \;\; \exists\, N(\delta) \in \mathbb{N}\; \forall n,\; n > N\; 0 < |x_n - a| < \delta\; |f(x) - A| < \varepsilon \;\Longrightarrow f(x_n) \to A, n \to \infty$, то есть выполнено определение по Гейне.

Гейне $\Longrightarrow$ Коши. Пусть выполнено определение предела по Гейне, но не выполнено по Коши. Тогда $\exists\; \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists\; x = x_\delta \in D_f,\; 0 < |x_\delta - a| < \delta \;\; |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$

Рассмотрим последовательность $\delta_k = \frac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty \Longrightarrow$

$\forall k \;\; \exists x_k \in D_f,\; 0 < |x_k - a| < \delta_k = \frac{1}{k} \;\; |f(x_k) - A| \geq \; \varepsilon_0$. Тогда заметим, что $\{x_k\} \to a$, $k \to \infty$, но $f(x_k) \nrightarrow A,\; k \to \infty$. Противоречие■.

Односторонние пределы

Опр. (*По Коши*) Число A называется *пределом* $f(x)$ при $x \to a \pm 0$ (x стремится к a справа (слева), если для

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D_f \; a < x < a + \delta \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$

Опр. (*По Гейне*) Число A называется *пределом* $f(x)$ при x стремящемся к a справа (слева), если для $\forall\{x_n\},\ x_n \in D_f,\ x_n \to a,\ n \to \infty,\ x_n > a\ (x_n < a)$ будет верно, что $f(x_n) \to A,\ n \to \infty$.

Иллюстрации (рис. 9.1 и рис. 9.2):

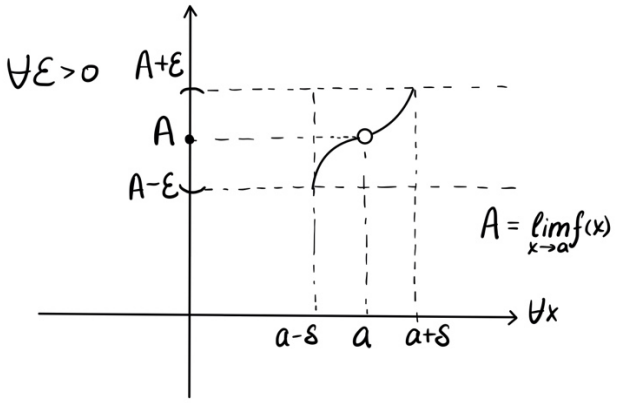


рис. 9.1.

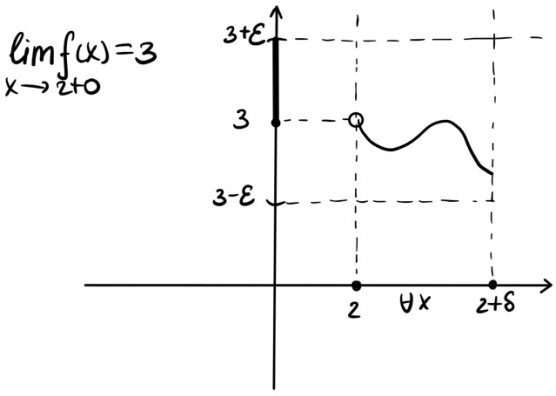


рис. 9.2.

Лекция 10. Критерий Коши. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Бесконечные пределы и пределы на бесконечности

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$
3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Сформулируем утверждения примеров 2) и 4):

2)По Коши.

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D_f \; 0 < |x-a| < \delta \;\; |f(x)| > \varepsilon$ (рис. 10.1)

По Гейне.

для $\forall\, \{x_n\},\; x_n \in D_f,\; x_n \to a,\; x_n \neq a \;\Longrightarrow\; f(x_n) \to \infty,\; n \to \infty$

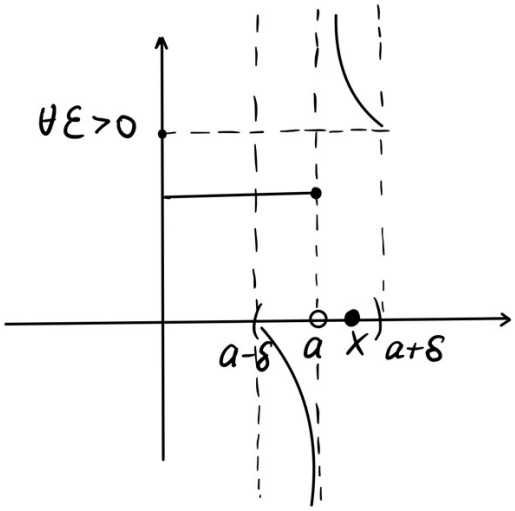


рис. 10.1.

3)По Коши.

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D_f \; 0 < |x-a| < \delta \;\; f(x) < -\varepsilon$

По Гейне.

для $\forall\ \{x_n\},\ x_n \in D_f,\ x_n \to +\infty \Longrightarrow\ f(x_n) \to -\infty,\ n \to \infty$

Теорема 1. (*О единственности предела функции*)

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то A=B.

Доказательство:

$\forall\ \{x_n\},\ x_n \in D_f,\ x_n \to a,\ x_n \neq a\ \Longrightarrow \begin{cases} f(x_n) \to A \\ f(x_n) \to B \end{cases},\ n \to \infty \Longrightarrow$ по теореме о единственности предела последовательности A=B ■.

<u>Опр.</u> (*Общее определение предела функции в терминах окрестностей*)

Число A (конечное, или $+\infty, -\infty, \infty$), если (и только если) для

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in D_f\ \ x \in U_\delta^0(a)\ \ f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Заметим, что для $a = +\infty, -\infty, \infty\ \ U_\delta^0(a)\ =\in U_\delta(a)$

Теорема 2. *(Критерий Коши существования конечного предела функции)*

Для того, чтобы $\exists \lim\limits_{x\to a}\ f(x)$ - конечный предел необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x_1, x_2 \in U_\delta^0\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Таким образом,

$$\exists \lim_{x\to a}\ f(x) = A < \infty\ \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x_1, x_2 \in U_\delta^0(a)\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Доказательство:

<u>*Необходимость.*</u> Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a}\ f(x) = A \in \mathbb{R}$.

По определению $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0\ \ \forall x \in U_\delta^0(a)\ \ |f(x) - A| < \varepsilon/2$.

Возьмем $\forall x_1, x_2 \in U_\delta^0\ \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ |$

<u>*Достаточность.*</u> Пусть выполнено условие Коши.

Рассмотрим $\forall\{x_n\}$: $x_n \in D_f,\ x_n \to a,\ n \to \infty, x_n \neq a$. Из условия Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x_1, x_2 \in D_f \cap U_\delta^0(a)\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Для $\{x_n\}$ $\exists\, N(\delta) \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ \ x_n \in U_\delta^0(a)\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ \ x_{n+m} \in U_\delta^0(a)\ \ |f(x_n) - f(x_{n+m})| < \varepsilon \implies \{f(x_n)\}$ - фундаментальна $\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\forall$ другую последовательность $\{y_n\}$: $y_n \in D_f,\ y_n \to a,\ n \to \infty, y_n \neq a$

$\implies$ аналогично заключим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B \in \mathbb{R}$. Покажем, что A=B.

Рассмотрим последовательность $\{z_m\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots\}; x_{2k} = y_k, z_{2k-1} = x_k \implies z_m \to a,\ z_m \in D_f, z_m \neq a \implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = C$.

Заметим, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - подпоследовательности последовательности $\{z_n\}$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = C \implies A = B = C \implies \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = C \in \mathbb{R}$ ■.

Аналогично критерий Коши формулируется и доказывается для односторонних пределов.

Например, для того чтобы $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ - конечный $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x_1, x_2 \in U_\delta^0(a)\ x_i < a\ (i = 1,2)\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Связь односторонних пределов и обычного предела f(x)

Пусть f(x) в некоторой проколотой окрестности $U_r^0(a) = (a - r;\ a) \cup (a; a + r),\ r > 0$.

Лемма. Для того, чтобы $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) =$ A, необходимо и достаточно, чтобы

$\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) := f(a - 0),\qquad \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) := f(a + 0)$ и $f(a - 0) = f(a + 0)$

Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б) функции вблизи т. *a*

Опр. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* вблизи точки *a,* если $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ (точка a - конечная или бесконечная).

Опр. Функция $\gamma(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если $\exists \lim\limits_{x\to a} \gamma(x) = \infty$

Опр. Говорят, что функция f(x) о*граничена* при $x \to a$, если $\exists\, \delta > 0$: $\exists M > 0\ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a)\ \Rightarrow |f(x)| \le M$.

Теорема 3. Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \to a$ (точка a - конечная или бесконечная), $\gamma(x)$ - ограничена при $x \to a$.

Тогда $\alpha(x) \pm \beta(x),\ \ \alpha(x)\,\beta(x)$, а также (при $\beta(x) \ne 0\ \ \forall x \in U_\delta^0(a)$) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ - являются б.м. при $x \to a$.

Связь между б.б. и б.м. функциями

Лемма.

1) Пусть $\alpha(x)$ - б.м. при $x \to a$ и $\alpha(x) \ne 0,\ \forall x \in U_\delta^0(a)$. Тогда $\frac{1}{\alpha(x)} = \gamma(x)$ - б.б. при $x \to a$
2) Если задана $\beta(x)$ - б.б. при $x \to a$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ - б.м.

Асимптотическое представление функции, имеющей конченый предел

Лемма. f(x) имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x \to a$.

Доказательство:

Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ $\Rightarrow$ по определению $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a)\ \ |f(x) - A| < \varepsilon\ \ \Rightarrow\ \ \alpha(x) = f(x) - A$ - б.м. при $x \to a$.

Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x \to a \Rightarrow\ \forall \{x_n\}$, $x_n \in D_f,\ x_n \to a,\ x_n \ne a\ \Longrightarrow\ f(x_n) \to A + \alpha(x_n) \to A + 0 = A,\ n \to \infty$

$\Longrightarrow A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ■.

Асимптотическое сравнение функций. Термины Ландау.

Опр. Пусть заданы f(x), g(x) $D = D_f = D_g$, и a - предельная точка для D.

Говорят, что

1) $f(x) = \overline{o}\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),$ где $\alpha(x)$ - б.м. функция при $x \to a$
2) $f(x) = \underline{O}\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, где $\varphi(x)$ - огран. функция при $x \to a$
3) $f(x) = \underline{O^*}\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \psi(x) \cdot g(x)$, где $\exists \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = k \neq 0$
4) $f(x) \approx g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$, где $\exists \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 1$

$f(x) \approx g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \overline{o}\big(g(x)\big) = \overline{o}\big(f(x)\big)$

Замечание. Если известно, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то в определениях вместо $\alpha(x), \varphi(x), \psi(x), \beta(x)$ можно взять $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Сравнение б.м. функций

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \to a$ (точка a - конечная или бесконечная).

Опр. Говорят, что $\alpha(x)$ - *более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$, если

$\alpha(x) = \overline{o}\big(\beta(x)\big)$ при $x \to a$.

Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *одного порядка малости*, если $\exists\ C_1, C_2 > 0$, что

$\mathrm{C}_1|\alpha(x)| \leq |\ \beta(x)| \leq \mathrm{C}_2|\alpha(x)|$.

Заметим, что, если $\alpha(x) \neq 0$ в $U_\delta^0(a) \implies \mathrm{C}_1 \leq \left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right| \leq C_2$, то есть $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ - огран. $x \to a$.

Сравнение б.б. функций

Пусть $\gamma(x),\ \tau(x)$ - б.б. при $x \to a$.

1) Говорят, что $\gamma(x)$ - *более высокого порядка роста,* чем $\tau(x)$, если
   $\tau(x) = \overline{o}(\gamma(x)\ x \to a$

2) Говорят, что $\gamma(x),\ \tau(x)$ - одного порядка роста, если при $x \to a$
   $\exists\ \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 > 0$: $A_1|\ \tau(x)| \leq |\gamma(x)| \leq A_2|\ \tau(x)|$ в некоторой $U_\delta^0(a)$.

Лекция 11. Арифметические операции над функциями, имеющих конечный предел. Предел сложной функции. Предельный переход в неравенствах. Непрерывность в точке.

[Примеры]

1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$?
   $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in U_\delta^0(2)\; |x^2 - 4| < \varepsilon \;\Longrightarrow\; 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$
   $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+x}$, ε - достаточно мало, чтобы $4 - \varepsilon > 0$
   $\min\{\sqrt{4+x} - 2; 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\} = \sqrt{4+x} - 2 \;\Longrightarrow\; \forall\,\delta\; 0 < \;\delta \le \sqrt{4+x} - 2$
   $\Longrightarrow\; \forall x \in U_\delta^0(2)\; |x^2 - 4| < \varepsilon$

2) Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{R} \end{cases}$
   $\lim\limits_{x\to a} D(x)$ не существует для $\forall a \in \mathbb{R}$, так как если $\{x_n\}\, x_n \to a,\; x_n \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ $D(x_n) = 1 \;\Longrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$. Если же $\{y_n\},\; y_n$- иррац. $\Longrightarrow\; D(y_n) = 0 \;\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} D(y_n) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} D(x)$ не существует.

Утверждения, которые нужно доказать самостоятельно:

1) $\dfrac{\overline{o}(x^k)}{x^m} = \overline{o}(x^{k-m})$, где $k > m > 0$
2) $\overline{o}(x^l) \pm \overline{o}(x^k) = \overline{o}(x^m)$, где $m = \min\{l, k\}, l > 0, k > 0$
3) $\overline{o}(x^k) \cdot \overline{o}(x^l) = \overline{o}(x^{k+l})$, где $l > 0, k > 0$

Лемма. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A < \infty$ (конечный), где a - конеч. или нет, то $f(x)$ - огран. при $x \to a$, то есть $\exists\delta > 0 \;\; \exists M > 0$: $\forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a)\; |f(x)| \le M$.

Доказательство:

По определению Коши предела для

$\varepsilon = 1 \;\; \exists\,\delta(1) > 0 \;\; \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a)\; |f(x) - A| < \varepsilon = 1 \;\; \Longrightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$

$\Longrightarrow |f(x)| < \max\{|A-1|, |A+1|\} = M$ ■.

Предел «сверху» и «снизу»

Опр. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A + 0\ (A - 0) \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a)\ A \le f(x) < A + \varepsilon\ \ (A - \varepsilon < f(x) \le A)$

Опр. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = B - 0 \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in D_f\quad a < x < a + \delta\quad B - \varepsilon < f(x) \le B$$

Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B,$ A, B $\in \mathbb{R}$. Тогда:

1) $\exists \lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$

2) $\exists \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = AB$

3) если $B \ne 0$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$

Доказательство:

Воспользуемся определением предела по Гейне и предположим, что $D = D_f = D_g$, т. a - предельная для D. Возьмем $\forall\ \{x_n\},\ x_n \in D,\ x_n \to a,\ n \to \infty,\ x_n \ne a$

$\Longrightarrow f(x_n) \to A,\ g(x_n) \to B.$

Тогда по теореме об арифметических операциях над сходящимися последовательностями

1) $f(x_n) \pm g(x_n) \to A \pm B$
2) $f(x_n)g(x_n) \to AB$
3) $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{A}{B}$ при $B \ne 0$ ■.

Предел сложной функции

Пусть $\varphi(t)$ определена на $T \subseteq \mathbb{R}$, $E_\varphi = \varphi(T) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$, функция f(x) определена на $D = D_f$. Тогда говорят, что на D определена сложная функция $F(t) = f\big(\varphi(t)\big),\ t \in T$.

Лемма. Пусть $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда $\exists \lim\limits_{t\to t_0} F(t) = f(x_0)$.

Доказательство:

Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(x_0)\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Для $\delta(\varepsilon) > 0\ \exists\tilde{\delta}(\delta) > 0$: $\forall t \in D_\varphi = T,\ t \in U_{\tilde{\delta}}^0(t_0)\ |\varphi(t) - x_0| < \delta \implies$

$x = \varphi(t),\ x \in D_f \cap U_\delta^0(x_0)\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies |F(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\implies \exists \lim\limits_{t\to t_0} F(t) = f(x_0)$ ■.

Замечание: если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то лемма не всегда верна.

[Пример]

$\varphi(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$

$\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,$ однако $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f\big(\varphi(t)\big) = f(0) = 0$

Теорема 5. *(Предельный переход в неравенствах для функций)*

1) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и для некоторого $\delta > 0, 0\ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta^0(a): f(x) < B$. Тогда $A \leq B$.
2) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $\forall x\ D = D_f = D_g,\ x \in U_\delta^0(a) \implies f(x) < g(x)$. Тогда $A \leq B$.
3) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ и для некоторого $\delta > 0\ \ \forall x \in D = D_f = D_g$,, $x \in U_\delta^0(a) \implies$ для h(x) верно, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$

Доказательство: (проводится по определению предела по Гейнне

1) $\forall\{x_n\},\ x_n \to a,\ n \to \infty,\ x_n \in D_f, x_n \neq 0 \implies f(x_n) \to A$. По условию теоремы $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ x_n \in D_f \cap U_\delta^0(a) \implies f(x_n) < B$. По теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей $\implies A \leq B$.

2), 3) доказываются аналогично ■.

Непрерывность функции в точке

Опр. Пусть точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной для D_f - области определения.

Говорят, что $f(x)$ непрерывна в т. a, если $f(a)$.

По Коши: для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \in D_f \cap U_\delta(a) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

По Гейне: для $\forall \ \{x_n\}, x_n \to a, \ n \to \infty, \ x_n \in D_f, x_n \neq 0 \implies f(x_n) \to f(a)$

Иногда D_f имеет изолированные точки, то есть каждую такую точку $x_0 \in D_f$, что

$\exists \ D_f \cap U_\delta^0(x_0) \neq \emptyset$. Согласно определениям непрерывности f(x) в т. a выше, будем считать, что в $\forall$ изолированно точке $x_0 \in D_f$ функция f(x) - непрерывна.

Точки разрыва функции

Опр. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва* f(x), если точка a является предельной для D_f, но f(x) не является непрерывной в точке a.

Раньше было доказано, что если f(x) определена в некоторой проколотой окрестности $U_\delta^0(a)$, то для того, чтобы $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) < \infty \ \Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0), \quad \exists \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0), f(a+0) = f(a-0)$$

Классификация точек разрыва

Опр. Говорят, что т. a является *точкой устранимого разрыва* f(x), если $\exists \ f(a-0) = f(a+0) = A$. При этом $f(x)$ может быть определена или нет в т. a.

Если $a \in D_f$, то переопределив $f(a)$, то есть заменив его на A, устраним разрыв в т. a.

Если $a \notin D_f$, то надо доопределить $f(x)$, положив $f(a) =$ A.

Опр. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой *неустранимого разрыва I рода* для $f(x)$, если точка a является предельной для D_f, $\exists\, f(a-0) < \infty$, $\exists\, f(a+0) < \infty$ и $(a-0) \neq (a+0)$.

Опр. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *точкой разрыва II рода*, если точка a является предельной для D_f, и хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Лекция 12. Локальные и глобальные свойства непрерывный функций. Равномерная непрерывность.

Локальные свойства непрерывных функций

Теорема 6.

1) Если $f(x)$ непрерывна в т. $a \in D_f$, то она ограничена в некоторой окрестности т. a
2) Если $f(x)$ непрерывна в т. $a \in D_f$ и $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U(a)$, что для $\forall x \in U(a)$ верно, что $f(a) \cdot f(x) > 0$
3) Если $f(x)$ непрерывна в т. $a \in D_f$ справа (слева) и $f(a) \neq 0$, то $\exists \delta > 0 \colon \forall x \in [a; a+\delta)\ \big((a-\delta; a]\big)\ \ f(x) \cdot f(a) > 0$
4) Если $f(x), g(x)$ непрерывны в т. $a \in D_f = D_g = D$, то функции $f(x) \pm g(x),\ \ f(x) \cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(a) \neq 0)$ -непрерывны в т. a.

Доказательство

1) Доказательство следует из ограниченности функции, имеющей конечный предел, если т. a является предельной точкой для D_f : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

   Если т. a изолирована для D_f , то утверждение 1) очевидно, так как существует окрестность т. a, где других точек из D_f нет.
2) По определению непрерывности по Коши:
   $\forall \varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0\ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \in (a - \ \delta; a + \ \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2} \Longrightarrow$
   $f(a) - \frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \frac{|f(a)|}{2}$ (рис. 12.1).

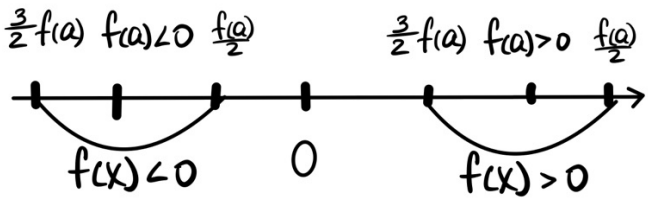


рис. 12.1

3) Пусть $f(x)$ непрерывна в т. $a \in D_f$ справа, то есть $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ (a - предельная точка для D_f).

$$\forall \varepsilon = \frac{|f(a)|}{2} > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \in [a; a + \ \delta) \Longrightarrow \ f(a) - \frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \frac{|f(a)|}{2}$$

Аналогично доказывается утверждение для случая непрерывности $f(x)$ слева.

4) По определению непрерывности $f(x), g(x)$ в т. a: $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.
По теореме 4:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \neq g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \neq g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Если $g(a) \neq 0 \Rightarrow \ \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$ ■.

Непрерывность сложной функции

Теорема 7. Пусть заданы функции:

$\varphi: T \to D \subseteq \mathbb{R}, \ T \subseteq \mathbb{R}$

$f: D \to \mathbb{R}$

Тогда определена сложная функция $F(t) = f\big(\varphi(t)\big), \ \ F: T \to \mathbb{R}, \ t \in T$

$F = f \cdot \varphi$ - композиция φ и t

Пусть φ - непрерывна в т. $t_0 \in T$ и пусть f - непрерывна в т. $x_0 = \varphi(t_0)$

Доказательство:

Пусть $t_0 -$ предельная для T, а т. $x_0 = \varphi(t_0)$ - предельная для D. Воспользуемся определением непрерывности по Гейне. Пусть $\forall \{t_n\}, \ t_n \in T, \ t_n \to t_0 \Rightarrow$ т.к. φ - непрерывна, то $\varphi(t_n) = x_n \to \varphi(t_0) = x_0$.

Так как $f(x)$ непрерывна в т. x_0, то из условия $x_n \to x_0 \ \Rightarrow f(x_n) = f\big(\varphi(t_n)\big) \to f(x_0) = f(\varphi(t_0))$. Это означает: $t_n \in T, \forall \{t_n\}, \ t_n \to t_0 \ \Rightarrow \ F(t_n) = f\big(\varphi(t_n)\big) \to f\big(\varphi(t_0)\big) = F(t_0) \ \ \Rightarrow \ F -$ непрерывна в т. t_0 по Гейне ■.

Непрерывность функции на множестве. Глобальные свойства непрерывной функции.

Опр. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $D \subseteq \mathbb{R}$, если (и только если) $f(x)$ - непрерывно в каждой точке D.

Опр. $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a;b] \subset \mathbb{R}$, если $f(x)$ - непрерывна в $\forall x \in (a;b)$, $f(x)$ непрерывна справа в т. a и непрерывна слева в т. b

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$$

$$\exists \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$$

Свойства функций непрерывных на сегменте

Теорема 8. (*I теорема Вейерштрассе)*

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists\, M > 0\ \forall x \in [a;b]\ \ |f(x)| \le M$.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, но не ограничена сверху $\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a;b]$: $f(x_n) > n\ \Rightarrow\ \exists\, \{x_n\}\ a \le x_n \le b$, то есть $\{x_n\}$ - ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрассе $\exists\, \{x_{n_k}\}$, имеющая конечный предел $x_{n_k} \to c \in [a;b]\ \Rightarrow$

По определению непрерывности $f(x)$ по Гейне $f(x_{n_k}) \to f(c)$.

Далее, если последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ имеет конечный предел $f(c)$, то она ограничена. Противоречие с тем, что $f(x_{n_k}) > n_k \ge k$, т.е. $f(x_{n_k})$ не ограничена ■.

Теорема 9. *(II теорема Вейерштрассе)*

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $f(x)$ достигает своих точных верхних и нижних граней, то есть $\exists\, x_{min}, x_{max}$: $f(x_{min}) = \inf\{f(x)\} = m$, $f(x_{max}) = \sup\{f(x)\} = M$.

Доказательство:

Проведем доказательство того, что $\exists\, x_{min} \in [a;b]$, $f(x_{min}) = m$. Аналогично для $\exists\, x_{max} \in [a;b]$, $f(x_{max}) = M$.

Пусть для $\forall x \in [a;b]$ $f(x) > m$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} > 0 \Rightarrow g(x)$ - непрерывна на $[a;b]$ и по I теореме Вейерштрасса - ограничена

$\Rightarrow \exists\, K > 0: g(x) \leq K$, то есть $\frac{1}{f(x)-m} \leq K \Leftrightarrow f(x) - m \geq \frac{1}{K} \Leftrightarrow f(x) \geq m + \frac{1}{k} > m$.

Отсюда m не является $\inf\{f(x)\}$ на $[a;b]$ ■.

Замечания:

1) Если $f(x)$ - непрерывна на $(a;b)$, то она может быть неограниченной.
   Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0;1)$.
2) Бывает, что $f(x)$ - ограничена на $[a;b]$, достигает наибольших и наименьших значений, но не является непрерывной ни в одной точки $[a;b]$.
   Пример: $D(x)\begin{cases} 0, x \in \mathbb{Q} \cap [a;b] \\ 1,\ x \in [a;b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Равномерная непрерывность

Опр. Пусть на $D_f \subseteq \mathbb{R}$ задана $f(x)$.

Говорят, что $f(x)$ *равномерно непрерывна* на D_f,если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D_f \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Лемма. Если $f(x)$ равномерно непрерывна на D_f, то она непрерывна на D_f.

Доказательство:

Рассмотрим $\forall x_0 \in D_f$.

Для этой фиксированной точки можно взять $\forall x \in D_f,\ |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, то означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0 ■.

Замечание: в определении непрерывности функции в точке в неявном виде присутствует зависимость δ не только от $\varepsilon > 0$, но и от т. x_0: $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, x_0)$. В *равномерной непрерывности зависимость δ от точки отсутствует.*

[Пример]

$f = \frac{1}{x}$ на (0;1) - непрерывна.

Покажем, что
$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists x_1, x_2 \in D_f \;\; |x_1 - x_2| < \delta \;\; |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \{y_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$.

$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \delta$, но $|f(x_n) - f(y_n)| > |n + 1 - n| = 1 = \varepsilon$

То есть $f = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной.

Теорема 10. *(Теорема Кантора*

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, но не равномерно непрерывна на$[a; b]$, то есть

$\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists x_1^\delta, x_2^\delta \in [a; b] \;\; \left|x_1^\delta < x_2^\delta\right| < \delta \;\; |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$

Рассмотри $\delta_n = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \exists\, x_{n_1}, x_{n_2},\; \left|x_{n_1} - x_{n_2}\right| < \frac{1}{n}$ $(*)$,

но $\left|f\left(x_{n_1}\right) - f\left(x_{n_2}\right)\right| \geq \varepsilon_0$ $(\#)$,

$\left\{x_{n_1}\right\} \subset [a; b] \;\Rightarrow\; \exists \left\{x_{n_k}^1\right\},\; x_{n_k}^1 \to c \in [a; b]$

Из (*) $\left\{x_{n_k}^2\right\} \to c$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то $f(x_{n_k}^1) \to f(c), f(x_{n_k}^2) \to f(c)$

$\Rightarrow \left|f(x_{n_k}^1) - f(x_{n_k}^2)\right| \leq \left|f(x_{n_k}^1) - f(c)\right| + |f(c) - f(x_{n_k}^2)| \to 0$ $\Rightarrow$ противоречие с неравенством $(\#)$■.

Лекция 13. Монотонная функция. Теорема о прохождении непрерывных функций

Колебание функции на отрезке [a;b]

Опр. Колебанием функции на отрезке [a;b] называется число

$$W(f)([a:b]) := \sup_{a \le x \le b}\{f(x)\} - \inf_{a \le x \le b}\{f(x)\},$$

где предполагается, что $\{f(x)\}$- ограничена на этом отрезке [a;b]

По Теореме Кантора если функция непрерывна, то она непрерывна на отрезке [a;b].

Замечание: если функция $\{f(x)\}$ – непрерывна на отрезке [a;b], то

W(f) ([a;b]): = M – m, где M,m – это наибольшее и наименьшее.

Интерпретация понятия равномерной непрерывности f(x) на отрезке [a;b].

f(x) – равномерная непрерывность на отрезке [a;b], если для $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall x_1, y_2$ $x_1 y_2$ ∈[a;b], $|y_1 - y_2| < \delta$ => W(f) ([$x_1 y_2$]) < Ɛ

Теорема 11. *(о прохождении непрерывной функции через 0 (ноль))*

Пусть функция f (x) – непрерывна на отрезке [a;b], и f (a)*f (b) < 0.

Тогда $\exists$ c ∈ (a: b), что $f(c) = 0$.

Доказательство:

Предположим, для определённости, что f (a) < 0, f (b) > 0.

Рассмотрим множество

A = {x ∈ $[a; b]$| $f\ (x) < 0$}≠ ∅, множество не пустое.

Множество A – ограниченно сверх (например, точка b является верхней границей этого множества).

Следовательно, $\exists\ SupA = C\ \in [a\,;b]$

Предположим, что f (c) < 0.

Тогда по теореме о локальных свойствах непрерывных функций мы знаем, что если функция непрерывна в заданной точке и она не равна $\neq$ 0 в ней, то в некоторой небольшой окрестности она сохраняет тот знак, который имеет в этой точке.

Тогда по свойству сохранения знака непрерывной функцией существует такое что для любого X

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mu\delta(c) \cap [a\,;b]\ \ f(x) < 0$$

По свойствам супремума (Sup), для *x > 0 => f (x} ≥ 0.*

Получаем противоречие. По теореме о сохранении знака непрерывной функции она должна быть меньше 0 по всей окрестности и справа и слева от точки *c (супремом)*.

Рассмотрим другую возможность.

Предположим, что *f (c}> 0.*

Следовательно, $\exists \delta' > 0,$ что $\forall x \in \mu\delta(c) \Rightarrow f\ (x) > 0.$

Однако, $x \in (c-\delta, c) \Rightarrow f(x) < 0,$ т. к. $x \in A$. Противоречие с теоремой о сохранении знака непрерывной функции.

Следовательно, $f(\mathrm{c}) = 0 \ \Rightarrow \mathrm{C} \in (a{:}\,b)$ ■.

Из этой теоремы полезно вывести следствие, которое часто используется.

Следствие из Теоремы 11. *(о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение)*

Пусть функция $f(x) -$ непрерывна на отрезке $[a{:}\,b]$,

m < M, где M, m – это наибольшее и наименьшее значения f (x) на отрезке $[a{:}\,b]$.

Тогда для $\forall\ C, m < C < M$

$\exists\ \mathrm{X_c} \in [a\,;b],$ что $f(\mathrm{X_c}) = C$

Итак, здесь мы пользуемся второй теоремой Вейерштрасса о том, что такие значения существуют, т.е. существуют такие точки, где функция достигает супремума и инфимума своих значений.

Доказательство:

Рассмотрим функцию g (x) = f (x) – C.

Если $f(x_1) = m => g\,(x_1) = m - C < 0$

$f(x_2) = M => g\,(x_2) = m - C > 0$

Предположим, что $x_1 < x_2$.

Следовательно, на отрезке $[x_1\ x_2]$ выполнены все условия Теоремы 11:

- функция G непрерывна на данном отрезке и отличается от функции F на константу

- и на концах этого отрезка $[x_1\ x_2]$ она принимает значение разных знаков.

Следовательно, по Теореме 11 существует такая точка X, что

$$\exists\, x \in (x_1\ x_2) \subset [a : b], \text{что } \mathrm{G}\,(x_0) = \mathrm{f}\,(x_0) - C = 0 => \mathrm{f}\,(x_0) = C\ \blacksquare.$$

Монотонная функция. Непрерывность обратной функции.

<u>*Опр.*</u> Функция f (x) называется *неубывающей (невозрастающей)* на отрезке $[a : b]$, если выполняется следующее условие:

$\forall x_1, x_2 \in [a{:}\, b]$

$x_1 \le x_2 => f(x_1) \le f(x_2) => f(x) -$ неубывающая

$f(x_1) \ge f(x_2) => f(x) -$ невозрастающая

В обоих случаях говорят, что функция f (x) *монотонна* на отрезке$[a\ ;\ b]$.

<u>*Опр.*</u> Функция f (x) *возрастает (убывает) на отрезке* $[a;\ b]$, если

$\forall x_1, x_2 \in [g{:}\, b]\ \ x_1 < x_2 => f(x_1) < f(x_2) => f(x) -$ возрастает

$f(x_1) > f(x_2) => f(x) -$ убывает.

В обоих случаях говорят, что функция f (x) строго *монотонна* на отрезке $[a : b]$.

Обратная функция

Пусть функция f (x) определена на отрезке $[a\,; b]$ и область её значений (Д_f), и

$$E_g = \{\, y \in R \mid \exists \mathrm{x} \in [a\,; b], f(x) = y\}.$$

<u>*Опр.*</u> *Обратной* к $f(x)$ функцией на множестве E_f называется функция $f_{(y)}^{-1}$

$$\forall y \in \mathrm{E}_f \;\; f_{(y)}^{-1} = X \;\in [a : b],$$

где $y = f(x)$,

причем, такой x является единственным для данного *y*.

Следовательно,

$$f\left(f_{(x)}^{-1}\right) = \mathrm{x}, \text{ и } \forall g \in \mathrm{E}_f\,,\; f\left(f_{(y)}^{-1}\right) = y$$

$$\forall x \in [a; b] = \text{Д}_f.$$

Замечание. Обратная функция f^{-1}: $\mathrm{E}_f \;\longrightarrow \text{Д}_f$ определена, когда

f : $\text{Д}_f \;\longrightarrow \mathrm{F}_f$ – является взаимно однозначным отображением.

Теорема 12. Пусть функция $f(x)$ определена и строго монотонна на отрезке $[a : b]$.

Пусть $E_g = \{\, y \in R \mid \exists \mathrm{x} \in [a : b], f(x) = y\}$.

Тогда существует обратная функция, действующая из множества ее значений в отрезок $[a\,;\, b]$

$\exists f^{-1}$: $\mathrm{E}_f \;\longrightarrow [a : b]$, и f^{-1} - строго монотонна в ту же сторону.

Доказательство:

Предположим, что $f(x) -$ возрастает.

Если $x_1 < x_2 \;\; (x_1, x_2\, [a : b]) => f(\,x_1) < f(x_2)) \;=> f : \;[a : b] \longrightarrow \mathrm{E}_f$ инъективным отображением.

Отображение является также сюръективно по определению множества E_f .

Следовательно,

$f : \;[a\,; b]$ отображение E_f является взаимно однозначным.

Значит, существует f^{-1}, которое будет действовать из E_f в отрезок $[a; b]$: $\exists f^{-1}$: $\mathrm{E}_f \longrightarrow [a; b]$.

Покажем, что f^{-1} возрастает.

Предположим, что у нас есть $y_1\,, y_2 \in \mathrm{E}_f\,, y_1 < y_2$.

Следовательно,

$\exists\,!\ x_1,\ \ y_1 = f(\,x_1) => \ x_1 = f^{-1}(y_1)$

$\exists\,!\ x_2,\ \ y_2 = f(\,x_2) => \ x_2 = f^{-1}(y_2)$

$x_1 > x_2 => f(\,x_1) = \ \ y_1 > \ \ y_2 = f(x_2)$

Невозможно.

$y_1 = \ y_2$ – тоже невозможно в силу строгой монотонности, т.к. $f(\,x)$ – возрастает

Следовательно, $x_1 < x_2$, и f^{-1}– возрастает.

Если функция $f(\,x)$ строго монотонна, определена на отрезке $[a : b]$, и мы рассмотрим область её значений, то на этой области значений определена обратная функция монотонная, причём, в ту же сторону ■.

Теорема 13. Пусть функция $f(\,x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$,

тогда для

$\forall C \in (a{:}\,b)\ \exists \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c+0) < \ \infty,\ \exists \lim\limits_{x\to c-0} f(x)]\, f(c-0) < \ \infty,$

$\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \ \underset{<\infty}{f(a+0)},\ \exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \ \underset{<\infty}{f(b-0)}$

Доказательство:

Покажем, что для $\forall C \in [a : b)$ существует $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$.

Рассмотрим множество $M_c \ = \{\, f(x) | x \ \in \ [a; b)\}$

Предположим, что $f(x)$ – *не убывает* на $[a; b)$

M_c – ограничено нижней границей для множества значений, например, числом $f(\mathrm{c})$.

Следовательно, $\exists \inf M_c = \mathrm{A}$

По определению инфимума, мы можем рассмотреть для любого $\forall \varepsilon > 0 \exists\, x = x_\varepsilon$, что $A \ \le f\ (x_\varepsilon) < A + \varepsilon,\ \ x_\varepsilon > c => c + \delta,\ \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

Так как $f(x)$ не убывает, то для любых $\forall x, x \in (c, c+\delta) =>$

$=> \mathrm{A} \le f(x) \le A + \ \varepsilon$, т. е. $|f\ (x) - A < \varepsilon \ \ => \mathrm{A} = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$.

Аналогично доказывается, что в любой точке этого отрезка $[a : b]$, кроме точки a, существует левый предел нашей функции■.

Теорема 14. Пусть f (x) монотонна на отрезке $[a; b]$.

Тогда для того, чтобы f (x) была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{E}_f = \{y = f(x)\}$ была замкнутым отрезком:

$$\mathrm{E}_f = [f(a); f\ (b)], \text{если } f(x) \text{не убывает}$$

или

$$[f(b); f\ (a)], \text{если } f(x) \text{ не возрастает.}$$

Доказательство:

Необходимость. Пусть функция $f(\ x)$ непрерывна на отрезке $[a\ ; b]$ и не убывает.

Покажем, что $\mathrm{E}_f = [f(a): f\ (b)]$.

Это следует из **Теоремы 11**, а точнее, из её следствия о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение:

$$\forall C\ \ C \in f(a)_{m,}\, f(b)_M$$

Следовательно,

$$\exists\, x_c \in [a : b], \text{что } f\ (x_c) = C$$

Если функция непрерывна, и она монотонна, то она представляет целиком весь отрезок.

Достаточность. Пусть функция f (x) монотонна и не убывает, и её область значений представляет целиком весь отрезок $\mathrm{E}_f = [f(a): f\ (b)]$.

Покажем, что тогда f (x) непрерывна на отрезке $[a : b]$.

Пусть у f (x) на отрезке $[a : b]$ есть точка разрыва.

1. Устранимых разрывов у монотонной функции нет.
2. Разрывов второго рода тоже нет (пределы либо не существуют, либо не устранимы).
   Если два предела не совпадают, то разрыв не устраним.
3. Пусть c – точка разрыва 1-го рода, и $f(c-0) < f(c) f < (c+0)$
   Тогда $\mathrm{E}_f \neq [f(a): f\ (b)]$.
   Следует, функция f (x) непрерывна на отрезке$[a : b]$.
   Аналогично доказывается случай, когда функция f (x) не возрастает ■.

Теорема 15. Пусть функция f (x) строго монотонна на отрезке$[a; b]$ и непрерывна на этом отрезке. Тогда область значений её является целиком $\mathrm{E}_f = [c: d]$ и существует $\exists\, f^{-1}(y)$ на отрезке $[c; d]$.

Причём функция f^{-1} тоже строго монотонна и непрерывна.

Доказательство

Так как функция f (x) строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $\mathrm{E}_f = [c; d]$.

Предположим, что функция f (x) *возрастает*, тогда $[c; d] = [f(a); f\ (b)]$.

Это по *Теореме 14*.

По *Теореме 12*, т.к функция f (x) строго монотонна, то существует $\exists\, f^{-1}(y)$ на отрезке $[c: d]$, которая тоже строго монотонна (возрастает).

Для обратной функции имеем: $f^{-1}(y)$ определена на $[c; d]$, строго монотонна и её область значений на этом отрезке есть отрезок $[a\ ; b]$.

Тогда по *Теореме 14* следует, что $f^{-1}(y)$ будет непрерывна на отрезке

$$[c: d] = [f(a): f\ (b)]$$

Аналогично доказывается случай, когда функция f (y) убывает ■.

Лекция 14. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы.

Опр. *Простейшими элементарными функциями* называют следующие 11 функций:

1.	a^x	7.	ctg^x
2.	log_a^x	8.	$arcsin\ x$
3.	x^l	9.	$arccos\ x$
4.	sin^x	10.	$arctg\ x$
5.	cos^x	11.	$arcctg\ x$
6.	tg^x		

Опр. *Элементарными функциями* называют функции, полученные из простейших элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и/или, взятия композиций, т.е. построение сложных функций.

[Пример]

$f(x) = sin^2\ (x+3) + \sqrt[3]{log_2}(x-5)$

Теорема 16. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Доказательство:

Докажем непрерывность простейших элементарных функций.

1) Непрерывность *sin x в* точке x = 0 (рис.14.1)

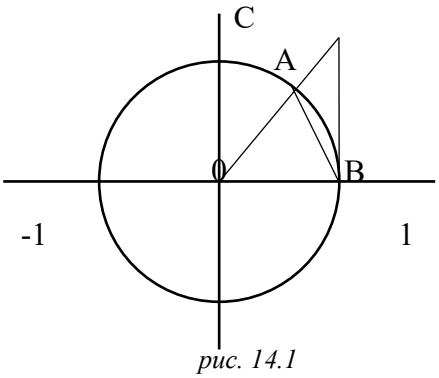


рис. 14.1

Сравним некоторые площади фигур на рис.14.1.

S (треуг. OAB) < S (сектора OAB) < S (треуг. OAB)

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}\, x < \frac{1}{2}\, tg\, x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$0 < \sin x < \; x < \; tg\, x$

т.к. $\sin x\, , x, tg\, x$ - нечётные функции, то => 0 |sin x| < |x| < |tg x| $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus 0$

Отсюда видно, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве («о двух полицейских»), что если x стремится к 0, то и sin x будет стремиться к 0.

Существует предел sin x:

$$\exists \lim_{x\to 0} sinx = 0 = sin0$$

Это означает непрерывность sin x в точке b.

2) Непрерывность $\sin x$ в любой точке вещественной оси $\forall X \in R$

$$\left|\sin x - \; sin_{x_0}\right| = \left|2sin\frac{x+x_0}{2}\right| * \left|cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \underset{x\,\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

Это означает, что $\exists \lim_{x\to 0} sinx = sinx_0$

Т.е. *sin x* непрерывна в точке в $x_{0.}$

3) Непрерывность cos x $\forall x_0 \in R$.

$$|cos\, x - \; \cos x_0| = \left|-2sin\frac{x-x_0}{2}\right| * \left|sin\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \longrightarrow 0,\, x \to 0$$

Это означает, что $\exists \lim_{x\to 0} cosx = cosx_0$

Т.е. *cos x* непрерывна в точке в $x_{0.}$

4) Непрерывность tg x, ctg x

tg x = $\frac{\sin x}{\cos x}$, ctg x = $\frac{\cos x}{\sin x}$,

*Следовательно,*tg x, ctg x непрерывны в своей области определения по теореме об арифметический операциях над непрерывными функциями.

5) Непрерывность $\arcsin x$ в любой точке в области определения (рис.14.2)

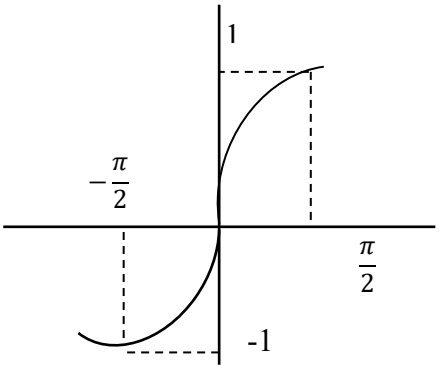


рис.14.2

$x_1,\ x_2\ \in (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}),\ x_1\ <\ x_2$

$\sin x_2\ -\ sinx_1\ =\ 2sin\frac{x_2-x_1}{2} * cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0$

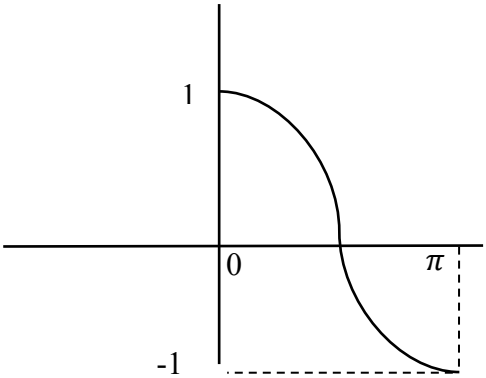
Следовательно, sin x возрастает и является строго монотонной на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$.

На области значений sin на этом отрезке [-1; 1] определена и возрастает обратная функция $arcsin\,x$.

6) Непрерывность arccos x в любой точке в области определения (рис.14.3)

Cos x убывает и непрерывна на промежутке [0; π]. Область значений Cos x– [-1; 1].

Следовательно, на отрезке [-1; 1] определена и непрерывна обратная убывающая функция $arccos\ y$.



y = cos x x = arccos x

рис.14.3

7) Непрерывность arctg x , arctg y доказывается аналогично (необходимо изучить самостоятельно).

8) Непрерывность функции e^x в точке в $x_0 = 0$.

Рассмотрим

$$1+\frac{1}{n} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)n$$

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e < \left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)n\right\}$$

Здесь не рассматриваем понятия возведения в степень вещественного числа (см. пособие).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) < e^{\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$\frac{n-1}{n} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n}+1$$

Пусть $|x| < \frac{1}{n}$

e^x – строго монотонна

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < e^{-\frac{1}{n}} < e^x < e^{\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$|e^x - 1| < \frac{1}{n-1} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$$

$1 = e^0$

$$|e^x - e^0| \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow 0$$

Это означает, что e^x - непрерывна в точке 0.

9) Непрерывность e^x в $\forall\, x_0 \in R$

$$|e^x - e^{x_0}| = |e^{x+(x-x_0)} - e^{x_0}| = e^{x_0}\,|e^{x-x_0} - 1| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Следовательно, e^x - непрерывна в точке 0.

10) Монотонность e^x

$$e^x + \alpha - e^x = e^x(e^\alpha - 1) > 0$$

$$\alpha > 0 => e^\alpha > 1$$

Следовательно, e^x возрастает на R.

11) Непрерывность функции $a^x = e^{xlna}$

$y(x) = xlna, f(y) = e^y$

$a^x = e^{yx} = f\left(\frac{p}{x}\right)$ – сложная функция

a^x – непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции и является строго монотонной.

12) Непрерывность обратной функции

$\mathrm{Y} = \log_a x$ – в её области определения

13) Непрерывность x^α (x > 0)
$x^\alpha = e^{\alpha lnx}$, т.к.
$\alpha lnx -$ непрерывна, $=>$ $x^\alpha = e^{\alpha lnx}$ – непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции.

Далее, применяя теорему об арифметических операциях над непрерывными функциями и теорему о непрерывности сложной функции (т.е. композиции функций), = > мы получаем утверждение о непрерывности в своей области определения любой элементарной функции ■.

Первый замечательный предел

Теорема 17. Предел $\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Доказательство:

$$0 < |\sin x| < |x| < |\mathrm{tg}\ x| \ /: |\sin x| \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

$$1$$

Следовательно, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве,

$\left|\frac{x}{\sin x}\right| \longrightarrow 1,$

$x \longrightarrow 0$

$\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие из 1-го замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Доказательство:

1) Обозначим y = arcsin x ⇒ x = sin y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

2) и 3. – доказываются аналогично (сделать самостоятельно).

Второй замечательный предел

Теорема 18. Равенство $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ называется 2-м замечательным пределом.

Доказательство:

Пусть $x \to +\infty$.

Для каждого вещественного числа

$$\forall x \quad [x] \le x < [x] + 1, \text{где } [x] - \text{целая часть x, т. е.}$$

Наибольшее из всех целых чисел К, таких, что К $\le x$

[Примеры]

x = 0,5 ⇒ [x] = 0

x = - 0,5 ⇒ [x] = -1

x = 2,3 ⇒ [x] = 2

x = - 2,3 = > [x] = -3

x = 4 = > [x] = 4

Рассмотри подробнее:

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} * \left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Достаточно показать, что

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \to e$$

$$x \to +\infty$$

Т.к.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e$$

$$n \to +\infty$$

то для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N\ (\varepsilon) \in N,$$

что для

$$\forall n, n > N =>$$

$$=> \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon$$

Заметим, что при x > N+1 => [x] > N => X ∈ U_{n+1}

Следовательно,

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - e\right| < \varepsilon$$

$$=> \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} = e$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \to e$$

$$x \to +\infty$$

Аналогично, если рассмотрим

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} * \frac{1}{[x]+1}$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Пусть теперь $x \to -\infty$

Обозначим y = $-x \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y}-1\right)^{y}$$
$$= \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y-1} * \left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} * \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e => \exists \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \blacksquare.$$

Следствия из 2-го замечательного предела:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$

Доказательство:

Обозначим x = $\frac{1}{\alpha}$ => x→ ∞, $\alpha \to 0$ => $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xc} = e \blacksquare$.

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$

Доказательство:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \{\text{непрерывная функция}\} = \ln\left(\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \ln e = 1$ ■.

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \ln a$

Доказательство:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = (a>0) = \{= \text{обозначим } y = a^{\alpha}-1 => \alpha = \log_a(y+1)\} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} =$

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{y*ln}{\ln(1+y)} = \ln a$

т. к. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ ■.

4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\alpha}-1}{\alpha} = \alpha$

Доказательство:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\alpha}-1}{\alpha} = (z = (1+\alpha)^{\alpha}-1) = >1+z = (1+\alpha)^{\alpha} => \ln\ (1=z) = a*\ln\ (1+\alpha) =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{z*a*ln(1+\alpha)}{\alpha\ln(1+z)}$ ■.

Утверждение. Пусть U (x), V (x)

$\lim\limits_{x\to x_0} U(x) = A > 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x) = B > 0,$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{U^{\frac{V}{x}}}{x}\right] = A^B$

Доказательство:

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{U^{\frac{V}{x}}}{x}\right] = \lim\limits_{x\to x_0} e^{V(x)\ln(U(x))} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} e^{V(x)\ln(U(x))}} = e^{B*\ln A} = A^B$ ■.

Таблица эквивалентностей бесконечно малых функций

При x→ 0: (a > 0)

$\sin x \approx x$

$\operatorname{tg} x \approx x$

$\operatorname{arctg} x \approx x$

$\arcsin x \approx x$

$\ln(1+x) \approx x$

$a^x - 1 \approx x * \ln a$

$(1+x)^a \approx a * x$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = \left(\mathrm{f(x)} \underset{x \to x_0}{\approx} \mathrm{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) * g(x)$$

Лекция 15. Дифференцирование функций одной переменной. Эквивалентность б.м. функций

Рекомендованная литература: пособие «Математический анализ: Дифференцирование функций одной переменной»

Авторы: И.В.Садовничая, Т.Н.Фоменко, Е.В.Хорошилова

Издательство «Юрайт» 2-е издание

Производная и дифференциал функции одной переменной

Пусть точка x_0 является предельной для D_f функции *f (x)* f: $D_f \to R$

Опр. Производной от функции *f (x)* в точке x_0 называется предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Опр. Говорят, что *f (x)* дифференцируема в точке x_0 , если (и только если)

$\exists\, A \in R \;\; \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A * \Delta x + \bar{o}(x_0) = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$, при $\Delta x \to 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – это бесконечно малое при $\Delta x \to 0$

Лемма. Пусть *f (x)* дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists\, f'(x_0)$

Доказательство:

Необходимость. Пусть *f (x)* дифференцируема в точке x_0, т.е. существует константа A$\exists\, A \in R$, *что* $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$

$$x \to x_0$$

$$=> \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A = f'(x_0)$$

Достаточность. Пусть $\exists\, f'x_0$, т.е. $\exists \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$

$\Delta f = f'(x_0) * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$, т.е. f (x) - дифференцируема в точке x_0 ■.

Односторонние производные

Правой (левой) производной функции f (x) в точке x_0 называют

$$\lim_{\substack{\Delta x \to +0 \\ (-0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'^{(x_0)} * f'(x_0)$$

Точка x_0 является пределом для $D_f \cap (x_0\,;\, +\infty)$ (для $D_f \cap (x_0\,;\, -\infty)$.

Физический и геометрический смысл производной

(1) Физический смысл

S (t) – путь, пройденный точкой за время t,

где t – фиксированный момент.

S $(t_0 + \Delta t)$ – S (t_0) – путь за время от t_0 до $t_0 + \Delta t$

$\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$ – средняя скорость за время Δt

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t = S\prime(t_0)}$ – мгновенная скорость точки в момент t_0

(2) Геометрический смысл

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = tg\ y$, *где* y – угол между OX и касательной к графику f (x), в точке x_0

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\ \alpha = tg\ BAC$

Дифференциал функции

Пусть *f(x)* дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$$

Пусть $f'(x_0) \neq 0$

$\frac{\Delta f(x)}{f'(x_0)*\Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{\text{б.м.}}$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{f'(x_0)\Delta x} = 1$, $\Delta a \approx f'(x_0) * \Delta x$

В таких случаях говорят, что – это $f'(x_0)\Delta x$ – это главная часть приращения Δf.

Опр. Дифференциалом функции *f(x)* в точке x_0 называется линейный функционал $df(x_0)$ от переменной Δx, что

$$df(x_0)\,(\Delta x); = f'(x_0) * \Delta x$$

Если $f'(x_0)\Delta \neq 0$, то дифференциал$df(x_0) * \Delta x$ – это главная часть для Δf для дифференцируемой функции *f(x)* в точке x_0.

Производная сложной и обратной функции

Лемма. Пусть функция $\varphi(t)$ определена и дифференцируема в точке t_0, а функция *f(x)* определена и дифференцируема в точке $t_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция определена и дифференцируема F(t) = f ($\varphi(t_0)$) определена и дифференцируема в точке t_0, и

$F'(t_0) = f'(x_0) * \varphi'(t_0)$

Доказательство:
Обозначим x = $\varphi(t)$. Т.к. $f(x)$ – дифференцируема:
$\Delta F = \Delta f = f'^{x_0} * \Delta\varphi + \alpha(\Delta\varphi) * \Delta\varphi$
$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f'(x_0) * \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} + \alpha * \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Тогда предел

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (f' x_0) * \frac{\alpha(\Delta x)}{\text{б.м.}} * \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = f'(x_0) * \varphi(t_0) + 0 * \varphi'^{(t_0)} = f'(x_0) * \varphi'(t_0)$ ■.

В доказательстве Леммы мы воспользовались тем фактом, что если функция $\varphi\,(t)$ дифференцируема, то она непрерывна в точке x_0. Поэтому, $\Delta e \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0$.

Докажем этот факт ниже.

Лемма. Пусть *f(x)* дифференцируема в точке x_0. Тогда *f(x)* – непрерывна в точке x_0.

Доказательство:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) * \Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{\overset{\alpha(\Delta x) * \Delta x}{\text{б. м.}}} \qquad (*)$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Следовательно, правая часть (*) $\to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0$ ■.

Производная обратной функции

Лемма. Пусть *f(x)* – строго монотонна и непрерывна в окрестности $\mu(x_0)$, и пусть$\exists\, f\,'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $V\left(f\,(x_0)\right) = V(y_0)$ определена обратная функция f^{-1}(y), непрерывна в точке y_0= f (x_0), и $\exists\,(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство:

$x - x_0 = \Delta x \neq 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = y \neq 0$

$x = f^{-1}(y)$ $x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \Delta x = f^{-1}(x_0 + y) - f^{-1}(y_0)$

$\Delta y \to 0,\ \Delta x \to 0$

Рассмотрим $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow (f^{-1})'(y^0)$■.

Замечание. Если заранее известно, что функция и *f(x),* $f^{-1}(y)$ –дифференцируемы, соответственно в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$, то в окрестности точки x_0определена сложная функция:

$$F\,(x) = f^{-1}(f(x))$$

.

$$f^{-1} * f = id \text{ - } \textit{тождественная функция}$$

По формуле производной сложной функции, что производная тождественной функции в соответствующих точках будет равна

$$\left(id\ (x_0)\right)' = (f^{-1})' * f'(x_0)=1$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ при } f'(x_0) \neq 0$$

Отметим, что дифференциал $df(x_0)$называют первым дифференциалом, т.к. существуют дифференциалы более высших порядков, которые мы будем изучать дальше.

Инвариантность формы записи 1-го дифференциала

Лемма. Дифференциал $df(x)$ имеет форму записи $df(x)\ * dx$ независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией x=$\varphi\ (t)$.

Доказательство:

Заметим, что если g (x)= X, то $dx = dg(x) * \Delta x = 1 * \Delta x,$ т. е. $dx = \ \Delta x -$ константа

Если x – независимая переменная, то

$df(x_0) * df(x_0)\Delta x = dx,$ где $dx = \ \Delta x$ -

Если функция $f(x) = f\ \left(\varphi(t)\right) = F(t),$ то $x = \ \varphi(t)$

$dF(t_0)df\ = F'(t_0) * \varphi'(t_0) * dt = f'(x_0) * dx,$ где $dx = \ \varphi'(t_0)*dt$

Мы видим, что в обоих случаях df (x_0) =$f'(x_0)$,

Где $dx = \Delta x,$ x – независимая переменная $dx = \ \varphi(t_0) * dt,$ если $x = \varphi(x_0) * dt$

Доказательство:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x))}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]\pm[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} =$

2) $\left(f'(x) * g'(x)\right)' = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)*g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)*g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\,[f(x+\Delta x)-f(x)]+f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}=$$

$$=f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$$

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta X)}{g(x+\Delta X)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x*g(x)*g(x+x\Delta)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]-f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x*g(x)*g(x+x\Delta)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g\prime(x)}{g^2(x)}\ \blacksquare.$$

Лекция 16. Производные и дифференциалы. Производные высших порядков.

Теорема. Пусть f(x) и g(x) – дифференцируемы в точке x, тогда f(x) $\pm$ g(x), f(x) *g(x), и если g(x) $\neq 0$, то и $\frac{f(x)}{g(x)}$ – дифференцируема в точке x, и их производные вычисляются по следующим правилам:

1) $(\mathrm{f(x)} \neq \mathrm{g(x)})' = f'(x) \pm g'(x)$
2) $(\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)})' = f'(x) * g(x) + f(x) + g'(x)$
3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)+g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2x}$

Необходимо иметь ввиду, что
$(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \neq g(x)$
$(f * g)(x) \coloneqq f(x) * g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}$

Правила вычисления дифференциалов от $f \pm$g, f+g, $\frac{f}{g}$

df $(\mathrm{x}, \Delta x) = f'(x) * \Delta$x, где x – независимая переменная, = > $\Delta x = dx$ - константа

Следствие. f (x), g(x) дифференцируемы в точке x.

Тогда:

1) $d(f \pm g)(x; \Delta x) = df(x; \Delta x) \pm dg(x; \Delta x)$
2) $d(fg)(x; \Delta x) = df(x; \Delta x)g(x) + f(x)dg(x; \Delta x)$
3) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x; \Delta x) = \frac{df(x;\Delta x)g(x)-f(x)-dg(x;\Delta x)}{g^2(x)}$

[Пример]

Рассмотрим, когда функция непрерывна, но не дифференцируема в некоторой точке.

f (x) = $|x| = \begin{Bmatrix} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{Bmatrix}$

Непрерывность f(x) очевидна.

В частности, в точке x = 0:

$|x| = 0 \;\; => f(x) = |x| \to 0$

f (x) = $|x| -$ непрерывна на R.

Рассмотрим производные f'(x) в точке x

1) Пусть x > 0 => $|x| = x$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

2) Пусть x < 0

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = -\lim_{x\to 0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Производные простейших элементарных функций

$$(\sin x)' = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x$$

$$(\cos x)' = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x^1}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x * \cos x + \sin x * \sin x}{cos\,^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x * \sin x - \cos x * \cos x}{sin\,^2 x} = \frac{-1}{cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} y = \arcsin x \\ x = \sin y \end{pmatrix}$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} y = \arccos x \\ x = \cos y \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1/cos^2 y} = cos^2 y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} y = \operatorname{arctg} x \\ x = tg\ y \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = -sin^2 y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} y = \operatorname{arctg} x \\ x = ctg\ y \end{pmatrix}$$

$$(a^x)' = \lim_{x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x(a^{x-1})}{\Delta x} = a^x * lna$$

если a > 0

9a) $(e^x)' = e^x$

$$(\log_a x)' = \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) - \log_a x}{\frac{\Delta x}{x} * x} = \lim_{x\to lna} \frac{lna\ (1+\frac{\Delta x}{x}) - \log_a x}{lna * x * \frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x * lna}$$

$$(lna\ x)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha lnx})' = e^{\alpha lnx} * \alpha * \frac{1}{x} = x^\alpha * \alpha * \frac{1}{x} = \alpha * x^{\alpha-1}$$

$x > 0$ $\varphi(x) = \alpha lnx$, $f(y) = e^y$

Таблица производных и дифференциалов:

Функция f (x)	Производная f′ (x)	Дифференциал df (x), Δx
sin x	cos x	cos x *Δx
cos x	-sin x	-sin x *Δx
tg x	$1/cos^2 x$	$dx/cos^2 x$
ctg x	$-1/sin^2 x$	$-dx/sin^2 x$

arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$
arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$
a^x	$a^x * lna$	$a^x * lna * dx$
$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$	$\frac{dx}{xlna}$
x^α	$\alpha * x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1} * dx$

Применение 1-го дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть *f(x)* дифференцируема в точке x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'^{(x_0+\Delta x)} \approx \bar{o}(\Delta x)$ при $x \to 0$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0; \Delta x) -$
приближенная формула с погрешностью $\bar{o}(\Delta x)$ при $x \to 0$

[Примеры]

1. $\mathrm{f}(x) = \sin x$
   $x_0 = 0$
   $\Delta x = x$
   $\sin x = \sin 0 + \cos 0 * x = 0 + x$
   $=> \sin \mathrm{x} \approx x$ при $x \to 0$

2. $f(x) = e^x$
   $x_0 = 0$
   $\Delta x = x$
   $e^x = e^0 + e^0 * x = 1 + x$

$e^x \approx 1 + x$ при малом x

Дифференцирование с помощью логарифмирования

Этот приём вычисления производных применяется в следующих двух случаях:

1. f (x) – показательно-степенная функция
$$f(x) = u(x)^{v(x)} \quad u, v - \text{дифференцируемы}$$
2. $f(x) = \frac{g_1(x) \ldots\ldots g_k(x)}{\varphi_1(x) \ldots\ldots \varphi_1(m)}$

$g_i(x), \varphi_j(x) - \text{дифференцируемы}$
$$1 \le i \le x, 1 \le j \le m$$

Приём заключается в том, что сначала f (x) логарифмируют, вычисляют производную от её логарифма, ⇒ затем вычисляют производную самой функции $f'(x)$.

Производные высших порядков

Пусть $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале ⇒ $f'(x)$ – это функция на этом интервале.

Предположим, что $f'(x)'^{x_0}$– называется второй производной (II порядка) от функции *f(x)* в точке x_0 и обозначается $f''(x_0) = (f'(x_0)'$.

Аналогично, n-ой производной или производной n-го порядка от функции f в точке x_0 называется

$$f^n(x_0) \coloneqq (f^{(n-0)}(x_0)$$

Предположим, что $f(x)$ - (n-1) раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $(f^{(n-1)}(x_0)$ определена в точке x_0.

Замечание. $f^{(0)}(x)! = f(x)$

Формула Лейбница

Теорема. Пусть f(x), g(x) - n-1раз дифференцируема n-раз в точки x_0.

Тогда

$$(\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) * g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство:

По индукции.

При <u>n = 1</u>: $\left(\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)}\right)' = f'(x)g(x) + f(x) * g'(x)$ (#)

<u>*Шаг индукции:*</u> предполагается, что (#) верна для n. Покажем, что она верна для n+1.

$$(\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)})^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) * g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n+1-k)}(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) + \sum_{m=0}^{n} C_n^m f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (C_n^{m-1} + C_n^m) f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) + C_m^n f^{(m)}(x) g(x) + C_n^0 f(x) g^{(n+1)}(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) \blacksquare.$$

[Пример]

$f(x) = e^x(1 + 2x + 3x^2)$

<u>$f^{(12)}(x) - ?$</u>

$$f^{(12)}(x) = (e^x)^{(12)} e^x(1 + 2x + 3x^2) + 12\,(e^x)^{(11)}(2 + 6x) + \frac{12 * 11}{2}(e^x)^{(10)} * 6$$
$$+ \frac{12 * 11 * 10}{3!}(e^x)^{(9)} * 0 + 0 \ldots\ldots = e^x(1 + 2x + 3x^2 + 24 + 72x + 396)$$
$$= \cdots.$$

Лекция 17. Дифференциалы высших порядков

Пусть *f(x)* дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 - U(x_0)$

$\mathrm{df}\left(\mathrm{x}_{0,}\mathrm{dx}\right) = \mathrm{f}'(x_0) * dx \;\Rightarrow$

В $\forall x \;\in U(x_0)$ $\;\mathrm{df}\,(\mathrm{x};\ \mathrm{dx}) = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) * \mathrm{dx}$

Пусть $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) -$ дифференцируема в $U(x_0)$, $\Rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x})\ \mathrm{dx}$ – дифференцируема.

$$d\big(df(x_0), dx)\big) = d(f'(x) * dx; dx))$$

<u>*Опр.*</u> Дифференциалом n-го порядка от f(x); n-раз дифференцируемой в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 с приращением dx, называется

$$d(d^{n-1}(f_{(x0)}, dx)$$

Если x – называется переменной, то $d^2\big(f(x_0), dx)\big) = f''(x_0)(dx)^2$

Аналогично,

$$d^n\big(f(x_0), dx)\big) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$$

Предположим теперь, что x = x(t) dx = x (t) dt t- независимая переменная

Тогда f (x) = f (x(t)) – сложная функция.

В силу инвариантности формы записи df, $df\ (x{:}\,dx) = f'(x) * dx$

$$d^2 f(x, dx) \coloneqq d\big(\mathrm{df}\,(\mathrm{x};\ \mathrm{dx})\big) = \mathrm{d}(\mathrm{f}'(\mathrm{x}) * \mathrm{dx})) = (\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx})' * \mathrm{dx} =$$
$$= \mathrm{d}(\mathrm{f}'(\mathrm{x}) * \mathrm{dx} + \mathrm{f}'(\mathrm{x}) * \mathrm{d}(\mathrm{dx}) = f''(x)(dx)^2 + f'(x) + d^2x$$

<u>Замечание.</u> II-дифференциал не обладает инвариантной формой записи.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

y = f (x) – явное задание f (x)

<u>*Опр.*</u> Говорят, что y = y (x) *задана на множестве D параметрически*, если заданы на некотором множестве T$\leq R$ следующие функции:

$$\varphi{:}\,T \to D, \Psi{:}\,D \to R$$

При этом

$$y(x): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Psi(\mathrm{t}) \end{cases} t \in T, \exists \varphi^{-1}: D \to T => \ y_{(x)} = \Psi(\varphi^{-1}(\mathrm{x}))$$

Пусть $\varphi(t), \Psi(\mathrm{t})$ – дифференцируемы на T, dt = $\Delta T \neq 0$ (t – независимая переменная)

$\Rightarrow \mathrm{dx} \neq 0,$ где

$$dy = \ \Psi'(\mathrm{t})dt, dx = \varphi(t)dt \Rightarrow \ y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Psi'(\mathrm{t})}{\varphi(t)}$$

Запишем $y'(x)$ как функцию, заданную параметрически:

$$y_x{}'(x): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y_x{}' = y_x{}'(\mathrm{t}) \end{cases}$$

Тогда II производная

$$y''_{xx}(t) = (y'_x)'_x(\mathrm{t}) = \frac{(y'_x\ )'_t}{\varphi'(t)} = \frac{(\frac{\Psi'(\mathrm{t})}{\varphi\prime(t)})}{\varphi'(t)} = \frac{\Psi'\prime(\mathrm{t}) * \varphi'^{(t)} - \Psi'(\mathrm{t})\varphi'\prime(t)}{[\varphi\prime(t)]^2 * \varphi\prime(t)} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi\prime(t) & \Psi'(\mathrm{t}) \\ \varphi\prime\prime(t) & \Psi''(\mathrm{t}) \end{vmatrix}}{[\varphi'^{(t)}]^3} = \ y''_{xx}(t)$$

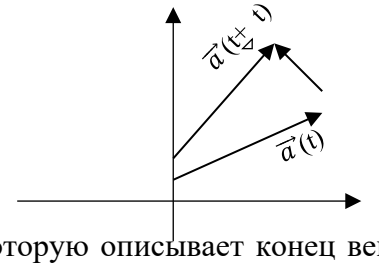
$$y_{xx}^{''(x)}: \{ \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y_{xx}{}'' = y_{xx}{}''(\mathrm{t}) \end{matrix}$$

Вектор-функция и её производные

<u>*Опр.*</u> Вектор-функцией (рис.17.1) называется функция вида $\vec{a}(t)\{x(t), y(t)\}$ $t \in [0; T]$

Предположим, что $x(t), y(t)$ дифференцируемы на $[0; T]$.

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \{x'^{(t)}, y'^{(t)}\} \quad t \in \qquad [0; T] \quad t + \Delta t \ \in [0; T]$$



Годограф $\vec{a}(t)$ – это кривая, которую описывает конец вектора $\vec{a}(t)$ при изменении параметра t.

рис. 17.1 Вектор-функция

Возрастание и убывание функции в точке

Пусть задана f (x) в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки (x_0).

Опр. Говорят, что функция f(x) *возрастает (убывает) в точке точки* x_0, если для любой точки выполняется условие $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ верно, что

$$(f(x) - f(x_0)(x - x_0) > 0 \ (< 0)$$

Существуют примеры, когда f (x) возрастает в точке x_0, но не является ни в какой малой окрестности $U(x_0)$.

Лемма. Достаточны условия возрастая (убывания) функции в точке.

Пусть f (x) – дифференцируема в точке (x_0). Пусть $f'^{(x_0)} > 0 \ (< 0)$.

Тогда f (x) возрастает (убывает) в точке (x_0).

Доказательство:

$f'(x_0) \coloneqq \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta t} = A > 0 \ (< 0)$.

$\Rightarrow$ в некоторой окрестности $\dot{U}_0(x_0)$ будет $\frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta t} > 0 \ (< 0)$

Следовательно, f (x) возрастает (убывает) в точке (x_0) ■.

Замечание. Условие $f'(x_0) \ (< 0)$ не является необходимым возрастания (убывания) функции f (x) в точке (x_0)

[Пример]

$y = f\ (x) = x^3$ – возрастает на R, но $f'(0) = {3x^2}/_{x\ =\ 0} = 0$

Локальный экстремум функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$.

Опр. Точке (x_0) называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если $\exists\delta > 0$, что для $\forall x \in \dot{U}_0(x_0)$ верно, что $f\ (x_0) \geq f(x)$ $\quad f\ (x_0) \leq f(x)$

В обоих случаях точка (x_0) называется точкой локального экстремума $f(x)$.

Опр. Точке (x_0) называется *точкой строгого локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если

$\exists\delta > 0$, что для $\forall x \in \dot{U}_0(x_0)$ верно, что $f\ (x_0) > f(x)$ $\quad f\ (x_0) < f(x)$

В обоих случаях точка (x_0) называется точкой *строгого локального экстремума* $f(x)$.

Теорема Ферма. Пусть f (x) – дифференцируема в точке (x_0) и (x_0) – точка её локального экстремума f (x).

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство:

Заметим, что, т.к. (x_0) – точка её локального экстремума f (x), то функция f (x)

не может возрастать в точке (x_0) и не может убывать в точке (x_0).

Значит, что $f'(x_0)$ не может быть > 0 или < 0.

Следовательно, $f'(x_0) = 0$ ■.

Свойства функций, дифференцируемых на интервале

Теорема (Ролля).

Пусть функция f (x) – непрерывна на интервале [a; b] и дифференцируема на (a; b) и пусть f (a) = f (b).

Тогда $\exists\ c, a < c < b,$ что $f'(c) = 0$.

Доказательство:

Т.к. f (x) непрерывна на интервале [a; b], то f (x) достигает (II терема Вейерштрасса) своих наименьших и наибольших значений на [a; b].

Если $\sup f(x) = \inf f(x) = A => f\ (x) = A => f'(x_0) = 0$.

Предполагаем, что $\sup f(x) \neq \inf f(x) =>$ либо sup либо inf достигается в некоторой точке $C \in (a; b)$.

Следовательно, С – точка локального экстремума функции $f(x)$.

$=> f'(c) = 0$ ■.

Теорема (Лагранжа). Пусть функция f (x) – непрерывна на интервале [a; b] и дифференцируема на (a; b).

Тогда $\exists\ \Xi \in (a; b)$, что

$$f'(\Xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} <=> f(b) - f(a) = f'(\Xi)(\mathrm{b} - \mathrm{a})$$

Это и есть формула конечных превращений Лагранжа.

Доказательство

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)]$

Она непрерывна на [a; b] и дифференцируема на (a; b) ⇒по теореме Ролля, $\exists\ \Xi \in (a; b)$, что $F'(\Xi) = 0$

$F'(\Xi) = f'(\Xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$f'(\Xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■.

Следствия из теоремы Лагранжа

Критерий постоянства функции

Для того, чтобы дифференцируемая на $(a; b)$ функция f (x) была постоянной, N и D, чтобы $f'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a; b)$

<u>*Необходимость*</u>. Пусть функция $f(x) = C, \forall\, x \in (a; b)$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 =>\ f(x_0) = 0,\ \forall\, x, x_0 \in (a; b)$

<u>*Достаточность.*</u> Пусть $f'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a; b)$

Рассмотрим $\forall\, x, x_0 \in (a; b)\ \ x \neq 0$

[x; x_0] (или [x_0; x]) функция f (x) – непрерывна и дифференцируема на (x; x_0).

По теореме Лагранжа, ∃ Ξ ∈ [x; x_0] (Ξ ∈ [x_0; x]), что

$0 = f'(\Xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} => f(x) = f(x_0)$

$f(x)\ - constanta$ на $(a; b)$ ■.

Критерий монотонности функции $f(x)$

Дифференцируемая на $(a; b)$ функция f (x) является монотонной тогда и только тогда, когда f (x) не меняет знак на $(a; b)$.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть функция $f(x)$ – неубывающая на $(a; b), x_0 < 0,\ \ x_0$; x∈ $(a; b)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\Xi) \geq 0 \quad \forall \Xi \in [x_0;\ x]$$

Покажем, что это верно для $f'(\Xi) = \lim\limits_{x\to\Xi} f' \frac{f(x)-f'(\Xi)}{x-\Xi} \geq 0$

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a; b)$.

Рассмотри произвольные точки $\forall\, x,\ x_0 \in (a; b)$ $\ x_0 \neq$ x по теореме Лагранжа для [x_0; x] (или [x; x_0]).
=> x > x_0, то $f(x) \geq f(x_0)$, т.е. $f(x)$ – не убывает на $(a; b)$.

Аналогично, если $f'(x) \leq 0 => f(x)$ – не убывает на $(a; b)$■.

Достаточное условие для строгой монотонной функции f(x)

Если $f'(x) = 0,\ \forall\, x \in (a; b)$, то $f(x)$ – возрастает, убывает на $(a; b)$.

Доказательство:

Возьмём ∀ $x_0, x\ \in (a; b), x_0 < x$

По теореме Лагранжа, на [x_0; x]: ∃ Ξ ∈ [x_0; x], что $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'^{(\Xi)} > 0\ (< 0)$

$=> f(x) > f(x_0)\ \ \big(f(x) < f(x_0)\big) => f(x) -$ возрастает (убывает)на $(a; b)$ ■.

Замечание. Достаточное условие в Следствии 3 не является необходимым, т.е. существуют строго монотонные функции, у которых не выполнено это условие.

Лекция 18. Следствия из теоремы Лагранжа. Теорема Коши.

Теорема Коши

Теорема Коши.

Пусть f (x), g (x) – непрерывна на [a;b] и дифференцируемы на (a; b).

причём $g'(x) \neq 0, \qquad \forall x \in (a; b)$.

Тогда $\exists \Xi \in (a; b)$, для которых верна формула Коши конечных превращений:

$$\frac{f'(\Xi)}{g'(\Xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Замечание.
Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, иначе по теореме Ролля в некоторой точке C было бы

$$g'(\mathrm{c}) = 0, c \in (a, b)$$

Доказательство:

Рассмотрим функцию $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * (\mathrm{g}\ (\mathrm{x}) - \mathrm{g}\ (\mathrm{a}))$

$\phi(x) -$ непрерывна на [a;b] и дифференцируемы на (a; b).

$\phi(a) = 0, \phi(b) = 0$

$\Rightarrow$ по теореме Ролля, $\exists\ \Xi \in (a; b)$, что $\phi'(\Xi) = 0$

$\phi'^{(\Xi)} = f'(\Xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * \mathrm{g}'(\Xi) = 0$

$\frac{f'(\Xi)}{g'(\Xi)} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ■.

Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя.

<u>Опр.</u> Пределы некоторых выражений называют неопределённостями, если нельзя вычислить их, с помощью арифметических операций над пределами сомножителей или пределами сложных функций.

Неопределённости бывают следующих видов:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty, 0 * \infty, \infty - \infty$$

Говорят, что предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0^0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)^{\beta x} = 0^0$, если α (x), $\beta(x)$ – большие малые при $x \to x_0$.

Аналогично определяются остальные варианты.

<u>Опр.</u> Раскрыть неопределённость – это значит вычислить соответствующий предел.

Теорема. *(I правило Лопиталя)*

Пусть f (x), g (x) – дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$, и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Пусть также $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\ (const.)$, причём g(x) $\neq 0$, $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$ A

Доказательство:

Рассмотрим $\forall x \in \dot{U}(x_0)$.

Предположим, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$f(x), g(x) -$ непрерывна на $[x;\ x_0]$ (или $[x_0; x]$, если $x > x_0$) и дифференцируемы на $(x;\ x_0)$ (или $(x_0; x)$).

Тогда по *Теореме Коши*, $\exists\ \Xi \in$ (x, x_0) (или $\Xi \in (x_0; x)$), что $\frac{f'(\Xi)}{g'(\Xi)} = \frac{f(x_0)-f(x)}{g\ (x_0)-g(x)}$.

Возьмём теперь $\forall$ последовательность $\left\{x_n \Xi, x_n \to x_{\underset{n\to\infty}{0}}, x_n \in \dot{U}\right\}$.

Для $\forall$ точки x_0 найдётся Ξ_n, что $\frac{f'(\Xi_n)}{g'(\Xi_n)} = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{g\ (x_n)-g(x_0)}$, n $\in \mathbb{N}$, $\Xi \in (x_0; x)$ (или $(x;\ x_0)$). $\frac{f'(\Xi_n)}{g'(\Xi_n)} = \frac{f(x_n)}{g\ (x_n)}$

Из условия $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(\Xi)}{g'(\Xi)} = A$

По определению предела функции по Гейне, имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ■.

Следствие. I правило Лопиталя верно также для случая, когда x_0 – бесконечная $(+\infty, -\infty, \infty)$.

Доказательство:

Рассмотрим случай $x_0 = \infty$,

т.е. $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0, \exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}} = A$ (конст. или нет)

Обозначим, $y = \frac{1}{x} <=> x = \frac{1}{y}$, $\begin{matrix} f(x) = & f\left(\frac{1}{y}\right) = & F(y) \\ g(x) & g\left(\frac{1}{y}\right) & \tilde{g}\,(y) \end{matrix}$

<u>*Условия*</u> : $\lim\limits_{y\to 0} \mathrm{F}(y) = \lim\limits_{y\to 0} \tilde{g}\,(y) = 0, \exists \lim\limits_{y\to 0} \frac{F'(y)*\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\tilde{g}\,(y)*\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = A$

по I правилу Лопиталя $\lim\limits_{y\to 0} \frac{F'(y)}{\tilde{g}\,(y)} = A => \exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ ■.

Аналогично доказываются *следствия* для случаев $x \to +\infty, x \to -\infty$.

Теорема. *(II правило Лопиталя)*

Пусть f (x), g (x) – дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности

$\dot{U}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$.

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty, \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty,\ \ \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конст. или нет).

$\mathrm{G}'(\mathrm{x}) \neq 0,\ \ \forall x \in \dot{U}(x_0)$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \mathrm{A}$

Доказательство:

(Без доказательства.)

Лекция 19. Раскрытие неопределенностей. Формула Тейлора-Маклорена.

Формула Тейлора

Теорема. (*Формула Тейлора с остаточным членом в общей формуле)*

Пусть задана функция $f(x)$ (n+1) раз дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$.

Тогда для $\forall \mathrm{p} > 0$ и для $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ верна формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'^{(x_0)}}{1!}(x - x_0) + \frac{f''^{(x_0)}}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n, \text{где}$$

$\exists\, \Xi \in (x;\ x_0)$ (или (x_0, x)), что $R_n(x) = \frac{(x-\Xi)^{n+1}}{n!p}\left(\frac{x-x_0}{x-\Xi}\right)^p f^{n+1}(\Xi)$ – остаточный член Формулы Тейлора в форме Шлёмильх-Роша.

Доказательство:

Обозначим $T_n(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$ – n-й многочлен Тейлора.

Заметим, что $T_n(x, x) = f(x)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию.

$\varphi(t) = f(x) - T_n(x, t) - \left(\frac{x-t}{x-\mathrm{a}}\right) R_n(x)$

$\varphi(x) = 0$ $\varphi(a) = 0$, то есть

$\varphi(t) = 0$ удовлетворяет Теореме Ролля на отрезке $[a; x]$ (или $[x; a]$).

Тогда по Теореме Ролля, $\exists\, \Xi \in (a; x)$(или $[x; a]$)такая, что $\varphi'(\Xi) = 0$.

Вычислим $T_n(x, t)_t{}' = \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\right]' =$

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n = T_n(x, t)_t{}'$$

Рассмотрим производную функции

$\varphi(t) = f(x) - T_n(x, t) - \left(\frac{x-t}{x-\mathrm{a}}\right) R_n(x)$

$\varphi'^{(t)} = \frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-t)^n + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p}R_n(x) = 0$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{n!p}(x-\Xi)^n\frac{(x-a)^p}{(x-\Xi)^{p-1}} = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{n!p}(x-\Xi)^{n+1}\left(\frac{x-a}{x-\Xi}\right)^p$

Следствия Формулы Тейлора

Следствие 1

Пусть $p = n+1$. Тогда в условиях теоремы Тейлора верна формула Тейлора с остаточным членом в виде

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$ – формула Лангранжа

Доказательство:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{n!\,(n+1)}(x-\Xi)^{n+1}\left(\frac{x-a}{x-\Xi}\right)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\blacksquare.$$

Следствие 2

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши

Пусть выполним условия Теоремы Тейлора, т.е. функция $f(x)$ (n+1) раз дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$. Тогда для $\forall x \in \dot{U}(x_0)$,

$$\exists\Xi = a + \theta(x-a), <=> \exists\theta\ 0 < \theta < 1$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(\mathrm{a} + \theta\,(x-a)\big)}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n$$

Доказательство:

Возьмём в общей форме остаточного члена $R_n(x)$ p = 1

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{n!}(x-\Xi)^{n+1}\left(\frac{x-a}{x-\Xi}\right) =$

$=\big(\Xi = a + \theta(x-a)\big) = \frac{f^{(n+1)}\big(\mathrm{a}+\theta\,(x-a)\big)}{n!}\big(x-(a+\theta\,(x-a)\big)^n + (x-a) =$

$=\frac{f^{(n+1)}\big(\mathrm{a}+\theta\,(x-a)\big)^{n!}}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n = R_n(x)\ \blacksquare.$

Теорема Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть задана функция $f(x)$ (n+1) раз дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$, и n-раз дифференцирована в точке a.

Тогда справедлива формула Тейлора:

для $\forall x \in \dot{U}(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n,$$

где $R_n(x) = \bar{0}\,((x-a)^n)$ – остаточный член в форме Пеано.

Доказательство:

Сравним значения f (x) и её производных в точке a со значением и производными многочлена Тейлора $T_n(x,a)$.

$R_n(x) \coloneqq f\,(x) - T_n(x,a) =>$

$$=> \begin{array}{rcl} Rn_{(a)} = & 0 \\ Rn'_{(a)} = & 0 \\ Rn^{(n)}{}_{(a)} = & 0 \end{array}$$

Вычислим предел:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \frac{R'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \frac{R'_n(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}{}_n(x)}{(x-a)} =$
$\frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(a)}{(x-a)}$ ■.

Оценка остаточного члена формулы Тейлора

Пусть задана функция $f(x)$ (n+1) раз дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$, и $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в U(a), т.е. $\exists\, M > 0$, что $\left[\, f^{(n+1)}(x)\right] \le M, \forall x \in U(a)$.

Тогда

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\Xi)}{(n+1)!}(x-\mathrm{a})^{n+1}\right| \le \frac{M * |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \to_{x\to\infty} 0$$

Формулы Маклорена

Формула Маклорена – это формула Тейлора a = 0.

Рассмотрим формулы Маклорена для некоторых простейших элементарных функций.

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \overline{0}\,(x^n)$

2) Sin x = x - $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2n+1)!}(-0) + \overline{0}\,(x^{2k+2})$

3) Cos x = x - $\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \overline{0}\,(x^{2k+1})$

4) $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots m(n-1)}{n!}x^n + \overline{0}\,(x^n)$

5) $\ln(1+x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \to \overline{0}\,(x^n)$

Применение формулы Тейлора-Маклорена для приближённых вычислений

[Пример]

Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001

$\sqrt{e} = e^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} + \frac{e^3}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, где $\frac{e^3}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = R_n(x)$

Нужно, чтобы этот остаточный член был меньше 0,001

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^3}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| < 0{,}001$$

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{24 * 16} = \frac{211}{128} = 1{,}648 \approx 1{,}65$$

Единственность разложения функции по формуле Тейлора

Пусть задана функция $f(x)$ (n+1) раз дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$, и n − раз в точке a.

Если получено 2 разложения f (x):

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n + \bar{0}((x-a)^n)$$

$$f(x) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1(x-a) + \cdots + \tilde{A}_n(x-a)^n + \bar{0}((x-a)^n)$$

$A_k = \widetilde{A_k}$, k = 0, 1,…, n, и $A_k = \frac{f^{(x)}(a)}{k!}, k == 0, 1, \dots, \mathrm{n}$

Лекция 20. Неопределённый интеграл. Комплексные числа.

$f(x) - n - 1$ раз дифференцируема в $U(a)$ и n раз дифференцируема в точке a

Получены два разложения функции

$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n + \bar{O}((x-a)^n)$ $x \to a$

$f(x) = \widetilde{A_0} + \tilde{A}_1(x-a) + \cdots + \tilde{A}_n(x-a)^n + \bar{O}((x-a)^n) x \to a$

Тогда $A_k = \widetilde{A_k} = \frac{f^{(k)}(a)}{K!}$, где k= 0,1, 2,..,n для $\forall\, x \in \dot{U}(a)$

Доказательство:

$A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n = \widetilde{A_0} + \widetilde{A_1}(x-a) + \cdots + \widetilde{A_n}(x-a)^n + \bar{O}((x-a)^n)$ $x \to a$

Перейдём к пределу при $x \to a$ Если две функции совпадают, то совпадают и их пределы, если они существуют.

$A_0 = \widetilde{A_0} + 0$ => $A_0 = \widetilde{A_0}$ => убираем эти коэффициенты из равенства

$$A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n = \tilde{A}_1(x-a) + \cdots + \tilde{A}_n(x-a)^n + \bar{O}((x-a)^n)$$

Поделим обе части на $(x-a)$

$$A_1 + A_2(x-a) \ldots + A_n(x-a)^n = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2(x-a) + \cdots + \tilde{A}_n(x-a)^n + \bar{O}((x-a)^{n-1})$$

$$\frac{\bar{O}((x-a)^n)}{(x-a)} = \bar{O}((x-a)^{n-1}) \text{ по определению}$$

Перейдём к пределу:

$A_1 = \widetilde{A_1}$, => убираем эти коэффициенты из равенства, делим на $(x-a)$ и тд

На n-1 шаге получим

$A_n(x-a) = \widetilde{A_n}(x-a) + \bar{O}(x-a)$ => Поделим обе части на $(x-a)$

$A_n = \widetilde{A_n} + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$ *(пиано)*

⇨ $A_n = \widetilde{A_n}$ => $A_k = \widetilde{A_k} = \frac{f^{(k)}(a)}{K!}$

⇨ т.е. коэффициенты совпадут с коэффициентами разложения по Тейлору ■.

Неопределённый интеграл

Литература: «Неопределённый интеграл …» автор Е.В. Хорошилова, издательство «Юрайт» 201

Опр. Пусть $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ конечном или нет. Пусть на этом же интервале определена функция $F(x)$ удовлетворяющая условиям

$\exists F'(x) = f(x)$ тогда функция $F(x)$ называется первообразной от $f(x)$ на интервале $(a;b)$

Заметим, что если $G(x) = F(x) + C$ ⇔ $G'(x) = F'(x)$ => Первообразная функция определена с точностью до константны.

Опр. *Неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех её первообразных.

$\int f(x)dx \coloneqq F(x) + C$, где $F'(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$, C $\forall$ const

Свойства неопределённого интеграла

Связь между операциями интегрирования и дифференцирования

1. Пусть $f(x)$ дифференцируемая => $\int\big(df(x)\big) = \int f'(x)dx = f(x) + C$
2. $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$
3. Свойство линейности пусть $\exists \int f(x)dx = F(x) + C, \exists \int g(x)dx = G(x) + \tilde{C}$, $\propto$ $,\beta \in \mathbb{R}$ тогда $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \tilde{C}$
   $\big(\alpha F(x) + \beta G(x)\big)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$, а первообразная $\alpha F(x) + \beta G(x)$

Таблица неопределённых интегралов от некоторых функций

1. $\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
2. $\int \cos x dx = \sin x + C$
3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$
   |x|>1, =>
   $\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm 1}}\left(1 + \frac{8x}{8\sqrt{x^2\pm 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}$
   $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$
   $\ln|x| = \ln x,$ при $x > 0$
   $\ln|x| = \ln(-x),$ при $x < 0$
   $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ при $x > 0$
   $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{(-)x}(-1) = \frac{1}{x}$
7. $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

<u>*Замечание.*</u> Не всегда интеграл от элементарной функции выражается в виде элементарной функции.

[Примеры]

1. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(x)$ функция Лапласса
   $\Phi(0) = 0$ её значения задаются в таблице

2. Интегралы Френеля (используются в оптике) задаются в таблицах
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

Основные приёмы вычисления неопределённого интеграла (замена переменной и интегрирование по частям)

1. *Замена переменной*

Пусть нужно вычислить $x \in (a; b)$
$$\int f(x)dx$$
Если $\exists\ \varphi(t)$ на $(\alpha; \beta), \varphi: (\alpha; \beta) \to (a; b)$где $\varphi(t)$ дифференцируема на $(\alpha; \beta)$
$$x = \varphi(t)$$
$F(x) + C = \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int g(t)dt$, где $g(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$
$$F'(x) = f(x)$$
⇨ Первообразная для $g(t)$: $F(\varphi(t))$

$$\left(F\left(\varphi(t)\right)\right)_t' = F'(x)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = g(t)$$

2. *Интегрирование по частям*

Пусть $U(x), V(x)$ дифференцируемы на отрезке (a;b)

(UV)'=$U'V + UV'$

$\int$(U'V + UV') $dx = UV + C$

По свойству линейности распишем сумму интегралов

$\int UV'\,dx = \int U\,dv = UV - \int V du$, *где* $dv = V'dx$

Это есть формула интегрирования по частям.

[Примеры вычисления неопределенных интегралов]

$\int x\sin^{-1}x\,dx \qquad U = \sin^{-1}x,\ \ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ V = \frac{x^2}{2},\ \ dv = xdx$

$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{(-x)xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

Для разложения интеграла применим формулу разложения по частям, где

$$U = x, du = dx, dv = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}, V = \sqrt{1-x^2}$$

$\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx) = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} -$
$\frac{1}{4}(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}) + C = \frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}\right] + C$

$$j = \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + \int\frac{x(-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$j = \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2}) + C$

1) $\int\frac{dx}{(dx+7)^{1980}} = \begin{pmatrix} 2x+7 = z \\ 2dx = dz \\ dx = \frac{1}{2}dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^{1980}} = \frac{1}{2}\int z^{1980}\,dz = \frac{1}{2}\frac{z^{-1980+1}}{-1980+1} + c =$

$$= -\frac{1}{1979 * 2 * z^{1979}} + C$$

Рациональные функции (дробей)

Опр. Многочленом (вещественным) от переменной x в степени $n \in N$ называется выражение вида

$Q_n = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n$, *где*

$q_i \in R, q_n \neq 0$, *где* $x \in R -$ переменная

при n = 0 – это константа

Опр. Рациональной (вещественной) функцией (дробью) называется функция вида:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – вещественные многочлены степеней m и n соответственно.
При m < n функция $R(x)$ – называется правильной дробью.

Краткие сведения о комплексных числах

Опр. Комплексным числом называют выражение вида:

$$Z = a + bi, \text{где } a, b \in R,$$

i – специальный символ, удовлетворяющий условию:

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow (i^2) = -1$$

i – мнимая единица

Геометрический смысл и операции над комплексными числами

$Z = a + bi \longrightarrow (a; b)$на плоскости,

$U = c + di$
$a = Rez -$ вещественная часть Z
$b = I_m z -$ мнимая часть z
$z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
$Z \pm U = (a \pm c) + (b \neq d)$

$$d * z = \alpha a - \alpha b$$

Умножение

$$Z * U = ac + bci + adi + bd(i)^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Сопряжённое комплексное число

$$\frac{Z}{U} = \frac{Z * \overline{U}}{U * \overline{U}} = c^2 + d^2 = |u^2| = \frac{Z * \overline{U}}{|u^2|} = \cdots$$

Модуль k числа:

Z =a+b; $|z| \coloneqq \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad |z| = |\bar{z}|$

Лекция 21. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Интегрирование дробно-рациональных уравнений.

$z = a + ib, \quad a, b \in \mathrm{R}$

$\mathbb{C}$ *-мн-во комплексных чисел*

$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, где $R_{ez} = a,\ I_{mz} = b$

$Z = |Z|(\frac{a}{|Z|} + \frac{b}{|Z|}i)$

$a = |Z|cos\varphi$, $b = |Z|sin\varphi$

- *Тригонометрическая форма записи комплексного числа:*
  $Z = |Z|(cos\varphi + isin\varphi)$

- *Форма записи комплексного числа по Л.Эйлеру:*
  $Z = |Z|\ e^{i\varphi}$
  $e^{i\varphi} := cos\varphi + isin\varphi$

- *Форма записи комплексного числа алгебраическая:*
  $Z = a + bi$

- *Многочлены от комплексной переменной Z:*
  $P_n(Z) = C_o + C_1Z + C_2Z^2 + \cdots + C_nZ^n$
  где $C_k \in \mathbb{Q}$, переменная $Z_n \in \mathbb{C}$, $C_n \neq 0$
  $Z = a + 0i = a \subset R \Longrightarrow R \subset \mathbb{C}$

Теорема. *(Основная теорема алгебры)*

Всякий комплексный многочлен $P_n(Z)$ $(n \geq 1)$ имеет хотя бы один корень,

т.е.] $Z_0 \in \mathbb{C}$, что $P_n(Z_0) = 0$

Без доказательства.

Следствие. Всякий комплексный многочлен $P_n(Z)$ $(n \geq 1)$ имеет n корней (необязательно различных)

Доказательство:

По основной теореме алгебры] Z_1, что $P_n(Z_1) = 0$ рассмотрим

$$P_n(Z) - P_n(Z_1) = P_n(Z) = C_1(Z - Z_1) + C_2(Z^2 - Z_1^2) + \cdots + +C_n(Z^n - Z_1^n) =$$
$$(Z - Z_1)[C_1 + C_2(Z + Z_1) + \cdots + C_n(Z^{n-1} + Z^{n-2}Z_1 + ZZ_1^{n-2} + Z_1^{n-1}] =$$
$$(Z - Z_1)[P_{n-1}(Z)] \Longrightarrow (Z - Z_1)(Z - Z_2)\, P_{n-2}(Z) \text{ в котором } C_n \neq 0$$

и так далее раскрывая многочлен:

$\Longrightarrow \quad P_n(Z) = C_n(Z - Z_1)(Z - Z_2) \ldots (Z - Z_n)$

Некоторые из корней могут совпадать, тогда

$P_n(Z) = C_n(Z - Z_1)^{k_1}(Z - Z_2)^{k_2} \ldots (Z - Z_n)^{k_m}$, где $K_1 + K_2 + \ldots + K_m = n$,

где K_i называется алгебраической кратностью корня Z_i ■.

Теорема. *(о корнях вещественного многочлена*

Рассмотрим многочлен F(Z) с вещественными коэффициентами

F(Z) =$a_0 + a_1Z + \ldots + a_nZ^n$ где $a_i \in R$ – т. е. вещественный коэффициент $a_n \neq 0$

Если комплексное число Z∈ ℂ является корнем вещественного многочлена F(Z), то сопряженное число $\overline{Z}$ тоже является его корнем.

Доказательство:

Заметим, что $\overline{U \pm V}$=$\overline{U}$±$\overline{V}$, $\overline{UV}$ = $\overline{U} \cdot \overline{V}$, где U=$a + ib$, V=$c + id$

$\overline{U \pm V}$= $a \pm c \pm (b \pm d)i = (a \pm c) - (b \pm d)i = (a - b_i) \pm (c - d_i) = \overline{U}$±$\overline{V}$

$\overline{UV}$ = $\overline{U} \cdot \overline{V}$ доказывается аналогично.

Пусть $Z_0 \in \mathbb{C}$ - корень F(Z) , т.е. $F(Z_0) = a_0 + a_1z_0 + \cdots + a_nz_n = 0$

$$\overline{F(Z_0)} = \overline{0} = 0 = \overline{a_0 + a_1z_0 + \cdots + a_nz_0^n} = \overline{a}_0 + \overline{a_1z_0} + \cdots + \overline{a_nz_0^n}$$
$$= a_0 + a_1\overline{z}_0 + \cdots + a_n(\overline{z}_0)^n = 0$$

Это означает, что $\overline{z}_0$ есть корень F(Z) ■.

Следствие. *О разложении вещественного многочлена на множители.*

Пусть $F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, где $a_n \neq 0$ и $n \geq 1$ и $x \in R$

Тогда $F(x) = a_n(x - x_1)^{k1} * \ldots * (x - x_m)^{km} * (x^2 + p_1x + q_1)^{l1} * \ldots * (x^2 + p_3x + q_3)^{l3}$

Где $k_1 + \cdots + k_m + 2(l_1 + \cdots + l_s) = n$ причём $p_i, q_i \in R$, и $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $a_n \neq 0$,

Доказательство:

По основной теореме алгебры и следствию из неё у $F(x)$] n комплексных корней, необязательно различных. Среди них часть является вещественными корнями $x_1, x_2, \ldots x_n \in P$ с соответствующими кратностями, остальные корни разбиваются на пары сопряженных друг другу.

$F(x) = a_n(x - x_1)^{k1} * \ldots * (x - x_m)^{km}[(x - z_1)(x - \bar{z}_1)]^{l1} \ldots [(x - z_s)(x - \bar{z}_s)]^{ls}$

при $Z = a + b_i$ рассмотрим $[(x - z\ \ )(x - \bar{z}\ \ )]^{=} (x - (a + b_i)(x - (a - b_i) =$

$= x^2 - x(a - b_i) - x(a + b_i) + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Где $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$

Обозначим $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ тогда возвращаясь к

$F(x) = a_n(x - x_1)^{k1} \ldots (x - x_m)^{km}(x^2 + p_1x + q_1)^{l1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{ls}$

где $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $1 \leqslant i \leqslant s$ ■.

Интегрирование рациональной дроби

$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где m<n , n≥1 -

$P_m(x)$ и Q_n - вещественные многочлены степеней *m* и *n* соответственно, то есть *R(x)* - правильная дробь.

Полагаем что $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих корней, т. е. дробь нельзя сократить,

и они взаимно просты. Цель – научиться брать интегралы от таких дробей. Докажем две вспомогательные Леммы о разложении R(x) в сумму более простых дробей.

Лемма 1. Пусть $Q_n(x) = (x-a)^k\varphi(x)$, где $\varphi(a) \neq 0$ и $P_m(a) \neq 0$

Тогда ∃ A ∈ R, что $R(x) = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\Psi(x)}{(x-a)^{k-l}\varphi(x)}$, где $l \geq 1$ и $\Psi(a) \neq 0$ 1

Доказательство:

Рассмотрим $R(x) - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^k\varphi(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_m(x)-A\varphi(x)}{(x-a)^k\varphi(x)} = \frac{(x-a)\Psi(x)}{(x-a)^k\varphi(x)}$

Нужно чтобы $P_m(x) - A\varphi(x)$ делился на $(x-a) \Longrightarrow P_m(a) - A\varphi(a) = 0$

$\exists!\, A = \frac{P_m(a)}{\varphi(a)} \Longrightarrow P_m(a) - A\varphi(a) = (x-a)^l\Psi(x)$, где l - алгебраическая кратность корня многочлена $\Psi(a) \neq 0$ ■.

Следствие из Леммы 1: В условиях Леммы 1 применяя её несколько раз и понижая степень *(x-a)* получим представление $R(x) = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)} + \frac{\alpha\,(x)}{\varphi(x)}$ где $\alpha(a) \neq 0, \varphi(a) \neq 0$

Лемма 2. Пусть $R(x) = \frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}$ где $P_m(x), \varphi(x)$ не делится на

(x^2+px+q), тогда] константы $C, D \in R$, что

$R(x) = \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\Psi(x)}{(x^2+px+q)^{k-l}\varphi(x)}$ где $l \geq 1, \Psi(x)$ не делится на (x^2+px+q).

Доказательство:

$R(x) - \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)} - \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k} = \frac{P_m(x)-(Cx+D)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^k\varphi(x)}$

Нужно, чтобы $P_m(x) - (Cx+D)\varphi(x)$ делился на (x^2+px+q)

Т.к. $(x^2+px+q) = (x-u)(x-\bar{u})$

Для некоторого комплексного корня многочлена $Q_n(x)$ пусть $u = a + b_i$

Для того, чтобы $P_m(x) - (Cx + D)\varphi(x)$ делился на $(x^2 + px + q)$ необходимо и достаточно чтобы u и $\bar{u}$ были его корнями. Отсюда следует что достаточно чтобы u был корнем. Т.е.$P_m(u) - (Cu + D)\varphi(u) = 0$ это эквивалентно

$$\Leftrightarrow \mathrm{C}u + D = \frac{P_m(u)}{\varphi(u)}$$

$$\Rightarrow C(a + b_i) + D = \frac{P_m(u)}{\varphi(u)} = Ca + D + Cbi = Re\left(\frac{P_m(u)}{\varphi(u)} + iIm\frac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right)$$

По определения комплексных чисел, комплексные числа совпадают если совпадают их вещественные и мнимые части. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} Ca + D = Re\left(\dfrac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right) \\ Cb = Im\left(\dfrac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = Re\left(\dfrac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right) - \dfrac{a}{b}Im\left(\dfrac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right) \\ C = \dfrac{1}{b}Im\left(\dfrac{P_m(u)}{\varphi(u)}\right) \end{cases}$$

Отсюда следует, что существует и единственным образом определяется коэффициенты C и D:

$P_m(x) - (Cx + D)\varphi(x) = (x^2 + px + q)^l\Psi(x)$, где $l \geq 1$ и $\Psi(u) \neq 0$

$$R(x) = \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\Psi(x)}{(x^2 + px + q)^{k-l}\varphi(x)} \blacksquare.$$

Следствие из Леммы 2:

В условиях Леммы 2

$$R(x) = \frac{C_1x + D_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + px + q)^{k-2}} + \cdots + \frac{C_{k-1}x + D_{k-1}}{(x^2 + px + q)} + \frac{\beta(x)}{\varphi(x)}$$

Где $\beta(x)$ и $\varphi(x)$взаимно просты и не делятся на $(x^2 + px + q)$

Применяя кратно две Леммы (конечное число раз) мы можем получить теорему.

Теорема *(о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей)*

$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,

где $Q_n(x) = (x-a_1)^{k1} * \ldots * (x-a_m)^{km}(x^2+p_1x+q_1)^{l1}(x^2+p_sx+q_s)^{ls}$

Применяя Леммы, мы можем предположить, что существуют константы

$$R(x) = \frac{A_{11}}{(x-a_1)^k} + \cdots + \frac{A_{1k1}}{(x-a_1)} + \cdots + \frac{A_{1m}}{(x-a_m)^{km}} + \cdots + \frac{A_{knm}}{(x-a_n)} +$$

$$+\frac{C_{11}x+D_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l1}} + \cdots + \frac{C_{1l}x+D_{1l}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{C_{1s}x+D_{1s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{ls}} + \cdots + \frac{C_{lss}x+D_{lss}}{x^2+p_sx+q_s}$$

Доказательство состоит в кратном применении Лемм1 и Лемм2 ■.

Из Теоремы следует, что достаточно уметь интегрировать дроби четырех типов:

1) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
2) $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$
3) $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+q-\frac{P^2}{4}} = \int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{z}{a})}{1+\left(\frac{z}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right) + C,$

где $z = x + \frac{P}{2}$, $a^2 = q - \frac{P^2}{4}$, $a^2 > 0, arctg(x) = \tan^{-1}(x)$

4) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$, при $m > 1, m \in N$ – (см. предыдущую лекцию)

Лекция 22. Дробно-рациональные функции. Методы решения интеграла.

[Пример интегрирования рациональной функции]

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+2)}$$

Раскладываем на слагаемые

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)}$$

Применяем метод неопределенных коэффициентов и приводим к общему знаменателю.

При общем знаменателе дроби равны если равны их числители.

$$1 = \mathrm{A}(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)^2$$

Многочлены совпадают если совпадают их коэффициенты.

Приравниваем коэффициенты многочленов начиная с самой высокой степени.

x^3	0=B+C		C=-B		C=-B=-2D
x^2	0=A-B-2C+D		A-C+D=0		A=-3D
x^1	0=2B+C-2D		B-2D=0		B=2D
x^0	1=2A-2B+D		2A-2B+D=1		-6D- 4D+D=1

$$D = -\frac{1}{9}$$
$$B = -\frac{2}{9}$$
$$C = \frac{2}{9}$$
$$A = \frac{1}{3}$$

Полученные коэффициенты подставляем в пример:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{9}\int \frac{2x-1}{x^2+2}dx =$$

Используя табличные интегралы, а третье слагаемое разбивая на два интеграла, получаем фактически готовый ответ:

$$= -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{2}{9}\ln|x^2+2| - \frac{1}{9\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Для закрепления материала рекомендуется решить самостоятельно несколько примеров из задачника.

Многочлены и рациональные функции от двух переменных

Опр. *Многочленом (вещественным) от двух переменных x и y степени n* называется выражение следующего вида:

$P_n(x,y) = P_{00} + P_{10}x + P_{01}y + P_{20}x^2 + P_{11}xy + P_{02}y^2 + \cdots + P_{n0}x^n + P_{n-11}x^{n-1}y + \ldots +$

$+P_{1n1}xy^{n-1} + P_{on}y^n$ где $P_{ij} \in R$ и коэффициенты при переменных степени n не равны 0, для этого необходимо и достаточно чтобы $P_{n0}^2 + P_{n-1}^2 + \cdots + P_{n-1}^2 + P_{0n}^2 > 0$

Опр. *Рациональной функции или дробью* от переменных x и y называется выражение следующего вида:

$$R_n(x,y) = \frac{P_m(x,y)}{Q_n(x,y)}$$

Где $P_m(x,y)$ и $Q_n(x,y)$многочлены от переменных x и y степеней m и n соответственно.

$R_n(x,y)$ правильная дробь если $m < n$

Лемма.

1. Если рассмотрим рациональную функцию от двух рациональный функций, то это будет рациональная функция
$$R\big(R_1(x,y), R_2(x,y)\big) = \tilde{R}(x,y)$$
Если
R_1, R_2, R рациональные функции, то $\tilde{R}(x,y)$ тоже рациональная функция от переменных x и y
2. $R\big(R_1(t), R_2(t)\big) = \widetilde{R}\,(t)$
Если
R_1, R_2 рациональные функции от t, а R рациональная функция от R_1, R_2
то, $\widetilde{R}\,(t)$ тоже рациональная функция от t

3. Пусть $R(x,y)$ рациональная функция от переменных x и y, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ рациональные функции от переменной t
Тогда $R\big(R_1(t), R_2(t)\big) * R_3(t) = \bar{\bar{R}}(t)$ тоже рациональная функция от t.

Доказательство:

Следует из определений многочленов и рациональной функции.

Если мы берем рациональную функцию от двух рациональных функций, то с ними производим арифметические действия. Если рассматриваем многочлен с двумя переменными $R(x,y)$, то с переменными мы производим такие действия как возведение в степень, сложение/вычитание, умножение на коэффициенты.

Если рассматриваем рациональную дробь, то мы ещё дополнительно делим на многочлен.

Если мы одну рациональную функцию делим на другую рациональную функцию, то в результате получаем рациональную функцию.

Рекомендовано проверить утверждение самостоятельно, используя простые случаи■.

Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл следующего вида

$\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(t,s) -$ рациональная функция от t, s

Для решения подобных интегралов используем универсальную тригонометрическую подстановку (замена переменной):

Вводим новую переменную $t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow x = 2\tan^{-1} t$, определяем $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Находим $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{R_1(t)}, \underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{R_2(t)}) \underbrace{\frac{2dt}{1+t^2}}_{R_3(t)}$, где $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ рациональные функции от t.

Отсюда по Лемме $\int \bar{\bar{R}}\,(t)dt$, где $\bar{\bar{R}}(t)$ рациональные функции от t.

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим частный случай, когда нужно проинтегрировать выражение

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

Выбираем подстановку, чтобы подкоренное выражение было положительным

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Longrightarrow t^n(cx+d) = ax+b$$
$$x(a-t^nc) = t^nd - b \Longrightarrow x = \frac{t^nd-b}{a-t^nc}$$
$$dx = \frac{ndt^{n-1}(a-t^nc)+nct^{n-1}(t^{nd}-b)}{(a-t^nc)^2}dt =$$
$$= \frac{t^{2n-1}(ndc-ndc)+nadt^{n-1}-nbct^{n-1}}{(a-t^nc)^2}dt = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-t^nc)^2}dt$$

При условии $ad - bc \neq 0$ приводим интеграл к виду, используя *лемму*:

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(R_1(t), t)\, R_2(t)dt = \int \tilde{R}\,(t)dt$, где $\tilde{R}(t)$ - рациональная функция.

При наличии нескольких корней с разными степенями применяем подстановку переменной с наименьшей кратной степенью корней, например $R(\sqrt[3]{Qx}, \sqrt[5]{Vx})$

То для $\sqrt[3]{Qx}$ подстановка t^5, а для $\sqrt[5]{Vx}$ подстановка t^3.

Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера

Рассмотрим частный случай, когда нужно проинтегрировать выражение

$\int R\left(x, \sqrt[2]{ax^2+bx+c}\right)dx$ где R-рациональная функция от двух переменных

$ax^2+bx+c>0$

Рассмотрим варианты:

1. если $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,|x-\alpha|$
   Иррациональность подразумевает наличие корня переменной, в этом случае корня нет, и задача легко решается
   $R\left(x, \sqrt[2]{a}|\,x-\alpha|\,\right)$рациональная функция

2. если ∃ два различных корня $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ где , $x_1 \neq x_2$
   В этом случае используется подстановка Эйлера.
   $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{(x-x_1)} \Longrightarrow t^2(x-x_1)^2=a(x-x_1)(x-x_2)$
   $\Longrightarrow t^2(x-x_1)=a(x-x_2) \Longrightarrow x(t^2-a)=t^2x_1-ax_2$
   $x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}=R_1(t)$,
   $dx=\frac{2tx_1(t^2-a)-2t(t^2x_1-ax_2)}{(t^2-a)^2}dt=\frac{-2ax_1t+2ax_2t}{(t^2-a)^2}dt=\frac{2at(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}dt$
   $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(\frac{t^2x-ax_2}{t^2-a}-x_1\right)=R_3(t)$
   $R_2(t)=\frac{2at(x_2-x_1)}{(t^2-a)^2}$

$$\int R\left(x, \sqrt[2]{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(R_1(t),R_3(t))R_2(t)\,dt=\int \tilde{R}\,(t)dt$$

3. Если нет вещественных корней, дискриминант квадратичного уравнения отрицательный

$$ax^2+bx+c>0, \text{и } b^2-4ac<0\text{ , в этом случае либо } a\geq 0, \text{либо } C\geq 0$$

Рассмотрим $a>0$ или $c>0$. Исходя из противного положим

$$c < 0 \ \wedge \ a < 0$$

Вводим подстановки $a = -\alpha^2$, $c = -\gamma^2$ тогда $ax^2 + bx + c = -\alpha^2 x^2 + bx - \gamma^2 =$

$$= -\alpha^2\left(x^2 - \frac{2bx}{2\alpha^2} + \frac{b^2}{4\alpha^4}\right) + \frac{b^2}{4\alpha^4} - \gamma^2 = -\alpha^2\left(x - \frac{b}{2\alpha^2}\right)^2 - (\frac{4\alpha^2\gamma^2 - b^2}{4\alpha^2}) < 0$$

Исходя из условия отрицательного дискриминанта:

$x - \frac{b}{2\alpha^2} > 0$ и $\frac{4\alpha^2\gamma^2 - b^2}{4\alpha^2} > 0$, но перед ними стоят минусы $\Longrightarrow$
квадратичное уравнение < 0, что противоречит условию $ax^2 + bx + c >$

Из этого делаем вывод что $a > 0$ или $c > 0$.

Подстановки по Эйлеру

Если $a > 0$, вводим подстановку $t = \mp\sqrt{a}x \mp \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Если $c > 0$, вводим подстановку $tx = \mp\sqrt{c} \mp \sqrt{ax^2 + bx + c}$

[Примеры]

1. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2} - 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t - 3 + 3t^2} = \int R(t)dt$, при $R(t) = \frac{2}{4t - 3 + 3t^2}$

   Применяем подстановки $t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow x = 2\tan^{-1} t$, определяем $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

   $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. $\int (x + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}})dx = -9\int (\frac{1+2t^3}{t^3-1} + t)\frac{t^2}{(t^3-1)^2}dt = \int R(t)dt$, где $R(t)$ - рациональная функция.

   Применяем подстановку $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \Longrightarrow t^3(x-2) = x + 1$

$x(t^3-1) = 1+2t^3 \implies x = \frac{1+2t^3}{t^3-1} \implies$
$dx = \frac{6t^3\,(t^3-1)-3t^2(1+2t^3)}{(t^3-1)^2}dt = \frac{-9t^2}{(t^3-1)^2}dt$

3. Пример на подстановку Эйлера для квадратичного трёхчлена у которого нет корней

$$\int \frac{2x-1}{x+\sqrt{x^2+x+2}}dx = \int \frac{2\frac{t^2-2}{1+2t}-1}{t}\frac{2t^2+2t+4}{(1+2t)^2}dt = \int R(t)dt$$

где $R(t) -$ рациональная функция

x^2+x+2 нет корней, так как дискриминант отрицательный.

Можем применить любую из двух подстановок Эйлера, т.к. $a>0, c>0$
Применяем вторую подстановку как более удобную:
$t = x+\sqrt{x^2+x+2}$
$(t-x)^2 = x^2+x+2$
$t^2-2tx = x+2$
$x(1+2t) = t^2-2$
$x = \frac{t^2-2}{1+2t}$
$dx = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-2)}{(1+2t)^2}dt = \frac{2t^2+2t+4}{(1+2t)^2}dt$

Исследование функции и построение её графика

- План исследования функции есть в учебном пособии с примерами разбора.
- Интервалы монотонности функции
- Нахождение локальных экстремумов
- Нахождение точек перегибов функции
- Критерий монотонности функции на интервале – производная функции на интервале не меняет знак см следствие Теоремы Лагранжа

1. Определение интервалов монотонности и строгой монотонности функции основано на следствиях из Теоремы Лагранжа
2. Отыскание точек локальных экстремумов. Ранее рассматривали определение локального экстремума и необходимое условие для существования локального экстремума. См Теорема Ферма. Если функция

дифференцируема в данной точке С и эта точка является точкой локального экстремума, то производная функции в данной точке равна нулю.
Необходимое условие локального экстремума для функции $f(x)$ дифференцируемой в точке C это условие $f'(x) = 0$ (Теорема Ферма)
Это условие не является достаточным. Приводился пример:
$y = x^3, y'^{(0)} = 0$, но x = 0 не является локальной точкой экстремума, поскольку $y = x^3$ строго возрастает.

Определим достаточные условия локальных экстремумов.

Теорема. (I достаточное условие локального экстремума)

Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, $f'(x_0) = 0$

Тогда, если при переходе через точку x_0, $f'(x_0)$ меняет знак, то x_0 является точкой локального экстремума.

Причем, если $\exists\delta > 0$, что на $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x_0) < 0$, на $(x_0 + \delta, x_0)$ $f'(x_0) > 0$, то x_0 является *точкой локального минимума*,

если $\exists\delta > 0$, что на $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x_0) > 0$, на $(x_0 + \delta, x_0)$ $f'(x_0) < 0$, то x_0, является *точкой локального максимума*

$f'(x_0) > 0$ функция $f(x)$ возрастает
$f'(x_0) < 0$ функция $f(x)$падает

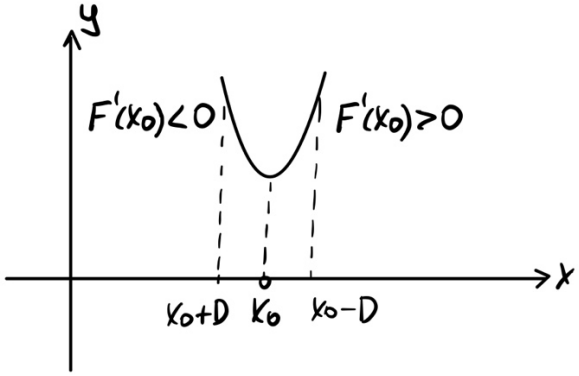


рис. 22.1 локальный экстремум

Доказательство:

Рассмотрим вариант $\exists\delta > 0$, что на $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x_0) < 0$, на $(x_0 + \delta, x_0)$ $f'(x_0) > 0$

Пусть $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Longrightarrow [x, x_0]$выпололняются условия Теоремы Лагранжа $\Longrightarrow$ $\exists\xi \in (x, x_0)$, такая что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где $f'(\xi) < 0, (x - x_0) < 0 \Longrightarrow$ $f(x) - f(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$

Аналогично, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ и $f'(x) > 0 \Longrightarrow]\gamma \in (x_0, x)$, такая что

$f(x) - f(x_0) = f'(\gamma)(x - x_0)$, где $f'(\gamma) > 0, x - x_0 > 0 \Longrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Longrightarrow$ $f(x) > f(x_0) \Longrightarrow x_0$ точка локального минимума

Самостоятельно доказать если $]\delta > 0$, что на $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x_0) > 0$, на $(x_0 + \delta, x_0)$ $f'(x_0) < 0$, то x_0 является точкой локального максимума ■.

Лекция 23. Достаточные условия локального экстремума.

Замечание 1. Если $f(x)$ дифференцируема в окрестности $U(x_0)$, её производная $f'^{(x)} = 0$ и $f'^{(x)}$не меняет знак в окрестности $\dot{U}(x_0)$слева и справа от x_0,

то в точке x_0 нет локального экстремума

Например, $y = x^3, y' = 3x^2, y'(0) = 0,$ но для $\forall\, x \in R,$ кроме точки $0, y' > 0$ - экстремума нет

Теорема. *(Вариант I достаточного условия локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности $\dot{U}(x_0)$, и непрерывна в точке x_0

Пусть $f'^{(x)}$ имеет разные знаки слева и справа от x_0 в окрестности $\dot{U}(x_0)$. Тогда в точке x_0 точка локального максимума.

Доказательство: вполне аналогично доказательству предыдущей теоремы, есть материал в пособии и учебнике■.

Теорема. *(Вариант II достаточного условия локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности $U(x_0)$и дважды дифференцируема в x_0. Пусть $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 точка локального максимума при $f''(x_0) > 0$ и точка локального минимума при $f''(x_0) < 0$.

Доказательство: так как $f''(x) > 0$ (либо < 0) $\Longrightarrow f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0. Это означает, что в некоторой окрестности $(x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ $f'(x) < 0$ (либо >0), на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$ (либо < 0) $\Longrightarrow$ производная $f'(x)$ меняет знак. Отсюда по Теореме (I достаточное условие локального экстремума)
x_0 - точка локального минимума (максимума) ■.

Теорема. *(Вариант III достаточного условия локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_{0,}, n > 2$. Пусть $f'^{(x_0)}$=… $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, Тогда, если n чётно, то в точке x_0

Является локальный экстремум $f(x)$, причём если $f^{(n)}(x_0) > 0$ то в точке x_0 локальный минимум, а если $f^{(n)}(x_0) < 0$ то в точке x_0 локальный максимум. Если при этих условиях n нечётно, то в точке x_0 локального экстремума нет.

Доказательство:

По формуле Тейлора для $f'(x)$ имеем:

для $\forall\, x \in U(x_0)$ некоторой окрестности точки x_0

$$f'(x) = f^n(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}$$

$$]\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \text{где } 0 < \theta < 1$$

Поскольку по условию все производные =0, то смотрим остаточный член с точкой ξ

Пусть n чётно, $f^{(n)}(x_0) > 0$ (либо < 0) $\Longrightarrow f^{(n-1)}(x_0)$возрастает(либо убывает)в x_0

По условию $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f^{(n-1)}(\xi)$ возрастает меняет знак с (-) на (+) (Либо убывает меняет знак с (+) на (-)) при переходе слева направо через точку x_0 (рис. 23.1).

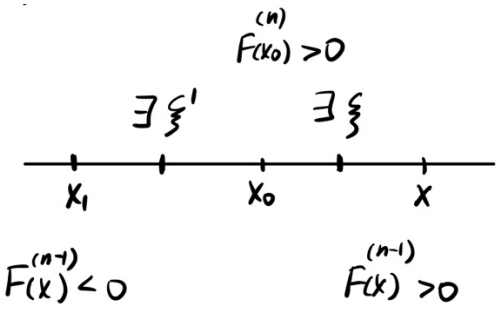


рис. 23.1 локальный экстремум

$$f'(x) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} \qquad (b)$$

По условию n чётно $\Longrightarrow n-2$ также чётно$\Longrightarrow (x-x_0)^{n-2}$ не меняет знак слева и справа от x_0 $\Longrightarrow$ правая часть (b) , а значит и $f'(x)$ меняет знак при переходе слева направо через x_0 с (-) на (+) (либо с (+) на (-))$\Longrightarrow$Отсюда по *Теореме* (I достаточное условие локального экстремума) x_0 точка локального минимума (максимума)■.

[Примеры на локальные экстремумы]

1. $y=|x|-f(x)-$ дифференцируема в окрестности $\dot{U}(0)=R\{0\}$
   $y'-$ имеет разные знаки ($y'=\mp 1$) в $R\{0\}$
   $\Longrightarrow$ по Теореме (I достаточное условие локального экстремума) точка $x_0 = 0$ локального минимума

2. $y=x^3-3x^2+3x-2$
   $y'=3x^2+6x+3=3(x-1)^3$
   $y'(1)=0,\ \ y'(x)>0$ в $(1-\delta;1+\delta)$
   $\Longrightarrow x_0=1-$ не является локальным экстремумом т. к знак не меняется

3. $y=x^3-6x^2+9x-5$
   $y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

Замечание. Точки, где $f'(x)=0$ называются стационарными, т.к. в этих точках скорость изменения функции (производная)=0

$x_1=1, x_2=3\ -$ стационарные точки, воспользуемся вторым условием.

$y''=6x-12=6(x-2)$

$y''(1)=-6<0\ \Longrightarrow x_1=1$ точка локального максимума

$y''(3)=6>0\Longrightarrow x_2=3$ точка локального минимума

Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба.

<u>Опр.</u> Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)\ \Longrightarrow\ \exists$ касательная к графику $f(x)$, и в $\forall$ точке $c\in(a;b)$ *уравнение касательной* в точке c:

$$y_{\text{кас}}(c)=f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$$

Причем касательная не является вертикальной, т.к. $\exists f'(c)$ – конечная (рис. 23.2).

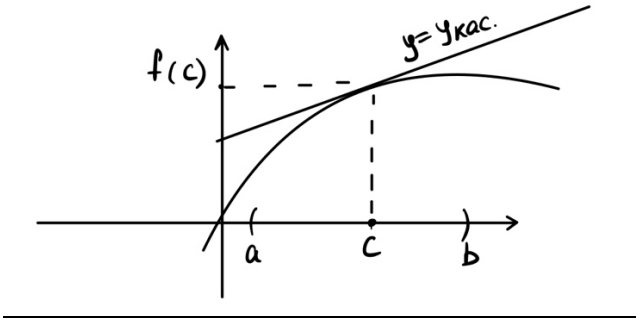


рис. 23.2 касательная к графику

<u>Опр.</u> Говорят, что график функции $f(x)$ имеет *направление выпуклости вверх (вниз)* на отрезке $(a;b)$, если график функции $f(x)$ расположен не выше (не ниже) любой касательной, проведенной в точке c на интервале $c \in (a;b)$ (рис.23. 3)

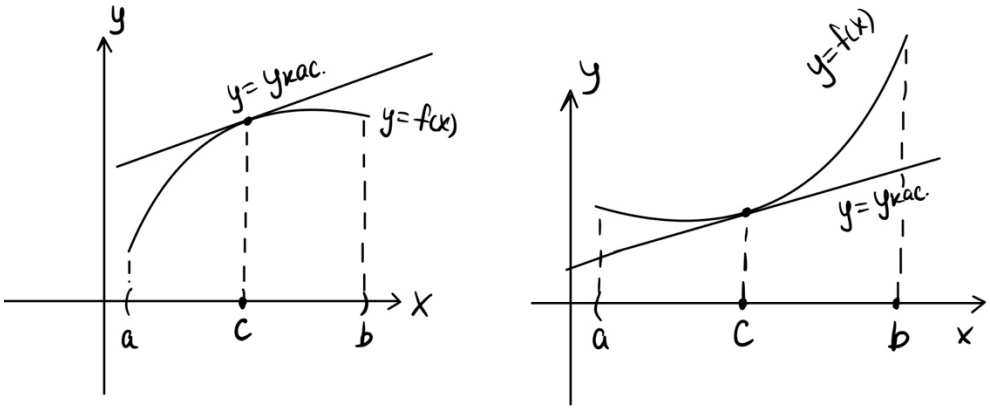


рис. 23.3 выпуклость вверх и выпуклость вниз

Теорема. *(Достаточные условие выпуклости графика функции f(x) вверх (вниз) на отрезке (a;b)*

Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируема в интервале $(a;b)$ $f''(x) > 0$ (< 0), для в $\forall$ x $\in (a;b)$. Тогда график $f(x)$ имеет на $(a;b)$ направление выпуклости вверх (вниз)

Доказательство:

Пусть $\forall$ x $\in (a;b)$ $\quad f(x) = f(c) + \frac{f\prime(c)}{1!}(x-c) + \frac{f\prime\prime(\xi)}{2!}(x-c)^2$

$\frac{f\prime\prime(\xi)}{2!}(x-c)^2 > 0$, для $\forall$ x $\in (a;b)$ без точки с

$f(c) + \frac{f\prime(c)}{1!}(x-c) -$ ордината касательной в точке с

$\Longrightarrow f(x) - y_{\text{кас}}(c) > 0 \Longrightarrow$
график $f(x)$ расположен не ниже (не выше)касательной в $\forall$ с $\in (a;b)$ ■.

Лемма. Пусть $f(x)$ – дифференцируема в интервале $(a;b)$, определена на $[a;b)$, непрерывна в точке a справа, имеет направление выпуклости вверх (вниз) на интервале $(a;b)$, и $f'(x)$ непрерывна справа в точке *a,* тогда график $f(x)$ расположен на $(a;b)$ не выше (не ниже) касательной проведенной к нему в точке с координатами $(a;f(a))$.

Доказательство:

Рассмотрим $\forall$ $x_n \in (a;b)$ $f(x) - [f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n)] \leq 0$ (рис. 23.4):

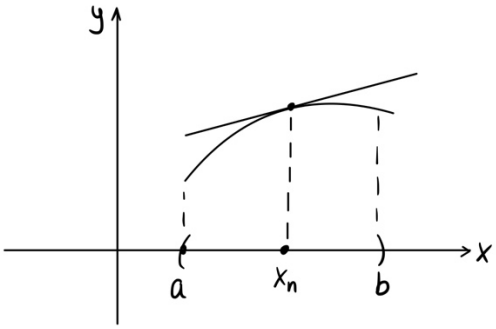


рис. 23.4

Возьмем последовательность точек x_n сходящихся справа к точке a:

$$x_n \longrightarrow a + 0, \text{при } n \longrightarrow \infty$$

При переходе к пределу при $n \longrightarrow \infty$ получим неравенство к точке a

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \leq 0$$

$$f(x) \leq [f(a) + f'(a)(x-a)]$$

Т.е. значения $f(x)$ не выше координат касательной в точке a ■.

Замечание. Аналогично доказывается что если $f'(x)$ непрерывна слева в точке b $f(x)$ непрерывна слева в точке b тогда график $f(x)$ расположен на $(a;b)$ не выше (не ниже) касательной проведенной к нему в точке с координатами $(b; f(b))$.

Перегиб графика функции *f(x)* на отрезке (*a;b*)

Опр. Точка $(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика $f(x)$ если $f(x)$ определена и дифференцируема на некоторой окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ и график $f(x)$ имеет разные направления выпуклости в $\dot{U}(x_0) = (x_0-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta)$, по разные стороны от x_0 (рис. 23.5).

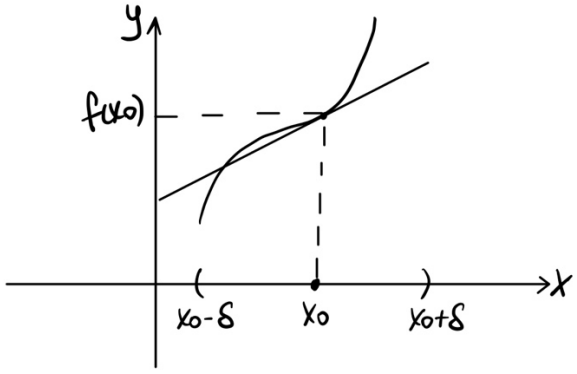


рис. 23.5 точка перегиба

Опр. Точка $(x_0; f(x_0))$ называется *точкой обобщенного перегиба* графика $f(x)$ если $f(x)$ определена и дифференцируема на некоторой окрестности $\dot{U}(x_0)$ в точке x_0, и график $f(x)$ имеет разные направления выпуклости по разные стороны от x_0 в $\dot{U}(x_0)$ (рис. 23.6).

Замечание. В силу Леммы доказанной выше, если x_0 точка перегиба графика и $f'(x)$ непрерывна в точке x_0, то график функции $f(x)$ переходит с одной стороны касательной в точке x_0 на другую сторону от неё при движении x слева направо через точку x_0.

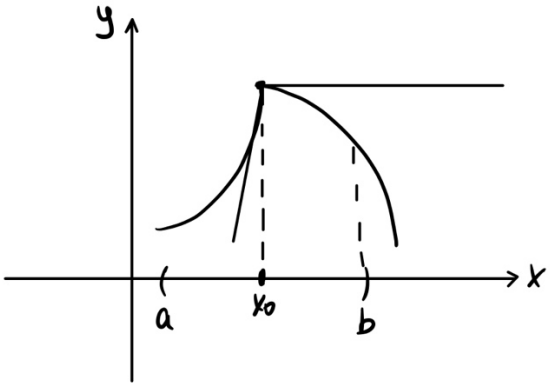


рис. 23.6 точка обобщенного перегиба

Теорема. *(необходимое условие перегиба графика функции f(x))*

Пусть с точке x_0 график дифференцируемой на (a;b) функции $f(x)$ имеет перегиб $\forall$ $x_0 \in (a;b)$. Пусть $\nexists\, f''(x_0)$ и первая производная $f'(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда вторая производная $f''(x_0) = 0$.

Доказательство:

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$

Т.к. график $f(x)$ имеет разные направления выпуклости по разные стороны от точки x_0 на интервале $x_0 \in (a;b)$, то $F(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 и $F(x_0) = 0 \Longrightarrow$ у $F(x)$ не может быть локальных экстремумов в точке x_0

Предположим, что $f''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow F'(x) = f'(x) - f'(x_0) \Longrightarrow F'(x_0) = 0$

$$F''(x_0) = f''(x_0) \neq 0$$

При этом условии по второму достаточному условию локального экстремума, что точка x_0 является точкой локального экстремума для функции $F(x)$, что невозможно по условию. Противоречие возникло из-за предположения, что $f''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow f''(x_0) = 0$ ■.

Лекция 24. Достаточное условие существование точки перегиба. Асимптоты к графику.

Достаточное условие перегиба

Теорема. *(I достаточное условие существования точки перегиба графика функции)*

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и в окрестности $\dot{U}(x_0)$ $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0 тогда в этой точке график функция $f(x)$ имеет перегиб.

Доказательство:

Пусть $f''(x)$ меняет знак с (-) на (+) (либо с (+) на (-)) Это означает что направления выпуклости графика функции $f(x)$ различны по разные стороны от точки $x_0 \Longrightarrow$ точка $(x_0; f(x_0)$ является точкой перегиба графика ■.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дважды дифференцируема в этой точке на интервале $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$, и $f''(x) \neq 0$ и имеет разные знаки на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ то в точке x_0 обобщенный перегиб графика функция $f(x)$.

Теорема. *(II достаточное условие существования точки перегиба графика функции)*

Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0 $f''(x) = 0$ $f'''(x) \neq 0$. Тогда в точке x_0 является перегиб графика функции $f(x)$.

Доказательство:

Так как $f'''(x) > 0$ (либо $f'''(x) < 0$) то $f''(x)$возрастает либо убывает в точке $x_0 \Longrightarrow f''(x)$ меняет знак при переходе слева направо через x_0 с (-) на (+) (либо с (+) на (-)) $\Longrightarrow$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ слева и справа от точки x_0 график функции $f(x)$ имеет разные направления выпуклости $\Longrightarrow$ точка x_0 является точкой перегиба графика функции $f(x)$ ■.

Теорема. *(Ш достаточное условие существования точки перегиба графика функции)*

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 ($n>3$). Пусть $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0$, а $f^n(x_0) \neq 0$ Тогда если n не чётно, то в точке x_0 имеется перегиб графика функции $f(x)$. Если n чётно, то в точке x_0 нет перегиба графика функции $f(x)$, но имеется локальный экстремум.

Доказательство:

Воспользуемся формулой Тейлора. Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $f^{(n-1)}(x_0) = 0 \Longrightarrow f^{(n-1)}(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. По формуле Тейлора имеем: для некоторой окрестности $U(x_0)$, $\forall\ x \in \dot{U}(x_0)$

$$f''(x) = f^n(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-4)!}(x - x_0)^{n-4} + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3}$$

Где] $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$ по условию все производные =0 $\Longrightarrow$

$$f''(x) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3}$$

Покажем, что это производная по разные стороны от точки x_0имеет разные знаки.

Если n –нечётно, то n-3 чётно и $(x - x_0)^{n-3}$ сохраняет знак (>0) в окрестности $\dot{U}(x_0)$

Меняет знак по определению $f^{(n-1)}(\xi)$ по разные стороны от точки $x_0 \Longrightarrow$ вместе с ним меняет знак и $f''(x) \Longrightarrow$ по I достаточному условию в точке x_0 перегиб графика функции $f(x)$ ■.

[Пример]

$y = 3x^3 - x^4$

$y' = 9x^2 - 4x^3$

$y'' = 18x - 12x^2 = 6x(3 - 2x)$

Подозрительные точки на перегибе $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$

На графике определили изменения знака функции *y'' (рис. 24.1):*

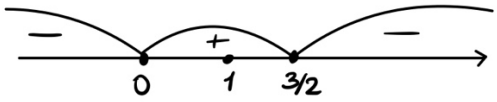


рис. 24.1

По I достаточному условию в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ перегиб графика функции $f(x)$. Аналогично определим третью производную:

$y''' = 18 - 24x$

$y'''(0) = 18 > 0$ и $y'''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0$

Замечание. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ и в точке x_0 и не дифференцируема и не является непрерывной Кроме того график $f(x)$ имеет в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ разные направления выпуклости по разные стороны от точки x_0

<u>Опр.</u> В описанных условиях точку x_0 называют точкой изменения выпуклости графика (рис. 24.2).

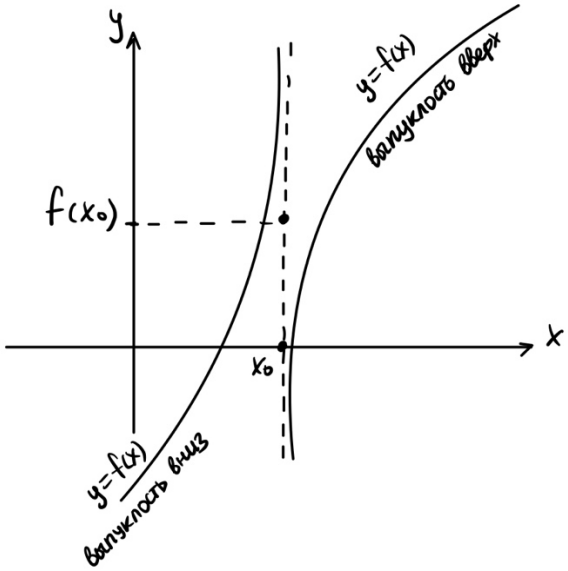


рис. 24.2

Асимптоты графика функции $f(x)$

Опр. Прямая L: x=c называют *вертикальной асимптотой графика* $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \infty$ Различают на правую и левую асимптоты (рис. 24.3). *Горизонтальная асимптота* является частным случаем наклонной асимптотой.

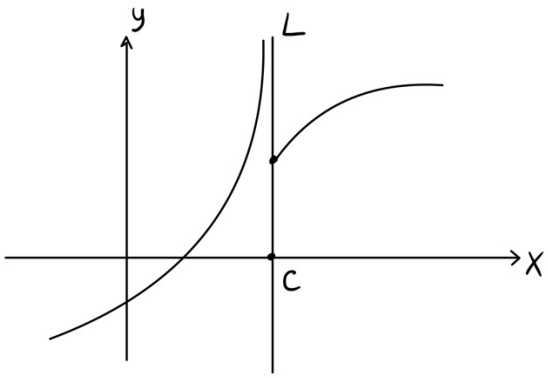


рис. 24.3 левая вертикальная асимптота

Опр. Прямая L: $y = kx + b$ называют правой (левой) наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда (⇔

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$ – правая наклонная асимптота

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$ – левая наклонная асимптота

В частности, прямая L: $y = kx + b$ называют горизонтальной при k=0. На рис. 24.3 L - правая наклонная асимптота, L_1 - левая наклонная асимптота.

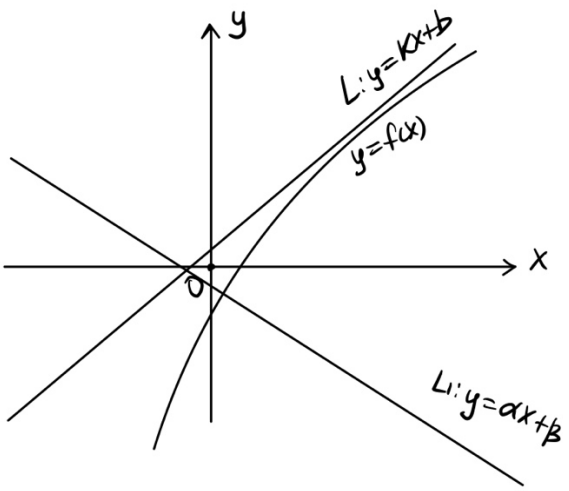


рис. 24.4

Теорема. *(Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты графика функции)*

Пусть функция $f(x)$ определена на R. Для того чтобы прямая L: $y = kx + b$ являлась правой (левой) наклонной асимптотой для графика функции $f(x)$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись следующие условия:

1. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ для правой наклонной асимптоты
   $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ для левой наклонной асимптоты (*)
2. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$ – для правой наклонной асимптоты
   $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b$ – для левой наклонной асимптоты

Доказательство:

<u>*Необходимость.*</u> Пусть прямая L: $y = kx + b$ являлась правой (левой) наклонной асимптотой для графика функции $f(x)$ По определению это значит, что $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \Longrightarrow f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая величина при $x \longrightarrow +\infty$, проверим выполнение условий:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b+\alpha(x)}{x}\right) = k$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (kx + b + \alpha(x) - kx) = b$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (*).

Из условия 1) $\frac{f(x)}{x} = k + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ − бесконечно малая величина , а $x \longrightarrow +\infty$

$f(x) = kx + \gamma(x)x$ по условию 2 из (*)

$(f(x) - kx) = b + \beta(x)$ где где $\beta(x)$бесконечно малая величина , а $x \longrightarrow +\infty$

$\Longrightarrow \gamma(x)x = b + \beta(x) \Longrightarrow f(x) = kx + b + \beta(x)$

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$

Т.е. L: $y = kx + b$ являлась правой наклонной асимптотой ■.

[Пример]

Найти асимптоты для $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ для этого проверяем условия (*)

$$\lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{\frac{x^4}{(1+x)^3}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{x^3}{(1+x)^3} = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{1}{(\frac{1}{x^3}+1)} = 1 = k$$

$$\lim_{x\longrightarrow\mp\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}(\frac{x^4}{(1+x)^3} - x) = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{x^4 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x}{(1+x)^3} = \lim_{x\longrightarrow\mp\infty}\frac{-3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^3} = -3$$

По (*) L: $y = x - 3$ – двусторонняя наклонная асимптота для $f(x)$

Вертикальная асимптота $\lim\limits_{x\longrightarrow-1+0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\longrightarrow-1-0} f(x) = -\infty$

L: $y = -1$ – двусторонняя вертикальная асимптота для $f(x)$

Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на множестве

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором замкнутом отрезке $[a; b]$. Тогда по теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего и наименьшего

значения, либо на концах сегмента, либо в точках локального экстремума в пределах отрезка $[a;$b].

Рассмотрим более общую задачу.

Пусть на некотором множестве D∈R имеется не более конечного числа стационарных точек и точек в которых функция не дифференцируется, т.е. критических точек. Если $D = [a; b]$, то наибольшее (наименьшее) значение может достигаться:

- либо в точках a и b на границах отрезка,

- либо в стационарных точках,

- либо критических точках

Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на [a;b] вычисляют во всех перечисленных точках и выбирают из этих значений наибольшее и наименьшее.

Задача. Требуется определить форму прямоугольника наибольшей площади, если его периметр равен 100

Решение: периметр прямоугольника равен $P = 2x + 2y = 100$, S=xy, $x + y = 50$,

$y = 50 - x$

$s(x; y) \longrightarrow s(x) \longrightarrow s(x) = x(50 - x) \longrightarrow max? x \in (0; 50), s'(x) = 50 - 2x = 0$

$\Longrightarrow x = 25$ точка стационарная $\Longrightarrow s''(x_0) = -2 \Longrightarrow x_0 = 25$ точка max

$S_{\text{наибол}} = 25^2 = 625$

Ответ: Набольшей площадью будет обладать квадрат сторонами 25.

ФАКУЛЬТЕТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ И
КИБЕРНЕТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ