ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

БЫКОВ
АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Содержание

1 Лекция 1. Числа и числовые множества. 9

1.1 Натуральные числа. Аксиоматика Пеано. . . . 9
1.2 Бинарные отношения . . . 10
1.3 Рациональные числа . . . 10
1.4 Вещественные числа. Тематический подход . . . 10
1.5 Бесконечные десятичные дроби . . . 11
1.6 Бесконечные периодические десятичные дроби . . . 11
1.7 Бесконечные непериодические дроби . . . 11
1.8 Ограниченные числовые множества. Понятие ограниченного числа . . . 13
1.9 Логические формулы . . . 13
1.10 Некоторые числовые неравенства . . . 15
1.11 Геометрическое изображение вещественных чисел . . . 15
1.12 Некоторые числовые множества. Промежутки числовой прямой . . . 15
1.13 Окрестности . . . 16
1.14 Предельная точка числового множества . . . 16

2 Лекция 2. Понятие функции и предела функции 18

2.1 Ограниченные функции одной переменной . . . 18
2.1.1 Понятие функции . . . 18
2.1.2 Понятие верхней и нижней граней функции . . . 18
2.1.3 Понятие ограниченной функции . . . 19
2.1.4 Неограниченные функции . . . 22
2.1.5 Локально ограниченные функции . . . 23
2.2 Предел функции . . . 24
2.2.1 Определение предела функции в точке . . . 24
2.2.2 Основные свойства предела функции . . . 26
2.2.3 Методика вычисления предела элементарной функции . . . 28

3 Лекция 3. Свойства пределов 29

3.1 Предел функции в бесконечно удаленной точке . . . 29
3.2 Бесконечно большие функции в точке . . . 35
3.3 Односторонние пределы . . . 36
3.4 Свойства пределов . . . 38

4 Лекция 4. Понятие предела последовательности 40

4.1 Понятие неопределенности . . . 40

4.2 Предел последовательности . . . 45
4.3 Бесконечно малые функции . . . 45
4.3.1 Понятие неопределенности типа $\frac{0}{0}$ . . . 47
4.3.2 Свойства бесконечно малых и ограниченных функций . . . 47
4.4 Теоремы о пределах . . . 48
4.4.1 Предел суммы, разности, произведения, частного . . . 48
4.4.2 Предел сложной функции . . . 48
4.4.3 О функциях, не имеющих предела . . . 49

5 Лекция 5. Бесконечно большие и бесконечно малые функции 50
5.1 Предельный переход в неравенствах . . . 50
5.2 Бесконечно большие функции . . . 53
5.2.1 Бесконечно большие и неограниченные функции . . . 54
5.2.2 Арифметические операции над бесконечно большими функциями 56
5.2.3 Бесконечно большие функции при $x \to +\infty$ . . . 57
5.3 Понятие неопределенности типа $+\infty - (+\infty)$ . . . 58
5.4 Сравнение бесконечно малых функций . . . 58
5.4.1 Понятие малой функции . . . 58
5.4.2 Принцип прозрачности символа $o(...)$ . . . 58
5.4.3 Примеры применения символа o(...) . . . 59
5.4.4 Символ $f(x) = o(x^{\alpha})$ при $x \to +\infty$ . . . 59
5.5 Эквивалентные бесконечно малые функции . . . 59
5.6 Функция, ограниченная относительно другой функции . . . 60
5.7 Техника вычисления пределов в точке 0 . . . 60

6 Лекция 6. Непрерывность 61
6.1 Второй замечательный предел для функций . . . 61
6.2 Непрерывные функции в точке . . . 67
6.2.1 Определение точки разрыва . . . 68
6.2.2 Точки разрыва, устранимые . . . 68
6.2.3 Точки разрыва первого рода . . . 69
6.2.4 Точки разрыва второго рода . . . 69
6.2.5 Односторонняя непрерывность . . . 70
6.3 Свойства непрерывных функций . . . 70
6.3.1 Арифметические операции . . . 70
6.3.2 Устойчивость знака . . . 71
6.3.3 Корни непрерывной функции . . . 71

6.3.4 Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение . . . 73
6.3.5 Метод вилки приближенного вычисления корней уравнений . . . 73

7 Лекция 7. Производная 74
7.1 Элементарные функции . . . 74
7.1.1 Непрерывность элементарных функций . . . 74
7.2 Сложная функция, обратная функция . . . 74
7.2.1 Сложная функция. Понятие сложной функции . . . 74
7.2.2 Обратная функция . . . 75
7.3 Равномерная непрерывность . . . 77
7.3.1 Понятие равномерной непрерывности . . . 77
7.4 Производная . . . 78
7.4.1 Определение производной в точке . . . 78
7.4.2 Производная степенной функции . . . 79
7.4.3 Производная степенной функции с дробным показателем . . . 80
7.4.4 Просзводная степенной функции с вещественным показателем . 80
7.4.5 Производная синуса . . . 80
7.4.6 Производная косинуса . . . 80
7.4.7 Производная тангенса . . . 80
7.4.8 Производная логарифмической функции . . . 81
7.4.9 Производная показательной функции . . . 81
7.5 Односторонние производные . . . 81

8 Лекция 8. Производные старших порядков 84
8.1 Определение старшей производной . . . 84
8.2 Формула Лейбница . . . 87
8.3 Дифференциалы старших порядков . . . 89

9 Лекция 9. Векторные функции 91
9.1 Правила двукратного дифференцирования . . . 91
9.2 Геометрический смысл первого дифференциала . . . 92
9.3 Многократный дифференциал . . . 93
9.4 Векторная функция . . . 94
9.4.1 Предел векторной функции . . . 94
9.4.2 Производная векторной функции . . . 94
9.5 Неопределенный интеграл . . . 96

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

9.5.1 Первообразная и неопределенный интеграл 96
9.5.2 Свойства неопределенного интеграла 96
9.5.3 Таблица основных неопределенных интегралов 97

10 Лекция 10. Неопределенный интеграл 98
10.1 Методы интегрирования 98
10.1.1 Непосредственное интегрирование 98
10.1.2 Замена переменной 99
10.1.3 Интегрирование по частям 100
10.1.4 Интегрирование дважды по частям 101
10.1.5 Рекуррентный метод 102

11 Лекция 11. Определенный интеграл 103
11.0.1 Интегрирование рациональных функций 104
11.1 Определенный интеграл 105
11.1.1 Понятие определенного интеграла 105
11.1.2 Понятие определенного интеграла 107
11.1.3 Свойства определенного интеграла 110

12 Лекция 12. Понятие последовательности 112
12.1 Определенный интеграл 112
12.2 Числовые последовательности 118
12.2.1 Элементы теории множеств 118
12.3 Понятие последовательности 120

13 Лекция 13. Теорема Больцано-Вейерштрасса 122
13.1 Монотонные последовательности 122
13.2 Теорема о стягивающейся системе сегментов 124
13.3 Предельные точки последовательности 124
13.4 Теорема Больцано - Вейерштрасса 126
13.5 Верхний и нижний пределы последовательности 127

14 Лекция 14. Определение предела по Гейне 128
14.1 Критерий Коши для последовательностей 131
14.2 Предел функции по Гейне 135
14.3 Критерий Коши для функции 138
14.4 Число e 140
14.5 Итерационные последовательности 141

14.6 Эталонные последовательности 142

15 Лекция 15. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса 143

15.1 Факториал и n^n 146

15.2 Свойства непрерывных функций 148

15.2.1 Локальная ограниченность непрерывной функции 148

15.2.2 Первая теорема Вейерштрасса 148

15.2.3 Вторая теорема Вейерштрасса 149

15.3 Теоремы о дифференцируемых функциях 151

15.3.1 Теорема Ролля 151

15.3.2 Теорема Лагранжа 152

15.3.3 Монотонные функции 156

16 Лекция 16. Монотонные функции 159

16.1 Достаточные условия экстремума 160

16.2 Решение нелинейных уравнений 163

16.2.1 Метод дихотомии 164

16.2.2 Метод простой итерации 166

16.2.3 Метод Ньютона 167

16.3 Правило Лопиталя 171

16.3.1 Теорема Коши (формула Коши) 171

17 Лекция 17. Теорема Тейлора-Лагранжа 174

17.1 Теорема Тейлора - Лагранжа 174

18 Лекция 18. График функции одной переменной 178

18.1 Остаточный член в интегральной форме 179

18.2 График функции одной переменной 180

18.2.1 Монотонность и локальный экстремум 180

18.3 Направление выпуклости и точки перегиба 185

18.3.1 Выпуклость и касательная 185

18.3.2 Точки перегиба графика функции 187

19 Лекция 19. Работа с графиками 188

19.1 Точки перегиба 194

19.2 Асимптоты 195

19.2.1 Вертикальная асимптота 195

19.2.2 Наклонная асимптота 195

20 Лекция 20. Дополнения и замечания к курсу математического анализа 197

20.1 Другие определения выпуклости 197

20.1.1 Определение через опорную прямую 197

20.1.2 Определение функции, выпуклой вниз, через хорду 199

20.1.3 Достаточное условие выпуклости через хорду 201

20.2 Асимптота 203

20.3 Дополнительные вопросы 207

20.3.1 Определенный интеграл. Разбиение, выборка, интегральные суммы 207

20.3.2 Теоремы 209

20.3.3 Некоторые свойства определенного интеграла 209

20.3.4 Оценки интегралов 210

20.3.5 Первая теорема о среднем 211

Лекция 1. Числа и числовые множества.

Натуральные числа. Аксиоматика Пеано.

В аксиоматике Пеано важен аксиоматический принцип. Первые числа, которые придумало человечество, — натуральные числа. В древнем мире считали $1, 2, 3$. А числа 4 уже не было, все остальное – много.

Аксиомы Пеано:

1) 1 – натуральное число, т.е. $1 \in N$.

2) На множестве натуральных чисел определена операция, которая сопоставляет натуральному числу следующее за ним число, которое обозначается как $x+1$

$$\forall x \in N \quad \exists (x+1) \in N$$

3) Если натуральное число a следует как за числом b, так и за числом c, то b, c тождественны. Если $a, b, c \in N$, $a = b+1$, значит a следует за b и $a = c+1$, значит a следует за c, $b = c$. Можно записать иначе $a, b, c \in N$. Это логическая функция с тремя входными аргументами, это или ИСТИНА, или ЛОЖЬ.

4) Один не следует ни за каким натуральным числом. Можно записать в виде логической формулы:

$$\forall x = x+1 = 1, \quad x \notin N$$

5) Аксиома индукции.

   Если некоторое предложение $P(x)$ – логическая функция, принимающая два значения ИСТИНА или ЛОЖЬ, которая определена на множестве натуральных чисел, т.е. $P(x) \in X$, то:

   если $P(x)$ верно для $x = 1$, то $P(1) = 1$. Из того, что $P(x)$ верно, вытекает, что $P(x+1)$ тоже верно. Тогда для всех $P(x) = 1$ для всех $x \in N$.

Аксиомы нельзя доказать, но можно аксиому взять и использовать.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Бинарные отношения

Бинарные отношения – это отношения $>$, $<$, $=$. Бинарное отношение – это логическая функция на декартовом квадрате множества (т.к. у нее два аргумента), т.е. если есть два числа, то можно их подставить в эту логическую функцию и тогда получится ответ ИСТИНА или ЛОЖЬ. Если ИСТИНА, то эти два числа связаны тем самым соотношением, если ЛОЖЬ, то не связаны.

Рациональные числа

Рациональным числом называют пару натуральных чисел, перед которой, возможно, поставлен знак минус. Это не дробь, а упорядоченная пара натуральных чисел. Бывают сократимые рациональные дроби. А когда говорится про рациональные числа, то все сократимые дроби отождествляются с одной несократимой дробью. Это класс эквивалентности всех дробей, который действует по принципу сокращения. Значит, если произвести сокращение, то получится представитель этого класса, и в дальнейшем все рациональные числа можно считать несократимыми.

На множестве рациональных чисел введены отношения порядка: $>, \geqslant, <, \leqslant\ =$. Отношения порядка для рациональных чисел устроены так: сначала нужно сравнить числа разных знаков – любое положительное больше любого отрицательного числа, а уже потом числа одного и того же знака - два положительных числа и два отрицательных.

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Если разделить в столбик рациональное число в десятичной системе счисления, то получится бесконечная периодическая дробь. Период существует у каждого рационального числа. Но если получилась непериодическая десятичная дробь, то это число не является рациональным. Оно называется *иррациональным*. Нужно уметь превращать рациональные числа в бесконечные периодические десятичные дроби и обратно.

Вещественные числа. Тематический подход

Про вещественные числа нужно сформулировать аксиоматический подход к вещественному числу. Есть цитата Давида Гильберта (известнейшего математика 20

века): *«Если мы вводим некую аксиоматику, то объект, который этой аксиоматике удовлетворяет, может иметь совершенно произвольную природу»*. Линейное пространство можно рассматривать как множество наборов вещественных чисел.

Тематические подходы:

1) Вещественные числа - это пределы фундаментальных последовательностей рациональных чисел;

2) Подход Вейерштрасса, который рассматривает вещественные числа как бесконечные десятичные дроби;

3) Подход ДД Кендо, который основан на понятии сечения.

Сечение – это такое число, которое все числа делит на 2 категории: одни больше, другие меньше, одни правее, другие левее.

Бесконечные десятичные дроби

Рассмотрим модель Вейрштрасса: модель построения вещественных чисел, которую придумал Вейштрасс. Эта модель основана на бесконечных десятичных дробях. Можно использовать любую систему, двоичную, семиричную - будет всегда одно и тоже.

Бесконечные периодические десятичные дроби

Допустим, есть число в таком виде: $\frac{3}{7} = 0,428571(428571)$. Сначала нужно отщепить от него непериодическую часть 428571, т.к. она уже рациональна. И дальше периодическую часть (428571) домножить на какую-то степень десятки, а потом взять (428571) в числителе, а в знаменателе написать 999999.

Получилось сократимое число. И дальше можно долго сокращать. И после всех сокращений получится представитель класса эквивалентности рациональных чисел. До десятичной - деление в столбик, обратно - суммирование бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Бесконечные непериодические дроби

Чтобы доказать существование непериодических дробей, приведем простой пример: пишем подряд все натуральные числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ и т.д. Это число непериодическое, т.к. если предположить, что оно имеет период длиной в несколько символов, то легко найти в ней последовательность нулей большей длины.

Например, если рассматривать по частоте через 10, 100000 и т.д., то найдется последовательность нулей сколь угодно большой длины. Если рассматривать последовательность не обязательно нулей, то найдется последовательность из тысячи семерок подряд, например. Или от противного, если есть период, то можно представить такое натуральное число, у которого семерок больше, чем этот период.

Другой пример: $0,101001000100001\ldots0100\ldots010\ldots$ и т.д. Там найдется сколь угодно много нулей подряд, непериодическая дробь.

Здесь показаны самые важные примеры непериодических дробей:

$$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$$

$$\pi = 3,14159226535$$

$$e = 2,7182818284590452353\ldots$$

Для первого примера $\sqrt{2}$ нужно знать доказательство того, что $\sqrt{2}$ иррациональное число. А доказать, что $\sqrt{2}$ иррациональное число можно от противного. Допустим, это рациональное и несократимое число. После возведения в квадрат получится противоречие. А корень из любого числа, который не является полным квадратом – иррациональное число.

Доказать терему: корень квадратный из любого натурального числа, которое не является полным квадратом, есть иррациональное число.

Определение 1.1. ***Иррациональными*** *числами называются бесконечные непериодические десятичные дроби.*

Определение 1.2. ***Вещественные*** *числа получаются как объединение рациональных чисел и иррациональных чисел.*

Рациональные числа – это периодические десятичные дроби в подходе Вейерштрасса, иррациональные – непериодические. Вещественные числа – это то же самое, что и множество всех бесконечных десятичных дробей, включая те, которые кончаются нулями.

Теперь для вещественных чисел необходимо сформулировать понятие *сравнения*. Мы должны построить на множестве всех пар вещественных чисел логическую функцию, которая показывает, какое число больше.

Метод сравнения вещественных чисел:

1) Есть особые числа. Например, $0,499(9) = 0,5$, потому что все девятки в конце превращаются в один десятичный знак на одну позицию раньше.

2) Кроме того, равными будут все числа, у которых совпадают все десятичные знаки.

3) Положительное число всегда больше отрицательного, значит достаточно сравнить только положительные числа. Они сравниваются так — ищем совпадающие разряды и находим первые несовпадающие. Например, если первое число $0,1234$, а второе $0,1235$, то второе больше.

Ограниченные числовые множества. Понятие ограниченного числа

Теорема 1.1. *Множество X называется* ***ограниченным сверху****, если*

$$M: \quad \forall x \in X \qquad x \leqslant M$$

Число M называется ***верхней гранью*** *множества X.*

Определение 1.3. *Множество X называется* ***ограниченным снизу****, если*

$$M: \quad \forall x \in X \qquad x \geqslant M$$

Число M называется ***нижней гранью*** *множества X.*

Логические формулы

Необходимо построить отрицание логической формулы. 300 лет назад обнаружили, что для познания чего-то, необходимо познать его также в отрицании. Была создана наука *диалектика*. В ней 3 важных закона. Третий закон называется *законом отрицания*, а первый закон называется *закон единства и борьбы противоположностей*. Противоположность – это отрицание.

Существует такое число M, что для любого $x \in X$ верно, что $x \leqslant M$.

Построим отрицание. Раз написано $\exists M$, отрицание – для $\forall M$. Дальше написано для $\forall x$ – значит, найдется такой x ($\exists x$). Дальше «$x \leqslant X$», потому говорится про множество X. И вот дальше стоит «$x \leqslant M$». Итак, чтобы построить отрицание, нужно заменить каждый квантор $\exists$ на квантор $\forall$ и наоборот.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Кроме того, отрицается только самое последнее заключение логической формы. Там может быть много неравенств, но отрицается только самое последнее. $x \leqslant M$ называется *верхней гранью*. Все $\exists$ нужно заменить на $\forall$, и наоборот. Последнее неравенство инвертировать, т.е. построить к нему отрицания.

Рассмотрим правила построения отрицания на следующем примере:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \varepsilon(x) : 0 < |x-a| < \delta \;\; |f(x)-b| < \varepsilon \;\; (1)$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \, \delta > 0 \, \exists x : 0 < |x-a| < \delta \;\; |f(x)-b| \geqslant \varepsilon \; \varepsilon(n) \;\; (2)$$

Определение 1.4. ***Множество*** *X называют* ***ограниченным****, если оно ограничено и сверху, и снизу, т.е. если*

$$\forall M, \forall m : \exists x \in X \;\; m \leqslant x \leqslant M \;\; (3)$$

Отрицание в виде логической формулы к этому определению: множество называется неограниченным, если оно не ограничено снизу или не ограничено сверху.

Определение 1.5. *Множество X называется* ***ограниченным****, если существует такое число A, что для любого $x \in X$ выполняется одно неравенство $|x| \leqslant A$.*

Это определение равносильно предыдущему. Если некоторые множества ограничены по предыдущему определению, то по этому определению тоже, и наоборот.

Самостоятельно нужно доказать теорему двух последних определений. Эти два определения описывают один и тот же класс объектов - ограниченные множества.

Пример 1.1. *Множество X, состоящее из всех отрицательных чисел.*

$$X = \{x : x < 0\}$$

Ограничено сверху, но не ограничено снизу. Очевидно, любое неотрицательное число является верхней гранью множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних граней. Среди всех верхних граней имеется наименьшая. В данном случае это 0. А вот снизу оно не ограничено. От противного. Допустим, некое число m - нижняя грань, то $m-1$ ниже нижней грани и оно элемент X. Противоречие доказывает эту теорему.

Теорема 1.2. *Если число M является верхней гранью множества X, то любое число $M_1 > M$ также является верхней гранью.*

Среди всех верхних граней ограниченного сверху непустого множества есть наименьший элемент, который называется ***точной верхней гранью***.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Некоторые числовые неравенства

1) а) $\forall\ -|a| \leqslant a \leqslant |a|$. Данное неравенство непосредственно следует из правила сравнения вещественных чисел.

2) б) $\forall a, b\ \ |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$ (доказать самостоятельно).

3) в) $\forall a, b\ |a - b| \geqslant |a| - |b|$.

Т.к. $|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|$ в силу утверждения б), то $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

Геометрическое изображение вещественных чисел

Вещественные числа изображаются как точки на прямой. Рассмотрим *координатную прямую* или *ось координат*, т.е. прямую, на которой выбрано направление, начало отсчета (точка 0) и масштабный отрезок, длину которого полагаем равной 1.

Некоторые числовые множества. Промежутки числовой прямой

1) Интервал $(a,b) = \{x : a < x < b\}$

2) Сегмент (или отрезок) $[a,b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$, причем $a < b$. Точки a и b называются *граничными точками сегмента*. Остальные его точки называются *внутренними точками*.

3) Окрестность точки c есть любой интервал, содержащий точку c. Не обязательно симметричный, но обязательно содержащий точку c.

4) ε - окрестность точки с есть интервал $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, то есть $x : |x-c| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

5) Числовая прямая $R = (-\infty, +\infty)$.

6) Полупрямая $[a, +\infty) = \{x : x \geqslant a\}$ или $(-\infty, a]$ или $(a, +\infty)$ или $(-\infty, a)$.

Каждое из этих множеств называют также *числовым промежутком*. Полупрямая – это луч, исходящий из точки вправо или влево. Полупрямые бывают *правые* или *левые*, *с концом* или *без конца*. Все эти множества называются *промежутки*.

Промежуток – это любое числовое множество, внутри которого нет дырок. Это интервалы, сегменты, полуинтервалы (левые и правые), полупрямые (левые и правые, с концами и без концов), а также вся числовая ось.

Окрестности

1) *Окрестность* (обозначается ω) – это интервал, который начинается в точке $(a-\delta_1)$ и кончается в точке $(a+\delta_2)$, где δ_1 и $\delta_2 > 0$. Иначе: это интервал, содержащий точку a, окрестность точки a. В данном случае обозначение $\omega(a)$.

2) *Шаровая окрестность* или *симметричная* – это симметричный интервал, который можно записать так: $(a-\delta,(a+\delta)$. В данном случае обозначение $\omega_\delta(a)$.

3) *Проколотая окрестность* – это набор двух интервалов, левого и правого: $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$. $\hat{\omega}_\delta(a)$ в данном случае проколотая шаровая окрестность размера δ (или радиуса δ).

4) *Левая проколотая окрестность*: $\omega_\delta(-a)$ – интервал $(a-\delta,a)$, где $\delta > 0$.

5) *Правая проколотая окрестность* $\omega_\delta(+a)$ – интервал $(a,a+\delta)$, где $\delta > 0$.

Предельная точка числового множества

Определение 1.6. *Число a является* ***предельной точкой*** *числового множества X, если:*

$$\forall\omega > 0 \quad \exists x \in X : 0 < |x-a| < \omega$$

Пример 1.2. *Рассмотрим формулу как игру двух лиц - мы и противник. Правила очень простые: все символы «для любого» в руках нашего противника, а символ «существует» - в наших руках. Рассмотрим множество X, здесь бесконечно много чисел, которые сгущаются при приближении к точке a. Сама точка a туда не входит.*

Итак, начинается игра двух лиц. Число нам указано. Множество X тоже указано. Противник делает первый ход и указывает $\omega > 0$: a - ω a $a+\omega$

Дальше наш ход: $\exists x$ нужно также указать на прямой x. Указав противнику , мы его пока победили. Но у него бесконечно много ходов. Мы ему указали x, а он укажет другую ω, где старый x не годится. А мы ему указали новый x.

Пусть $a = 0, X\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in N$. Допустим, противник сделал ход - указал нам $\omega > 0$.

$$0 < |x-a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \ \varepsilon > 0, 0 < |x| < \varepsilon, \ \text{т.к. } a = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

x: в нашем распоряжении те x, которые указаны в определении множества X. Значит, получится, что $0 < \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ - это неравенство выполняется всегда тождественно, оно всегда верно для любого $n \in N$.

Поскольку $n \in N$, $|n|$ равен самому этому числу: $\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Теперь мы победили противника. Но должны указать n. Не обязательно натуральное число, поэтому пусть будет целая часть $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ и еще $+1$. Оно точно натуральное. Противник дает $\forall \varepsilon > 0$, а мы ему показываем такое $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ и верно определение предельной точки.

У множества $\varepsilon > 0, 0 < |x| < \varepsilon$ есть предельная точка 0.

Самостоятельно нужно доказать, что у этого же множества других предельных точек нет, кроме 0.

Определение 1.7. *Равносильное число a называют* ***предельной точкой*** *множества X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in X : \quad x \in \varepsilon_a$$

ε_a - проколотая окрестность точки a.

Определение 1.8. *Число a называют* ***предельной точкой*** *X если, в любой проколотой ε окрестности точки содержатся точки множества X.*

$$\forall \overline{\omega_\varepsilon}(a)$$

Определение 1.9. *Символ $+\infty$ называют* ***предельной точкой*** *числового множества X, если*

$$\forall A > 0 \, \exists x \in X : \quad x > A$$

Кроме числовых точек у множества могут быть символьные предельные точки.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 2. Понятие функции и предела функции

Ограниченные функции одной переменной

Понятие функции

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ есть заданное непустое числовое множество. $\mathbb{R}$ – это множество всех вещественных чисел.

Определение 2.1. *Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое число $y \in R$, то на множестве X определена (задана)* ***функция*** *$y = f(x)$ (или $y = y(x)$). Множество X называют* ***областью определения функции****. Переменная величина x, принимающая значения из X, –* ***независимая переменная****. Число $y = f(x)$, соответствующее данному значению x, называют* ***значением функции*** *в точке x.*

$$\boxed{x \in X \to y \in \mathbb{R}}$$

Символ $\subset$ означает принадлежность как множества, а символ $\in$ – как элемента данного множества.

Определение 2.2. ***Множеством значений*** *функции $f(x)$ на множестве X называют множество тех и только тех чисел $y \in \mathcal{R}$, для которых найдется $x \in X$: $y = f(x)$.*

$$\boxed{E[f] = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X : y = f(x)\}.}$$

Множество значений E функции f – это есть множество y из $\mathbb{R}$ такое, что x принадлежит X и такое, что $y = f(x)$.

Определение 2.3. ***Графиком функции*** *$y = f(x)$, $x \in X$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ называют множество точек $\{(x, f(x)), x \in X\}$ пространства $\mathbb{R}^2$.*

Понятие верхней и нижней граней функции

Определение 2.4. *Число B называют* ***верхней гранью*** *(в.г.) функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\forall x \in X \text{ верно } f(x) \leqslant B.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

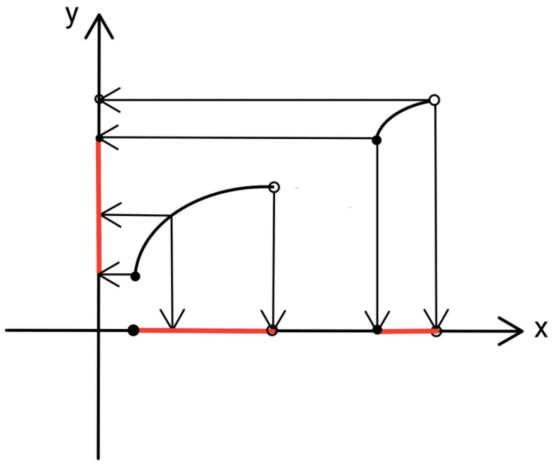


Рис. 2.1. Определение множества значений и множества определений функции

Определение 2.5. *Число B не является верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\exists x \in X : f(x) > B$$

Отрицанием к нестрогому неравенству является строгое неравенство.

Определение 2.6. *Число A называют* ***нижней гранью*** *(н.г.) функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\forall x \in X \text{ верно } f(x) \geqslant A$$

Понятие ограниченной функции

Определение 2.7. *Функцию $f(x)$ называют* ***ограниченной сверху*** *на множестве X, если функция на этом множестве имеет верхнюю грань, то есть если*

$$\exists B : \forall x \in X \text{ верно } f(x) \leqslant B$$

Отрицанием будет являться то, что любое B не является верхней гранью.

Определение 2.8. *Функцию $f(x)$ называют* ***ограниченной снизу*** *на множестве X, если функция на этом множестве имеет нижнюю грань, т.е. если*

$$\exists A : \forall x \in X \text{ верно } f(x) \geqslant B$$

Определение ограниченной функции включает требования существования нижней грани. Не у всяких функций есть нижняя грань.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

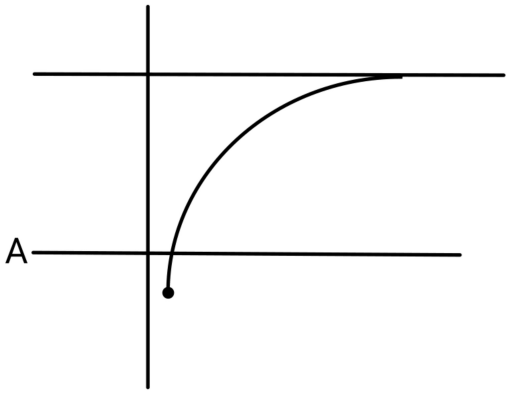


Рис. 2.2. Гипербола

$$X : (0; +\infty)$$

Гипербола, которая имеет только верхнюю грань.

Определение 2.9. *Функцию $f(x)$ называют* ***ограниченной*** *на множестве X, если функция на этом множестве ограничена сверху и ограничена снизу.*

$$\exists A : \forall x \in X \text{ верно } f(x) \geqslant B$$

Определение 2.10. *Функцию $f(x)$ называют* ***неограниченной*** *на множестве X, если функция на этом множестве не ограничена сверху или не ограничена снизу.*

$$\exists A : \forall x \in X \text{ верно } f(x) \geqslant B$$

Определение 2.11 (равносильное)**.** *Функцию $f(x)$ называют* ***ограниченной*** *на множестве X, если функция на этом множестве имеет верхнюю грань и имеет нижнюю грань, то есть*

$$\exists A, \exists B : \forall x \in X \text{ верно } A \leqslant f(x) \leqslant B$$

Определение 2.12 (равносильное)**.** *Функцию $f(x)$ называют* ***ограниченной*** *на множестве X, если*

$$\exists B : \forall \in X \text{ верно } |f(x)| \leqslant B$$

Теорема 2.1 (о гранях)**.** *Если число B является верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X и $D > B$, то число D также является верхней гранью $f(x)$ на множестве X.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

$\forall x \in X$ верно $f(x) \leqslant B$, поэтому $\forall x \in X$ верно $f(x) \leqslant B \leqslant D$, поэтому $\forall x \in X$ верно $f(x) \leqslant D$. ■

Если число B является верхней гранью, то большее тоже. Это означает, что множество всех верхних граней не может иметь промежутков, у которых правый конец $+\infty$. Такие промежутки как вся числовая ось, полуось, включая конец, и полуось без конца.

Если функция определена на непустом множестве, то вся числовая ось не может быть множеством всех верхних граней. Тогда это будет противоречие существованию хотя бы одного значения функции. Все верхние грани функции, имеющие непустую область определения, могут образовывать полупрямую правую, включая конец или не включая конец.

Теорема 2.2. *Множество всех верхних граней, ограниченное сверху функцией с непустой областью определения E имеет наименьший элемент и содержит его. Это полупрямая, включающая конец.*

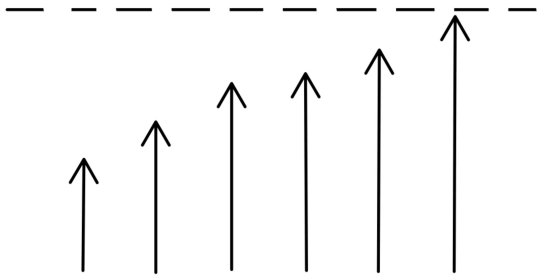


Рис. 2.3. Ограниченное сверху множество

$$y_n = 1 - \frac{1}{n},$$

y_n – высота; $n = 1, 2\ldots$ – любое натуральное число.

Неограниченные функции

Определение 2.13. *Функцию $f(x)$ называют* ***неограниченной сверху*** *на множестве X, если*

$$\forall B\ \exists x \in X : f(x) > B$$

Определение 2.14. *Функцию $f(x)$ называют* ***неограниченной снизу*** *на множестве X, если*

$$\forall A\ \exists x \in X : f(x) < A$$

Определение 2.15. *Функцию $f(x)$ называют* ***неограниченной на множестве*** *X, если эта функция неограниченная сверху или снизу,*

$$\forall B\ \exists x \in X : |f(x)| > B$$

Теорема 2.3 (ограниченность суммы, разности, произведения)**.** *Если $f(x) = O(1)$ (т.е. ограничена, где O – любая ограниченная функция) на множестве X и $g(x) = O(1)$ на множестве X, то*

1) $f(x) + g(x) = O(1)$ *на* X;

2) $f(x) - g(x) = O(1)$ *на* X;

3) $f(x) * g(x) = O(1)$ *на* X.

$$\exists A : \forall x \in X \text{ верно } |f(x)| \leqslant A,$$

$$\exists B : \forall x \in X \text{ верно } |g(x)| \leqslant B$$

Доказательство.

Так как $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, то $\forall x \in X$ верно $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant A + B$. ■

Для частного данная теорема неверна. Частное от деления двух ограниченных функций может не быть ограниченной функцией.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

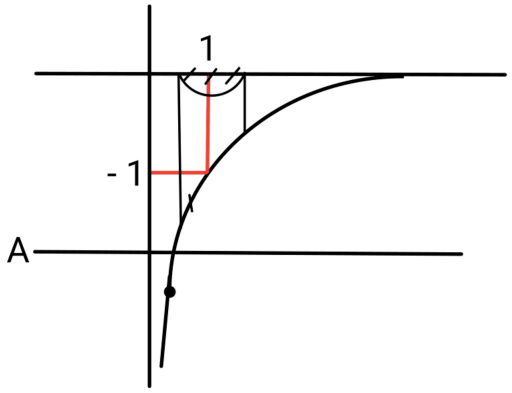


Рис. 2.4. Локально ограниченная гипербола

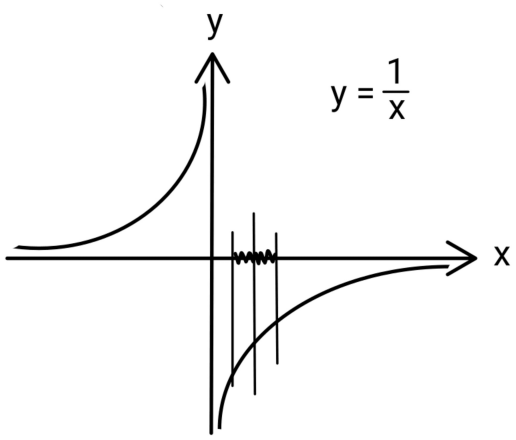


Рис. 2.5. Локально ограниченная полная гипербола

Локально ограниченные функции

Функция называется локально ограниченной в окрестности точки x, если найдется такая окрестность точки x, в которой она ограничена.

Определение 2.16. *Функцию $f(x)$, определенную в некоторой $\Omega(a)$, называют л**окально ограниченной** в окрестности точки $x = a$, если она ограничена в некоторой окрестности точки $x = a$. То есть если*

$$\exists \delta > 0,\ \exists A:\ \forall x \in \Omega_\delta(a) \text{ верно } |f(x)| \leqslant A$$

На втором графике (Рис. 2.5) во всех точках, кроме 0, функция является локально ограниченной.

Определение 2.17 (отрицание)**.**

$$\forall \delta > 0, \forall A\ \exists x \in \Omega_\delta(a) : |f(x)| > A$$

Теорема 2.4 (локальная ограниченность суммы, разности, произведения)**.** *Если $f(x) = O(1)$ и $g(x) = O(1)$ в $\Omega(a)$ (в окрестности точки $x = a$), то*

1) $f(x) + g(x) = O(1)$;

2) $f(x) - g(x) = O(1)$;

3) $f(x) * g(x) = O(1)$ в $\Omega(a)$.

$$\exists \delta_f > 0,\ \exists A_f : \forall x \in \Omega_{\delta f}(a) \text{ верно } |f(x)| \leqslant A_f,$$

$$\exists \delta_g > 0,\ \exists A_g : \forall x \in \Omega_{\delta g}(a) \text{ верно } |g(x)| \leqslant A_g,$$

Доказательство.

Пусть $\delta = min(\delta_f,\ \delta_g)$, $\delta > 0$, и $A = A_f + A_g$, $A > 0$. Тогда

$$\forall x \in \Omega_\delta(a) \text{ верно } |f(x) + g(x)| \leqslant A_f + A_g = A$$

■

Предел функции

Определение предела функции в точке

Замечание 2.1. *Для того чтобы можно было исследовать существование и находить значение предела функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно потребовать, чтобы точка $x = a$ была предельной точкой области определения X функции $f(x)$, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon$$

Равносильное условие:

$$\exists x_n \in X : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \text{ верно } 0 < |x_n - a| < \varepsilon,$$

или, иначе говоря, найдется $x_n \in X$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$.

Конец открытого интервала – это его предельная точка. Точка, в которой необходимо найти предел, должна являться предельной точкой области определения функции. Доказать вышеуказанную логическую формулу можно с помощью примера. На полуинтервале (a, b) любая точка, включая точку a, является предельной точкой множества X.

Замечание 2.2. *Иногда предполагаем, что функция определена в $\widehat{\Omega}(a)$, в $\widehat{\Omega}^{(+)}(a)$, или в $\widehat{\Omega}^{(-)}(a)$.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

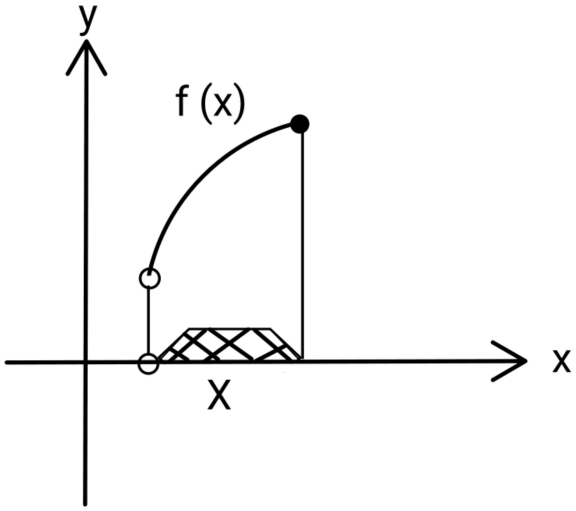


Рис. 2.6. Предельная точка области определения функции

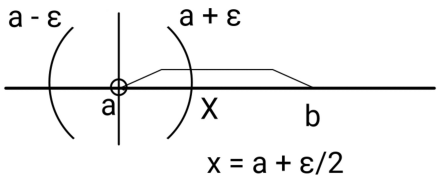


Рис. 2.7. Полуинтервал *ab*

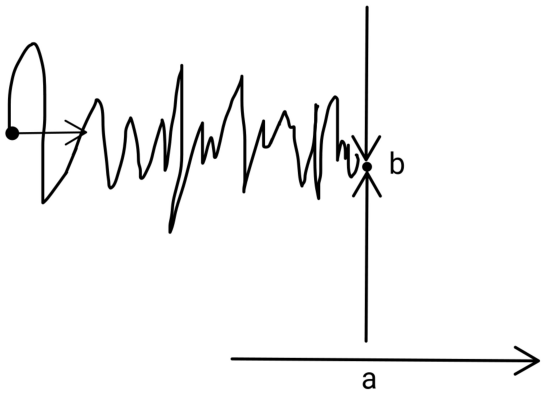


Рис. 2.8. Графическое представление определения 2.18

Определение 2.18 (Предела функции в точке по Коши, на языке логических формул)**.** *Пусть точка* a *является предельной точкой области определения* X *функции*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$f(x)$. Говорят, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \text{ верно } |f(x)-b| < \varepsilon$$

Объект преодолевает препятствие, которое имеет точечное отверстие. При этом объект может двигаться в любом направлении, кроме как по вертикали и назад.

Определение 2.19 (Существование предела функции в точке по Коши)**.** *Пусть точка a является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Говорят, что существует $\lim_{x\to a} f(x)$, если $\exists b : \lim_{x\to a} f(x) = b$, или равносильно*

$$\exists b : \forall\delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \text{ верно } |f(x)-b| < \varepsilon$$

Определение 2.20 (Предела функции в точке Коши, на языке окрестности)**.** *Пусть точка a является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Говорят, что $\lim_{x\to a} f(x) = b$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in X \bigcap \widehat{\Omega_\delta}(a) \text{ верно } f(x) \in \Omega_\varepsilon(b)$$

Определение 2.21 (отрицание определения предела функции в точке по Коши, на языке окрестностей)**.** *Пусть точка a является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Говорят, что число b не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если*

$$\exists\varepsilon > 0 :\ \forall\delta > 0\ \exists x \in X \bigcap \widehat{\Omega_\delta}(a) : f(x) \notin \widehat{\Omega_\varepsilon}(b)$$

Основные свойства предела функции

Теорема 2.5. *Если существует $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$, то $b_1 = b_2$, то есть предел (если существует) единствен.*

Доказательство.

(от противного). Если, например, $b_1 < b_2$, положим $\varepsilon = (b_2 - b_1)/3$, и тогда

1) $\exists\delta_1 > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta_1$ верно $|f(x)-b_1| < \varepsilon$,

2) $\exists\delta_2 > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta_2$ верно $|f(x)-b_2| < \varepsilon$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

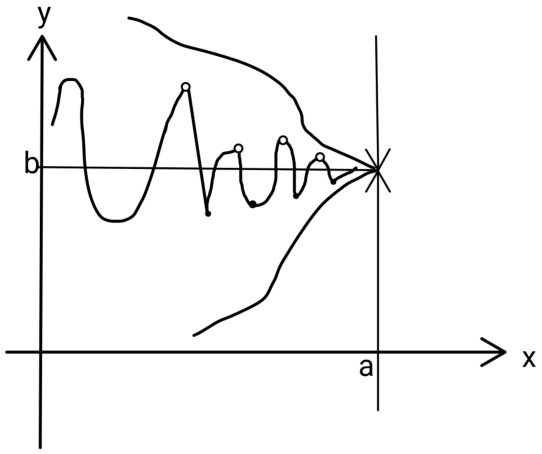


Рис. 2.9. Геометрическая иллюстрация предела функции

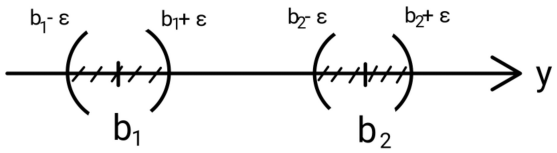


Рис. 2.10. Иллюстрация доказательства теоремы 2.5

Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, тогда $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$. Таким образом, это невозможно. ■

Полное противоречие завершает доказательство теоремы от противного. Предел единствен, если он существует.

Теорема 2.6. *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *то* $f(x) = O\ (1)$ *b* $\Omega(a)$.

Прямое доказательство существования предела функции в точке путем решения задач.

Пример 2.1 (прямого доказательства существования предела)**.** *Докажем, что* $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$. *То есть предел функции* $\lim_{x\to 2} x^3 = a^3$.

Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \text{ верно } |x^3 - a^3| < \varepsilon$$

Далее решаем двойное неравенство:

$$-\varepsilon < x^3 - a^3 < \varepsilon,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$a^3 - \varepsilon < x^3 < a^3 + \varepsilon,$$
$$\sqrt[3]{a^3 - \varepsilon} < x < \sqrt[3]{a^3 + \varepsilon},$$
$$\sqrt[3]{a^3 - \varepsilon} - a < x - a < \sqrt[3]{a^3 + \varepsilon} - a$$

Пусть

$$\delta_2 = \sqrt[3]{a^3 + \varepsilon} - a > 0, \delta_1 = -\sqrt[3]{a^3 - \varepsilon} + a > 0$$
$$\Rightarrow \ -\delta_1 < x - a < \delta_2, |x - a| < min(\delta_1, \delta_2)$$

Важно то, что $min(\delta_1, \delta_2) > 0$, $\delta(\varepsilon) = min(\delta_1, \delta_2)$.

Методика вычисления предела элементарной функции

Теорема 2.7. *Любая элементарная функция имеет предел в каждой внутренней точке своей области определения, равный значению этой функции в этой точке. Если функция определена в граничной точке своей области определения, то это верно и для этой граничной точки.*

Элементарные функции – степенные, тригонометрические, обратные тригонометрические показательные, логарифмические.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 3. Свойства пределов

Предел функции в бесконечно удаленной точке

Вопрос о пределе функции можно ставить только в том случае, когда точка, которая интересует, является предельной точкой области определения функции.

Определение 3.1. *Точка $x = a$ называется* ***предельной точкой*** *области определения функции, которую будем обозначать как X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : 0 < |x - a| < \varepsilon$$

Доказательство.

Пусть $X = \{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда необходимо доказать, что $a = 0$ является предельной точкой этого множества.

Раз $\varepsilon > 0$, то

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

ε – некоторое положительное число. Возможны два варианта: если $\varepsilon \geqslant 1$, тогда, например, $n = 2$, а если $0 < \varepsilon < 1$, тогда $n = [\frac{1}{\varepsilon}] + 2$.

Теперь докажем, что любое число $a > 0$ не является предельной точкой этого множества. Тем самым докажем, что у этого множества 1 предельная точка $a = 0$.

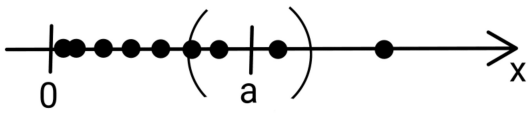


Рис. 3.1. Элементы множества

Все элементы множества сгущаются к точке 0. Если $a > 0$, то необходимо указать какой-нибудь положительный ε, например, $\frac{a}{2}$. Таким образом, докажем, что внутри данного промежутка конечное число элементов множества. Поэтому данная точка не может быть предельной точкой множества. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 3.1. *$+\infty$ не является числом, это символ. Однако $+\infty$ является предельной точкой множества X в том случае, если*

$$\forall B\ \exists x \in X : x > B$$

Доказательство.

Докажем, что $+\infty$ является предельной точкой множества X.

$$X = \{n^2\} n \in \mathbb{N}$$

$$n^2 > B$$

Если $B \leqslant 0$,то $n = 1$ либо любое заданное натуральное число. Если $B > 0$, то $n > \sqrt{B}$ или $n = [\sqrt{B}] + 2$. ■

Определение 3.2 (отрицание)**.** *$+\infty$ не является предельной точкой X*

$$\exists B : \forall x \in X \text{ верно } x \leqslant B$$

Данная фраза совпадает с определением верхней грани без $\exists$, а так как существует, то это означает ограниченное сверху множество, которое имеет верхнюю грань. Таким образом, то, что $+\infty$ является предельной точкой X равносильно тому, что это неограниченное сверху множество.

У множества R все вещественные числа являются предельными точками, включая $+\infty - \infty$.

Теорема 3.1. *Любое x, принадлежащее отрезку (0;1) является предельной точкой множества всех рациональных чисел, лежащих на интервале (0;1).*

Доказательство.

Докажем, что 0 является предельной точкой множества всех рациональных чисел вида $\frac{m}{n}$ таких, что $\frac{m}{n} \in (0;1)$.

Если $x_n = \frac{1}{n}$, то уже доказали, что у этого множества предельная точка является 0.

Теперь пусть $a \in (0;1)$. Есть два варианта: a – иррациональное или рациональное число. Все иррациональные числа интервала (0;1) могут быть представлены как

бесконечные не периодические десятичные дроби. У любой бесконечной дроби есть десятичное приближение с недостатком и с избытком.

Пусть $a = 0,a_1\ a_2\ a_3 \dots a_k \dots$, что и является бесконечная десятичная дробь. Построим десятичное приближение с избытком.

$$\widehat{a}_k = 0,a_1\ a_2\ a_3 \dots (a_k + 1) \dots$$

Если случилось так, что на месте a_k будет стоять 9, то получится 10 и ее необходимо передвинуть. Далее построим десятичное приближение с недостатком.

$$\check{a}_k = 0,a_1\ a_2 \dots (a_k - 1)$$

$$|a - a_k| \leqslant 10^{-k}$$

Таким образом, доказали что любое вещественное число интервала (0;1) является предельной точкой множества всех рациональных чисел данного интервала. ■

Множество всех предельных точек множества рациональных чисел интервала (0;1) устроено следующим образом:

$$\mathcal{B}\left[\left\{\left\{\frac{m}{n}\right\}, \frac{m}{n} \in (0;1)\right\}\right] = [0;1]$$

Теорема 3.2. *Все рациональные числа образуют счетное множество. Это означает, что все рациональные числа можно занумеровать натуральными номерами. $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ – счетное.*

Доказательство.

Для начала сделаем только для положительных рациональных чисел. Существует конструкция, которая называется **треугольное исчерпывание**.

nm	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x
3	x	x	x	x	x
4	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Каждая ячейка данной таблицы – положительное рациональное число. Среди них есть натуральные числа, сократимые дроби. Рациональные числа, которые представляются равными сократимыми дробями, рассматриваем как одно. Пересчитывать ячейки таблицы необходимо по диагонали. Тогда каждое такое рациональное число получит некий натуральный номер. ■

Для отрицательных рациональных чисел доказать можно точно так же. А для всех в общем рациональных чисел доказать надо, считая по очереди. То есть одно положительное, затем отрицательное, снова положительное и так далее.

Множество всех рациональных чисел счетное, то есть его можно пронумеровать. А предельные точки данного множества образуют несчетное множество.

Замечание 3.2. *Равносильное условие:*

$$\exists x_n : \forall n x_n \in X,\ \forall B\ : \forall n > N \text{ верно } x_n > B$$

или, иначе говоря,

$$\exists x_n \in X : x_n \to +\infty$$

Определение 3.3 (предела функции при $x \to +\infty$ по Коши, на языке логических формул)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X , причем*

$$\forall B \quad \exists x \in X : x > B$$

Говорят, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, если $+\infty$ является предельной точкой X, также

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A : \forall x > A : x \in X \text{ верно } |f(x) - b| < \varepsilon$$

Для того, чтобы дать определение, что у функции существует предел на бесконечности, необходимо подставить символ «существует» в начале вышеуказанной фразы.

Определение 3.4 (предела функции $x \to +\infty$ при по Коши, на языке окрестностей)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, причем $\forall B\ \exists x \in X : x > B$. Говорят, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A : \forall x \in X \bigcap \Omega_A(+\infty) \text{ верно } f(x) \in \Omega_\varepsilon(b)$$

$$\Omega_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 3.3.

$$\Omega(a) = (a - \delta_1, a + \delta_2),\ \ \delta_{1,2} > 0$$

$$\Omega(+\infty) = (A, +\infty)$$

Окрестности бывают произвольные и шаровые. Выше указана шаровая окрестность.

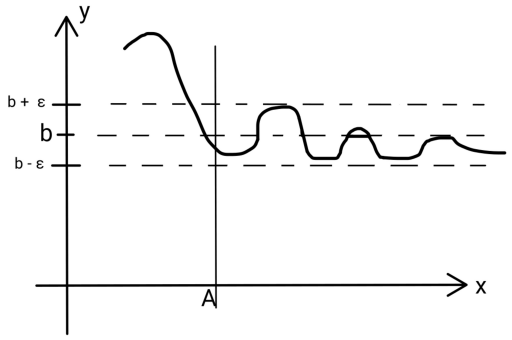


Рис. 3.2. Шаровая окрестность при $\varepsilon > 0$

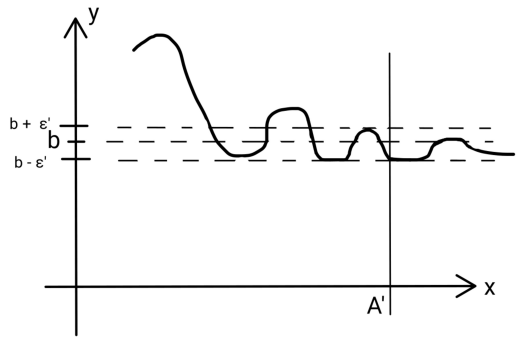


Рис. 3.3. Шаровая окрестность при меньшем значении ε

При $\varepsilon > 0$ необходимо указать такое число A, что правее данной точки график функции лежит внутри этого промежутка. Если ε будет меньше предыдущего, то промежуток будет более узкий. Тогда новое число A' будет больше предыдущего.

Тогда $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

Определение 3.5 (отсутствие предела функции при $x \to +\infty$ по Коши)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, причем $\forall B\ \ \exists x \in X : x > B$. Говорят, что $f(x)$ не имеет предела при $x \to +\infty$, если*

$$\forall b\ \exists \varepsilon > 0 : \forall A\ \exists x \in X : x > A\ \ и\ |f(x) - b| \geqslant \varepsilon$$

Пример 3.1. *Пусть $f(x) = sinx$ и $b \in (0;1)$. Необходимо доказать $\nexists\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$.*

Областью определения $sinx$ является все вещественные числа, поэтому бесконечность это предельная точка.

Можно выбрать одно из нескольких вариантов значения числа b. Надо найти такие числа, которые отличаются от числа b больше (или равно), чем на ε. Например, числа вида $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, тогда

$$sinx_k = -1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

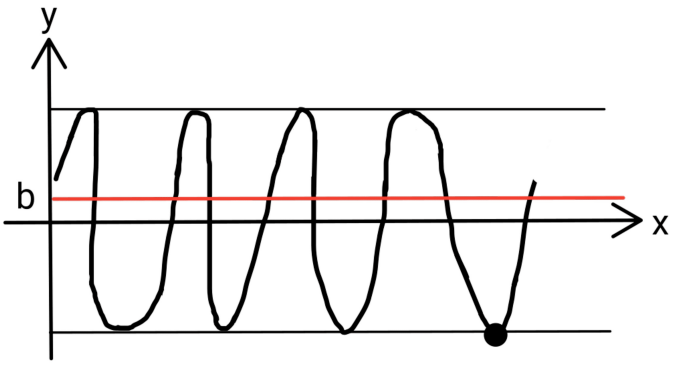


Рис. 3.4. Иллюстрация функции с числом b

$$|b - sinx_k| = 1 + b > \frac{1}{2}$$

Таким образом, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Пусть

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k > A, \quad k = x_k > A$$

Теорема 3.3. *Периодическая, не равная тождественной константе функция не имеет предела на* $+\infty$.

Периодическая функция отличная от константы – это функция, которая принимает два разных значения много раз (например, b_1 и b_2). Точки, в которых функция принимает значение b_2, образуют множество.

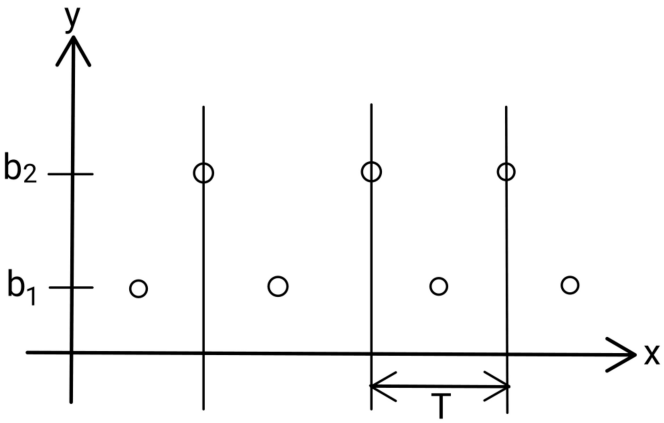


Рис. 3.5. Периодическая функция

$$\varepsilon = \frac{b_2 - b_1}{3}$$

Если указать данный ε, то найдем точку, которая отличается от функции, больше чем на ε.

Бесконечно большие функции в точке

Определение 3.6. *Пусть точка $x = a$ является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Говорят, что $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, что то же самое, $f(x)$ является бесконечно большой положительной при $x \to a$, или, что то же самое, $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, если*

$$\forall A\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \text{ верно } f(x) > A$$

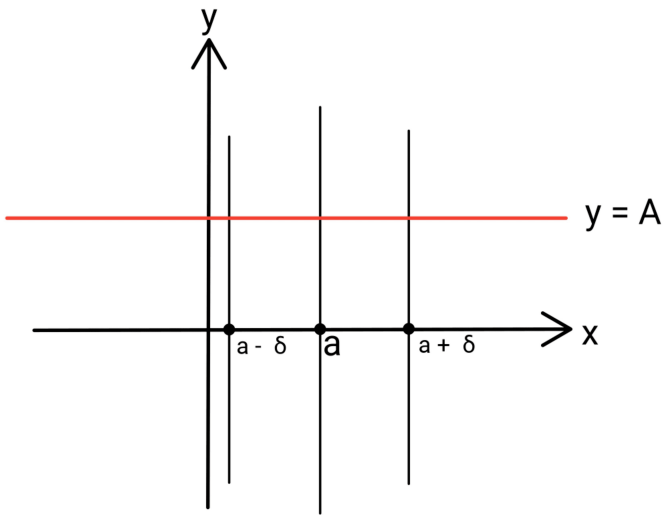


Рис. 3.6. Иллюстрация определения 3.6

$f(x) > A$ означает, что график функции находится или выше прямой $y = A$. То есть найдется такая вертикальная полоса, окаймляющая точку a, что внутри этой вертикальной полосы график функции находятся вне горизонтальной полосы.

Если A будет увеличиваться, то полосы $a - \delta$ и $a + \delta$ будут сужаться.

Пример 3.2. *Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 0$. Докажем, что $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ при $x \to 0$.*

$$\frac{1}{x^2} > A$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Если A – отрицательное, то подходит любой x. Поэтому надо взять только A – положительные. Пусть $A > 0$, тогда:

$$x^2 < \frac{1}{A},$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$x \neq 0$$

Таким образом, $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Доказали, что бесконечно большая положительная функция в точке 0.

Односторонние пределы

Определение 3.7 (предела функции в точке справа по Коши, на языке логических формул)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки $x = a$, то есть на множестве $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$. Говорят, что $b = \lim_{x\to a+0} f(x)$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < x - a < \delta \text{ верно } |f(x) - b| < \varepsilon$$

или иначе из условия $a < x < a + \delta$ следует

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Пример 3.3. *Пусть $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. Докажем, что $\lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x}} = 0$.*

Необходимо, чтобы $|e^{\frac{-1}{x}} < \varepsilon|$.

$$e^{\frac{-1}{x}} < \varepsilon$$

Обе части данного неравенства – положительные числа. Поэтому его можно прологарифмировать по основанию e. Тогда получается:

$$-\frac{1}{x} < \ln\varepsilon \text{ равносильно } \frac{1}{x} > -\ln\varepsilon$$

Если $\varepsilon \geqslant 1$, $-\ln\varepsilon < 0$, то $x = 1$.

Если $0 < \varepsilon < 1$, $-\ln\varepsilon > 0$, тогда $0 < x < \frac{1}{\ln\varepsilon}$. Причем $0 < x < \frac{1}{\ln\varepsilon} > 0$. Таким образом:

$$\delta = \frac{1}{\ln\varepsilon}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 3.4. *С другой стороны,* $e^{\frac{-1}{x}}$ *является бесконечно большой положительной (б. б. (+)) при* $x \to -0$*, что и докажем.*

$$\forall A\ \exists \delta > 0 : \forall x : -\delta < x < 0 (x < 0 \text{ и } |x| < \delta)$$

Должно быть выполнено следующее условие:

$$e^{\frac{-1}{x}} > A$$

$$-\frac{1}{x} > \ln A$$

Пусть $A > 1$*, тогда* $\ln A > 0$.

$$\frac{1}{x} < -\ln A$$

$$\delta = \frac{1}{\ln A}$$

Если $-\frac{1}{\ln A} < x < 0$*, тогда* $e^{\frac{-1}{x}} > A$.

Функция, которую исследуем, является бесконечно большой положительной в точке 0 слева и функцией, имеющей предел в точке 0 справа.

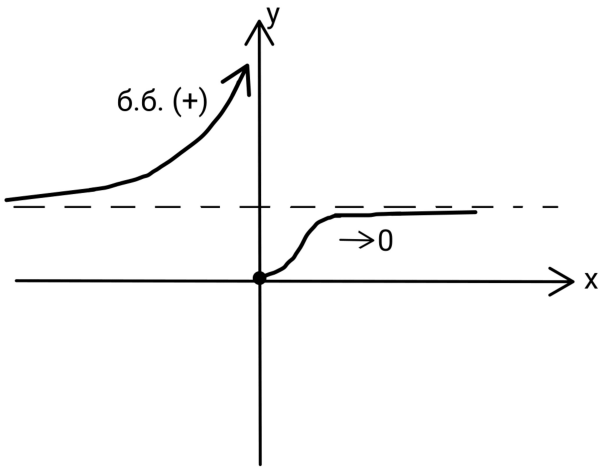


Рис. 3.7. График исследуемой функции

Определение 3.8 (предела функции в точке справа по Коши, на языке окрестностей)**.** *Пусть функция* $f(x)$ *определена в правой полуокрестности точки* $x = a$*. То есть* $x = (a, a + \delta_1)$*. Говорят, что* $\lim_{x \to a+0} f(x) = b$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \widehat{\Omega}_{\delta}^{(+)}(a) \text{ верно } f(x) \in \Omega_{\varepsilon}(b)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Обозначение предела функции в точке слева и справа:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \text{ равносильно } f(x-0) = b$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ равносильно } f(x+0) = b$$

Пример 3.5. *Пусть $f(x) = |x|$, где $|x|$ – целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, включая нуль).*

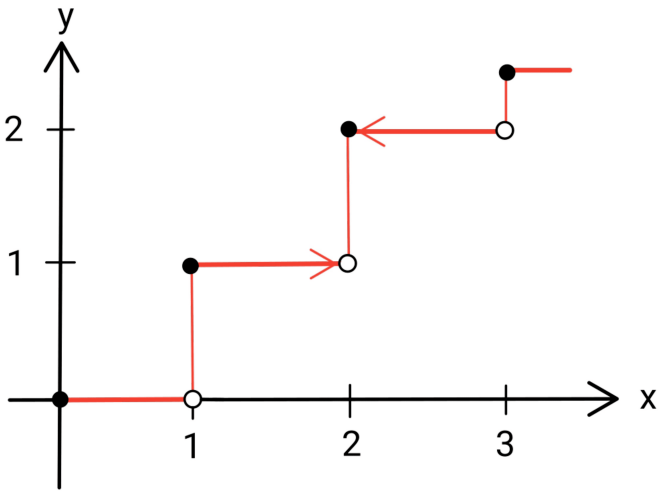


Рис. 3.8. Функция – целая часть x

Рассмотрим функцию в точке 2. Предел в точке 2 слева равен 1, а справа равен 2. Это показывает, что пределы в данной точке слева и справа разные.

Теорема 3.4 (связь односторонних пределов с пределов функции в точке). *1) Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$, то $\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b$ и $\exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b$.*

2) Если $\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b_1$ и $\exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b_2$, и $b_1 = b_2 = b$, то $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$.

3) Если $\exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b_1$ и $\exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b_2$, причем $b_1 \neq b_2$, то $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

4) Если $\nexists \lim_{x\to a+0} f(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

Свойства пределов

Теорема 3.5 (о локальной ограниченности функции, имеющей предел). *Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$, то $f(x) = O(1)$ в окрестности $x = a$.*

Теорема 3.6 (об отсутствии предела у неограниченной функции)**.** *Если $f(x)$ неограничена в окрестности точки $x = a$, то $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.*

Теорема 3.7 (предел суммы, разности, произведения, частного)**.** *Если $f(x)$ определена в $\widehat{\Omega}_{\delta\ f}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $g(x)$ определена в $\widehat{\Omega}_{\delta\ g}$ и $\lim_{x\to a} g(x) = c$, то*

1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$,

2) $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = b - c$,

3) $\lim_{x\to a}(f(x) * g(x)) = b * c$,

4) *если к тому же $c \neq 0$, то $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.*

Доказательство.

Рассмотрим первый пункт теоремы. Определения предела для функции f:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in X_f : 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ верно } |f(x) - b| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in X_g : 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ верно } |g(x) - c| < \varepsilon_2$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in X_f \bigcap X_g : 0 < |x - a| < \delta$ верно $|f(x) + g(x) - b - c| < \varepsilon$.

$$|f(x) + g(x) - b - c| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leqslant |f(x) - b| + |g(x) - c|$$

При этом хотим, чтобы $|f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon$. Для этого необходимо, чтобы

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\frac{\varepsilon}{2}$ – ε_1 и ε_2 соответственно.

Так как $\varepsilon > 0$, то $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 > 0$ и тогда δ_1 и $\delta_2 > 0$.

Тогда $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 4. Понятие предела последовательности

Понятие неопределенности

Существует два основных типа определения предела: через ε и δ и через окрестности. Второй тип являются более фундаментальным и полезным.

Определение 4.1. *предела (правого предела, левого предела, бесконечного предела) в точке (в точке справа, слева, в бесконечно удаленной точке)*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$$

$$\forall\Omega(\beta)\ \exists\widehat{\Omega}(\alpha) : \forall x \in \widehat{\Omega}(\alpha) \text{ верно } f(x) \in \Omega(\beta)$$

$$\forall G : G = \Omega(\beta)\ \exists D : D = \widehat{\Omega}(\alpha), \forall x \in D \text{ верно } f(x) \in G$$

Заложены два утверждения:

1) Предел вообще существует

2) Предел равен β

Чтобы проотрицать два утверждения нарушается или первое, или второе. Поэтому рассматриваем формальное отрицание общее.

Определение 4.2 (отрицание ($\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$))**.**

$$\exists\Omega(\beta) : \forall\widehat{\Omega}(\alpha) :\ \exists \in \widehat{\Omega}(\alpha) : f(x) \in \text{Дополнение } \Omega(\beta)$$

$$\exists G : G = \Omega(\beta), \forall D : D = \widehat{\Omega}(\alpha) : \exists x \in D : f(x) \notin G$$

Пример 4.1. *Необходимо доказать, что не существует следующего предела:*

$$\exists \lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$$

Например, $\frac{1}{2}$ *не является этим пределом, то есть* $\beta = \frac{1}{2}$.

Необходимо найти x*, который расположен внутри* D*, и что функция* $f(x)$ *не принадлежит* G*. Будем искать такие точки, у которых* $sin\frac{1}{x} = 1$*, при этом* $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Так найдем* $0 < x < \delta$ *и так далее.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

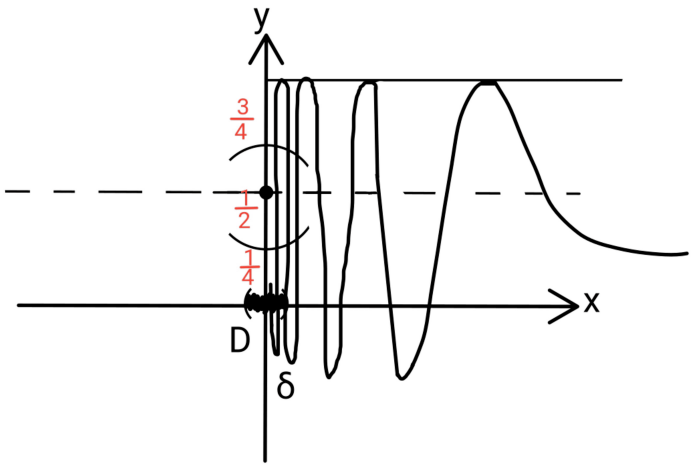


Рис. 4.1. Функция *sinx*

Также надо проверить другие варианты β. Для $0 < \beta < 1$, $\beta = 0$, $\beta < 0$ такой подход тоже годится.

В качестве точки α используем следующие пять объектов, которые можно подставлять в определения предела:

$$\Omega(a) = (a - \delta_1, a + \delta_2),$$

$$\widehat{\Omega}(a+0) = (a, a+\delta),$$

$$\widehat{\Omega}(a-0) = (a-\delta, a),$$

$$\Omega(+\infty) = (B, +\infty),$$

$$\Omega(-\infty) = (-\infty, A),$$

Окрестность точки всегда содержит саму точку.

Существует 25 вариантов того, какие могут быть определения предела. Еще столько же есть для отрицаний.

$\alpha\beta$	b	b + 0	b - 0	+ ∞	- ∞
a	×	×	×	×	×
a + 0	×	×	×	×	×
a - 0	×	×	×	×	×
+ ∞	×	×	×	×	×
- ∞	×	×	×	×	×

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По горизонтали указаны, какие значения ставим под символом предела, то есть к чему стремится x. По вертикали, к чему стремится функция.

Определение 4.3. *Пусть точка $x = a$ является предельной точкой области определения X функции $f(x)$. Говорят, что $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, или, что то же самое, $f(x)$ является бесконечно большой положительной при $x \to a$, или, что то же самое, $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, если:*

$$\forall A\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \text{ верно } f(x) > A$$

Все бесконечно большие функции являются подмножеством неограниченных функций.

Пример 4.2. *Функция $sin\frac{1}{x}$ является ограниченной на всей числовой оси, но из нее можно сделать неограниченную функцию в окрестности нуль. Такая функция принимает большие значения вблизи начала координат:*

$$\frac{sin\frac{1}{x}}{x}$$

Теперь можно указать функцию, которая является бесконечно большой положительной в точке 0:

$$\frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

Пусть

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to +0]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[x\to -0]{} -\infty \end{cases}$$

Тогда функция принимает вид $\frac{1}{x}$.

Данные функции неограниченные, они принимают сколь угодно большие значения вблизи начала координат. Две последние функции обладают еще одним свойством, которого у той функции нет за счет осцилляции, – они становятся больше любого наперед заданного числа в правой полуокрестности нуля.

Вспоминая о теореме связи односторонних пределов с пределом функции в точке (см. лекция 2 т. 3.4), рассмотрим пример.

Пример 4.3. *Исследуем функцию $f(x) = \frac{x}{|x|}$, у которой существует предел в точке справа и слева, но они не равны друг другу. Такая функция называется* **функция, имеющая разрыв первого рода**.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

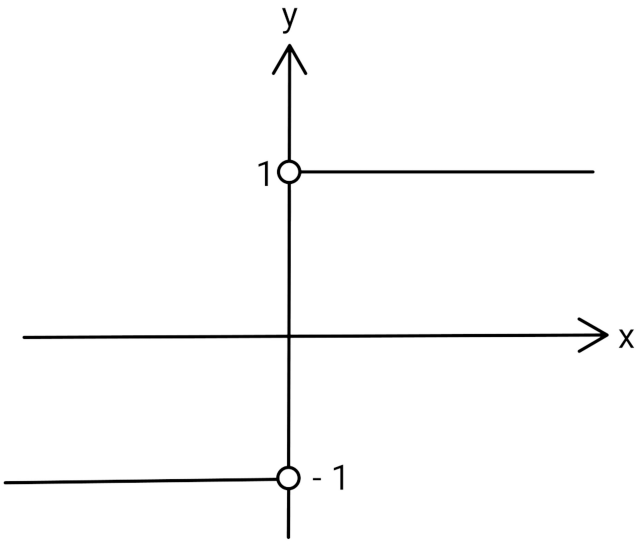


Рис. 4.2. Функция $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Рассматривая теорему 3.7 о пределе суммы, разности, произведения, частного необходимо сделать важное замечание.

Замечание 4.1. *Если функция $f(x)$ имеет область определения $\mathcal{D}_f$, а функция $g(x)$ – $\mathcal{D}_g$, то их сумма будет иметь пересечение (то есть она может стать меньше) $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \bigcap \mathcal{D}_g$.*

Точка a является предельной точкой пересечения областей определения.

Доказательство.

(Теоремы 3.7 о частном). Напомним: если $c \neq 0$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Пусть для определенности $c > 0$. Тогда

$$\exists \delta_3 > 0 : \forall x \in \widehat{\Omega}_{\delta_3}(a) \text{ верно } |g(x) - c| < \frac{c}{2},$$

$$-\frac{c}{2} < g(x) - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < g(x) < \frac{3c}{2},$$

$$0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{c}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть δ_1 – радиус окрестности, внутри которой выполняется неравенство:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists_{\delta 1} > 0 : \forall x \in \widehat{\Omega}_{\delta_1}(a) \text{ верно } |f(x) - b| < \varepsilon_1$$

Поэтому $f(x) = b + p(x)$, причем $|p(x)| < \varepsilon_1$.

Далее рассмотрим для функции g.

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists_{\delta 2} > 0 : \forall x \in \widehat{\Omega}_{\delta_2}(a) \text{ верно } |g(x) - c| < \varepsilon_2$$

Поэтому $g(x) = c + q(x)$, причем $|q(x)| < \varepsilon_2$.

При $\delta = min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$ и $\forall x \in \widehat{\Omega}_{\delta}(a)$ верно

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c}\right| = \left|\frac{f(x)c - g(x)b}{g(x)c}\right| = \left|\frac{(b + p(x))c - (c + q(x))b}{g(x)c}\right| = \frac{1}{|g(x)|}\left|\frac{p(x)c - q(x)b}{c}\right| <$$

$$< \frac{2}{|c|}\frac{\varepsilon_1|c| + \varepsilon_2|b|}{|c|} < \frac{2}{|c|}\varepsilon_1 + \frac{2|b|}{c^2}\varepsilon_2 = \varepsilon$$

■

Теорема 4.1. *Пусть $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Тогда*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

1) *равен 0 при $n < m$,*
2) *равен $\frac{a_n}{b_m}$ при $n = m$,*
3) *не существует при $n > m$, причем в этом случае функция бесконечно большая, так что можно также записать, что $\lim_{x\to\infty} \dots = -\infty$ в зависимости от знаков $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.*

Далее рассмотрим примеры, связанные с понятием неопределенности.

Пример 4.4. *Найдем $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}$.*

Заметим, что при $x = 3$ числитель и знаменатель равны нулю.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{x-2} = \lim_{x\to 3} \frac{3-4}{3-2} = -1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 4.5. *Найдем* $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}$.

Заметим, что при $x=3$ *числитель и знаменатель равны нулю.*

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-4)(\sqrt{x+13}+4)}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+13}+4}=\frac{1}{\lim_{x\to 3}\sqrt{x+13}+4}=\frac{1}{8}$$

Предел последовательности

Частный случай предела функции при $x\to+\infty$ есть предел числовой последовательности.

Определение 4.4. *Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел:* $f(n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Обозначение числовой последовательности: $\{x_n\}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$. Иногда ее обозначают так: $x_n=x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$. Фигурные скобки обозначают множество, но последовательность – это множество натуральных чисел на множество всех вещественных чисел.

Определение 4.5. *Число* b *называют пределом числовой последовательности* x_n, *если*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \in\ \mathbb{N}:\forall_n>N\ \textit{верно}\ |x_n-b|<\varepsilon$$

Если последовательность x_n *имеет предел, то говорят, что она сходится, а если не имеет предела, то говорят, что она расходится.*

Обозначение: $\lim_{n\to+\infty}x_n=b$.

Бесконечно малые функции

Пусть X есть область определения функции $f(x)$ и точка $x=a$ является предельной точкой X. В дальнейшем это условие всегда считаем выполненным.

Определение 4.6. *Если* $\lim_{x\to a}f(x)=0$, *то функцию* $f(x)$ *называют* ***бесконечно малой*** *(б. м.) при* $x\to a$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 4.7 (равносильное)**.** *Функцию $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \to a$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \text{ верно } |f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение бесконечно малой функции в точке $x = a$ – $f(x) = o(1)$ при $x \to a$.

Пример 4.6. *Функция $f(x) = x^n$, $n > 0$, $x \in X$, $X = \mathbb{R}^1$, является б.м. при $x \to 0$.*

Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \text{ верно } |x^n| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Хотим, чтобы было верным неравенство $|x^n| < \varepsilon$, $|x| < \sqrt[n]{\varepsilon}$, выберем $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$.

Тогда при $|x| < \delta$ будет $0 < |x^n| < \varepsilon$.

Пример 4.7. *Функция $f(x) = sinx$ является б. м. при $x \to 0$.*

Из определения sin следует, что $-x < sinx < x$, $x > 0$ или $|sinx| < |x|$, $x \neq 0$. Таким образом, $\lim sinx = 0$.

Теорема 4.2. *Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$, то*

$$f(x) - b = o(1), \quad f(x) = b + o(1)$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \text{ верно } |f(x) - b| < \varepsilon$$

Поэтому $\lim_{x\to a}(f(x) - b) = 0$, так что $f(x) - b = o(1)$. ■

Теорема 4.3. *Если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$, то*

$$\exists \lim_{x\to a}(b + f(x)) = b$$

Теорема 4.4 (арифметические операции над бесконечно малыми функциями)**.**

1) $o(1) + o(1) = o(1)$,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $o(1) - o(1) = o(1)$,

3) $o(1) * o(1) = o(1)$.

Пусть $f(x) = o(1)$ *при* $x \to a$, $g(x) = o(1)$ *при* $x \to a$, *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

1) $\exists \delta_1 > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_1$ *верно* $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

2) $\exists \delta_2 > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_2$ *верно* $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, *так что* $\delta > 0$. *Тогда*

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \text{ верно } |f(x) + g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Понятие неопределенности типа $\frac{0}{0}$

Определение 4.8. *Если* $f(x) \to 0$ *и* $g(x) \to 0$ *при* $x \to a$, *то* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *называют неопределенностью типа* $\frac{0}{0}$.

Пример 4.8. *Пусть* $x \to 0$, $f(x) = x^2$, $f(x) = o(1)$ *при* $x \to 0$, $g(x) = x^3$, $g(x) = o(1)$ *при* $x \to 0$, *тогда*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ *неограниченная при* $x \to 0$.

2) $\frac{g(x)}{f(x)} = x = o(1)$ *при* $x \to 0$.

Свойства бесконечно малых и ограниченных функций

Теорема 4.5. *Сумма бесконечно малой функции и ограниченной функции есть ограниченная функция.*

$$o(1) + O(1) = O(1) \text{ при } x \to a$$

Теорема 4.6. *Произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции есть бесконечно малая функция.*

$$o(1) * O(1) = o(1) \text{ при } x \to a$$

Теорема 4.7. *Произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции является ограниченной функцией.*

$$o(1) * O(1) = O(1) \text{ при } x \to a$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теоремы о пределах

Предел суммы, разности, произведения, частного

Теорема 4.8 (о свойствах пределов функций)**.** *Если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *то*

1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$,

2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = b-c$,

3) $\lim_{x\to a}(f(x)*g(x)) = b*c$,

4) *если еще* $c \neq 0$, *то* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказательство.

Докажем второй пункт теоремы о произведении.

Известно, что $f(x) \to b$ при $x \to a$, $g(x) \to c$ при $x \to a$, поэтому

$$f(x) = b + o(1), g(x) = c + o(1)$$

$$f(x)*g(x) = (b+o(1))(c+o(1)) = b*c + b*o(1) + c*o(1) + o(1)*o(1)$$

По теореме о произведении $b*o(1) =$ о (1), а также $c*o(1) = o(1)$. По теореме о произведении бесконечно малых функциях $o(1)*o(1) = o(1)$. В итоге получаем $o(1)$.

$$f*g = b*c + o(1)$$

■

Предел сложной функции

Теорема 4.9 (о пределе сложной функции)**.** *Если* $g(x)$ *определена в* $\Omega(a)$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, $f(t)$ *определена в* $\Omega(c)$, $\lim_{t\to c} f(t) = b$ *и* $f(c) = b$, *то*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = b$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

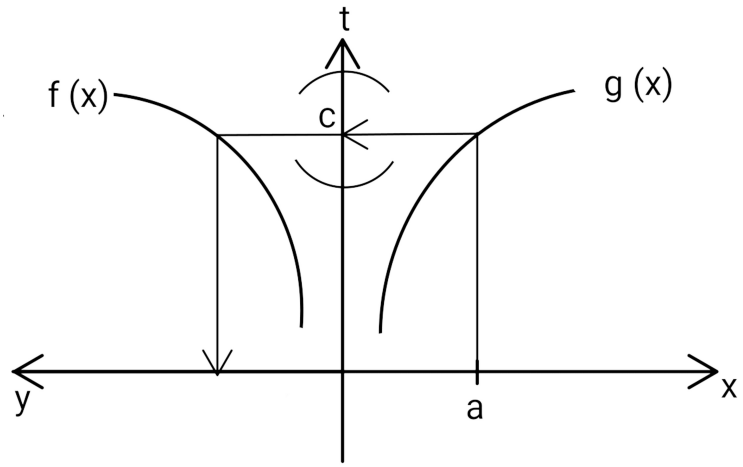


Рис. 4.3. Предел функции $f(x)$ и $g(x)$

О функциях, не имеющих предела

Теорема 4.10. *Если* $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, *то*

$$\nexists \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$$

Доказательство.

(от противного). Пусть $f(x) \to b$ при $x \to a$. При этом $f(x)+g(x) \to b$ при $x \to a$.

$$(f+g)-f \to d-b$$

Таким образом, $g \to d-b$. ■

Неверное утверждение:

$$\text{Если } \exists \lim_{x\to a} f(x), \nexists \lim_{x\to a} g(x), \text{ то } \nexists \lim_{x\to a}(f(x)*g(x))$$

Теорема 4.11. *Если* $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, *то*

$$\nexists \lim_{x\to a}(f(x)*g(x))$$

Неверное утверждение:

$$\text{Если } \nexists \lim_{x\to a} f(x), \nexists \lim_{x\to a} g(x), \text{ то } \nexists \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$$

Лекция 5. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Предельный переход в неравенствах

Пусть $f(x) > g(x) \Rightarrow p > q$

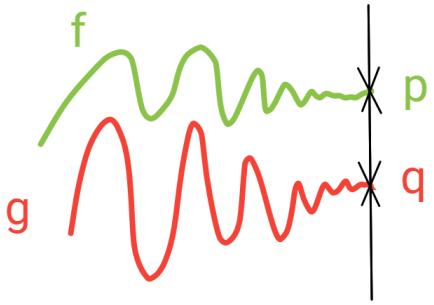


Рис. 5.1. Пример, показывающий, что $p > q$ неверно

Возможна такая ситуация, когда $f(x) > g(x)$, но предел одинаков. Тогда график будет на (Рис. 5.2).

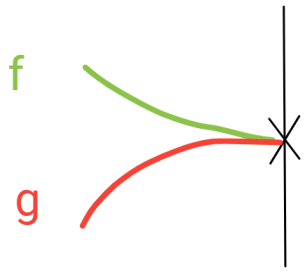


Рис. 5.2. Схема графика

Верное неравенство будет нестрогим:

$$f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow p \geqslant g$$

Теорема 5.1. *Если* $f(x) \leqslant g(x)$ *в* $\hat{\Omega}(a)$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *то* $b \leqslant c$.

Доказательство.

Доказательство от противного.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

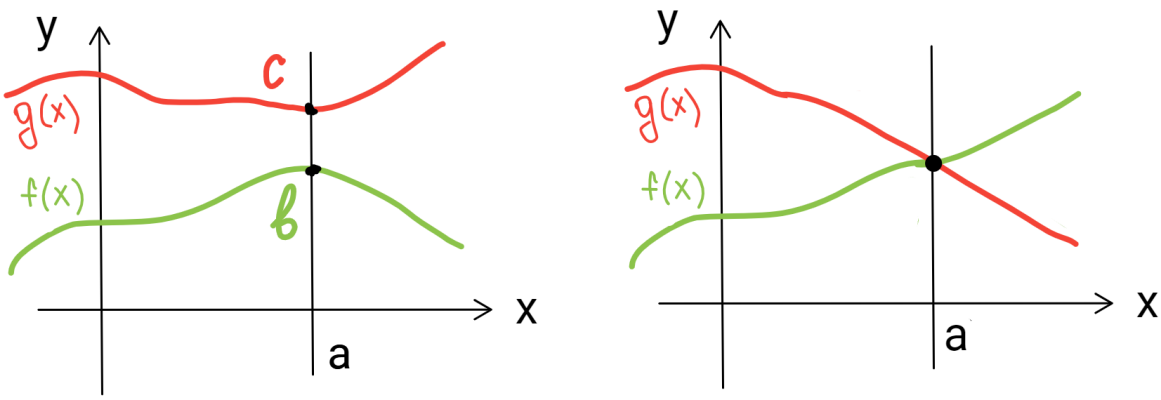


Рис. 5.3. Схема графиков к теореме

Пусть $b > c$. Положим $\varepsilon = \frac{b-c}{3} > 0$.

По определению предела функции

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (a-\delta_1, a) \cup (a+\delta_1) \text{ верно } f(x) \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (a-\delta_2, a) \cup (a+\delta_2) \text{ верно } f(x) \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$$

Противоречие.

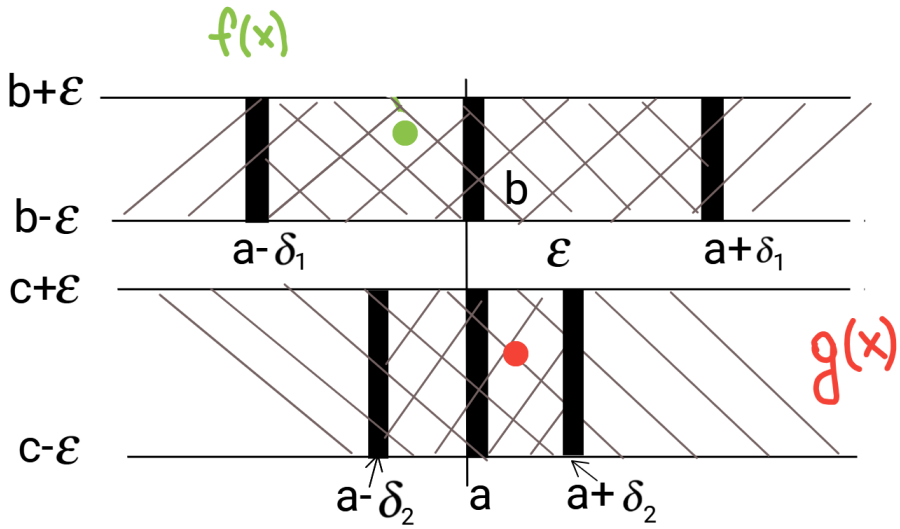


Рис. 5.4. Доказательство теоремы

■

Замечание 5.1. *Даже если* $f(x) < g(x), \lim_{x\to a} = c$, *то* $b \leqslant c$.

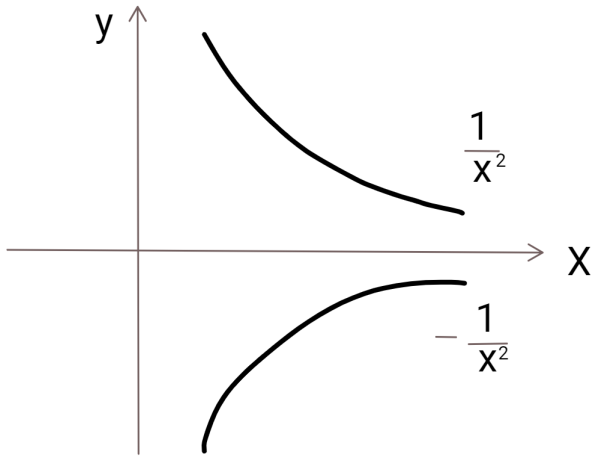


Рис. 5.5. Пример

Пример 5.1. *(Рис. 5.5)* $\frac{-1}{x^2} < \frac{1}{x^2}$ *в любой* $\Omega(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Теорема 5.2. ***Теорема о двух....***

Если $\forall x \in \hat{\Omega}(a)$ *верно* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *и* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} h(x) = b$, *то*

$$\exists \lim_{x\to a} g(x) = b$$

Доказательство.

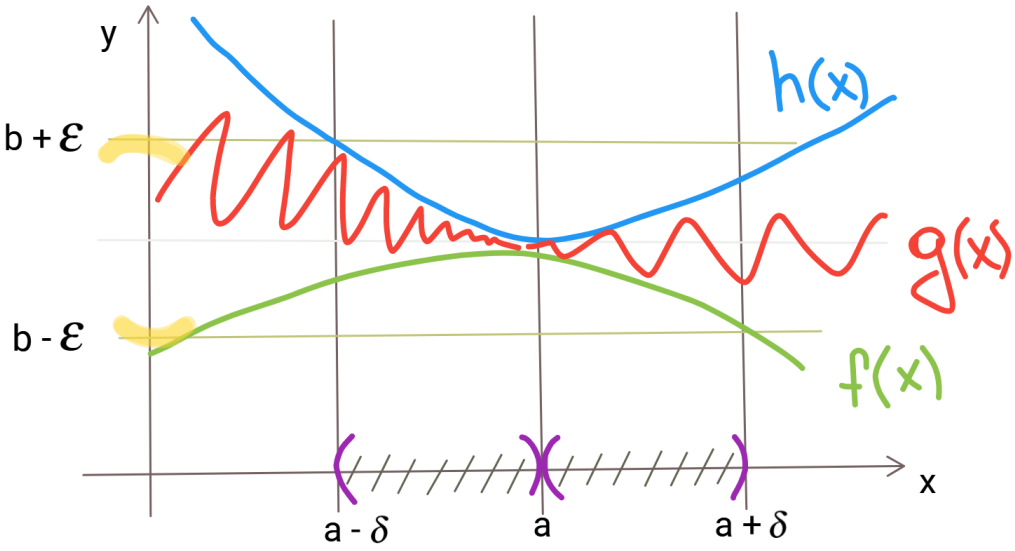


Рис. 5.6. Доказательство теоремы о двух милиционерах

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (a-\delta_1) \cup (a+\delta_1) \ \textit{верно} \ f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$
$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (a-\delta_2) \cup (a+\delta_2) \quad \textit{верно} \ h(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Тогда $\forall x \in (a-\delta) \cup (a+\delta)$ верно $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$ ■

Бесконечно большие функции

Пример 5.2. *(Рис. 5.7)*

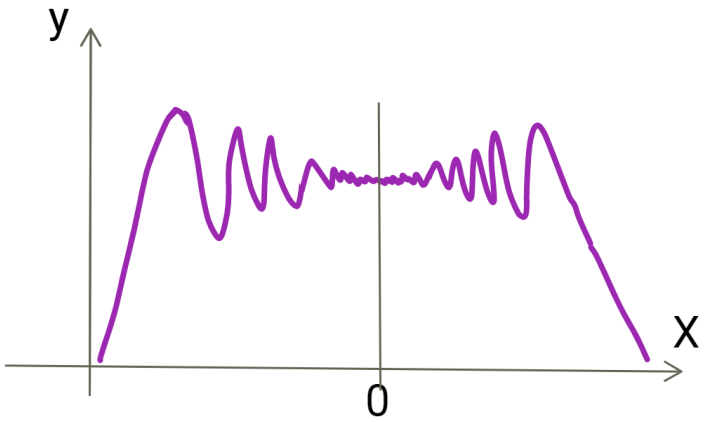


Рис. 5.7. Пример графика бесконечно большой функции

$$|f(x)| \leqslant |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Для доказательства этого утверждения используем определение предела.

$$\varepsilon > 0, \quad \delta > 0?$$
$$\forall x : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$
$$|x| < \varepsilon; \quad -\varepsilon < x < \varepsilon$$
$$\delta = \varepsilon$$

Аналитически запишем, например, так:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

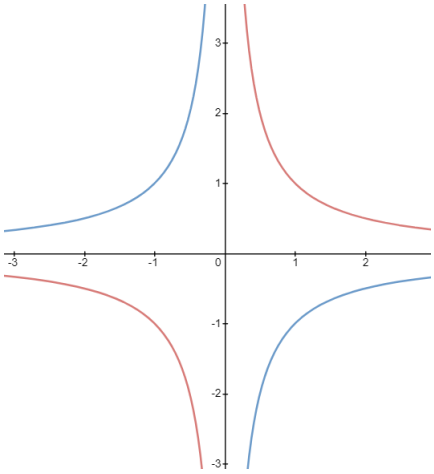


Рис. 5.8. Пример графика бесконечно большой функции

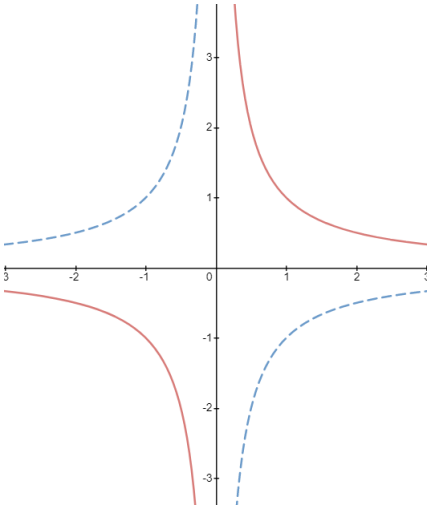


Рис. 5.9. Пример графика бесконечно большой функции

Пример 5.3. *(Рис. 5.8)*

$$\frac{1}{x^2} \to 0; \quad x \to 0$$

$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$$

Пример 5.4. *(Рис. 5.9)*

$$\frac{1}{x} \to +\infty; \quad x \to +0$$

$$\frac{1}{x} \to -\infty; \quad x \to -0$$

$$\frac{1}{x^2} \to \infty; \quad x \to \infty$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \to +; \quad x \to 0$$

Бесконечно большие и неограниченные функции

Пример 5.5. *Эталонный пример графика такой функции на (Рис. 5.10)*

Функция не является бесконечно большой (но является неограниченной) при $x \to 0$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

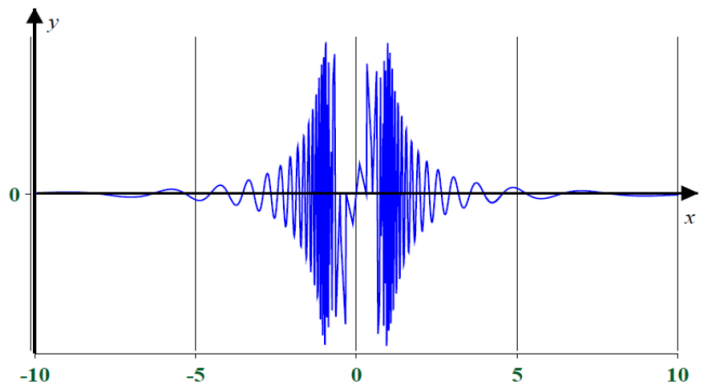


Рис. 5.10. Пример графика неограниченной функции

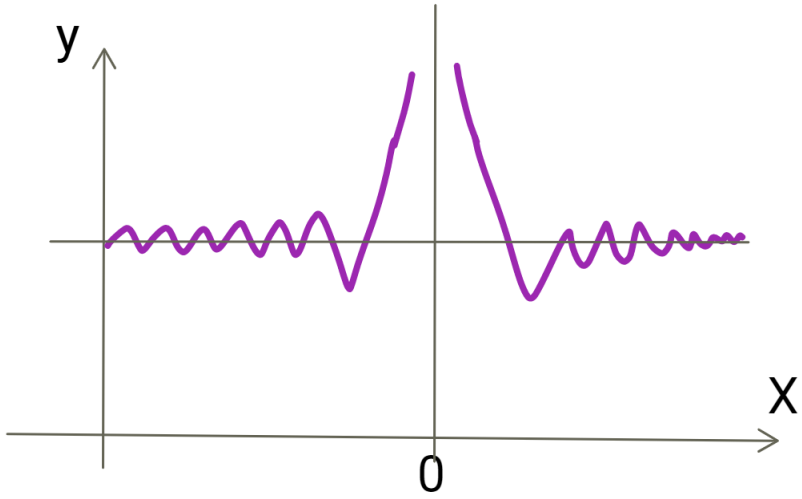


Рис. 5.11. Пример графика бесконечно большой положительной функции в точке 0

Пример 5.6. *(Рис. 5.11)* *Эта функция является бесконечно большой положительной в точке* 0*, неограниченной в окрестности точки* 0*.*

Любая бесконечно большая функция является неограниченной.

Определение 5.1. *Бесконечно большая положительная функция в точке.*

Функция $f(x)$*, определенная в* $\hat{\Omega}(a)$*, называется* ***бесконечно большой положительной*** *(б.б.+) при* $x \to a$*, если*

$$\forall B \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \text{ верно } f(x) > B$$

Обозначение бесконечно большой положительной функции в точке:

$$f(x) \to +\infty; \quad x \to a$$

Определение 5.2. *Отрицание определения бесконечно большой положительной функции в точке*

Функция $f(x)$, определенная в $\hat{\Omega}(a)$, не является бесконечно большой положительной при $x \to a$, если

$$\exists B \quad \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \delta$$
$$f(x) \leqslant B$$

Теорема 5.3. *Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то $f(x)$ неограничена в окрестности точки $x = a$.*

Замечание 5.2. *Существуют неограниченные функции $f(x)$ в окрестностях точки $x = a$, которые не являются бесконечно большими при $x \to a$*

Теорема 5.4. *Если $f(x) = o(1)$ при $x \to a$ и $f(x) > 0$ в $\hat{\Omega}(a)$, то*

$$\frac{1}{f(x)} \to +\infty \text{ при } x \to a$$

Теорема 5.5. *Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a + 1$, то*

$$\frac{1}{f(x)} \to +0 \text{ при } x \to a + 0$$

Равносильная формулировка этой теоремы:

$$\frac{1}{o(1)} = \infty, \quad \frac{1}{+\infty} = o(1)$$

Арифметические операции над бесконечно большими функциями

Теорема 5.6. *Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то*

1) $f(x) + g(x) \to +\infty$ *при* $x \to a$,

2) $f(x) \cdot g(x) \to +\infty$ *при* $x \to a$

Равносильная формулировка этой теоремы:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Бесконечно большие функции при $x \to +\infty$

Пусть $+\infty$ есть предельная точка области определения X функции $f(x)$, то есть

$$\forall A \exists x \in X :> A$$

Определение 5.3. *Говорят, что $f(x)\rho + \infty$ при $x \to +\infty$, если*

$$\forall B \exists A : \forall x > A, x \in X; \quad f(x) > B$$

Отрицание:

$$\exists B : \forall A \exists x > A, x \in X : f(x) \leqslant B$$

Теорема 5.7. *О бесконечно больших и ограниченных функциях.*

Если $f(x)$ ограничена $\Omega(a)$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ *при* $x \to a$,

2) $f(x) + g(x) \to +\infty$ *при* $x \to a$.

Равносильная формулировка:

$$\frac{O(1)}{+\infty} = o(1)$$
$$O(1) + (+\infty) = +\infty$$
$$\frac{o(1)}{+\infty} = o(1)$$
$$\frac{O(1)}{+\infty} = o(1)$$

Целесообразно различать ∞, $+\infty$, $-\infty$. ∞ и $+\infty$ имеют разные значения.

Пример 5.7.

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}) = 2/3$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Понятие неопределенности типа $+\infty-(+\infty)$

Определение 5.4. *Если $f(x)\to+\infty$ и $g(x)\to+\infty$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ называют неопределенностью типа $+\infty-(+\infty)$.*

Сравнение бесконечно малых функций

Понятие малой функции

Определение 5.5. *Говорят, что $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$, если*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

Иначе говоря:

$$\frac{f(x)}{x}=o(1)$$
$$f(x)=x\cdot o(1)$$

Определение 5.6. *Пусть $n\in\mathbb{Z}$. Говорят, что $f(x)=o(x^n)$ при $x\to 0$, если*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Иначе говоря: $f(x)=o(x^n)$ равносильно $\frac{f(x)}{x^n}=o(1)$, или $f(x)=x^n\cdot o(1)$.

Определение 5.7. *Пусть $m,n\in\mathbb{Z}$. Говорят, что $f(x)=x^m\cdot o(x^n)$, если*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x^n}=0$$

Иначе говоря, $f(x)=o(x^n)$ равносильно $\frac{f(x)}{x^n}=o(1)$, или $f(x)=x^n\cdot O(1)$.

Определение 5.8. *Пусть $m,n\in\mathbb{Z}$. Говорят, что $f(x)=x^m\cdot o(x^n)$ при $x\to 0$, если*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{m+n}}=0$$

Иначе говоря, $f(x)=x^m\cdot o(x^n)$ равносильно $\frac{f(x)}{x^{m+n}}=o(1)$, или $f(x)=x^{m+n}\cdot O(1)$.

Принцип прозрачности символа $o(...)$

В соответствии с определением

$$o(x^n)=x^n\cdot o(1), x^n\cdot o(1)=o(x^n);\quad x\to 0$$

Пример 5.8.

$$x^2o(x)=xo(x^2);\quad x\to 0$$

Пример 5.9.

$$x^2o(x)=xo(x^2);\quad x\to 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Примеры применения символа o(...)

Пример 5.10. *Докажем, что* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ *при* $x \to 0$

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x = \frac{1 - 1 + x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} = x\frac{x}{1-x} = x\ o(1) = o(x); \quad x \to 0$$

Пример 5.11. *Для любого* $n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0$ *верно*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

Символ $f(x) = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$

Определение 5.9. *Говорят, что* $f(x) = o(x^\alpha)$ *при* $x \to +\infty$*, если*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \text{ или } \lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} f(x) = 0$$

Определение 5.10. *Говорят, что* $f(x) = o(x^{-n})$ *при* $x \to +\infty$*, если*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-n}} = 0 \text{ или } \lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = 0$$

Пример 5.12. $x^2 = o(x^3)$ *при* $x \to +\infty$.

Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение 5.11. *Функции* $f(x)$ *и* $g(x)$*называются эквивалентными бесконечно малыми при* $x \to a$*, если*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение: $f \sim g$ *при* $x \to a$

$$\frac{x}{1-x} \sim x^1; \quad x \to 0$$

$$\frac{x}{x(1-x)} \to 1; \quad x \to 0$$

Пример 5.13. $x^2 + x^3 \sim x^2; \quad x \to 0.$

$$x^2 + x^3 = x^2(1+x) = x^2(1 + o(1)) \sim x^2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Функция, ограниченная относительно другой функции

Обозначение функции, ограниченной на множестве относительно другой функции: $f(x) = O(g(x))$ на X в том и только в том случае, когда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = O(1) \text{ и } g(x) \neq 0 \text{ на } X$$

Техника вычисления пределов в точке 0

Пример 5.14.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2); \quad x \to 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 6. Непрерывность

Второй замечательный предел для функций

1. Правосторонний предел

Теорема 6.1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство.

Мы доказали данное утверждение в случае, когда $x \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим только случай, когда $x > 1$. Заметим, что $\forall x > 1$:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

где $[x]$ - целая часть числа x. Инвертируем приведенное неравенство:

$$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{[x]}$$

Теперь прибавим ко всем трем частям единицу:

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}$$

Возведем все три части неравенства в степень x (при этом знак неравенства сохраняется):

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x$$

Теперь в правой части неравенства увеличим показатель, а в левой - уменьшим (неравенство при этом остается верным):

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

В середине двойного неравенства – то, что интересует нас в теореме, а справа и слева – только натуральные числа (целая часть x при $x > 1$ - натуральное число).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теперь в правой части неравенства расщепим степень $[x]+1$ в произведение, а к степени слева прибавим и отнимем -1. Т.е. выставим нужные показатели во всех трех частях неравенства:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1+\frac{1}{[x]+1}} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Если x стремится к бесконечности, то $[x]$ и $[x]+1$ также стремятся к бесконечности. Тогда верно, что:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = 1$$

В неравенстве перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1+\frac{1}{[x]+1}} \leqslant \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Тогда из приведенных равенств получаем, что пределы слева и справа равны e. Тогда предел средней части, по Теореме о двух милиционерах, тоже равен e. ■

2. Левосторонний предел

Теорема 6.2.

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство.

Положим в данном пределе $y=-x$. Тогда $y\to+0$, если $x\to-0$, и верно:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Положим $\dfrac{y}{1-y}=z$. Тогда $z\to+0$, если $y\to+0$ и $y=\dfrac{z}{z+1}$, $\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{z}$.
Таким образом:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{1+\frac{1}{z}} = (1+z)(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Сделаем замену $z = \dfrac{1}{t}$. Тогда $t \to +\infty$, если $z \to +0$:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

Т.к. предел $\left(1+\frac{1}{t}\right)$ равен 1, а предел $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$, по Теореме 6.1, равен e, то:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

■

Из этой Теоремы получаем, что:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Положим $\dfrac{1}{x} = y$. Тогда $y \to -0$, если $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to-0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$$

По Теореме 6.1 предел справа равен e, а значит и предел $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to -\infty$ равен e.

3. Двусторонний предел

Поэтому верна следующая Теорема:

Теорема 6.3.

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Теперь применим эти теоремы для вычисления пределов:

Пример 6.1. *Вычислить*

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение:

Преобразуем степень этого выражения:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}3x\frac{5}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}15}$$

Положим $t = 3x$. Тогда, если $x \to 0$, то $t \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{15}$$

Т.к. любая элементарная функция имеет предел в любой точке своего определения, равный ее значению в этой точке, то:

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{15} = e^{15}$$

Теорема 6.4. *(Асимптотическая формула для логарифма):*

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ при } x \to 0$$

Доказательство.

Приведенная формула равносильна

$$\ln(1+x) - x = o(x)$$

А эта формула по определению o - малого равносильна

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x} = o(1)$$

При $x \to 0$. Это означает, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x} = 0$$

Докажем последнее равенство. Во-первых, по свойству логарифма:

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Выражение внутри логарифма стремится к e при $x \to 0$, и логарифм - элементарная функция (то есть она имеет предел в любой точке своей области определения, равный значению функции в этой точке), поэтому:

$$\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 = \ln(e + o(1)) - 1 \ \textit{при}\ x \to 0$$

Тогда, по определению логарифма, имеем:

$$\ln(e + o(1)) - 1 = o(1) \iff 1 + o(1) - 1 = o(1)$$

Из последнего равенства, получаем: $o(1) = o(1)$. Это верно по определению $o(1)$.

■

Теорема 6.5 (без доказательства)**.** *:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \ \textit{при}\ x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^2) \ \textit{в}\ \Omega(0)$$

Первое уравнение - многочлен Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, второе - многочлен Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пример 6.2. *Найдите*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$$

Теорема 6.6.

$$e^x = 1 + x + o(x) \ \textit{при}\ x \to 0$$

Доказательство.

Из Теоремы 6.4 имеем:

$$x = \ln(1+x) + o(x)$$

Теперь сделаем обе части этого равенства показателями экспоненты:

$$e^x = e^{\ln(1+x)+o(x)} = e^{\ln(1+x)} e^{o(x)} = (1+x)e^{o(x)} = (1+x)(1+o(x))$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Далее раскрываем скобки:

$$e^x = (1+x)(1+o(x)) = 1+o(x)+x+xo(x) = 1+x+o(x)$$

Последнее равенство верно т.к.

$$x\ o(x) = o(x^2)$$

$$o(x)+o(x^2) = o(x)$$

■

Запишем формулы Тейлора для экспоненты.

Теорема 6.7. *(Пока без доказательства):*

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ \textit{при}\ x\to 0$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\ \textit{в}\ \Omega(0)$$

Это - формулы Тейлора-Пеано и Тейлора-Лагранжа для экспоненты.

Пример 6.3. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^x}{x}$$

Решение:

По формуле Тейлора-Пеано, выражение под знаком предела равно:

$$\frac{1+3x+o(3x)-1-x-o(x)}{x} = \frac{2x+o(x)}{x} = 2+o(1)$$

при $x\to 0$. То есть, данный предел равен 2.

Пример 6.4. *Найти*

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение:

Это - предел типа 1^{∞} (степенно - показательный предел). В основании прибавим и вычтем 1:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}$$

Теперь выставим нужный показатель:

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

Выражение внутри скобок - второй замечательный предел, то есть выражение внутри скобок стремится к e при $x\to 0$. Далее, применив асимптотическую формулу для косинуса, находим, что предел степени равен $-\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, получаем:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Непрерывные функции в точке

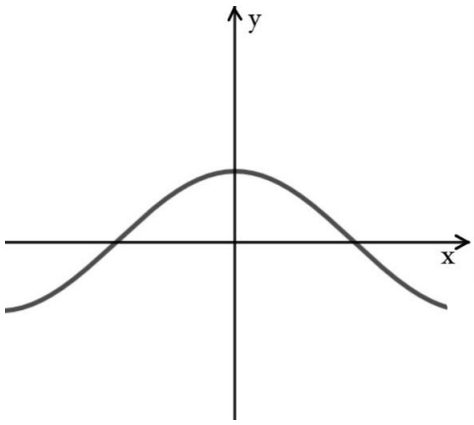


Рис. 6.1. Пример непрерывной функции

Определение точки разрыва

Определение 6.1. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной*** *в точке $x = a$, если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

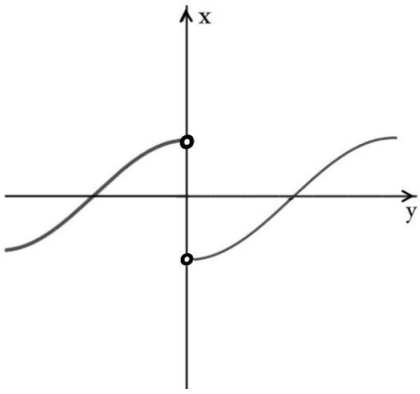


Рис. 6.2. Пример разрывной функции

Предполагается, что символ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ корректен, то есть точка $x = a$ является предельной точкой области определения X функции $f(x)$ и $a \in X$.

Определение 6.2. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной на множестве*** *X, если она непрерывна в каждой точке $x \in X$.*

Определение 6.3. *Точка x_0 называется* ***точкой разрыва*** *функции $f(x)$, если выполняется одно из трех условий*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *не существует*

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

(3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *но* $f(x_0)$ *не определена*

Точка x_0 может не принадлежать X.

Пример: Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, так как она не определена в этой точке.

Точки разрыва, устранимые

Определение 6.4. *Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется устранимой точкой разрыва, если* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и выполнено одно из условий:*

(1) либо $f(a)$ не определено

(2) либо $f(a)$ существует, но $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример: Точка $x = 0$ - точка устранимого разрыва функции $\dfrac{\sin x}{x}$, так как предел в этой точке существует и равен 1, но сама функция в этой точке не определена. Можно доопределить эту функцию в точке $x = 0$, сделав ее непрерывной следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ при } x \neq 0 \\ f(x) = 1 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

Точки разрыва первого рода

Определение 6.5. *Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется* ***точкой разрыва первого рода****, если пределы слева и справа в этой точке существуют, но не равны друг другу:*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$

То есть, в этом случае, предела функции в $x = a$ не существует.

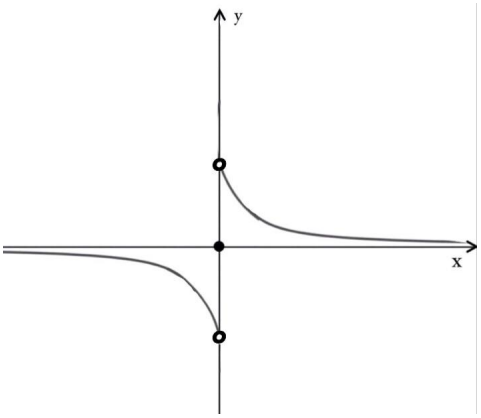


Рис. 6.3. Пример функции с точкой разрыва первого рода

Пример: Функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ имеет предел справа в точке $x = 0$ равный -1, слева 1, а значит, точка $x = 0$ - точка разрыва первого рода функции $f(x)$.

Пример: Функция $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода (Рис. 6.2.).

Точки разрыва второго рода

Определение 6.6. *Точка разрыва $x = a$ функции $f(x)$ называется* ***точкой разрыва второго рода****, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ не существует.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример: Функция $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$.

Односторонняя непрерывность

Определение 6.7. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной справа (слева)*** *в точке $x = a$, если верно:*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a))$$

Теорема 6.8. *: Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ слева и справа, то она непрерывна в точке $x = a$.*

Доказательство.

Следует из определения предела через односторонние пределы. ■

Теорема 6.9. *: Если $f(x)$ определена в $\Omega(a)$ и непрерывна в $x = a$, то она непрерывна в этой точке слева и справа.*

Доказательство.

Следует из определения предела через односторонние пределы. ■

Свойства непрерывных функций

Арифметические операции

Теорема 6.10. *: Если $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой $\Omega(a)$ и непрерывны в $x = a$, то верно:*

(1) $f(x) + g(x)$, (2) $f(x) - g(x)$, (3) $f(x)g(x)$ непрерывны в точке $x = a$.

(4) Если еще $g(a) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в $x = a$.

Доказательство.

Мгновенно вытекает из аналогичной Теоремы об арифметических операциях на пределами. ■

Замечание: В этой и всех последующих теоремах можно отказаться от требования, что $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой $\Omega(a)$. Достаточно предположить, что точка $x = a$ является предельной для пересечения областей определения указанных функций.

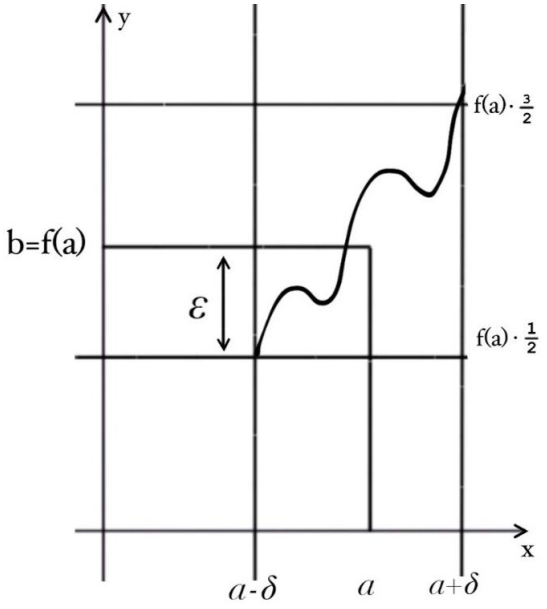


Рис. 6.4. Доказательство теоремы 6.11

Устойчивость знака

Теорема 6.11. *: Если $f(x)$ непрерывна в $x = a$ и $f(a) > 0$, то*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X : \quad |x - a| < \delta \text{ верно } f(x) > 0$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2} > 0$. Тогда по определению непрерывности

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X : \quad |x - a| < \delta \text{ верно } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3f(a)}{2}$$

Поэтому на указанном множестве $f(x) > 0$. ■

Корни непрерывной функции

Теорема 6.12. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то*

$$\exists c \in (a,b) : \quad f(c) = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Методом деления отрезка пополам построим:

1) неубывающую последовательность $x_n^{'} : f(x_n^{'}) < 0$,

2) невозрастающую последовательность $x_n^{''} : f(x_n^{''}) > 0$,

$x_n^{''} - x_n^{'} \to +0$.

Поделим отрезок пополам и посмотрим, чему равен знак значения функции в этой точке деления. В зависимости от знака эта точка будет либо $x_n^{'}$, либо $x_n^{''}$. Рассмотрим интервал $(x_n^{'}, b)$ (или $(a, x_n^{''})$) и проводем в нем аналогичную операцию. По построению можем выделить следующие свойства последовательностей:

1) $x_n^{'}$ - не убывающая последовательность

2) $x_n^{''}$ - не возрастающая последовательнось

3) $x_n^{'}$ ограничена сверху числом b

4) $x_n^{''}$ ограничена снизу числом a

5) $x_n^{''} - x_n^{'} \to 0$

Из этих свойств по Теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n^{'} = p \ \textit{и} \ \exists \lim_{n\to\infty} x_n^{''} = q$$

По Теореме о пределе разности $p = q$.

Известно, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а значит, она непрерывна в точке $p = q$, а значит

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{'}) = f(p) \ \textit{и} \ \lim_{n\to\infty} f(x_n^{''}) = f(p)$$

Но по построению

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \textit{верно} \ f(x_n^{'}) < 0$$
$$\Rightarrow \ f(p) \leqslant 0 \ \textit{и} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \textit{верно} \ f(x_n^{''}) > 0$$
$$\Rightarrow \ f(p) \geqslant 0$$

Отсюда имеем $f(p) = 0$. То есть $c = p = q$. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение

Теорема 6.13. *: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$, $B \neq A$. Тогда*

$$\forall C \in (A,B)(\text{или } \forall C \in (B,A), \text{ если } B < A) \quad \exists c \in (a,b): \quad f(c) = C$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Пусть, для определенности, $A < C < B$. (Завершить доказательство самостоятельно). ■

Метод вилки приближенного вычисления корней уравнений

Метод вилки аналогичен методу, приведенному в доказательстве Теоремы 6.12.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 7. Производная

Элементарные функции

Непрерывность элементарных функций

Теорема 7.1. *Все элементарные функции:* x^n, x^{-n}, $x^{\frac{m}{n}}$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x, a^x, $\log_a x$ *непрерывны во всех точках своей области определения. Элементарные функции, определенные на отрезке, непрерывны на концах этого отрезка.*

Сложная функция, обратная функция

Сложная функция. Понятие сложной функции

Определение 7.1. *Если функция* $t = g(x)$ *определена на множестве* X*, множество значений функции* $g(x)$ *совпадает с множеством* T*, функция* $f(t)$ *определена на множестве* T*, то говорят, что на множестве* X *определена* ***сложная функция*** $f(g(x))$ *(композиция двух функций)*

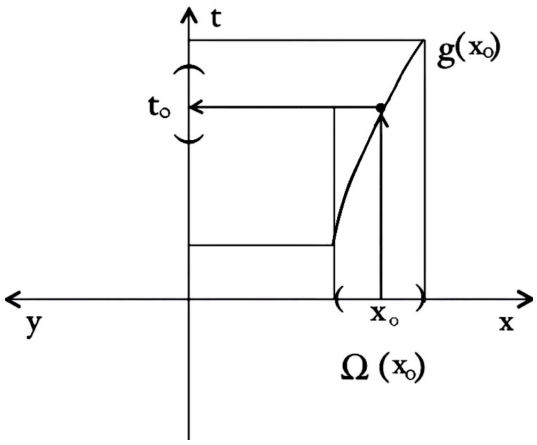


Рис. 7.1. Сложная функция

Теорема 7.2. *Если* $g(x)$ *определена в* $\Omega(x_0)$*, где* $x_0 \in X$ *и непрерывна в точке* $x = x_0$*, функция* $f(t)$ *определена в* $\Omega(t_0)$*, где* $t_0 = g(x_0)$ *и непрерывна в* $t = t_0$*, тогда сложаня функция* $f(g(x))$ *непрерывна в точке* x_0*.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Берем точку y_0, число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим ε-окрестность точки y_0. Назовем ее $\Omega(y_0)$. Поскольку f непрерывна в точке t_0, то найдется такое $\delta > 0$, что внутри некоторой δ-окрестности точки t_0 вся окрестность точки t_0 переводится внутрь ε-окрестности точки y_0, т.е. любая точка δ-окрестности t_0 переводится в точку ε-окрестности точки y_0. Пусть теперь $\delta = \varepsilon_1$, тогда найдется такое δ_1, что любая точка $\Omega_{\delta_1}(x_0)$ переводится в δ-окрестность t_0. Это равносильно определению непрерывности сложной функции в t_0. ■

Обратная функция

Определение 7.2. *Пусть функция $f(x)$ определена на X и Y есть множество значений $f(x)$ на X. Пусть $\forall y \in Y$ уравнение $y = f(x)$ имеет единственный корень $x \in X$. Тогда говорят, что на множесте Y определена функция $x = g(y)$,* ***обратная*** *по отношению к $y = f(x)$. Значение этой функции в $y \in Y$ равно единственнному корню уравнения $y = f(x)$.*

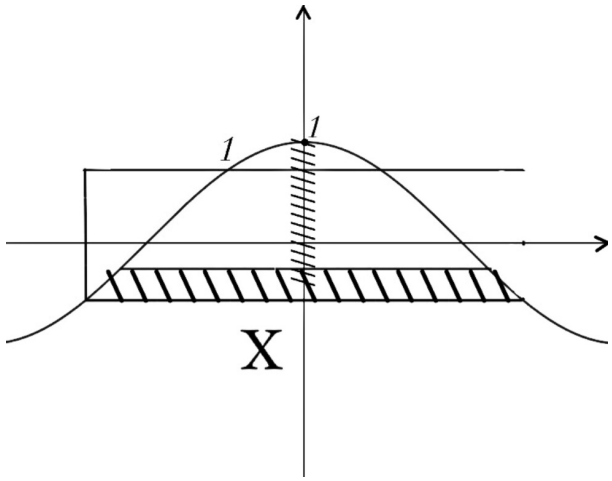


Рис. 7.2. Обратная функция

Монотонность функции прямой гарантирует существование обратной функции.

Теорема 7.3. *: (Существование и непрерывность обратной функции)*

Если $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на сегмента $X = [a,b]$, то:

1) Ее множество значений совпадает со сегментом $Y = [c,d] = [f(a), f(b)]$

2) На $[c,d]$ опредлена функция $x = g(y)$, обратная по отношению к $f(x)$, причем $g(y)$ возрастает и непрерывна на $[c,d]$.

3) $\forall x \in [a,b]$, верно равенство $g(f(x)) = x$.

4) $\forall y \in [c,d]$, верно равенство $f(g(y)) = y$.

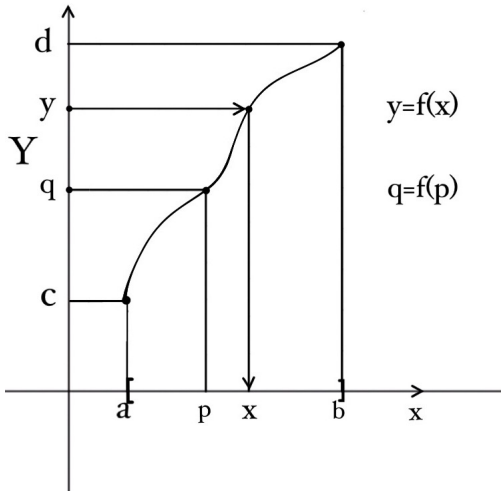


Рис. 7.3. Существование и непрерывность обратной функции

Доказательство.

1а) По Теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, функция $y = f(x)$ принимает любое значение на $[f(a), f(b)]$:

$$\forall q \in [c,d] \exists p \in [a,b] : f(p) = q$$

1б) Так как $y = f(x)$ - возрастающая функция, то у нее нет значений, меньших $f(a)$ и больших $f(b)$:

$$\forall x [a,b], f(x) \in [c,d]$$

Поэтому множество значений $f(x)$: $Y = [c,d] = [f(a), f(b)]$.

2) Так как $y = f(x)$ - возрастающая функция, то каждое значение $y \in Y$ функция принимает только в одной точке:

$$\text{Если } f(x_1) = f(x_2), \text{ то } x_1 = x_2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Отсюда следует, что на $Y = [c,d]$ существует обратная функция $x = g(y)$

3.) Докажем, что $x = g(y)$ возрастает на Y. Пусть $y_1 \in Y, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$. Пусть $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Если бы $x_1 \geqslant x_2$, то $y_1 \geqslant y_2$, поэтому $x_1 < x_2$, $g(y_1) < g(y_2)$.

4.) Докажем непрерывность обратной функции на Y. Пусть

$$q \in [c,d], p = g(q), q = f(p).$$

Пусть

$$\varepsilon > 0 : p_1 = p - \varepsilon \in [a,b] \text{ и } p_2 = p + \varepsilon \in [a,b]$$

Пусть

$$f(p_1) = q_1 \text{ и } f(p_2) = q_2$$

Тогда $q_1 < q < q_2$. Пусть

$$\delta_2 = q_2 - q, \delta_1 = q - q_1,$$

Тогда $\delta_{1,2} > 0$. Пусть:

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

Если $|y - q| < \delta$, то

$$y \in (q_1, q_2), g(y) \in (p_1, p_2), |g(y) - p| < \varepsilon$$

■

Равномерная непрерывность

Понятие равномерной непрерывности

Определение 7.3. *Функция $f(x)$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на промежутке X, если*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta, \text{ верно } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Определение 7.4. *Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной, если*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \text{ и } |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Производная

Определение производной в точке

Определение 7.5. *Если:*

(1) f(x) определена в $\Omega(x)$ и

(2) $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = k$, *то*

число k называется ***производной*** *функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$.*

Определение 7.6. *(равносильное) Если:*

(1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ и

(2) $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(x)}{x-a} = k$, *то*

число k называется ***производной функции*** *$f(x)$ в точке $x = a$ и обозначается $f'(x)$.*

Величину $\Delta x = x - a$ называют **приращением независимой переменной**, величину $\Delta y = f(x) - f(a)$ называют **приращением функции**.

Иногда пишут:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение 7.7. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ и секущая, проведенная через точки графика $(a, f(a))$, $(b, f(b))$:*

$$F(x;a,b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

при стремлении $b \to a$ стремится к отличной от вертикальной прямой (называемой наклонной касательной):

$$P_1(x;a) = f(a) + k(x-a)$$

где точка a - точка источника, точка x - точка измерения. Тогда угловой коэффициент касательной к a называется ***производной функции*** *$f(x)$ в точке $x = a$.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

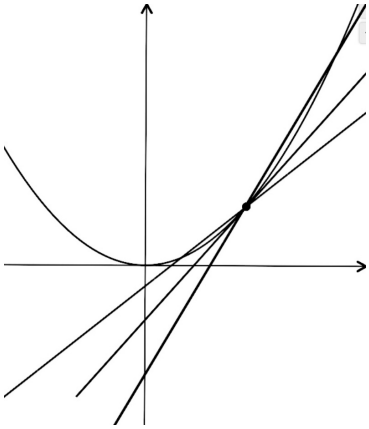


Рис. 7.4. Секущие и касательные

Были даны несколько определений производной: через предел некоторого выражения, через предельное положение секущей.

Теорема 7.4. *Определения (7.5.), (7.6.) и (7.7) равносильны.*

Доказательство.

(доказать самостоятельно). ■

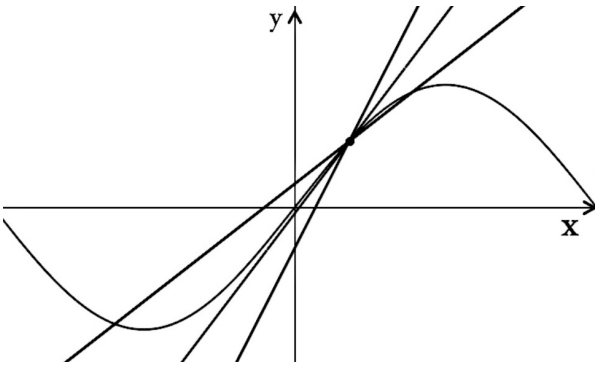


Рис. 7.5. Секущие и касательные. Для случая кубической параболы

Производная степенной функции

Вычисление производных элементарных функций.

Пример 7.1. *Во-первых, посчитаем производную квадратного трехчлена.*

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 7.2. *Посчитаем производную кубического трехчлена.*

$$(x^3)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)(x^2 + x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2$$

Пример 7.3. *Аналогично:*

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Производная степенной функции с дробным показателем

Теорема 7.5.

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{-1+\frac{m}{n}}, x > 0$$

Пример 7.4.

$$(\sqrt[3]{x})'|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (x \neq 0)$$

Просзводная степенной функции с вещественным показателем

Теорема 7.6.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0$$

Производная синуса

Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2})}{2\frac{x-a}{2}} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin(\frac{x-a}{2})}{2\frac{x-a}{2}} \cos(\frac{x+a}{2}) = \cos a$$

Производная косинуса

Аналогично $(\cos x)' = -\sin x$

Производная тангенса

Аналогично $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Производная логарифмической функции

$$(\ln x)'|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\ln(\frac{x}{a})}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\ln\left[1+(\frac{x}{a}-1)\right]}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{\ln\left[1+(\frac{x}{a}-1)\right]^{\frac{1}{x-a}}\right\} = \lim_{x\to a}\left\{\ln\left[1+\left(\frac{x-a}{a}\right)\right]^{\frac{a}{x-a}\frac{1}{a}}\right\} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Другой способ, $y = \log_a x$, $x > 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\log_a\left[1+\frac{\Delta x}{x}\right]^{\frac{1}{\Delta x/x}}$$

Так как:

$$\left[1+\frac{\Delta x}{x}\right]^{\frac{1}{\Delta x/x}} \to e$$

при $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a},$$

То есть $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

Производная показательной функции

Пусть $y = a^x$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a$, то есть $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

Доказательство этой формулы бует представленно позднее с помощью Теоремы о производной обратной функции.

Односторонние производные

Рассмотрим приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

при $\Delta x > 0$. Величина $\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ назывется правой производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'_{\text{right}}(x)$.

Аналогично определяется левая производная в точке: $\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{left}}(x)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

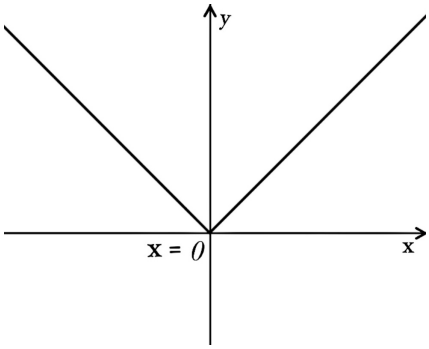


Рис. 7.6. График функции, которая не имеет производной в точке ноль

Замечание 7.1. *Можно, например, используя понятие одностороннего предела, доказать, что не существует производной функции $|x|$ в точке $x = 0$:*

Рассмотрим правую производную:

$$\lim_{x \to +0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1$$

и левую:

$$\lim_{x \to -0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$$

Так как они не равны, то по Теореме об односторонних пределах функции в точке, предела в точке ноль не существует, а значит данная функция не имеет производной в точке ноль.

Теорема 7.7. *Пусть $f'_{right}(a) = k_1$ и $f'_{left}(a) = k_2$. Тогда, возможны два варианта:*

(1.) $k_1 = k_2$. Тогда $\exists f'(a) = k_1 = k_2$

(2.) $k_1 \neq k_2$. Тогда $\nexists f'(a)$.

Рассмотрим несколько примеров, связанных с данной Теоремой.

Пример 7.5. *Найдем производную функции $f(x) = x|x|$ в точке 0:*

Данную функцию можно представить так:

$$x|x| = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x^2, \text{ если } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Тогда, парвая производная в точке 0 равна: $f'_{right}(0) = 2x|_{x=0} = 0$, аналогично $f'_{left}(0) = -2x|_{x=0} = 0$

Пример 7.6. *Рассмотрим*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 \sin\frac{1}{s} - 0}{s} = 0$$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ \textit{при}\ x \neq 0$$

Однако $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

Пример 7.7. *Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x)^{\frac{1}{x}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$$f'(0) = \lim_{s\to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s} = \lim_{s\to 0}(1+s)^{\frac{1}{s}} = e$$

Пример 7.8. *(Решить самостоятельно)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

Пример 7.9. *(Решить самостоятельно)*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln|x|},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 8. Производные старших порядков

Определение старшей производной

Определение 8.1. *Пусть* $\exists f^{(n)}(x)$ *в* $\Omega(x)$. *Тогда*

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' \text{ (Если производная существует)}$$

Пример 8.1. *Функция* $f(x) = x|x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ x \geqslant 0 \\ -x^2, \ x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x} = 0$$

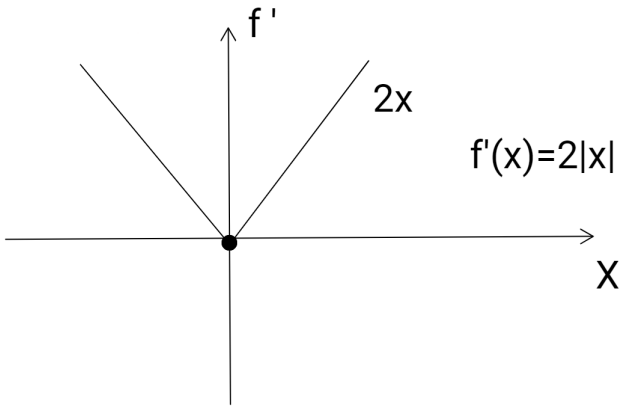


Рис. 8.1. График производной $x|x|$

Имеет первую производную, равную:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0 \\ -2x, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Производная существует в том числе и в точке $x = 0$, *однако второй производной в нуле не существует.*

Пример 8.2.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Данная функция непрерывна, т.к. предел данной функции в т.0 равен 0. Во всех других точках можно посчитать производную этой функции любого порядка (они существуют), потому что все производные будут выражаться через элементарные функции. $f'(0) = 0$

Пример 8.3. *Посчитаем* m*-ую производную функции* $f(x) = x^m$*:*

(1) $(x^m)' = mx^{m-1}$

(2) $(x^m)'' = m(m-1)x^{m-2}$

...

(m) $(x^m)^{(m)} = m!$ *при этом любая последующая производная тождественно равна нулю.*

Теперь рассмотрим показательную функцию с отрицательной степенью:

Пример 8.4. *Посчитаем* m*-ую производную функции* $f(x) = x^{-m}$*:*

(1) $(x^{-m})' = (-m)x^{-m-1}$

(2) $(x^{-m})'' = (-m)(-m-1)x^{-m-2}$

...

(n) $(x^{-m})^{(n)} = (-m)(-m-1)...(-m-n+1)x^{-m-n} = (-1)^n \dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!} x^{-m-n}$

Посчитаем теперь n-ю производную для степенной функции с действительнум показателем:

Пример 8.5. *Посчитаем* m*-ую производную функции* $f(x) = x^\alpha$*:*

(1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

(2) $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

...

(n) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

Пример 8.6. *Найдем производные высших порядков для: Секущие и касательные*

(1) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3}-1)x^{\frac{1}{3}-2}$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 8.1. *$\sqrt[3]{x}$ и $x^{\frac{1}{3}}$ – это разные вещи, так как функция кубического корня определена для всех вещественных значений x. А в случае, когда у функции в показателе степени стоит рациональное число, считается, что они определены только для $x > 0$. Иными словами, у функции $\sqrt[3]{x}$ более широкая область определения, чем у функции $x^{\frac{1}{3}}$*

Рассмотрим примеры особых случаев, когда показатель степенной функции является полуцелым или дробью.

Пример 8.7.

$$(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$(x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$(x)'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}$$
$$(x)''' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}$$
$$\ldots$$
$$f(x)^n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)^{-\frac{2n-1}{2}} x$$

Далее это выражение можно преобразовать, тогда полученное выражение будет иметь следующий вид:

$$(-1)^{n+1} = \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2n}x^{-\frac{2n-1}{2}} = \frac{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2n}\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(n-1)}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

В конечном итоге получаем:

$$(-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Пример 8.8.

$f(x) = x\ln x$, найдем производные высших порядков:

(1.) $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$

(2.) $f''(x) = \frac{1}{x}$ *и т.д.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 8.9. $\sin x$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x,$

$f''(x) = -\sin x,$

$f^{(3)}(x) = -\cos x,$

$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$

Пример 8.10. $f(x) = e^{\alpha x}$

$f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}$

Формула Лейбница

Теорема 8.1.

$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$

если существуют n-ые производные данных функций

Определение 8.2. ***Дифференцируемая функция одной переменной*** *– функция, имеющая дифференциал и производную.*

Определение 8.3. ***Дифференцируемая функция нескольких переменных*** *– функция, имеющая дифференциал.*

Теорема 8.2. *Функция имеет производную тогда и только тогда, когда имеет дифференциал.*

Теорема 8.3. *(Формула Лейбница) Если f и g дифференцируемы n раз, то их произведение так же имеет производную, причем:*

$$(f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f \cdot g^{(n)} + C_n^1 f' \cdot g^{(n-1)} + \ldots + C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} + \ldots + C_n^n f^{(n)} \cdot g$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g((n-k)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$f^{(0)} \equiv f$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Докажем по индукции:

При $n = 1$, имеем:

$$(fg)' = f'g + fg' = C_1^0 f'g + C_1^1 fg'$$
$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n \equiv 1$$

Пусть формула Лейбница верна для n. Докажем ее для $n+1$:

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})'$$

Выражение внутри скобок найдено по предположению индукции. Далее находим от него производную и приводим подобные слагаемые:

$$C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^{k+1} f^{(k+1)} g^{(n-k)} = (C_n^k + C_n^{k+1}) f^{(k+1)} g^{(n-k)}$$

(Задание: Найти явное выражение для суммы сочетаний из предыдущей формулы). ■

Пример 8.11. $f(x) = xe^x$. *Найдем производную произвольного порядка:*

$$f^{(n)}(x) = x(e^x)^{(n)} + nx'(e^x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x''(e^x)^{(n-2)} + \ldots = xe^x + ne^x$$

Пример 8.12. $f(x) = x^2 e^x$.

$$f^{(n)}(x) = x^2 e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$$

Пример 8.13. $f(x) = \arctan x$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(1+x^2)f' = 1$$

Продифференцируем выражение справа:

$$(1+x^2)f^{(n+1)} + 2nxf^{(n)} + n(n-1)f^{(n-1)} = 0$$

Положим $x = 0$. *Тогда:*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f^{(n+1)} + n(n-1)f^{(n-1)}|_{x=0} = 0$$

Тогда, имеем:

$$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m)!,\ f^(2m)(0) = 0$$

Тогда, так как по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$f' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \text{ при } |x| < 1$$

Далее проинтегрируем данный ряд:

$$f = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ при } |x| < 1$$

Пример 8.14. $f(x) = \arcsin x$ *Производная произвольного порядка вычисляется аналогично:*

$$f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \sqrt{1-x^2}f' = 1$$
$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}f' + \sqrt{1-x^2}f'' = 0$$
$$-xf' + (1-x^2)f'' = 0,\ x \in (-1;1)$$

Дифференциалы старших порядков

Определение 8.4. *Определим второй дифференциал:* d^2f *от независимой переменной: Пусть в некоторой окрестности* $\Omega(x) \exists df = f'(x)dx$.

Пусть в x $\exists d(df) = d^2f = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx)$
(считается, что $d(dx) = d^2x = 0$*).*

Тогда имеем:

$$d^2f = f''dxdx = f''(dx)^2$$

Определение 8.5. *Общее определение второго дифференциала (в том числе и для случая, когда* x *- некоторая функция):*

$$d^2f = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

Если $x = \phi(t)$*, то тогда:*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$d^2 f = f''(x)(\phi'(t))^2 dt^2 + f'(x)\phi''(t)dt^2$$

это равенство означает ***неинвариантность*** *формы второго дифференциала*

Существование второго дифференциала функции в точке равносильно существованию второй производной функции в точке.

Замечание 8.2. *(Инвариантность формы первого дифференциала):*

(1.) Пусть имеется функция $f(x)$, где x - независимая переменная. Тогда

$$df = f'(x)dx \text{ (если производная существует)}$$

(2.) Если $x = \phi(t)$, то

$$d(f(x)) = (f(x))'dx = f'(x)dx = d(f(\phi(t))) = f'(\phi(t))\phi'(t)dt$$

$$\phi'(t)dt = dx \quad \Rightarrow \quad d(f(x)) = f'(\phi(t))dx = f'(x)dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Векторные функции

Правила двукратного дифференцирования

$$f(x) \quad x \to x + \Delta x$$

$$f(x) \to f(x + \Delta x)$$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta f = \underbrace{A\Delta x}_{df} + o(\Delta x), \quad \Delta x = dx$$

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x) \cdot dx) = d(f'(x))dx + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

a) Второй дифференциал независимой переменной равен 0.

b) Если переменная зависит от другой функции. $x = \phi(t), d^2x = \phi''(t)dt^2$

$$d^2 f = f''(x)(\phi'(t))^2 dt^2 + f'(x)\phi''(t)dt^2 = \left(f''(x)(\phi'(t))^2 + f'(x)\phi''(t)\right) dt^2$$

Определение 9.1. *Пусть $df(x;dx)$ является дифференцируемой функцией от x, т.е.*

$$df(x + \delta x, dx) = df(x, dx) + \underbrace{B\cdot}_{d^2 f} \delta x + o(\delta x) \text{ при } \delta x = dx$$

Пример 9.1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 16, \quad \Delta x = 9, f(x) = 4, f(x + \Delta x) = 5$$

$$\Delta \widetilde{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8} + \frac{9}{10}\right) = \frac{9}{2}\frac{18}{80} = 1 + \frac{1}{80}$$

$$\Delta \widetilde{f} = \frac{1}{2} df(x, \Delta x) + \frac{1}{2} df(x + \Delta x, \Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta \widetilde{f} = f(x) + df(x, \Delta x) + \frac{df(x + \Delta x, \Delta x) - df(x, \Delta x)}{2}$$

$$= f(x) + df(x, \Delta x) + \frac{1}{2}\widetilde{d^2 f}(x, \Delta x)$$

Теорема 9.1.

$$d^2(u + v) = d^2 u + d^2 v$$

$$d^2(uv) = d^2 uv + 2dudv + ud^2 v$$

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{duv - udv}{v^2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

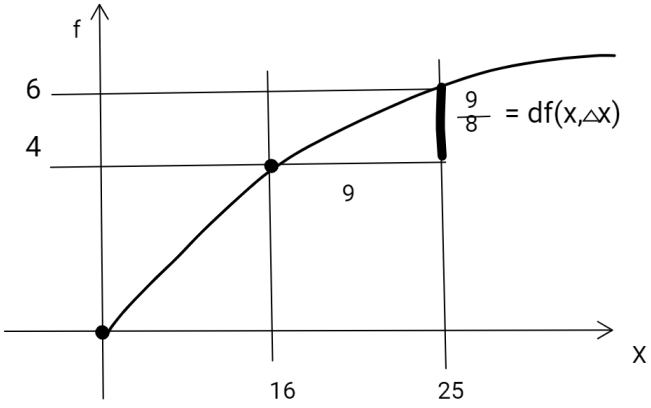


Рис. 9.1. График к примеру

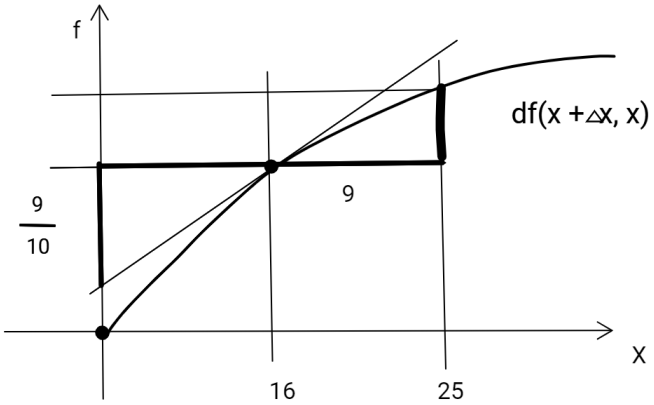


Рис. 9.2. График к примеру

Доказательство.

Проводя расчеты:

$$d(d(uv)) = d(duv + udv) = d(duv) + d(udv) =$$

$$= d(du)v + dudv + dudv + ud(dv) = d^2uv + 2dudv + ud^2v$$

(остальное доказать самостоятельно). ■

Геометрический смысл первого дифференциала

Пусть дан график функции $f(x)$. Возьмем на оси Ox точки: x и $x + \Delta x$. Нарисуем прямоугольный треугольник с катетом Δ. Тогда вертикальный катет этого прямоугольного треугольника и является первым дифференциалом в точке x.

Пусть теперь $Q(x,\Delta x) = C_0 + C_1\Delta x + C_2\Delta x^2$ - некоторая парабола, которая аппроксимирует график нашей функции, то есть обладает следующими свойствами:

(1) $Q(x,0) = f(x)$

(2) $\dfrac{dQ}{d(\Delta x)} = f'(x)$

(3) $\dfrac{d^2Q}{d(\Delta x)^2} = f''(x)$

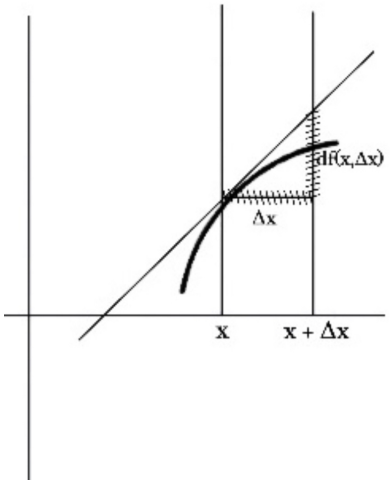


Рис. 9.3. Геометрический смысл первого дифференциала

Многократный дифференциал

Определение 9.2. *Если x-независимая переменная, то*

$$df = f'(x)dx, \quad dx = \Delta x, \quad d^2f = d(df) = f''(x)dx, \ \ldots, \quad d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$$

Теорема 9.2. *(Формула Тейлора) Если f - n-раз дифференцируемая функция, то верная формула Тейлора:*

$$f(x+\Delta x) = f(x) + df(x) + \frac{1}{2!}d^2f(x,\Delta x) + \frac{1}{3!}d^3f(x,\Delta x) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(x,\Delta x) + o(\Delta x)^n$$

Доказательство.

(докажем позже). ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Векторная функция

Предел векторной функции

Определение 9.3. ***Векторная функция*** $\bar{b}$ *- отображение* n*-мерного пространства в одномерное пространство.*

Определение 9.4.

$$\bar{B} = \lim_{t \to t_0} \bar{b}(t)$$

если верно:

(1) $b_0 = b(t_0)$ *- предельная точка области определения данной функции*

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta, t \in T$ *верно* $|\bar{b}(t) - \bar{B}| < \varepsilon$

Замечание 9.1. *Само по себе условие того, что точка является предельной, еще не гарантирует, что в этой точке у функции будет существовать предел. Например, функция Дирихле не имеет предела ни в одной точки своей области определения, однако каждая точка ее области определения - предельная.*

Теорема 9.3.

$$\bar{B} = \lim_{t \to t_0} \bar{b}(t) \iff (\bar{B})_k = \lim_{t \to t_0} (\bar{b}(t))_k, k = 1...n$$

Производная векторной функции

Определение 9.5. *Вектор* $\bar{A}$ *-* ***производная*** *функции* $\bar{b}$ *по* t *при* $t = t_0$*, если:*

$$\exists \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{b}(t) - \bar{b}(t_0)}{t - t_0}$$

Теорема 9.4. *Пусть* $\bar{f}$ *и* $\bar{g}$ *- векторные функции. Тогда:*

(1.)

$$(\bar{f}(t) + \bar{g}(t))'_t = \bar{f}'_t + \bar{g}'_t$$

(2.)

$$(C\bar{f}(t))'_t = C\bar{f}'_t$$

(3.)

$$(\bar{f}, \bar{g})'_t = (\bar{f}', \bar{g}) + (\bar{f}, \bar{g}')$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(4.)

$$([\bar{f},\bar{g}])'_t = [\bar{f}',\bar{g}] + [\bar{f},\bar{g}']$$

Доказательство.

Докажем (3.):

$$(\bar{f},\bar{g}) = f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3$$

Теперь продифференцируем данное равенство:

$$(\bar{f},\bar{g})' = (f_1)'_t g_1 + f_1(g_1)'_t + ... = (\bar{f}',\bar{g}) + (\bar{f},\bar{g}')$$

Аналогично доказываются оставшиеся пункты. ■

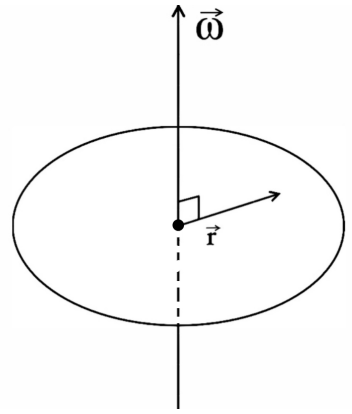


Рис. 9.4. Физическая задача

Пример 9.2. *Пусть дана плоскость, которая вращается с угловойчастотой* $\boldsymbol{\omega}$ *и в плоскости задан вектор* $\bar{r}$*. Посчитам производную векторной функции:*

Представим вектор $\bar{r}$ *в декартовых координатах:*

$$\bar{r}(l\cos(\omega t), l\sin(\omega t))$$

Тогда $\dot{\bar{r}}(-l\omega\sin(\omega t), l\omega\cos(\omega t))$

Пусть $\dot{\bar{R}} = [\bar{\omega},\dot{\bar{R}}]$*. Посчитаем вторую производную:*

$$\ddot{\bar{R}} = [\dot{\bar{\omega}},\bar{R}] + [\bar{\omega},\dot{\bar{R}}] = [\dot{\bar{\omega}},\bar{R}] + [\bar{\omega},[\bar{\omega},\dot{\bar{R}}]] = [\dot{\bar{\omega}},\bar{R}] + \bar{\omega}(\bar{\omega},\bar{R}) - \bar{R}(\bar{\omega},\bar{\omega})$$

Так как второе слагаемое равно нулю, то:

$$\ddot{\bar{R}} = [\dot{\bar{\omega}},\bar{R}] - \omega^2\bar{R}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Неопределенный интеграл

Действие неопределенного интеграла обратно к действию операции дифференцирования.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 9.6. *Если на промежутке X верно:*

$$F'(x) = f(x)$$

то функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *для функции $f(x)$ на X*

Определение 9.7. *Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на X называется* ***неопределенным интегралом*** *функции $f(x)$.*

Теорема 9.5. *Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $\forall C$, $F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$.*

Теорема 9.6. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные для $f(x)$ на промежутке X, то*

$$\exists C : F_2(x) - F_1(x) = C$$

Доказательство.

Пусть $G(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда, по определению первообразной

$$G'(x) = 0 \Longrightarrow G(x) = C$$

■

Теорема 9.7. *Множество всех первообразных представляется в виде:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где $F(x)$ - некоторая первообразная.

Свойства неопределенного интеграла

Теорема 9.8. *Если $\exists \int f(x)dx$ и $\exists \int g(x)dx$, то*

$$\exists \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \text{ и } \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int dF = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Последние два свойства - прямые следствия из определения неопределенного интеграла. ■

Таблица основных неопределенных интегралов

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

Остальные значения неопределенных интегралов можно найти в любом учебнике по математическому анализу.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 10. Неопределенный интеграл

Основные свойства, которые будут использоваться:

1) символом $\int f(x)dx$ обозначается множество всех первообразных для функции $f(x)$.

Структура: $\int f(x)dx = F(x) + C$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

3) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5) $\int dF = F(x) + C$

Теорема 10.1. *Теорема о достаточных условиях существования первообразных.*

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то существует первообразная $F(x)$ (для функции $f(x)$), которая имеет вид:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Пример 10.1.

$$\int xe^{e^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Так как $(e^{x^2})' = e^{x^2}2x$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замена переменной

Теорема 10.2. *Теорема о замене переменной.*

Пусть функция $\phi(t)$ определена на интервале $(\alpha,\beta)=T$ и имеет на нем непрерывную производную $\phi`(t)$. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a,b)=X$ и имеет первообразную $F(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$ на X. кроме того, пусть $\phi(T)\subset X$. Тогда верна формула замены переменной:

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))+C \text{ на } T$$

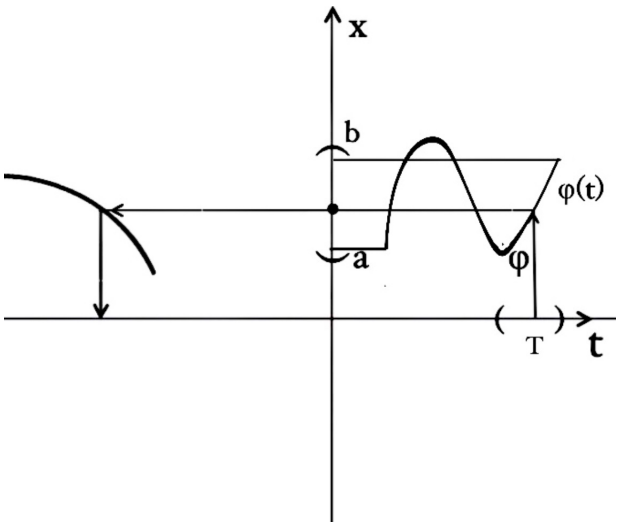


Рис. 10.1. Замена переменной в неопределенном интеграле

Доказательство.

По Теореме о том, что непрерывная функция принимает любое свое промежуточное значение, получаем, что функция $f(\phi(t))$ не имеет «дырок» на T.

Доказательство сводится к проверке того, что $F(\phi(t))$ является первообразной для функции $f(x)$:

$$(F(\phi(t)))'_t = F'(\phi(t))\phi'(t)dt = f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

■

Пример 10.2.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int \ln^3 x d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4}+C$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 10.3.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x} = \int d\ln(\arctan x) = \ln(\arctan x) + C$$

Пример 10.4.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$$

Пусть $t = \tan(\frac{x}{2})$.

Тогда $x = 2\arctan\ t$ *и* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 =$

$$= \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Тогда имеем:

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{2dt}{1+t}\frac{1}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3+3t^2+5-5t^2} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2}$$

Знаменатель разлагается в произведение линейных сомножителей:

$$\int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(2+t)(2-t)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(2+t)(2-t)}(2+t+2-t) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2-t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2+t} = \frac{1}{4}\ln|2-t| + \frac{1}{4}\ln|2+t| + C$$

Пример 10.5.

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dx}{1+e^x}\frac{e^x}{e^x} = \{e^x = t\} = \int \frac{dt}{t+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t(1+t)}(1+t-t) = \ln|t| - \ln|1+t| + C$$

Интегрирование по частям

Теорема 10.3. *Если* u', v' *непрерывны на* (a,b), $\exists \int u'v dx$, *то*

$$\exists \int uv' dx$$

и верно

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Возьмем формулу дифференцирования произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Для всех слагаемых существует первообразная, а значит, можно использовать теорему о первообразной разности. Это завершает доказательство. ■

Пример 10.6.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = \ldots$$

Пример 10.7.

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d\sin x = x^2 \sin x - \int \sin x 2x dx = x^2 \sin x + 2\int x d\cos x =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx$$

Пример 10.8.

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

Пример 10.9.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

Интегрирование дважды по частям

Пример 10.10.

$$\int e^{2x}\cos(3x) = \frac{1}{3}\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{1}{3}\int e^{2x}\sin(3x)dx - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin(3x)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{2x}\sin(3x)dx + \frac{2}{9}\int e^{2x}\cos(3x) = \frac{1}{3}\int e^{2x}\sin(3x)dx +$$

$$+ \frac{2}{9}\int e^{2x}\cos(3x) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos(3x)$$

Таким образом, интеграл I будет выглядеть следующим образом:

$$I = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin(3x) + 2\cos(3x)) + C$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 10.11. *Этот пример необходимо будет прорешать отдельно, проинтегрировав его дважды по частям.*

$$\int \cos(\ln x)dx$$

Рекуррентный метод

Рекуррентный метод очень часто используется для подсчета интегралов, у которых в знаменателе стоит квадратный трехчлен. Продемонстрируем, откуда берется данный метод. Запишем следующее равенство:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

Проинтегрируем данный интеграл по частям. Тогда получим:

$$\frac{x}{1+x^2} + \int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx = \arctan(x) + C$$

$$\frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx = \arctan(x) + C$$

Проведя частичное сокращение, приведем интеграл к следующему виду:

$$\frac{x}{1+x^2} = 2\arctan(x) - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \arctan(x) + C$$

Приведя подобные получим:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) + C$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11. Определенный интеграл

Вычислить интеграл значительно сложнее, чем вычислить производную. Можно дать только методы для вычисления самых простых интегралов. Например:

Пример 11.1. *Вычислим два интеграла:*

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$$
$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

Обозначив $\int \sin(\ln x)dx = I_s$, $\int \cos(\ln x)dx = I_c$, *получим систему неоднородных линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель этой системы не равен нулю, значит решение существует и единственно.*

Есть функции, которые после многократного дифференцирования превращаются сами в себя.

Пример 11.2. *Следующие интегралы считаются с помощью тригонометрических или гиперболических функций:*

$$\int \sqrt{x^2 \pm 1}dx, \quad \int \sqrt{1-x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{x \pm 1}, \quad \frac{dx}{x^2-1}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 11.3. *Найдем:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Сделаем замену:

$$x = \frac{1}{\cos t}$$

$$\int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} = \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \frac{\cos t}{\sin t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{d\sin t}{1-\sin^2 t} =$$

$$= \int \frac{ds}{1-s^2} = \int \frac{ds}{(1-s)(1+s)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Интегрирование рациональных функций

Пусть дан интеграл:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены. Тогда нужно рассмотреть несколько случаев:

1.) $n \geqslant m$: Тогда выделяем целую часть:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \tilde{P}_{n-m} + \frac{\tilde{\tilde{P}}_{\leqslant m-1}}{Q_m}$$

2.) $n < m$: Правильная рациональная дробь. Раскладываем знаменатель на множители:

$$Q_m = b_m(x-t_1)^{s_1}(x-t_2)^{s_2}...(x-t_\alpha)^{s_\alpha}$$

Так как комплексные корни идут сопряженными парами, то, если в разложении появился комплексный корень:

$$(x-t)^s(x-\bar{t})^s = (x^2-(t+\bar{t})x+t\bar{t})^s = (x^2-px+q)^s$$

Получаем квадратное уравнение с дискриминантом меньше нуля. Нужно научиться вычислять интегралы вида:

$$\int \frac{P_n dx}{b_m(x-t_1)^{s_1}(x-t_2)^{s_2}...(x-t_\alpha)^{s_\alpha}...(x^2-p_1x+q_1)^{\beta_1}...}$$

Так как такая дробь разлагается в сумму:

$$\frac{C_1}{x-t_1} + \frac{C_2}{(x-t_1)^2} + ... \frac{C_{s_1}}{(x-t_1)^{s_1}} + ... \frac{A_1+B_1x}{x^2-p_1x+q_1} + ... + \frac{A_{\beta_1}+B_{\beta_1}x}{(x^2-p_1x+q_1)^{\beta_1}}$$

В случае, когда в знаменателе квадратный трехчлен, выделяем полный квадрат.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

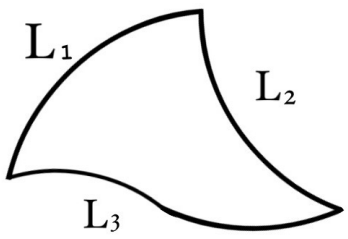


Рис. 11.1. Плоская фигура

Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла

Определение 11.1. ***Площадь плоской фигуры:***

Начертим на плоскости прямоугольную сетку ω_h с шагом h и найдем те ячейки этой сетки, которые полностью лежат внутри плоской фигуры (Рис. 11.1). Посчитаем суммарную площадь всех квадратов внутри фигуры (назовем ее **нижней площадью** $\check{S}_h$ (Рис. 11.2)). Теперь пометим все элементы сетки, которые имеют хотя бы одну общую точку с фигурой и найдем суммарную площадь всех этих элементов (**верхняя площадь** $\hat{S}_h$). Очевидно, что $\hat{S}_h \geqslant \check{S}_h$. Теперь будем уменьшать вдвое шаг сетки:

$$\omega_h \to \omega_{h/2} \Rightarrow \ \hat{S}_{h/2^k} \geqslant \check{S}_{h/2^k}$$

При дроблении будет справедливо:

$$\hat{S}_{h/2} \leqslant \hat{S}_h \text{ и } \check{S}_{h/2} \geqslant \check{S}_h$$

При увеличении k последовательность нижних площадей – неубывающая, верхних – невозрастающая, и обе – ограниченные. Введем понятия **внутренней площади** и **внешней площади**:

$$\check{S} = \lim_{k\to+\infty} \check{S}_{h/2^k} \text{ и } \hat{S} = \lim_{k\to+\infty} \hat{S}_{h/2^k}$$

$$\hat{S} \geqslant \check{S}$$

Площадь фигуры определяется в случае равенства внешней и внутренней площадей:

$$S = \check{S} = \hat{S}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

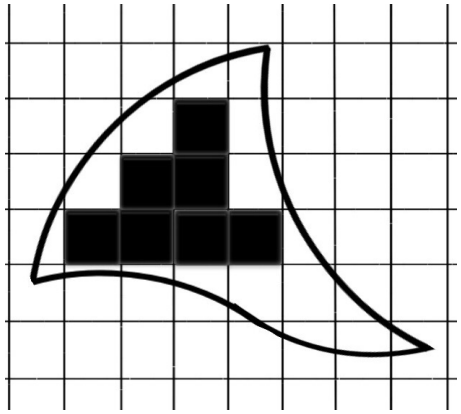


Рис. 11.2. Внутренняя площадь плоской фигуры

Определение 11.2. *Фигура бывает* ***квадрируемой*** *и* ***неквадрируемой****. Второе - если внешняя площадь строго больше внутренней.*

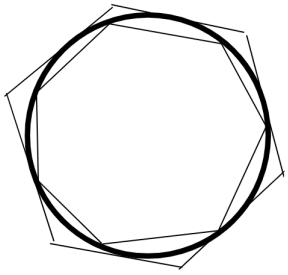


Рис. 11.3. Описание площади круга через предел вписанного и описанного многоугольников при стремлении сторон к 0

Теорема 11.1. *Если фигура D ограничена конечным числом гладких кривых без особых точек (ГКБОТ), то она квадрируема (имеет площадь).*

Доказательство.

Идея доказательства заключается в следующем (Рис. 11.4). У каждой такой кривой суммарная длина, значит суммарная длина всей границы конечна, сумма всех площадей квадратов не превосходит произведения $h \cdot 2\sqrt{2}(L + 2h\sqrt{2})$.

$$L: \text{ ГКБОТ} \quad x = \phi(t, \quad y - \psi(t)$$

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

$$\phi \text{ и } \psi -- \text{ непрерывно-дифференцируемые}$$

$$\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 > 0 \text{ на } [\alpha, \beta]$$

$$\hat{S}_{h/2^k} - \check{S}_{h/2^k} \leqslant \frac{h}{2^k} 2\sqrt{2} \left(L + \frac{h2\sqrt{2}}{w^k} \right)$$

■

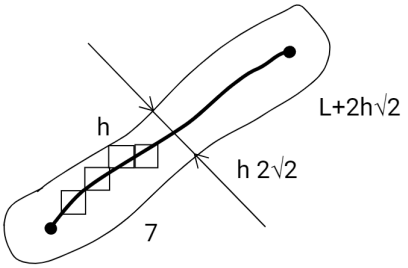


Рис. 11.4. Доказательство квадрируемости

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим фигуры, ограниченные графиком некоторой функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a,b]$, осью Ox и отрезками, параллельными оси Oy.

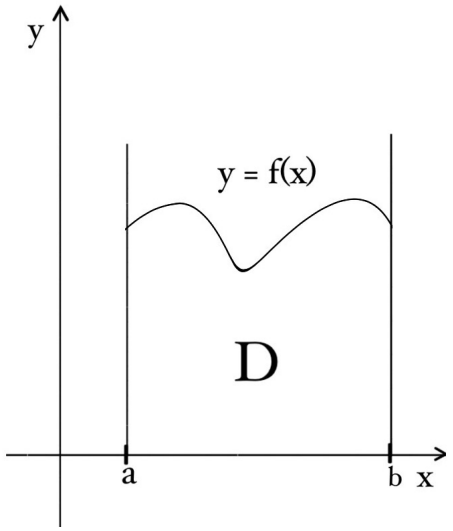


Рис. 11.5. Криволинейная трапеция

Определение 11.3. *Сетка (разбиение отрезка на части)*

$$\omega = x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Проведем через каждый узел сетки прямую, параллельную оси Oy, и отметим точки пересечения этих прямых с наибольшим и наименьшим значением функции $f(x)$ на сегменте, ограниченном этими прямыми:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x), M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

Определение 11.4. ***Нижняя интегральная сумма:***

$$s_\omega = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

Верхняя интегральная сумма:

$$S_\omega = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

s_ω - ***максимальная*** *суммарная площадь прямоугольников внутри фигуры*

S_ω - ***минимальная*** *суммарная площадь прямоугольников вне фигуры.*

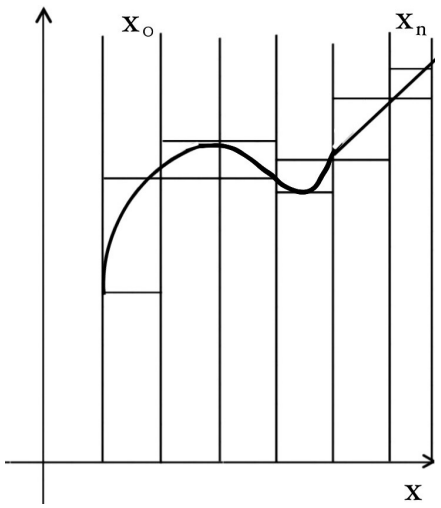


Рис. 11.6. Внутренняя площадь плоской фигуры

Теорема 11.2.

$$\forall \omega, S_\omega \geqslant s_\omega$$

Определение 11.5. *Пусть ω', ω'' - сетки на $[a,b]$. Тогда ω''' - потомок этих двух сеток - объединение сеток ω', ω''.*

Теорема 11.3. *Для потомка двух сеток верно:*

$$s_{\omega'''} \geqslant s_{\omega'}, S_{\omega'''} \leqslant S_{\omega'}$$

Доказательство.

(будет доказано во втором семестре). ■

Теорема 11.4. *Для любых двух сеток* ω', ω'' *верно:*

$$S_{\omega'} \geqslant s_{\omega''}$$

Доказательство.

Так как (по прошлой Теореме):

$$S_{\omega'} \geqslant S_{\omega' \cup \omega''}$$

и для нижних сумм:

$$s_{\omega' \cup \omega''} \geqslant s_{\omega''}$$

И тогда, так как по определению верхних и нижних сумм $S_{\omega' \cup \omega''} \geqslant s_{\omega' \cup \omega''}$, то получаем утверждение теоремы. ■

Замечание 11.1. *Таким образом, множество всех верхних сумм по всем сеткам ограничено снизу множеством всех нижних сумм по всем сеткам (аналогично множество нижних сумм ограничено снизу множеством всех верхних сумм).*

Определение 11.6. *Назовем* ***верхним интегралом*** *точную нижнюю грань всех верхних сумм и, аналогично,* ***нижним интегралом*** *назовем точную верхнюю грань всех нижних сумм:*

$$\hat{I} = \inf\{S_\omega\}, \text{ и } \check{I} = \sup\{s_\omega\}$$

Очевидно, что:

$$\check{I} \leqslant \hat{I}$$

Определение 11.7. *Назовем функцию* ***интегрируемой****, если ее верхний и нижний интегралы равны.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства определенного интеграла

1.)
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
это верно для любого a и для любой функции $f(x)$.

2.)
$$\int_a^b Cdx = C(b-a)$$
это верно для любой константы C.

3.) Если $\exists \int_a^b f(x)dx$ и $f(x) \geqslant 0$, то тогда:
$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

то есть интеграл неотрицательной функции неотрицателен.

Доказательство.

Все нижние суммы неотрицательны, а значит, их точная верхняя грань неотрицательна. ■

4.) Если $f(x) \leqslant g(x)$, то:
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

5.) Линейность:
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Доказыается по определению определенного интеграла.

6.) Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a,b]$, то:
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

7.) При тех же условиях, что и в 6, верно, что $\exists \mu \in [m,M]$:
$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.) Если

— $\max_{[a,b]} f(x) = M = f(x_1)$

— $\min_{[a,b]} f(x) = m = f(x_2)$

— *f непрерывна на этом отрезке и* $x_1, x_2 \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Доказательство.

Вытекает из того, что непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12. Понятие последовательности

Определенный интеграл

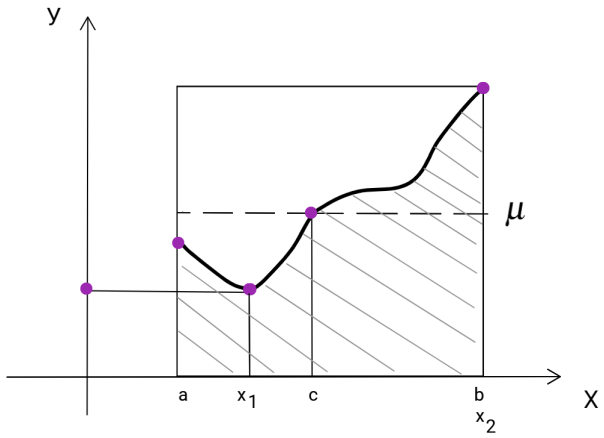


Рис. 12.1. График функции для теоремы о среднем

Теорема 12.1. *Если (Рис. 12.1)*

— $\max_{[a,b]} f(x) = M = f(x_2)$

— $\min_{[a,b]} f(x) = m = f(x_1)$

— f *непрерывна на этом отрезке и* $x_1, x_2 \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) = f(c)(b-a) \text{ Формула среднего значения}$$

Теорема 12.2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то она ограничена на* $[a,b]$:

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Теорема 12.3. *(первая и вторая теоремы Вейерштрасса): Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то*

$$\exists M' = \max_{[a,b]} f(x) = f(x_1), \quad x_1 \in [a,b]$$

Аналогично для наименьшего значения.

Теорема 12.4. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\exists \int_a^b f(x)dx$, *то*

$\exists c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

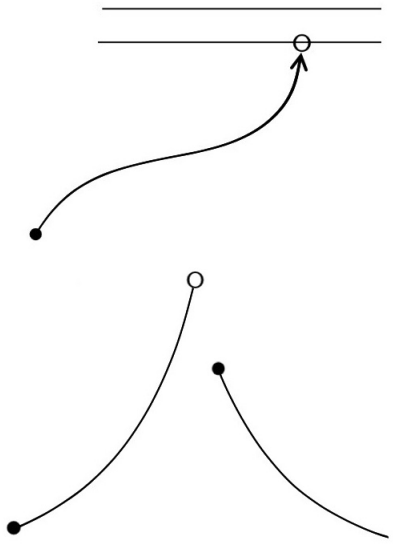


Рис. 12.2. Разрывные функции

Теорема 12.5. *(Аддитивность): Если* $\exists \int_a^b f(x)dx$ *и* $c \in [a,b]$, *то*

$$\exists \int_a^c f(x)dx, \quad \exists \int_c^b f(x)dx и$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема 12.6. *(Достаточное условие интегрируемости): Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то она интегрируема на* $[a,b]$.

Теорема 12.7. *Монотонная и ограниченная функция интегрируема.*

Теорема 12.8. *Если функция непрерывна, ограничена и имеет одну точку разрыва, то она интегрируема*

Замечание 12.1. *Из этого следует, что функция, имеющая конечное число точек разрыва на отрезке, интегрируема на отрезке.*

Теорема 12.9. *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и* $x \in (a,b)$, *то:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = f(x)$$

Доказательство.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По определению производной:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds}{\Delta x}$$

По свойству аддитивности:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(s)ds}{\Delta x}$$

По Теореме о среднем, $\exists\xi \in (x, x+\Delta x)$, что:

$$\frac{d}{dx}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\underbrace{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(s)ds}_{f(\xi)\cdot\Delta x} = \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

■

Теорема 12.10. *(Теорема Ньютона-Лейбница): Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то:*

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x f(s)ds$$

где $\tilde{F}$ - первообразная $f(x)$ и:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство.

Известно, что:

$$\tilde{F}(a) = 0, \tilde{F}(b) = \int_a^b f(x)dx$$

■

Теорема 12.11. *(Теорема о замене переменной в определенном интеграле):*

Пусть функция $f(x)$ на промежутке $[a,b]$ имеет первообразную $F(x)$. Т.е. $F'(x) = f(x)$. Пусть функция $\phi(x)$ определена, непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и дифференцируема на нем. Пусть $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, $\phi[\alpha,\beta] = [a,b]$. Тогда:

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$$

Доказательство.

Теорема о замене переменной доказывается с использованием двух теорем: Теоремы Ньютона-Лейбница и Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.

■

Пример 12.1. *Посчитать интеграл:*

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

Введем замену переменной:

$$\begin{bmatrix} \arctan x = t \\ 1+x^2 dx = dt \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

Пример 12.2.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x} = \int_1^{\sqrt{3}} d\ln\arctan x = ln\arctan x 1^{\sqrt{3}}$$

Теорема 12.12. *(Теорема об интегрировании по частям для определенного интеграла):*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда верна формула:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)a^b - \int_a^b v'(x)u(x)dx$$

Эту формулу можно записать в более короткой форме:

$$\int_a^b vdu = uva^b - \int_a^b udv$$

Доказательство.

Специальное доказательство не требуется, так как формула получена путем комбинирования двух теорем: теоремы об интегрировании по частям для неопределенного интеграла и теоремы Ньютона-Лейбница. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 12.3. *Вычислить интеграл:*

$$\int_0^1 x^3(1-x)^5dx = -\int_0^3 x^3 d(1-x)^6\frac{1}{6} = -x^3\frac{1}{6}(1-x)^6 0^1 + \frac{3}{6}\int_0^1 x^2(1-x)^6dx =$$

$$= -\frac{3}{6}\frac{1}{7}x^2(1-x)^7 0^1 + \frac{3}{6}\frac{2}{7}\int_0^1 x(1-x)^7dx = -\frac{3}{6}\frac{2}{7}\frac{1}{8}x(1-x)^8 0^1 + \frac{3}{6}\frac{2}{7}\frac{1}{8}\int_0^1 (1-x)^8dx =$$

$$= \frac{3}{6}\frac{2}{7}\frac{1}{8}\frac{1}{9}$$

Пример 12.4. *Вычислить интеграл:*

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m(m-1)*\ldots*2*1}{(n+1)*\ldots*(n+m)}\frac{1}{n+m+1}\frac{n!*m!}{(n+m)!(m+n+1)!} =$$
$$= \frac{1}{C_{n+m}^n}\frac{1}{n+m+1}$$

Пример 12.5.

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x 0^\pi = 2$$

Пример 12.6.

$$\int_0^\pi x\sin x dx = -\int_0^\pi x d\cos x = -x\cos x 0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi$$

Последние два примера относятся к классу задач «Задачи с моментами».

Определение 12.1. *Пусть имеется непрерывная функция $\rho(x)$, и $\rho(x) \geqslant 0$ на интервале $[a,b]$. Необходимо, чтобы:*

$$\int_a^b \rho(x)dx > 0$$

Будем называть это плотностью.

Тогда:

$$Mf = M[f,\rho,a,b] = \int_a^b f(x)\rho(x)dx$$

Это момент некоторой функции F с плотностью ρ на интервале $[a,b]$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

В часности, момент единицы:

$$M1 = \int_a^b \rho(x)dx > 0$$

$$Mx = \int_a^b \rho(x)dx$$

$$a = 0, b = \pi, \rho(x) = \ln x > 0, M1 = S$$

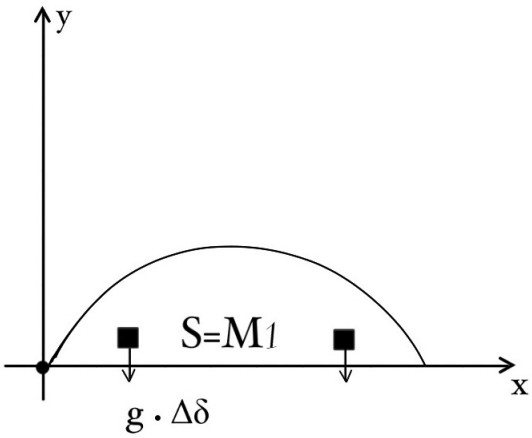


Рис. 12.3. Полный момент силы, действующий на плоскую фигуру

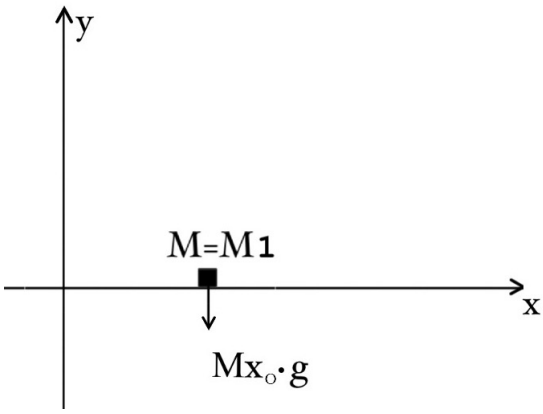


Рис. 12.4. Задачи с моментами

Таким образом, среднее значение:

$$\langle x \rangle = \frac{Mx}{M1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Момент x - полный момент силы, $Mx = \langle x \rangle M1$. Аналогично считается среднее значение x^2:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{Mx^2}{M1}$$

Вычислим дисперсию:

$$D = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad D > 0, \quad \sigma = \sqrt{D} \text{ – } \textit{среднее квадратичное дисперсии}$$

$$\rho(x) = x^m (b-x)^n$$

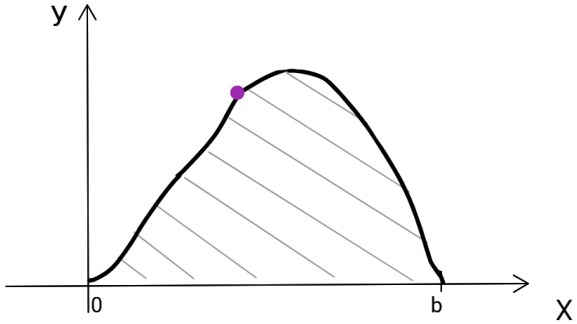


Рис. 12.5. График функции $\rho(x) = x^m (b-x)^n$

Посчитаем момент 1 и момент x:

$$M1 = \frac{1}{C_{m+n}^m (m+n+1)}$$

$$Mx = \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^n dx$$

Числовые последовательности

Элементы теории множеств

Пусть X - непустое ограниченное числовое множество, то есть существуют ее верхняя и нижняя грани:

$$\exists m, N : \forall x \in X m \leqslant x \leqslant M$$

Очевидно, что верхнии и нижние грани не единственны:

$$\forall \delta > 0, M + \delta \geqslant x \ \forall x \in X$$

Множество всех верхних граней ограничено снизу (любым элементом множествва X), и оно «без дырок»:

$$M' \in \{M\}, M'' \in \{M''\} \text{ то } [M', M''] \subseteq \{M\}$$

То есть $\{M\}$ - либо интервал $(\tilde{M}, +\infty)$, либо полуинтервал $[\tilde{M}, +\infty)$.

Теорема 12.13. *Множество всех верхних граней имеет наименьший элемент (называемый точной верхней гранью* $\sup X$*).*

Доказательство.

Расммотрим положительные числа. Положительное вещественное число имеет следующий вид:

$$x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$$

Считаем равными числа, например такие:

$$0,49999\ldots = 0,4(9) = 0,5$$

Кроме того, считаем, что одно вещественное число больше другого, если $\exists x_k$: $x_k > y_k$ и $\forall l < k, x_l = y_l$ (то есть существует разряд одного числа, который больше соответствующего разряда другого числа, притом все разряды до соответствующего равны).

Пусть X - непустое, ограниченое сверху множество вещественных чисел. Если X - конечное, то достаточно выбрать максимальный его элемент, поэтому рассмотрим только бесконечное множество.

Рассмотрим множество целых частей чисел множества X: $\{x_n\}$. Так как множество X ограниченное, то среди элементов $\{x_n\}$ есть наибольший $\bar{x}_0$.

Теперь рассмотрим множество X_1, состоящее из чисел из X, имеющих целую часть $\bar{x}_0$. Расмотрим множество первых разрядов множества X_1. Оно тоже ограничено сверху числом $\bar{x}_1$.

Продолжая процесс, получим число $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$. Докажем, что это наибольшая верхняя грань X, т.е.:

$$\forall \tilde{x} < \bar{x}, \tilde{x} \text{ не является верхней гранью } X$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Нужно доказать:

$$\forall \tilde{x} < \bar{x} : \exists x \in X : x > \tilde{x}$$

Пусть $\tilde{x} = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots$. Можем считать, что первые k разрядов у обоих чисел совпадают (по определению сравнения чисел) и $\bar{x}_{k+1} > \tilde{x}_{k+1}$. По построению, это имеет место быть. ■

Понятие последовательности

Определение 12.2. *x_n или $\{x_n\}$ – это функция, заданная на множестве натуральных чисел.*

Определение 12.3. *Елси любому натуральному числу n поставлено в соответствие вещественное число x, то говорят, что задана числовая последовательность вещественных чисел.*

Определение 12.4. *Последовательность x_n называется **ограниченной сверху**, если существует такое число M, что для любого натурального числа n верно, что $x_n \leqslant M$.*

$$\exists M : \quad \forall n \in N : \quad x_n \leqslant M$$

Определение 12.5. *Последовательность x_n называется **ограниченной снизу**, если существует такое число m, что для любого натурального числа n верно, что $x_n \geqslant M$.*

$$\exists m : \quad \forall n \in N : \quad x_n \geqslant m$$

Определение 12.6. *Последовательность x_n называется **неограниченной сверху**, если для любого числа M существует такое число n, что $x_n > M$.*

$$\forall M : \quad \exists n \in N : \quad x_n > M$$

Определение 12.7. *Последовательность x_n называется **неограниченной снизу**, если для любого числа m существует такое число n, что $x_n < m$.*

$$\forall m : \quad \exists n \in N : \quad x_n < m$$

Определение 12.8. *Последовательность называется **сходящейся**:*

$$\exists \lim_{x \to \infty} x_n = b \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \text{ верно } |x_n - b| < \varepsilon$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 12.9. *Число b не является пределом последовательности, если:*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N : |x_n - b| \geqslant \varepsilon$$

Определение 12.10. *Последовательность не сходится, если никакое b не является пределом последовательности.*

Теорема 12.14. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 13. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема 13.1. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b$$

тогда $\forall n_0 > 1$*:*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} = b$$

Теорема 13.2. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b$$

и дана последовательность $Y = \{y_1, y_2, ..., x_1, x_2, ...\}$*, тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = b$$

Теорема 13.3. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = b_1$ *и* $\lim_{n\to\infty} x_n = b_2$*, то* $b_1 = b_2$

Доказательство.

Доказательство вытекает из того, что для любых двух разных точек можно найти их непересекающиеся окрестности (Рис. 13.1). ■

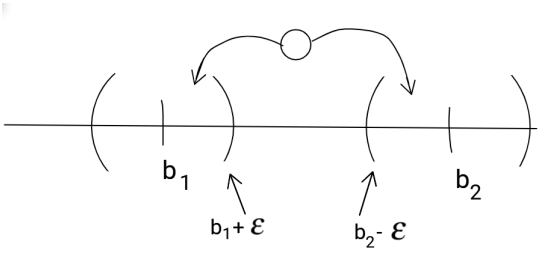


Рис. 13.1. Иллюстрация противоречия

Монотонные последовательности

Определение 13.1. *Последовательность называется возрастающей, если* $\forall n \geqslant 1$ *верно* $x_{n+1} > x_n$*. Обозначается* $x_n \nearrow$*.*

Определение 13.2. *Последовательность назывется неубывающей, если* $\forall n \geqslant 1$ *верно* $x_{n+1} \geqslant x_n$*.*

Аналогично для убывающей и невозрастающей последовательности.

Теорема 13.4. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Пусть x_n - неубывающая и ограниченная сверху числом M последовательность.

Так как $\{x_n\}$ ограничена, то для нее существует точная верхняя грань $\tilde{M}$, то есть такое число, что:

1.) $\forall n, x_n \leqslant \tilde{M}$.

2.) $\forall P < \tilde{M}\ \exists n : x_n > P$.

Воспользуемся свойствами вещественных чисел. Положим:

$$x_n = x_0^{(n)}, x_1^{(n)} x_2^{(n)} \ldots$$

рассмотрим только положительные числа, для отрицательных - аналогично.

Так как наша последовательность ограничена, то среди целых частей элементов этой последовательности есть наибольший, пусть это $\bar{x}_0$.

Рассмотрим подпоследовательность, состоящую из элеиентов последовательности, целая часть которых равна $\bar{x}_0$: назовем ее $\{x_0^{(n)}\}$. Наидем наибольший элемент этой подпоследовательности (в силу ограниченности такой существует) $\bar{x}_1$.

Продолжая процесс, получим число:

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$$

это число - супремум нашей последовательности. Осталось доказать, что

$$x = \tilde{M} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $P = \tilde{M} - \varepsilon$. По определению супремума:

$$\exists n : P < x_n \leqslant \tilde{M}$$

Т.е. $|x_n - \tilde{M}| < \varepsilon \Rightarrow\ \forall n' > n$. Т.е. выполняется определение предела. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема о стягивающейся системе сегментов

Определение 13.3. ***Стягивающаяся система сегментов*** *- множество отрезков $[a_n, b_n]$, удовлетворяющее условиям:*

1.)

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

2.)

$$b_n - a_n \to 0$$

Теорема 13.5. *Стягивающаяся система сегментов имеет единственную общую точку.*

Доказательство.

Доказательство вытекает из Теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности: последовательность a_n не убывает и ограничена сверху, b_n не возрастает и ограничена снизу, а значит, они обе имеют пределы. Обозначим их соответственно a и b.

Тогда,по определению стягивающейся системы сегментов:

$$b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \ a = b$$

Единственность: предположим, что c_1 и c_2 - две общие точки. Тогда для них верно:

$$\forall n, a_n \leqslant c_1 \text{ и } b_n \geqslant c_2$$

То есть верно:

$$b_n - a_n \geqslant c_2 - c_1 > 0$$

Получаем противоречие, т.е. $c_1 = c_2$. ■

Теорема 13.6. *Если последовательность сегментов - стягивающаяся, и $\forall n, x_n \in [a_n, b_n]$, то $x_n \to a = b$.*

Предельные точки последовательности

Определение 13.4. *Пусть n_k - возрастающая последовательность натуральных чисел, и x_n - числовая последовательность. Тогда x_{n_k} -* ***подпоследовательность****.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 13.5. *Если x_n - числовая последовательность и $\exists x_{n_k} \to b$, то b -* ***предельная точка*** *x_n*

Определение 13.6. *b - предельная точка, если: $\forall \varepsilon > 0$, в $\Omega_\varepsilon(b)$ содержится бесконечно много элементов последовательности x_n.*

Теорема 13.7. *Предыдущие два определения равносильны.*

Доказательство.

1.) Пусть b - предельная точка по первому определению, то есть $\exists x_{n_k} \to b$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда:

$$\exists K : \forall n > K \text{ верно } |x_{n_k} - b| < \varepsilon \Rightarrow \ x_{n_k} \in \Omega_\varepsilon(b)$$

2.) Возьмем $\varepsilon_1 > 0$. Тогда $\exists x_{n_1} \in \Omega_{\varepsilon_1}(b)$ и в этой окрестности также бесконечно много элементов последовательности. Возьмем $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, тогда существует $x_{n_1} \in \Omega_{\varepsilon_2}(b)$. Продолжая процесс, получим подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к b. ■

Теорема 13.8. *Если $x_n \to b$, то b - предельная точка*

Теорема 13.9. *Если $x_n \to b$, то b - единственная предельная точка*

Доказательство.

От противного: Пусть $b_1 > b_2$ - две разные предельные точки. В окрестности любой предельной точки существует бесконечно много элементов последовательности.

Поэтому создадим подпоследовательность x_{n_k} такую, что все четные ее элементы находятся в левой окрестности точки b_1, а все нечетные - в правой окрестности b_2. Тогда полученная подпоследовательность не имеет предела, а значит и изначальная подпоследовательность не имеет предела. ■

Теорема 13.10. *Если последовательность сходится к b, то любая ее подпоследовательность тоже сходится к b.*

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N : \forall n > N$ верно $|xx_n - b| < \varepsilon$. Так как $m_k > k$, то $|x_{m_n} - b| < \varepsilon$, а значит $x_{m_n} \to b$, $n \to \infty$. ■

Теорема 13.11. *Если у последовательности есть две разные предельные точки, то она расходится.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Вытекает из предыдущей Теоремы. ■

Пример 13.1. *Пусть $x_n = (-1)^n$. У этой последовательности есть две предельные точки: -1 и 1:*

Допустим b - какая-то другая предельная точка. Тогда подберем $\varepsilon > 0$: $-1 \notin \Omega_\varepsilon(b)$ и $1 \notin \Omega_\varepsilon(b)$. Тогда ни один элемент x_n не принадлежит этой окрестности, то есть b - не предельная точка - противоречие.

Теорема 13.12. *Пусть x_n - объединение двух последовательностей y_n и z_n, имеющих пределы b_1 и b_2 соответственно ($b_1 \neq b_2$). Тогда x_n имеет ровно две предельные точки: b_1 и b_2*

Доказательство.

b_1 и b_2 - предельные точки по определению предела последовательности. Положим есть какая-то третья предельная точка b_3, тогда в любой ее окрестности есть лишь конечное число членов x_n и y_n, а значит это - не предельная точка. Противоречие. ■

Теорема Больцано - Вейерштрасса

Теорема 13.13. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство.

Используем метод деления отрезка пополам. Пусть m - точная нижняя, а M - точная верхняя грань этой последовательности. После деления на какой-то из половин последовательности бесконечное число членов последовательности. Выберем эту половину и поделим ее пополам. Продолжая процесс, получим систему стягивающихся сегментов. Теперь составим подпоследовательность $x_{n_j} \in [a_{j+1}, b_{j+1}]$. Эта подпоследовательность и есть искомая сходящаяся. ■

Замечание 13.1. *Монотонная ограниченная последовательность имеет одну предельную точку, совпадающую с его пределом.*

Монотонная неограниченная последовательность не имеет предельных точек и она бесконечно большая, то есть либо $x_n \to +\infty$, либо $x_n \to -\infty$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Верхний и нижний пределы последовательности

Пусть x_n ограничена и B - множество всех предельных точек этой последовательности.

Теорема 13.14. *B - непустое и ограниченное множество, и его точная нижняя и верхняя грани совпадают с точной нижней и верхней гранями x_n*

Доказательство.

Если B - конечное, то среди его элементов выберем наибольший и все доказано. Иначе, допустим, B не является ограниченным. Дальше - самостоятельно. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14. Определение предела по Гейне

В прошлый раз было сформулировано понятие предельной точки последовательности и начато изучение множества всех предельных точек.

Имеем x_n — последовательность, B — множество всех предельных точек.

Свойства множества B:

1) Если x_n — ограниченная последовательность, то B не пусто (имеет по крайней мере хотя бы один элемент);

2) Если $x_n \to b$, то множество состоит из одного этого числа, т. е. $B = \{b\}$;

3) Если $\exists\, b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, то предела нет, т.е. x_n — не сходится;

4) Если x_n — неограниченная сверху, т. е. $\exists\, x_{n_k} \to +\infty$, где x_{n_k} — подпоследовательность, которая предела не имеет, но является бесконечно большой положительной. Символ $+\infty$ показывает, что последовательность бесконечно большая положительная. Удобно считать $+\infty$ не числовой, а символьной предельной точкой, аналогично с $-\infty$. В этом случае можно сказать, что по крайней мере одна предельная точка есть, а именно эта самая $+\infty$ символьная предельная точка;

5) Если $x_n \to +\infty$, легко доказать от противного, что числовых предельных точек у такой неограниченной бесконечно большой положительной последовательности нет, т. е. $B = \varnothing$. В то же самое время стоит сказать, что $+\infty$ является символьной предельной точкой последовательности;

6) Любая последовательность x_n имеет по крайней мере одну предельную точку, включая $+\infty$ и $-\infty$;

7) Пусть последовательность x_n такова, что её множество предельных точек пустое $B = \varnothing$, т. е. нет ни одного числа, которое является предельной точкой, тогда можно сказать, что последовательность неограниченная, причём и сверху, и снизу, и с двух сторон. Она может быть бесконечно большая положительная, бесконечно большая отрицательная и просто бесконечно большая по модулю.

Теорема 14.1. *Если x_n — ограниченная последовательность, тогда непустое множество всех предельных точек имеет наибольший (и наименьший) элемент.*

Доказательство.

1) Пусть B — конечное множество, состоящее из конечного числа элементов, тогда любое конечное множество имеет наибольший элемент;

2) Пусть B — бесконечное ограниченное множество. Такое множество имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Рассмотрим случай когда $\tilde{M}$ — точная верхняя грань $B = \sup B$. Тогда возможны два случая.

   2a) $\tilde{M} \in B$, т. е. $\tilde{M}$ само является предельной точкой и в этом случае опять всё доказано. Точная верхняя грань является верхней предельной точкой и она является одновременно наибольшим элементом этого множества B.

   2b) Остаётся $\forall b \in B$ будет верно неравенство $b < \tilde{M}$, т. е. любая предельная точка строго меньше, чем точная верхняя грань множества всех предельных точек.

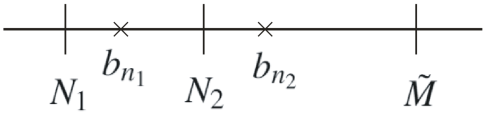


Рис. 14.1. Расположение элементов сходящейся последовательности b_{n_k}

Начали строить конструкцию, изображённую на (Рис. 14.1) Поскольку $\tilde{M}$ — это большая из всех верхних граней, то ни какое меньшее число не является верхней гранью. Дальше берётся число N_1, справа от которого находится элемент b_{n_1}, принадлежащий B. Поскольку элементы $\tilde{M}$ и b_{n_1} не совпадают, между ними есть некий «зазор», в который можно поместить число N_2. Поскольку N_2 не является верхней гранью, справа от него находится число b_{n_2} и так далее. Таким образом построена последовательность предельных точек $b_{n_k} \in B$, причём $b_{n_k} < \tilde{M}$. По построению последовательность b_{n_k} является возрастающей, а возрастающая последовательность ограниченная сверху имеет предел. Можно сказать, что можно выбрать последовательность b_{n_k}, которая не просто возрастает и не просто имеет предел, а $b_{n_k} \to \tilde{M}$.

Итак, имеется последовательность предельных точек, стремящихся к точной верхней грани. Докажем, что точная верхняя грань тоже является предельной точкой.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

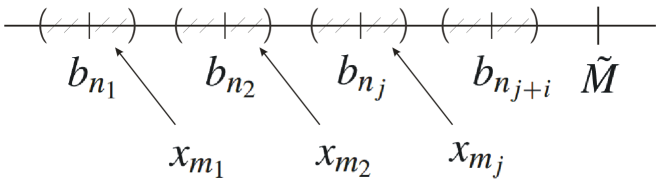


Рис. 14.2. Элементы последовательности с непересекающимися окрестностями

Ограничим непересекающимися интервалами элементы последовательности b_{n_j}, каждый из которых стремится к $\tilde{M}$ снизу. В центре каждого такого интервала имеется предельная точка b. Поскольку в любой окрестности предельной точки находится бесконечно много элементов последовательности. Поместим в одну окрестность элемент x_{m1}, номер которого неизвестен, но он там точно существует. В окрестность элемента b_{n_j} поместим x_{m_j}.

Получилась последовательность x_{m_j}, обладающая таким свойством, что x_{m_j} — возрастающая последовательность ограниченная сверху, поэтому имеет предел и по построению последовательность $x_{m_j} \to \tilde{M}$. Отсюда вытекает, что $\tilde{M}$ является элементом множества B, т. е. является предельной точкой.

Доказали, что множество всех предельных точек ограниченной последовательности имеет наибольший элемент и аналогичным образом наименьший. ■

Точная верхняя грань множества B называется верхний предел x_n с чертой

$$\sup B = \overline{\lim} x_n$$

Точная нижняя грань множества B называется нижний предел x_n с чертой

$$\inf B = \underline{\lim} x_n$$

У каждой ограниченной последовательности есть верхний и нижний предел.

Если последовательность x_n неограниченна сверху, тогда можно сказать, что $+\infty$ является предельной точкой, т. е. $\overline{\lim} x_n = +\infty$ самая большая предельная точка нечисловая символьная бесконечность. Это важно будет в теории функций комплексной переменной, в теории рядов и др.

Теорема 14.2. *предельная точка множества всех предельных точек ограниченной последовательности является также предельной точкой.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Иначе говоря, множество B содержит все свои предельные точки. Его ещё можно назвать замкнутым. Множество всех предельных точек ограниченной последовательности является замкнутым.

Доказательство.

Самостоятельно. ■

Таким образом полностью описано множество всех предельных точек. Портретом последовательности является набор её предельных точек. Почти все свойства последовательности связаны с множеством её предельных точек.

Критерий Коши для последовательностей

Определение 14.1. *Для последовательности* x_n *выполнено условие Коши, если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N, \quad m > N$ *верно неравенство* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Определение 14.2. *Говорят, что* x_n *не удовлетворяет условию Коши, если* $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N, \quad m > N: \quad |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$.

Определение 14.3. *Последовательность* x_n*, для которой выполнено условие Коши, называется фундаментальной.*

Теорема 14.3. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство.

Докажем, что если последовательность x_n удовлетворяет условию Коши, то она ограничена.

Пусть выполнено определение 14.1. В этом случае логическая фраза справедлива. Пусть $\varepsilon > 0$ задано и равно, например, 7. Тогда действительно для любой пары чисел $n > N$ и $m > N$ верно неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Возьмём число x_{N+1}, которое также удовлетворяет условию в определении 14.1. Потом возьмём такое число $m > N$ и запишем следующее неравенство:

$$|x_{N+1} - x_m| < \varepsilon$$

Таким образом, множество чисел $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ является ограниченным, поскольку все его элементы отличаются от фиксированного числа не больше, чем на ε, которое сами выбрали.

Кроме этого ограниченного множества у последовательности есть ещё первые элементы $\{x_1, x_2, \dots x_N\}$.

Если взять ограниченное множество и добавить к нему конечное число элементов, то множество останется ограниченным. Таким образом, множество, содержащее элементы $\{x_1, x_2, \dots x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$ тоже ограниченное.

Итак, любая фундаментальная последовательность является ограниченной. ■

Теорема 14.4. *Если x_n сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство.

Докажем, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Пусть $x_n \to b$, что означает $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N$ верно неравенство $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, начиная с номера N, все последующие члены отличаются от числа b не больше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Иначе говоря, все элементы, начиная с $N+1$, находятся в интервале $\left(b - \dfrac{\varepsilon}{2}, b + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, как и элементы x_n и x_m.

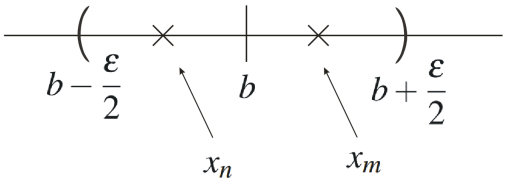


Рис. 14.3. Интервал $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ с элементами начиная с $N+1$

В таком случает расстояние между элементами x_n и x_m не превосходит ε.

Если и $m > N$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Более строгая запись с использованием свойства (модуль разности не превосходит суммы их модулей):

$$|x_n - x_m| = |x_n - b - x_m + b| = |(x_n - b) - (x_m - b)| \leqslant |x_n - b| + |x_m - b| = \varepsilon$$

■

Теорема 14.5. *Если последовательность x_n фундаментальна, то она сходится.*

Заметим, что в условии фундаментальности нет ничего про то, чему равен предел этой последовательности, нет числа b. Говорится, что последовательность сходится, но не сказано к чему.

Таким образом, фундаментальность — это способ проверить сходимость, не зная предела.

Доказательство.

1) x_n — ограниченная $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to b$.

Поскольку последовательность x_n фундаментальна, то она ограниченная. По теореме Больцано—Вейерштрасса из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к некоторому числу b.

2) Докажем, что число b — предел последовательности, т. е. $x_n \to b$.

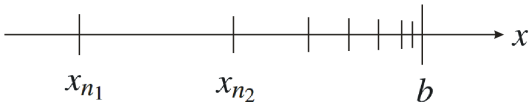


Рис. 14.4. Сходимость подпоследовательности к числу b

На (Рис. 14.4) показано, как подпоследовательность с элементами $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$ сходится к числу b. На (Рис. 14.5) показаны найденные номера $\{n_1, n_2, \dots, n_j, n_{j+1}\}$. Поскольку x_{n_k} — подпоследовательность, то эти номера стремятся к бесконечности, т. е. $n_j \to +\infty$, при $j \to +\infty$.

Запишем условие фундаментальности. Пусть $\forall\, \varepsilon > 0$, тогда $\exists N: \quad \forall n, m > N$ верно неравенство $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Итак, имеем последовательность натуральных чисел, элементы с этими номерами стремятся к пределу, задали $\varepsilon > 0$. В этом случае, можем взять и поставить на оси с номерами такое N, что правее него выполняется условие

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.1}$$

Поскольку $x_{n_k} \to b$, то $\exists N' : \forall k > N'$, будет верно неравенство

$$|x_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.2}$$

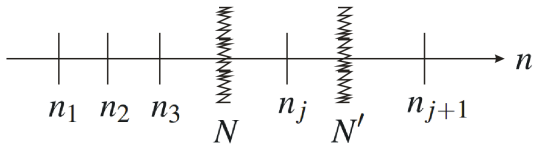


Рис. 14.5. Набор номеров подпоследовательности

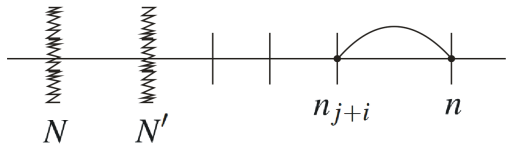


Рис. 14.6. Набор выделенных номеров, образующих подпоследовательность

Рассмотрим числа правее от N и N'. На (Рис. 14.6) изображены выделенные номера, которые образуют подпоследовательность. Возьмём любой номер n и оценим с помощью элемента x_{j+i}:

$$|x_n - b| = \left|x_n - x_{j+i} + x_{j+i} - b\right| = \left|\left(x_n - x_{j+i}\right) + \left(x_{j+i} - b\right)\right| \leqslant \left|x_n - x_{j+i}\right| + \left|x_{j+i} - b\right| = \varepsilon$$

Поскольку $\left|x_{j+i} - b\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (14.2), а разность $\left|x_n - x_{j+i}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ в силу неравенства (14.1).

Это доказывает сходимость последовательности к числу b. ■

Теорема 14.6. *Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Иначе говоря, необходимое и достаточное условие сходимости последовательности — это фундаментальность этой последовательности.

Теорема 14.7. *Если $\exists x_{n_k} \to b_1$, $\exists x_{n'_k} \to b_2$, $b_1 \neq b_2$, то x_n — не сход.*
Если существует такая подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к числу b_1, и существует подпоследовательность $x_{n'_k}$, которая сходится к числу b_2, причём $b_1 \neq b_2$, то последовательность x_n не является сходящейся, не имеет предела.

Доказательство.

Докажем теорему с помощью понятия фундаментальной последовательности.

Составим последовательность $x_{n_1} x_{n'_1} x_{n_2} x_{n'_2} x_{n_1} \ldots$, в которую впишем один за другим элементы последовательностей x_{n_k} и $x_{n'_k}$ через один. Тогда легко доказать, что эта последовательность не удовлетворяет условию Коши. При этом в условии Коши можно брать разность соседних элементов, которая будет больше некоторого $\varepsilon > 0$.

Полученная последовательность не является фундаментальной. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Предел функции по Гейне

Напомним ранее сформулированное определение предела функции по Коши.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

если a — предельная точка области определения X, а также $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :$ $\forall x \in X : \quad 0 < |x-a| < \delta$ будет верно условие $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Подчеркнём, что предел можно считать только в той точке, которая является предельной точкой области определения функции.

Определение 14.4. *Говорим, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

по Гейне, если a — предельная точка области определения X, $\forall x_n \to a$, $x_n \in X, x_n \neq a$.

Для любой последовательности аргументов функции x_n, которые стремятся к числу a, принадлежат все области определения функции и не совпадают с числом a, верно условие $f(x_n) \to b$.

Формулируя отрицание определения, говорим, что число b не является пределом функции по Гейне в точке a, если a — предельная точка области определения X, существует такая последовательность x_n, которая стремится к a, все они из области определения, ни одно из них не равно a, а утверждение $f(x_n) \to b$ того, что число b является пределом последовательности x_n неверно.

Теорема 14.8. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *по Коши* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *по Гейне.*

Доказательство.

Докажем равносильность двух определений пределов.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Коши. Докажем, что то же самое верно и по Гейне. Чтобы приступить к этому доказательству, необходимо найти такую последовательность $x_n \to a, \quad x_n \in X, \quad x_n \neq a$ и доказать, что предел функции, взятый в этих точках, равен b.

Для начала запишем определение предела по Коши. Пусть $\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :$ $\forall x \in X : \quad 0 < |x-a| < \delta$ будет верно неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

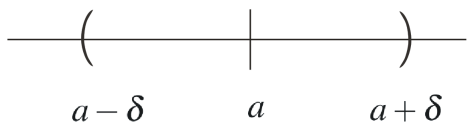


Рис. 14.7. Интервал с заданным δ

Поскольку $x_n \to a$, то $\exists N \quad \forall n > N$ верно неравенство $0 < |x_n - a| < \delta$. Из этого следует, что для тех же самых номеров по определению предела по Коши верно неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Следовательно $f(x_n) \to b$.

Доказали, что из определения предела по Коши следует определение предела по Гейне.

2) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Гейне. Докажем от противного, что то же самое верно и по Коши.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по Коши неверно. Это означает, что неверно одно из двух, либо предела нет, либо он есть, но не равен b.

Далее запишем отрицание: $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X, \quad x \neq a: \quad 0 < |x-a| < \delta$, $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$.

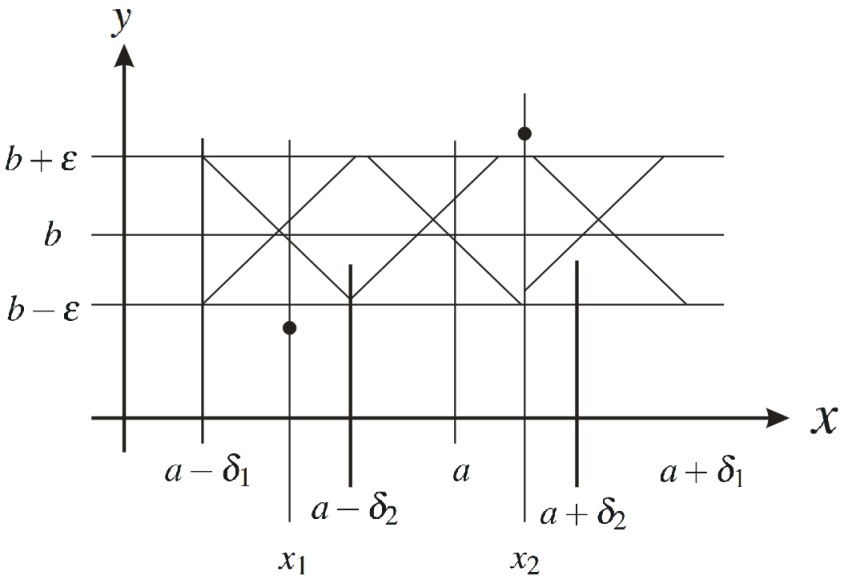


Рис. 14.8. Последовательность значений функций для $0 < |x-a| < \delta$, $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$

Построение конструкции поясним с помощью (Рис. 14.8). Допустим, есть плоскость с координатами $X0Y$ отметим числа b и a, ε на вертикальной оси в виде полосы $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, некоторое δ_1 на горизонтальной оси в виде полосы $(a-\delta_1, a+\delta_1)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда найдётся такой x_1, который лежит внутри интервала $(a-\delta_1, a+\delta_1)$ (внутри вертикальной полосы) близко к точке a, а значение функции будет находиться вне интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ (вне горизонтальной полосы).

После этого возьмём δ_2 таким образом, чтобы x_1 не попал в новый вертикальный промежуток $(a-\delta_2, a+\delta_2)$.

Тогда найдётся такой x_2, который лежит внутри интервала $(a-\delta_2, a+\delta_2)$, а значение функции в точке x_2 выйдет за пределы интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Аналогичным образом построение можно продолжать до бесконечности. Возьмём последовательность $\delta \to 0$, получая каждый раз x, значение которого лежит вне $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Заметим, что по условию определение по Коши не выполнено, поэтому последовательность значений функций в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots$ находится вне горизонтальной полосы, а значит нарушается условие Гейне. Это противоречие доказывает, что из определения предела по Гейне следует определение предела по Коши.

Оформим строгую запись вышеописанных рассуждений:
$\delta_1 > 0 \quad \exists x_1: \quad 0 < |x_1 - a| < \delta_1, \quad |f(x) - b| \geqslant \varepsilon.$

Выберем $\delta_2 = \min\left(\dfrac{\delta_1}{2}, |x_1 - a|\right) \Rightarrow \exists x_2, \ldots$ Получим $x_n \to a, \quad x_n \in X, \ x_n \neq a,$ $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon.$

■

Теорема 14.9. *Пусть* $\exists x_n' \to a, \quad x_n' \in X, \quad x_n' \neq a,$ *причём* $f(x_n') \to b_1,$ *а также* $\exists x_n'' \to a, \quad x_n'' \in X, \quad x_n'' \neq a,$ *причём* $f(x_n'') \to b_2, \quad b_1 \neq b_2.$

Имеем две последовательности x_n' *и* x_n'', *обе удовлетворяющие условиям, а функции имеют разные пределы* b_1 *и* b_2. *Это означает, что функция предела не имеет предела по Коши и в силу равносильности по Гейне.*

Пример 14.1. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \quad a = 0.$

Возьмём две бесконечно малые последовательности $\dfrac{1}{x_n'} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \dfrac{1}{x_n''} = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n.$ $\sin\dfrac{1}{x}$ *для первой последовательности равен* 1, *для второй последовательности* -1.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение предела по Гейне на бесконечности $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, как и отрицание этого определения, формулируются аналогично определению 14.4 в конечной точке, но с заменой $x \to a$ на $x \to +\infty$.

Приведём пример функции, удобной для доказательства по Гейне отсутствия предела на бесконечности.

Пример 14.2. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *не имеет предела при* $x \to +\infty$

Критерий Коши для функции

Определение 14.5. *Пусть* $x = a$ *— предельная точка области определения* X *функции. Говорят, что функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши в точке* $x = a$ *(или при* $x \to a$*), если* $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall x', x'': \quad 0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$ *верно неравенство*

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| < \varepsilon. \tag{14.3}$$

Определение 14.6. *Говорят, что функция* $f(x)$ *не удовлетворяет условию Коши в точке* $x = a$ *(или при* $x \to a$*), если* $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall x', x'': \quad 0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ *неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ *не выполняется.*

Теорема 14.10. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *существует* $\Leftrightarrow$ $f(x)$ *удовлетворяет условию Коши в точке* a.

Подчеркнём ещё раз, что условие Коши не требует знания предела, там нет величины b, что крайне удобно. Вся современная математика основана на подходе к пределам с точки зрения Коши.

Доказательство.

1) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, сформулируем по Коши. Поскольку определения предела по Коши и Гейне равносильны, потребуем, чтобы определение по Коши было выполнено. В этом случае $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta$, верно неравенство

$$0 < |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{14.4}$$

Если взять в условии Коши то самое δ, которое нашли по определению предела функции по Коши, тогда для каждой из взятых двух точек x' и x'' неравенство (14.4) будет выполнено.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Возьмём ту самую δ и посмотрим, что получится если будем вычислять неравенство (14.3). Оценим через промежуточное число b:

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|=\left|f\left(x'\right)-b+b-f\left(x''\right)\right|=\left|\left(f\left(x'\right)-b\right)-\left(f\left(x''\right)-b\right)\right|=\varepsilon$$

2) Пусть выполнено условие Коши, $x_n \neq a$, $x_n \in X$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N : \forall n > N$ верно неравенство

$$|x_n - a| < \delta,$$

с тем самым δ, которое фигурирует в определении условия Коши.

Т. е. взяв это δ, из условия Коши, находим такое N, что начиная с номера $n+1$ все x с номером n отличаются от a не больше, чем на δ.

В этом случае, если $n > N$, $m > N$, тогда по условию Коши $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Иначе говоря, последовательность $f(x_n)$ — фундаментальна, поэтому она сходится. Следовательно, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n) = b$

Доказано, что при выполнении условия Коши для функции в точке a при любой последовательности $x_n \to a$ и удовлетворяющей условиям, значение функции в этих точках образует фундаментальную последовательность, которая поэтому сходится.

Для того, чтобы доказать, что справедливо условие предела по Гейне, осталось рассмотреть пределы фундаментальных последовательностей $f(x'_n)$ и $f(x''_n)$, которые пока могут сходится к разным числам.

Пусть $f(x'_n) \to b_1$ и $f(x''_n) \to b_2$ $b_1 \neq b_2$. Чтобы построить третью последовательность и показать противоречие, необходимо задать через один член. Рассмотрим последовательность, составленную из чётных членов из первой последовательности и нечётных членов из второй последовательности, т. е. $y_{2k-1} = x'_k$, $y_{2k} = x''_k$.

Поскольку по построению $x'_k \to a$, $x''_k \to a$, то $y_j \to a$. Тогда последовательность $f(y_j)$ не является фундаментальной (не имеет предела).

Если удалось подобрать две такие последовательности аргументов, что функция сходится к двум отличным друг от друга числа, то предела у функции в данной точке нет. Это противоречит тому, что каждая из функций фундаментальна.

Это противоречие доказывает, что пределы одинаковые, т. е. $b_1 = b_2 = b$ и существует предел по Гейне $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Таким образом доказали, что необходимое и достаточное условие существования предела функции в данной точке — выполнение условия Коши.

■

Критерий Коши — необходимое и достаточное условие существования предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) \equiv$ выполнение условия Коши. Слово «критерий» означает необходимое и достаточное условие.

Заметим, что для конечной точки условие $0 < |x-a| < \delta$, а для формулирования определений и доказательства теорем для бесконечно удалённой точки необходимо написать $x > R$.

Теорема о равносильности условия Коши и условия существования предела в бесконечно удалённой точке доказываются аналогично.

Число e

Впервые последовательности начали изучаться при изучении предела функции, говорили, что последовательность x_n — функция, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Натуральные числа образуют бесконечное множество неограниченное сверху, ни каких других предельных точек у этого множества нет, можем рассматривать некую функцию $g(x)$, определённую на $\mathbb{N}$. Говорим, что последовательность — функция $g(x)$, которая определена на этом множестве и можем записать $g(n) = x_n$.

Напомним ранее доказанные теоремы.

Теорема 14.11. *Последовательность*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Доказали, что предел такой последовательности существует и обозначили его e. Такая последовательность монотонна и возрастает.

Кроме того, доказали, что последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$$

Доказали, что эта новая последовательность имеет такой же предел, что и старая, тоже e. Такая последовательность убывает, подходит к e с разных сторон.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Эти две последовательности имеют предел, каждая имеет ровно одну предельную точку, равную пределу e. Последовательности имеют верхний предел e.

Итерационные последовательности

Очень важное значение в математике, особенно компьютерной, имеют итерационные последовательности.

Рассмотрим только одну итерационную последовательность из всех, докажем, что она имеет предел, и найдём его.

$$x_{n+1}\sqrt{12+x_n}$$

Доказательство.

Если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, то в этом равенстве левая часть имеет предел, равный b, а правая часть $\sqrt{12+b}$, т. е. $b=\sqrt{12+b}$. Иначе говоря, число b удовлетворяет иррациональному уравнению.

Решим $b=\sqrt{12+b}$ с помощью замены $\sqrt{12+b}=c$, $12+b=c^2$. Получим квадратное уравнение $c^2-12=c$ или $c^2-c-12=0$, корни которого $c_1=4$ и $c_2=-3$.

заметим, что $c>0$ и второй корень можно отбросить. Стало быть, если предел существует, он равен 4.

Докажем, что предел существует. Если $x_n>4$, то $x_{n+1}>\sqrt{12+4}=4$. Таким образом, если какой-то член оказался больше 4, следующий тоже больше 4. Аналогичным образом для $x_n<4$. Тогда или все члены больше 4 или не все меньше, чем 4.

Наиболее частым способом исследования существования предела итерационной последовательности является нахождение разности. Рассмотрим

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{12-x_n}-x_n=f(x_n)$$

$$f(x)=\sqrt{12+x}-x=\frac{12+x+x^2}{\sqrt{12+x}+x}=\frac{-(x-4)(x+3)}{\sqrt{12+x}+x}$$

Заметим, если $x>4$, то $f(x)<0$. Это означает, что если $x_1>4$, то $x_2>4$, кроме того $x_2<x_1$. Следовательно, последовательность x_n является убывающей и ограниченной снизу (поскольку все члены больше 4).

Отсюда вытекает, что предел существует, поскольку монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Самостоятельно $x_1 < 4$. ■

Эталонные последовательности

Большое количество физических задач связаны с эталонными функциями и последовательностями, которые необходимо знать и уметь использовать. Важным является умение сравнивать, кто больше, кто меньше, какой предел и т. д.

Рассмотрим

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

и докажем, что предел такой последовательности равен 1 при $n \to +\infty$.

Доказательство.

Если $n \geqslant 2 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1, \quad \sqrt[n]{n} = 1 + b, \quad b > 0$. Возведём равенство в степень n:

$$n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3 + \dots + b^n$$

В правой части стоят только положительные слагаемые. Оставим только слагаемое $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3$ и заметим, что

$$n > \frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3$$

и после преобразования получим в правой части бесконечно малую последовательность:

$$b < \sqrt[3]{\frac{6}{(n-1)(n-2)}} \to 0$$

Тогда $b \to 0$, при $n \to \infty$, что и доказывает теорему. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 15. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса

Ранее доказали, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Докажем теоремы, относящиеся к эталонным последовательностям. Эталонные последовательности — такие последовательности, на которых основано огромное количество разных формул, построений, рассуждений.

Теорема 15.1.

$$\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$$

Доказательство.

Вместо натурального числа n будет стоять вещественное число x.

Доказательство проведём с помощью следующего рассуждения. Пусть некоторое вещественное число $x>1$, тогда, с одной стороны $x\leqslant[x+1]=[x]+1$, а с другой стороны $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{[x]}$, поэтому величина $x^{1/x}<([x]+1)^{1/[x]}$. Остальное самостоятельно аналогично рассуждениям, с помощью которых доказывали второй замечательный предел (основание, показатель и степень заменяются большим числом и доказательство завершается применение теоремы).

■

Теорема 15.2.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a x}{b^x}=0,\quad b>1$$

Теорема 15.3.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0,\quad p>0$$

Доказательство.

Логарифмическая функция, которая является бесконечно большой положительной или отрицательной в зависимости от значения $a>1$ или $a<1$, а в знаменателе стоит степенная функция с показателем $p>0$. Логарифмическая функция стремится к бесконечности медленнее, чем степенная функция.

Сделаем замену переменных, а также, используя свойства логарифма, запишем выражение в следующем виде:

$$\frac{\log_a x}{x^p}=\{y=x^p\}=\frac{\log_a y^{\frac{1}{p}}}{y}=\frac{1}{p}\frac{\log_a y}{y}=\frac{1}{p}\log_a y^{\frac{1}{y}}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поскольку $p > 0$ $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$. Тогда, согласно теореме, выражение $\log_a y^{\frac{1}{y}} \to 1$. Таким образом, поскольку $\log_a 1 = 0$, получим

$$\frac{1}{p} \log_a y^{\frac{1}{y}} \to 0$$

■

Теорема 15.4.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^p}{b^n} = 0, \quad p > 0, \quad b > 1$$

Доказательство.

Исследуем отношение степенной функции к показательной функции.

В случае, когда $p < 0$, предел тоже будет равен нулю (по теореме о пределе частного), в числителе бесконечно малая функция, а в знаменателе бесконечно большая, но это будет не неопределённость.

Рассматриваем случай, когда и в числителе, и в знаменателе стоят бесконечно большие функции.

Итак, $p > 0$. Представим величину b в виде $b = 1 + t$, тогда $t > 0$, поскольку $b > 1$. Распишем b^n с помощью бинома Ньютона:

$$b^n = (1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+t)}{k!} t^k + \dots + t^n$$

Хотим доказать, что дробь стремится к нулю, является бесконечно малой последовательностью. Для этого возьмём среднее слагаемое, а именно:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+t)}{k!} t^k$$

Начальные и последнее слагаемые для рассмотрения не подойдут, поскольку первые слишком медленно возрастают, а в последней возможна бесконечно малая величина при $t < 1$.

Предположим, что $p < m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда докажем, что величина стремится к нулю, заменяя в числителе n^p большей величиной n^m, а в знаменателе оставим один член, который выбрали, и получим следующее:

$$\frac{n^m}{\frac{n(n-1)\dots(n-k+t)}{k!} t^k}.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Чтобы доказать, что вся величина стремится к нулю, необходимо выбрать k заданным фиксированным числом.

Ограничим снизу m, степень числа $n \to +\infty$, большей степенью той же самой величины n. Для этого потребуем, чтобы в знаменателе было больше сомножителей, чем в числителе. Сейчас в знаменателе их k штук, необходимо, чтобы величина была, например, $k = m+1$. Тогда получим

$$\frac{n^m}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+t)}{k!}\,t^k} = \frac{n^m}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m)}{(m+1)!}\,t^{m+1}}$$

Здесь m — фиксированное число, которое ни к чему не стремится. Теперь дождёмся, когда величина n станет достаточно большой, так чтобы $n - m > \dfrac{n}{2}$, т. е. $\dfrac{n}{2} > m$ или $n > 2m$.

Заменим m сомножителей, а именно $(n-1)\ldots(n-m)$, на меньшие числа, на $\dfrac{n}{2}$:

$$\frac{n^m}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-m)}{(m+1)!}\,t^{m+1}} < \frac{n^m}{\dfrac{n(n/2)^m}{(m+1)!}\,t^{m+1}} = C\cdot\frac{1}{n} \to 0$$

Здесь 2^m, t^{m+1}, $(m+1)!$ — заданные, фиксированные числа, которые вошли в константу C, сокращается n^m и остаётся $\dfrac{1}{n}$.

Таким образом, последовательность меньше, чем бесконечно малая последовательность, поэтому её предел равен нулю.

■

Воспользуемся полезными символами, обладающими в том числе свойством транзитивности, $\gg$, которое означает, что величина намного больше, а $\ll$ означает, что величина намного меньше, и сформулируем следующее:

$$a_n \ll b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

a_n — последовательность, которая является малой по сравнению с b_n.

Итак, доказали, что $\log_a n \ll n^p \ll b^n$, $p > 0$, $b > 1$. Отсюда вытекает $\log_a n \ll b^n$

Таким образом, рассмотрели логарифмические, степенные и показательные последовательности.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Факториал и n^n

Теорема 15.5.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n!}=0,\quad \forall b$$

Доказательство.

Докажем, что степенная последовательность и $n!$ связаны таким вот образом.

Число b может быть как положительным, так и отрицательным, а также больше или меньше единицы по модулю. Из всех случаев следует рассмотреть только один при $b>1$. К нему сводится случай, когда $b<-1$ Когда $|b|<1$, в числителе ограниченная, а в знаменателе бесконечно большая последовательность, т. е. соотношение очевидно.

Пусть $b>1,\quad m\in\mathbb{N}:\quad m>b.$ Тогда $b^n\leqslant m^n$. Рассмотрим и докажем, что бесконечно малой является следующая последовательность:

$$\frac{m^n}{n!}=\frac{m\cdot m\ldots m}{1\cdot 2\ldots n}$$

Здесь несколько первых множителей могут быть большими числами. Теперь полученную дробь представим в виде произведения двух дробей таким образом, чтобы можно было увидеть, что одна из них ограниченная, а вторая бесконечно малая. Представление может быть разным, например, если

1) n — чётное, т. е. число сомножителей в числителе и число сомножителей в знаменателе в первой дроби равно $2m$, а именно:

$$\frac{m\cdot m\ldots m}{1\cdot 2\ldots 2m}\cdot\frac{m\cdot m\ldots m}{(2m+1)\cdot n}<C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

Поскольку $n\to+\infty$, наступит такой момент, когда n станет больше, чем $2m$.

Первая дробь равна постоянному числу C, поскольку от n не зависит. Во второй дроби каждый из оставшегося $(n-2m=n-(2m+1)+1)$ числа сомножителей меньше, чем $\frac{1}{2}$. Окончательно получаем, что последовательность меньше сходящейся бесконечно малой геометрической прогрессии, т. е.:

$$\frac{b^n}{n!}<C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно, $\dfrac{b^n}{n!}$ является бесконечно малой последовательностью, что и доказывает утверждение для $b > 1$.

Остальные простые случаи с b не рассматриваем.

2) n — нечётное. Самостоятельно.

■

Теорема 15.6.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Доказательство.

Доказательство проводится аналогичным образом.

1) Пусть n — чётное.

$$\frac{1\cdot 2\ldots\frac{n}{2}}{n\cdot n\ldots n}\cdot\frac{\frac{n+1}{2}\ldots n}{n\cdot n\ldots n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Заметим, что во второй дроби при почленном сокращении все множители будут меньше, чем 1, поэтому вторая дробь тоже меньше 1. Первая дробь является бесконечно малой геометрической прогрессией, поскольку самый большой множитель меньше, чем $(1/2)^{n/2}$ в степени равной количеству множителей.

2) n — нечётное. Самостоятельно, вместо $\dfrac{n}{2}$ взяв, например, $\dfrac{n+1}{2}$.

■

Итак, доказали ряд из эталонных последовательностей, каждый из которых много меньше другой, а именно:

$$\log_a n \ll n^b \ll p^n \ll n! \ll n^n,$$

где $a > 0, \quad a \neq 1; \quad b > 0; \quad p > 1.$

Зачастую бывает, что используются не соседние члены, например:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{n!} = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства непрерывных функций

Локальная ограниченность непрерывной функции

Теорема 15.7. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = a$, *то* $f(x)$ *локально ограниченная в окрестности точки* a, *т. е.* $\exists\delta > 0, \quad \exists A: \quad \forall x \in X: \quad |x-a| < \delta$, *будет верно условие* $|f(x)| \leqslant A$.

Иными словами, если функция $f(x)$ *непрерывна в некоторой точке, то найдётся такая окрестность этой точки, в которой эта функция ограниченная, причём ограниченная неизвестной константой* A *и неизвестной окрестностью.*

Доказательство.

Из непрерывности функции следует, что $\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 : \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

В данном случае в качестве предела функции в точке берём число $f(a)$, поскольку функция непрерывна в точке, это означает, что её предел в данной точке равен $f(a)$.

Пусть ε — любое число, тогда найдётся такое δ, что внутри δ – окрестности кроме точки a выполняется неравенство, где число ε задано. Тем самым, можно выбрать такую δ, которую даёт определение предела, а также $A = |f(a)| + \varepsilon$.

■

Первая теорема Вейерштрасса

Теорема 15.8. *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке (сегменте)* $[a,b]$, *то функция* $f(x)$ *ограниченная на* $[a,b]$.

Доказательство.

Проведём доказательство от противного. Пусть $f(x)$ неограниченная, например, сверху. Т. е. отрицание ограниченности сверху: $\forall A \quad \exists x \in [a,b]: \quad f(x) > A$.

Возьмём вместо A последовательность $A_n = n$ и построим последовательность $x_n \in [a,b]$, причём $f(x_n) > n$.

Выделим из ограниченной последовательности сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что она сама сходится, т. е. $x_{n_k} \to C \in [a,b]$, где n_k — подпоследовательность.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Обозначим $z_n = x_{n_k}$, тогда $f(z_k) > k$, $z_k \in [a,b]$, $z_k \to C \in [a,b]$. Но, по предположению, функция $f(x)$ непрерывная в точке $x = c$, тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} f(z_k) = f(c)$, поскольку $C \in [a,b]$.

Итак, получили противоречие. С одной стороны $f(z_k) \to f(c)$, с другой стороны $f(z_k) > k$, т. е. образует бесконечно большую последовательность. Противоречие показывает, что предположение о том, что $f(x)$ неограниченная, оказалось неверным.

■

Вторая теорема Вейерштрасса

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $f(x)$ ограниченная на $[a,b]$, поэтому $f(x)$ имеет верхнюю и нижнюю грань. Этих граней бесконечно много. Доказали, что существует наименьшая из всех верхних граней, а также существует наибольшая из всех нижних граней.

Пусть M — точная верхняя грань функции $f(x)$ на отрезке $[a,b] : M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$,

а m — точная нижняя грань функции $f(x)$ на отрезке $[a,b] : m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Теорема 15.9. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $f(x)$ достигает своих точных граней, иными словами, это означает, следующее:*
$\exists c_1 \in [a,b] : \quad f(c_1) = M$, *где M — точная верхняя грань, а также*
$\exists c_2 \in [a,b] : \quad f(c_2) = m$, *где m — точная нижняя грань.*

Доказательство.

Проведём доказательство от противного. Пусть функция $f(x)$ не достигает своей, например, верхней точной грани, т. е. $\forall x \in [a,b]$ верно неравенство $f(x) < M$. Противоречие заключается в том, что в прямом утверждении функция достигает своей точной верхней грани, а в отрицании функция меньше её.

В этом случае, $M - f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $M - f(x) > 0$, тогда из свойств непрерывных функций следует, что $\dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a,b]$, $\dfrac{1}{M - f(x)} > 0$.

Раз $\dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке сверху (нижняя грань не очень интересует, поскольку функция положительная), а это означает, что $\exists P : \quad \forall x \in [a,b]$ верно неравенство $\dfrac{1}{M - f(x)} \leqslant P$, в котором левая и

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

правая части положительные. Разделив на P, получим следующее:

$$\frac{1}{p} \leqslant M - f(x) \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant M - \frac{1}{p},$$

откуда следует, что $M - \dfrac{1}{p}$ тоже верхняя грань на отрезке $[a,b]$.

Итак, получили противоречие, которое показывает, что предположение оказалось неверным. Отсюда вытекает, что $\exists c: \quad f(c) = M$, т. е. функция достигает свое точной верхней грани на отрезке $[a,b]$.

■

Приведём прямое доказательство наряду с доказательством от противного.

Доказательство.

Известно, что функция непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если $\forall x \in [a,b]$ верно неравенство $f(x) < M$, то в этом доказательстве, запишем определение точной верхней грани.

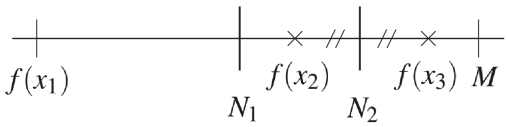


Рис. 15.1. Последовательность чисел $x \in [a,b]$ и значений функции $f(x_n) < M$

Подставим какое-нибудь значение функции $f(x_1)$, лежащее на отрезке $[a,b]$, как показано на (Рис. 15.1), строго левее, чем M. Оно не является точной верхней гранью функции, а значит правее от него найдётся ещё одно значение функции N_1, также не являющееся точной верхней гранью. Все числа меньшие M не могут быть верхней гранью. Значит $\exists x_2 \in [a,b]: \quad f(x_2) > N_1$.

Продолжая процесс, получим N_2, также не являющееся точной верхней гранью, правее которого найдётся $f(x_3)$.

Таким образом, построим последовательность $x_n \in [a,b]$, $f(x_n) < M$, причём $f(x_n) \to M$. Выделим из ограниченной последовательности сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to C \in [a,b]$. Обозначим $z_k = x_{n_k} \to c, \quad k \to +\infty$.

Итак, $z_k \to c, \quad f(z_k) \to M$, а также ещё $f(z_k) \to f(c)$, поскольку функция непрерывна и $z_k \to c$.

Из этого следует, что $f(c) = M$, т. е. нашлась такая точка, в которой функция достигает своей точной верхней грани.

■

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля

Теорема 15.10. *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема на интервале* (a,b) *и* $f(a) = f(b)$, *то* $\exists c \in (a,b)$:

$$f'(c) = 0.$$

Иными словами, если функция принимает равные значения на концах отрезка, непрерывна на нём, дифференцируема на интервале, то найдётся такая точка внутри интервала, что производная в этой точке равна нулю.

Доказательство основано на теоремах Вейерштрасса. Из условия по теореме Вейерштрасса вытекает, что $f(x)$ ограниченная и достигает своих точных граней.

Таким образом, пусть $m = \inf\limits_{[a,b]} f$, а $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, тогда $\exists c_1 \in [a,b]: \quad f(c_1) = m$, $\exists c_2 \in [a,b]: \quad f(c_2) = M$.

Важно, что по теореме Вейерштрасса $c_1, c_2 \in [a,b]$, включая концы, а их брать мы не хотим, поэтому необходимо сделать замечание.

Если $f(x) = const$ на $[a,b]$, то можно взять $c = \dfrac{a+b}{2}$, т. е. в середине отрезка, и производная в этой точке будет равна нулю.

Если $f(x)$ принимает по крайней мере два разных значения, то хотя бы одна из двух точек (c_1 или c_2) лежит внутри интервала. Обе точки внутри отрезка лежать не могут.

Непрерывная функция $f(x)$, принимающая два разных значения на $[a,b]$, т. е. $f'(c_1) = b'_1 \quad f'(c_2) = b'_2$, причём $b'_1 \neq b'_2$, принимает все промежуточные значения. Т.е. $[b'_1, b'_2]$ будет лежать в множестве значений функции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поэтому хотя бы одна точка внутри отрезка существует, в которой функция принимает свою точную верхнюю или нижнюю грань.

Доказательство.

Пусть $c \in (a,b)$ и $f(c) = M = \sup\limits_{[a,b]} f$, как показано на (Рис. 15.2).

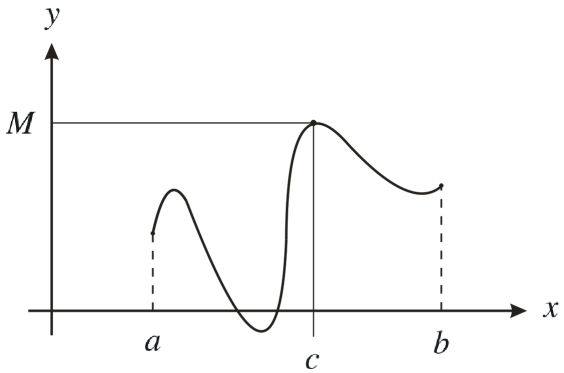


Рис. 15.2. Пример графика фкункции f с верхней точной гранью

Докажем, что $f'(c) = 0$. Проведём доказательство от противного.

Пусть $f'(c) > 0$, тогда f возрастает в точке $x = c$, т. е. $\exists \delta > 0 : \quad \forall x \in (c, \delta)$ верно $f(x) > f(c)$, а значит получили значение большее, чем точная верхняя грань.

Получив противоречие, доказали, что $f'(c) = 0$.

Случай, когда $f'(c) < 0$, доказывается аналогичным образом.

■

Теорема Лагранжа

Теорема 15.11. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) то $\exists c \in (a,b)$:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Формула Лагранжа (иначе формула конечных приращений) обычно имеет запись:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Для справедливости формулы Лагранжа достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на $[a,b]$, и дифференцируема на (a,b).

Построим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Заметим, что вспомогательная функция F имеет равные значения на концах $F(a)=0$, $F(b)=0$, по построению $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), следовательно, по теореме Ролля $\exists c: \quad F'(c)=0$.

Подставим c и найдём производную:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

■

Теорема 15.12. *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, $f'(x)=0$ *на интервале* (a,b), *то* $f(x) = const$.

Доказательство.

Возьмём отрезок $[a,b]$, на нём отметим две точки c_1 и c_2, как показано на (Рис. 15.3).

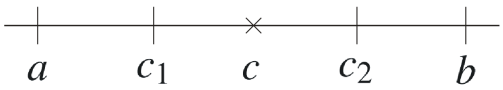


Рис. 15.3. Отрезок $[a,b]$, с произвольной парой точек и производной в точке c

По теореме Лагранжа $f(c_2)-f(c_1)=0$, поскольку производная в точке c попадёт между c_1 и c_2.

Таким образом, для любой пары точек, лежащей на отрезке $[a,b]$, значение функции в этих двух точках совпадает. Следовательно, функция равна константе на всем отрезке $[a,b]$, т. е. $f(x) = f(c_1) = const$.

■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 15.13. *Если* $F_1'(x) = f(x)$ *на интервале* (a,b), $F_2'(x) = f(x)$ *на интервале* (a,b), *то* $F_2(x) - F_1(x) = const$.

Иными словами, если у двух функций на интервале (a,b), *производные совпадают, то первообразные отличаются на константу.*

Теорема Лагранжа часто применяется для оценки приращения функции. Приведём пример её применения.

Пример 15.1. $f(x) = \ln x, \quad a = 100, \quad b = 110$

Найдём $\ln b - \ln a = f(b) - f(a)$. *Заметим, что* $\ln x$ *удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому* $\exists c \in (100, 110)$:

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{c} \cdot 10$$

Оценка приращения функции будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{10}{110} < \ln 110 - \ln 100 < \frac{10}{100}$$

Существует целый ряд задач, которые рассчитаны на то, чтобы углубить понимание теоремы Лагранжа.

Пример 15.2. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad a = -1, \quad b = 1$

Оценим $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot 2$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f(b) - f(a) = 2 \cdot \frac{-2c}{(1+c^2)^2}$$

Это верно для $c = 0$. *Схематично проделанное изображено на (Рис. 15.4).*

Приращение функции из точки a *в точку* b *равно нулю. В данном случае эта линия коснулась графика функции в точке ноль.*

Пример 15.3. $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = -1, \quad b = 1$

Оценим

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{1+c^2} \cdot 2$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1+c^2} \cdot 2, \quad 1 + c^2 = \frac{\pi}{4}, \quad c^2 = \frac{\pi}{4} - 1, \quad c = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} - 1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

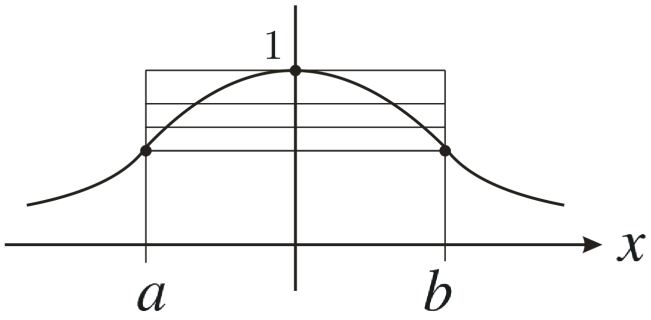


Рис. 15.4. Изображение секущей, касающейся графика $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ в одной точке

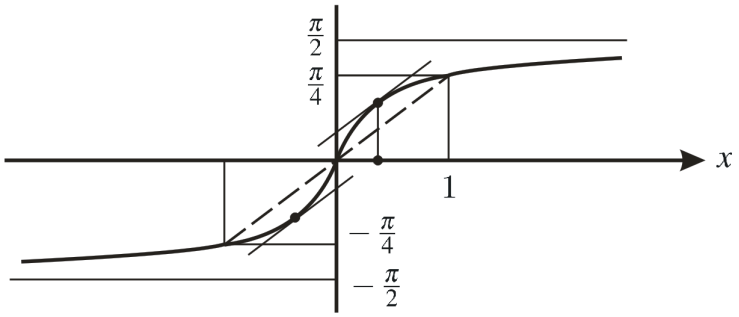


Рис. 15.5. Изображение секущих, касающихся графика $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в найденных точках $c = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} - 1}$

Пунктирная секущая на (Рис. 15.5), соединяющая точку $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ *с* $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$, *при поднимании и опускании коснётся графика* $f(x) = \operatorname{arctg} x$, *в полученных двух точках.*

Поясним смысл теоремы Лагранжа на (Рис. 15.6).

Пусть есть функция, удовлетворяющая условиям теоремы Лагранжа. Обозначим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k$$

k — угловой коэффициент прямой, соединяющей начальные точки a и b.

Внутри интервала (a, b) найдётся такая точка c, производная которой будет равна k. Иначе говоря, если опускать и поднимать эту линию, рано или поздно, она коснётся графика функции в одной точке, т. е. $f'(c) = k$. Найдётся и ещё одна такая точка внизу.

Теорема Лагранжа не утверждает, что точка одна, она найдётся, и их может быть много.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Монотонные функции

Напомним ещё раз определение монотонной функции.

Определение 15.1. *Функция* $f(x)$ *называется возрастающей на множестве* X *тогда и только тогда, когда* $\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 < x_2$ *верно неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастающая, неубывающая, невозрастающая и убывающая функции обозначены на (Рис. 15.7).

Вместе они монотонные функции.

Сформулируем теорему о необходимом и достаточном условии монотонности.

Теорема 15.14. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема на интервале* (a,b), *то* $f(x)$ *не убывает на отрезке* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geqslant 0$ *на интервале* (a,b).

Иными словами, не убывание функции равносильно условию неотрицательности производной функции на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.

1) Пусть $f'(x) \geqslant 0$ на интервале (a,b), $x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $\exists c \in (x_1, x_2): \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

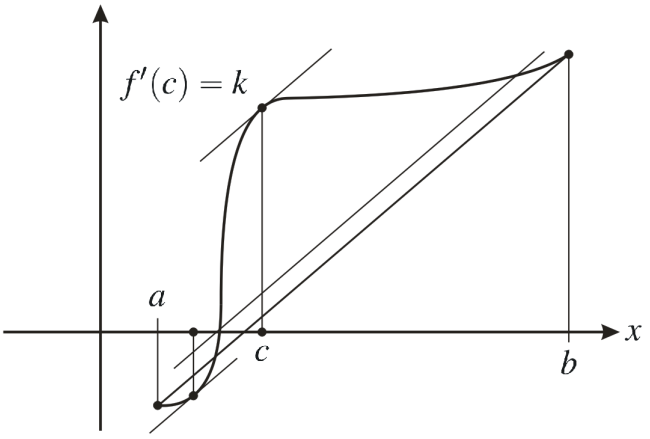


Рис. 15.6. Изображение точек на произвольном графике, производная в которых равна угловому коэффициенту k

Рис. 15.7. Обозначение монотонных функций

Итак, знаем, что найдётся такая точка c на интервале (a,b), что выполняется формула Лагранжа. В данном случае, величина $(x_2 - x_1)$ положительная, а $f'(c) \geqslant$ по условию.

Отсюда следует, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, т. е. функция неубывающая.

2) Пусть наоборот, при тех же условиях $f(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$. Пусть $\exists c \in (a,b): \quad f'(c) < 0$, т. е. $f(c)$ убывает, как показано на (Рис. 15.8).

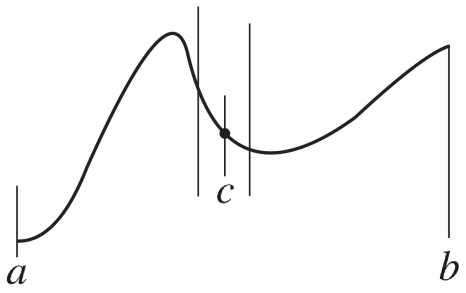


Рис. 15.8. Изображение произвольного графика функции, убывающей в точке c и интнервала, окражающего эту точку

Тогда нарушается предположение неубывания функции на отрезке. По определению убывания функции в точке найдётся такой интервал, окружающий эту точку, что значение функции будет меньше точки. Легко доказать, что если функция убывает в точке c, то она не может не убывать на всём отрезке $[a,b]$.

Это противоречие доказывает, что функция имеет неотрицательную производную, т. е. $f'(c) \geqslant 0$.

■

Запишем следующие утверждения и отметим их несимметрию.

Если функция имеет неотрицательную производную, то функция не убывает.

Если функция не убывает, то она имеет неотрицательную производную.

Если функция имеет положительную производную, то функция возрастает.

Если функция возрастает, то производная не обязательно положительна, может обращаться в нуль в некоторой точке, как в примере на (Рис. 15.9), где $f(x) = x^3, \quad f'(0) = 0, \quad f$ возрастает на $\mathbb{R}$.

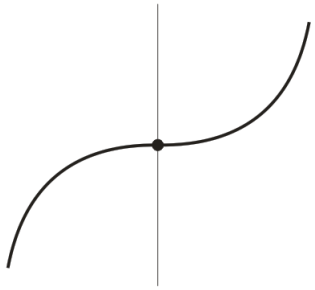


Рис. 15.9. Пример возрастающей функции $f(x) = x^3$, имеющей производную $f'(0) = 0$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 16. Монотонные функции

Напомним ранее сформулированную теорему.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), то $f(x)$ является неубывающей на отрезке $[a,b] \iff f'(x) \geqslant 0$ на интервале (a,b); $f(x)$ является невозрастающей на отрезке $[a,b] \iff f'(x) \leqslant 0$ на интервале (a,b).

Напомним, что в доказательстве, если $f'(x) \geqslant 0$, используется формула Лагранжа, а если говорится, что $f(x)$ является неубывающей на отрезке $[a,b]$, используется доказательство от противного, т. е. предполагается, что в какой-то точке нарушается условие.

С этой теоремой связано несколько очень серьёзных проблем, которые возникают при её изложении и правильной записи.

Запишем четыре утверждения, образующих все вместе необходимые и достаточные условия монотонности, при тех же условиях, что сформулированы в предыдущей теореме.

Утверждение 16.1. *Достаточное условие возрастания:*
Если $f'(x) > 0$ *на интервале* (a,b), *то* $f(x)$ *возрастает на отрезке* $[a,b]$.

Утверждение 16.2. *Достаточное условие неубывания:*
Если $f'(x) \geqslant 0$ *на интервале* (a,b), *то* $f(x)$ *не убывает на отрезке* $[a,b]$.

Утверждение 16.3. *Необходимое условие неубывания:*
Если $f(x)$ *не убывает на отрезке* $[a,b]$, *то* $f'(x) \geqslant 0$ *на интервале* (a,b).

Утверждение 16.4. *Необходимое условие возрастания:*
Если $f(x)$ *возрастает на отрезке* $[a,b]$, *то* $f'(x) \geqslant 0$ *на интервале* (a,b).

Необходимое условие возрастания доказывается от противного. Если в какой-то точке производная стала меньше нуля, то в этой точке функция убывает и это приводит к противоречию.

С помощью одного только примера можно показать, что строгим неравенство быть не может.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Самым простым достаточным условием возрастания функции может быть, например, $y = x$. Этого достаточно, чтобы функция возрастала. Однако, это слабое утверждение, поскольку охватывает очень узкий класс функций.

Для возрастания можно сформулировать ещё более общие условия, охватывающие более широкий класс функций. Например, производной нет, а функция всё равно возрастает. Простой пример на (Рис. 16.1), когда у функции в точке нет производной, поскольку есть пределы слева и справа и они не равны друг другу.

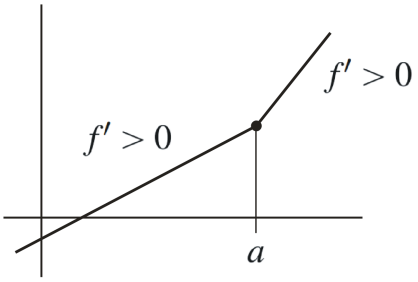


Рис. 16.1. Пример возрастающей функции не имеющей предела в точке

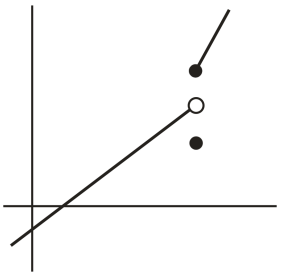


Рис. 16.2. Пример возрастающей функции имеющей разрыв первого рода в точке a

Заметим, что если слева и справа от точки a производные положительные, то требование несуществования предела в точке a теоремой быть не может. Пример такой функции на (Рис. 16.2).

Чтобы она стала теоремой, необходимо потребовать непрерывность. Если функция имеет производную слева и справа, в точке a она непрерывна, этого достаточно, чтобы функция была возрастающей в точке a..

Можно доказать эту теорему, применяя к левому и правому кускам области определения функции достаточное условие возрастания.

Достаточные условия экстремума

Данный раздел будет служить иллюстрацией применения различных уже сформулированных теорем.

Определение 16.1. *Говорят, что точка* $x = a$ *является точкой локального максимума для функции* $f(x)$, *определённой в некоторой окрестности* $\Omega(a)$, *что если* $\forall x \neq a, \quad x \in \Omega(a)$, *будет верно неравенство* $f(x) < f(a)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Указанная окрестность может быть сколь угодно малой.

Рис. 16.3. Пример изолированной точки локального максимума

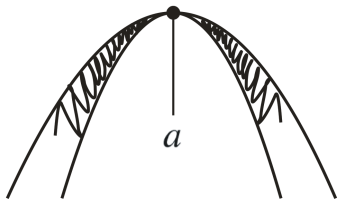


Рис. 16.4. Пример точки локального максимума

Самый простой пример точки локального максимума изображен на (Рис. 16.3). Слева от точки a функция возрастает, справа убывает.

Более сложный пример на (Рис. 16.4), с сильно осциллирующей к точке a функцией между двумя параболами, где a — точка локального максимума, в окрестности которой имеется сколь угодно много других точек локального максимума. Функция не возрастает и не убывает ни в какой окрестности точки a.

Приведём ещё несколько специфических примеров точки локального максимума на (Рис. 16.5), на которых можно увидеть, что понятие локального максимума разрывных функций никак не связано с возрастанием и убыванием.

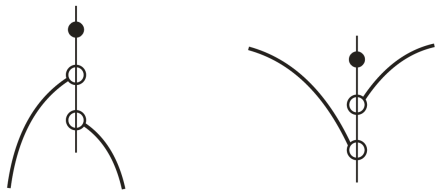


Рис. 16.5. Пример точек локального максимума

Теорема 16.1. *Если функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a-\delta,a]$ и $f(x)$ убывает на отрезке $[a,a+\delta]$, где $\delta>0$, тогда точка $x=a$ есть точка локального максимума.*

Специального доказательства эта теорема не требует, поскольку она вытекает из трёх определений, а именно: убывания, возрастания и локального максимума. Эта теорема описывает функцию, изображённую на (Рис. 16.6).

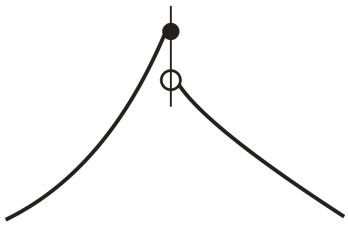


Рис. 16.6. Пример точки локального максимума функции возрастающей слева и убывающей справа

Рис. 16.7. Пример точки локального максимума

Теорема 16.2. *Если* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x=a$, *то* $\exists\delta>0:\quad f'(x)>0$ *на интервале* $(a-\delta,a)$, *и* $f'(x)<0$ *на интервале* $(a,a+\delta)$, *тогда точка* $x=a$ *есть точка локального максимума, как на (Рис. 16.7).*

Доказательство.

Доказательство вытекает из четырёх утверждений.

Слева от точки $x=a$, в которой функция непрерывна, производная положительна, значит функция возрастает на полуинтервале $(a-\delta,a]$ и убывает полуинтервале $(a,a+\delta]$.

Заметим, что в теореме потребован интервал, который заканчивается точкой a, в которой есть непрерывность, поэтому работает достаточное условие возрастания.

Итак, потребовали непрерывность в точке $x=a$, слева возрастание, справа убывание. Это есть достаточное условие локального максимума по теореме (16.1). ■

Теорема 16.3. *Если функция* $f'(a)=0,\quad f''(a)<0,$ *тогда точка* $x=a$ *есть точка локального максимума.*

Условие $f'(a)=0$ гарантирует непрерывность. Теорема описывает пример, показанный на рисунок8, когда в точке a имеется горизонтальная касательная и вторая производная в точке нуль.

Доказательство.

Т. к. $f''(a)<0$, то $f'(a)$ убывает. Более точно $f'(x)$ убывает в точке $x=a$.

Напомним, что понятия возрастания было два: в точке и на промежутке. В данном случае имеет место убывание в точке, поскольку вторая производная есть производная от первой производной.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

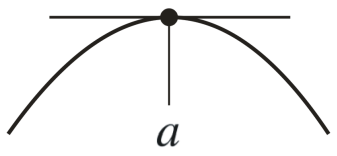


Рис. 16.8. Пример точки локального максимума с горизонтальной касательной для функции $f''(a) < 0$

Первая производная в точке a равна нулю и убывает в точке a, это означает, что первая производная устроена таким образом, как показано на (Рис. 16.9), а именно: она равна нулю в точке, справа отрицательна, слева положительна. Это убывание

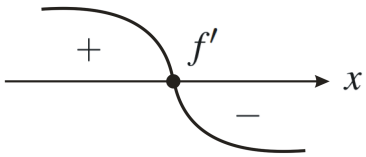


Рис. 16.9. Знаковый портрет первой производной

первой производной в точке a. Теперь применяем предыдущую теорему. Раз первая производная отрицательна справа от точки a стало быть работает предыдущая теорема.

■

Решение нелинейных уравнений

Из решений нелинейных уравнений вытекает раздел математики «Теория фракталов».

Процесс, который будет изучаться показан на рисунок10 Здесь пытаемся решить нелинейное уравнение, которое можно записать следующим образом: первая синяя функция — парабола $x(1-x)$. Наибольшее значение (точка максимума) в $1/2$, посередине между двумя корнями 0 и 1. Максимальное значение функции $1/4$.

Поскольку на рисунке больше $1/4$, имеет место коэффициент c.

Итак, решаем следующее нелинейное уравнение:

$$cx(1-x) = x$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Аналитически оно решается быстро. Сокращается x и находится два корня, нуль и второй в явном виде. В случае, когда аналитическим способом найти корни не удаётся, тогда строится итерационный процесс. Этот процесс не является единственным, можно решать это уравнение по-другому и подходить к корню, например, монотонно или по спирали.

Бывают такие уравнения, для которых корень вообще не находится. Здесь при нахождении корня некоторого уравнения при большем значении c, итерационная последовательность, которую очень скоро опишем, имеет следующий вид: если вертикальные палочки рассматривать как точки на вертикальной оси X, то получим две группы точек, которые имеют фрактальную структуру и называются фракталами. В такой модели итерационный процесс позволяет строить фракталы. В более сложных моделях фракталы будут иметь гораздо более интересный и сложный вид.

Метод дихотомии

Дихотомия или деление отрезка пополам. Слово «дихотомия» имеет два корня, означающих резать на две части.

Метод дихотомии позволяет решать уравнения при следующих условиях, которые сформулируем в виде теоремы.

Теорема 16.4. *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$ и уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень $c\in(a,b)$, тогда последовательность дихотомии образуется следующим образом:* $a_1=a$, $b_1=b$, $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$

Возможны следующие случаи:

1) *Если $f(a_1)<0$, $f(x_1)>0$. Т. е. x_1 рассекает отрезок $[a_1,b_1]$ пополам. На левом конце этого отрезка функция меньше нуля, на правом конце больше нуля, тогда определим $a_2=a_1$, $b_2=x_1$, $x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$.*

2) *Если $f(a_1)>0$, $f(x_1)<0$, тогда $a_2=x_1$, $b_2=b_1$, $x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$.*

3) *Если $f(x_1)=0$, то $x_1=c$ — корень, тогда $x_2=x_3=\dots=x_1=c$. Дальнейший поиск можно не продолжать.*

Поясним на (Рис. 16.10). Рассмотрели непрерывную функцию с отрицательным значением на левом конце a и положительным на конце b.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

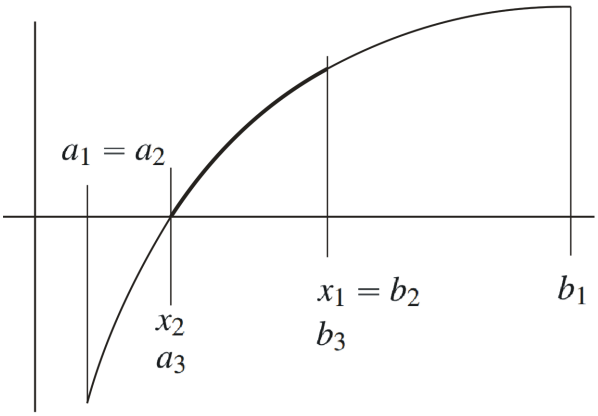


Рис. 16.10. Метод дихотомии для случая $f(a_1) < 0$, $f(x_1) > 0$

Определяем $a_1 = a$, $b_1 = b$, ставим точку x_1 и смотрим какая из двух альтернатив реализуется. В данном случае $f(x_1) > 0$. Определяем $b_2 = x_1$, $a_2 = a_1$ и точкой x_2 делим пополам новый отрезок $[a_2, b_2]$.

На отрезке $[a_2, b_2]$ получаем положительный и отрицательный куски справа и слева от точки x_2. Теперь определяем $a_3 = x_2$, $b_3 = b_2$. Этот процесс продолжается и дальше.

Доказали, что $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$, где c — единственный корень уравнения на отрезке.

Напомним, что последовательность $[a_k, b_k]$ — стягивающаяся система сегментов, которая имеет единственную общую точку, совпадающую с корнем.

Таким образом, последовательность дихотомии есть последовательность точек левые и правые концы каждого сегмента, полученного в дихотомии, тоже сходятся к корню.

Одним из недостатков дихотомии является очень медленная сходимость со скоростью геометрической прогрессии.

Также метод не позволяет определять количество корней на отрезке, например, у такой функции, как на (Рис. 16.11). У функции три корня и какой будет найдем методом дихотомии не понятно. Какой-нибудь корень будет найден точно, но не ясно какой из них. Причём теорема не гарантирует поиск корня, но можно доказать, что какой-то корень будет найден.

Следующая трудность метода дихотомии заключается в том, что он не обобщается даже на двумерные задачи и тем более на многомерные, т. е. задачи, в которых больше одной координаты.

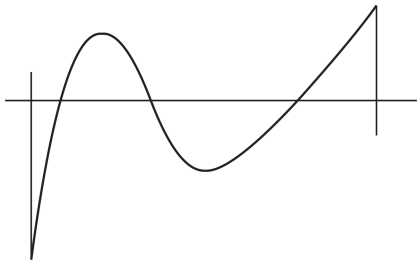


Рис. 16.11. Пример функции с тремя корнями

Метод простой итерации

В отличие от метода дихотомии, где рассматривались уравнения вида $f(x) = 0$, метод простой итерации применяется для решения уравнений вида $x = f(x)$. Впрочем, любое уравнение типа $f(x) = 0$ можно превратить в $x = f(x)$ и наоборот.

Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и $x_1 \in [a,b]$. Построим последовательность $x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \ldots, x_k = f(x_{k-1}), \ldots$

Такая последовательность называется последовательность простой итерации.

Легко привести пример, при котором заранее ясно, что последовательность не сходится. При отсутствии ограничений на $f(x)$ ничего ни сказать ни сделать не сможем.

Сформулируем теорему, которая гарантирует сходимость метода простой итерации.

Теорема 16.5. *Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет корень $x = c \in [a,b]$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причём $\exists q < 1 : \quad \forall x \in (a,b)$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant q$, тогда для последовательности простых итераций имеет место утверждение $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} x_k = c$, если $x_1 \in [a,b]$.*

Итак, итерационная последовательность сходится к числу c, которое является корнем уравнения.

Доказательство.

По определению итерационной последовательности $x_k = f(x_{k-1})$. Поскольку c — корень уравнения, можно записать $c = f(c)$. Вычитая, получим

$$x_k - c = f(x_{k-1}) - f(c)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Используем теорему конечных приращений Лагранжа для разности значений функций в двух точках $f(x_{k-1}) - f(c)$ на интервале $[a,b]$ и получим следующее $\exists \xi \in (x_{k-1}, c): \quad f(x_{k-1}) - f(c) = f'(\xi)(x_{k-1} - c)$.

Таким образом, получим утверждение:

$$x_k - c = f'(\xi_k)(x_{k-1} - c)$$

Поскольку по условию $f'(\xi_k) \leqslant q$, оценим левую часть

$$|x_k - c| \leqslant q \cdot |x_{k-1} - c|$$

Отсюда получим

$$|x_k - c| \leqslant q^{k-1} \cdot |x_1 - c|$$

Поскольку x_1 точка отрезка $[a,b]$, разность $|x_k - c| \to 0$ при $k \to +\infty$, т. к. $0 \leqslant q < 1$.

■

Метод Ньютона

Метод назван так, поскольку в нём используется понятие касательной, которое изобрёл Исаак Ньютон, а открыт метод его последователями.

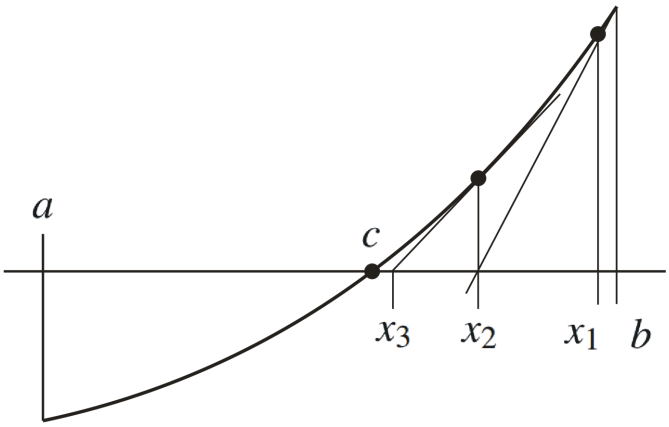


Рис. 16.12. Метод Ньютона

Сформулируем условия, при которых метод Ньютона сходится. Поясним метод на (Рис. 16.12), где на отрезке $[a,b]$ задана функция, которая должна быть непрерывно дифференцируема на всём отрезке $[a,b]$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поставим первую точку x_1 итерационной последовательности справа от корня c. Проведём касательную к графику функции в точке x_1. Касательная пересечёт ось OX в точке, которую назовём x_2. После этого перейдём из точки x_2 на график функции и в ней вновь построим касательную к графику. Она пересечёт ось OX в точке, которую назовём x_3. Процесс продолжается до сходимости.

Для начала необходимо записать уравнение касательной. Сделаем это для точки $x = p$. Тогда уравнение касательной выглядит следующим образом:

$$\hat{f}(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

Это линейная функция, которая в точке p совпадает с графиком функции и имеет тот же самый угловой коэффициент, т. е. касается графика функции.

Для построения итерационной последовательности найдём корень этой линейной функции, т. е. $\hat{f}(x) = 0$

$$x = \frac{1}{f'(p)}\Big(p f'(p) - f(p)\Big)$$

Когда касательная в точке p не горизонтальна, т. е. $f'(p) \neq 0$, верно

$$x = p - \frac{f(p)}{f'(p)} \tag{16.1}$$

Теперь в качестве p выбрав x с каким-то номером получим итерационную последовательность, явный вид которой выглядит следующим образом:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \tag{16.2}$$

Сформулируем теорему о достаточных условиях сходимости итерационной последовательности Ньютона.

Теорема 16.6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f'(x) > 0$ на интервале (a,b), $f''(x) > 0$ на интервале (a,b).*

Таким образом, описали функцию, которая возрастает на отрезке $[a,b]$. Кроме того, эта функция выпуклая вниз, и через некоторое время докажем, что условие $f''(x) > 0$ есть достаточное для выпуклости вниз.

Пусть $\exists c \in (a,b): \quad f(c) = 0, \quad x_1 \in (c,b]$, тогда итерационная последовательность Ньютона сходится к c.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Т. е. уравнение имеет корень, расположенный на интервале, а первая точка итерационной последовательности располагается правее точки c, но не правее, чем точка b. Корень единственный и другого нет, поскольку функция возрастает.

Доказательство.

1) Поскольку x_1 правее точки c, то $f(x_1) > 0$. Поскольку $f'(x) > 0$ на интервале (a,b), то $f'(x_1) > 0$. Следовательно $x_2 < x_1$.

2) Докажем, что $x_2 > c$. Запишем уравнение итерационной последовательности в такой форме, чтобы вместо x_{k-1} записать p. Итак, пусть $p \in (c,b)$.

   Запишем равенство, в котором $x = x_2$, $p = x_1$, и вычислим следующую величину:

$$x - c = p - c - \frac{f(p)}{f'(p)}$$

   Запишем выражение касательной, изображённой на (Рис. 16.13).

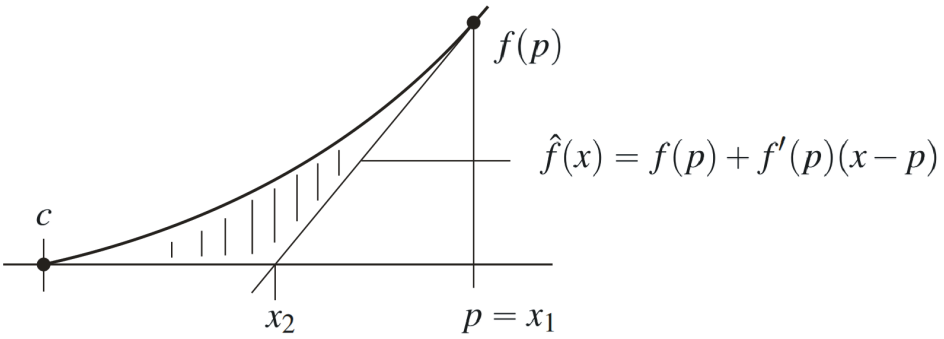


Рис. 16.13.

   Найдём разность между функцией и касательной к графику, т. е. расстояния между двумя кривыми, рассчитанные по вертикали:

$$f(x) - \hat{f}(x) = f(x) - f(p) - (x-p)f'(p)$$

   Это есть разность между значением функции в точке x и значением координаты y для касательной, проведённой в точке p к графику функции.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Заметим, что правая часть есть функция от x и обозначим

$$F(x) = f(x) - f(p) - (x-p)f'(p)$$

Заметим, что $F(p) = 0$. Учитывая это и теорему Лагранжа, можно записать

$$F(x) = F(x) - F(p) = F'(\xi)(x-p) = \\ = \Big(f'(\xi) - f'(p)\Big)(x-p) = f''(\eta)(\xi - p)(x-p) > 0$$

Аналогичным образом приращение первой производной в одной и во второй точке можно заменить через вторую производную в третьей точке η, т. е. заменить $f'(\xi) - f'(p)$ на $f''(\eta)(\xi - p)$.

Расположение точки η изображено на (Рис. 16.14). Пусть точка x левее, чем точка p, тогда точка ξ между ними.

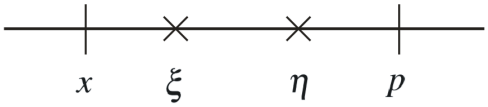


Рис. 16.14. Расположение точек в случае $x < p$

Итак, рассмотрели случай, когда $x < p$. Получили вторую производную в точке η, расположенной между ξ и p, а также два сомножителя отрицательных знаков. По условию теоремы $f''(\eta) > 0$

Доказали, что график функции лежит строго выше графика касательной к этой функции. Поэтому точка c будет лежать левее, чем x_2 точка пересечения графика касательной с осью OX. Доказали, что x_2 левее x_1, но правее c.

Теперь, если взять произвольный набор x_{k-1} и x_k, то доказали свойство итерационной последовательности Ньютона.

■

Итерационная последовательность обладает свойствами: $x_k < x_{k-1}$ и $x_k > c$, иначе говоря, это монотонная ограниченная последовательность. Следовательно, она сходится. Можно доказать, что сходится к c, т. е. $\lim\limits_{k\to+\infty} x_n = c$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Правило Лопиталя

Теорема Коши (формула Коши)

Теорема 16.7. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируемые на интервале* (a,b), *причём* $g'(x) \neq 0$ *на интервале* (a,b), *тогда* $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{16.3}$$

Это формула конечных приращений, она обобщает формулу Лагранжа.

Замечание 16.1. *Если* $g(x) = x$, *то формула Коши переходит в формулу Лагранжа.*

Доказательство.

Возьмём такую функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x)-g(a)\Big),$$

чтобы содержала функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы в точках a и b обращалась в нуль, т. е. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Также $g(b) - g(a) \neq 0$, если бы это было не так, то по теореме Лагранжа нашлась бы точка, в которой g' обращалась бы в нуль, а по условию $g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$: $F'(\xi) = 0$.

Также нужно сказать, что функция F дифференцируема во всех точках интервала (a,b).

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x) = 0$$

Доказали теорему Коши. ■

Теорема 16.8. *Теорема Лопиталя.*
Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в некоторой окрестности* $\Omega(a)$, *бесконечно малые функции в точке* a, *т. е.* $f(x) = o(1)$, $g(x) = o(1)$, *при* $x \to a$, $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности* $\hat{\Omega}(a)$, $g'(x) \neq 0$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = P$, *тогда* $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = P$.

Итак, обе функции непрерывны в окрестности точки a, *бесконечно малые в самой точке* a, *дифференцируемы в проколотой окрестности точки* a *(в точке не обязательно), существует предел частного отделения их производных в точке* a, *равный* P, *тогда существует предел частного отделения этих двух функций, который тоже равен* P.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Запишем теорему Коши

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a,x)$$

Теперь в этом равенстве, которое справедливо по теореме Коши, устремим к пределу $x \to a$, тогда, поскольку $\xi \in (a,x)$, $\xi \to a$, $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to P$. Следовательно, левая часть равенства $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to P$. Поскольку потребовали, чтобы функции были бесконечно малые в точке a, тогда $f(a)=0$ и $g(a)=0$.

Отсюда следует, что $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to P$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to P$. ■

Замечание 16.2. *Можно потребовать, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некоторой проколотой окрестности $\hat{\Omega}(a)$, можно доопределить $f(a)=0$ и $g(a)=0$, тогда эти функции станут непрерывными в целой окрестности.*

Теорема Лопиталя находит широчайшее применение при вычислении пределов. Сформулируем теоремы, расширяющие применение теоремы Лопиталя.

Теорема 16.9. *Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, а также $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = P$, $g'(x) \neq 0$, тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = P$.*

Итак, можно применять правило Лопиталя для вычисления предела в бесконечно удалённой точке.

Теорема 16.10. *Самостоятельно сформулируйте теорему Лопиталя для случая $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, $x \to a$.*

Можно обобщить на случай, когда $f(x)$ и $g(x)$ не являются бесконечно малыми, а обе являются бесконечно большими.

Теорема 16.11. *Самостоятельно сформулируйте теорему Лопиталя для случая $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$.*

Пример 16.1.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}, \qquad \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-3)}$$

В данном примере предел не существует. Такой предел по Лопиталю считать нельзя, поскольку числитель обращается в нуль, не является бесконечно малой функцией $x^2-6x+5 \neq o(1)$ *при* $x \to 3$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 17. Теорема Тейлора-Лагранжа

Теорема 17.1. *Если $\exists f^n f(a)$, то верна формула*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n); \quad x \to a$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-x)}(x) - f^{(n-1)}(a) - (x-a)f^{(n)}(a)}{n!(x-a)}$$

Правило Лопиталя применить нельзя, потому что существует $f^{(n-1)}(a)$.

Тогда $\exists f^{(n)}(a) \Rightarrow f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема в точке a

Запишем условие дифференцируемости:

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + (x-a)\left(f^{(n-1)}\right)'|_a + o(x-a)$$

$$\lim_{x\to a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{n!(x-a)} = 0$$

Теорема доказана. ■

Теорема Тейлора - Лагранжа

$$f(x) = P_n(x;a) + R_{n+1}(a)$$

Это тождество, в котором присутствует функция $f(x)$, многочлен Тейлора $P_n(x;a)$ и остаточный член $R_{n+1}(a)$, который определен как разность функции и ее многочлена.

$$f(x) - P_n(x;a) - R_{n+1}(a) = 0$$

Рассмотрим многочлен Тейлора между точками $(x;a)$

$$\widetilde{\Psi}(t) = f(x) - P_n(x;t) - R_{n+1}(x;a)$$

$$\Psi(a) = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рис. 17.1. Многочлен Тейлора с центром в точке t

$$\Psi(t) = f(x) - P - n(x;t) - g(t)R_{n+1}(x;a)$$
$$g(a) = 1; \quad g(x) = 0$$

Пусть $g(t)$ непрерывна на отрезке $[a;x]$, дифференцируема на интервале $(a;x)$ и выполнены условия $g(a) = 1; \quad g(x) = 0$.

$$\Rightarrow \exists \xi : \Psi'_t(\xi) = 0$$
$$\Psi'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}t) - g'(t)R_{n+1}(x,a)$$

Теорема 17.2. *Пусть $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на интервале $(a-\delta, x+\delta)$*

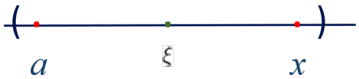


Рис. 17.2. Многочлен Тейлора с центром в точке ξ на заданном интервале

Пусть $g(t)$ непрерывна на отрезке $[a;x]$, дифференцируема на интервале (a,x) и $g(a) = 1; \quad g(x) = 0$.

Тогда

$$\exists \xi \in (a,x) : R_{n+1}(x;a) = -\frac{1}{g'(\xi)} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Определение 17.1.

$$g(t) = \frac{x-t}{x-a}, \quad g'(t) = -\frac{1}{x-a}$$
$$R_{n+1}(x;a) = \frac{(x-a)(x-\xi^n)}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Теорема 17.3. *Теорема Тейлора-Коши*

$$R_{n+1}(x;a) = \frac{(x-a)(x-\xi^n)}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример 17.1. *Пусть $p > 0$ – заданное число.*

$$g(t) = \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^p$$

$$g'(t) = -p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-a)^p}$$

$$R_{n+1}(x;a) = \frac{(x-a)^p}{p(x-\xi)^{p-1}} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Теорема 17.4. *Общая форма остаточного члена*

Пусть $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в $\Omega(a)$, $\quad x \in \Omega(a)$.

Тогда

$$\exists \xi \in (a;x) : f(x) = P_n(x,a) + R_{(n+1)}(x,a)$$

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n1p}\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p f'^{(n+1)}(\xi)$$

Теорема 17.5. *Теорема Тейлора-Лагранжа*

$$p = n+1$$

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1!)} f'^{(n+1)(\xi)}$$

Пример 17.2. *Пусть $f(x = e^x)$, пусть $a = 0$, тогда*

$$\forall n \geqslant 1 f^{(n)}(a) = 1$$

$$P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 1$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e_\xi$$

$$|R_{n+1}| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x, \quad 0 < \xi < x$$

Если $x = 2$ нужно оценить e^2 с точностью $10 : -3 \quad n = ?$.

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} e^2 < 10^-3$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$2^{n+1} < 10^{-4}(n+1)!$$

Если $n = 3$, *то*

$$16 \bigvee \frac{24}{10000}$$

$$16 > \frac{24}{10000} \quad 10000 \cdot 2 \bigvee 3$$

Если $n = 4$, *то*

$$1000 \cdot 4 \bigvee 15$$

Если $n = 5$, *то*

$$1000 \cdot 8 \bigvee 15 \cdot 6$$

Если $n = 6$, *то*

$$1000 \cdot 8 \bigvee 15 \cdot 3 \cdot 7$$

Если $n = 7$, *то*

$$1000 \cdot 16 \bigvee 15 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$$

Если $n = 7$, *то*

$$1000 \cdot 16 \bigvee 15 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8$$

Нужное неравенство получится через три шага, при $n = 10$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 18. График функции одной переменной

Пример 18.1. *По определению если функция $f(x)$ имеет нужное число производных, то*

$$f(x) = P_n(x,x_0) + R_{n+1}(x,x_0)$$

$$f(x) - P_n(x,x_0) - R_{n+1}(x,x_0) = 0$$

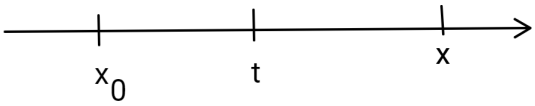


Рис. 18.1. Точки $x_,x_0,t$

$$f(x) - P_n(x,t) - R_{n+1}(x,x_0)$$

$$\psi(t) = f(x) - P_n(x,t) - g(t)R_{n+1}(x,x_0)$$

$$\psi(x) = f(x) - P_n(x,x)g(x)R_{n+1}(x,x_0)$$

$$\Rightarrow g(x) = 0$$

$$\psi(x_0) = f(x) - P_n(x,x_0) - g(x_0)R_{n+1}(x,x_0)$$

$$g(x_0 = 1)$$

Выполняются условия теоремы Ролля:

$$\xi \in (x_0,x) : \psi(\xi)' = 0$$

$$-\frac{dP_N}{dt}(x,t)\bigg|_{t=\xi} - g'(\xi)R_{n+1}(x,x_0) = 0$$

$$\frac{dP_N}{dt}(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n'}f^{(n+1)}(t)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

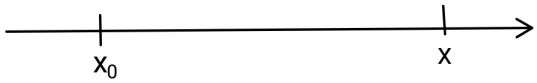


Рис. 18.2. x, x_0

Остаточный член в интегральной форме

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$$
$$(f(x) - f(x_0)) = \int_{x_0}^{x} (t)(dt)$$
$$f(x_0) = P_0(x, x_0)$$
$$\int_{x_0}^{x} (t)(dt) = R_1(x, x_0)$$
$$n = 0$$

Теорема 18.1. *Пусть $f'(t)$ непрерывна на $[x_0, x]$, тогда $R_1(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} (t)(dt)$*

$$f(x) = f(x_0) + f'(t) \cdot t \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} t \cdot f''(t) dt$$

$$f'(t) \cdot t \Big|_{x_0}^{x} = f'(x) \cdot x0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Доказательство.

Возьмем $x_0 = 0$. Тогда

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(x) - \int_0 xt f''(t) dt$$

$$f(0) = f(x) - x f'(x) + \int_0 xt f''(t) dt$$

$$x - 0 = \Delta x$$
$$f(0) = f(x) + (-\Delta x) \cdot f'(x) + \int_0 xt f''(t) dt$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

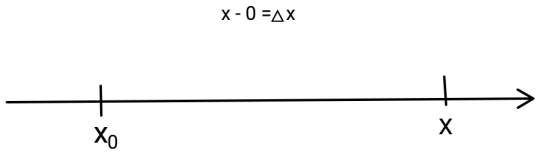


Рис. 18.3. $0,x$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0} xf'(t)dt$$

$$dt - -d_t(x-t)$$

$$f(x_0) - \int_{x_0} xf'(t) \cdot d(x-t)$$

$$f(x_0) - f'(t) \cdot (x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0} x(x-t)f''(t)dt$$

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \int_{x_o} x(x-t)f''(t)dt$$

$$f(x_0) + f'(x_0) = P_1(x,x_0)$$

$$\int_{x_0} x(x-t)f''(t)dt = R_2$$

$$= \cdots = P_n(x;x_0) + \int_{x_0} x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

■

Теорема 18.2. *Если $f(n+1)$ непрерывна на $[x_0,x]$, то верна формула*

$$\int_{x_0} x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = R_{n+1}$$

График функции одной переменной

Монотонность и локальный экстремум

Определение 18.1. *$f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если в окрестности точки $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$, а если $x < x_0$ и $f(x) < f(x_0)$*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

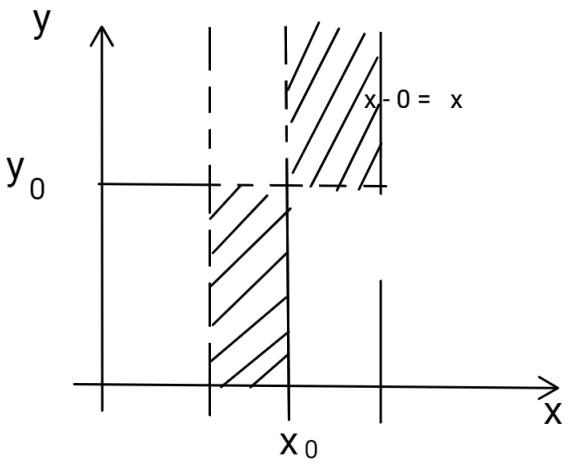


Рис. 18.4. Возрастающая функция

Определение 18.2. *$f(x)$ называется возрастающей на X, если для любых x_1, x_2 лежащих на прмежутке X верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ и $f(x_1) \leqslant f(x_2)$*

Теорема 18.3. *Если $f(x)$ возрастает на промежутке X, то $f(x)$ возрастает в каждой точке X.*

Теорема 18.4. *Если $f(x)$ возрастает в каждой точке интервала (a,b), то $f(x)$ возрастает на интервале (a,b).*

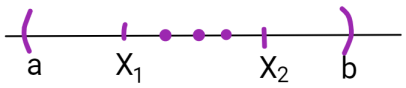


Рис. 18.5. Интервал (a,b) с заданными точками – открытое покрытие множества

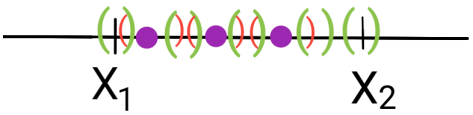


Рис. 18.6. Разбиение интервала (X_1, X_2)

Теорема 18.5. *Необходимое и достаточное условия монотонности.*

Дифференцируемая $f(x)$ является неубывающей на $[a,b]$, в том и только в том случае, если $f'(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Теорема 18.6. *Если $f'(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ не убывает на $[a,b]$.*

Теорема 18.7. *Если $f'(x) > 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ возрастает на $[a,b]$.*

Теорема 18.8. *Если $f(x)$ имеет производную и $f(x)$ не убывает на $[a,b]$, то $f'(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.*

Теорема 18.9. *Если дифференцируемая $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, то $f'(x) \geqslant 0$.*

Все указанные теоремы описывают понятие монотонности и исследование знака производной функции.

Определение 18.3. *Точка x_0 называется точкой локального максимума $F(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, если найдется $\delta > 0$, что $\forall x \in \hat{\Omega}_\delta(x_0)$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$.*

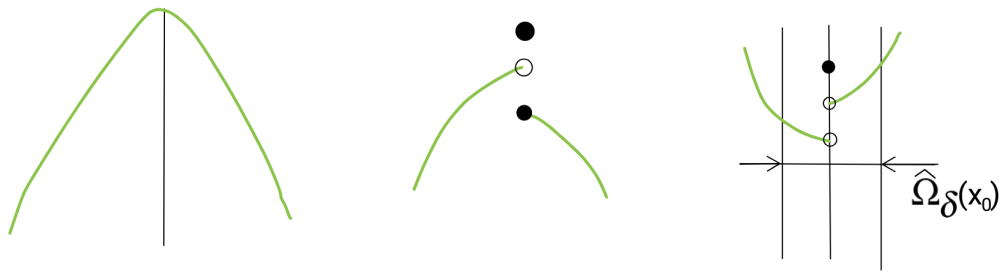


Рис. 18.7. Точки локального максимума

Теорема 18.10. *Достаточные условия локального максимума монотонной функции.*

Если $f(x)$ возрастает на $(a-\delta, a]$, $f(x)$ убывает на $[a, a-\delta), \delta > 0$, то точка $x = a$ есть точка локального максимума.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 18.11. *Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, дифференцируема в $\hat{\Omega}(a)$ и $f'(x.0)$ в $\hat{\Omega}(a)$ при $x < a$, $f'(x) < 0$ в $\hat{\Omega}(a)$ при $x > a$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума.*

Это достаточные условия локального максимума дифференцируемой функции.

Замечание 18.1. Не требуется существование $f'(a)$

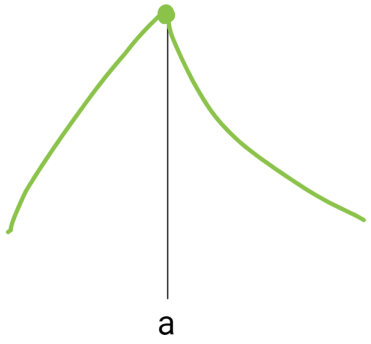


Рис. 18.8. Локальный максимум в точке a, функция непрерывна

Замечание 18.2. Непрерывность существенна. Если непрерывность отменить, теорема будет неверна.

Пример: $f(x) = \dfrac{|1|}{x}$

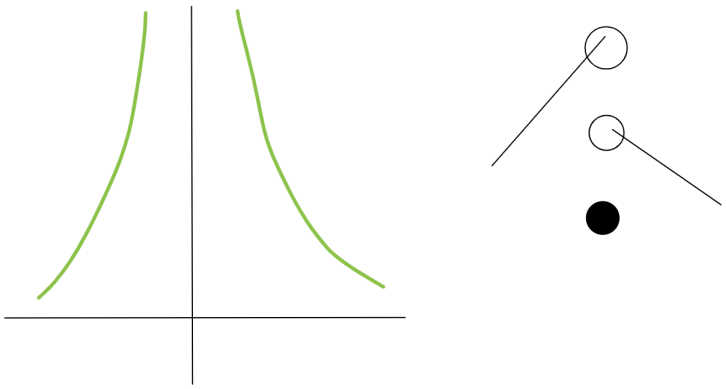


Рис. 18.9. Функция не непрерывна

Доказательство.

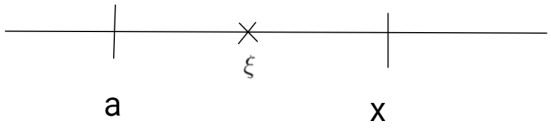


Рис. 18.10. Доказательство теоремы

Доказательством теоремы будет рисунок:

По теореме Лагранжа $f(x) - f(a) = (x-a)\cdot(\xi)$ ■

Теорема 18.12. *Достаточное условия локального максимума дважды дифференцируемой функции.*

Если $f'(a) = 0, f''(a) < 0$, то точка $x = a$ есть точка локального максимума.

Из того, что $f''(a) < 0$, вытекает, что $f'(x)$ является убывающей в точке $x = a$. Следовательно, $\exists\delta > 0 : f'(x) > 0$ на $(a-\delta, a)$ и что $f'(x) < 0$ на $(a, a+\delta)$.

Замечание 18.3.

$$\exists f''(a) \Rightarrow$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o(x-a)^2$$
$$f(x) - f(a) = (x-a)^2\left(\frac{f''}{2} + o(1)\right)$$
$$\Rightarrow \exists\delta > 0 : f(x) - f(a) < 0 \qquad \hat{\Omega}_\delta(a)$$

Теорема 18.13. *Если $f'(a) = 0, f''(a) = 0, f'''(a) = 0, f^{(iv)}(a) < 0$, то точка $x = a$ является точкой локального максимума.*

Замечание 18.4. Если $f'(a) = 0, f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$, то точка на является точкой локального максимума.

Теорема 18.14. *Если $f'''(a) \neq 0$, то точка $x = a$ не является точкой локального экстремума.*

Определение 18.4. *Точкой возможного экстремума $f(x)$ является точка $x = a$ такая, что или $f'(a) = 0$, или $f'(a)$ не существует.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Направление выпуклости и точки перегиба

Выпуклость и касательная

Определение 18.5. *График дифференцируемой на интервале (a,b) функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на этом интервале, если график этой функции лежит не ниже любой касательной, построенной в точке этого интервала.*

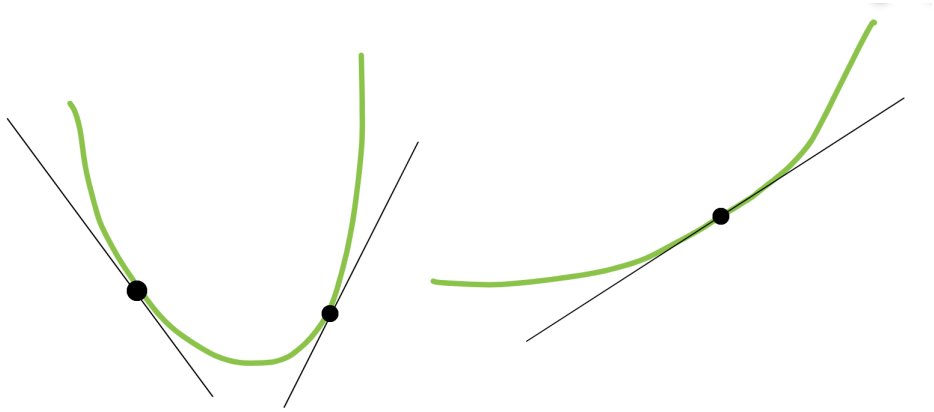


Рис. 18.11. Графики не ниже любой касательной

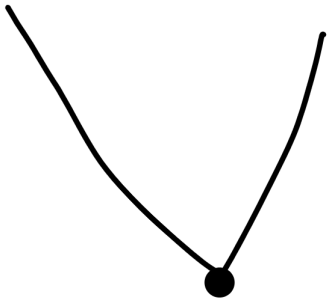


Рис. 18.12. В точке перегиба нет производной, график не является выпуклым

Теорема 18.15. *Достаточное условие выпуклости дважды дифференцируемой функции. Если $f''(x) > 0$ на интервале (a,b), то график $f(x)$ будет выпуклым вниз на интервале (a,b).*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство.

Сравним $f(x)$ и ее касательную $f(x_0)+f'(x0)(x-x_0)$, проведенную в точке x_0.

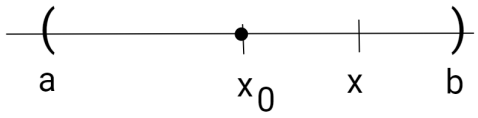


Рис. 18.13. Точки x, x_0 в интервале (a,b)

Первый подход

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0) + \frac{(x-x_0)2}{2}f''(x_0) + o(x-x_0)^2$$

$$f(x) - (f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0))$$

$$(x-x_0)^2\left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)\right)$$

Этого недостаточно для доказательства того, что график функции будет лежать выше графика касательной на всем интервале (a,b). Нужен **второй подход**.

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + R_2$$

$$R_2 = \frac{(x-x_0)^2}{2!f(\xi)}$$

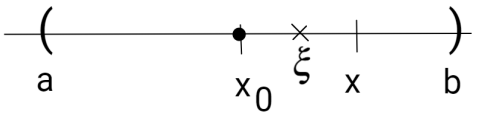


Рис. 18.14. Точки x, x_0, ξ в интервале (a,b)

Из этого вытекает, что $f''(x) > 0$ есть достаточное условие строгой выпуклости вниз. $f''(x) \geqslant 0$ есть достаточное условие выпуклости вниз. ■

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Точки перегиба графика функции

Определение 18.6. *Пусть $f(x)$ определена в $\Omega(x_0)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика $f(x)$, если выполнены два условия:*

1) *график $f(x)$ имеет касательную в этой точке (может быть вертикальную);*
2) *по каждую сторону от точки $(x_0, f(x_0))$ график имеет определенное определение выпуклости, и эти направления противоположны слева и справа.*

Определение 18.7. *Если существует касательная к графику в точке $(x_0, f(x_0))$ и направление выпуклости противоположны слева и справа от (x_0), то точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции.*

Замечание 18.5.

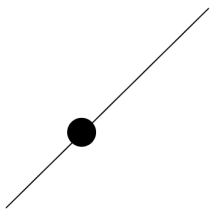


Рис. 18.15. Каждая точка линейной функции является точкой перегиба

Теорема 18.16. *Необходимое условие перигиба дважды дифференцируемой функции.*

Если точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$ и $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство.

Докажем это от противного.

Пусть выполнены все условия теоремы, $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x_0)$ непрерывная в точке x_0, $\exists \Delta > 0$, что $f''(x) > 0$ в $\Omega_\delta(x_0)$.

Следовательно, график $f(x)$ является выпуклым вниз в $\Omega_\delta(x_0)$. Это является противоречием, поскольку график является строго выпуклым вниз. ■

Лекция 19. Работа с графиками

Пример 19.1.

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Функция имеет три корня (1-го, 2-го и 3-го порядков). Она непрерывная, нечетная, имеет две точки локального экстремума.

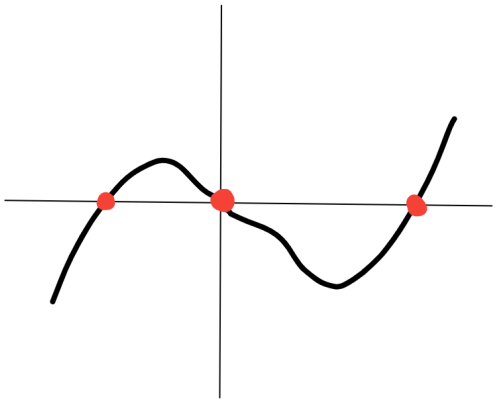


Рис. 19.1. График функции

Пример 19.2. *Построим график функции* $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

Разложим функцию в ряд Тейлора:

$$\frac{x}{x^2-4} = -\frac{x}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}}\right) = -\frac{x}{4}\left(1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{16}+o(x^4)\right)$$

$$f(x) = -\frac{x}{4} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Пример 19.3. *Построим график функции* $f(x) = \sqrt[3]{x}(4-x)$

Область определения функции - вся числовая ось, корни 0 *и* 4. *Пусть* $x \to +\infty$. *Тогда*

$$f(x) = x\sqrt[3]{x}\left(-1+\frac{4}{x}\right)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

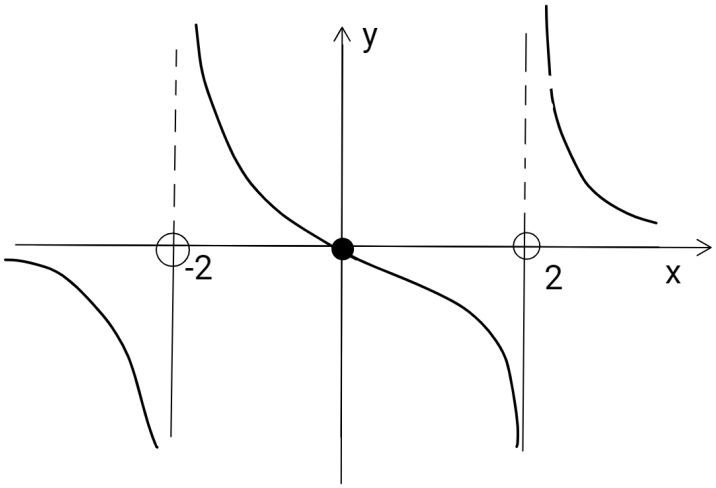


Рис. 19.2. Схема графика функции

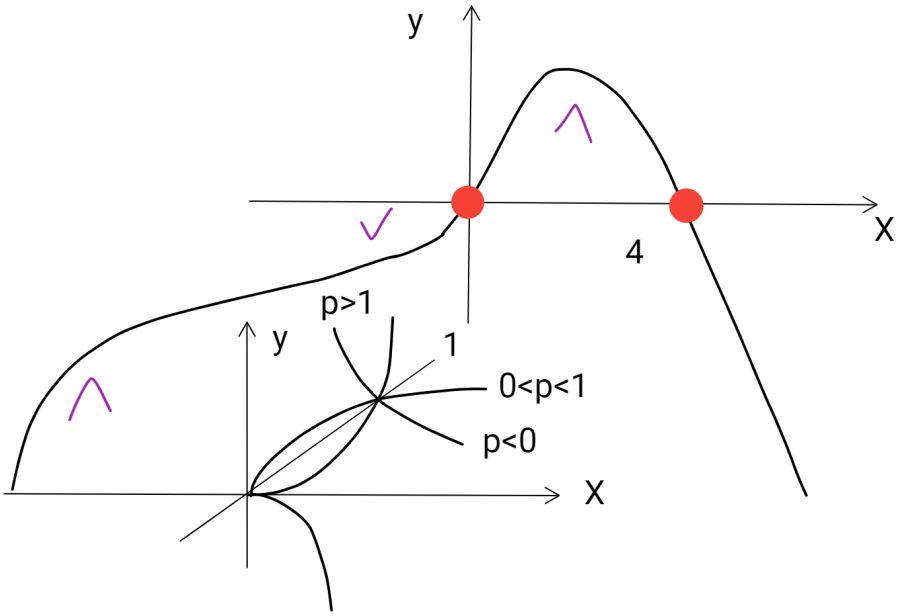


Рис. 19.3. Схема графика функции

Пример 19.4. *Функция* $\sqrt[3]{(x^2-4)(x-3)}$. *Построим ее график.*

Функция непрерывна, у нее три корня $-2; 2; 3$.

$$f(x)\sqrt[3]{9-4}\cdot\sqrt[3]{x-3}$$

Определим, как будет вести себя функция при бесконечно больших значениях x.

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

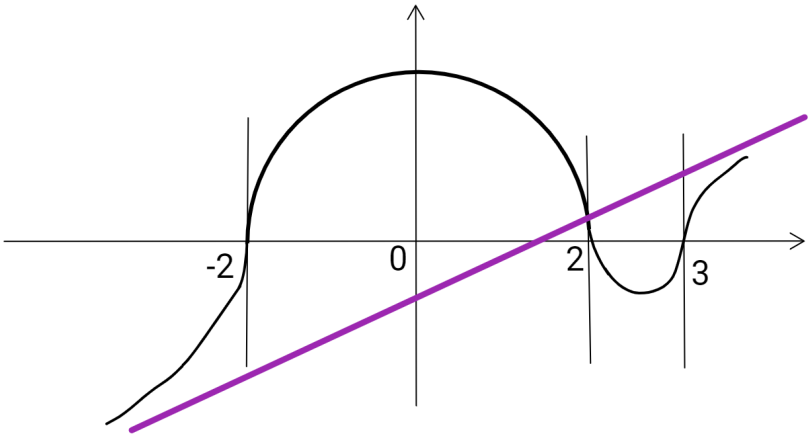


Рис. 19.4. Схема графика функции

$$(1+t)^p = 1 + pt + \frac{p(p-1)}{2}t^2 + o(t^2); t \to 0$$

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}t^2 + o(t^2); t \to 0$$

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)} = x\left(1 - -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{16}{x^4} + o(\frac{1}{x^4})\right) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x} - \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x - 1 - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right); \quad x \to \pm\infty$$

Слагаемое $x-1$ в этом выражении - это ***наклонная асимптота*** *(Рис. 19.4). На графике видим, что у функции два локальных экстремума, три точки перегиба.*

Пример 19.5. *Функция $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. График этой функции - гипербола, повернутая на* 45°

$$y^2 = x^2 + 1; \qquad y > 0; \qquad (y-x)(y+x) = 1$$

$$x \to 0; \qquad y = \sqrt{1+x^2}$$

$$x^2 = t$$

$$y = 1 + \frac{t}{2} + o(t) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

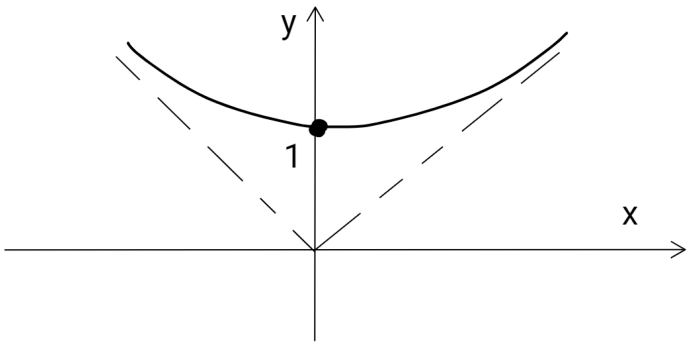


Рис. 19.5. При малых значениях x график похож на параболу

$$x \to +\infty; \qquad y = \sqrt{x^2+1}$$
$$y = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Видим, что у функции две несовпадающих асимптоты – левосторонняя и правосторонняя.

Пример 19.6. *Функция* $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}$. *Она четная, у нее есть точки разрыва. Приблизительная схема графика будет такой:*

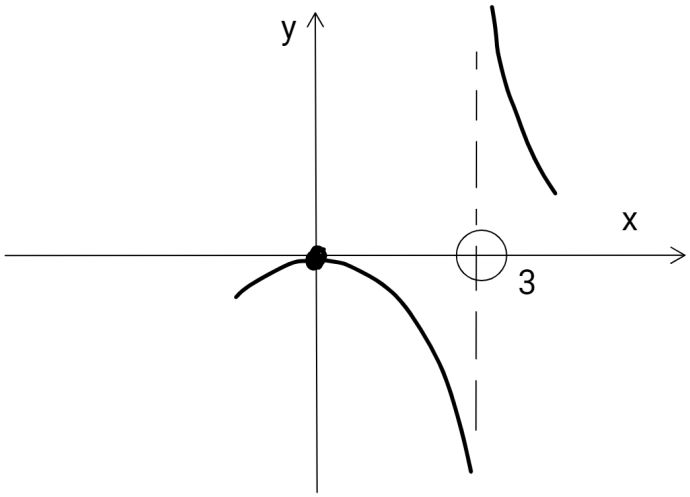


Рис. 19.6. Схема графика

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x(1-\frac{3}{x})}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}} = x\left(\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(1+t)^p = 1 + pt + \frac{p(p-1)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$p = -\frac{1}{3}$$

$$(1+t)^-\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}t + \frac{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}t^2 + o(t^2)$$

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x + 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Асимптота функции $x+1$, схема графика будет такой:

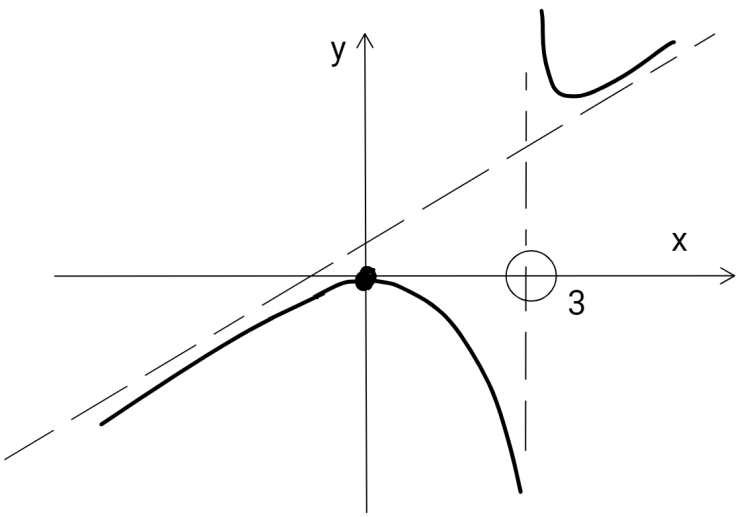


Рис. 19.7. Схема графика

График функции и ее производных будет таким:

Пример 19.7. *Степенная логарифмическая функция $f(x) = \ln(|x|)$.*

В точке 0 $f(x) = 0$, функция нечетная.

$$\lim_{x\to 0}$$

$$x\cdot\ln x = \lim_{x\to+\infty}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0}$$

Определим, под каким углом график выходит из начала координат:

Первый способ

$$x > 0$$

$$y = \ln x$$

$$\frac{y}{x} = \ln x$$

$\frac{y}{x}$ *– это* $\tan$ *угла, под которым точка графика видна из начала координат.*

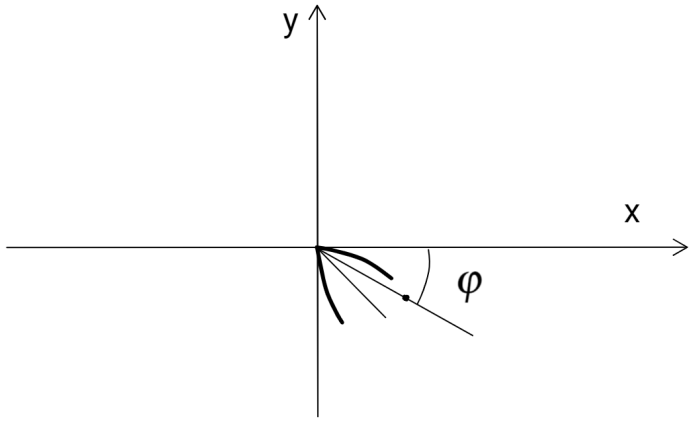


Рис. 19.8. Схема

Второй способ

$$y' = \ln x + 1; x \to +0 \Rightarrow y' \to -\infty$$

Значит, касательная будет стремиться к вертикальному положению.

У функции три корня – $0; 1; -1$*, функция нечетная.*

$$y'' = \frac{1}{x}$$

У функции два локальных экстремума, точка перегиба с вертикальной касательной.

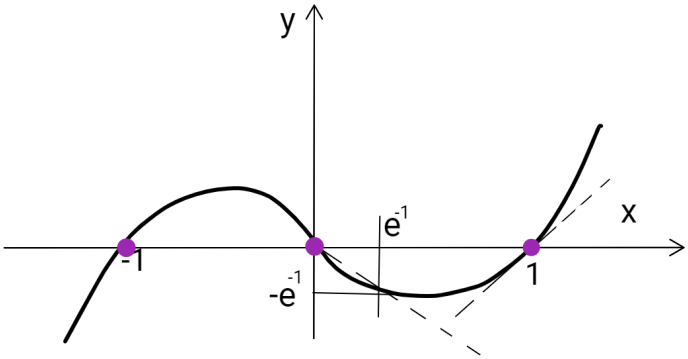


Рис. 19.9. График функции

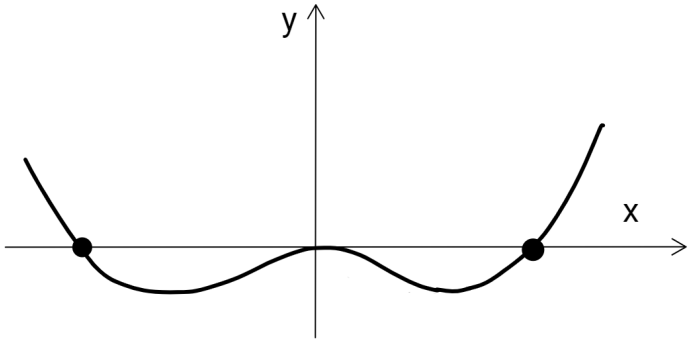


Рис. 19.10. Схема графика

Пример 19.8. *Функция* $f(x) = x^2 \ln(|x|)$. *Функция четная.*

У функции два перегиба и три локальных экстремума.

Пример 19.9. *Функция* $f(x) = x^3 \ln(|x|)^2$. *Функция четная. У функции четыре экстремума, пять точек перегиба.*

Точки перегиба

Определение 19.1. *Точка* $x = x_0$ *называется точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$, *если*

1) *в точке* $x = x_0$ *есть касательная (допустима вертикальная).*

2) *в этой точке меняется направление выпуклости графика функции* $y = f(x)$, *т.е. найдется такая окрестность точки* $x = x_0$, *в которой справа и слева от* x_0 *направления выпуклости противоположны.*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 19.1. ***(Кудрявцев, необходимое условие перегиба).***

Если $f''(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$ и в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство.

От противного. Пусть $f''(x) > 0$. Тогда по теореме об устойчивости непрерывной функции $\exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega_\delta(x_0)$ верно $f''(x) > 0$, поэтому $f(x)$ направлена выпуклостью вниз в окрестности точки x_0, а это противоречит определению точки перегиба. ■

Теорема 19.2. ***Первое достаточное условие перегиба.***

Если $'(x_0), f''(x) > 0$ при $x \in (x_0,\ x_0 + \delta), (x_0, f(x0))$ график функции $f(x)$ имеет перегиб.

Асимптоты

Вертикальная асимптота

Определение 19.2. *Прямая $x = x_0$ называется вертикальной правосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to x_0+0} = +\infty$ или $y = f(x)$, если $\lim_{x\to x_0+0} = -\infty$*

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной левосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x\to x_0-0} = +\infty$ или $y = f(x)$, если $\lim_{x\to x_0-0} = -\infty$

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной двусторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполняются оба условия.

Наклонная асимптота

Определение 19.3. *Прямая $y = kx + b$ называется наклонной правосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$$

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной левосторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 19.3. *Необходимое и достаточное условие наклонной асимптоты.*

График функции $y = f(x)$ имеет наклонную правостороннюю асимптоту тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 20. Дополнения и замечания к курсу математического анализа

Другие определения выпуклости

Определение через опорную прямую

Определение 20.1. *Прямая* $y = g(x), g(x) = m + nx$, *называется опорной снизу в точке* $x = c \in (a,b)$ *для функции* $y = f(x)$ *на интервале* (a,b), *если* $f(c) = g(c)$ *и* $\forall x \in (a,b) : x \neq c$ *верно* $f(x) \geqslant g(x)$

Пример 20.1. *Если в точке* C *функции* $f(x)$ $f(c) = g(c)$ *, функция в точке* C *должна совпадать с прямой:*

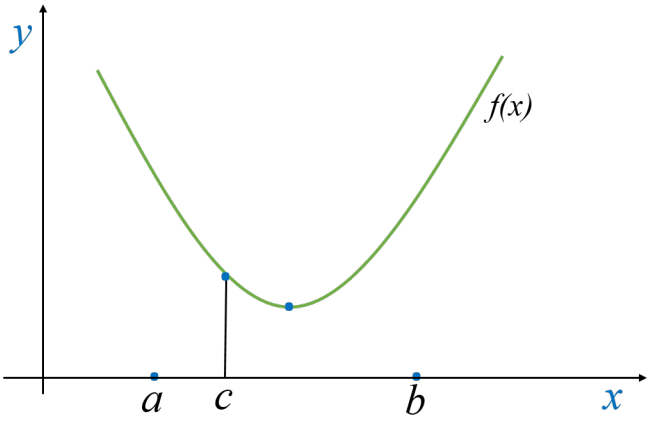


Рис. 20.1. $f(c) = g(c)$

Пример 20.2. *Если* $f(x) \geqslant g(x)$ *, то* $g(x)$ *в точке* C *будет касательной:*

По определению Ильина-Позняка касательная для выпуклой вниз функции будет опорной снизу для графика этой функции.

В точке C_2 нет касательной:

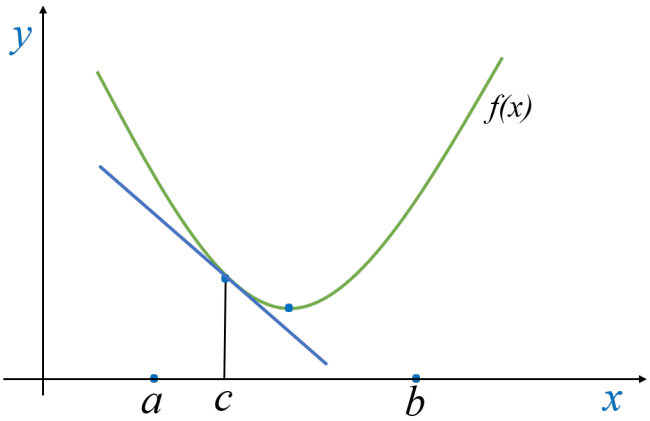


Рис. 20.2. $f(x) \geqslant g(x)$

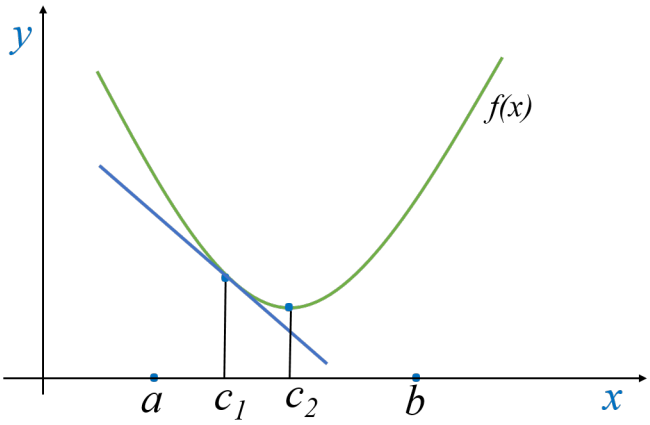


Рис. 20.3. Нет касательной в C_2

2004.png

Рис. 20.4. Касательные в точке C_2

График при этом будет выпуклым вниз, потому что можно провести другие касательные:

Между прямыми $g_1(x)$ и $g_2(x)$ любая третья будет опорной – у функций такого типа их может быть бесконечно много.

Парабола - выпуклая вниз функция. Касательная к ней в любой точке является опорной снизу

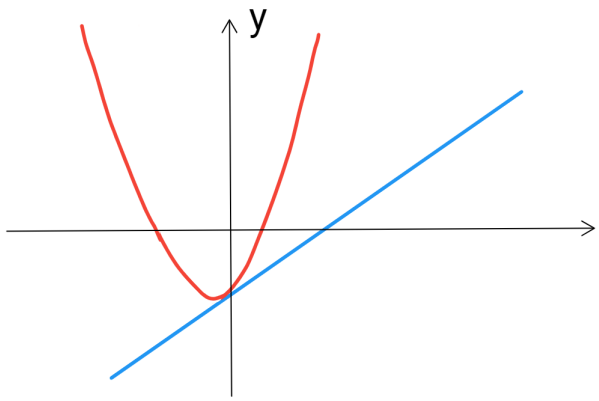


Рис. 20.5. График является строго выпуклым вниз

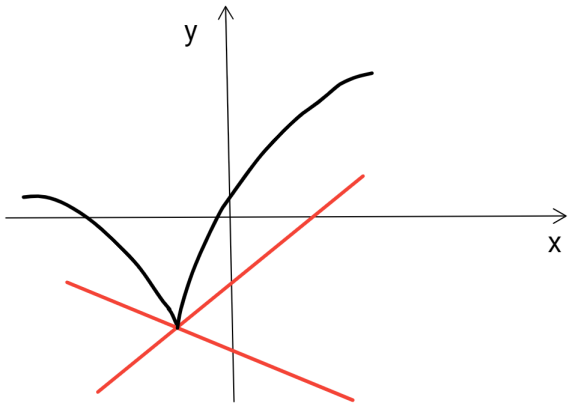


Рис. 20.6. Две опорных прямых снизу, график не является выпуклым вниз

Определение 20.2. *График функции $f(x)$ называется выпуклым вниз на (a,b) , если $\forall c \in (a,b)$ существует опорная прямая снизу в точке $x = c$*

Это более широкое определение, чем данное ранее. Тело будет выпуклым в случае, если взяв любую точку поверхности границы тела, можно за эту точку прижать его к плоскости.

Определение 20.3. *Отрезок прямой $y = g(x)$, $g(x) = mx + n$, $x \in [x_1, x_2]$, называется хордой графика $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$, если $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$*

Уравнение хорды имеет вид

$$g(x) = \frac{(x - x_1)f(x_2) + (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Хорда на отрезке $[x_1, x_2]$ – это прямая линия, которая в крайних точках заданного отрезка совпадает с графиком функции.

Определение функции, выпуклой вниз, через хорду

Пример 20.3. *Выпуклая вниз функция на $[a,b]$*

Функция на отрезке $[a,b]$ называется выпуклой вниз, если для каждой пары точек x_1, x_2, лежащих на этом отрезке, график функции лежит ниже графика хорды, кроме крайних точек.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

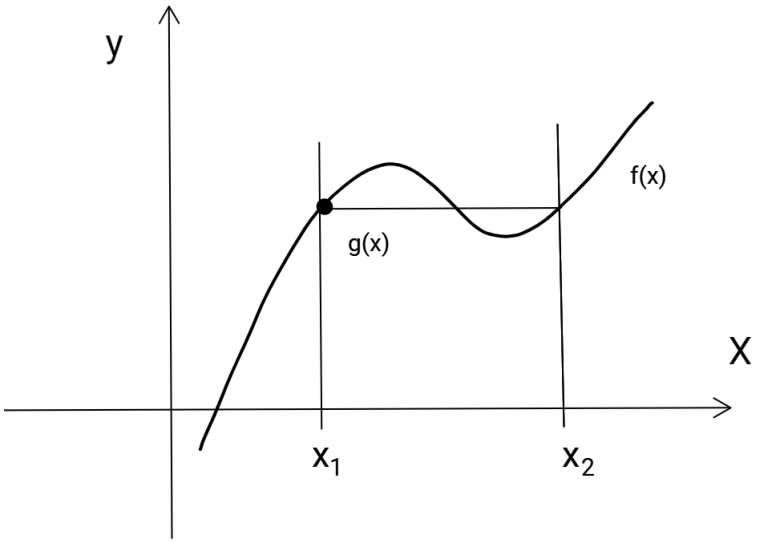


Рис. 20.7. Хорда графика $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$

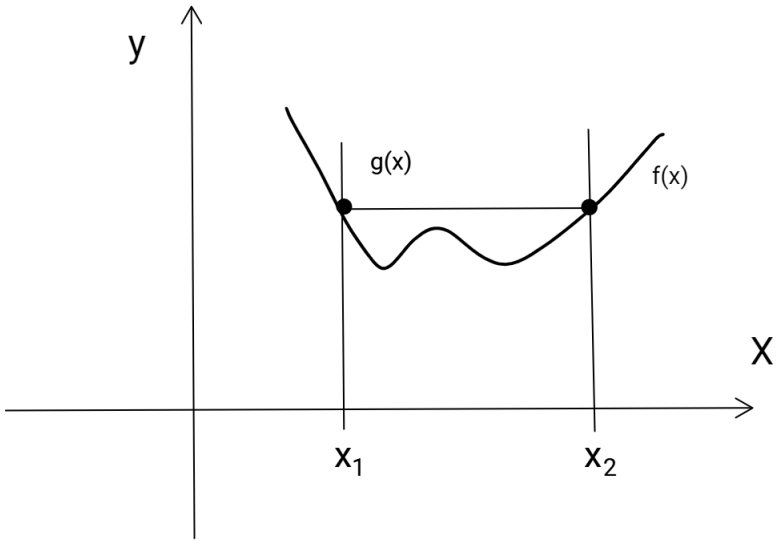


Рис. 20.8. Хорда графика $y = f(x)$ на $[x_1, x_2]$

Определение 20.4. *Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ график функции лежит не ниже графика хорды при $x \in (x_1, x_2)$.*

По определению Ильина-Поздняка график не является выпуклым вниз. По определению через опорную снизу график является выпуклым вниз. По определению через хорду график является нестрого выпуклым вниз.

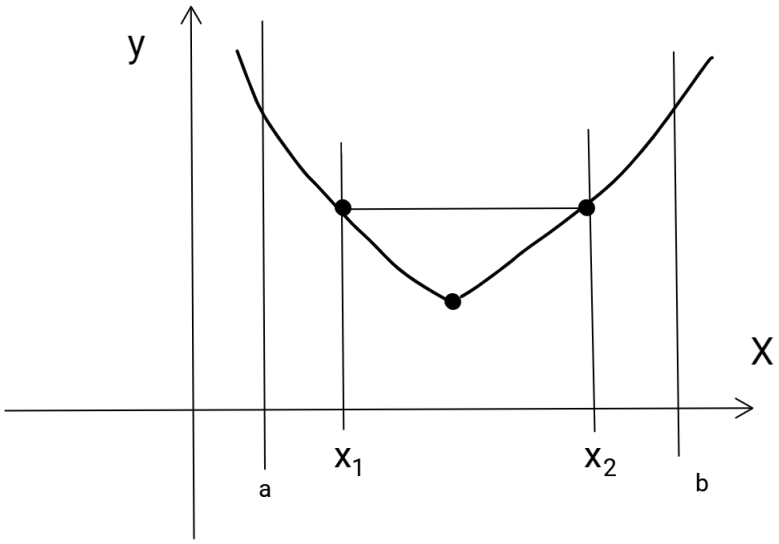


Рис. 20.9. График ниже хорды

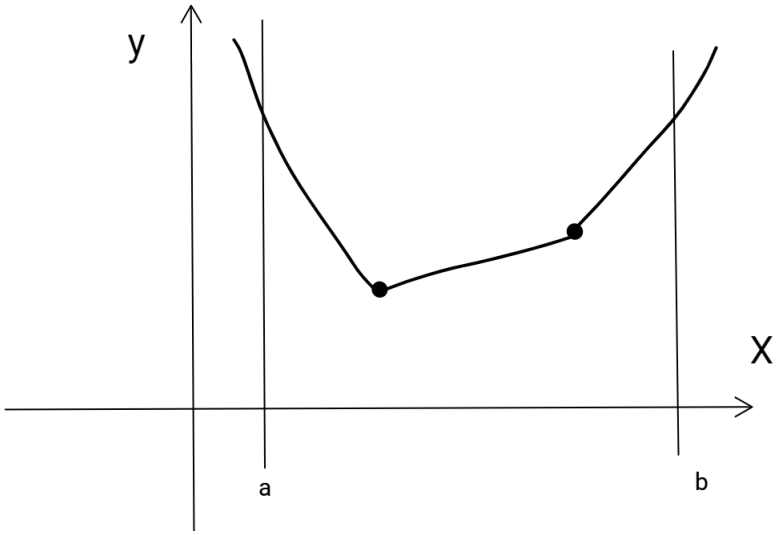


Рис. 20.10. Определение нестрогой выпуклости вниз

Достаточное условие выпуклости через хорду

Теорема 20.1. *Если $f''(x) \geqslant 0$ на (a,b), то $f(x)$ является выпуклой вниз (a,b) по определению хорды.*

Доказательство.

Пусть $x_1 \in (a,b),\ x_2 \in (a,b),\ x \in (x_1,x_2)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

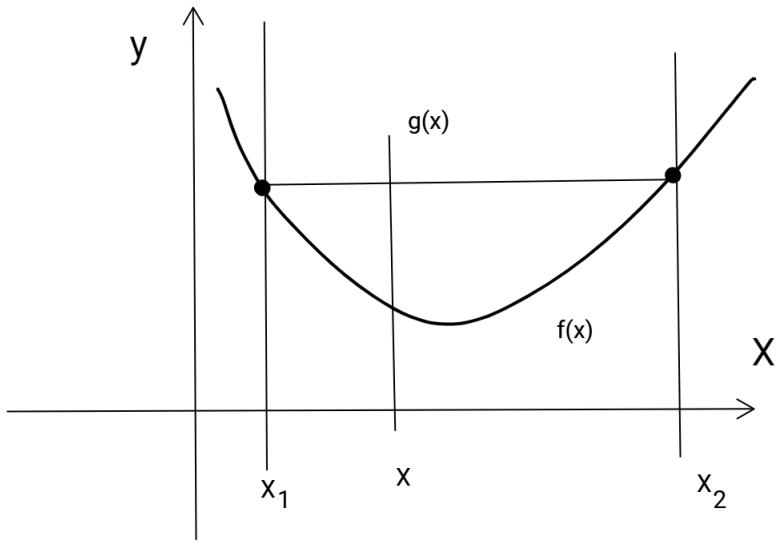


Рис. 20.11. X_1X_2 на интервале (a,b)

Проанализируем функцию и хорду.

Уравнение хорды имеет вид

$$g(x) = \frac{(x-x_1)f(x_2)+(x_2-x)f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Найдем разность между хордой и функцией. Нужно доказать, что она положительная.

$$g(x)-f(x) = \frac{(x-x_1)f(x_2)+(x_2-x)f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(x_2-x_1)f(x)}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{(x-x_1)f(x_2)+(x_2-x)f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(x_2-x+x-x_1)f(x)}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{(x-x_1)f(x_2)+(x_2-x)f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{(x_2-x)f(x)+(x-x_1)f(x)}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{(x-x_1)(f(x_2)-f(x))}{x_2-x_1} + \frac{(x_2-x)(f(x1)-f(x))}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)f'(\varepsilon)}{x_2-x_1} - \frac{(x_2-x)(x-x1)f'(\zeta)}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)f'(\varepsilon)-f'(\zeta))}{x_2-x_1}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

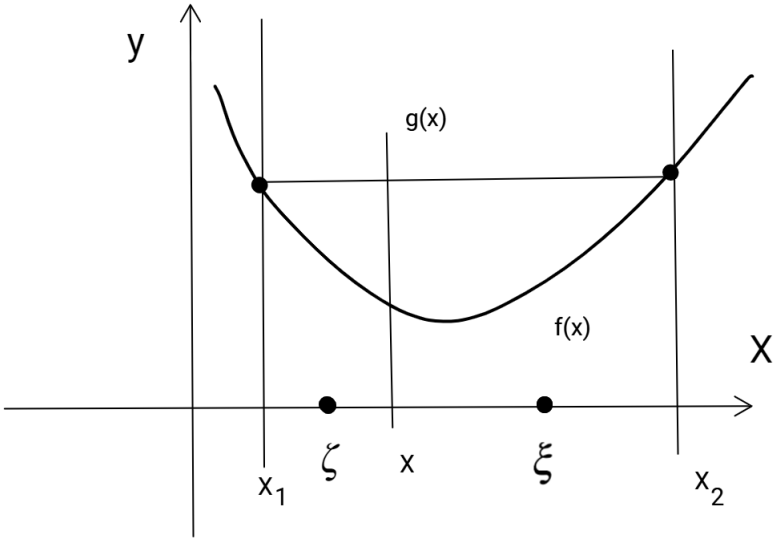


Рис. 20.12. Точки ξ и ζ

$$= \frac{(x-x_1)(x_2-x)(\varepsilon-\zeta)}{x_2-x_1} \geqslant 0$$

Теорема доказана. ■

Асимптота

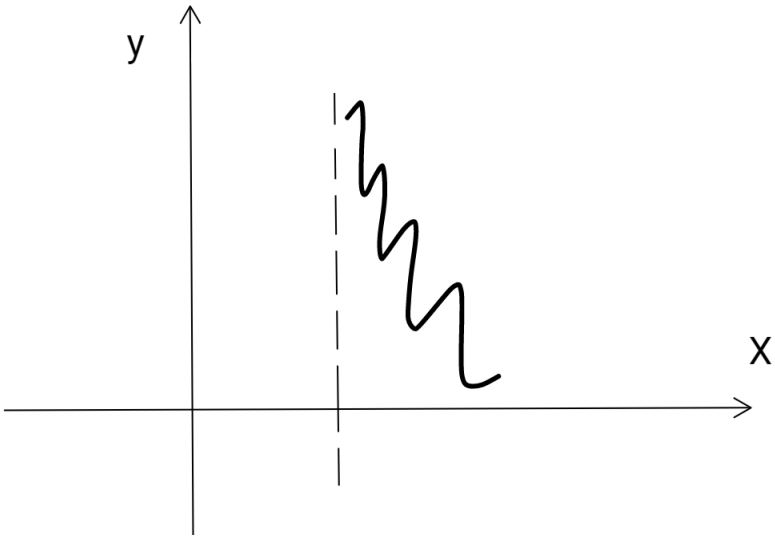


Рис. 20.13. Правой вертикальной асимптоты нет

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

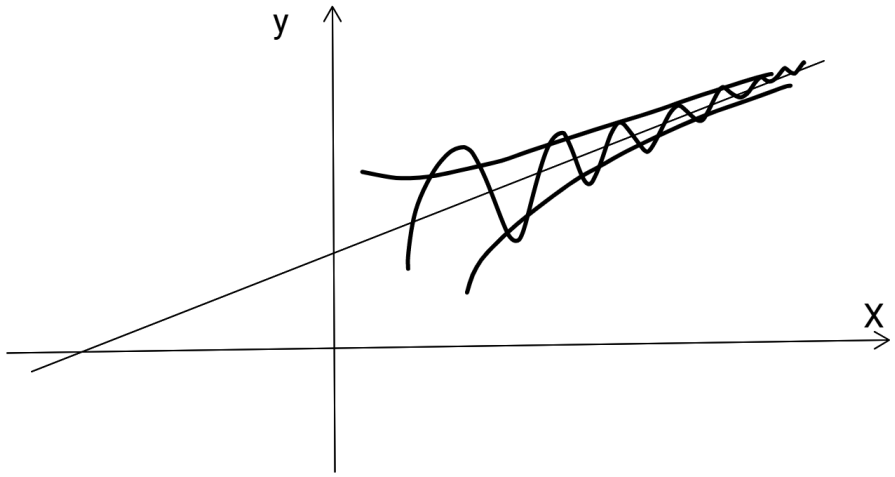


Рис. 20.14. Наклонная асимптота

Пример 20.4. *Пример функции со сложной областью определения:*

$$f(x) = x(1+\frac{1}{x})^x$$

Рассмотрим только вариант, когда $x > 0$.

При $x > 0$ *функция определена на всей положительной полуоси, является бесконечно большой положительной, стремится к* $+\infty$.

Пусть $x \to +\infty$ *Проанализируем выражение* $(1+\frac{1}{x})^x$; $x = \frac{1}{t}$ $t \to +0$

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = \rho^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$= \rho^{(\frac{1}{t})(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}$$

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = \rho^{1-\frac{t}{2}+o(t)} = \rho \cdot \rho^{\frac{t}{2}+o(t)}$$

$$= \rho(1-\frac{t}{2}+o(t))$$

$$(1+\frac{1}{x})^x = \rho(1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})), x \to +\infty$$

$$x(1+\frac{1}{x})^x = \rho x - \frac{\rho}{2} + o(1)$$

График функции изображен на (Рис. 20.15)

Пример 20.5. *Функция* $ff_n := f(x_n)$

Эта функция не определена только в точке $(0,0)$. *Корни –* $x = 3, x = 10$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

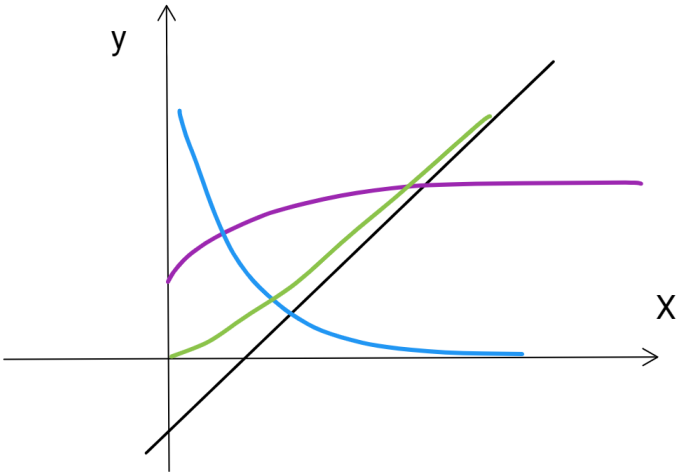


Рис. 20.15. График функции $ff_n := f(x_n)$

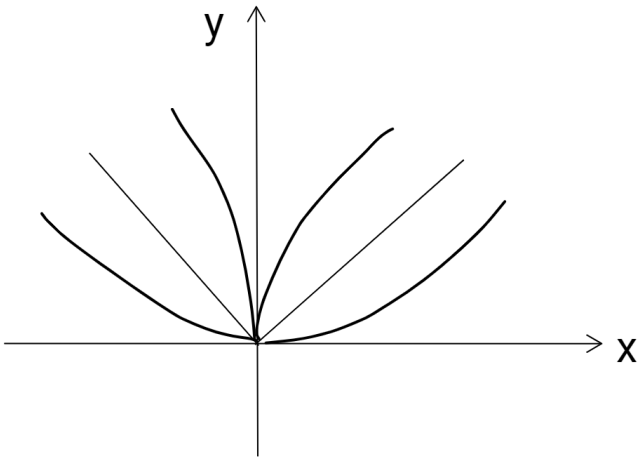


Рис. 20.16. График $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) := (x-10)\cdot\sqrt[3]{\frac{(x-3)^2}{x^2}}$$

Найдем наклонную асимптоту функции $ff_n := f(x_n)$.

Пусть $x \to +\infty$. *Тогда*

$$f(x) := (x-10)\cdot(1-\frac{3}{x})^{\frac{2}{3}}$$

Применим формулу Тейлора: $(1-\frac{3}{x})^{\frac{2}{3}}$ *– это* $(1+t)^p = 1 + pt + \frac{p(p-1)}{2}\cdot t^2 + o(t^2)$

$$p = \frac{2}{3}$$

$$(1+t)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{3})}{2}\cdot t^2 + o(t^2)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$= 1 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)$$

$$f(x) = (x-10)(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{x} - \frac{1}{9})\cdot\frac{9}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

$$= x - 12 + \frac{19}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Асимптоты на графике показаны на (Рис. 20.17) и (Рис. 20.18):

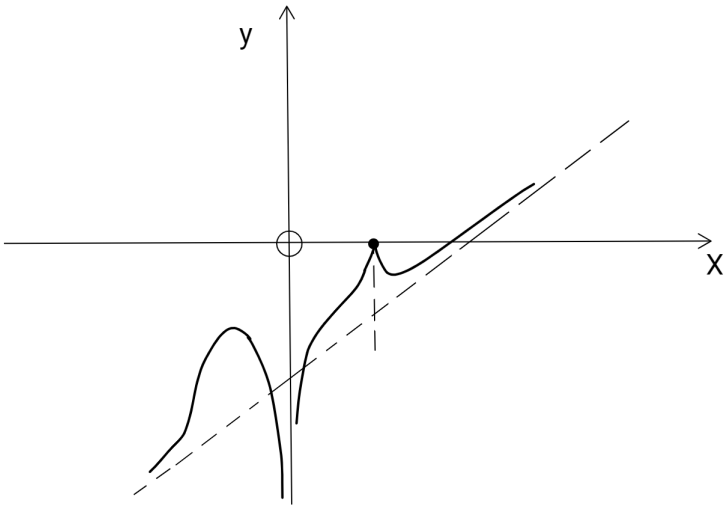


Рис. 20.17. Асимптота справа $ff_n := f(x_n)$

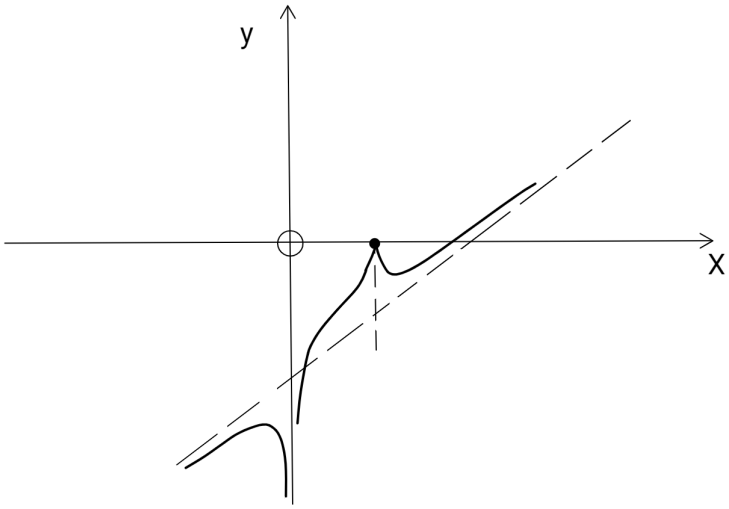


Рис. 20.18. Асимптота слева $ff_n := f(x_n)$

Дополнительные вопросы

Определенный интеграл. Разбиение, выборка, интегральные суммы

Пусть на $[a,b]$ задана ограниченная функция $f(x)$.

В каждой точке выборки посчитаем значение функции, результат отобразим на графике:

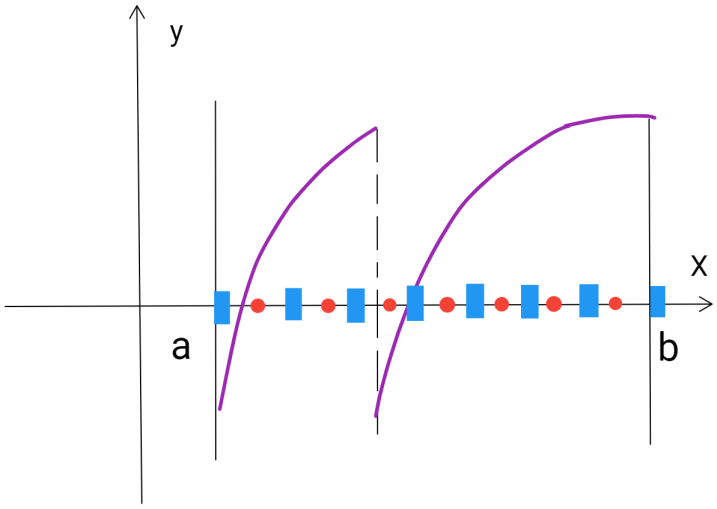


Рис. 20.19. Заданная функция, разбитая на сегменты с одной точкой выборки на каждом

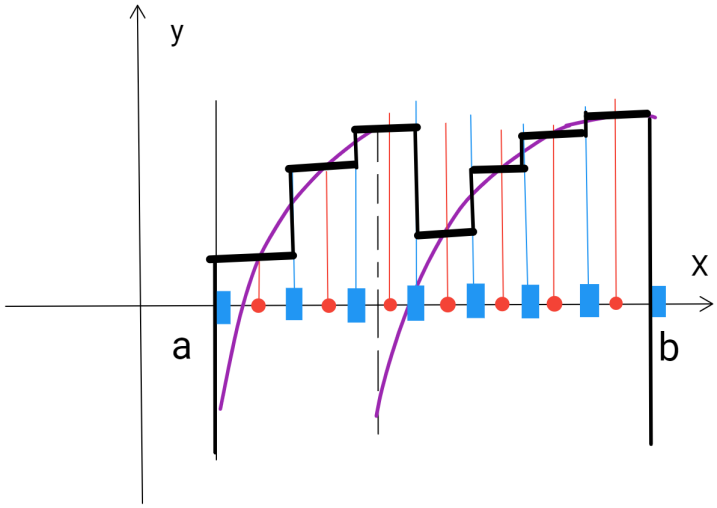


Рис. 20.20. Интегральная сумма

Разбиение - набор сегментов, которые определяются заданными точками.

Выборка - набор точек, каждая изкоторых лежит на своем элементе разбиения.

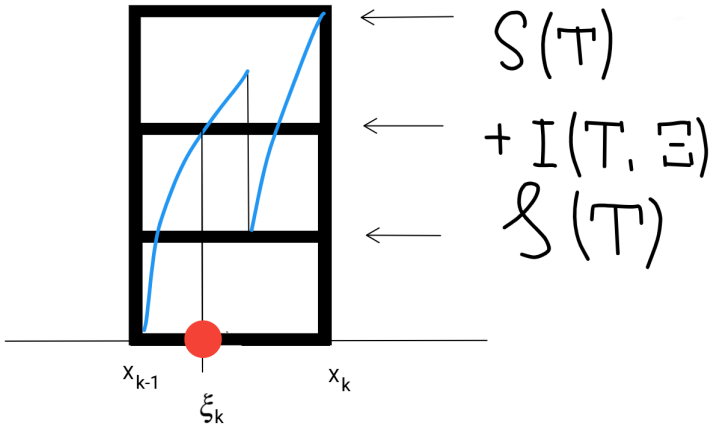
Интегральной суммой называется сумма площадей полученных прямоугольников с учетом знака.

Определение 20.5. *Интегральной суммой называется функция от разбиения и выборки*

$$I(T\Xi) = \sum_k f(\zeta_k)\Delta x_k$$

Верхние и нижние суммы

Пусть $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k-1,x_k]} f(x)$ и $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k-1,x_k]} f(x)$.



Определение 20.6.

Рис. 20.21. Суммы на графике

Средний прямоугольник – интегральная сумма, $I(T,\xi)$, посчитанная по разбиению и выборке.

Верхний прямоугольник – $S(T)$, верхняя сумма, которая зависит от разбиения и не зависит от выборки

Нижний прямоугольник – $\sigma(T)$, нижняя сумма, зависящая только от разбиения.

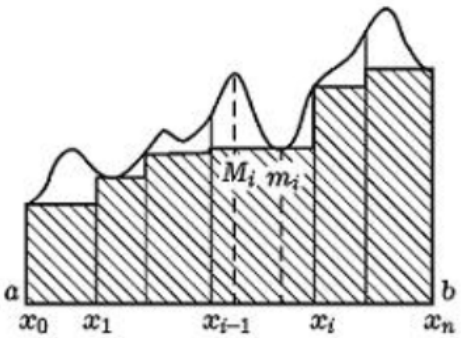


Рис. 20.22. Нижняя сумма Дарбу

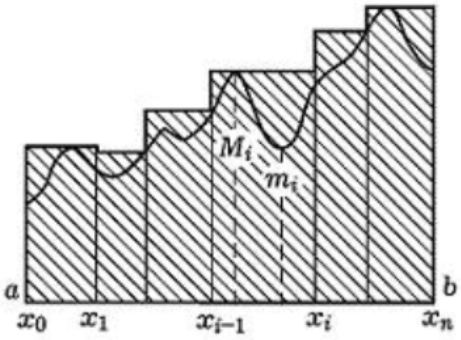


Рис. 20.23. Верхняя сумма Дарбу

Теоремы

Теорема 1. $\forall T$ верно $s(T) \leqslant S(T)$

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \geqslant 0$$

Теорема 2. $\forall T, \forall \xi(T)$ верно $S(T) \leqslant (T, \Xi) \leqslant S(T)$.

$$m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k[x_{k-1}, x_k]$$

$$m_k \Delta x_k \leqslant f(\xi_k)\Delta x \leqslant M_k \Delta x_k$$

$$\sum_{k-1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k-1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Теорема 3.

$$\forall T \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Xi'(T) : I(T, \Xi') - s(T) < \varepsilon$$

$$\forall T \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Xi''(T) : S(T) - I(T, \Xi'') < \varepsilon$$

Некоторые свойства определенного интеграла

Класс интегрируемой функции - это достаточное условие интегрируемости Римана. Их три – **непрерывность, монотонность, конечное число точек разрыва**.

Основные свойства:

$\int_a^b f(x)dx$ – Интеграл Римана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Определение 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема 1. $\int_a^b Cdx = C(b,a)$

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то

$f(x) \pm g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)dx) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Теорема 3. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ [a, b].

Теорема 4. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x) \cdot g(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Теорема 6. Если $[c,d] \supset [a,b]$ и $\exists \int_a^b f(x)dx$, то $\exists \int_c^d f(x)dx$

Оценки интегралов

Теорема 1. Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен, если он существует. Если интегрируемая $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые на $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

Теорема 3. Если непрерывная $f(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$ и $\exists t \in (ab) : f(t) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx$$

Теорема 4с. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$inf_{[a,b]}f(x) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant sup_{[a,b]}f(x)$$

Замечание. Средним значением интегрируемой функции $f(x)$ на $[a,b]$ является

$$\langle f \rangle_{[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Первая теорема о среднем

Теорема 6а. Если $f(x)$ интегрируема на $[ab]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a,b]$

(например, $m = inf_{[a,b]}f(x), M = sup_{[a,b]}f(x)$), то

$$\exists \mu \in [m,M] : \int a^b f(x)dx = \mu(a,b)$$

Теорема 6б (Теорема о непрерывности). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\exists c \in [a,b] : \int a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ