МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

НАЗАЙКИНСКИЙ
ВЛАДИМИР ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Назайкинский Владимир Евгеньевич

Конспект лекций

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

Содержание

Лекция 1

Введение: Метод ВКБ и канонический оператор

Рассматривается уравнение вида

$$\mathcal{H}\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \tag{1}$$

где $h \to +0$ — малый параметр. Для такого вида уравнений канонический оператор (КО) позволяет строить быстроосциллирующие решения. Простейшее быстроосциллирующие решение — решения вида ВКБ (квазиклассическое приближение, также известное как метод **В**ентцеля - **К**рамерса - **Б**риллюэна):

$$u(x,h) = \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S(x)}a(x), \tag{2}$$

где $S(x), a(x) \in C^\infty$ - гладкие функции.

Канонический оператор обычно имеет дело со случаем, когда Im $S(x) = 0$ (S вещественна). Однако, в определенных случаях представляет интерес и ситуация, когда Im $S(x) \neq 0$, что приводит к ряду проблем.

Зачастую решение представляется в виде суммы различных ВКБ функций:

$$u = \sum_j \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S_j(x)}a_j(x). \tag{3}$$

Если Im $S(x) \neq 0$, тогда разные члены в этой сумме имеют разный порядок роста/убывания при $h \to +0$. Слагаемое вида

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}\mathrm{Im}S_j(x)} \tag{4}$$

быстро стремится к 0, если $\mathrm{Im}S(x) > 0$, или быстро растет, если $\mathrm{Im}S(x) < 0$. Если же $\mathrm{Im}S(x) = 0$, то экспонента по модулю равна 1 и данная проблема отсутствует. В сумме (3) "выживает"только то слагаемое, которое быстрее всего растет или медленнее всего убывает, то есть слагаемое с минимальной мнимой частью:

$$j_0 = \arg\min_j \mathrm{Im}S_j(x). \tag{5}$$

Однако, при изменении x, такие слагаемые могут между собой меняться местами: в некоторых точках одна часть минимальна, в других - другая. Неясно становится, как вычислять эти слагаемые, так как, если в некоторой области одно из слагаемых в сумме (3) имеет максимальную степень роста (минимальное $\mathrm{Im}S_j(x)$), все прочие слагаемые на его фоне не будут заметны.

Рассмотрим 2 возможных случая:

1a) Асимптотики в комплексно-аналитических функциях. В таком случае функция u представляется в виде некоторого интеграла Лапласа:

$$u = \int_\Gamma F(x,s,h)\mathrm{e}^{\frac{is}{h}}ds, \quad S \in \mathbb{C}, \Gamma \subset \mathbb{C}. \tag{6}$$

Функция $F(x, s, h)$ типично имеет полюса. В окрестности некоторой точки, её главный член может принимать вид

$$F(x, s, h) = \frac{a(x, s)}{s - S_j(x)}, \tag{7}$$

тогда если Γ - замкнутый контур, окружающий полюс, по теореме Коши можно получить вид (3). Так как ищется асимптотика $F(x, s, h)$, которая является преобразованием Лапласа функции u по переменной $1/h$, вместо роста получается асимптотика по гладкости, главный член которой есть (7) (см. *ресургентный анализ*).

1б) Туннельный канонический оператор.

- Гамильтониан вещественный и удовлетворяет специальным условиям.
- Рассматривается уравнение вида:

$$\mathcal{H}\left(x, h\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{8}$$

- Решение в простейшем виде - "туннельное ВКБ":

$$u = \mathrm{e}^{\frac{S(x)}{h}} a(x). \tag{9}$$

ВКБ-решения с положительной мнимой частью фазой

Рассмотрим решение вида ВКБ (2), для которого $\mathrm{Im} S(x) \geq 0$. Мы будем интересоваться только окрестностью точек, где $\mathrm{Im} S(x) = 0$. Тогда

$$u(x) = O(1), \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_S = \{x | \mathrm{Im} S(x) = 0\}, \tag{10}$$

$$u(x) = O(h^{-\infty}), \quad \text{при} \quad x \notin U(\Gamma_S), \tag{11}$$

где $U(\Gamma_S)$ - некоторая малая окрестность множества Γ_S.

Так как в теории канонического оператора мы интересуемся степенными асимптотиками по параметру h, тогда нас не интересует область $U(\Gamma_S)$, так как наше решение решение с интересующей нас точностью равно 0: $\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}\mathrm{Im} S(x)}$ где $\mathrm{Im} S(x) \geq \varepsilon > 0$, тогда $\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{h}}$ при $h \to 0$ убывает быстрее любой степени.

В случае, когда мы записываем обычный КО ($\mathrm{Im} S(x) = 0$) и речь идет о ВКБ решениях схема решения выглядит следующим образом: выписывается гамильтониан $\mathcal{H}(x, p)$ и решается система уравнений Гамильтона-Якоби $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0$.

Теперь предположим $\mathrm{Im} S(x) \geq 0$. Нужно ли решать уравнения Гамильтона-Якоби в точности? В тех точках, где $\mathrm{Im} S(x) > 0$, нас не интересует решение. Решение системы уравнений Гамильтона-Якоби нас интересует только в окрестности точке, где $\mathrm{Im} S(x) = 0$. Однако остается вопрос, с какой точностью должна быть решена эта система?

Будем рассматривать $\frac{\partial S_2}{\partial x}$ как малую величину, где $S = S_1 + iS_2$, т.е. $S_2 = \mathrm{Im} S(x)$. Это возможно, например, если само S_2 рассматривать как малую величину.

Рассмотрим максимум выражения следующего вида

$$\max_{\tau > 0}\left(\tau^m \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{h}}\right). \tag{12}$$

Уравнения для поиска точки максимума:

$$\left(m\tau^{m-1} - \frac{\tau^m}{h}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{h}} = 0,$$

решение которого имеет вид $\tau = mh$. Подстановка этого решения в (12) даст значение максимума $m^m h^m \mathrm{e}^{-m}$. Тогда справедлива оценка:

$$\max_{\tau>0}\left(\tau^m \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{h}}\right) = O(h^m).$$

Тогда если мы рассмотрим

$$(S_2(x))^m \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S(x)} = O(h^m) \quad \text{или} \quad (S_2)^m \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}S_2} = O(h^m).$$

Однако, нас интересует не только само S_2, но и его производные $\frac{\partial S_2}{\partial x}$.

Лемма. Существует такая постоянная C, что $\left|\frac{\partial S_2}{\partial x}\right| \leq C\sqrt{S_2}$ (локальная оценка). Тогда можно утверждать, что

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial x}\right)^{\alpha} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S(x)} = O(h^{\alpha/2}), \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n. \tag{13}$$

Доказательство: Будем считать, что S_2 - финитна, т.е. имеет компактный носитель. Так как оценка локальная, зафиксируем такую область, и умножим S_2 на срезающую гладкую функцию такую, что в этой области она равна 1, а вне её - 0.

Пусть $x \in \mathbb{R}^1$, тогда:

$$0 \leq S_2(x+t) = S_2(x) + t\frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \leq S_2(x) + t\frac{\partial S_2}{\partial x} + \frac{t^2}{2}M, \quad M = \max\left|\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2}\right| < \infty$$

Квадратный трехчлен больше 0 при всех значениях переменных, такое возможно тогда и только тогда, когда дискриминант этого трехчлена меньше 0:

$$\left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2}\right)^2 - 2MS_2(x) \leq 0, \quad \left|\frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2}\right| \leq \sqrt{2MS_2(x)}. \quad \square$$

Диссипация

Далее для удобства введем функцию $D(x)$, которую назовем *"диссипацией"* и такую, что $D(x) \geq 0$ и $D(x) \sim S_2(x)$, то есть существуют константы $C_1, C_2 > 0$: $C_1 D \leq S_2 \leq C_2 D$.

Техническая лемма об оценках. Пусть $D(x)$ - диссипация ($D \in \mathbb{C}^\infty,\ D \geq 0$).

$$f(x) = O(D^m) \ \Leftrightarrow\ \exists\ C = const : |f| \leq CD^m. \tag{14}$$

Тогда, если диссипация S_2 удовлетворяет условиями, то $\frac{\partial S_2}{\partial x} = O(D^{1/2})$.

Лемма. Если $f = O(D^m)$, то

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = O(D^{m-|\alpha|/2}), \quad m > \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^1,\ t \in [-1;1]$:

$$D\left(x + t\sqrt{D(x)}\right) = D(x) + tD'(x)\sqrt{D(x)} + \frac{\theta t^2}{2} D(x), \quad \text{где } D'(x) = O\left(\sqrt{D(x)}\right)$$

$$D\left(x + t\sqrt{D(x)}\right) \approx D(x)$$

$$f\left(x + t\sqrt{D(x)}\right) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t\sqrt{D})^j}{j!} f^{(j)}(x) + O(D^m), \quad \text{где} \quad f = O(D^m),\ N > 2m.$$

В силу доказанного ранее для левой части имеем

$$\left(x + t\sqrt{D(x)}\right) = O(D(x + t\sqrt{D})^m) = O(D(x)^m)$$

тогда

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{t^j \sqrt{D}^j}{j!} f^{(j)}(x) = O(D^m),$$

которое верно при $t = t_1, ..., t = t_N$, где $0 < t_1 < ... < t_N$. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & ... & t_1^N \\ 1 & t_2 & ... & t_2^N \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & t_N & ... & t_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ \sqrt{D} f^{(1)} \\ ... \\ \frac{(\sqrt{D})^N}{N!} f^{(N)} \end{pmatrix} = O(D^m).$$

Используя определитель Вандермонда, получим

$$(\sqrt{D})^j f^{(j)} = O(D^m) \to f^{(j)} = O(D^{m-j/2}). \quad \square$$

Канонический оператор как черный ящик

Рассмотрим КО как черный ящик, по принципу которого что-то подаётся на вход, и что-то получается на выходе. Рассмотрим эти объекты.

Вход:

а) Лагранжево многообразие $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$;

б) Форма объема $d\mu$ (*мера*) на Λ;

d) Функция A из $C_0^\infty(\Lambda)$.

Выход: Функция $\psi(x, h)$ - быстроосциллирующая на $\mathbb{R}^n$, где параметр $h \to 0$ "заведует"скоростью осцилляции.

Оператор, который переводит *"вход"* в *"выход"*:

$$K = K^h_{(\Lambda,d\mu)}: \ C_0^\infty(\Lambda) \ \to \ \mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n), \tag{16}$$

где $\mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n)$ - пространство быстроосциллирующих функций на $\mathbb{R}^n$.

Простейшим примером быстроосциллирующих функции являются ВКБ функции (2). Если мы продифференцируем (2), получим:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = O(h^{-1}) \quad \text{или} \quad \left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right| = O(h^{-\alpha}) \Leftrightarrow \left|\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right| = O(1) \tag{17}$$

для любого мультииндекса α. Тогда определим *быстроосциллирующие функции* как

$$\mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n) = \left\{u(x,z)\middle| \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u \in L^2, \left\|\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\|_{L_2} = O(1), \forall\alpha\right\}. \tag{18}$$

Теперь определим, что такое *лагранжево многообразие* (ЛМ). Рассмотрим пространство

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x,p) = (x_1,...,x_n,p_1,...,p_n), \tag{19}$$

именуемое *фазовым.* С точки зрения классической механики $(x_1,...,x_n)$ - это координаты, $(p_1,...,p_n)$ - соответствующие импульсы. В таком пространстве (19) имеется стандартная *симплектическая форма* - замкнутая невырожденная 2-форма:

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dx_1 + ... + dp_n \wedge dx_n = dp \wedge dx. \tag{20}$$

Тогда *лагранжево многообразие* - это локальное вложение (погружение) такое i:

$$i : \Lambda^n \to \mathbb{R}^{2n} \tag{21}$$

и выполняется *условие изотропности*

$$i^*\omega^2 = 0, \tag{22}$$

откуда понимаем, что лагранжево многообразие - изотропное многообразие.

Пример: $S(x) \in C^\infty$ - вещественно значное, тогда

$$\Lambda = \left\{(x,p) : p = \frac{\partial S}{\partial x}\right\}, \tag{23}$$

то есть Λ - это график вектор-функции $\frac{\partial S}{\partial x}$.

$$i^*\omega^2 = d\frac{\partial S}{\partial x} \wedge dx = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j, \tag{24}$$

где $dx_k \wedge dx_j$ - антисимметрично, а $\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k}$ - симметрично, тогда свертка по всем индексам равна 0.

Формулы коммутации канонического оператора

Из основных свойств КО отметим:
1) Существует только в том случае, если на Λ выполнено условие квантования. (Об этом условии мы будем говорить подробно в следующих лекциях)
2) Коммутация с h-псевдодифференциальным оператором.
Таким h-псевдодифференциальным оператором является $\hat{\mathcal{H}}$ в (1):

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{25}$$

Решение (1) которого будем искать в виде:

$$u = K^h_{(\Lambda,d\mu)}A, \quad A \in C_0^\infty(\Lambda). \tag{26}$$

Первая формула коммутации:

$$\hat{\mathcal{H}}K^h_{(\Lambda,d\mu)}A = K^h_{(\Lambda,d\mu)}\left(\mathcal{H}\big|_\Lambda A + O(h)\right). \tag{27}$$

Чтобы найти асимптотическое решение (1), согласно (27), в качестве первого шага необходимо обеспечить

$$\mathcal{H}\big|_\Lambda A = 0. \tag{28}$$

Так как нас очевидно не интересуют случаи $A = 0$, тогда необходимо найти такое лагранжево многообразие, чтобы $\mathcal{H}\big|_\Lambda = 0$.

Вторая формула коммутации: Если $\mathcal{H}\big|_\Lambda = 0$, то

$$\hat{\mathcal{H}}K^h_{(\Lambda,d\mu)}A = -ihK^h_{(\Lambda,d\mu)}\left(\Pi A + O(h)\right), \tag{29}$$

где Π - *оператор переноса*:

$$\Pi = V(\mathcal{H})\big|_\Lambda + \mathcal{F}. \tag{30}$$

Здесь $V(\mathcal{H})$ - гамильтоново векторное поле

$$V(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_p\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{H}_x\frac{\partial}{\partial p}. \tag{31}$$

Теорема. Если $\mathcal{H}\big|_\Lambda = const$, то $V(\mathcal{H})$ - касательно к многообразию Λ во всех его точках.

Доказательство: Известно, что $d\mathcal{H} = -V(\mathcal{H})$, подставленное в форму ω^2 ($\mathcal{H}\big|_\Lambda = const$), даёт $\omega^2(V(\mathcal{H}), \xi) = 0,\ \forall\alpha \in \Lambda,\ \forall\xi \in T_\alpha\Lambda$, где T_α - касательное пространство. Так как ω^2 - невырожденная форма, тогда из того, что она равняется 0, возникает, что само $V(\mathcal{H})$ принадлежит этому пространству $V(\mathcal{H}) \in T_\alpha\Lambda$.

Таким образом, если мы сузим $V(\mathcal{H})$ на Λ, мы получим корректно определенное векторное поле на Λ, и вдоль него сможем дифференцировать функцию A.

Тогда, чтобы решить уравнение

$$\hat{\mathcal{H}}u = O(h^2) \tag{32}$$

необходимо:
1) Найти $\Lambda : \mathcal{H}\big|_\Lambda = 0$;
2) Обеспечить выполнение условия квантования;
3) Решить уравнение переноса $\Pi A = 0$.

Лекция 2

Внутренняя конструкция канонического оператора

Основным геометрическим объектом в определении КО является лагранжево многообразие

$$\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad x = (x_1, ..., x_n),\ p = (p_1, ..., p_n),\ \Lambda \in C^\infty,\ \dim \Lambda = n \tag{33}$$

на котором обращается в ноль форма ω^2 (20): $i^*\omega^2 = 0,\ \omega^2 = dp \wedge dx,\ i : \Lambda \to \mathbb{R}^{2n}$, где i - локальное вложение (погружение).

Зададим простейший канонический оператор, который имеет вид ВКБ-элемента:

$$\Psi(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S(x)}\varphi(x) \tag{34}$$

который связан с лагранжевым многообразием следующим образом:

$$\Lambda = \left\{(x, p) : p = \frac{\partial S}{\partial x}\right\}, \tag{35}$$

т.е. Λ есть график градиента функции $S(x)$. Пусть $\mathcal{H}(x,p)$ - гамильтониан и $\mathcal{H}(x,p) = 0$ в окрестности Λ, тогда

$$\mathcal{H}(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})\Psi = O(h^\infty), \quad \hat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}. \tag{36}$$

Это означает, что Λ – так называемый *фронт осцилляций* функции $\Psi(x)$ (34). Отметим, что все вышесказанное относится к случаю, когда $\pi_x : \Lambda \to \mathbb{R}^n_x$ - неособое, то есть локальный *диффеоморфизм.*

Рассмотрим общий случай лагранжева многообразия $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}_{(x,p)}$, то есть π_x - не диффеоморфизм, и соответсвующий якобиан имеет особенности. Если ЛМ задается в виде $\Lambda = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$, где α - локальные (лагранжевы) координаты на Λ, тогда *неособые* точки – это такие точки, где выполняется:

$$\det \frac{\partial X}{\partial \alpha} \neq 0, \tag{37}$$

а для *особых* точек:

$$\det \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0. \tag{38}$$

Описание лагранжевых многообразий в терминах фазовых функций

Пусть $\Phi(x,\theta)$ - гладкая ($\Phi(x,\theta) \in C^\infty$) вещественная функция в некоторой области $W \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_p$, где $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$ - вспомогательная переменная. Образуем следующее множество:

$$C_\Phi = \left\{(x,\theta) \in W \middle| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(x,\theta) = 0\right\}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_m}\right), \tag{39}$$

являющееся множеством стационарный точек функции Φ по переменной θ. Также пусть линейно независимы дифференциалы

$$d\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1}\right), ..., d\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_m}\right) \tag{40}$$

в каждой точке множества C_Φ. Или иными словами данное условие можно записать как

$$\operatorname{rang}\left(\Phi_{\theta\theta}\Phi_{\theta x}\right) = m \tag{41}$$

в точках множества C_Φ. Если условия (40),(41) выполнены, то Φ называется *невырожденной фазовой функцией* на множестве W. Тогда, по *теореме о неявной функции*, C_Φ будет гладким многообразием размерности m ($C_\Phi - C^\infty, \dim C_\Phi = m$).

Рассмотрим следующее отображение j:

$$j : C_\Phi \to \mathbb{R}^{2n}_{(x,p)} \quad (x, \theta) \to \left(x, \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, \theta)\right). \tag{42}$$

Лемма. Отображение j является лагранжевым многообразием в $\mathbb{R}^{2n}$.

Замечание: В таком случае требуют проверки 2 условия: (а) j^* инъективно; (б) $j^*\omega^2 = 0$. И тогда можно сделать вывод, что невырожденная фазовая функция задаёт лагранжево многообразие.

Лемма. Любое лагранжево многообразие $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}_{(x,p)}$ локально можно задать следующим образом: $\exists$ Φ – невырожденная фазовая функция такая, что $\Lambda_\Phi = U$, где U – окрестность некоторой точки α_0 (см. рис.1).

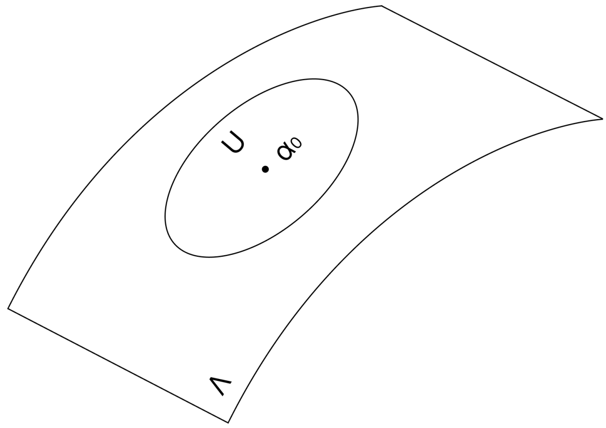

Рис. 1. Окрестность U некоторой точки α_0 на лагранжевом многообразии Λ.

Тогда канонический оператор

$$K^h_{(\Lambda,d\mu)} = C^\infty_0(\Lambda) \to \mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n), \tag{43}$$

где $\mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n)$ - пространство быстроосциллирующих функций. Для того, чтобы описать КО $K^h_{(\Lambda,d\mu)}$, достаточно описать его действие на $C^\infty_0(U)$ (т.е. для каждой точки α_0):

$$K^h_{(\Lambda,d\mu)} : C^\infty_0(U) \to \mathcal{F}_h(\mathbb{R}^n). \tag{44}$$

Для такого описания используются *быстроосциллирующие интегралы*:

$$I[\Phi,a](x,h)=\frac{\mathrm{e}^{i\pi m/4}}{(2\pi h)^{m/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\theta}\mathrm{e}^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)d\theta,\quad a(x,\theta)\in C_0^\infty(U). \tag{45}$$

Заметим, что на самом деле значение интеграла с точностью до младших членов зависит только от сужения функции $a(x,\theta)$ на многообразие C_Φ. Пусть $a|_{C_\Phi}=0$, тогда

$$a=\langle b,\Phi_\theta\rangle=\sum_{j=1}^m b_j\Phi_{\theta_j},\quad b_j\in C_0^\infty(U). \tag{46}$$

Последнее разложение справедливо по *лемме Адамара*. Тогда для (45) можно записать разложение:

$$I[\Phi,a]=I[\Phi,\langle b,\Phi_\theta\rangle]=\sum_{j=1}^m I[\Phi,b_j\Phi_{\theta_j}],$$

$$I[\Phi,b_j\Phi_{\theta_j}]=\frac{\mathrm{e}^{i\pi m/4}}{(2\pi h)^{m/2}}\int\mathrm{e}^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}b_j\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}d\theta=\frac{\mathrm{e}^{i\pi m/4}}{(2\pi h)^{m/2}}\int b_j\left(-ih\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}\right)\right)d\theta.$$

Проинтегрировав по частям, далее получим:

$$I[\Phi,b_j\Phi_{\theta_j}]=\frac{\mathrm{e}^{i\pi m/4}}{(2\pi h)^{m/2}}\int\mathrm{e}^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}ih\frac{\partial b_j}{\partial\theta_j}d\theta=ihI\left[\Phi,\frac{\partial b_j}{\partial\theta_j}\right]$$

и окончательно получим

$$I[\Phi,a]=ihI\left[\Phi,\frac{\partial b}{\partial\theta}\right],\quad \frac{\partial b}{\partial\theta}=\sum_j\frac{\partial b_j}{\partial\theta_j}. \tag{47}$$

Таким образом, если амплитуда равняется 0 на множестве C_Φ, тогда быстроосциллирующий интеграл, связанный с этой амплитудой, представляется в виде параметра h, умноженного на такой же быстроосциллирующий интеграл, но с другой амплитудой.

Определим КО на многообразии Λ_Φ:

$$K_{\Lambda_\Phi}A=I[\Phi,a], \tag{48}$$

где амплитуда a выбирается некоторым специальным образом: A – функция, определенная на Λ_Φ, а значит и на C_Φ через диффеоморфизм $j=j_\Phi:C_\Phi\to\Lambda_\Phi$, определенный в (42) (см. рис.2).

Тогда полагают следующее:

$$a|_{C_\Phi}=A\sqrt{F}, \tag{49}$$

где функция F называется *якобианом* и имеет вид

$$F=\frac{d\mu\wedge d(-\Phi_\theta)}{dx\wedge d\theta}=\frac{d\mu\wedge d(-\Phi_{\theta_1})\wedge\ldots\wedge d(-\Phi_{\theta_m})}{dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\wedge d\theta_1\wedge\ldots\wedge d\theta_m}. \tag{50}$$

В знаменателе (50) $dx\wedge d\theta$ - мера объёма на пространстве (x,θ); в числителе: $d\mu$ - форма (степени n) на пространстве C_Φ, помноженная на произведение дифференциалов фазовой функции $d(-\Phi_\theta)$, которые образуют систему координат в направлении трансверсальном к C_Φ.

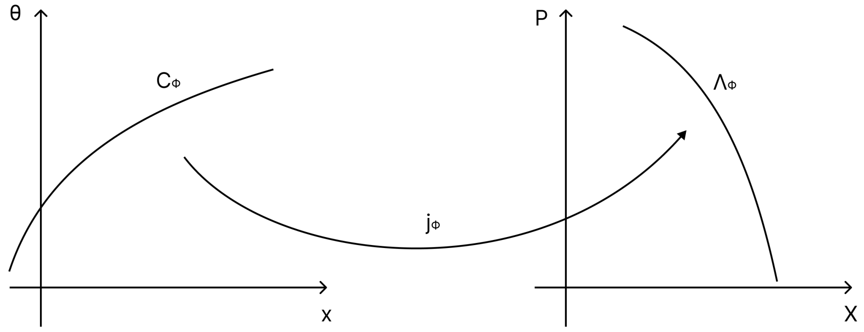

Рис. 2. Диффеоморфизм j_Φ, который производит отождествление C_Φ с Λ_Φ.

Глобальный канонический оператор

Так как рассматривается *локальный* КО (48), чтобы сшить *глобальный* КО из таких локальный, необходимо, чтобы на пересечении координатных окрестностей они совпадали.

Пусть Φ, Ψ - фазовые функции в соответствующих пространствах $\Phi(x,\theta),\ \Psi(x,\tau)$, $\theta \in \mathbb{R}^{m_1},\ \tau \in \mathbb{R}^{m_2}$ (см. рис.3). Потребуем выполнения равенства:

$$K_\Phi A \approx K_\Psi A, \quad A \in C_0^\infty(U_1 \cap U_2). \tag{51}$$

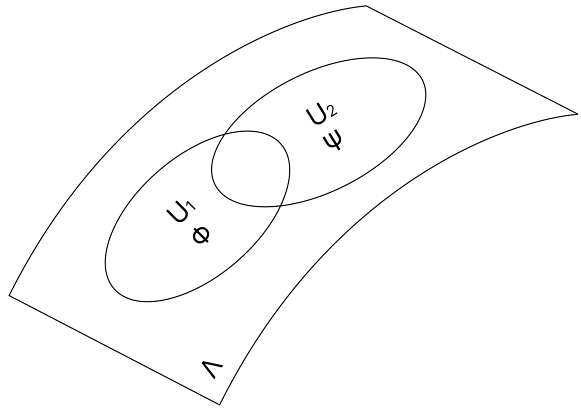

Рис. 3. Пересечение координатных окрестностей U_1 и U_2, которые заданы функциями Φ и Ψ соответственно.

Для этого функцию Φ сузим на C_Φ - $\Phi\Big|_{C_\Phi} = S_1$, где S_1 - функция на U_1. Прямым вычислением покажем, что

$$dS_1 = d\Phi\Big|_{C_\Phi} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}d\theta\right)\Bigg|_{C_\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx\Bigg|_{C_\Phi} = P(\alpha)dX(\alpha), \tag{52}$$

где $x = X(\alpha)$, $p = P(\alpha)$ - уравнения нашего ЛМ, отображение - $(x, \theta) \leftrightarrow (x, \frac{\partial \Phi}{\partial x}) = (X, P)$. Тогда последнее можно записать как

$$dS_1 = P(\alpha)dX(\alpha) = j^*\omega_1, \quad \omega_1 = pdx = p_1dx_1 + ... + p_ndx_n, \tag{53}$$

Здесь ω_1 - каноническая 1-форма на симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Аналогичным рассуждением можно прийти к $dS_1 = j^*\omega_1$, тогда получим $d(S_1 - S_2)$ в $U_1 \cup U_2$ и ясно, что $S_1 - S_2 = const = s$.

Метод стационарной фазы даёт:

$$K_\Phi A \approx K_\Psi A \ \mathrm{e}^{\frac{i}{h}s} \cdot (\pm 1), \tag{54}$$

а выбор $(+1)$ или (-1) в (54) зависит от выбора аргументов у F_1 и F_2 при извлечении квадратного корня $\sqrt{F}$ в (49). Чтобы локальные КО, отвечающие двум разным фазовым функциям, совпали с точностью до младших членов, необходимо, чтобы $\mathrm{e}^{\frac{i}{h}s} = 1$ и согласовано выбрать аргументы квадратного корня, то есть получить $(+1)$ в (54).

Для того, чтобы имелась возможность согласовать замкнутую цепочку карт, используется *условие квантования*. Самое условие подробно обсудим в следующих лекциях. Однако, отметим, что выбор аргумента у F определяется выбором аргумента следующего якобиана:

$$\det \frac{\partial(X(\alpha) - iP(\alpha))}{\partial \alpha} \neq 0. \tag{55}$$

Сам якобиан выбрать однозначно не получится, но нас будет интересовать его приращение по замкнутым путям, деленное на 2π, который есть индекс этих замкнутых путей – *индексы Маслова.*

Асимптотические подмногообразия

В рамках ВКБ-элементов. ЛМ для ВКБ-элементов задается равенством $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, которое в случае комплексной фазы $S = S_1 + iS_2$, имеет вид

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial x} + i\frac{\partial S_2}{\partial x}. \tag{56}$$

Очевидным является является тот факт, что многообразие получется невещественным - он уже не лежит в $\mathbb{R}^{2n}$. Второй неприятностью оказывается тот факт, что в вещественном случае ЛМ отвечающее конкретным асимптокам жестко зафиксировано. Это означает, что нельзя поменять ЛМ даже немного, любое изменение приведет к новым фазовым функциям и асимптотикам. В случае комплекснозначной фазовой функции малые изменение S_1 на $O(S_2^k)$ не приведут к изменению класса асимптотик в ввиду леммы, доказанной в первой лекции.

Зададим ЛМ, определив некоторый *идеал* $J_L \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$:

$$J_L = \{f \in C_0^\infty \mid f = 0 \text{ на } L\}, \tag{57}$$

здесь работает идея описания многобразия с помощью идеалов в кольце функций, что является типичным способом, принятым в алгебраической геометрии. По свойству *лагранжевости* идеал J_L *инвалютивен*. Напомним, что инвалютивность означает $\{J_L, J_L\} \subset J_L$, где $\{\}$ - *скобки Пуассона*.

Пусть M - основное многообразие (обычно $\mathbb{R}^{2n}$). *Диссипация* на M – гладкая функция, такая что $D : M \to \bar{\mathbb{R}}_+ = [0; +\infty)$. Две диссипации называются *эквивалентными* $D_1 \sim D_2$, если D_1/D_2 ограничено локально (сверху и снизу положительными постоянными).

Если задана диссипация D на M, тогда $\mathcal{D} \subset C^\infty(M)$ - *идеал*, состоящий из $f \in C_0^\infty$, $|f| \leq const{\cdot}\mathcal{D}$ (локально, так как на каждом компактном множестве неравество выполнено, но сама константа зависит от выбора множества). $\Gamma = \Gamma_D$ - *локус* идеала $\mathcal{D}$, где Γ такое, что

$$\Gamma = \{x \in M \mid D(x) = 0\}. \tag{58}$$

Также представляет интерес следующий идеал $\mathcal{D}^S$, который представляет собой такое множество:

$$\mathcal{D}^S = \left\{f \in C^\infty(M) \mid \text{локально} \;\; |f| \leq const \cdot \mathcal{D}^S\right\}, \quad S > 0. \tag{59}$$

Пример: $\frac{\partial D}{\partial x} \in D^{\frac{1}{2}}$.

Определение: Пусть $S \geq 1$, тогда *S-асимптотическим подмногообразием* к размерности k в M называется пара $L = (\mathcal{D}, \mathcal{J})$, где $\mathcal{D}$ – диссипационный идеал, то есть идеал, пораждённый некоторой диссипацией на M, а $\mathcal{J}$ - идеал удовлетворяющий условиям:

а) $\mathcal{D}^s \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{D}^{1/2}$;

б) в окрестности любой точки $x_0 \in \Gamma_D$ идеал $\mathcal{J}$ пораждается идеалом $\mathcal{D}^s$ и некоторыми функциями $(f_1, ..., f_k)$ так, что $df_1, ..., df_k$ линейно независимы в точке x_0.

Пример: Пусть L - обычное многообразие коразмерности $\operatorname{codim} L = k$. Тогда его можно определить следующим образом, взяв идеалы

$$\mathcal{D} = \langle D(x) = \operatorname{dist}(x, L)^2\rangle, \quad \mathcal{J} = \{f \in C^\infty(M) \mid f\Big|_L = 0\}. \tag{60}$$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ