ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНЫЙ И НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

КОРПУСОВ
МАКСИМ ОЛЕГОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГУЩИНА ДМИТРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА

Содержание

1 Лекция. Мера Лебега плоских множеств **6**
1.1 Операции над множествами . . . 6
1.2 Правильные прямоугольники на плоскости . . . 7
1.3 Элементарное множество . . . 10
1.4 Мера элементарного множества . . . 10
1.5 Свойства меры элементарного множества . . . 11
1.6 Понятие внешней меры Лебега . . . 14
1.7 Множества, измеримые по Лебегу . . . 15
1.8 Свойство конечной аддитивности внешней меры Лебега . . . 18

2 Лекция. Абстрактная мера Лебега **21**
2.1 Понятие измеримости по Лебегу функции . . . 21
2.2 Свойства измеримых по Лебегу функций . . . 22
2.3 Понятие характеристической функции . . . 24
2.4 Построение интеграла Лебега для простых функций . . . 24
2.5 Интеграл измеримой по Лебегу функции . . . 25
2.6 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции . . . 26
2.7 Теорема о счётной аддитивности интеграла Лебега . . . 27

3 Лекция. Свойства интеграла Лебега **30**
3.1 Виды сходимости . . . 30
3.2 Связь видов сходимости . . . 30
3.3 Теорема Егорова . . . 30
3.4 Неравенство Чебышева . . . 31
3.5 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега . . . 31
3.6 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла (теорема Лебега) 33
3.7 Теорема Беппо Леви . . . 35
3.8 Лемма Фату . . . 38

4 Лекция. Метрические пространства I **39**
4.1 Пространство всех измеримых по Лебегу функций . . . 39
4.2 Метрическое пространство . . . 39
4.3 Классы функций . . . 39
4.4 Линейное нормированное пространство . . . 40
4.5 Неравенство Гельдера. Арифметическое неравенство Гельдера . . . 41
4.6 Неравенство Гельдера для функций . . . 42
4.7 Неравенство Минковского . . . 43
4.8 Метрические пространства . . . 43
4.9 Открытый шар. Замкнутый шар. Открытое множество. Замкнутое множество . . . 44
4.10 Изолированная точка множества. Точка прикосновения . . . 44
4.11 Теорема о замкнутом множестве . . . 44
4.12 Лемма о топологии . . . 45

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5 Лекция. Метрические пространства II **47**
5.1 Пример замкнутого счетного пересечения открытых множеств 47
5.2 Пример объединения конечного числа замкнутых множеств 47
5.3 Замыкание множества. Свойства операции замыкание 47
5.4 Непрерывное отображение метрических пространств 49
5.5 Теорема об открытом отображении 50
5.6 Эквивалентность определений по Коши и по Гейне 50
5.7 Компактные множества 52
5.8 Свойства компактных множеств 52

6 Лекция. Метрические пространства III **54**
6.1 Полное метрическое пространство 54
6.2 Изометричные отображения метрических пространств 55
6.3 Теорема (продолжение изометрии) 55
6.4 Лемма 58
6.5 Определение пополнения метрического пространства 59
6.6 Теорема о пополнении 59

7 Лекция. Топологические пространства **60**
7.1 Определение топологического пространства. Примеры 60
7.2 Фундаментальная система окрестностей (ФСО) 60
7.3 Замкнутые множества, замыкание множества и предельные точки множества. 63
7.4 Внутренность и граница множества 65

8 Лекция 8. Векторное топологическое пространство **67**
8.1 Линейный функционал. Скобки двойственности 67
8.2 Векторные топологические пространства 68
8.3 Определение векторного топологического пространства (ВТП) 69
8.4 Непрерывность операций на ВТП 69
8.5 Примеры ВТП 69
8.6 Лемма о непрерывности операций на ВТП 71
8.7 Лемма о непрерывности окрестности топологии точки 71
8.8 Сопряженное пространство 72
8.9 Выпуклое множество. Уравновешенное множество 73
8.10 Ограниченное множество. Лемма 73
8.11 Поглащающее множество. Понятие полунормы 74
8.12 Функционал Минковского 74

9 Лекция. Банаховы пространства **77**
9.1 Банахово пространство 77
9.2 Примеры 77
9.3 Пространство линейных непрерывных операторов 78
9.4 Лемма о непрерывности оператора 79
9.5 Теорема о действии оператора в банаховом пространстве 80
9.6 Сильная и слабая сходимости. * - слабая сходимость 82

9.7 Теорема Хана-Банаха 82

10 Лекция. Теоремы Банаха-Штейнгауза **85**
10.1 Теорема Хана-Банаха в комплексном случае 85
10.2 Следствия 87
10.3 Виды сходимости на банаховых пространствах 89
10.4 Теорема Банаха-Штейнгауза 91

11 Лекция. Следствия теорем Банаха-Штейнгауза **94**
11.1 Следствия теоремы Банаха-Штейнгауза 94
11.2 Критерии слабой и *-слабой сходимости 97
11.3 Теорема об открытом отображении 99

12 Лекция. Спектральная теория операторов **102**
12.1 Теорема об открытом отображении 102
12.2 Спектральная теория в банаховых пространствах. Банахова алгебра с единицей 105
12.3 Интеграл Бохнера 106
12.4 Обратимые элементы банаховой алгебры 106
12.5 Резольвента. Непрерывность резольвенты 109
12.6 Спектр 110

13 Лекция. Гильбертовы пространства **112**
13.1 Алгебра функций 112
13.2 Предгильбертово пространство 114
13.3 Неравенство Коши-Буняковского 114
13.4 Норма в предгильбертовом пространстве 114
13.5 Гильбертово пространство 115
13.6 Равенство параллелограмма 115
13.7 Теорема Беппо Леви 115
13.8 Разложение по базису 117

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

1 Лекция. Мера Лебега плоских множеств

1.1 Операции над множествами

а) Пересечение множеств: $A \cap B$

- точки одновременно принадлежат и множеству A, и множеству B.

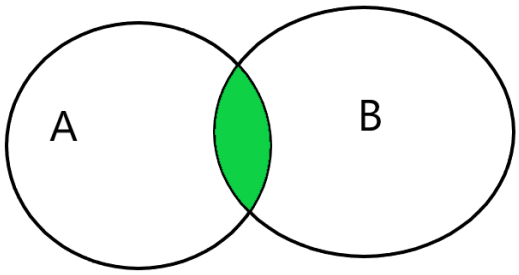

Рис. 1.1. Пересечение множеств

б) Объединение множеств: $A \cup B$

- точка принадлежит либо A, либо B, либо обоим множествам.

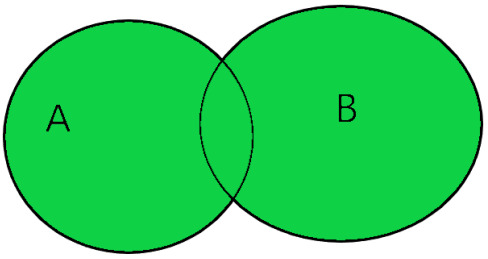

Рис.1.2. Объединение множеств

в) Разность множеств: $A \setminus B$

- входят все элементы первого множества, не входящие во второе.

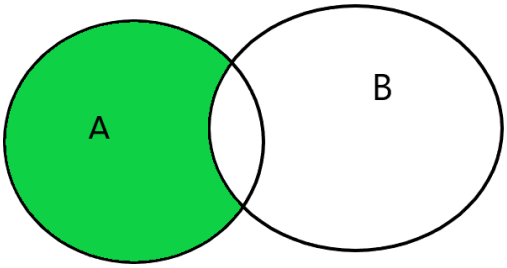

Рис. 1.3. Разность множеств

г) Симметричная разность множеств: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- точка, принадлежит либо множеству A, либо множеству B, но не принадлежит им обоим.

Правила де Моргана:

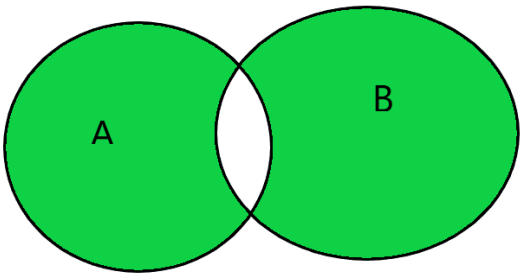

Рис. 1.4. Симметричная разность

Пусть множества A и B принадлежат множеству X: A,B $\subset$ X

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \tag{1}$$
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \tag{2}$$

Возьмём от обеих частей формулы (1) дополнение по X:

$$X \setminus (X \setminus (A \cup B)) = X \setminus \{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)\} \tag{3}$$
$$X \setminus (X \setminus (A \cup B)) = A \cup B \tag{4}$$

Поэтому:

$$A \cup B = X \setminus \{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)\} \tag{5}$$

Аналогично из формулы (2):

$$A \cap B = X \setminus \{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)\} \tag{6}$$

Начнём **построение меры Лебега плоских множеств**:

1.2 Правильные прямоугольники на плоскости

Введём понятие правильного прямоугольника на плоскости. Введём на доске прямоугольную декартову систему координат, оси которой параллельны сторонам доски.
Приведём примеры правильного прямоугольника :
Красный прямоугольник - **прямоугольник**;
Чёрные отрезки - **вырожденные прямоугольники**;
Зелёная точка - **точка**;
Синяя перечёркнутая окружность - **пустое множество** ($\varnothing$).

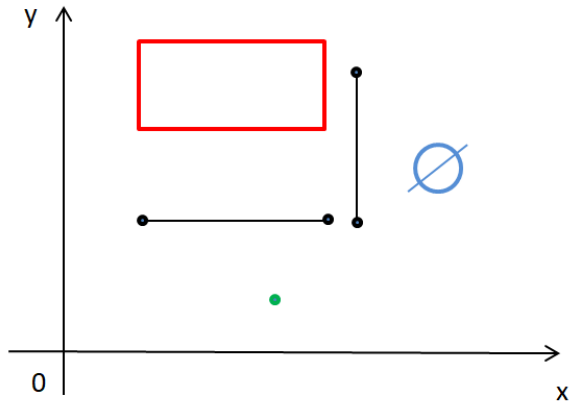

Рис. 1.5. Правильные прямоугольники

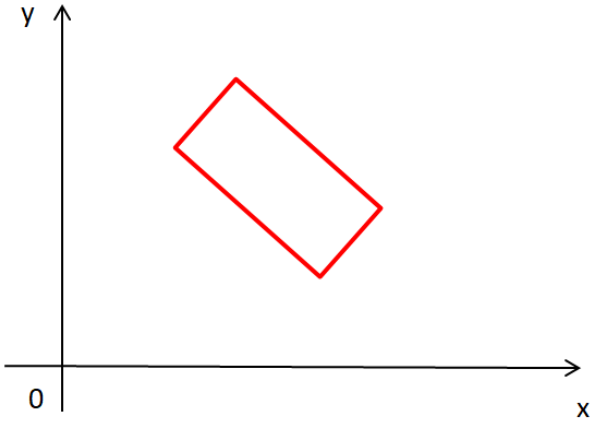

Рис. 1.6. Неправильный прямоугольник

Приведём пример неправильного прямоугольника:

То есть правильность или неправильность треугольника зависит от выбора декартовой системы координат.

Охарактеризуем прямоугольник. Для этого будем использовать обозначение: $\lfloor a, b \rceil$ - все возможные промежутки между a и b.

Например: (a,b) - интервал; [a,b] - отрезок; [a,b) и (a,b] - полуинтервалы.
Все эти 4 варианта будем обозначим так. Таким образом, правильный прямоугольник: $\Pi = \lfloor a, b \rceil \times \lfloor c, d \rceil$ (рис. **??**).

Замкнутое множество содержит свою границу. Соответственно замкнутый прямоугольник содержит свои границы, а открытый не содержит свои границы.
Замкнутый прямоугольник: $\Pi = [a, b] \times [c, d]$
Открытый прямоугольник: $\Pi = (a, b) \times (c, d)$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

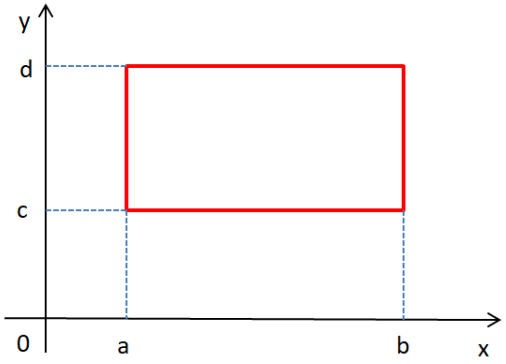

Рис. 1.7. Вид прямоугольника

Но прямоугольник может быть и не закрытым, и не открытым:$\Pi = (a, b] \times (c, d]$

Рассмотрим некоторые свойства:
а) Пересечение правильных прямоугольников - это правильный прямоугольник.
б) Объединение двух правильных прямоугольников можно разбить на объединение непересекающихся правильных прямоугольников.
Прямоугольники могут пересекаться по границе, например как прямоугольники 1

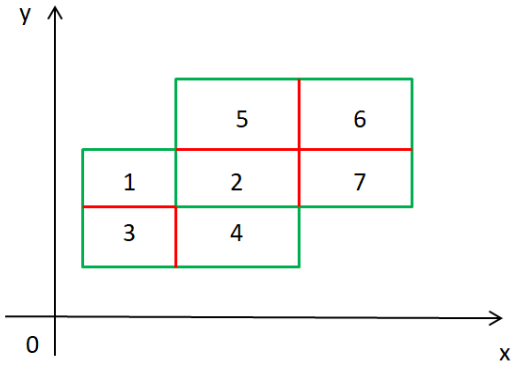

Рис. 1.8. Объединение прямоугольников

и 2, но тогда мы просто границу относим к одному из прямоугольников, например к первому.

Введём площадь прямоугольника (рис.**??**):

$$m(\Pi) = (b - a) \cdot (d - c) \tag{7}$$

Будем иногда называть это не площадью, а мерой прямоугольника. Из формулы 7 следует, что площадь вырожденного отрезка и точки равна нулю. Также в завершение требуем, чтобы $m(\varnothing)$.

1.3 Элементарное множество

Переходим к понятию элементарного множества.

Элементарным множеством называется множество A, которое можно представить в виде объединения конечного числа попарно не пересекающихся правильных прямоугольников.
(в дальнейшем слово правильное будет опускаться, так как мы рассматриваем только правильные прямоугольники).

Примеры:

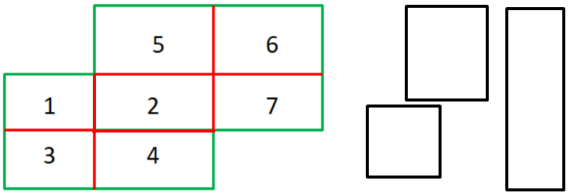

Рис. 1.9. Элементарные множества

1.4 Мера элементарного множества

Введём меру элементарного множества:
пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Pi_j$; $\Pi_{j_1} \bigcap \Pi_{j_2} = \varnothing$, при $j_1 \neq j_2$, тогда

$$m^{'}(A) = \sum_{j=1}^{n} m(\Pi_j) \tag{8}$$

Элементарное множество не единственным способом разбивается на прямоугольники.
Допустим, что $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$ - другая система непересекающихся множеств. Возникает вопрос, будет ли выполнено следующее равенство?

$$m^{'}(A) = \sum_{j=1}^{n} m(\Pi_j) = \sum_{k=1}^{m} m(Q_k) \tag{9}$$

Если это не будет выполнено, то определение бессмысленно, так как площадь элементарного множества зависит от разбиения.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Докажем равенство (??):

$$\Pi_j = A \cap \Pi_j = (\bigcup_{k=1}^{m} Q_k) \bigcap \Pi_j = \bigcup_{k=1}^{m} (Q_k \bigcap \Pi_j) \tag{10}$$

Аналогично:

$$Q_k = A \cap Q_k = (\bigcup_{j=1}^{n} \Pi_j) \bigcap Q_k = \bigcup_{j=1}^{n} (\Pi_j \bigcap Q_k) \tag{11}$$

Рассмотрим $(Q_{k_1} \cap \Pi_j) \bigcap (Q_{k_2} \cap \Pi_j) = ?\varnothing$,при $k_1 \neq k_2$ и фиксированном j.
Мы знаем, что $(Q_{k_1} \cap Q_{k_2}) = \varnothing$.
Подмножество $(Q_{k_1} \cap \Pi_j) \subset Q_{k_1}$; подмножество $(Q_{k_2} \cap \Pi_j) \subset Q_{k_2}$.
Так как $Q_{k_1} \cap Q_{k_2} = \varnothing$, то

$$(Q_{k_1} \cap \Pi_j) \bigcap (Q_{k_2} \cap \Pi_j) = 0 \tag{12}$$

Так это попарно не пересекающиеся множества, то $\Pi_j = \bigcup\limits_{k=1}^{m} (Q_k \bigcap \Pi_j)$ - объединение попарно не пересекающихся множеств, значит:

$$m^{'}(A) = \sum_{j=1}^{n} m(\Pi_j) = \sum_{j=1}^{n} m(\bigcup_{k=1}^{m} (Q_k \bigcap \Pi_j)) \tag{13}$$

Так это попарно не пересекающиеся множества, то

$$m^{'}(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m(Q_k \bigcap \Pi_j) \tag{14}$$

Переставляя знаки сумм и пользуясь равенством (11) $Q_k = \bigcup\limits_{j=1}^{n} (\Pi_j \bigcap Q_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} (Q_k \bigcap \Pi_j)$, получаем

$$m^{'}(A) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m(Q_k \bigcap \Pi_j) = \sum_{k=1}^{m} m(Q_k) \tag{15}$$

Таким образом мы доказали корректность определения меры.

1.5 Свойства меры элементарного множества

а) Конечная аддитивность меры $m^{'}$ элементарных множеств:
если A и B - два элементарных множества и $A \cap B = \varnothing$, тогда

$$m^{'}(A \cup B) = m'(A) + m'(B) \tag{16}$$

Это важное свойство, так как не все меры им обладают. Оно следует из того, что области не пересекаются, поэтому мера это просто сумма площадей.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пересечение элементарных множеств - элементарное множество, так как пересечение правильных прямоугольников можно разбить на объединение правильных прямоугольников.

Следствие из свойства:
Докажем следующую формулу $(A, B \subset \Pi)$

$$m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B) - m'(A \cap B) \tag{17}$$

Доказательство:
Введём обозначение $A^c = \Pi \setminus A$ - дополнение множества A до всеобъемлющего множества Π (в нашем случае это вся доска).
Аналогично: $B^c = \Pi \setminus A$.
Можно показать, что $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (см. рис **??**).
Аналогично: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.

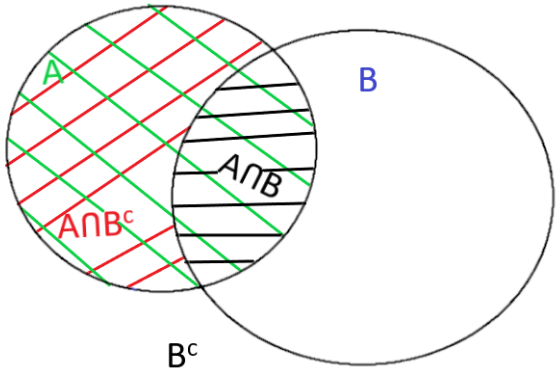

Рис. 1.10. Доказательство равенства

Используя ранее полученные равенства, получим:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \tag{18}$$

$(A \cap B)$ и $(A \cap B^c)$ - не пересекаются, так как
$(A \cap B) \subset B$
$(A \cap B^c) \subset B^c$
$B \cap B^c = \varnothing$
Аналогично $(A \cap B)$ и $(A^c \cap B)$ - не пересекаются, так как
$(A \cap B) \subset A$
$(A^c \cap B) \subset A^c$
$A \cap A^c = \varnothing$
Можно показать, что $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ также не пересекаются. Следовательно мы имеем 3 попарно не пересекающихся множества. Воспользуемся свойством конечной аддитивности меры m' :

$$m'(A \cup B) = m'(A \cap B) + m'(A \cap B^c) + m'(A^c \cap B) \tag{19}$$

$$m'(A) = m'(A \cap B) + m'(A \cap B^c) \tag{20}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$m^{'}(B) = m^{'}(A \cap B) + m^{'}(A^c \cap B) \tag{21}$$

Вычтем из уравнения (19), уравнения (20) и (21), получим

$$m^{'}(A \cup B) - m^{'}(A) - m^{'}(B) = -m^{'}(A \cap B) \tag{22}$$

Тогда получаем нужную формулу:

$$m^{'}(A \cup B) = m'(A) + m'(B) - m^{'}(A \cap B) \tag{23}$$

Эта формула справедлива для любой конечно-аддитивной меры.

б) Монотонность меры элементарного множества.
Пусть элементарное множество $A \subset$ в элементарном множестве B, тогда $m^{'}(A) \leqslant m^{'}(B)$.
Доказательство: $B = (B \setminus A) \cup A$. Необходимо проверить, что разность двух элементарных множеств - это элементарное множество.
$(B \setminus A)$ и A - не пересекаются, то есть $(B \setminus A) \cap A = \varnothing$

$$m^{'}(B) = m'(B \setminus A) + m'(A) \tag{24}$$

Так как $m'(B \setminus A) \geqslant 0$, то

$$m^{'}(B) \geqslant m'(A) \tag{25}$$

в) Пусть A и $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ - это элементарные множества, причём $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, то

$$m^{'}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{N} m^{'}(A_n) \tag{26}$$

Доказательство:
В силу монотонности:

$$m^{'}(A) \leqslant m^{'}(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \tag{27}$$

Рассмотрим случай при N=2: $(A \subset (A_1 \cup A_2))$

$$m^{'}(A) \leqslant m^{'}(A_1 \cup A_2) \tag{28}$$

$$m^{'}(A_1 \cup A_2) = m^{'}(A_1) + m^{'}(A_2) - m^{'}(A_1 \cap A_2) \leqslant m^{'}(A_1) + m^{'}(A_2) \tag{29}$$

Таким образом для N=2 формула верна. Далее доказываем по индукции.

г) Счётная полуаддитивность элементарных множеств.
Пусть A и $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ - это элементарные множества, причём $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, то

$$m^{'}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^{'}(A_n) \tag{30}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1.6 Понятие внешней меры Лебега

Пусть A (произвольное множество) $A \subset \Pi = [0,1] \times [0,1]$. Рассматриваем такой прямоугольник дли удобства (по факту нам важно лишь то, чтобы он был конечным).

Определение: внешней мерой Лебега μ^* множества A называется число

$$\mu^*(A) = inf \sum_{j=1}^{+\infty} m(\Pi_j) \tag{31}$$

где Π_j — произвольная конечная или счётная система прямоугольников (возможно, пересекающихся), покрывающая A ($A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} \Pi_j$).

Наблюдение 1: внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

$inf \sum\limits_{j=1}^{+\infty} m(\Pi_j) \leqslant m(\Pi) = 1$, то есть $\mu^*(A) \leqslant 1$

Наблюдение 2: пусть A - элементарное множество, тогда внешняя мера совпадает с площадью элементарного множества, то есть

$$\mu^*(A) = m^{'}(A) \tag{32}$$

Доказательство:

Так как A элементарно, то его можно представить в виде конечного объединения попарно не пересекающихся прямоугольников, то есть

$A = \bigcup\limits_{k=1}^{N} Q_k$, где $Q_{k_1} \cap Q_{k_2} = \varnothing$, при $k_1 \neq k_2$, тогда

$$m^{'}(A) = \sum_{k=1}^{N} m(Q_k) \tag{33}$$

($m^{'}(A)$ - мера A, $m(A)$ - площадь A)

Пусть $\{\Pi_j\}$ - произвольное покрытие множества A, тогда

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Pi_j \tag{34}$$

Q_k - правильный прямоугольник $\Rightarrow$ элементарное множество, Π_j - элементарное множество.

По свойству монотонности меры элементарного множества:

$$m^{'}(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k) \leqslant m^{'}(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \Pi_j) \tag{35}$$

Так как Q_k попарно не пересекаются, то

$$m^{'}(A) = m^{'}(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k) = \sum_{k=1}^{N} m(Q_k) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} m^{'}(\Pi_j) \tag{36}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(последнее неравенство выполняется в силу свойства счётной полуаддитивности). Мера элементарного множества, если это прямоугольник, совпадает с площадью, то есть

$$m^{'}(\Pi_j) = m(\Pi_j) \tag{37}$$

тогда

$$m^{'}(A) \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} m(\Pi_j) \tag{38}$$

$\sum\limits_{k=1}^{N} m(Q_k)$ - заданное покрытие. Если мы от этой суммы возьмём inf, то она не поменяется, так как сумма не зависит от семейства, покрывающего множество A.

$$inf \sum_{j=1}^{+\infty} m(\Pi_j) = \mu^*(A) \tag{39}$$

Значит, мы получили, что

$$m^{'}(A) \leqslant \mu^*(A) \tag{40}$$

Так как

$$\bigcup_{k=1}^{N} Q_k \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Pi_j \tag{41}$$

то строгого неравенства $m^{'}(A) < \mu^*(A)$ быть не может, поскольку infinum достигается в частности и на $\bigcup\limits_{k=1}^{N} Q_k$, значит получаем знак равенства, то есть

$$\mu^*(A) = m^{'}(A) \tag{42}$$

Свойство 1: счётная полуаддитивность внешней меры.
Пусть $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A и A_n - это произвольные множества, то есть они не обязаны быть элементарными; A,$A_n \subset \Pi$, тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \tag{43}$$

Для меры элементарного множество было свойство конечной аддитивности: если $A \cap B = \varnothing$, то $m^{'}(A \cup B) = m'(A) + m'(B)$.
Внешняя мера Лебега для произвольных множеств из множества Π не обязана быть конечно-аддитивной, однако свойство конечной аддитивности можно доказать для множеств, измеримых по Лебегу.

1.7 Множества, измеримые по Лебегу

Определение: множество $A \subset \Pi$ (всеобъемлющее) называется измеримым по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon$ - элементарное множество такое, что $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

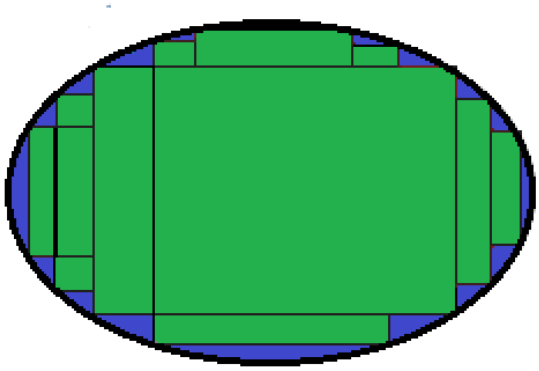

Рис. 1.11. Покрытие множества

Напомним, что $A \triangle A_\varepsilon = (A \cup A_\varepsilon) \setminus (A \cap A_\varepsilon)$ (вычитается общая часть множеств) A_ε - совокупность объединения правильных прямоугольников.
Покроем множество A объединением попарно непересекающихся прямоугольников. Множество измеримо, если мы можем приблизить A множеством A_ε, чтобы синяя часть площади на картинке была сколь угодно малой.

Наблюдение 1:
Пусть $A \subset \Pi$ такое, что $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow$ оно является измеримым.
Доказательство: возьмём $\varepsilon > 0$ и $A_\varepsilon = \varnothing$ (оно также элементарно и $m(\varnothing) = 0$).

$$(A \triangle A_\varepsilon) = (A \cup \varnothing)\setminus(A \cap \varnothing) = A\setminus\varnothing = A \tag{44}$$

Значит,

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon \tag{45}$$

Введём семейство всех измеримых множеств по Лебегу $\longrightarrow \mathfrak{M}$ из $\Pi = [0,1] \times [0,1]$

Лемма: пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, тогда
1) $A \cup B \in \mathfrak{M}$
2) $\Pi\setminus A \in \mathfrak{M}$
3) $A \cap B \in \mathfrak{M}$
4) $A\setminus B \in \mathfrak{M}$
5) $A \triangle B \in \mathfrak{M}$

Доказательство:
1) Так как $A, B \in \mathfrak{M}$ - измеримы,то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon$, что

$$\mu^*\left(A \triangle A_\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*\left(B \triangle B_\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ - элементарное множество, так как объединение двух элементарных множеств можно всегда разрезать на правильные прямоугольники.

$$(A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon) \tag{46}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

откуда в силу монотонности внешней меры

$$\mu^*\left((A\cup B)\vartriangle(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\right)\leqslant\mu^*\left(A\vartriangle A_\varepsilon\right)+\mu^*\left(B\vartriangle B_\varepsilon\right)<\varepsilon$$

2) Пусть $A\in\mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое элементарное множество A_ε, что имеет место неравенство

$$\mu^*\left(A\vartriangle A_\varepsilon\right)<\varepsilon$$

Так как $\Pi\setminus A_\varepsilon$ - элементарное множество и верна формула:

$$(\Pi\backslash A)\vartriangle(\Pi\backslash A_\varepsilon)=A\vartriangle A_\varepsilon$$

то отсюда следуют следующие соотношения:

$$\mu^*\left((\Pi\backslash A)\vartriangle(\Pi\backslash A_\varepsilon)\right)=\mu^*\left(A\vartriangle A_\varepsilon\right)<\varepsilon$$

3) Справедлива следующая формула по формуле де Моргана:

$$\Pi\backslash(A\cap B)=(\Pi\backslash A)\cup(\Pi\backslash B)$$

Теперь возьмём дополнение:

$$\Pi\backslash(\Pi\backslash(A\cap B))=A\cap B$$

из последних равенств вытекает формула:

$$\Pi\setminus((\Pi\backslash A)\cup(\Pi\backslash B))=A\cap B$$

Следовательно, если $A,B\in\mathfrak{M}$, то из свойства 2) следует

$$(\Pi\backslash A),(\Pi\backslash B)\in\mathfrak{M}$$

далее из 1):

$$(\Pi\backslash A)\cup(\Pi\backslash B)\in\mathfrak{M}$$

значит из свойства 2)

$$\Pi\setminus((\Pi\backslash A)\cup(\Pi\backslash B))=A\cap B\in\mathfrak{M}$$

то есть $A\cap B\in\mathfrak{M}$.
4) Измеримость следует из свойств 1), 2), 3) так как верна формула:

$$A\setminus B=A\cap(\Pi\setminus B)$$

5) Измеримость следует из свойств 1), 2), 3) так как верна формула:

$$A\vartriangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1.8 Свойство конечной аддитивности внешней меры Лебега

Мерой Лебега измеримых множеств является внешняя мера. Далее, иногда вместо записи $\mu^*(A)$, где $A \in \mathfrak{M}$, будем писать $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Утверждение: Для любых множеств A,$B \in \Pi$ имеет место следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Доказательство:
Верна формула

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

тогда справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \quad B \subset A \cup (A \triangle B)$$

так как

$$A \cup (A \triangle B) = A \cup B, \quad B \cup (A \triangle B) = A \cup B$$

(выкинули пересечение, но добавили A или B).
В силу монотонности внешней меры имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B) \tag{47}$$

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B) \tag{48}$$

Из (47) получаем:

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Из (48) получаем:

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Откуда вытекает неравенство

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

Теорема: пусть $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$, тогда если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

- свойство конечной аддитивности меры Лебега на семействе измеримых по Лебегу множеств.

Доказательство:
Так как $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_1, B_2$ - элементарные множества, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$$

Введём обозначение:

$$A = A_1 \cup A_2 \quad B = B_1 \cup B_2$$

Из только что доказанного утверждения:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

значит,

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \triangle B)$$

(левая часть может быть '+', может быть '-', но нам не важен знак)

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \triangle B)$$

B - элементарное множество, как объединение двух элементарных множеств, значит по наблюдению 2 (внешняя мера совпадает с площадью элементарного множества):

$$\mu^*(B) = m'(B)$$

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \triangle B)$$

Верна следующая формула:

$$A \triangle B = (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon + \varepsilon$$
$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \triangle B) \geqslant m'(B) - 2\varepsilon$$

Площадь элементарного множества - конечно-аддитивная мера:

$$m^{'}(B) = m^{'}(B_1 \cup B_2) = m'(B_1) + m'(B_2) - m^{'}(B_1 \cap B_2)$$

$$\mu^*(A) \geqslant m^{'}(B_1 \cup B_2) = m'(B_1) + m'(B_2) - m^{'}(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon$$

Далее рассмотри неравенство:

$$|\mu^*(A_1) - \mu^*(B_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1)$$

откуда

$$\mu^*(A_1) - \mu^*(B_1) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1)$$
$$\mu^*(B_1) \geqslant \mu^*(A_1) - \mu^*(A_1 \triangle B_1)$$

Из того, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon$$

получим:

$$m^*(B_1) \geqslant \mu^*(A_1) - \varepsilon$$

Аналогично:

$$m^*(B_2) \geqslant \mu^*(A_2) - \varepsilon$$

тогда

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - m^{'}(B_1 \cap B_2) - 4\varepsilon$$

Так как $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$(B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

$B_1 \cap B_2$ - пересечение элементарных множеств - это элементарное множество.

$$\mu^*(B_1 \cap B_2) = m'(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon$$

Тогда

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

Но также в силу счётной полуаддитивности меры

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

A_1 и A_2 - измеримые множества, значит от μ^* переходим к μ.

Само же равенство получается через объединение двух последних неравенств, то есть

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Что и требовалось доказать

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2 Лекция. Абстрактная мера Лебега

2.1 Понятие измеримости по Лебегу функции

$(\Pi, \mathfrak{M}, \mu)$ - измеримое пространство. Пусть теперь у нас не прямоугольник П, а какое-то заданное X.

Определение: функция $f(x) : X \to \mathbb{R}^1$ называется измеримой по Лебегу на множестве X, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество $\{x \in X : f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$.

Вспомним свойства измеримых по Лебегу множеств: пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, тогда
1) $A \cup B \in \mathfrak{M}$
2) $\Pi \backslash A \in \mathfrak{M}$
3) $A \cap B \in \mathfrak{M}$
4) $A \backslash B \in \mathfrak{M}$
5) $A \triangle B \in \mathfrak{M}$
также справедливо ещё одно свойство (счётное пересечение/объединение измеримых множеств также измеримо):
6) Если $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \in \mathfrak{M}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{M}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{M}$

Справедливы следующие свойства:
Пусть f(x) - измерима, тогда измеримы и следующие множества:
1) $\{x \in X : f(x) \geqslant c\}$
2) $\{x \in X : f(x) \leqslant c\}$
3) $\{x \in X : c_1 < f(x) < c_2\}$
4) $\{x \in X : c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\}$
5) $\{x \in X : c_1 < f(x) \leqslant c_2\}$
6) $\{x \in X : c_1 \leqslant f(x) < c_2\}$

Доказательство 1):

$$\{x \in X : f(x) \geqslant c\} = X \backslash \{x \in X : f(x) < c\}$$

$\{x \in X : f(x) < c\}$ - измеримо, тогда по свойству 3) измеримых по Лебегу множеств, доказано свойство 1).

Доказательство 2): введём семейство множеств B_n Действительно, пусть $f(x)$ измерима, тогда

$$B_n = \{x : f(x) < c + 1/n\}$$

Каждое B_n измеримо (просто заменена константа c на константу c$+\frac{1}{n}$). Здесь важно, что это счётное.

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = B = \{x : f(x) \leqslant c_1\}$$

тогда из свойства 6) измеримых по Лебегу множеств, доказано свойство 2).

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство 3):

$$\{x \in X : c_1 < f(x) < c_2\} = \{x \in X : f(x) < c_2\} \cap \{x \in X : f(x) > c_1\}$$

$$\{x \in X : f(x) < c_2\} \text{ - измеримо}$$

$$\{x \in X : f(x) > c_1\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leqslant c_2\} \text{ - измеримо}$$

Тогда по свойству 2) доказывается измеримость.
Аналогично доказываются свойства 4), 5), 6).

2.2 Свойства измеримых по Лебегу функций

Свойство 1: Пусть $\varphi(y) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$; $\varphi(y)$ - непрерывна, тогда она измерима.

Свойство 2: Композиция функций $\varphi(f(x)) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ измерима, где $f(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ измеримая функция, $\varphi(y) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ - непрерывна.

Свойство 3: пусть функции f(x), g(x): $X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ - измеримые, тогда линейная комбинация этих функций $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ также измерима.
Доказательство: если f(x) измерима, то $\alpha \cdot f(x)$ также измерима, следовательно достаточно доказать измеримость f(x)+g(x).
То есть нужно доказать, что $\forall \in \mathbb{R}^1$ выполнено $\{x \in X : f(x) + g(x) < c\}$

$$A = \{x \in X : f(x) < c - g(x)\} = \{x \in X : f(x) + g(x) < c\}$$

Введём множество B и докажем, что множества A и B совпадают

$$B = \bigcup_{q_n \in Q} \{x \in X : f(x) < q_n\} \cap \{x \in X : q_n < c - g(x)\}$$

где $\bigcup_{q_n \in Q}$ - объединение по всем рациональным числам
(напомним, что множество рациональных чисел счётное).
Пусть $x \in A \Rightarrow$, так как f(x)<c-g(x), то $\exists q_{n0} \in Q$, что $f(x) < q_{n0} < c - g(x) \Rightarrow$

$$x \in \{x \in X : f(x) < q_{n0}\} \cap \{x \in X : q_{n0} < c - g(x)\} \Rightarrow x \in B$$

Пусть $x \in B \longrightarrow \exists q_{n0} \in Q$, что $f(x) < q_{n0} < c - g(x) \Longrightarrow f(x) < c - g(x) \Longrightarrow x \in A$.
Значит A совпадает с B. Итак,

$$\{x \in X : f(x) < q_n\} - \text{измеримо}$$

$$\{x \in X : q_n < c - g(x)\} = \{x \in X : g(x) < c - q_n\} - \text{измеримо}$$

Теперь посмотрим на множество B: пересечение измеримых множеств - измеримо. Счётное объединение измеримых множеств - измеримо. Значит, множество B - измеримо, то есть измеримо и множество A. Следовательно, линейная комбинация измеримых функций - измерима.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойство 4: пусть f(x) и g(x) измеримы, тогда произведение этих функций $f(x) \cdot g(x)$ также измеримо.

Доказательство:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

Так как f и g измеримы, то по свойству 3 f+g также измеримо.
Функция $\varphi(y) = y^2$ непрерывная на $\mathbb{R}^1$.

$$f \cdot g = \frac{1}{2}(\varphi(f+g) - \varphi(f) - \varphi(g))$$

Так как функция φ - непрерывная, а под её знаком измеримые функции, то сложная функция измерима (свойство 2). Линейная комбинация функций также измерима, следовательно и произведение функций измеримо.

Свойство 5: пусть f(x):$X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ - измеримая функция, причём $f(x) \neq 0$ на X, тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ - измеримая.

Доказательство: функция $\varphi(y) = \dfrac{1}{y}$ непрерывна везде, кроме y=0. f(x) - измеримая, $\varphi(y)$ - непрерывная, тогда по свойству 2 - $\dfrac{1}{f(x)}$ измеримая.

Свойство 6: пусть задана последовательность $\{f_n(x)\}, n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1$ - измеримая функция. Предположим, что $\forall x \in X$ выполняется $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ при $n \longrightarrow +\infty$ (поточечная сходимость), тогда f(x) -измеримая.

Доказательство: нужно доказать, что $\forall c \in \mathbb{R}^1$ $A = \{x \in X : f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$.

Введём множество $B = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{n \geqslant l} \left\{ x \in X : f_n(x) < c - \dfrac{1}{k} \right\}$. Покажем, что множества A и B равны.

Пусть $x \in A : f(x) < c$. Значит, $\exists k \in \mathbb{N}$ достаточно большое, что $f(x) < c - \dfrac{2}{k}$.

Мы знаем, что $f_n(x) \longrightarrow f(x) \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geqslant l$ $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{k}$

$$f_n(x) = f_n(x) - f(x) + f(x) \leqslant |f_n(x) - f(x)| + f(x) < \frac{1}{k} + c - \frac{2}{k} < c - \frac{1}{k}$$

Значит, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists l \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant l$

$$f_n(x) < c - \frac{1}{k} - \textbf{то есть } x \in B$$

Теперь докажем в обратную сторону:

пусть $x \in B$, значит $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists l \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant l$ будет выполнено $f_n(x) < c - \dfrac{1}{k}$.

Перейдём к пределу при $n \longrightarrow +\infty$:

$$f(x) \leqslant c - \frac{1}{k} < c \longrightarrow x \in A$$

Теперь посмотрим на множество B: пересечение измеримых множеств - измеримо. Счётное объединение измеримых множеств - измеримо. Значит, множество B - измеримо, то есть измеримо и множество A. Следовательно, f(x)- измеримая.

2.3 Понятие характеристической функции

Введём понятие характеристической функции множеств:

$$\chi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A \\ 0 & \text{при} \quad x \notin A, \, (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

Наблюдение: пусть $A \in \mathfrak{M}$ - измерима, то и $\chi_A(x)$ измерима.
Доказательство: пусть $B = \{x \in X : \chi_A(x) < c\}$, тогда
а) если c>1, то B=X;
б) если $0 < \leqslant 1$, то $B = X \setminus A$
в) если $c \leqslant 0$, то $B = \varnothing$
То есть множество B всегда измеримо.

2.4 Построение интеграла Лебега для простых функций

Введём понятие простой функции:
Определение: Функция

$$h(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}^1$$

где $A_{i\,i=1}^{n} \in \mathfrak{M}$ называется простой (линейная комбинация характеристических функций). Очевидно, что простые функции измеримы.
Введём интеграл Лебега для простой функции:

$$\int_X h(x) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\left(A_i\right)$$

Теперь введём интеграл Лебега для произвольной измеримой функции по Лебегу (интеграл Лебега строится только для измеримых функций).
Пусть f(x) - измерима. Рассмотрим множество простых функций H:

$$H := \{h(x) \geqslant 0 : \quad f(x) \geqslant h(x)\}$$

Тогда интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции:

$$\int_X f(x) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{h(x) \in H} \int_X h(x) d\mu$$

Произвольное число z можно представить в виде:

$$z = \frac{z + |z|}{2} - \frac{|z| - z}{2}$$

Пусть

$$z_+ = \frac{z + |z|}{2} = \begin{cases} z, z \geqslant 0 \\ 0, z < 0 \end{cases} = max\{z, 0\}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$z_- = \frac{|z| - z}{2} = \begin{cases} 0, z \geqslant 0 \\ -z, z < 0 \end{cases} = max\{0, -z\}$$

Тогда z можно представить как разность двух неотрицательных чисел

$$z = z_+ - z_-$$

Функция $z_+(z)$ - непрерывная:
Аналогично функция $z_-(z)$ - непрерывная.

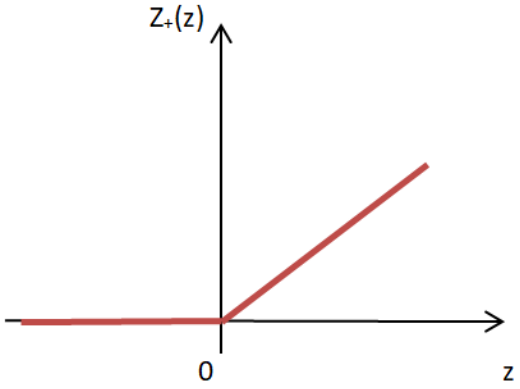

Рис 2.1. График функции $z_+(z)$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

2.5 Интеграл измеримой по Лебегу функции

Для любой измеримой функции f(x) интеграл Лебега по определению:

$$\int_X f(x)d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f_+(x)d\mu - \int_X f_-(x)d\mu$$

Замечание 1: пусть f(x) - измеримая, тогда$f_+(x)$ и $f_-(x)$ - также измеримы. $(f(x))_+$ и $(f(x))_-$ у нас сложные функции, которые являются композицией непрерывных функций z_+ и z_-, а также измеримой функции $f(x)$, значит по 2 свойству эти функции измеримы.

Замечание 2: если $(f(x))_+$ и $(f(x))_-$ измеримы, то f(x) также измерима, так как $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ - линейная комбинация измеримых функций.
Значит, для того, чтобы f(x) была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы f_+ и f_- были измеримы (утверждение, что если только одна из функций f_+ или f_- измерима, то f измерима неверно).
Вспомним интеграл Римана: из того, что $|f(x)|$ интегрируема по Риману не следует,

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

что f(x) интегрируем по Риману.
Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap Q \\ -1, x \in [0,1] \cap I \end{cases}$$

где Q - множество рациональных чисел; I - множество иррациональных чисел; а $|f(x)| = 1$ на [0,1].
В интеграле Лебега всё хорошо. Это хорошо тем, что в Римане нет равенства,

$$|\int f(x)d\mu| \leqslant \int |f(x)|d\mu$$

а в Лебеге есть.

2.6 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

Теорема 1: пусть f(x) измерима, тогда для того, чтобы f(x) была интегрируема по Лебегу на X необходимо и достаточно, чтобы $|f(x)|$ была интегрируема по Лебегу.
Доказательство: 1) если f(x) - измерима, то $|f(x)|$ также измерима, так как $|z|$ - непрерывная функция, f(x) - измеримая. Можно также доказать это немного по-другому:

$$\{x \in X : |f(x)| < c\} = \{x \in X : -c < f(x) < c\} \text{ - измеримо}$$

Пусть у нас f(x) - интегрируема по Лебегу $\longrightarrow$ f_+ и f_- - интегрируемы по Лебегу по построению.
Рассмотрим

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Значит,

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Необходимость доказана (сумма двух интегрируемых функций).
2) Пусть теперь $|f(x)|$ - интегрируемая по Лебегу функция.
Введём множества: (h(x) - простые функции)

$$H := \{h(x) \geqslant 0 : \quad f(x) \geqslant h(x)\}$$

$$H_+ := \{h(x) \geqslant 0 : \quad f_+(x) \geqslant h(x)\}$$

$$H_- := \{h(x) \geqslant 0 : \quad f_-(x) \geqslant h(x)\}$$

Так как $f_+(x)$ и $f_-(x)$ - неотрицательные функции, то в силу равенства

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

получим

$$|f(x)| \geqslant f_+(x) \quad |f(x)| \geqslant f_-(x)$$

Далее докажем, что $H_+ \subset H$ и $H_- \subset H$.
Пусть $h(x) \in H_+ \longrightarrow f_+(x) \geqslant h(x) \Rightarrow |f(x)| \geqslant f_+(x) \geqslant h(x) \longrightarrow h(x) \in H$
Нам известно, что $\int\limits_X |f(x)|d\mu$ - существует

$$\int\limits_X |f(x)|d\mu = \sup_{h(x)\in H} \int\limits_X h(x)d\mu$$

Рассмотрим интегралы:

$$\int\limits_X f_\pm(x)d\mu = \sup_{h(x)\in H_\pm} \int\limits_X h(x)d\mu$$

У нас есть вложение: $H_\pm \subset H$. Функции $f_\pm(x)$ неотрицательные, значит верны следующие неравенства:

$$\sup_{h(x)\in H} \int\limits_X h(x)d\mu \geqslant \sup_{h(x)\in H_\pm} \int\limits_X h(x)d\mu \geqslant 0$$

Левый супремум существует, значит есть и правый, следовательно $f_+(x)$ и $f_-(x)$ интегрируемы по Лебегу. Значит, $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ - интегрируема по построению интеграла Лебега.

2.7 Теорема о счётной аддитивности интеграла Лебега

Теорема: пусть измеримая функция f(x) интегрируема на измеримом множестве $A \subset X$, где $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n - также измеримы, $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing$ $(n_1 \neq n_2)$. Тогда

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} f(x)d\mu$$

Докажем теорему в несколько шагов.
Шаг I. Сначала докажем конечную аддитивность интеграла Лебега.
Пусть

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

тогда

$$\int\limits_{A_1 \cup A_2} f(x)d\mu = \int\limits_{A_1} f(x)d\mu + \int\limits_{A_2} f(x)d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Шаг 2. Докажем теперь счётную аддитивность интеграла Лебега.
Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B_N \cup C_N, \quad B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N = \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n, \quad C_N \cap B_N = \varnothing$$

$$I_N = \int\limits_{B_N} f(x)d\mu, \quad I = \int\limits_{A} f(x)d\mu$$

Докажем следующее неравенство:

Замечание:

$$|\int\limits_{A} f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_{A} |f(x)|d\mu$$

Доказательство:

$$|\int\limits_{A} f(x)d\mu| = |\int\limits_{A} f_+(x)d\mu - \int\limits_{A} f_-(x)d\mu| \leqslant \int\limits_{A} f_+(x)d\mu + \int\limits_{A} f_-(x)d\mu =$$

$$= \int\limits_{A} [f_+(x) + f_-(x)]d\mu = \int\limits_{A} |f(x)|d\mu$$

То есть

$$|\int\limits_{A} f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_{A} |f(x)|d\mu$$

Рассмотрим $|I - I_N|$. В силу шага 1:

$$I = \int\limits_{A} f(x)d\mu = \int\limits_{B_N} f(x)d\mu + \int\limits_{C_N} f(x)d\mu$$

Значит,

$$I - I_N = \int\limits_{C_N} f(x)d\mu$$

$$|I_N - I| = \left|\int\limits_{C_N} f(x)d\mu\right| \leqslant \int\limits_{C_N} |f(x)|d\mu$$

Так как f(x) - интегрируема, то $|f(x)|$ также интегрируема. Значит,
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_\varepsilon(x)$, что

$$\int\limits_{A} \left[|f(x)| - h_\varepsilon(x)\right] d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

где $h_\varepsilon(x), h_\varepsilon(x) \leqslant |f(x)|$ - простая функция.

$$C_N \subset A \Rightarrow \int\limits_{C_N} \left[|f(x)| - h_\varepsilon(x)\right] d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Из вида простой функции следует, что

$$\int\limits_{C_N} h_\varepsilon(x)d\mu \leqslant M(\varepsilon)\mu\left(C_N\right)$$

где $M(\varepsilon)$ - число, зависящее от ε
В силу $C_N = \bigcup\limits_{n=N+1}^{\infty} A_n$ и счётной аддитивности меры Лебега:

$$\mu\left(C_N\right) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$$

Поэтому $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall N \geqslant N_0$

$$\int\limits_{C_N} h_\varepsilon(x)d\mu \leqslant M(\varepsilon)\mu\left(C_N\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит, $\forall N \geqslant N_0$

$$|I_N - I| =\leqslant \int\limits_{C_N} |f(x)|d\mu = \int\limits_{C_N} h_\varepsilon(x)d\mu + \int\limits_{C_N} \left[|f(x)| - h_\varepsilon(x)\right]d\mu < \varepsilon$$

Значит,

$$I_N \longrightarrow I, \textbf{при } N \longrightarrow +\infty$$

$$I_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} f(x)d\mu \longrightarrow \int\limits_A f(x)d\mu$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3 Лекция. Свойства интеграла Лебега

3.1 Виды сходимости

1. **Поточечная сходимость**: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ в каждой точке при $n \longrightarrow +\infty$, если $|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ при каждом x$\in X$.

2. **Равномерная сходимость**: $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$.

3. **Сходимость почти всюду**: если $\exists\ E \subset X$, где $\mu(E) = 0$, что $\forall x \in X \backslash E$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. (та же поточечная сходимость, но не для всех $x \in X$, а в $x \in X \backslash E$). По-другому определение можно сформулировать так: функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся почти всюду к функции $f(x)$, если множество точек из X, на которых последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к функции $f(x)$ имеет нулевую μ -меру.

3. **Сходимость по мере**: функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся по мере μ к функции $f(x)$ ($f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$), если для всякого $c > 0$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant c\}\right) = 0$$

3.2 Связь видов сходимости

Возникает вопрос о том, как связаны эти четыре типа сходимостей функциональных последовательностей. Имеет место следующая цепочка:
Оказывается, что есть в некотором смысле и обратная связь этих понятий. Так,

равномерная сходимость $\Rightarrow$ **поточечная сходимость** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **сходимость п. вс.** $\Rightarrow$ **сходимость по мере**.

Рис. 3.1. Взаимосвязь различных видов сходимостей

оказывается, что если последовательность сходится по мере, то существует её подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

3.3 Теорема Егорова

Теорема Егорова: пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду к f(x), тогда $\forall \delta > 0\ \exists X_\delta \subset X$, где X_δ - измеримое множество, причём $\mu\left(X \backslash X_\delta\right) < \delta$, при этом

$$\sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0, \text{ при } n \longrightarrow +\infty$$

3.4 Неравенство Чебышева

Пусть $f(x) \geqslant 0$ интегрируема на X и пусть $c > 0$ - произвольное положительное число, тогда

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant c\}) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)d\mu$$

Доказательство: для доказательства обозначим $A = \{x \in X : f(x) \geqslant c > 0\}$ - измеримое множество в силу измеримости f(x). Множество $X \setminus A$ также измеримо. Рассмотрим $\int\limits_X f(x)d\mu$. Интеграл Лебега имеет свойство конечной аддитивности:

$$\int\limits_X f(x)d\mu = \int\limits_A f(x)d\mu + \int\limits_{X\setminus A} f(x)d\mu$$

Так как f(x)$\geqslant 0$, то $\int\limits_{X\setminus A} f(x)d\mu \geqslant 0$, значит

$$\int\limits_X f(x)d\mu \geqslant \int\limits_{X\setminus A} f(x)d\mu \geqslant c \cdot \mu(A)$$

Откуда получим, что

$$\mu(A) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X f(x)d\mu$$

3.5 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве X, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset X$, где $\mu(e) < \delta$ имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_e f(x)d\mu\right| < \varepsilon$$

Доказательство:
Шаг 1: пусть функция f(x) ограничена:$|f(x)| \leqslant c_1$, тогда справедливо неравенство:

$$\left|\int\limits_e f(x)d\mu\right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|d\mu \leqslant c_1\mu(e) \leqslant c_1 < \varepsilon$$

как только $\mu(e) < \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{c_1}$

Шаг 2: если функция неограниченная: введём измеримое множество

$$A_m := \{x \in X : m - 1 \leqslant |f(x)| < m\},$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$A_{m_1} \cap A_{m_2} = \varnothing$, где $m_1 \neq m_2$, то есть множества не пересекаются.
Множество X можно представить так:

$$X = \bigcup_{m=1}^{N} A_m = B_N \cup C_N$$

$$B_N := \bigcup_{m=1}^{N} A_m, \quad C_N := X \backslash B_N = \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n$$

Так как $X = B_N \cup C_N$, и $B_N \cap C_N = \varnothing$, то

$$e = e \cap X = e \cap (B_N \cup C_N) = (e \cap B_N) \cup (e \cap C_N)$$

Так как B_N и C_N - не пересекаются, то их подмножества тем более не пересекаются.

По необходимому и достаточному условию интегрируемости функции по Лебегу:

$$|\int\limits_e f(x)d\mu| \leqslant \int\limits_e |f(x)|d\mu = \int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|d\mu + \int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|d\mu$$

$$\int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|d\mu \leqslant N \cdot \mu(e) \text{ , так как } |f(x)| < N$$

$$\int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|d\mu \leqslant \int\limits_{C_N} |f(x)|d\mu = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|d\mu$$

так как интеграл Лебега счётно-аддитивный, а A_n попарно не пересекаются. Значит,

$$\int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|d\mu \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|d\mu = \int\limits_X |f(x)|d\mu < +\infty \text{ ,так как |f(x)| интегрируема}$$

В частности, ряд в правой части сходится. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{e\cap A_n} |f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Выберем ещё

$$\mu(e) < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2N}$$

Тогда

$$\int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|d\mu \leqslant N \cdot \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит,

$$|\int\limits_e f(x)d\mu| < \varepsilon$$

То есть абсолютная непрерывность интеграла Лебега в общем случае доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3.6 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла (теорема Лебега)

Все утверждения будем доказывать, когда $\mu(X) < +\infty$ - конечная.

Теорема Лебега:

1) Пусть последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на множестве X к функций f.

2) Для почти всех $x \in X$ имеет место неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ интегрируема по Лебегу

Тогда

1. Функции $f(x)$ и $f_n(x)$ при всех n интегрируемы по Лебегу.

2. Имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

Доказательство:

1. Можно доказать, что если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду на множестве X к функций $f(x)$, то f(x) - измеримая.
$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ для почти всех $x \in X$. Тогда предельным переходом при n$\longrightarrow +\infty$ получим, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ для почти всех $x \in X$.
Введём 2 класса простых функций:

$$H := \{h(x) \geqslant 0 : |f(x)| \geqslant h(x)\}$$
$$G := \{h(x) \geqslant 0 : \varphi(x) \geqslant h(x)\}$$

Значит, $h(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \varphi(x)$.
Если $h(x) \in H \Rightarrow h(x) \in G \Rightarrow H \subset G$

$$\sup_{h(x) \in G} \int_X h(x) d\mu \geqslant \sup_{h(x) \in H} \int_X h(x) d\mu$$

Левый супремум существует, так это функция $\varphi(x)$ интегрируема, значит существует и правый супремум.

$$\sup_{h(x) \in G} \int_X h(x) d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu \geqslant \int_X |f(x)| d\mu = \sup_{h(x) \in H} \int_X h(x) d\mu$$

Значит функции $f(x)$ и $f_n(x)$ при всех n интегрируемы по Лебегу.

2. У нас последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на множестве X к функций f, тогда по теореме Егорова тогда $\forall \delta > 0 \; \exists X_\delta \subset X$, где X_δ - измеримое множество, причём $\mu\left(X \backslash X_\delta\right) < \delta$, при этом

$$\sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0, \text{ при } n \longrightarrow +\infty$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит, $\exists N$, что $\forall n \geqslant N$

$$\sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X_\delta)}$$

Причём, $\mu(X_\delta) < +\infty$ - измеримая.

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $Y_\delta \subset X$ с $\mu(Y_\delta) < \delta$ выполняется

$$\int_{Y_\delta} \varphi(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$$

Пусть $Y_\delta = X \backslash X_\delta$ (у нас как раз $\mu\,(X \backslash X_\delta) < \delta$). Тогда X=$X_\delta \cup Y_\delta$ - не пересекаются.
Рассмотрим разность:

$$|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu\,| = |\int_{X_\delta} f_n(x)d\mu + \int_{Y_\delta} f_n(x)d\mu - \int_{X_\delta} f(x)d\mu - \int_{Y_\delta} f(x)d\mu\,| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_{X_\delta} (f_n(x) - f(x))d\mu\,| + |\int_{Y_\delta} f_n(x)d\mu\,| + |\int_{Y_\delta} f(x)d\mu\,| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_{X_\delta} (f_n(x) - f(x))d\mu\,| + \int_{Y_\delta} |\,f_n(x)\,|\,d\mu + \int_{Y_\delta} |\,f(x)\,|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant |\int_{X_\delta} (f_n(x) - f(x))d\mu\,| + 2\int_{Y_\delta} \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Так как

$$|\int_{X_\delta} (f_n(x) - f(x))d\mu\,| \leqslant \mu(X_\delta) \cdot \sup_{x \in X_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$2\int_{Y_\delta} \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, что $\forall n \geqslant N$

$$|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu\,| < \varepsilon$$

То есть,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3.7 Теорема Беппо Леви

Пусть задана последовательность $f_n(x)$ измеримых функций, что $\forall x \in X$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$$

причём

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu \leqslant k < +\infty$$

где k не зависит от n.

Тогда

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

Шаг 1. Ограничимся случаем, когда почти всюду $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций

$$\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

Докажем, что $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ почти всюду (где f(x) какой-то конечный предел для каждого x).

Введём множество:

$$\Omega = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$$

Необходимо доказать, что множество Ω имеет нулевую меру Лебега μ. Введём следующие обозначения:

$$\Omega_n^{(r)} = \{x \in X : f_n(x) > r\}$$

$$\Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^{(r)}$$

Наша задача доказать, что

$$\Omega^{(r)} = D = \{x \in X : f(x) > r\}; \quad \text{то есть D} = \Omega^{(r)}$$

Доказательство:
Пусть $x \in \Omega^{(r)} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $x \in \Omega_{n_0}^{(r)} \Rightarrow f_{n_0}(x) > r \Rightarrow f(x) \geqslant f_{n_0}(x) > r \Rightarrow f(x) < r$ $\Rightarrow x \in D$.

Пусть $x \in D \Rightarrow f(x) < r \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $\Rightarrow f(x) \geqslant f_{n_0}(x) > r$, так как $f_n(x) \longrightarrow f(x) \Rightarrow f_{n_0}(x) > r \Rightarrow x \in \Omega_{n_0}^{(r)} \Rightarrow x \in \Omega^{(r)}$.

На домашнее доказательство:

$$\Omega = \bigcap_r \Omega^{(r)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Докажем, что

$$\mu\left(\Omega^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}$$

Заметим, что $\Omega_n^{(r)} \subset \Omega_{n+1}^{(r)}$.

Пусть $x \in \Omega_n^{(r)} \Rightarrow f_n(x) > r$. По условию $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ и $r > f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) > r \Rightarrow x \in \Omega_{n+1}^{(r)}$. То есть у нас последовательность расширяющихся множеств.

Построим систему попарно непересекающихся множеств:

$$\widehat{\Omega}_n^{(r)} = \Omega_n^{(r)} \backslash \Omega_{n-1}^{(r)} \quad \text{, где } n \geqslant 2$$

и

$$\widehat{\Omega}_1^{(r)} = \Omega_n^{(r)} \Rightarrow \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widehat{\Omega}_n^{(r)}$$

- счётное объединение попарно непересекающихся множеств.

Так как мера Лебега счётно-аддитивна, то

$$\mu(\Omega^{(r)}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\widehat{\Omega}_n^{(r)}) = \sum_{n=1}^{N} \mu(\widehat{\Omega}_n^{(r)}) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(\widehat{\Omega}_n^{(r)}) = \mu(\Omega_N^r) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(\widehat{\Omega}_n^{(r)})$$

$\Omega^{(r)}$ - измеримое множество, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \text{ что } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(\widehat{\Omega}_n^{(r)}) < \varepsilon$$

$$\bigcup_{n=1}^{N} \widehat{\Omega}_n^{(r)} = \Omega_N^{(r)}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \text{ что } \mu(\Omega^{(r)}) \leqslant \mu(\Omega_N^{(r)}) + \varepsilon$$

Из неравенства Чебышёва в силу следует, что при всех n, r

$$\mu\left(\Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}$$

так как

$$\Omega_N^{(r)} = \{x \in X : f_n(x) > r\}$$

$$\mu\left(\Omega_N^{(r)}\right) \leqslant \frac{1}{r} \int_X f_N(x) d\mu \leqslant \frac{K}{r}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\Omega = \bigcap_{r>0} \Omega^{(r)}$$

$$\Omega = \Omega^{(r)}$$

По монотонности меры Лебега:

$$\mu(\Omega) \leqslant \mu(\Omega^{(r)}) \leqslant \frac{K}{r}$$

При $r \longrightarrow +\infty$ $\mu(\Omega) \leqslant 0 \Rightarrow \mu(\Omega) = 0$.
Значит, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ почти всюду.
Нам не хватает того, что $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ - интегрируемая по Лебегу, а далее применяем теорему Лебега.
Построим $\varphi(x)$: разобъем X на попарно не пересекающиеся

$$A_m \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid m-1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$X = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m, \quad A_{m_1} \cap A_{m_2} = \varnothing, \quad m_1 \neq m_2$$

Напомним, что $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \mu(A_m) < +\infty$ Положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Заметим, что на множестве A_m

$$\varphi(x) = m \leqslant f(x) + 1$$

Введём:

$$B_N = \bigcup_{m=1}^{N} A_m, \quad A_{m_1} \cap A_{m_2} = \varnothing, \quad m_1 \neq m_2$$

$$\int\limits_{B_N} \varphi(x)d\mu \leqslant \int\limits_{B_N} f(x)d\mu + \mu\left(B_N\right) \leqslant \int\limits_{B_N} f(x)d\mu + \mu(X)$$

Мы доказали, что $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ почти всюду на X и в частности на B_N
$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant N$ (f(x) ограничена на B_N). У нас выполнены все условия теоремы Лебега.

$$K \geqslant \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int\limits_{B_N} f_n(x)d\mu = \int\limits_{B_N} f(x)d\mu$$

С другой стороны:

$$0 \leqslant \int\limits_{B_N} f_n(x)d\mu \leqslant \int\limits_{X} f(x)d\mu \leqslant K$$

Значит,

$$\int\limits_{B_N} \varphi(x)d\mu \leqslant \int\limits_{B_N} f(x)d\mu + \mu(X) \leqslant K + \mu(X) < +\infty$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\int\limits_{B_N} \varphi(x)d\mu = \sum_{m=1}^{N} \mu(A_m) \cdot m$$

При $n \longrightarrow +\infty$ ряд сходится, так как он сверху оценивается числом, не зависящем от N (K+$\mu(X)$), то есть $\varphi(X)$ - интегрируема.
$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$ всюду.
По теореме Лебега

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

3.8 Лемма Фату

Докажем теперь важное утверждение, известное как лемма Фату.

Пусть последовательность неотрицательных измеримых функций почти всюду $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ на X, причём

$$\int\limits_X f_n(x)d\mu \leqslant K$$

тогда

$$\int\limits_X f(x)d\mu \leqslant K$$

Замечание: **Нет свойства**

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu = \int\limits_X f(x)d\mu$$

Есть только такое:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu \geqslant \int\limits_X f(x)d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4 Лекция. Метрические пространства I

4.1 Пространство всех измеримых по Лебегу функций

Пусть задано измеримое пространство (X,$\mathfrak{M}$,μ).
Пусть

$$f(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad g(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

Ранее доказывали, что если f(x) и g(x) - интегрируемы, то $\alpha f(x)+\beta g(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}^1/$.
Обозначим $\mathcal{L}(X, \mu)$ - сюда входят все функции, которые измеримы и интегрируемы на множестве X.
$\mathcal{L}(X, \mu)$ - линейное пространство, причём f(x)=0 - это нуль этого линейного пространства.

Введём расстояние по определению:

$$d(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|d\mu$$

4.2 Метрическое пространство

Множество Y называется метрическим пространством, если на нём задана вещественная и неотрицательная функция d: $Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ со следующими свойствами:
1) d(x,y) = 0 тогда и только тогда, когда x = y;
2) d(x,y) = d(y, x) для всех x, y $\in$ Y ;
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ для всех x, y, z $\in$ Y.
Мы хотим ввести метрику на $\mathcal{L}(X, \mu)$. Смотрим:
2) и 3) свойства выполнены по неравенству для модуля. Однако не выполняется требование 1). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции f(x) и g(x) отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, d(f, g) = 0, но f(x) $\neq$ g(x) на X.

4.3 Классы функций

Будем вместо функций f(x) $\in \mathcal{L}(X, \mu)$ рассматривать классы функций f(x) такие, что g(x) $\in \mathcal{L}(X, \mu)$ принадлежат одному классу f(x), если g(x)=f(x) почти всюду.

$\mathcal{L}(X, \mu)$ - линейное пространство. Введём метрику:

$$d^\circ(\{f(x)\}, \{g(x)\}) = d(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|d\mu$$

где f(x) $\in$ f(x), g(x) $\in$ g(x), т. е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на пространстве $\mathcal{L}(X, \mu)$ классов функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов.
Естественно, нам нужно доказать, что определение метрики корректно.

Пусть $f(x), f_1(x) \in \{f(x)\}$ и $g(x), g_1(x) \in \{g(x)\}$. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$d(f,g) \leqslant d(f,f_1) + d(f_1,g_1) + d(g_1,g) = d(f_1,g_1)$$
$$d(f_1,g_1) \leqslant d(f_1,f) + d(f,g) + d(g,g_1) = d(f,g)$$

Поскольку в силу определения d, из того, что

$$f_1(x) = f_2(x) = f(x), g_1(x) = g_2(x) = g(x) \text{ почти всюду}$$

имеют место равенства

$$d(f,f_1) = d(f_1,f) = 0, \quad d(g,g_1) = d(g_1,g) = 0$$

Следовательно

$$d(f,g) = d(f_1,g_1)$$

Стало быть определение корректно. Значит наше пространство классов функций стало метрическим (линейным).

4.4 Линейное нормированное пространство

Нам нужно нормированное. Дадим определение нормированного пространства.

Линейное пространство E называется нормированным, если на нём можно задать вещественную неотрицательную функцию задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X,\mu) \longrightarrow \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства:
1) $\|\alpha x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Можно на линейном пространстве $\mathcal{L}(X,\mu)$ ввести норму следующим образом:

$$\|\{f\}\| := \int_X |f(x)| d\mu$$

2) и 3) свойства очевидно выполняются. Проверим первое:

$$\int_X |f(x)| d\mu \Rightarrow f(x) = 0 \text{почти всюду}$$

$\theta \ni f(x)$, если f(x) почти всюду равен нулю, значит первое свойство выполнено.

Возникает пространство Лебега $L^1(X,\mu)$
Определение Измеримые функции f(x), у которых

$$|f(x)|^p \in \mathcal{L}(X,\mu) \quad \text{при} \quad p > 0$$

будем обозначать как пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из пространства $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ на классы функций $\{f\}$, Мы получим класс

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$L^p(X,\mu)$ при $p \in \in (0,+\infty)$.
В случае 0<p<1 - всё плохо, его мы рассматривать не будем.

Заметим, что класс функций $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным нормированным. пространством. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X,\mu)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место неравенство:

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant K(p)\left(|\alpha|^p |f(x)|^p + |\beta|^p |g(x)|^p\right) \in L(X,\mu)$$

так как пространство $L(X,\mu)$ является линейным. Значит, пространство $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ норму:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} : L^p(X,\mu)$$

Проверим, что это является нормой:
1) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = \theta(x)$ - верно, так как у нас здесь класс функций.
2) Очевидно выполняется.
3) Это неравенство Минковского: $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

4.5 Неравенство Гельдера. Арифметическое неравенство Гельдера

Докажем сначала арифметическое неравенство Гёльдера:
Теорема: для неотрицательных чисел a, b имеет место неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \text{где p,q} > 1 \text{ и } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ в окрестности точки $x = 1$ и $\alpha \in (0,1)$. По формуле Лагранжа имеем

$$x^\alpha = 1^\alpha + \alpha z^{\alpha-1}(x-1), \quad z \in (1,x)$$

Отсюда сразу же получаем следующее неравенство:

$$x^\alpha - 1 \leqslant \alpha(x-1) \quad \text{при} \quad x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha \in (0,1)$$

Если a или b =0, то неравенство выполнено.
Пусть $a > 0, b > 0$ и без ограничения общности $a \geqslant b > 0$.
Пусть

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - 1 \leqslant \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$a^{1/p}b^{-1/p} - 1 \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{a}{b} - \frac{1}{p} \quad |\cdot b \text{ и учитывая } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$$

$$a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

Сделаем в последнем неравенстве замену

$$a \mapsto a^p \quad \text{и} \quad b \mapsto b^q$$

и в результате получим искомое неравенство

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

4.6 Неравенство Гельдера для функций

Теперь докажем неравенство Гёльдера для функций:
Возьмем

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

и подставим их в арифметическое неравенство, откуда

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q}$$

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим

$$\int_X (frac|f(x)|\|f\|_p \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q})d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_X (\frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_p^p})d\mu + \frac{1}{q}\int_X (\frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q})d\mu$$

Вспоминая, что

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \|f(x)\|_p^p \quad \text{и} \quad \int_X |g(x)|^q d\mu = \|g(x)\|_q^q$$

$$\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гёльдера:

$$\int_X |f(x)|\cdot|g(x)|d\mu \leqslant \|f(x)\|_p \cdot \|g(x)\|_q$$

Теорема Гёльдера:
Пусть $f(x) \in L^p(X,\mu)$ и $g(x) \in L^q(X,\mu)$ при $p, q \in (1, + +\infty)$, причём

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

тогда $f(x)\cdot g(x) \in L^1(X,\mu)$ и

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4.7 Неравенство Минковского

Неравенство Минковского:
Пусть $f, g \in L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$, тогда

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Доказательство: нужно доказать соотношение

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Рассмотрим

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|$$

Рассмотрим отдельно:

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)| d\mu\right) \leqslant \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера, в котором:
$f_1(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}, \quad f_2(x) = |f(x)|, \quad p_1 = \frac{p}{p-1}, \quad p_2 = p.$
Аналогично

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot |g(x)| d\mu\right) \leqslant \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_X |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера, в котором:
$f_1(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}, \quad f_2(x) = |g(x)|, \quad p_1 = \frac{p}{p-1}, \quad p_2 = p.$
Тогда

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu \leqslant \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \times \left(\left(\int_X |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Обе части неравенства делим на $\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$ и получаем нужное нам неравенство.

4.8 Метрические пространства

Введём функцию:

$$\chi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0,1] \cap Q \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \cap J \end{cases}$$

- она почти всюду равна нулю. $\chi(x) \sim \theta(x)$

(Y,d) - метрическое пространство с метрикой.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4.9 Открытый шар. Замкнутый шар. Открытое множество. Замкнутое множество

Открытый шар: $O(x_0, r)$ метрического пространства (Y, d)

$$O(x_0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

Замкнутый шар $K(x_0, r)$ метрического пространства (Y, d)

$$K(x_0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant r\}$$

Множество A называется **открытым**, если $\forall x_0 \in A \; \exists O(x_0, r_0)$,где $r_0 > 0$, что $O(x_0, r_0) \subset A$.

Множество B называется **замкнутым**, если $Y \; B$ - открыто.
Примером замкнутого множества является точка на плоскости.

4.10 Изолированная точка множества. Точка прикосновения

Точка $x_0 \in A$ называется **изолированной** точкой множества A, если существует такой открытый шар $O(x_0, r_0)$ радиуса $r_0 > 0$, что $O(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$

Точка x_0 не обязательно из множества A называется **точкой прикосновения** этого множества A, если всякий шар $O(x_0, r) \cap A \ni x_1 \in A$, где $x_1 \neq x_0$

4.11 Теорема о замкнутом множестве

Лемма: Для того, чтобы множество A было замкнутым необходимо и достаточно, чтобы множество A содержало все свои точки прикосновения.

Необходимость:
пусть A - замкнуто. Докажем, что оно содержит все свои точки прикосновения.
Пусть x_0 - точка прикосновения множества A $\Rightarrow O(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$
Доказывать будем от противного:
Пусть $x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \; Y \backslash A$. Из определения замкнутого множества следует, что $Y \backslash A$ - открытое $\Rightarrow \exists O(x_0, r_0) \subset Y \backslash A$ (целиком содержится в дополнении). Значит, $\Rightarrow O(x_0, r) \cap A = \varnothing$. Получили противоречие с тем, что x_0 - точка прикосновения.

Достаточность:
Пусть A содержит все свои точки соприкосновения. Докажем, что оно замкнуто, то есть $Y \backslash A$ - открытое.
Пусть $x_0 \in Y \backslash A$. Докажем, что $\exists O(x_0, r_0) \subset Y \setminus A$.
От противного: пусть такого шарика нет, значит $\forall r > 0 \; O(x_0, r) \nsubseteq Y \backslash A \Rightarrow O(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$.
Возможные случаи: 1) x_0 - изолированная точка, значит $x_0 \in$, противоречие.
2) x_0 - точка прикосновения, значит $x_0 \in$, так как это множество содержит все свои точки соприкосновения, опять же получили противоречие.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

4.12 Лемма о топологии

Сформулируем **лемму о топологии**:
1) Произвольное объединение конечного числа открытых множеств - открытое множество.
2) Пересечение конечного числа открытых множеств - открытое множеств.
3) Пересечение любого числа замкнутых множеств - замкнутое множество.
4) Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнуто.
5) Само метрическое пространство Y и пустое множество $\varnothing$ - это одновременно открытые и замкнутые множества.

Доказательство 1):
Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ - произвольное семейство множеств. Пусть

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$$

тогда найдётся такое $\alpha_0 \in A$ и такой открытый шар $O(x, r)$ радиуса $r > 0$, что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств - это открытое множество.

Доказательство 2):
Пусть

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k$$

- это пересечение конечного числа открытых множеств.

Тогда найдутся такие открытые шары $O\left(x, r_k\right)$ радиусов $r_k > 0$, что

$$x \in O\left(x, r_k\right) \subset \Sigma_k$$

для $\forall k = \overline{1, n}$.

Возьмём $r := \min\left\{r_k, k = \overline{1, n}\right\} > 0$,. Тогда очевидно, что

$$O(x, r) \subset \Sigma_k$$

значит

$$x \in O(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k$$

Доказательство 3):
Пусть $\{S_\alpha : \alpha \in A\} -$ произвольное семейство замкнутых множеств.
Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X \backslash \Sigma_\alpha) = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha \right)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где мы ввели обозначение

$$\Sigma_\alpha \overset{\text{def}}{=} X \backslash S_\alpha$$

Доказательство 4):
Имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X \backslash \Sigma_k) = X \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k \right), \quad S_k = X \backslash \Sigma_k$$

Доказательство 5):
Осталось заметить, что пустое множество $\varnothing$ мы по определению считаем открытым, а множество X открыто, поскольку всякая его точка $x_0 \in X$ входит в него вместе с некоторым шаром $O(x_0, r)$ радиуса $r > 0$. Тогда доказательство пункта основано на формулах двойственности

$$X \backslash X = \varnothing, \quad X \backslash \varnothing = X$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5 Лекция. Метрические пространства II

5.1 Пример замкнутого счетного пересечения открытых множеств

Рассмотрим пример счётной системы открытых множеств, пересечение которых замкнуто

$$O_n \overset{\text{def}}{=} O\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(0, x) < 1 + \frac{1}{2n}\right\}$$

при $n \in \mathbb{N}$. справедливо:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{|x| \leqslant 1\}$$

5.2 Пример объединения конечного числа замкнутых множеств

Рассмотрим пример счётной системы замкнутых множеств, объединение которых открыто.

$$K_n \overset{\text{def}}{=} K\left(0, 1 - \frac{1}{2n}\right) = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| =\leqslant 1 - \frac{1}{2n}\right\}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие равенства:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = \{|x| < 1\}$$

5.3 Замыкание множества. Свойства операции замыкание

Дадим определение замыкания множества:

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется **замыканием** множества и обозначается $\overline{A}$.
Пусть $\{A_\alpha\}_\alpha$ - все замкнутые множества, содержащие A: $A \subset A_\alpha$.
$\overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha$ - замыкание.

Справедливы следующие свойства:

Свойство 1: $A \subset \bar{A}$ Доказательство:
так как $A \subset A_\alpha$ для любого α, значит

$$A \subset \bigcap_\alpha A_\alpha \Rightarrow A \subset \overline{A}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойство 2: Пусть A - замкнуто, тогда $A = \overline{A}$
Доказательство:

$$A \subset \bar{A}$$

- из свойства 1.
Докажем, что $\overline{A} \subset A$. Так как A - замкнуто, то $A \in \{A_\alpha\}_\alpha$

$$\overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha \subset A$$

Свойство 3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
Доказательство:
По лемме 3 о топологии:

$$\overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha \subset A$$

- замкнуто.
Значит, по свойству 2: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Свойство 4: Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$
Доказательство:
Пусть $\{A_\alpha\}_\alpha$, $A \subset A_\alpha$ - замыкание множества.
$\{B_\beta\}_\beta$, $B \subset B_\beta$ - замыкание множества.

$A \subset B \subset B_\beta$ для любого β, значит, $A \subset B_\beta$

$$\Rightarrow \{B_\beta\}_\beta \subset \{A_\alpha\}_\alpha$$

(так как A_α - все замкнутые множества, содержащие A, B_β) - не обязательно все множества, оно может содержать меньшее количество).

$$\overline{B} = \bigcap_\beta B_\beta \supset \bigcap_\alpha A_\alpha = \overline{A}$$

Свойство 5: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Доказательство:

$$B \subset \overline{B}; \quad A \subset \overline{A} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

По свойству 4: $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
По свойству 3: $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ - доказали в одну сторону.
Теперь докажем в другую сторону:

$$A \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

$$\overline{B} \cup \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$$

Значит

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойство 6: $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cup \bar{B}$, но есть такое соотношение $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$

Докажем вложение:
$A \cap B \subset A$ и $A \cap B \subset B$, значит

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A}$$
$$\overline{A \cap B} \subset \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$$

Докажем, что равенства нет:
пусть A=Q; B=J $\longrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$; $A \cap B = \varnothing$.

$\overline{A} = \overline{Q} = \mathbb{R}$, так как для любого вещественного числа найдётся последовательность рациональных чисел к нему сходящихся, значит это число - это предельная точка множества рациональных чисел. Добавление всех предельных точек даёт замыкание.

$$\overline{B} = \overline{J} = \mathbb{R}$$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$, значит равенства нет.

5.4 Непрерывное отображение метрических пространств

Отображение

$$f : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, если для всякой окрестности точки $f(x_0) \in \Sigma_{f(x_0)} \subset Y$ найдётся такая окрестность $\Sigma_{(x_0} \subset X$

$$f\left(\Sigma_{x_0}\right) \subset \Sigma_{f(x_0)}$$

Теперь дадим определение по Хайне.
Отображение

$$f : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, если для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности x_n соответствующая последовательность f(x_n) сходится к точке g(x_0) в метрическом пространстве (Y,ρ)

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \Rightarrow f\left(x_n\right) \xrightarrow{\rho} f\left(x_0\right) \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

Определение:
Образом $V \subset Y$ множества $U \subset X$при отображении f : X$\longrightarrow$ Y называется множество

$$V \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y : y = f(x), x \in U\}$$

Определение:
Полным прообразом $U \subset X$ множества $V \subset Y$ при отображении f : X$\longrightarrow$ Y называется множество

$$U \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \in V \subset Y\}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5.5 Теорема об открытом отображении

Докажем теорему об открытом отображении.
Отображение f : (X, d) $\longrightarrow$(Y , ρ) является непрерывным тогда и только тогда, когда полный прообраз $G \subset X$ открытого множества $\Sigma \subset$ открыт в X.

Доказательство:
Необходимость: пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S — открытое множество в (Y , ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз множества S непуст. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

в силу непрерывности g (поскольку g(x_0) $\in$S) найдётся такая открытая окрестность $\Sigma_{x_0} \ni x_0$, что

$$g\left(\Sigma_{x_0}\right) \subset S$$

тогда множество

$$\bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0}$$

открыто и является согласно определению полным прообразом.

Достаточность: пусть $\Sigma_{g(x_0)}$— это открытая окрестность точки $g\left(x_0\right)$. Тогда

$$g^{-1}\left(\Sigma_{g(x_0)}\right)$$

— это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$

$$g\left(g^{-1}\left(\Sigma_{g(x_0)}\right)\right) = \Sigma_{g(x_0)}$$

Следовательно, g(x) — непрерывное отображение согласно определению по Коши.

5.6 Эквивалентность определений по Коши и по Гейне

Пусть X_0 - предельная точка множества A, то есть

$$\forall r > 0 \quad O\left(x_0, r\right) \cap A \neq \varnothing, x_1 \neq x_0 \quad \text{и} \quad x_1 \in O\left(x_0, r\right)$$

Утверждение:

$$\forall x_0 \quad \exists \{x_n\} \in A \quad x_n \xrightarrow{d} x_0$$

Предъявим последовательность:

$$O\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \ni x_n \neq x_0$$

Значит,

$$x_n \in O\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow d\left(x_n, x_0\right) < \frac{1}{n}$$

Значит, $x_n \xrightarrow{d} x_0$

Докажем, что из определения по Коши вытекает определение по Хайне:

Пусть x_0 - предельная точка, в которой f(x) - непрерывна по Коши.
Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \in X, x_n \xrightarrow{d} x_0$ при $n \longrightarrow +\infty$
Докажем, что $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0)$

$$\exists \quad \Sigma_{f(x_0)} \ni f(x_0) \quad \exists \Sigma_{x_0} \ni x_0 f(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{f(x_0)}$$

Так как $x_n \longrightarrow x_0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geqslant n_0 \ \{x_n\}_{n \geqslant n_0} \subset \Sigma_{x_0}$.
Согласно определению по Коши:

$$f(x_n) \subset f(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{f(x_0)} \quad \forall n \geqslant n_0$$

$$\forall \quad \Sigma_{f(x_0)} \subset Y \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$$
$$f(x_n) \subset \Sigma f(x_0)$$

Значит, $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x_0)$.

Пусть f(x) непрерывна по Хайне. Докажем, что она непрерывна по Коши.

Из теоремы об открытом отображении:
$\forall V$ (Y , ρ), $f^{-1}(V)$ открыто в (X,d), откуда следует определение по Коши.
Пусть V - открытое в (Y , ρ). Рассмотрим $f^{-1}(V)$. Пусть $f^{-1}(V)$ не является открытом множеством, то есть

$$\exists x_0 \in \Sigma, \forall r > 0 \quad O(x_0, r) \cap (x \backslash \Sigma) \neq \varnothing$$

Значит, x_0 - предельная точка множества.

$$x_0 \in \overline{X \backslash \Sigma}$$

Значит, $\exists \{x_n\} \subset X \backslash \Sigma$, так как x_0 - предельная точка множества и $x_n \xrightarrow{d} x_0$ при $n \to +\infty$
Из определения по Хайне: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$ при $n \to \infty$

$$\{x_n\} \notin \Sigma \quad \text{, так как} \quad \{x_n\} \in X\Sigma$$

$$\Sigma = f^{-1}(V) : \{x \in X_i f(x) \subset V\}$$
$$\{x_n\} \notin \Sigma \longrightarrow f(x_n) \notin V$$

но с другой стороны

$$x_0 \in \Sigma \longrightarrow f(x_0) \in V$$

Получили противоречие.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

5.7 Компактные множества

Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство O открытых множеств такое, что

$$A \subset \bigcup_{\alpha} O(\alpha)$$

Множество A называется компактным, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} O(\alpha)$$

Метрическое пространство (X, d) называется компактным (или **компактом**), если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

5.8 Свойства компактных множеств

Свойство 1: замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом.
Пусть (X, d) — это компакт и A замкнуто в (X, d). $A \subset X$.
Тогда

$$B = X \backslash A \text{ открыто.}$$

Пусть $O(\alpha)$ — это произвольное открытое покрытие множества A. Тогда в силу компактности метрического пространства (X,d):

$$X = (X \backslash A) \cup A = B \bigcup \left(\bigcup_{\alpha} O(\alpha) \right) \Rightarrow \exists \text{ конечная подсистема } \{O(\alpha_k\}_{k=1}^{n},$$

$$X = B \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} O(\alpha_k) \right) \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(\alpha_k)$$

Свойство 2: пусть A - компактное множество в метрическом пространстве (X,d). Тогда A - замкнуто.

Пусть A — компакт в (X, d) и $y \in A$. Тогда для любой точки $x \in A$ найдутся такие открытые окрестности $x \in O(x)$ и $y \in O(y)$, что

$$O(x) \bigcap O(y) = \varnothing$$

$$A \subset \bigcup_{x \in A} O(x) \Rightarrow A \subset \bigcup_{k=1}^{n} O(x_k)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$V(y) := (\bigcap_{k=1}^{n} O_{x_k}(y))$- конечное пересечение открытых множеств (оно открыто).

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{n} O_{x_k}(y)\right) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{n} O(x_k)\right) = \varnothing$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

6 Лекция. Метрические пространства III

6.1 Полное метрическое пространство

Последовательность $x_n \subset X$ метрического про- странства (X, d) называется фундаментальной, если

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad npu \quad n, m \to +\infty$$

Метрическое пространство называется **полным**, если каждая его фундаментальная последовательность сходится в нем.

Примеры:

а) Пусть X=(0,1) и d=|x-y|. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$. Тогда $x_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow +\infty$, значит она фундаментальная, но она не сходится не к одному из элементов метрического пространства.

$\overline{X}$=[0,1], d=|x-y| - пополнение метрического пространства.

б) Пусть метрическое пространство

$$X = \mathbb{C}([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

можно доказать, что оно полное.

в) Пусть метрическое пространство

$$X = \mathbb{C}^1([0,1]), \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

Это пространство не будет полным, так как $f_n(x) \in \mathbb{C}^1([0,1])$, они сходятся к f(x), но $f(x) \notin \mathbb{C}^1([0,1])$.

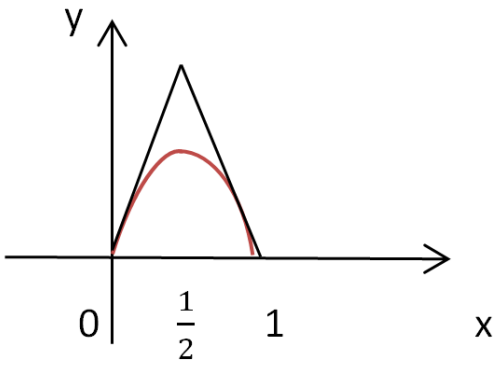

Рис. 6.1. График функций y(x)

г) Берём $X = \mathbb{C}([0,1])$ с метрикой

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p}, p \geqslant 1$$

Это пространство не полное. Его пополнение будет $L^p(0,1)$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

6.2 Изометричные отображения метрических пространств

Отображение

$$\mathrm{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

называется изометричным, если

$$\forall x_1, x_2 \in X_1 \quad d_2\left(J_{x_1}, J_{x_2}\right) = d_1\left(x_1, x_2\right)$$

Докажем, что изометрия - взаимно однозначное соответствие.
Пусть

$$\exists x \in X_1, \text{ что } J(x) = y_1 \quad J(x) = y_2$$

Докажем, чо единственный x переводится в единственный y. Из определения изометрии:

$$d_2(J(x), J(x)) = d_1\left(x_1 x\right) = 0$$
$$d_2\left(y_1, y_2\right) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Докажем, что оно взаимно однозначное:

$$\exists y \in X_2; \quad Jx_1 = Jx_2 = y$$
$$0 = d_2(y, y) = d_2\left(J\left(x_1\right), J\left(x_2\right)\right) = d_1\left(x_1, x_2\right)$$
$$x_1 = x_2$$

Полное метрическое пространство: $(B(x), d_0)$

$$f(x) : x \to \mathbb{R}, \text{ где } \sup_{x \in X} \mid f(x) \mid < +\infty$$
$$d_0(f, g) = \sup_{x \in X} \mid f(x) - g(x) \mid$$

6.3 Теорема (продолжение изометрии)

Теорема:
Пусть $(X_1, d_1)(X_2, d_2)$ — это два полных метрических пространства и

$$E_1 \overset{ds}{C} X_1, \quad E_2 \overset{ds}{C} X_2$$

где между E_1 и E_2 имеется изометрия J, причём $\mathrm{JE}_1 = E_2$.
Тогда изометрия J продолжается единственным образом до изометрии между $(X_1, d_1)(X_2, d_2)$

$E \overset{ds}{\subset} X$ - если множество E всюду плотно в метрическом пространстве (X, d)

$$\overline{E} = X$$

Это равносильно свойству, что для любой точки $x \in X$ найдётся такая последовательность $\{x_n\} \subset E$, что

$$x_n \overset{d}{\to} x \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

Доказательство:
Определение $\widehat{J}$. Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда в силу всюду плотности E_1 в X_1 существует такая последовательность $x_n \subset E_1$, что

$$x_n \overset{d_1}{\to} x \quad n \to +\infty$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Но тогда последовательность Jx_n фундаментальна в (X_2, d_2), так как

$$d_2\left(\mathrm{J}\left(x_n\right), \mathrm{J}\left(x_m\right)\right) = d_1\left(x_n, x_m\right) \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty$$

и в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) найдётся такое $y \in X_2$, что

$$\mathrm{J}\left(x_n\right) \overset{d_2}{\to} y \quad n \to +\infty$$

Обозначим

$$\widehat{\mathrm{J}}(x) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad x \in X_1 \backslash E_1 \\ \mathrm{J}(x), & \text{если} \quad x \in E_1 \end{cases}$$

Дальнейшая проблема в том, что может быть если мы возьмём другую x_n, то она сойдётся к другому y.
Докажем корректность:

$$x_n \xrightarrow{d_1} \Rightarrow \quad J_{x_n} \xrightarrow{d_2} y$$

Возьмём другую последовательность:

$$v_n \xrightarrow{d_1} \Rightarrow \quad J_{v_n} \xrightarrow{d_2} z$$

Нужно доказать, что y=z.

$$d_2\left(y, z\right) \leq d_2\left(y, Jx_n\right) + d_2\left(Jx_n, Jv_n\right) + d_2\left(Jv_n, z\right)$$

$$d_2(y, z) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf d_2\left(Jx_n, Jv_n\right)$$

$$d_2\left(Jx_n, Jv_n\right) \leq d_2\left(J_{x_n}, y\right) + d_2\left(y, z\right) + d_2\left(z, Jv_n\right)$$

$$d_2(y, z) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf d_2\left(Jx_n, Jv_n\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup d_2\left(Jx_n, Jv_n\right) \leq d_2\left(y, z\right)$$

Значит,

$$d_2(y, z) = \lim_{n \to +\infty} d_2\left(Jx_n, Jv_n\right) = \lim_{n \to +\infty} d_1\left(x_n, v_n\right)$$

$$d_1\left(x_n, v_n\right) \leq d_1\left(x_n, x\right) + d_1\left(x, v_n\right) \to 0$$

значит,

$$d_2\left(y, z\right) = 0 \quad => \quad y = z$$

Далее нам нужно проверить выполнение изометрии:
Пусть x, z $\in X_1$, нужно доказать

$$d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z)) = d_1(x, z)$$

$$\exists \{x_n\} \in E_1 \quad x_n \overset{d_1}{\to} x \Rightarrow d_2\left(\hat{J}(x), J\left(x_n\right)\right) \to 0$$
$$\exists \{z_n\} \in E_1 \quad z_n \overset{d_1}{\to} z => d_2\left(\hat{J}(z), J\left(z_n\right)\right) \to 0$$

Докажем, что

$$d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} d_1\left(x_n, z_n\right) = d_1(x, z)$$

$$d_2(\hat{J}(x)\hat{J}(z)) \leqslant d_2\left(\hat{J}(x), J\left(x_n\right)\right) + d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right) + d_2\left(\left(z_n\right), \hat{J}(z)\right)$$

$$d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z)) \leq \lim_{n\to+\infty} d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right)$$

$$d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right) \leq d_2\left(J\left(x_n\right), \hat{J}(x)\right) + d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z)) + d_2\left(\hat{J}(z), J\left(z_n\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right) \leq d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z))$$

$$d_2(\hat{J}(x), \hat{J}(z)) = \lim_{n\to+\infty} d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(z_n\right)\right)$$

Аналогично,

$$\lim_{n\to+\infty} d_1\left(x_n, z_n\right) = d_1\left(x, z\right)$$

Значит, $\hat{J}$ - изометрия на всём X_1.
Нужно ещё доказать, что $\hat{J}(X_1) = X_2$.
Пусть $z \in X_2$:
а) Если $z \in E_2$, $\exists! x \in E_1, \hat{J}(x) = J(x) = z$
б) Если $z \in X_2 \backslash E_2$, $\overline{E_2} = X_2$, значит z - предельная точка E_2.
Значит, $\exists \{z_n\} \in E_2, z_n \xrightarrow{d_2} z \quad$ при $n \to +\infty$
Поэтому $\exists! x_n \in E_1$, что $\hat{J}\left(x_n\right) = J\left(x_n\right) = z_n$

$$0 \leqslant d_2\left(z_n, z_m\right) = d_2\left(J\left(x_n\right), J\left(x_m\right)\right) = d_1\left(x_n, x_m\right) \to 0$$

Значит, x_n фундаментальна в (X_1, d_1)

$$x_n \xrightarrow{d_1} x$$

Надо доказать, что $\hat{J}(x) = z$

$$d_2(\hat{J}(x), z) \leqslant d_2\left(\hat{J}(x), J\left(x_n\right)\right) + d_2\left(J\left(x_n\right), z_n\right) + d_2\left(z_n, z\right)$$

$$Jx_n \xrightarrow{d_2} \hat{J}(x)$$
$$Jx_n = z_n$$
$$z_n \xrightarrow{d_2} z$$

Значит, $d_2(\hat{J}(x), z) \leq 0; \quad d_2(\hat{J}(x), z) = 0$

Осталось доказать единственность этого продолжения:

Пусть $\exists\ J_1, J_2$

$$J_1(x) = J_2(x) = J(x), x \in E_1$$

$$d_2\left(J_1(x), J_2(x)\right) \leq d_2\left(J_1(x), J\left(x_n\right)\right) + d_2\left(J\left(x_n\right), J_2(x)\right)$$

Так как $x_n \xrightarrow{d_1} x_1 \quad J\left(x_n\right) \to y$, то

$$d_2\left(J_1(x), J_2(x)\right) \leq d_2\left(J_1(x), J_1\left(x_n\right)\right) + d_2\left(J_1\left(x_n\right), J_2\left(x_1\right)\right) = 2d_1\left(x_n, x\right) \to 0$$
$$\forall x \in x_1 => J_1 = J_2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

6.4 Лемма

Лемма: всякое непустое метрическое пространство (X, d) - изометрично некоторой части (B(x), d_0).
Доказательство:
Утверждение: Пусть x, $x_0 \in X$, где $x \neq x_0$ - фиксированны точки. $y \in X$ - переменная точка.

$$f_x(y) := d(x,y) - d(x_0,y)$$

Справедливо неравенство:

$$|d(x,y) - d(x_0,y)| \leq d(x,x_0)$$

Доказательство:

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y)$$
$$d(x_0,y) \leq d(x_0,x) + d(x,y)$$
$$d(x,y) - d(x,y) \leq d(x,x_0)$$
$$d(x,y) - d(x,y) \leq d(x,x_0)$$
$$\Rightarrow |f_x(y)| \leq d(x,x_0)$$

$\forall y \in X \quad \sup_{y\in X} |f_x(y)| \leq d(x,x_0) < \infty$
Значит, $f_x(y) \in B(x)$

Утверждение: пусть $x_1, x_2, x_0 \in X$. Тогда

$$\sup_{y\in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = d(x_1,x_2)$$

Доказательство:

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(x_1,y) - d(x_0,y) - d(x_2,y) + d(x_0,y)| =$$
$$= |d(x_1,y) - d(x_2,y)| \leq d(x_1,x_2)$$

Тогда

$$\sup_{y\in x} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1,x_2)$$

Пусть y=x_1. Тогда достигается равенство:

$$|d(x_1,x_1) - d(x_2,x_1)| = d(x_1,x_2)$$

Нам нужно показать, что метрическое пространство изометрично некоторой части:

$$J : x \to f_x(y)$$
$$J : (x,d) \to (B(x), d_0)$$

Надо доказать, что это изометрия, то есть

$$d_0(Jx_1, Jx_2) = d(x_1,x_2)$$

$$Jx_1 = f_{x_1}(y)$$
$$Jx_2 = f_{x_2}(y)$$
$$d_0(f_{x_1}(y), f_{x_2}(y)) = d(x_1,x_2)$$

- а это мы доказали.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

6.5 Определение пополнения метрического пространства

Пополнение неполного множества:
Определение: Пополнением метрического пространства (X, d) называется такое полное метрическое пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$, что (X, d) изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$:

$$J : (X, d) \to (\widetilde{X}, \widetilde{d})$$

причём $J(x)$ плотно в $\widetilde{X}$

6.6 Теорема о пополнении

Теорема: всякое метрическое пространство имеет единственное пополнение, определённое с точностью до изометрии.
То есть, если (X_1, d_1) - пополнение (X,d) и (X_2, d_2) - пополнение (X,d), то

$$\hat{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$
$$\hat{J}x_n = x_2$$

Доказательство:
Пусть (X,d) - метрическое пространство

$$J : (X, d) \to (B(x), d_0)$$

До этого доказали, что $(Jx, d_0) \subset (B(x), d_0)$

$$J(x) \subset B(x) \quad \text{- полно} \quad \Rightarrow \overline{J(x)} \subset \overline{B(x)} = B(x)$$

$\tilde{X} = \overline{Jx}; \tilde{d} = d_0 \quad (\tilde{X}, \tilde{d})$ - полное метрическое пространство.
Для (X,d) $\exists$ $(\tilde{X}, \tilde{d})$, что JX плотно в $\tilde{X}$.
Докажем единственность:
Пусть для (X,d) существуют два пополнения: (X_1, d_1) и (X_2, d_2)

$$J_1 : (X, d) \to (E_1, d_1)$$
$$J_2 : (X, d) \to (E_2, d_2)$$

$\exists\ E_1 \overset{ds}{\subset} X_1,\ E_2 \overset{ds}{\subset} X_2$

Тогда $J = J_2 J_1^{-1} : E_1 \longrightarrow E_2$ - изометрия. Значит

$$\exists\ \hat{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

7 Лекция. Топологические пространства

7.1 Определение топологического пространства. Примеры

Определение: Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ множества X называется топологическим пространством (X, τ), если выполнены следующие свойства:

1) Если $U_\alpha \in \tau$, где $\alpha \in A$ (A-множество индексов), то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

2) Если $U_\alpha \in \tau$, где $\alpha = \overline{1, N}$ ($N \in \mathbb{N}$), то $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{N} U_\alpha \in \tau$.

3) $X, \varnothing \in \tau$.

Система подмножеств τ называется топологией. Множества, принадлежащие τ называют открытыми множествами.

Пример 1: $\tau = \{X, \varnothing\}$. Это топологическое пространство называется антидискретным или слипшимся.

Пример 2: $\tau = 2^X$ (τ - множество всех подмножеств X). Такая топология называется дискретной.

Пример 3: В метрическом пространстве все открытые множества образуют топологию.

Пример 4: Множество всех шаров в метрическом пространстве не образует топологию, так как пересечение двух шаров не обязательно будет шаром.

В метрическом пространстве открытые области вводились через определение открытого шара. Для облегчения задания множества τ хотелось бы ввести схожее определение для произвольного топологического пространства:

7.2 Фундаментальная система окрестностей (ФСО)

Введём обозначение: τ_x - все множества из τ, содержащие точку x

Определение: Локальной базой топологии в точке $x \in X$ называется семейство множеств $\nu_x \subset \tau_x$ такое, что $\forall U \in \tau_x \quad \exists V \in \nu_x : V \subset U$.

Можно обозначить $\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x\}$. Тогда для ФСО можно дать такое определение :

Определение: Фундаментальной системой окрестностей (ФСО) называется семейство множеств

$$\nu = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x, x \in X\}.$$

Пример 1: В метрическом пространстве можно ввести ФСО таким образом: $\nu = \{V_{x,n}, x \in X, n \in \mathbb{N}\}$, где $V_{x,n} = \{y \in X : d(y,x) < \frac{1}{n}\}$

Для того, чтобы понять, какие ФСО будут порождать топологию нужно доказать теорему:

Теорема 1: о ФСО:

Для того, чтобы множество $\nu = \{V_{x,\alpha} : x \in X, \alpha \in A_x\}$ было ФСО для некоторой единственной топологии τ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены свойства:

1) $\forall x \in X \quad \nu_x = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x\} \neq \varnothing$

2)$\forall V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x \quad \exists V_{x,\alpha_3} \in \nu_x : V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2}$

3) $\forall x \in X, \forall V_{x,\alpha} \in \nu_x, \forall y \in V_{x,\alpha} \quad \exists V_{y,\beta} : V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$

Примечание:

Задать всю систему множеств топологии аналитически зачастую сложно. Благодаря результатам данной теоремы достаточно задать некоторую систему окрестностей и доказать, что для неё выполнены условия теоремы.

Доказательство:

Необходимость:

Пусть есть некоторое ФСО для топологии τ, то есть:

$\nu = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x, x \in X\}$, где $\forall U \in \tau_x \quad \exists V_{x,\alpha} \in \nu : V_{x,\alpha} \subset U$

1)$\nu \neq \varnothing$ по определению ФСО

2) Зафиксируем $\forall V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x \subset \tau_x \subset \tau$.

$x \in V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \in \tau_x \Rightarrow \exists V_{x,\alpha_3} \in \nu_x : V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2}$

3)Зафиксируем $\forall x \in X, \forall V_{x,\alpha} \in \nu_x \subset \tau_x \subset \tau$. Выберем $\forall y \in V_{x,\alpha} \in \tau_y$.

Значит по определению ФСО: $\exists V_{y,\beta} \in \nu_y \Rightarrow V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$.

Таким образом ФСО удовлетворяет требованиям теоремы.

Достаточность:

Пусть ν удовлетворяет условиям теоремы.

Будем говорить, что $U \in \tau$, если $\forall x \in U \exists V_{x,\alpha} : V_{x,\alpha} \subset U$

Покажем, что τ - топология:

1) $\varnothing \in \tau$ - в нём нет точек.

$\forall x \in X \quad \exists V_{x,\alpha} \in \nu_x$. Очевидно $V_{x,\alpha} \subset X \quad \Rightarrow X \in \tau$

2) Пусть $U_\gamma \in \tau \quad \forall \gamma \in \Gamma$. Докажем, что $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \in \tau$.

Пусть $x \in \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \Rightarrow \quad \exists \gamma_0 : x \in U_{\gamma_0} \Rightarrow \quad \exists V_{x,\gamma_0} \in \nu_x : V_{x,\gamma_0} \subset U_{\gamma_0} \subset \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$

Значит $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \in \tau$

3) Достаточно доказать, что пересечение двух открытых множеств - открытое множество. Для произвольного числа множеств можно дальше доказать по индукции.

Пусть $U_1, U_2 \in \tau$. Докажем, что $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Пусть $x \in U_1 \cap U_2$. Если это пустое множество, то оно принадлежит τ. Если пересечение - не пустое, то $x \in U_1$ и $x \in U_2$. Значит $\exists V_{x,\alpha_1} \in U_1$ и $\exists V_{x,\alpha_2} \in U_2 \Rightarrow V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \in U_1 \cap U_2$. Тогда по определению $\nu : \exists V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} : V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$.

Доказано, что τ - топология. Теперь нужно доказать, что ν - ФСО для τ и, что такая топология единственная.

Для того, чтобы доказать, что ν - ФСО осталось доказать, что $\nu \subset \tau$.

Зафиксируем $\forall x \in X \quad \forall V_{x,\alpha} \in \nu_x$. Покажем, что $V_{x,\alpha} \in \tau_x$:

$\forall y \in V_{x,\alpha} \exists V_{y,\beta} \in \nu_y : V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$. По определению τ: $V_{x,\alpha} \in \tau_x$.

Докажем единственность топологии.

Предположим, что существуют две топологии: τ_1, τ_2 для которых ν является ФСО и, что $\tau_1 \neq \tau_2$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пусть $U_1 \in \tau_1 \Rightarrow \forall x \in U_1 \quad \exists V_{x,\alpha} \in \nu_x : V_{x,\alpha} \in U_1$.
Значит $U_1 = \bigcup\limits_{x \in U_1} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in U_1} V_{x,\alpha} \in \tau_2$, так как все $V_{x,\alpha} \in \tau_2$.

Мы доказали, что $\tau_1 \subset \tau_2$. $\tau_2 \subset \tau_1$ доказывается аналогично. Таким образом $\tau_1 = \tau_2$.

Теорема доказана.

Пример 2:

Рассмотрим произвольное множество X. Рассмотрим множество непрерывных функций на нём: $x(t) \in C(X)$

Введём следующую систему окрестностей (для $\varepsilon > 0$):

$$V_{x,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in C(X) : \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon \right\}$$

$$\nu = \{V_{x,\varepsilon}, x(t) \in C(x), \varepsilon > 0\}$$

Покажем, что ν является ФСО для топологии τ

Проверим условия теоремы:

1) Очевидно, что $\nu_x \neq \varnothing$

2) $\forall V_{x,\varepsilon_1}, V_{x,\varepsilon_2} \in \nu_x \quad \exists V_{x,\varepsilon_3} \in \nu_x : V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1} \cap V_{x,\varepsilon_2}$

Очевидно, что для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ достаточно взять $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

3) $\forall x \in X, \quad \forall V_{x,\varepsilon} \in \nu_x, \quad \forall y \in V_{x,\varepsilon}$

$$\sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| = \varepsilon_1 < \varepsilon$$

Неравенство строгое, значит $\exists \varepsilon_2 > 0 : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$

Рассмотрим $V_{y,\varepsilon_2} = \{z(t) \in C(X) : \sup\limits_{t \in X} |z(t) - y(t)| < \varepsilon_2\}$. Докажем, что $V_{x,\varepsilon_2} \subset V_{x,\varepsilon_1}$.

Зафиксируем $\forall z(t) \in V_{y,\epsilon_2}$. Тогда $\sup\limits_{t \in X} |z(t) - y(t)| < \varepsilon_2$:

$$\sup_{t \in X} |z(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in X} |z(t) - y(t)| + \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$$

Таким образом мы доказали, что это - ФСО.

Приведём другой пример ФСО для этого множества X. Введём её таким образом:

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{y(t) \in C(X) : \sup_{i=\overline{1,n}} |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon\}$$

Можно аналогичным образом проверить, что такая система окрестностей образует ФСО в топологии, которую обозначим τ_p.

Предыдущую топологию логично назвать топологией равномерной сходимости, а эту - топологией поточечной сходимости. Очевидно, что, $V_{x,\epsilon} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$.

Утверждение: Очевидно, что окрестностей в ФСО топологии поточечной сходимости больше, чем окрестностей в ФСО топологии равномерной сходимости. Однако для самих топологий ситуация обратная: в топологии поточечной сходимости меньше окрестностей, чем в топологии равномерной сходимости. Докажем это:

Вспомним, какие окрестности входят в построенные топологии:

$$U \in \tau, \text{ если } \forall x \in U \quad \exists V_{x,\epsilon} : V_{x,\alpha} \subset U$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$U \in \tau, \text{ если } \forall x \in U \quad \exists V_{x,t_1,\dots,t_n\epsilon} : V_{x,\alpha} \subset U$$

Учтём, что $V_{x,\epsilon} \subset V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon}$

Пусть $U \in \tau_p$, тогда $\forall x \in U \quad \exists V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon \subset U}$, но тогда $\exists V_{x,\varepsilon} \subset V_{x,t_1,\dots,t_n,\varepsilon} \subset U$. Значит $U \in \tau$. Таким образом мы доказали, что $U \in \tau_p \Rightarrow U \in \tau$.

Далее переформулируем некоторые понятия, ранее сформулированные для метрических пространств, для случая топологических пространств.

7.3 Замкнутые множества, замыкание множества и предельные точки множества.

Определение: Замкнутое множество

Замкнутое множество - множество, являющееся дополнением к открытому.

Рассмотрим их свойства.

1)Пусть $\Sigma_\alpha, \alpha \in A$ - замкнутые множества топологического пространства (X, τ). Здесь A - множество, состоящее из произвольного числа индексов (может быть бесконечным, в том числе несчётным). То есть $\forall \alpha \in A \quad \exists U_\alpha : \Sigma_\alpha = X \backslash U_\alpha$.

Рассмотрим множество $\bigcap\limits_\alpha \Sigma_\alpha$. Оно является замкнутым:

$$\bigcap_\alpha \Sigma_\alpha = \bigcap_\alpha X \backslash U_\alpha = X \backslash \bigcup_\alpha U_\alpha$$

Здесь мы воспользовались формулой де Моргана. Заметим, что $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ - открытое множество (объединение произвольного числа открытых множеств - открытое множество), а значит дополнение к нему - замкнутое множество по определению.

Мы получили результат: пересечение произвольного числа замкнутых множеств - замкнутое множество.

2)Пусть $\Sigma_k, k = \overline{1, N},$ где $N \in \mathbb{N}$ - конечное число замкнутых множеств. Рассмотрим теперь $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Sigma_k$. Аналогично предыдущему случаю получим:

$$\bigcup_{k=1}^{N} \Sigma_k = \bigcup_{k=1}^{N} X \backslash U_k = X \backslash \bigcap_{k=1}^{N} U_k$$

Здесь мы тоже использовали формулу де Моргана. По свойствам открытых множеств $\bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k$ - открытое множество (как пересечение конечного числа открытых множеств). Значит дополнение к нему - замкнутое множество.

Мы получили результат: объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнутое множество.

Заметим, что эти свойства открытых и замкнутых множеств такие же, как в метрических пространствах.

3) Рассмотрим $\varnothing$ и X. Они по определению - открытые. Но также $\varnothing = X \backslash X$ и $X = X \backslash \varnothing$. Таким образом $\varnothing$ и X - одновременно и открытые и замкнутые множества.

Определение: Замыкание множества

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Пусть $\{A_\alpha\}_\alpha$ - семейство всех замкнутых множеств, содержащих множество A. Тогда замыканием множества A называется множество

$$\overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha$$

Определение: Точка прикосновения множества

Точка x (не обязательно принадлежащая множеству A) называется точкой прикосновения множества A, если

$$\forall U_x \in \tau_x U_x \cap A \neq \varnothing,$$

где U_x -окрестности, содержащие x.

Введём операцию прибывления к множеству A всех его точек прикосновения и обозначим её так : $\widetilde{A} = A \cup \{\text{все точки прикосновения } A\}$

Оказывается эта операция совпадает с операцией замыкания множества, то есть справедлива лемма:

Лемма 1

$$\overline{A} = \widetilde{A}$$

Доказательство:

1)Сперва докажем, что $\widetilde{A} \subset \overline{A}$.

Пусть $x \in \widetilde{A}$. Тогда либо $x \in A \subset \overline{A}$ (Утверждение $A \subset \overline{A}$ ещё не было доказано. Оно будет доказано позднее.), либо x -точка прикосновения A. В первом случае доказательство очевидно, поэтому рассмотрим второй случай.

Докажем, что $x \in \overline{A}$.

Пусть $x \notin \overline{A}$. При этом $\overline{A}$ - замкнутое множество, как пересечение замкнутых множеств. Тогда, если $x \notin \overline{A}$, то $x \in X \backslash \overline{A}$. Но $X \backslash \overline{A} \in \tau_x$ - открытое множество (как дополнение замкнутого). По условию x - точка прикосновения, значит одновременно выполнены два условия:

$$U_{0,x} := X \backslash \overline{A}, \qquad U_{0,x} \cap A \neq \varnothing$$

Полученное противоречие доказывает утверждение $\widetilde{A} \subset \overline{A}$

2)Докажем теперь, что $\widetilde{A} \subset \overline{A}$

Пусть теперь $x \in \overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha$, где A_α - замкнутые множества, содержащие A.

Предположим, что $x \notin \widetilde{A}$, то есть

$$\exists U_x \in \tau_x : U_X \cap A = \varnothing.$$

Тогда $X \backslash U_x$ - замкнутое множество $(A \subset X \backslash U_x) \Rightarrow x \in \overline{A} \subset X \backslash U_x$ и $x \in U_x$. Получилось противоречие.

Теорема доказана

Свойства операции замыкания:

1) $\overline{A}$ - замкнуто, так как $\overline{A} = \bigcap_\alpha A_\alpha, A \subset A_\alpha$ (A_α - замкнутые).

2) $A \in \overline{A}$, так как все A_α содержат A.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

3)Если A - замкнуто, то $\overline{A} = A$. Это свойство вытекает из определения замыкания: $\overline{A} = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ и того, что $A \in \{A_\alpha\}_\alpha$. Поэтому справедливо $\overline{A} = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha \subset A$.

4)$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

5) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$, так как:

$$\{B_\beta\}_\beta \subset \{A_\alpha\}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{\beta} B_\beta \supset \bigcap_{\alpha} A_\alpha$$

6)$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, так как в одну сторону:

$$A \subset \overline{A}, B \subset \overline{B} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

в обратную сторону:

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

7)$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, так как

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

7.4 Внутренность и граница множества

Определение: Внутренность множества

Внутренностью множества A называется такое множество $\operatorname{int} A$, что $x \in \operatorname{int} A$, если $\exists U_x \subset \tau_x$, такое, что $U_x \in A$

Заметим, что внутренность может быть пустым множеством.

Свойства внутренности множества:

1)$\operatorname{int} A \in \tau$, так как можно представить:

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{x \in \operatorname{int} A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \operatorname{int} A} U_x \subset \operatorname{int} A \Rightarrow \operatorname{int} A = \bigcup_{x \in \operatorname{int} A} U_x \in \tau$$

2)$\operatorname{int} A \subset A$

3)$A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$

4)$\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

5)$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

Докажем вложение в одну сторону:

$$\operatorname{int} A \subset A, \operatorname{int} B \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset A \cap B \Rightarrow \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cap B)$$

Докажем в другую сторону:

$$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B \Rightarrow \operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A, \operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} B \Rightarrow \operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$$

Определение: Граница множества.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Границей множества A называется такое множество ∂A, что $x \in \partial A$, если $\forall U_x \subset \tau_x$, выполнено

1)$U_x \cap A \neq \varnothing$

2)$U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$

Утверждение:

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cap \partial A$$

8 Лекция 8. Векторное топологическое пространство

8.1 Линейный функционал. Скобки двойственности

Линейный функционал:
L - линейное пространство над $\mathbb{C}^1$.
Линейным функционалом называется $f : L \to \mathbb{C}^1$, которое обладает свойствами линейности

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 = \alpha_1 f\left(x_1\right) + \alpha_2 f\left(x_2\right)\right) (1)$$

$\langle f, x\rangle$ - линейный функционал на линейном пространстве.
$\langle f, x\rangle \Longleftrightarrow f\left(x\right)$

$$\left(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2\right) =^{def} \beta_1 f_1\left(x\right) + \beta_2 f_2\left(x\right) (2)$$

Множество линейных функционалов на линейном пространстве образует линейное пространство.
$\langle\rangle$ - скобки двойственности.
$\langle f, x\rangle$ можно рассмотреть как билинейную функцию относительно двух переменных f и x потому, что выполнены (1) и (2) свойства.

$$\langle f, x\rangle : L^{\#} \otimes L \to \mathbb{C}^1.$$

$(f, x) \in \mathbb{C}^1$ - скалярное произведение не образует скобки двойственности, так как выполняется условие $(\lambda f, x) = \overline{\lambda} f\left(f, x\right)$, а не $\langle \lambda f, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle$.

Конечномерное линейное пространство:
L_n - n-мерное линейное пространство.
Задан базис $\{l_i\}_{i=1}^n$.
$L_n^{\#}$ - линейное пространство линейных функционалов над L_n.
Введем следующие функционалы:
$\langle e^j, x\rangle =^{def} x^j$
$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$
1^0. Линейный ли это функционал?
Рассмотрим выражение:
$\langle e^j, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\rangle = \left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right)^j$
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 \sum_{j=1}^n x_1^j e_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n x_2^j e_j = \sum_{j=1}^n \left(\lambda_1 x_1^j + \lambda_2 x_2^j\right) e_j$
Отсюда следует, что
$\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\right)^j = \lambda_1 x_1^j + \lambda_2 x_2^j = \lambda_1\langle e_j^j x_1\rangle + \lambda_2\langle e_j^j x_2\rangle$
Получили линейный функционал.
2^0. Образуют ли они линейно независимые семейства?
Имеем n функционалов.
$\langle e^j, e_i\rangle = \delta_i^j$
$\sum_{j=1}^n \beta_j e^j = \theta^* \subset L_n^{\#}$
$\langle \sum_{j=1}^n \beta_j e^j, e_i\rangle = \langle \theta^*, e_i\rangle = 0$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Поскольку это нулевой функционал переводит все линейное пространство в 0.
$\langle \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle e^j, e_i \rangle = 0$
$\beta_j = 0, \forall i = \overline{1..n}$
Линейная независимость доказана.

Рассмотрим

$$\langle e^*, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \langle e^j, x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^j, x \right\rangle \ , \forall x \in L$$

Выводом из этого является

$$e^* = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^j$$

Сопряженное пространство является n-мерным, и более того, при фиксированном базисе в L_n мы можем определить базис в $L_n^{\#}$.

8.2 Векторные топологические пространства

Непрерывное отображение одного топологического пространства в другое топологическое пространство
$F : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$
Пусть $x_1 \in X_1, x_2 = F(x_1) \in X_2$

$$x_1 \in \tau_1 x_1 \subset \tau_1$$

$$x_2 \in \tau_2 x_2 \subset \tau_2$$

Отображение F непрерывно в точке x_1, если

$$\forall V_{x_2} \in \tau_2 x_2, \exists V_{x_1} \in \tau_1 x_1, F(V_{x_1}) < V_{x_2}$$

Определение сходимости в топологическом пространстве

$$X_n \to^{\tau} X_0 \text{ в } (X, \tau), \forall V_{x_0} \in \tau, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq n_0 \{X_n\}_n \geq n_0 \subset V_{x_0}$$

В произвольном топологическом пространстве определение сходимости по Коши и по Хайне не совпадают.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.3 Определение векторного топологического пространства (ВТП)

Векторное топологическое пространство - это векторное пространство бесконечномерное, на котором введена топология так, что оно как множество ещё оказывается топологическим пространством. (совсем грубое определение)
В. Т. П.
$1^0 X$ - линейное пространство.
2^0 на X задана система множеств τ такая, что (X, τ) - топологическое пространство.
3^0 Операция сложения $F_1(x, y) := x + y$
Операция умножения $F_2(\lambda, y) := \lambda \cdot y$

$$F_1(x, y) : (X, \tau) \otimes (X, \tau) \to (X, \tau)$$
$$F_2(\lambda, y) : \left(\mathbb{C}^1, |\cdot|\right) \otimes (X, \tau) \to (X, \tau)$$

F_1 и F_1 должны быть непрерывными как отображения топологических пространств.

8.4 Непрерывность операций на ВТП

Непрерывность F_1 означает, что

$$\forall U_{x+y} \subset \tau \exists U_x, U_y \in \tau F_1(U_x, U_y) \subset U_{x+y}$$
$$F_1(U_x, U_y) \subset U_{x+y} \text{ означает } U_x + U_y \subset U_{x+y}$$
$$U_x + U_y = \begin{cases} x_0 + y_0, & \forall x_0 \in U_x \\ & \forall y_0 \in U_y \end{cases}$$

Непрерывность F_2 означает, что

$$\forall V_{\lambda \cdot x} \in \tau$$
$$\exists U_x \in \tau$$
$$\exists U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$$
$$F_2(U_\lambda, U_\lambda) \subset V_{\lambda \cdot x}$$
$$\mu \cdot U_x \subset V_{\lambda x} \Longleftrightarrow U_\lambda \cdot U_x \subset V_{\lambda x}$$
$$\forall \mu \in U_\lambda$$

8.5 Примеры ВТП

Рассмотрим такое пространство:

$$f(x) \in L(X, \mu)$$

Вводим метрику

$$d(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)| d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1^0 Метрическое пространство.
2^0 Линейное пространство.
3^0 В.Т.П ?
Надо проверить линейность операций

$$F_1(f,g) = f(x) + g(x)$$

Проверяем, что

$$\forall \{f_n\}, d(f_n, f_0) \to +\infty \text{ при } n \to +\infty$$
$$\{g_m\}, d(g_m, g_0) \to +\infty \text{ при } m \to +\infty$$

$$d(F_1(f_0,g_0), F_1(f_n,g_m)) \to 0 \text{ при } n,m \to +\infty.$$

Это означает непрерывность операции сложения.

$$d(F_1(f_0,y_0), F_1(f_n,g_m)) =$$
$$= \int_X |F_1(f_0,g_0) - F_1(f_n,g_m)| \, d\mu =$$

$$= \int_X |f_0 - g_0 - f_n + g_m| \, d\mu \le \int_X |f_0 - f_n| d\mu + \int_X |g_0 - g_m| d\mu$$

Первый интеграл есть $d(fn, f_0)$, второй интеграл есть $d(g_0 - g_n)$, а они стремятся к 0 при $n,m \to +\infty$. Значит правая часть стремится к 0 при $n,m \to +\infty$.

Проверяем непрерывность второй операции.

$$F_2(\lambda, f) = \lambda \cdot f$$
$$\lambda_n \to \lambda_0 \text{ в } \mathbb{C}^1, |\lambda_n - \lambda_0| \to +0 \, (1)$$
$$f_m \to f_0$$
$$d(f_m, f_0) = \int_X |f_m - f_0| dx \to 0 \text{ при } n \to +\infty \, (2)$$
$$d(F_2(\lambda_0, f_0), F_2(\lambda_n, f_m)) =$$
$$= \int_X |F_2(\lambda_0, f_0) - F_2(\lambda_n, f_m)| \, d\mu$$
$$\int_X |\lambda_0 \cdot f_0 - \lambda_n \cdot f_m| d\mu \le$$

$(-\lambda_0 \cdot f_m + \lambda_0 \cdot f_m)$

$$\le \int_X |\lambda_0||f_0 - f_m| d\mu + \int |f_m| d\mu |\lambda_0 - \lambda_m|$$

Первый интеграл стремится к 0 из-за метрики (2), а второй интеграл стремится к 0 из-за (1), следовательно операция непрерывна.
Так как в итоге обе операции непрерывны, то получается, что это векторное топологическое пространство.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.6 Лемма о непрерывности операций на ВТП

Утверждение из теории ТП

Пусть (X, τ) - топологическое пространство.
Тогда лемма звучит так:

$$\forall U \in \tau \Longleftrightarrow \forall x \in U \ \ \exists U_x \in \tau_x \subset \tau, U_x \subset U, (1)$$

Доказательство:
Необходимость.
Пусть $U \in \tau$, тогда $\forall x \in U \exists U \in \tau_x$ такое, что $U \subset U$.
Достаточность.
Пусть у нас выполнено свойство (1), тогда

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} U_x \subset U$$

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \in \tau$$

Доказано.

8.7 Лемма о непрерывности окрестности топологии точки

Лемма:
Пусть (X, τ) - В.Т.П.
τ_θ - топология окрестности нулевого элемента векторного пространства $X, \theta \in X$
$\tau_x = x + \tau_\theta$
$\tau_x = \{x + U_\theta, U_\theta \in \tau_\theta\}$
В чем важность этой леммы?
Когда мы берем просто ТП для того, чтобы задать топологию надо задавать фундаментальную систему окрестностей (ФСО) в каждой точки, если у нас ВТП достаточно задать топологию окрестности нуля, и топология в любой другой точки получится сдвигом на вектор x.
Доказательство:
Пусть $V_x \in \tau_x$
Определим множество:
$Vx := V_x - x = \{y - x, y \in V_x\}, V_x \in x$
$1_0 \theta \in U_\theta$
Докажем, что $\forall y \in V_\theta, \exists V_y \in \tau_y \Rightarrow V_y \subset V_\theta$
Тогда согласно предыдущей лемме
$V_\theta \in \tau_\theta$
Пусть $y \in V_\theta$ - произвольный элемент.

$$\exists z \in V_x, y = z - x$$

$$z = x + y, z \subset V_x \in z$$

Воспользуемся тем, что операция сложения является непрерывной по y

$$F_1(x,y) = x + y = z \subset V_x$$

Для $V_x, \exists V_y \in \tau_y$, что $x + V_y \subset V_x \to V_y \subset V_x - x = V_\theta$
Получаем следующее утверждение:
$\forall y \in V_\theta$ найдется окрестность этой точки y, что она будет целиком содержаться в V_θ.
По предыдущей лемме это означает, что V_θ - элемент топологии.

8.8 Сопряженное пространство

Введем понятие сопряженного пространства. Пусть у нас имеется (X, τ) - векторное топологическое пространство.
X^q - множество всех линейных отображений множества X во множество комплексных чисел. Мы вводили скобки двойственности $\langle f, x\rangle : X^q \bigotimes X \to C^1$.
Нам нужно выделить некоторое подмножество $X^* \subset X^q$, $f : (X, \tau) \to C^1$ непрерывным образом.
Приведем пример линейного непрерывного функционала.

$$\langle I, f\rangle = \int_x f(x) d\mu$$

1° Линейность

$$\langle I_1\alpha_1, f_1 + \alpha_2 f_2 = \int_x \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 d\mu =$$

$$= \alpha_1 \int_x f_1(x) d\mu + \alpha_2 \int_x f_2(x) d\mu =$$

$$= \alpha_1 \langle I, f_1\rangle + \alpha_2 \langle I, f_2\rangle$$

1° Непрерывность

$$|\langle I, f_0\rangle - \langle I, f_n\rangle| = |\langle I, f_0 - f_n\rangle| =$$

$$= |\int_x [f_n(x) - f_0(x)] d\mu| \leq \int_x |f_n(x) - f_0(x)| d\mu = d(f_n, f_0) \to +0$$

Из этого равенства и следует непрерывность.
Выпуклое множество:
Множество E называется выпуклым, если $\forall x, y \in E$

$$tx + (1-t)y \in E$$

$$\forall t \in [0, 1]$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

8.9 Выпуклое множество. Уравновешенное множество

Рассмотрим пример выпуклого множества:
Пусть имеется нормированное пространство $\mathrm{N}, \| \cdot \|$. Рассмотрим окрестность $\| x - x_0 \| < r$. Оно является выпуклым. Проверим:
пусть имеются x, y :

$$\| x - x_0 \| < r$$

$$\| y - x_0 \| < r$$

Докажем, что $tx + (1-t)y \in E$:

$$\| tx + (1-t)y - x_0 \| = \| tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0 \|$$

Воспользовавшись неравенством треугольника получим:

$$\| tx + (1-t)y - tx_0 - (1-t)x_0 \| \leq t \| x - x_0 \| + (1-t) \| y - x_0 \| < rt + (1-t)r = r$$

Получили исходное утверждение.
Уравновешенное множество:
Это множество $E : \forall \lambda : |\lambda| \leq 1 \lambda E \subset E$. Уравновешенным множеством является $\| x \| < r$. Проверим его уравновешенность.

$$\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \| \leq \| x \| < r$$

Из этих рассуждений вытекает верность нашего утверждения.
Абсолютно выпуклое множество:
Это одновременно выпуклое и уравновешенное множество.

8.10 Ограниченное множество. Лемма

Ограниченное множество:
Множество называется ограниченным, если
$\forall U_\theta \in \tau_\theta, \exists S > 0, \forall t > S$ такое, что $E \subset t \cdot U_\theta$
Для формулировки понятия ограниченного множества мы должны рассматривать векторное топологическое пространство. Из определения можно сказать, что ограниченное множество можно считать таким множеством, которое поглощается окрестностью нуля.
Пример ограниченного множества:
θ - окрестность 0, V_θ - произвольная окрестность 0.
E - множество.
Представление ограниченного множества:
При умножении окрестности на достаточно большое $t, t > 0$, то есть $t \cdot U_\theta$, получаем большую окрестность 0, в которую может входить и множество E.
Лемма:
$\{x\}$ - одноточечное множество является ограниченным в ВТП.
Доказательство:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим операцию умножения:

$$F_2(0,x) = 0 \cdot x = \theta$$

Записываем определение непрерывности второй операции при указанных условиях.

$$\forall U_0 \in \tau_\theta, \exists\{\mu : 0 < \mu < \varepsilon\},$$

что $\mu \cdot x \subset U_\theta$ - определение непрерывности второй операции при данных условиях

$$x \subset \frac{1}{\mu} U_\theta, \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x \in t \cdot U_\theta, \forall t > S, S = \frac{1}{\varepsilon}$$

Значит, одноточечное множество является ограниченным ВТП.
$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - тоже является ограниченным.

8.11 Поглащающее множество. Понятие полунормы

Поглащающее множество:
Множество E называется поглощающим, если $\forall x \in X, \exists t = t(x) > 0$ что $x \in t \cdot E$.
Примером поглощающего множества является $\{x\}$, которое поглощается окрестностью 0. Окрестность 0 - это пример поглощающего множества.

Вводим понятие полунормы
Полунорма - это произвольная вещественная функция $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, обладающая следующими двумя свойствами:
$1^0. p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$
$2^0. p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Пример полунормы

$p(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$

$f(x) \in \mathbb{C}^1[0,1]$

1^0 и 2^0 свойства выполнены.
Если приравняем это нулю $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 0$б по получится что $f(x) = \text{const}$

8.12 Функционал Минковского

Вводим функционал Минковского
Когда мы строим функционал Минковского, то полунорма рассматривается на вещественном векторном топологическом пространстве.
Пусть (X, τ) - это вещественное ВТП.

Пусть A - абсолютно выпуклое и поглощающее множество.
Тогда функционал Минковского вводится следующим образом:

$$P_A(x) := \inf\{\lambda : \lambda > 0, \quad x \subset \lambda \cdot A\}$$

Проверим, что такой функционал определен для каждого x. Это так, потому что A - это поглощающее множество, поэтому для любого x найдется такое $\lambda, x \subset \lambda \cdot A$.

Теорема 1
Функционал Минковского является полунормой.
Доказательство:
Сначала докажем, что $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x), \alpha > 0$

$$p_A(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0, \alpha x \in \lambda A\} =$$
$$= \lambda \inf\left\{\frac{\lambda}{\alpha} > 0, x \in \frac{\lambda}{\alpha} A\right\} =, \mu = \frac{\lambda}{\alpha}$$
$$= \alpha \inf\{\mu > 0, x \in \mu A\} = \alpha p_A(x)$$

Пусть $\alpha < 0$, тогда

$$p_A(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0, \alpha x \in \lambda A\} = -\alpha \inf\left\{\frac{\lambda}{-\alpha} > 0, x \in -\frac{\lambda}{-\alpha} A \subset \frac{\lambda}{-\alpha}(-A) \subset \frac{\lambda}{-\alpha} A\right\} =,$$
$$\mu = \frac{\lambda}{-\alpha} = -\alpha \inf\{\mu > 0 : x \in \mu A\} = -\alpha p_A(x)$$

Теперь получаем, что $\forall \alpha$

$$p_A(\lambda x) = |\alpha| p_A(x)$$

Осталось доказать второе свойство полунормы.
Пусть $x, y \in X$

$$p_A(x) < a < p_A(x) + \varepsilon$$
$$p_A(y) < b < p_A(y) + \varepsilon$$

Докажем, что отсюда вытекают:

$$1 \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in A$$
$$p_A(x) < a \Rightarrow p_A\left(\frac{x}{a}\right) < 1$$
$$p_A\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\{\lambda > 0, \frac{x}{a} \in \lambda A\} < 1$$
$$\frac{x}{a} \in A$$

Аналогично доказывается, что $\frac{y}{b} \in A$

$$t\frac{x}{a} + (1-t)\frac{y}{b} \in A, t \in [0,1]$$
$$t = \frac{a}{a+b}, 1 - t = \frac{b}{a+b}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

При подстановке получаем

$$\frac{x+y}{a+b} \in A \Rightarrow x+y \in (a+b)\cdot A, \lambda_0 = a+b, x+y \in \lambda_0 \cdot A$$
$$p_A(x+y) = \inf\{\lambda > 0, x+y \in \lambda A\} \leq \lambda_0 = a+b$$

теперь воспользуемся тем, что

$$a < p_A(x) + \varepsilon$$
$$b < p_A(y) + \varepsilon$$

Подставляем в правую часть

$$p_A(x+y) < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$$

Переходим к $\varepsilon \to 0$

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$$

Ч.т.д.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

9 Лекция. Банаховы пространства

9.1 Банахово пространство

Для начала нам нужно вспомнить, что такое нормированное пространство. Нормированным пространством называется линейное пространство, на котором задана числовая неотрицательная функция, обладающая следующими свойствами:
1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \Theta$;
2) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$;
3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$.
Обозначение $(N, \|\cdot\|)$.
Разумеется, нормированное пространство может быть как вещественным, то есть над полем вещественных чисел, так и комплексным.
На нормированном пространстве можно ввести метрику $d(u, v) = \|u - v\|$.
Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность $d(u_n, u_m) = \|u_n - u_m\| \to 0, n, m \to +\infty$.
Определение: Если нормированное, метрическое пространство относительно данной метрики является полным, то оно называется банаховым пространством. Будем обозначать банахово пространство так: $(B, \|\cdot\|)$.

9.2 Примеры

1) $\mathbb{C}[0, 1]$ - пространство функций, непрерывных на отрезке [0,1].
Введем на нем норму $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Относительно этой нормы, данное пространство является банаховым.
Можно также ввести другие нормы. Например, $\|f\|_1 = |f(0)| + |f(1)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
Определение: Две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ на одном и том же нормированном пространстве N называются эквивалентными, если $\exists c_1 \geqslant c_2 > 0$ такие, что $c_2\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant c_1\|u\|_1 \ \forall u \in N$.
Перепишем вторую норму с учетом первой: $\|f\|_1 = |f(0)| + |f(1)| + \|f\|$. Также учтем, что $|f(0)|, |f(1)| \leqslant \|f\|$. Получаем $\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 3\|f\|$. А это значит, что нормы эквивалентны.
Положим N - полно относительно $\|\cdot\|_1$. Вопрос: будет ли N полно относительно $\|\cdot\|_2$, если данные нормы эквивалентны?
Решение: Пусть $u_n \subset$ N - это фундаментальная последовательность по норме 1, то есть $\|u_n - u_m\|_1 \to 0$ при $n, m \to +\infty$. Стало быть, эта последовательность сходится по норме 1, то есть $\exists u \in N : \|u_n - u\|_1 \to 0, m, n \to \infty$.
Теперь пусть u_n - фундаментальная последовательность по норме $\|\cdot\|_2$. Тогда она фундаментальна по норме $\|\cdot\|_1$.
Это следует из определения эквивалентности:

$$\|u_n - u_m\|_1 \leqslant \frac{1}{c_1}\|u_n - u_m\|_2 \to 0, n, m \to \infty.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно, и по первой норме последовательность фундаментальная. А если последовательность фундаментальная, то она сходится. Это значит, что $\exists u \in N, \|u_n - u\|_1 \to 0, n \to \infty$.
Далее получаем:

$$\|u_n - u\|_2 \leqslant c_1\|u_n - u\|_1 \to 0, n \to 0.$$

Получили, что если N - полно относительно нормы 1, то N - полно по норме 2. Аналогично можно доказать обратное: предположить, что N - полно по норме 2, и получить, что оно полно по норме 1.
В этом и заключается смысл эквивалентных норм: эквивалентные нормы, с точки зрения полноты, дают одно и то же полное нормированное пространство.

9.3 Пространство линейных непрерывных операторов

Пусть даны два нормированных пространства $(N_1, \|\cdot\|_1), (N_2, \|\cdot\|_2)$ и дан линейный непрерывный оператор $A : N_1 \to N_2$, действующий из N_1 в N_2.
Оператор называется линейным, если $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$. Оператор называется непрерывным, если при $\forall u_n \in N_1 \|u_n - u\| \to 0, u \in N_1,$ выполняется условие $\|Au_n - Au\|_2 \to 0$ при $n \to +\infty$. Забегая вперед, эта сходимость по норме также носит название сильной сходимости.
Множество всех линейных непрерывных операторов обозначается $\mathscr{L}(N_1, N_2)$.
Определим сложение двух операторов:

$$(\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1 A_1(x) + \beta_2 A_2(x)$$

Введем некоторую операторную норму:

$$\|A\|_{1\to 2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq \theta_1, x \in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

Проверим, является ли это выражение нормой:
1) $\|A\|_{1\to 2} = 0 \Rightarrow \|Ax\|_2 = 0, \forall x \in N_1 \Leftrightarrow Ax = \theta_2 \forall x \in N_1$. Это означает, что $A = \Theta_{1\to 2}$, то есть нулевой оператор. Он переводит все множество N_1 в нулевой элемент.
2) $\|A_1 + A_2\|_{1\to 2} \leqslant \|A_1\|_{1\to 2} + \|A_2\|_{1\to 2}$
$\|A_1 + A_2\|_{1\to 2} = \underset{x \neq \theta_1, x \in N_1}{\text{def}} \frac{\|A_1 x + A_2 x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \underset{x \neq \theta_1, x \in N_1}{\text{def}} \frac{\|A_1 x\|_2 + \|A_2 x\|_2}{\|x\|_1} = \|A_1\|_{1\to 2} + \|A_2\|_{1\to 2}$.
3) $\|\alpha A\|_{1\to 2} = \underset{x \neq \theta_1, x \in N_1}{\text{def}} \frac{\|\alpha A x\|_2}{\|x\|_1} = |\alpha| \|A\|_{1\to 2}$.
Это означает, что выполнены все условия определения нормы и данное выражение является нормой.
Теперь можно ввести понятия ограниченного и неограниченного операторов. Рассмотрим следующий пример:
Δ - оператор Лапласа. Если $\Delta : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, то $\|\Delta\| = +\infty$.
Если $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, где $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ - соболевские пространства, то $\|\Delta\| < +\infty$.
Следовательно, ограниченность зависит от выбора банаховых пространств. Оказывается, для линейного оператора понятия линейности и ограниченности совпадают.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

9.4 Лемма о непрерывности оператора

Лемма 1: Пусть A - линейный оператор. Тогда оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
Доказательство:

$$\|A\|_{1\to 2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\theta_1, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \geqslant \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}, \forall x \in N_1, x \neq \theta_1.$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_{1\to 2}\|x\|_1, \forall x \in N_1.$$

Достаточность: Пусть A - линейный оператор и $\|A\|_{1\to 2} < +\infty$, то есть оператор ограничен.
Пусть $x_n \in N_1 : \|x_n - x\|_1 \to 0$ при $n \to \infty, x \in N_1$.

$$\|A(x_n - x)\|_2 \leqslant \|A\|_{1\to 2}\|x_n - x\|_1$$

С другой стороны

$$\|A(x_n - x)\|_2 = \|A(x_n) - A(x)\|_2$$

Таким образом,

$$\|A(x_n) - A(x)\|_2 \leqslant \|A\|_{1\to 2}\|x_n - x\|_1$$

Следовательно, если правая часть последнего неравенства стремится к нулю, то и левая часть также стремится к нулю. А это и означает, что оператор A непрерывен в любой точке x.
Необходимость: Пусть A - линейный непрерывный оператор, то есть $A \in \mathscr{L}(N_1, N_2)$.
Доказательство проведем от противного. Пусть $\|A\|_{1\to 2} = +\infty$.
По определению $\|A\|_{1\to 2} = \sup\limits_{x\neq\theta_1, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = +\infty$. Это означает, что $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in N_1, \frac{\|Ax_n\|_2}{\|x_n\|_1} \geqslant n, x_n \neq \theta_1$.
Введем $y_n = \frac{x_n}{\|Ax_n\|_2}$ - элемент того же самого нормированного пространства.

$$\|y_n\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|Ax\|_2} \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

С другой стороны:

$$\|Ay_n\|_2 = \frac{\|Ax_n\|_2}{\|Ax\|_2} = 1$$

Перепишем первое выражение:

$$\|y_n - \theta_1\|_1, \text{ при } n \to +\infty \Rightarrow \|A(y_n) - A(\theta_1)\|_2 = \|A(y_n)\|_2 \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

Получаем противоречие с условием $\|Ay_n\|_2 = 1$. Следовательно, оператор A - ограниченный.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

9.5 Теорема о действии оператора в банаховом пространстве

Теорема: Пусть $(N_2, \|\cdot\|_2)$ - это банахово пространство. Тогда пространство $\mathbb{L}(N_1, N_2)$ тоже банахово относительно операторной нормы $\|\cdot\|_{1\to 2}$, где $\mathbb{L}(N_1, N_2)$ - нормированное пространство всех линейных отображений из N_1 в N_2.
Доказательство: Пусть $A_n \in \mathbb{L}(N_1, N_2)$ - это фундаментальная последовательность относительно операторной нормы, то есть $\|A_n - A_m\|_{1\to 2} \to 0$ при $n, m \to +\infty$.
Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\forall x \in N_1 \ \|A_n x - A_m x\|_2 = \|(A_n - A_m)x\|_2 \leqslant \|(A_n - A_m)\|_{1\to 2}\|x\|_1$$

Правая часть данного неравенства стремится к нулю при $n, m \to +\infty$. Поэтому можно сказать, что $A_n x$ - фундаментальная последовательность в $(N_2, \|\cdot\|_2)$ - в полном нормированном пространстве. Значит, последовательность сходится, то есть $A_n x \to A(x)$.
Докажем теперь, что A - линейный оператор.
В силу линейности оператора A_n:

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

Устремляя n к бесконечности, получаем в пределе:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

Вывод:
1) оператор A - линейный.
Для любой нормы имеет место неравенство:

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Докажем данное неравенство:
В силу неравенства треугольников

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|$$

Следовательно,

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$$

Объединяя эти неравенства, получаем

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Следовательно, можно записать

$$|\|A_n\|_{1\to 2} - \|A_m\|_{1\to 2}| \leqslant \|A_n - A_m\|_{1\to 2} \to 0 \text{ при } n, m \to +\infty$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это означает, что $\{\|A_n\|_{1\to 2}\}$ является фундаментальной числовой последовательностью. Тогда $\|A_n\|_{1\to 2} \to c_1$ при $n \to +\infty$.
Из того же неравенства и фундаментальности $\{A_n x\}$ следует

$$|\|Ax\|_2 - \|A_n x\|_2| \leqslant \|Ax - A_n x\|_2 \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_2$$

В силу того же неравенства

$$\|A_n x\|_2 \leqslant \|A_n\|_{1\to 2}\|x\|_1$$

В пределе при $n \to +\infty$ получаем:

$$\|Ax\|_2 \leqslant c_1\|x\|_1$$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leqslant c_1 < +\infty$$

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x\neq\theta_1, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leqslant c_1 < +\infty$$

Вывод:
2) оператор A - ограниченный.
Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\|_{1\to 2} \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

Сначала модифицируем формулу определения нормы оператора

$$\|A\|_{1\to 2} = \sup_{x\neq\theta_1, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\theta_1, x\in N_1} \|Ay\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2, \text{ где } y = \frac{x}{\|x\|_1}, \|y\|_1 = 1.$$

Далее запишем цепочку неравенств

$$\|A_n - A\| = \lim_{m\to+\infty} \|A_n - A_m\|$$

$$\|A_n x - Ax\|_2 \leqslant \|A_n - A\|_{1\to 2}\|x\|_1, \text{ где } \|x\|_1 \text{ можно взять } 1$$

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|A_n x - Ax\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_n - A_m\|_{1\to 2} \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

То есть

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

Что и требовалось доказать.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

9.6 Сильная и слабая сходимости. * - слабая сходимость

Рассмотрим пространства $\mathbb{L}(B, \mathbb{C}C^1), \mathbb{L}(B, \mathbb{R}^1)$.
$A \in \mathbb{L}(B, \mathbb{C}^1), \mathbb{L}(B, \mathbb{R}^1)$, если A - линейное непрерывное отображение, $A : B \to \mathbb{C}^1$. $\mathbb{L}(B, \mathbb{C}^1)$ назвается сопряженным пространством и обозначается $\mathbb{L}(B, \mathbb{C}^1) = B^*$. $\mathbb{C}^1$ и $\mathbb{R}^1$ - полные нормированные (банаховы) пространства относительно нормы $|\cdot|$. Это означает, что B^*, в силу последней теоремы, является полным нормированным пространством относительно операторной нормы.
Операторная норма пространства B^* или так называемая звездочная норма:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} | < f, x > |,$$

где $| < f, x > |$ - действие линейного функционала на элементе.
В рассматриваемых пространствах $(B, \|\cdot\|), (B^*, \|\cdot\|_*)$ возникает три типа сходимости.
1) Сильная сходимость в B

$$x_n \to x \text{ сильно в } B, \text{ если } \|x_n - x\| \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

x принадлежит пространству B в силу полноты этого пространства.
2) Сильная сходимость в B^*

$$\|f_n - f\|_* \to 0.$$

f принадлежит пространству B^* в силу полноты этого пространства.
3) Слабая сходимость в B

$$x_n \to x \text{ слабо в } B, \text{ если } \forall f \in B^* < f, x_n > \longrightarrow < f, x > .$$

4) *-слабая (звездочно-слабая) сходимость

$$f_n \xrightarrow{*} f, \text{ если } \forall x \in B \ < f_n, x > \longrightarrow < f, x >$$

Позже мы покажем, как связаны эти типы сходимости. Связаны они следующим образом:

$$\text{сильная} \longrightarrow \text{слабая} \longrightarrow \text{*-слабая.}$$

Определение: Рефлексивное банахово пространство - банахово пространство B, совпадающее со своим вторым сопряжением $(B^*)^*$. В случае рефлексивного банахового пространства слабая и *-слабая сходимости совпадают.

9.7 Теорема Хана-Банаха

Теорема: Пусть X - вещественное линейное пространство, $X_0 \subset X$ - линейное подпространство (вещественное). Предположим, что на X_0 задан функционал $< \lambda, x >$. При этом выполнены следующие условия (свойства):
1) $< \lambda, x >$ определен на X_0;
2) $< \lambda, x > \leqslant p(x)$ $\forall x \in X_0$;
3) $p(x)$ определена на всем X и обладает следующими свойствами:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

а)$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$;
б)$p(tx) = tp(x), \forall t \geqslant 0$.
Тогда $\exists \Lambda$:
1)$< \Lambda, x >=< \lambda, x >, \forall x \in X_0$;
2)$< \Lambda, x > \leqslant p(x), \forall x \in X$.
Доказательство:
Предполагаем, что $X \backslash X_0 \neq \varnothing$. Пусть $x, y \in X_0; x_0 \notin X_0$, но $\in X$
По условию

$$< \lambda, x+y > \leqslant p(x+y) = p(x-x_0+x_0+y) = p(x-x_0)+p(y+x_0).$$

С другой стороны $< \lambda, x+y >=< \lambda, x > + < \lambda, y >$.
Получаем

$$< \lambda, x > -p(x-x_0) \leqslant - < \lambda, y > +p(y+x_0), \forall x, y \in X_0.$$

Левая часть неравенства не зависит от y, а правая – от x. Поэтому

$$\exists a = a(\lambda, x_0), \text{ что } < \lambda, x > -p(x-x_0) \leqslant a \leqslant - < \lambda, y > +p(y+x_0).$$

Перепишем данное выражение в следующем виде

$$< \lambda, x > -a \leqslant p(x-x_0)$$

$$< \lambda, y > +a \leqslant p(y+x_0)$$

$$\forall x, y \in X_0.$$

Теперь рассмотрим линейное пространство $X_1 = X_0 \oplus \{tx_0\}, t \in \mathbb{R}^1$. Разумеется, $X_0 \subset X_1$. Если элемент $y \in X_1$, то его можно представить, как $y = x + tx_0$.
Построим продолжение функционала λ на X_1:

$$< \Lambda, y >=< \Lambda, x+tx_0 >:=< \lambda, x > +ta$$

1) Проверим, является ли данный функционал $< \Lambda, y >$ линейным.
Возьмем два элемента $y_1 = x_1 + t_1 x_0, \ y_2 = x_2 + t_2 x_0$ и произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$< \Lambda, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 >=< \lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 > +(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) \cdot a =$$

$$= \alpha_1 < \lambda, x_1 > +\alpha_2 < \lambda, x_2 > +\alpha_1 t_1 a + \alpha_2 t_2 a = \alpha_1(< \lambda, x_1 > +t_1 a) + \alpha_2(< \lambda, x_2 > +t_2 a) =$$

$$= \alpha_1 < \Lambda, y_1 > +\alpha_2 < \Lambda, y_2 >$$

Следовательно, функционал Λ - линейный.
2) Докажем, что Λ - продолжение λ.
По определению если элемент $y \in X_1$, то его можно представить, как $y = x + tx_0$. Чтобы получить точку $y \in X_0$, нужно положить в формуле $t = 0$. Тогда получим

$$< \Lambda, y >=< \lambda, x+tx_0 > |_{t=0} =< \lambda, x >$$

Это и означает, что Λ является продолжением λ с пространства X_0 на более широкое X_1.

3)Докажем теперь второе утверждение теоремы:

$$< \Lambda, x > \leqslant p(x), \forall x \in X.$$

По определению

$$< \Lambda, y > = < \lambda, x > + t \cdot a = t(< \lambda, \frac{x}{t} > + a)$$

Воспользуемся неравенствами, полученными ранее, считая, что $t > 0$

$$t(< \lambda, \frac{x}{t} > + a) \leqslant tp(\frac{x}{t} + x_0) = p(x + tx_0) = p(y)$$

Аналогично рассмотрим случай, когда $t < 0,$ и введем $t_1 = -t > 0$

$$< \Lambda, y > = < \lambda, x > - t_1 \cdot a = t_1(< \lambda, \frac{x}{t_1} > - a) \leqslant$$

$$\leqslant t_1 p(\frac{x}{t_1} - x_0) = p(x - t_1 x_0) = p(x + tx_0) = p(y)$$

Что и требовалось доказать.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

10 Лекция. Теоремы Банаха-Штейнгауза

10.1 Теорема Хана-Банаха в комплексном случае

Теорема: Пусть X – комплексное линейное пространство, $X_0 \subset X$ – линейное подпространство. Пусть на X_0 задан функционал $< \lambda, x >$, причем

$$| < \lambda, x > | \leqslant p(x) \ \forall x \in X_0,$$

где $p(x)$ – полунорма, определена на всем X.
Тогда существует такой функционал Λ, что:
1) $< \Lambda, x >=< \lambda, x >, \forall x \in X_0$;
2)$| < \Lambda, x > | \leqslant p(x), \forall x \in X$.
Доказательство:
Хотим свести все доказательство к случаю вещественного пространства.
X – это комплексное линейное пространство. Это значит, что

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^1 \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in X.$$

Если рассматривать то же самое множество X, но рассматривать его, как линейное пространство над полем вещественных чисел, то есть брать во всех аксиомах линейного пространства не комплексные числа, а вещественные:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in X,$$

то мы получим линейное пространство. Это вещественное пространство называется овеществлением X и обозначается $X_{\mathbb{R}}$. Аналогично можно поступить с подпространством X_0 и ввести линейное вещественное подпространство $X_{0\mathbb{R}} \subset X_{\mathbb{R}}$.
Рассмотрим функционал $< \widetilde{\lambda}, x > \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} < \lambda, x >$.
Проверим, является ли функционал $< \widetilde{\lambda}, x >$ линейным относительно линейных комбинаций с вещественными коэффициентами ($\alpha \in \mathbb{R}^1$):

$$< \widetilde{\lambda}, \alpha x >= \operatorname{Re} < \lambda, \alpha x >= \operatorname{Re}(\alpha < \lambda, x >) = \alpha \operatorname{Re} < \lambda, x >= \alpha < \widetilde{\lambda}, x >$$

Проводя аналогичные вычисления, можно получить

$$< \widetilde{\lambda}, x + y >=< \widetilde{\lambda}, x > + < \widetilde{\lambda}, y >$$

Таким образом, $< \widetilde{\lambda}, x >$ действительно оказался линейным вещественным функционалом. Но, например, $< \widetilde{\lambda}, ix > \neq i < \widetilde{\lambda}, x >$, потому что только вещественный функционал линеен.
Проверим все условия теоремы Хана-Банаха для вещественного случая.
1)$< \widetilde{\lambda}, x >$ – линейный, определен на $X_{0\mathbb{R}}$.
2)$\operatorname{Re} < \lambda, x > \leqslant | < \lambda, x > | \leqslant p(x) \ \forall x \in X_{0\mathbb{R}}$.
Последнее неравенство следует из условия теоремы.
Все условия вещественной теоремы Хана-Банаха выполнены, поэтому $\exists \widetilde{\Lambda}$, что

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $< \widetilde{\Lambda}, x >=< \lambda, x > \ \forall x \in X_{0\mathbb{R}}$;
2) $< \widetilde{\Lambda}, x > \leqslant p(x) \ \forall x \in X_{\mathbb{R}}$.

Теперь рассмотрим функционал $< \Lambda, x > \stackrel{\text{def}}{=} < \widetilde{\Lambda}, x > -i < \widetilde{\Lambda}, ix > \ \forall x \in X_{\mathbb{R}} = X$.
1) Проверим линейность Λ относительно линейных комбинаций с комплексными коэффициентами.

Шаг 1: Проверим, выполняется ли равенство $< \widetilde{\Lambda}, ix >= i < \widetilde{\Lambda}, x >$.

$$< \Lambda, x >=< \widetilde{\Lambda}, ix > -i < \widetilde{\Lambda}, -x >=< \widetilde{\Lambda}, ix > +i < \widetilde{\Lambda}, x >= i(< \widetilde{\Lambda}, x > -i < \widetilde{\Lambda}, ix >) = i < \Lambda, x >$$

Шаг 2: Теперь докажем $< \Lambda, \alpha x >= \alpha < \Lambda, x > \ \forall \alpha \in \mathbb{C}^1$.
Представим α как сумму вещественной и мнимой части: $\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1, \ \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}^1$ и подставим в выражение.

$$< \Lambda, (\alpha_0 + i\alpha_1)x >=< \Lambda, \alpha_0 x + i\alpha_1 x >=< \Lambda, \alpha_0 x > + < \Lambda, i\alpha_1 x >=$$
$$\alpha_0 < \Lambda, x > +i\alpha_1 < \Lambda, x >= \alpha < \Lambda, x >$$

Здесь мы воспользовались формулой $< \Lambda, x + y >=< \Lambda, x > + < \Lambda, y >$, которая доказывается элементарно.
Линейность доказана.
2) Докажем, что $\forall x \in X_0 < \Lambda, x >=< \lambda, x >$.
Замечание:

$$z = x + iy,$$
$$iz = ix - y,$$
$$\mathrm{Im} z = -\mathrm{Re}(iz).$$

$< \lambda, x >$ – комплексное число, поэтому его можно записать в следующем виде

$$\forall x \in X_0 \ < \lambda, x >= \mathrm{Re} < \lambda, x > +i\mathrm{Im} < \lambda, x >= \mathrm{Re} < \lambda, x > -i\mathrm{Re}(i < \lambda, x >) =$$

$$\mathrm{Re} < \lambda, x > -i\mathrm{Re}(< \lambda, ix >) =< \widetilde{\lambda}, x > -i < \widetilde{\lambda}, ix >=$$
$$< \widetilde{\Lambda}, x > -i < \widetilde{\Lambda}, ix >=< \Lambda, x >$$

Получили первое утверждение теоремы

$$< \lambda, x >=< \Lambda, x > \ \forall x \in X_0.$$

3) Докажем второе утверждение теоремы

$$| < \Lambda, x > | \leqslant p(x), \forall x \in X.$$

$< \Lambda, x >$ - комплексное число. Представим его в следующем виде

$$< \Lambda, x >= | < \Lambda, x > | e^{i\varphi}$$

Тогда

$$| < \Lambda, x > | = e^{-i\varphi} < \Lambda, x >=< \Lambda, e^{-i\varphi} x >$$

$|<\Lambda, x>|$ – вещественное число, поэтому $<\Lambda, e^{-i\varphi}x>$ – тоже вещественное число. Поэтому

$$<\Lambda, e^{-i\varphi}x>=\mathrm{Re}<\Lambda, e^{-i\varphi}x>=<\widetilde{\Lambda}, e^{-i\varphi}x><\leqslant p(e^{-i\varphi}x)=p(x)$$

Здесь мы воспользовались неравенством $<\widetilde{\Lambda}, x><\leqslant p(x)$ и свойством полунормы $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.
Получаем

$$|<\Lambda, x>|\leqslant p(x), \forall x\in X.$$

Что и требовалось доказать.

10.2 Следствия

Следствие 1: Пусть Y – линейное нормированное подпространство произвольного нормированного пространства X, $Y\subset X$. Пусть функционал $\lambda\in Y^*$, где Y^* – пространство линейных непрерывных функционалов над Y.
Тогда:

$$1)\exists <\Lambda, y>=<\lambda, y>\ \ \forall y\in Y;$$

$$2)\|\Lambda\|_{X^*}=\|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство:
Прежде всего нужно выбрать полунорму, которая участвует в обеих теоремах Хана-Банаха. Рассматриваем сразу комплексный случай, потому что вещественный – это частный случай комплексного. Возьмем $p(x)=\|\lambda\|_{Y^*}\|x\|, \|\lambda\|_{Y^*}>0$.
Важное неравенство

$$|<\lambda, y>|\leqslant\|\lambda\|_{Y^*}\|y\|, \forall y\in Y.$$

Докажем это неравенство. По определению операторной нормы

$$\|\lambda\|_{Y^*}=\sup_{y\in Y, y\neq\theta}\frac{|<\lambda, y>|}{\|y\|}\leqslant\frac{|<\lambda, y>|}{\|y\|}, \forall y\neq\theta.$$

При $y=\theta$ неравенство очевидно.
Воспользуемся данным неравенством

$$|<\lambda, y>|\leqslant\|\lambda\|_{Y^*}\|y\|=p(y), \forall y\in Y.$$

Пользуемся комплексным вариантом теоремы Хана-Банаха:
$\exists\Lambda\in X^*$:

$$1)<\Lambda, y>=<\lambda, y>, \forall y\in Y;$$

$$2)|<\Lambda, x>|\leqslant p(x), \forall x\in X.$$

Первое утверждение следствия доказано. Теперь докажем второе свойство.

$$\|\lambda\|_{Y^*}=\sup_{y\in Y, y\neq\theta}\frac{|<\lambda, y>|}{\|y\|}=\sup_{y\in Y, y\neq\theta}\frac{|<\Lambda, y>|}{\|y\|}\leqslant\sup_{x\in X, x\neq\theta}\frac{|<\Lambda, x>|}{\|x\|}=\|\Lambda\|_{X^*}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Здесь мы воспользовались тем, что функционал Λ совпадает с λ в Y.
Докажем утверждение в другую сторону

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \sup_{x\in X, x\neq\theta} \frac{|<\Lambda, x>|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|\lambda\|_{Y^*}\|x\|}{\|x\|} = \|\lambda\|_{Y^*}$$

Таким образом, выполняется равенство норм

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*}$$

Следствие доказано.
Следствие 2: Пусть $y \in X, y \neq \theta$ – какой-то фиксированный элемент X.
Тогда $\exists \Lambda \in X^*$, что

$$1) \|\Lambda\|_{X^*} = 1,$$

$$2) |<\Lambda, y>| = \|y\|.$$

Доказательство:
Рассмотрим линейное подпространство $Y = \{ay, a \in \mathbb{C}^1\} \subset X$. Введем на Y функционал $<\lambda, z> \stackrel{\text{def}}{=} a\|y\|,$ где $z = ay$.
Проверим его линейность. Рассмотрим $z_1 = a_1 y, z_2 = a_2 y$

$$<\lambda, z_1 + z_2> = (a_1 + a_2)\|y\| = a_1\|y\| + a_2\|y\| = <\lambda, z_1> + <\lambda, z_2>$$

Аддитивность доказана. Теперь докажем однородность функционала.

$$<\lambda, \alpha z> = \alpha a\|y\| = \alpha <\lambda, z>$$

Следовательно, функционал линейный, определен на всем Y. Значит, по следствию 1 существует продолжение этого функционала такое, что

$$<\Lambda, z> = <\lambda, z> \ \forall z \in Y,$$

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Прежде всего посчитаем, чему равна $\|\lambda\|_{Y^*}$.

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{z\in Y, z\neq\theta} \frac{|<\lambda, z>|}{\|z\|} = \sup_{z\in Y, z\neq\theta} |<\lambda, \frac{z}{\|z\|}>| = \sup_{\|z\|=1} |<\lambda, z>| =$$

$$\sup_{\|ay\|=1} |<\lambda, ay>| = \sup_{\|ay\|=1} |a|\|y\| = \sup_{|a|\|y\|=1} |a|\|y\| = 1$$

Таким образом,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$$

Теперь вычислим $<\Lambda, y>, y \in Y$.

$$<\Lambda, y> = <\lambda, y> = 1 \cdot \|y\| = \|y\|$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следствие доказано.

Следствие 3: Пусть B – произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, B^* – пространство линейных непрерывных функционалов над B с нормой $\|\cdot\|_*$.

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |< f, x >|$$

Тогда

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_*=1} |< f, x >|$$

Доказательство:
Имеет место следующее неравенство

$$|< f, x >| \leqslant \|f\|_* \|x\|$$

Возьмем $\|f\|_* = 1$. Тогда $\|f\|_* \|x\| = \|x\|$. Получаем

$$\|x\| \geqslant \sup_{\|f\|_*=1} |< f, x >|, \forall \|f\|_* = 1.$$

В силу следствия 2

$$\forall x \in B \ \exists f \in B^* \ \|f\|_* = 1 \text{ и } \ < f, x >= \|x\|.$$

Следовательно,

$$\|x\| = \sup_{\|f\|_*=1} |< f, x >|$$

Следствие 3 доказано.

10.3 Виды сходимости на банаховых пространствах

Рассмотрим вопрос о дважды сопряженном банаховом пространстве. Пусть имеется банахово пространство B относительно нормы $\|\cdot\|$. По данному пространтсву строим звездочное банахово пространство B^*, полное относительно нормы $\|\cdot\|_*$. Обозначим скобки двойственности между B и B^* $< \cdot, \cdot >$. Напоминание:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |< f, x >|$$

B^* – тоже банахово пространство относительно нормы, поэтому на нем тоже существует пространство линейных непрерывных функционалов $(B^*)^*$. Обозначим скобки двойственности между B и B^* $< \cdot, \cdot >_*$. Выпишем норму элемента $x^{**} \in (B^*)^*$

$$\|x^{**}\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |< x^{**}, f >_*|$$

Оказывается, банахово пространство B порождает линейные непрерывные функционалы над B^*.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример:

$$< f, x > \ , \text{ где } x \in B - \text{фиксировано, а } f \text{ меняется.}$$

Проверим линейность и непрерывность данного функционала.
1) Линейность

$$< \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x >= \alpha_1 < f_1, x > + \alpha_2 < f_2, x >$$

2) Непрерывность
Используем выражение

$$| < f_n - f, x > | \leqslant \|f_n - f\|_* \|x\|$$

$\|f_n - f\|_* \to 0 \Rightarrow | < f_n - f, x > | \to 0$. Значит, при $x = fix$ функционал непрерывен. Следовательно, по определению B^{**} x можно отождествить с каким-то элементом из B^{**}. Появляется отображение $J : B \to B^{**}$. Удобно вместо $(B^*)^*$ писать просто B^{**}. Этот оператор действует следующим образом

$$< Jx, f >_* \stackrel{\text{def}}{=} < f, x >, \ \forall x \in B \ \forall f \in B^*.$$

Докажем, что оператор J является линейным изометричным оператором.
1) Линейность

$$< J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), f >_* = < f, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 >= \alpha_1 < f, x_1 > + \alpha_2 < f, x_2 >=$$

$$\alpha_1 < Jx_1, f > + \alpha_2 < Jx_2, f >$$

Это равенство должно выполняться $\forall f \in B^*$. Далее

$$\alpha_1 < Jx_1, f > + \alpha_2 < Jx_2, f >= < \alpha_1 Jx_1, f >_* + < \alpha_2 Jx_2, f >_* = < \alpha_1 Jx_1 + \alpha_2 Jx_2, f >_*$$

Перенесем все в одну часть

$$< J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 Jx_1 - \alpha_2 Jx_2, f >_* = 0, \forall f \in B^*$$

Значит, $J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 Jx_1 - \alpha_2 Jx_2 = \Theta^{**} \in B^{**}$. Стало быть, имеет место равенство

$$J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Jx_1 + \alpha_2 Jx_2,$$

то есть оператор J линейный.
2) Изометрия
Вычислим норму

$$\|J_x\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} | < Jx, f > | = \sup_{\|f\|_*=1} | < f, x > | = \|x\|, \forall x \in B.$$

Последнее равенство вытекает из следствия 3. Получаем, что J – это изометрия, причем линейная.
Теперь мы можем рассмотреть типы сходимости и посмотреть, как они взаимосвязаны.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Сильная сходимость
Введем последовательность $\{x_n\} \in B$.

$$x_n \to x \text{ сильно в } B, \text{ если } x \in B \text{ и } \|x_n - x\| \to +0.$$

$x \in B$ – условие очевидное для банахова пространства, поэтому его можно опускать. В случае просто нормированного пространства это условие писать нужно.
2) Слабая сходимость

$$x_n \rightharpoonup x \text{ слабо в } B, \text{ если } \forall f \in B^* < f, x_n - x > \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

3) *-слабая сходимость

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ *-слабо в } B^*, \text{ если } < f_n - f, x > \to 0 \text{ при } n \to +\infty \ \forall x \in B.$$

4) Слабая сходимость на B^*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ слабо в } B^*, \text{ если } \forall x^{**} \in B^{**} < x^{**}, f_n - f >_* \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Определим соотношения между типами сходимости.

Справедливо неравенство

$$| < f, x_n - x > | \leqslant \|f\|_* \|x_n - x\|$$

Если $\|x_n - x\| \to 0$, то $< f, x_n - x > \to 0$. Поэтому из сильной сходимости следует слабая.
Теперь рассмотрим, как связаны слабая сходимость на B^* со *-слабой сходимостью на B^*.
Пусть $f_n \rightharpoonup f$ слабо в B^*. Это означает, что

$$< x^{**}, f_n - f >_* \to 0 \text{ при } n \to +\infty \ \forall x^{**} \in B^{**}$$

В качестве x^{**} можно взять $Jx, x \in B$. Подставляем и получаем по определению

$$< Jx, f_n - f >_* = < f_n - f, x >$$

Если $< x^{**}, f_n - f > \to 0$, то $< f_n - f, x > \to 0$. Получается, что из слабой сходимости на B^* следует *-слабая сходимость на B^*.
Слабая сходимость и *-слабая сходимость совпадают, когда $J(B) = B^{**}$, то есть в случае рефлексивного банахова пространства. В этом случае B и B^{**} совпадают.

10.4 Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема: Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – семейство операторов, $T_\alpha : {}_1 \to B_2$ – отображение банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, $\forall \alpha \in I$.

$$1) T_\alpha \text{ – непрерывное отображение,}$$

$$2) \|T_\alpha(x + y)\|_2 \leqslant \|T_\alpha(x)\|_2 + \|T_\alpha(y)\|_2,$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$3)\|T_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda|\|T_\alpha(x)\|_2,$$
$$4)\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда

$$\sup_{\|x\|_1\leqslant\delta}\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \to 0 \text{ при } \delta \to +0.$$

Доказательство:
Введем множество $b_n(\alpha) := \{x \in B_1 : \|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$. Поскольку операторы T_α являются непрерывными, можно доказать, что множество $b_n(\alpha)$ замкнуто в B_1, то есть $\overline{b_n(\alpha)} = b_n(\alpha)$.
Введем пространство $X_n = \bigcap\limits_{\alpha\in I} b_n(\alpha)$. Это множество замкнутое, так как это пересечение произвольного числа замкнутых множеств.

$$X_n = \bigcap_{\alpha\in I} b_n(\alpha) = \{x \in B_1 : \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$

Согласно условию 4

$$\forall x \in B_1 \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Если мы возьмем $n \geqslant c(x)$, то $\forall x \in X_n$. Это означает, что банахово пространство $B_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} X_n$ – объединение счетного числа замкнутых множеств X_n, то есть $\overline{X_n} = X_n$.
Теорема Бэра о категориях:

Если произвольное полное метрическое пространство можно представить в виде

$$B_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \overline{X_n} = X_n, \text{ то } \exists n_0 \in \mathbb{N}, O(x_0,\varepsilon) \neq \varnothing \text{ и } O(x_0,\varepsilon) \subset X_{n_0}.$$

$$O(x_0,\varepsilon) \subset X_{n_0} \Leftrightarrow \{\forall x \in B_1 : \|x - x_0\|_1 < \varepsilon\} \subset \{x \in B_1 : \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant n_0\}$$

Сделаем замену $y = x - x_0$. Тогда

$$\{\forall y \in B_1 : \|y\|_1 < \varepsilon\} \subset \{y \in B_1 : \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(y + x_0)\|_2 \leqslant n_0\}$$

В силу свойства 2

$$\|T_\alpha(y)\|_2 \leqslant \|T_\alpha(y + x_0)\|_2 + \|T_\alpha(-x_0)\|_2$$

Получается, что

$$\forall y \in B_1 : \{\|y\|_1 < \varepsilon\} \Rightarrow \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(y)\|_2 \leqslant n_0 + c(x_0)$$

Сделаем замену $y = \frac{\varepsilon}{\delta}x$. С учетом замены получаем

$$\forall x \in B_1 : \|x\|_1 < \delta, \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n_0 + c(x_0))$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Здесь воспользовались свойством 3.

$$\sup_{\alpha\in I,\|x\|_1<\delta}\|T_\alpha(x)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n_0+c(x_0))$$

$$\text{При } \delta\to 0\ \frac{\delta}{\varepsilon}(n_0+c(x_0))\to 0 \Rightarrow \sup_{\alpha\in I,\|x\|_1<\delta}\|T_\alpha(x)\|_2\to 0$$

Теорема доказана.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

11 Лекция. Следствия теорем Банаха-Штейнгауза

11.1 Следствия теоремы Банаха-Штейнгауза

Теорема Банаха - Штейнгауза:
Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$
1° $\{T_\alpha\} : B_1 \to B_2$ – непрерывно
2° $\| T_\alpha(x+y) \|_2 \le \| T_\alpha(x) \|_2 + \| T_\alpha(y) \|_2$
3° $\| T_\alpha(\lambda x) \|_2 \le |\lambda| \| T_\alpha(x) \|_2$
4° $\sup\limits_{\alpha\in I} \| T_\alpha(x) \|_2 \le C(x) < +\infty$
Теорема Банаха - Штейнгауза утверждает, что если выполнены эти 4 свойства, то:
$\lim\limits_{\delta\to+0} \sup\limits_{\alpha\in I} \sup\limits_{\|x\|_1\le\delta} \| T_\alpha(x) \|_2 = 0$

Следствие 1:
Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I} \in L(B_1, B_2)$. Тогда первые три свойства теоремы сразу выполнены в силу того, что отображение линейно. При этом выполнено еще одно дополнительное условие: $\sup\limits_{\alpha\in I} \| T_\alpha(x) \|_2 < +\infty$ для каждого x, откуда следует, что $\sup\limits_{\alpha\in I} \| T_\alpha(x) \|_{1\to2} < +\infty$. Докажем это утверждение.

Доказательство:
Можем записать следующее выражение: $\| T_\alpha(x) \|_{1\to2} = \sup\limits_{\|x\|_1\le1} \| T_\alpha(x) \|_2$.
Теперь вместо x подставим $\frac{y}{\delta}$. Тогда, в силу линейности оператора $\{T_\alpha\}$ и однородности нормы, получаем:
$\| T_\alpha(x) \|_{1\to2} = \sup\limits_{\|x\|_1\le1} \| T_\alpha(x) \|_2 = \frac{1}{\delta} \sup\limits_{\|y\|_1\le\delta} \| T_\alpha(y) \|_2$ (1).
Из результата основной теоремы следует: $\exists\delta > 0 : \sup\limits_{\|x\|_1\le\delta} \| T_\alpha(x) \|_2 \le 1$.
Заметим, что правая часть неравенства не зависит от α. Применяя полученный результат для выражения (1) получим, что:
$\frac{1}{\delta} \sup\limits_{\|y\|_1\le\delta} \| T_\alpha(y) \|_2 \le \frac{1}{\delta}$.
Объединяя равенство (1) с полученным результатом, взяв супремум по α от обеих частей неравенства получаем требуемое утверждение.

Следствие 2:
Пусть T_n - последовательность линейных непрерывных операторов, причем

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to B_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x - \text{сильно в} B_2 \text{для каждого} x \in B_1$$

Тогда T_0 - это линейный непрерывный оператор.
Доказательство:
1.
Действительно, в силу линейности T_n имеем:

$$T_n\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)=\alpha_1 T_n x_1+\alpha_2 T_n x_2$$

Поскольку по условию

$$T_n\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)\to T_0\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right),\quad T_n x_1\to T_0 x_1,\quad T_n x_2\to T_0 x_2 (2)$$

то, перейдя в (2) к пределу при $n\to+\infty$, получим

$$T_0\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\right)=\alpha_1 T_0 x_1+\alpha_2 T_0 x_2$$

Тем самым доказана линейность оператора T_0

2.

Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\|_2\leqslant c_1(x)<+\infty$$

но тогда из первого следствия из теоремы Банаха-Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{1\to 2}<+\infty$$

Тогда

$$\|T_0 x\|_2=\lim_{n\to+\infty}\|T_n x\|_2\leqslant\lim_{n\to+\infty}\|T_n\|_{1\to 2}\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_1$$

Значит T_0 - это ограниченный оператор.

Из линейности и ограниченности оператора следует его непрерывность. Теорема доказана.

В дальнейшем будем называть:

1° $\|\ x_n-x_m\ \|\to 0$ при $n,m\to+\infty$ - сильно фундаментальная последовательность.

2° $\langle f,x_n-x_m\rangle\to 0$ при $n,m\to+\infty\quad\forall f\in B^*$ - слабо фундаментальная последовательность

3° $\langle f_n-f_m,x\rangle\to 0$ при $n,m\to+\infty\quad\forall x\in B^*,\quad\{f_n\}\in B^*$ - звездочно слабая фундаментальная последовательность - важный пункт.

Из сильной сходимости следует слабая, что следует из неравенства

$$|\langle f,x_n-x_m\rangle|\leq\|\ x\ \|_x\ \|\ x_n-x_m\ \|$$

Буде ли слабо фундаментальная последовательность *-слабо фундаментальной последовательностью?

Слабо фундаментальная последовательность в B^*:

$$\langle x^{**},f_n-f_m\rangle_*\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to+\infty\quad\forall x^{**}\in B^{**}$$

А *-слабо фундаментальной последовательность:

$$\langle f_n-f_m,x\rangle\to 0\quad\text{при}\quad n,m\to+\infty$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тепер возьмем $x^{**} \subset J(B)$, тогда:

$$\langle x^{**}, f_n - f_m \rangle_* = \langle Jx, f_n - f_m \rangle \underset{def}{=} \langle f_n - f_m, x \rangle$$

Откуда и следует, что из того, что последовательность слабо фундаментальная следует, что последовательность *-лабофундаментальная.

В общем случае не всякая слабая фундаментальная последовательность является сильно фундаментальной. Чтобы понять, в каком случае всякая слабая фундаментальная последовательность была сильно фундаментальной и соответственно сходилась, необходимо ответить на вопрос: "При каком достаточном условии банахово пространство окажется слабо полным?". Для ответа на этот вопрос сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1.

Всякое банахово пространство B^* является *-слабо полным.

Доказательство:
Возьмем *-слабую фундаментальную последовательность $f_n \subset B^*$, т.е.

$$\langle f_n - f_m, x \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \quad \forall x \in B$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{\langle f_n, x \rangle\}$. В силу вышеуказанного свойства эта последовательность фундаментальна в $C(R)$. Всякая фундаментальная последовательность сходится:

$$\langle f_n, x \rangle \to f_0(x)$$

$$\underset{n \in N}{sup} \langle f_n, x \rangle < +\infty$$

Теперь можем применить следствие 2. Положим $T_n = f_n$, $B_1 = B$, $B_2 = C(R)$. Тогда можем записать, что существует линейный оператор f_0 такой, что:

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f_0, x \rangle$$

$$f_0 \in L(B_1, B_2) = L(B, C) = B^*$$

Получилось, что в силу теоремы Банаха-Штейнгауза любая *-слабая фундаментальная последовательность *-слабо сходится в B^*. Значит мы доказали, что всякое банахово пространство B^* является *-слабо полным.
Теперь нам нужно получить достаточное условие слабой полноты. Докажем теорему 2.

Теорема 2

Всякое рефлексивное банахово пространство является слабо полным.

Доказательство: Берем слабо фундаментальную последовательность $\{x_n\} \subset B$ такую, что

$$\langle f_n - f_m, x \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \quad \forall f \in B^*$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пользуясь оператором вложения J получаем:

$$\langle Jx_n - Jx_m, f\rangle_* = \langle f, x_n - x_m\rangle$$

Правая часть равенства стремится к 0 при n,m независимо стремящимся к $+\infty$. Тогда последовательность $\{Jx_n\}$ *-слабо фундаментальна в B^{**}. Мы доказали, что всякое звездочное пространство является *-слабо полным. Поэтому

$$Jx_n \overset{*}{\rightharpoonup} w \in B^{**} \quad (3)$$

Воспользуемся рефлексивностью: $J(B) = B^{**}$. Это означает, что

$$\exists! x_0 \in B, w = Jx_0$$

Запишем равенство (3) с учетом равенств, вытекающих из рефлексивности.

$$\langle Jx_n - w, f\rangle_* = \langle Jx_n - Jx_0, f\rangle_* = \langle f, x_n - x_m\rangle \to \quad n \to +\infty \quad \forall f \in B^*$$

Откуда следует, что

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_0\rangle$$

Откуда получаем, что $x_n \rightharpoonup x_0$ слабо в B. Т.е. рефлексивное банахово пространство является слабо полным. Теорема доказана.

11.2 Критерии слабой и *-слабой сходимости

Теорема 3

Пусть B рефлексивное и сепарабельное банахово пространство. Тогда из всякой последовательности $\{x_n\} \in B$ равномерно ограниченной по норме, можно выделить слабо сходящуюся в B подпоследовательность.

Доказательство: Из сепарабельности B следует сепарабельность B^{**}, а также следует недоказанная сепарабельсть B^*. Пусть последовательность $\{f_k\} \in B^*$ счетное, всюду плотное множество. Рассмотрим последовательность $\langle f_1, x_n\rangle$. Из ограниченности последовательности x_n по норме следует, что

$$\langle f_1, x_n\rangle \le \| f \|_* \sup_{n\in N} \| x_n \|$$

Полученная последовательность ограничена, т.е. содержит в себе сходящуюся подпоследовательность. Найдется подпоследовательность $\{x_{n_1}\} \in \{x_n\}$ такая, что $\langle f_1, x_{n_1}\rangle$ сходится в C или R. Рассмотрим $\{x_{n_1}\} \subset \{x_n\}$. Теперь рассмотрим числовую последовательность $\langle f_2, x_{n_1}\rangle$. Она ограничена:

$$|\langle f_2, x_{n_1}\rangle| \le \| f_2 \|_* \sup_{n\in R} \| x_n \|$$

Значит существует числовая подпоследовательность $\{x_{n_2}\}$ подпоследовательности $\{x_{n_1}\}$ такая, что $\langle f_2, x_{n_2}\rangle$ сходится в C или в R. Продолжая таким образом мы получим последовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ таку, что $\langle f_j, x_{n_k}\rangle$ сходится для всех

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$j = 1, .., k$. Теперь докажем, что наша подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ является слабо фундаментальной. Если мы это докажем, то с учетом рефлексивности банахова пространства она будет сходится по предыдущему утверждению. Рассмотрим

$$|\langle x_{n_k} - x_{m_k}| \leq |\langle f - f_k, x_{n_k}\rangle + \langle f_k, x_{n_k} - x_{m_k}\rangle + \langle x_{m_k}, f_k - f\rangle| \quad (4)$$

Воспользуемся тем, что $\{f_k\}$ - счетное, всюду плотное множество в B^*.

$$|\langle f - f_k, x_{n_k}\rangle \leq \| f - f_k \| \sup_{n\in N} \| x_n \|$$

Выберем k настолько большим, чтобы правая часть равенства оказалась меньше, чем $\frac{\epsilon}{3}$. Тогда первое и третье слагаемое неравенства (4) будут меньше, чем $\frac{\epsilon}{3}$. Выберем теперь n_k и m_k настолько большими, что второе слагаемое неравенства (4) тоже было бы меньше, чем $\frac{\epsilon}{3}$. Получаем, что для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие n_k и m_k левая часть неравенства (4) будет меньше ϵ. Значит наша последовательность $\{x_{n_k}\}$ - слабо фундаментальная последовательность, а значит сходится к какому-то элементу из B. Теорема доказана.

Теорема 4

Пусть B сепарабельно, тогда из всякой ограниченной последовательности $\{f_n\} \subset B^*$, ограниченной по норме, можно выделить *-слабо сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\} : f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f_0 \in B^*$.

Теорема 5

1)Пусть последовательность $\{u_n\} \rightharpoonup u_0$ - слабо сходится в B. Тогда:

$1^\circ \sup_{n\in N} \| u_n \| < +\infty$

$2^\circ \| u_0 \| \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \| u_n \|$

2) Пусть $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ - *-слабо в B^*.

Тогда:

$1^\circ \sup_{n\in N} \| u_n \|_* < +\infty$

$2^\circ \| u_0 \|_* \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \| u_n \|_*$

Докажем сначала второе утверждение, а первое докажем через утверждение второго.

Доказательство:

$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_0$ - *-слабо в B^*. По следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза:

$$\sup_{n\in N} \| f_n \|_* < +\infty$$

Операторная норма запишется в виде:

$$\| f_n \|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f_n, x\rangle|$$

Отсюда следует, что

$$\| f_n \|_* \geq |\langle f_n, x\rangle| \quad \text{для} \quad \forall x \in B; \| x \| = 1$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Перейдем в этом неравенстве к ближнему пределу,учитывая что нижний предел правой части неравенства совпадает с самим пределом:

$$\lim_{n\to+\infty} inf\| f_n \|_* \geq |\langle f_0, x\rangle|$$

Возьмем в полученном неравенстве супремум по x лежащему в шаре единичного радиуса. Получим:

$$\lim_{n\to+\infty} inf\| f_n \|_* \geq \| f_0 \|_\infty$$

Получили второе утверждение второй части теоремы 5. Теперь рассмотрим первую часть.
Пусть $\langle f, u_n - u_0\rangle$ сходится слабо в B. Также имеет место следующее равенство, по определению оператора вложения:

$$\langle Ju_n - Ju_0, f\rangle = \langle f, u_n - u_0\rangle$$

Из сходимости правой части этого равенства к 0 при $n \to +\infty$ следует, что и левая часть сходится к 0. Значит

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_0$$

Из доказанной второй части теоремы:

$$\sup_{n\in N}\| Ju_n \|_{**} < +\infty$$

J - это изометрия, поэтому $\| Ju_n \|_{**} =\| u_n \|$. В силу *-слабой сходимости получаем:

$$\| Ju_0 \|_{**} \leq \lim_{n\to+\infty} inf\| Ju_n \|_{**}$$

Опять же, в силу того, что J -изометрия: $\| Ju_0 \|_{**} =\| u_0 \|$, $\| Ju_n \|_{**} =\| u_n \|$. Из всего выше написанного вытекает доказательство обоих пунктов первой части теоремы 5.

11.3 Теорема об открытом отображении

Пусть $T : B_1 \to B_2$. Это отображение называется открытым, если

$$\forall a \subset B_1 - \text{открыто} \quad T(A) \subset B_2 - \text{открыто}$$

Теорема 6
Пусть $T \in L(B_1, B_2)$ и $ImT = B_2$, тогда отображение T является открытым. Напомним: $ImT = \{y \in B_2 : y = Tx, x \in B_1\}$, $kerT = \{x \in B_1 : Tx = \theta_2\}$.
Доказательство:
Лемма 1
Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении. Тогда $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon)$

$$O_2(\theta, \delta(\epsilon)) \subset \overline{T(O_1(\theta, \epsilon))}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Верно также следующее утверждение:

$$\forall x \in B \exists n \in N : x \in O_1(\theta, n)$$

Доказывается крайне просто. Тогда $B_1 = \cup_1^2 A = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} O_1(\theta, n)$. У нас есть условие $T(B_1) = B_2$. Значит

$$\forall y \in B_2 \exists n \in N : y \in \overline{T(O_1(\theta, n))}$$

Значит наше пространство B_2 можно записать в таком виде:

$$B_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{T(O_1(\theta, n))}$$

Можно было обойтись и без замыкания, но мы хотим воспользоваться теоремой Бэра о категориях. Ее формулировка такова: "Если полное метрическое пространство X можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств:
$X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$, то $\exists n_0 \in N : x_{n_0}$ имеет непустую внутренность, т.е.
$\exists n_0 : \exists O_2(x_0, n_0) \quad O_2(x_0, n_0) \subset \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$".

Докажем, что множество $\overline{T(O_1(\theta, n_0))}$:

1. Симметрично относительно нуля B_2
2. Является выпуклым множеством

Докажем первое утверждение.
Симметричность означает, что $-\overline{T(O_1(\theta, n_0))} = \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$.

Другими словами, нам нужно показать, что если элемент z принадлежит множеству с правой части выражения, то элемент $-z$ тоже принадлежит этому множеству.

Пусть z принадлежит множеству $\overline{T(O_1(\theta, n_0))}$, тогда $-z$ принадлежит множеству $-\overline{T(O_1(\theta, n_0))} = \overline{T(-O_1(\theta, n_0))}$, и, в силу симметричности шара с центром в нуле, получаем, что $-\overline{T(O_1(\theta, n_0))} = \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$.

Таким образом, первый пункт доказан.

Докажем второй пункт.

Пусть $z_1, z_2 \in \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$, а α - число от 0 до 1.
Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha z_1 + (1 - \alpha z_2) \in \alpha\overline{T(O_1(\theta, n_0))} + (1 - \alpha)\overline{T(O_1(\theta, n_0))} =$$

$$= \overline{T(\alpha O_1(\theta, n_0))} + \overline{T((1 - \alpha)O_1(\theta, n_0))}$$

$$= \overline{T(\alpha O_1(\theta, n_0) + (1 - \alpha)O_1(\theta, n_0)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Рассмотрим множество $M = \{\in O(x_0, n_0) : \alpha z + (1-\alpha)(-z)$:
1. Оно открыто
2. Содержится в $\overline{T(O_1(\theta, n_0))}$

Легко проверить, что $\theta \in M$, значит $\exists \epsilon_0 > 0 : O_2(\theta, \epsilon_0) \subset M$, и из второго пункта, написанного выше видно, что $O_2(\theta, \epsilon_0) \subset \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$.
Заметим, что $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0] \quad O_2(\theta, \epsilon) \subset O_2(\theta, \epsilon_0) \subset \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$.
У нас имеет место вложение $O_2(\theta, \epsilon) \subset \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$. Умножим обе части этого равенства на $\lambda = \frac{\epsilon}{n_0}$.

$$\lambda O_2(\theta, \epsilon) = O_2(\theta, \lambda\epsilon) = O_2(\theta, \frac{\epsilon^2}{n_0})$$

Обозначим $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{n_0}$.

$$O_2(\theta, \delta(\epsilon)) \subset \overline{T(O_1(\theta, n_0))}$$

Это и было утверждением леммы.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

12 Лекция. Спектральная теория операторов

12.1 Теорема об открытом отображении

Теорема об открытом отображении:
Пусть оператор T является линейным непрерывным ($T \in \alpha(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$) и $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$. Тогда оператор T - открытый. (Пояснение: Открытый оператор - это оператор, который переводит всякое открытое множество в открытое множество).
Лемма 1:

Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении, тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{n_0} \quad , \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

n_0 - фиксировано, что

$$0_2(\theta, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{T(0_1(\theta, \varepsilon))}$$

Лемма 2:

Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении, тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0,$$

что

$$O_2(\theta, \delta(\varepsilon)) \subset T(0_1(\theta, 3\varepsilon)),$$

где 3ε) - технический множитель.
Перед доказательством теоремы об открытом отображении, докажем Лемму 2.

Доказательство Леммы 2:
Что доказываем:
$\forall y \in O_2(\theta, \delta(\varepsilon)), \quad \exists x \in O_1(\theta, 3\varepsilon)$ такое, что $\quad y = T_x$.
Рассмотрим рекуррентную последовательность:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \delta(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1^2}{n_0}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}}, \delta(\varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_n^2}{n_0}, n \geqslant 2$$

Подставим:

$$\delta(\varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \delta((\varepsilon_{n-1}))$$

Пусть $y \in O_2(\theta, \delta(\varepsilon_1))$
Тогда в силу вложения (В силу Леммы 1) $y = \overline{T(0_1(\theta, \varepsilon_1))}$

Возьмем шар: $O_2\left(y, \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right)$

$$O_2\left(y, \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right) \cap T\left(O_1(\theta, \varepsilon_1)\right) \neq \emptyset$$

Это означает, что

$$\exists x_1 \in O_1(\theta, \varepsilon_1)$$
$$Tx_1 \subset O_2\left(y, \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right)$$

Тогда можно утверждать, что

$$\|y - Tx_1\|_2 < \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2} \Leftrightarrow y - Tx_1 \in O_2\left(\theta, \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right)$$

$$y - Tx_1 \in O_2\left(\theta, \tfrac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right) \subset O_2(\theta, \delta(\varepsilon_2))$$
$$\subset \overline{T\left(O_1(\theta, \varepsilon_2)\right)}$$

Пусть $z_1 = y - Tx_1$, $z_1 \subset \overline{T\left(O_1(\theta, \varepsilon_2)\right)}$, значит любой шарик с центром в точке z_1, имеет не пустое пересечение с множеством $\overline{T\left(O_1(\theta, \varepsilon_2)\right)}$.
Например:

$$O_2\left(z_1, \frac{\delta(\varepsilon_2)}{2}\right) \cap T\left(0_1(\theta, \varepsilon_2)\right) \neq \emptyset$$

Но, значит,

$$\exists x_2 \in O_1(\theta, \varepsilon_2)$$
$$Tx_2 \in O_2\left(z_1, \tfrac{\delta(\varepsilon_3)}{2}\right)$$
$$z_1 - Tx_2 \in O_2\left(\theta, \tfrac{\delta(\varepsilon_3)}{2}\right)$$
$$y - Tx_1 - Tx_2 \in O_2\left(\theta, \tfrac{\delta(\varepsilon_3)}{2}\right)$$

Продолжаем эту процедуру и в результате переходим к следующему выводу, то есть построим последовательность:
$\{x_n\}$ такую, что $x_n \in O_1(\theta, \varepsilon_n)$
$\|y - Tx_1 - Tx_2 - \ldots - Tx_n\|_2 \leq \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n+1})$ Заметим, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится в банаховых пространствах.

1). Рассмотрим числовой ряд:
$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2 < 3$

2). Введем частичную сумму:
$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Докажем, что S_N - фундаментальная последовательность в рассматриваемом пространстве $\mathbb{B}_1$.

$$||S_N - S_M|| = || \sum_{n=\text{minN,M}}^{\text{maxN,M}} x_n|| \leq \sum_{n=\text{minN,M}}^{\text{maxN,M}} ||x_n|| \leq \sum_{n=\text{minN,M}}^{\text{maxN,M}} \varepsilon_n \to 0$$

при N, M $\to +\infty$.
3).

$$S_N \to S_\infty := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

Следовательно $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ существует, является элементом банахово пространства.
Пусть $x := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $||x|| < 3$.

$$\|y - \text{Tx}\|_2 = \|y - T\left(S_\infty - S_N + S_N\right)\|_2 \leq \|y - \text{TS}_N\|_2 + \|T\left(S_\infty - S_N\right)\|_2$$

$\|y - \text{TS}_N\|_2 \to 0$, при $N \to +\infty$

$$\|T\left(S_\infty - S_N\right)\|_2 \leq \|T\|_{1\to 2} \|S_\infty - S_N\| \to 0$$

при $N \to +\infty$ (с учетом введения операторной нормы)
Получаем, что при переходе к пределу:

$$\|y - T_x\|_2 \leq 0$$

Следовательно, $y = Tx$.

Доказательство теоремы об открытом отображении:
Пусть выполнены все условия теоремы и $A \subset B_1$ - открыто.
$T\left(A\right) \subset B_2$
Пусть $y \in (A) \Rightarrow \exists x_0 \in A, y_0 = T_0$
Так как A - открытое множество, то $\exists O_1\left(x_0, \varepsilon_0\right) \subset A$
Если $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, то $O_1\left(x_0, \varepsilon\right) \subset O_1\left(x_0, \varepsilon_0\right) \subset A$
Для ε

$$\exists \widetilde{\delta}\left(\varepsilon\right) > 0,$$

что

$$O_2\left(\theta, \widetilde{\delta}\left(\varepsilon\right)\right) \subset T\left(O_1\left(\theta, \varepsilon\right)\right)$$

Возьмем множество:

$$\begin{aligned} &O_2\left(y_0, \widetilde{\delta}(\varepsilon)\right) = y_0 + O_2(\theta, \tilde{\delta}(\varepsilon)) \subset \\ &\subset y_0 + T\left(O_1(\theta, \varepsilon)\right) = T_{x_0} + T\left(O_1(\theta, \varepsilon)\right) \\ &= T\left(x_0 + O_1(\theta, \varepsilon)\right) = T\left(0_1\left(x_0, \varepsilon\right)\right) \subset T(A) \end{aligned}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Следовательно множество $T(A)$ открытое.

Теорема об обратном отображении:

Пусть

$$T \in \alpha(\mathbb{B}_{\not\nu}, \mathbb{B}_{\not\in})$$

Причем

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$$

$$\operatorname{Ker} T = \{\theta\}$$

Тогда

$$\exists! T^{-1} \in \alpha(\mathbb{B}_{\not\in}, \mathbb{B}_{\not\nu})$$

Доказательство:

Пусть $z \in \mathbb{B}_2$, так как $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$, то $\exists x \in \mathbb{B}_1, z = Tx$.

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{B}_1$ такого, что $z = Tx_1 = Tx_2$.

$$T(x_2 - x_1) = \theta \Rightarrow x_2 = x_1,$$

Так как $\operatorname{Ker} T = \{\theta\}$

В таком случае отображение однозначно.

Докажем линейность

$$z_1 = Tx_1, z_2 = Tx_2$$

$$x_1 = T^{-1}z_1, x_2 = T^{-1}z_2$$

$$T^{-1}(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = T^{-1}(\alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2) =$$

$$= T^{-1}(T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \alpha_1 x_1 + d_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1} z_1 + \alpha_2 T^{-1} z_2$$

Докажем непрерывность с помощью определения непрерывности по Коши

$L = T^{-1}$ - линейный оператор

$L : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1$

$\forall A \subset \mathbb{B}_1, A$ - открытый

Полный прообраз множества A при отображении L

$L^{-1}(A)$ - открыто в $\mathbb{B}_2$

При данном L оператор $L^{-1}(A) = T(A)$, то есть открытый, следовательно оператор L является непрерывным.

12.2 Спектральная теория в банаховых пространствах. Банахова алгебра с единицей

Банахова алгебра(A):

Множество A называется банаховой алгеброй с единицей, если:

1). a - линейное пространство над $\mathbb{C}^1$

2). $a * b \in A$, когда$a, b \in A$

Операция умножения ассоциативна и билинейна, то есть

a) $a*(b*c)=(a*b)*c$
b) $(\alpha_1*a_1+\alpha_2*a_2)*b=\alpha_1*a_1*b+\alpha_2*a_2*b$
c) $a*(\beta_1*b_1+\beta_2*b_2)=\beta_1*a*b_1+\beta_2*a*b_2$
d) $id\in A, id*a=a*id=a$
3). A - банахово пространство
$||a*b||=||a||*||b||$
$||id||=1$
Пример:

$$A=L(B,B)$$
$$||T||=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

Проверим 3 условие в банаховом пространстве.

$$||T_1\cdot T_2||=\sup_{\|x\|=1}||T_1(T_2\cdot x)\|\leq\sup_{\|x\|=1}||T_1||||T_2\cdot x||=||T_1||\cdot||T_2||$$
$$||id||=sup_{||x||=1}||id\cdot x||=1$$

12.3 Интеграл Бохнера

Рассмотрим функцию:
$f(x):D\subset\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^1$, относительно нормы $|\cdot|$
$f(x):D\subset\mathbb{C}^1\to A$, относительно нормы $||\cdot||$ - это банаховозначная функция комплексного переменного, определенного в области D.
Введем контурное интегрирование

$$1^0\int_\Gamma f(z)dz\subset A$$

Интеграл строится, как контурный интеграл в теории функции комплексного переменного, составляем интегральные суммы, а потом переходим к пределу, предел в смысле нормы $||\cdot||$ банахова пространства A.

$$2^0\frac{df}{dz}, f(x)\text{ - должна быть дифференцируема}$$
$$||\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\|\to+0$$

при $\Delta z\to+0$.

12.4 Обратимые элементы банаховой алгебры

$a\in A$ - элемент банахова пространства A.
a называется обратимым, если $\exists a^{-1}\in A$, что выполено равенство

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=id$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойства:

$$(a \cdot b) = b^{-1} \cdot a^{-1}$$
$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a^{-1} = aa^{-1} = \mathrm{id}$$
$$\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = b^{-1}\left(a^{-1}a\right)b = b^{-1}b = \ \mathrm{id}.$$

Лемма о ряде Неймана:
Пусть $||a|| < 1$
Тогда

$$1^0 \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \text{сходится в } A.$$

$$2^0 \left(id - a\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \text{ - ряд Неймана.}$$

Доказательство:
Рассмотрим следующую частичную сумму ряда:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n$$

По норме докажем, что она фундаментальна.

$$||S_N - S_M|| = || \sum_{n=minN,M}^{maxN,M} a^n|| \leq \sum_{n=minN,M}^{maxN,M} ||a^n|| \to 0 \text{ при N, M } \to +\infty$$

Следовательно последовательность фундаментальна. Тогда

$$S_N \to S_\infty := \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

Необходимо доказать, что выполняется равенство:

$$(id - a) \cdot S_\infty = id$$

Рассмотрим

$$(id - a) \cdot S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n - \sum_{n=0}^{N} a^{n+1} = a^0 - a^{N-1} = id - a^{N-1}$$

$$|| \left(id - a\right) \cdot S_N - id|| \leq ||a^{N+1}|| \leq ||a||^{N+1} \to 0 \text{ при N } \to +\infty$$

Следовательно

$$(id - a) \cdot S_N \to id \text{ сильно в } A$$
$$(id - a) \cdot S_N \to (id - a) \cdot S_\infty$$

Тогда можно утверждать, что

$$id = (id - a) \cdot S_\infty,$$

в силу того, что пространство отделимо и у сходящейся последовательности не может быть два различных предела.

Лемма 2:
Пусть a обратим, тогда если

$$||b|| < ||a^{-1}||^{-1},$$

то $a+b$ тоже обратим.
Доказательство:
Пусть a - обратим, то есть $\exists a^{-1}$.
Рассмотрим

$$(a+b) = a\left(id + a^{-1}\cdot b\right)$$

При условии, что $||a^{-1}b|| < 1, \exists \left(id + a^{-1}b\right)^{-1}$ и $\left(id + a^{-1}b\right)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-a^{-1}b\right)^n$

По свойству банаховой алгебры

$$||a^{-1}b|| \leq ||a^{-1}||||b|| < 1, \text{ тогда}$$
$$\left(id + a^{-1}b\right) \text{ - обратим, следовательно}$$

$a+b$ - обратим тоже, $(a+b)^{-1} = \left(id + a^{-1}b\right)^{-1} a^{-1}$
Лемма 3:
Множество всех обратимых элементов открыто в банаховой алгебре A.
Доказательство:
Пусть $a \in A$ обратим.
То $a+b$ тоже обратим при $||b|| < ||a^{-1}||^{-1}$. Если $b \in O(\theta, \varepsilon), 0 < \varepsilon < ||a^{-1}||^{-1}$, то $a+b \in O(a, \varepsilon)$
То есть для $a \in A$ найдется $O(a, \varepsilon) \subset A$, и множество элементов из этой окрестности обратимо, это означает, что множество A открыто, ч.т.д.

Введем оператор T
$T : a \to a^{-1}$
Вопрос: Является ли это отображение непрерывным на D?(D - область определения, и также в нашем случае множество всех обратимых элементов).
Доказательство:
Необходимо доказать, что

$$||T(a+b) - T(a)|| \to 0$$

при $||b|| \to 0$, причем b выбирается так, чтобы $(a+b)$ тоже был обратим.

$$T(a+b) - T(a) = (a+b)^{-1} = a^{-1} = \left(id + a^{-1}b\right)^{-1} a^{-1} - a^{-1} =$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

(Требуем, чтобы $||b|| < ||a^{-1}||^{-1}$)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-a^{-1}b\right)^n a^{-1} - a^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-a^{-1}b\right)^n a^{-1}$$

Берем по норме:

$$||T(a+b) - T(a)|| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} q^n ||a^{-1}||,$$

где $q = ||a^{-1}b|| < 1$, поэтому этот ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n ||a^{-1}|| = \frac{q}{1-q} ||a^{-1}||$$

$$q \leq ||a^{-1}||||b||$$

Так как $||b|| \to 0$, то $q \to 0$, следовательно

$$\frac{q}{1-q} ||a^{-1}|| \to 0$$

12.5 Резольвента. Непрерывность резольвенты

Пусть $a \in A$

$$R(\lambda, a) = (\lambda \cdot id - a)^{-1}$$

Для тех λ и a, для которых обратимый элемент существует R называется **резольвентом**.

Резольвентное множество

$$res(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \exists R(\lambda, a)\}$$

$R(\lambda, a)$ - непрерывна там, где она определена.

$$R(\lambda, a) = T(\lambda \cdot id - a), T : c \to c^{-1}$$

$res(a)$ - открытое множество.

Доказательство:

$\lambda_0 \in res(a)$, то есть $\exists (\lambda \cdot id - a)^{-1}$

$((\lambda + \lambda_0) id - a) = \lambda \cdot id + (\lambda \cdot id - a)$

при $|\lambda| \leq ||R(\lambda, a)||^{-1} = ||(\lambda_0 \cdot id - a)^{-1}||^{-1}$

В силу теоремы:

$((\lambda + \lambda_0) id - a)$ - обратимо

Если $\lambda \in O(0, \varepsilon), \lambda_0 + \lambda \in O(\lambda_0, \varepsilon)$, то $((\lambda + \lambda_0) id - a)$ - обратимо

Следовательно множество $res(a)$ - открытое.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Первое резольвентное множество

$$(\lambda id - a) - (\mu id - a) = (\lambda - \mu)\, id$$

Умножаем обе части на $R(\lambda, a)\, R(\mu, a)$

$$R(\lambda, a) = (\lambda id - a)^{-1}$$
$$R(\mu, a) = (\mu id - a)^{-1}$$

Получаем

$$R(\mu, a) - R(\lambda, a) = (\lambda - \mu)\, R(\lambda, a)\, R(\mu, a)$$
$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu)\, R(\lambda, a)\, R(\mu, a)$$

- тождество Гильберта или первое резольвентное уравнение.
Из него следует:

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, a)\, R(\mu, a)$$
$$\frac{dR(\lambda, a)}{d\lambda} = -R^2(\lambda, a)$$

Резольвента на резольвентном множестве является аналитической функцией.

$$R(\lambda, a) = (\lambda id - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(id - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} =$$

(Потребуем, чтобы $||\frac{a}{\lambda}|| < 1 \Longleftrightarrow ||a|| < |\lambda|$)

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$$

$$|a|| < ||\lambda|| \Rightarrow res(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| > ||a||\}$$

12.6 Спектр

Спектром называют

$$\sigma(a) := \mathbb{C}^1 \backslash res(a)$$

Свойства:
1^0. $\sigma(a)$ - замкнутое множество
2^0. $\sigma(a) \neq \{\emptyset\}$
Докажем 2^0: (от противного)
Пусть $\sigma(a) = \{\emptyset\}$, то есть $R(\lambda, a)\, \forall \lambda \in \mathbb{C}^1$.
Рассмотрим следующую комплексную функцию:
$\varphi(\lambda) = \langle \omega *, R(\lambda, a)\, u \rangle$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$\forall u \in A, \forall \omega * \in A*$, где A - сопряженное соответствующему банаховому пространству.
Раз $R(\lambda, a)$ - дифференцируема, то и $\varphi(\lambda)$ также дифференцируема, следовательно $\varphi(\lambda)$ - классическая аналитическая функция комплекснозначная комплексного аргумента.
Докажем ограниченность $\varphi(\lambda)$
$r = ||a||$
$\varphi(\lambda)$ является ограниченной $\forall \lambda : B = \{|\lambda| \leq ||a||\}$
$|\varphi(\lambda)|$ органичен на B.
Рассмотрим, если $|\lambda| > ||a||$, тогда

$$||R(\lambda, a)|| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{||a||}{|\lambda|} \right)^n \to 0$$

при $|\lambda| \to +\infty$
Это означает, что $|\varphi(\lambda)|$ ограничена и при $|\lambda| > ||a||$, получается что $\varphi(\lambda)$ ограничена всюду.
Если $\varphi(\lambda)$ всюду ограничена и аналитическая, следовательно она константа, $\varphi(\lambda) = \text{const } = 0$, но $\varphi(\lambda)$ зависит от λ, так как $R(\lambda, a)$ зависит от λ, значит наше предположение неверно и стало быть $\sigma(a) \neq \{\emptyset\}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

13 Лекция. Гильбертовы пространства

13.1 Алгебра функций

Вопрос: как вычислять функции от оператора?

Пусть $a \in A$ - элемент банаховой алгебры. $\sigma(a)$ - спектр (всегда не пустое замкнутое множество)

$$|\lambda| > \|a\| \to \exists R(\lambda, a) \to \lambda \in res(a)$$
$$\sigma(a) = \mathbb{C}^1 \backslash \operatorname{res}(a)$$
$$\sigma(a) \in \{|\lambda| \leqslant \|q\|\}$$

Введём алгебру функций:

$\mathrm{f}(\lambda) \in F(a)$, что $\mathrm{f}(\lambda)$ аналитична в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$.
Определим $f(a) \in A$

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_f} f(\lambda) R(\lambda, a) d\lambda$$

где $\mathrm{f}(\lambda)$ аналитична в $D_f \supset \sigma(a)$.

Это интеграл Данфорда. Его можно рассматривать как линейное отображение.

Свойство 1:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_f} 1 \cdot R(\lambda, a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R(\lambda, a)\, d\lambda$$

$D_f \supset \sigma(a)$, $r > \|a\|$

$$R(\lambda, a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}, \text{ при условии } |\lambda| > \|a\|$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R(\lambda, a) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

Параметризуем окружность:

$$\lambda = re^{i\varphi}$$

$$\int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = ri \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{r^{n+1} e^{i\varphi(n+1)}} = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi n} d\varphi = \begin{cases} 2\pi i, n = 0 \\ 0, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Тогда учитывая, что $a^0 = id$ - единица в банаховой алгебре:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = a^0 \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = a^0 = id$$

То есть это отображение, переводящее алгебру функций в алгебру операторов, переводит 1 в 1.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Свойство 2:

$$f(a)\cdot g(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(x)\cdot g(x)R(\lambda,a)d\lambda$$

Доказательство:

Пусть f(λ) аналитична в $D_f\supset\sigma(a)$; g(μ) аналитична в $D_g\supset\sigma(a)$.
Предположение: $D_f\supset\overline{D_g}$

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_f} f(\lambda)\,R(\lambda,a)\,d\lambda$$

$$g(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_g} g(\mu)R(\mu,a)d\mu$$

$$f(a)\cdot g(a)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D_f}\int_{\partial D_g} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,a)R(\mu,a)d\mu d\lambda$$

Воспользуемся тождеством Гильберта для резольвенты:

$$R(\lambda,a)-R(\mu,a)=(\mu-\lambda)R(\lambda,a)\cdot R(\mu,a)$$

$$R(\lambda,a)\cdot R(\mu,a)=\frac{R(\lambda,a)-R(\mu,a)}{\mu-\lambda}$$

Тогда:

$$f(a)\cdot g(a)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D_f}\int_{\partial D_g}\frac{f(\lambda)\cdot g(\mu)}{\mu-\lambda}R(\lambda,a)\,d\mu d\lambda+$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D_f}\int_{\partial D_g}\frac{f(\lambda)\cdot g(\mu)}{\lambda-\mu}R(\mu,a)d\mu d\lambda$$

Рассмотрим внутренний интеграл:

$$\int_{\partial D_g}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu=0$$

Равен нулю, так как это контурный интеграл от аналитической функции.

$$\int_{\partial D_f}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda=0$$

$$f(a)\cdot g(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_g} f(\mu)\cdot g(\mu)R(\mu,a)\,d\mu$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

13.2 Предгильбертово пространство

Определение: Предгильбертовым (или комплексным евклидовым) пространством называется линейное пространство H (над полем комплексных чисел), в котором введено скалярное произведение, то есть числовая функция (x, y), удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$

2) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$

3) $(x, y) = (y, x)$

4) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0; (x, x) = 0$ при $x = \theta$

13.3 Неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Доказательство:

Рассмотрим (x+αy, x+αy)

$$(\alpha x, y) = (y, \alpha x) = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}\,(\overline{y, x}) = \bar{\alpha}(x, y)$$

$$(x, x) + \bar{\alpha}\,(y, x) + \alpha\,(x, y) + |\alpha|^2\,(y, y) \geqslant 0$$

У нас α было произвольное. Возьмём α равное:

$$\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

$$(x, x) - \frac{((x, y))^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0$$

Откуда и следует:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

13.4 Норма в предгильбертовом пространстве

Введём норму:

$$\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

Для этой нормы почти все свойства очевидно выполняются. Проверим только одно:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$$

(y,x)=$\overline{(x,y)}$, значит справа стоит вещественное число.
По неравенству Коши-Буняковского:

$$|(x,y)| = |(y,x)| \leq (x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} = \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

13.5 Гильбертово пространство

Гильбертово пространство - предгильбертово пространство, которое полно относительно $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$, то есть всякая фундаментальная последовательность $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ при $n, m \longrightarrow +\infty$, то $\exists x \in H$, что $x_n \longrightarrow x$ сильно в H.

13.6 Равенство параллелограмма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

Если (x,y)=0 $\longrightarrow x \perp y$ - ортогональные элементы.

$A \perp B$, если $\forall x \in A$, $\forall y \in B$ $(x,y) = 0$ - ортогональные множества.

Ортогональное дополнение к множеству:

$$A \subset H, \quad A^{\perp} = \{y \in H : (y,x) = 0 \quad \forall x \in A\}$$

13.7 Теорема Беппо Леви

Теорема: пусть H - гильбертово пространство, $H_1 \subset H$ - замкнутое линейное подпространство, H является метрическим пространством относительно нормы $d(x,y) = ||x-y||$.
Тогда $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_2 = H_1^{\perp} \forall x \in H \quad \exists! \quad x_1 \in H_1 \quad$ и $\quad \exists! \quad x_2 \in H_2$, что $x = x_1 + x_2$

Доказательство:

Пусть $x \in H$ - фиксировано.

$$d := \inf_{y \in H_1} \|x - y\|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in H_1, \text{ что } \|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}$$

$$Y_n = x - x_n, \quad Y_m = x - x_m$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

По равенству параллелограмма:

$$\|Y_n + Y_m\|^2 + \|Y_n - Y_m\|^2 = 2\|Y_n\|^2 + 2\|Y_m\|^2$$

$$4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x - x_n\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 < 4d^2 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

$$x_n \in H_1 \to \frac{x_n + x_m}{2} \in H_1$$

$$\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant d^2$$

Так как взяв в качестве $Y = \dfrac{x_n + x_m}{2}$ и учитывая, что

$$d := \inf_{y \in H_1} \|x - y\| \leq \|x - y\|$$

$$4d^2 + \|x_n - x_m\|^2 < 4d^2 + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

То есть

$$\|x_n - x_m\|^2 < \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \to 0, n, m \to +\infty$$

Значит, $\{x_n\}$ - фундаментальная.

$$x_n \to x^* \in H_1$$

- так как H_1 - замкнуто.

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} => ||x - x^*||^2 \leq d^2$$

$$d = \inf_{y \in H_1} \|x - y\| \leq \|x - x^*\|$$

Значит, $\|x - x^*\| = d$.

Пусть $x^{**} := x - x^*$. Докажем, что

$$(x^{**}, y) = 0 \ \forall y \in H_1 \ \text{ то есть} x^{**} \in H_2$$

Рассмотрим $(x^{**} - \alpha y, x^{**} - \alpha y) \geqslant 0)$, где α - произвольное, $y \in H_1$

$$(x^{**} - \alpha y, x^{**} - \alpha y) = \|x^{**} - \alpha y\|^2 = \|x - x^* - \alpha y\|^2 \geqslant d^2$$

$$x^* \in H_1, y \in H_1 => (-x^* - \alpha y) \in H_1$$

$$d = \inf_{z \in H_1} \|x - z\| \leq \|x - x^* - \alpha y\|$$

$$\|x^{**}\|^2 - \overline{\alpha}\,(y, x^{**}) - \alpha\,(x^{**}, y) + |\alpha|^2\|y\|^2 \geqslant d^2$$

$$\|x^{**}\|^2 = d^2, \quad \alpha = \frac{(y, x^{**})}{(y, y)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$-\frac{|(y,x^{*x})|^2}{(y,y)}-\frac{|(y,x^{**})|^2}{(y,y)}+\frac{|(y,x^{**})|^2}{(y,y)}\geqslant 0$$
$$\Rightarrow |(y,x^{**})|^2\leq 0\Rightarrow (x^{**},y)=0$$

Значит, $x=x^*+x^{**}$, где $x^*\in H_1$, $x^{**}\in H_2=H_1^\perp$.

Осталось доказать единственность:

Пусть $x=x^*+x^{**}=z^*+z^{**}$

$$x^*-z^*=z^{**}-x^{**}$$
$$(x^*-z^*)\in H_1,(z^{**}-x^{**})\in H_1^\perp$$
$$H_1\cap H_1^\perp=\{\theta\}=>x^*-z^*=z^{**}-x^{**}=\theta$$

13.8 Разложение по базису

Полная счётная система в гильбертовом пространстве.
Мы всегда рассматриваем счётную систему $\{\varphi_n\}_1^{+\infty}\in H$

1) Полная система: $\forall f\in H\forall\varepsilon>0\quad\exists\alpha_1,\dots,\alpha_{n_0}(\varepsilon)$, что

$$\left\|f-\sum_{n=1}^{n_0(\varepsilon)}\alpha_n\varphi_n\right\|<\varepsilon$$

2) Замкнутая система: $(f,\varphi_n)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}=>f=\theta$

Базис в Гильбертовом пространстве: $\{\varphi_n\}$ - базис, если $\forall f\in H\quad f=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\varphi_n$

Теорема: всякая полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}_1^{+\infty}\in H$ образует базис в H

$$f=\sum_{n=1}^{+\infty}(\varphi_n,f)\,\varphi_n$$

и выполнено равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^{+\infty}|(\varphi_n,f)|^2$$

Доказательство:

$$\xi_n:=(\varphi_n,f);\quad S_p:=\sum_{n=1}^{p}\xi_n\varphi_n$$

Нужно доказать, что $||f-S_p||\longrightarrow 0$, $p\longrightarrow+\infty$, то

$$\inf_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\in\mathbb{C}^1}||f-\sum_{n=1}^{p}\alpha_n\varphi_n||=||f-\sum_{n=1}^{p}\xi_n\varphi_n||$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим:

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \varphi_n \right\|^2 = \left(f - \sum_{n=1}^{\rho} \alpha_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^{P} \alpha_n \varphi_n \right) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} \bar{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \bar{\xi}_n + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} \bar{\alpha}_n \xi_n - \sum_{n=1}^{p} \alpha_n \bar{\xi}_n + \sum_{n=1}^{p} |\alpha_n|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{p} |\xi_n - \alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2$$

ξ_n - фиксированные числа, α_n - меняются.
Минимум достигается, когда $\xi_n = \alpha_n$

$$\| f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \|^2 = \| f\|^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2$$

Система φ_n - полная, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{и} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_{p_0} \in \mathbb{C}^1$$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p_0} \alpha_n \varphi_n \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p_0} \alpha_n \varphi_n \right\| \geqslant \| f - \sum_{n=1}^{p_0} \xi_n \varphi_n \| < \varepsilon$$

Тогда $\forall p \geqslant p_0$

$$||f - \sum_{n=1}^{p_0} \xi_n \varphi_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{n=1}^{p_0} |\xi_n|^2 \geqslant ||f||^2 - \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 = \|f - \sum_{n=1}^{p_0} \xi_n \varphi_n\|^2$$

Значит

$$\|f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n\|^2 \leqslant \|f - \sum_{n=1}^{p_0} \xi_n \varphi_n\|^2 < \varepsilon$$

То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall p \geqslant p_0$

$$\|f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n\|^2 < \varepsilon$$

Значит

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n \longrightarrow f \quad \text{в H}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Значит

$$\|f - \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } p \longrightarrow +\infty$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(\varphi_n, f)|^2$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ