МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. СЕМИНАРЫ

ТИМАШЁВ
ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

Оглавление

Семинар 1. Векторные пространства. Линейная зависимость 8

Пример 8

Задача 34.7 а) 9

Упражнение 10

Задача 34.3 а), г) 10

Задача 34.3 а) 11

Расширения полей 11

Семинар 2. Преобразование координат вектора при замене базиса. Примеры подпространств. Применения формулы Грассмана. 13

Задача 34.8 з) 13

Задача 34.10 а) 14

Задача 35.3 б), г) 15

Задача 35.10 д) 15

Задача 16

Расположение подпространств в конечномерном пространстве 16

Задача 1 17

Задача 2 17

Семинар 3. Линейная независимость подпространств, прямые суммы, проекции на слагаемые. 18

Задача 35.3 ж) 18

Задача 18

Задача 2 18

Задача 1 20

Задача 35.26 20

Задача 35.17 б) 21

Задача 35.18 22

Задача 35.22 а) 22

Семинар 4. Ядро линейной функции. Задание подпространства однородной системой линейных уравнений. 24

Задача 35.24 24

Задача 35.27 24

Задача 35.25 25

Задача 35.17 а) 25

Задача 36.13 ... 25
Критерий базисности ... 26
Упражнение ... 27
Задача 35.16 а) ... 27
Семинар 5. Нахождение базиса и системы линейных уравнений для суммы и пересечения подпространств. ... 29
Задача 36.9 в) ... 29
Задача 36.16 ... 29
Задача 36.17 б), в) ... 30
Задача ... 31
Задача ... 31
Задача 35.15 а) ... 32
Задача ... 33
Семинар 6. Связь свойств инъективности и сюръективности сопряженных друг другу линейных отображений. Квазиобратная матрица. Нахождение матрицы линейного оператора, ее преобразование при замене базиса. ... 35
Задача 36.2 б), в) ... 35
Квазиобратная матрица ... 35
Задача 1 ... 36
Задача 2 ... 36
Задача 39.15 в), м) ... 37
Задача 39.19 ... 38
Семинар 7. Инвариантные подпространства. Вычисление коэффициентов характеристического многочлена. Вычисление собственных значений и нахождение собственных векторов. ... 40
Задача 39.13 ... 40
Задача ... 40
Задача 40.22 ... 41
Задача 40.5 ... 41
Вычисление коэффициентов характеристического многочлена ... 42
Задача 40.15 б) ... 42
Задача 40.16 г) ... 43
Семинар 8. Коммутирующие семейства линейных операторов. Нахождение корневых подпространств. Корневое разложение инвариантного подпространства. ... 45
Задача 40.25 ... 45
Задача ... 45

Задача 40.8 46
Упражнение 47
Задача 40.35 а) 47
Корневое разложение инвариантного подпространства 48
Семинар 9. Нахождение жордановой нормальной формы и жорданова базиса. 50
Задача 40.38 50
Задача 40.27 50
Задача 40.29 50
Задача 40.33 51
Задача 52
Приведение линейных операторов к жордановой нормальной форме 52
Задача 41.1 е) 55
Семинар 10. Приложения ЖНФ: критерий нильпотентности в терминах собственных значений, вычисление циркулянта, оценка снизу размерности централизатора матрицы. 58
Задача 41.5 а) 58
Задача 41.7 59
Задача 41.17 60
Задача 41.8 61
Задача 15.3 62
Задача 41.13 63
Семинар 11. Извлечение корней из матриц. Вычисление значений аналитических функций от матриц. 65
Задача 41.45 65
С помощью формул Ньютона можно рекуррентно выражать степенные суммы через элементарные симметрические многочлены, и наоборот. Потому если 65
- если матрица записана в жордановой форме, то это очевидно, но 65
Задача 41.15 65
Задача 41.20 66
Задача 67
Вычисление значений многочленов и аналитических функций от линейных операторов и матриц 68
Семинар 12. Билинейные функции, их матрицы. 70
Задача 70
Задача 42.19 в) 70

Задача 37.1+37.2 а), б), г) 71

Задача 37.6 а) 72

Классификация билинейных функций с точностью до эквивалентности 73

Семинар 13. Симметрические билинейные и квадратичные функции, поляризация. Приведение к каноническому виду алгоритмом Лагранжа и методом Якоби. 75

Задача 37.32 75

Задача 37.28 75

Задача 38.16 а) 76

Задача 38.18 а) 77

Задача 78

Задача 38.6 а) 79

Семинар 14. Эквивалентность квадратичных форм. Проверка положительной или отрицательной определенности квадратичной функции. 80

Задача 38.29 80

Задача 38.33 81

Задача 38.19 а) 81

Задача 38.17 а) 82

Задача 38.22 а) 82

Задача 38.11 б) 83

Задача 38.14 а) 84

Нормальный вид квадратичных функций над полем вычетов 84

Лемма 85

Упражнение 85

Семинар 15. Нахождение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора, угла между вектором и подпространством. Ортогонализация системы векторов. Свойства определителя Грама. 86

Задача 38.21 86

Задача 38.24 86

Задача 38.30 87

Задача 43.38 а) 87

Задача 43.15 а) 88

Задача 43.25 а), г) 89

Семинар 16. Углы между векторами, количество векторов с попарными углами π/3. Ортогональные операторы, их собственные значения, ортогональность собственных подпространств. Приведение ортогонального оператора к каноническому виду. 91

Задача 43.11 91

Задача 43.12 ... 91

Задача 43.39 ... 92

Ортогональные операторы ... 92

Задача 46.3 ... 92

Нахождение канонического вида матрицы ортогонального оператора ... 93

Пример ... 94

Семинар 17. Сопряженный оператор. Симметрические операторы. Приведение симметрического оператора к каноническому виду. ... 96

Задача 46.12 ... 96

Задача 43.40 ... 97

Сопряженные операторы ... 98

Задача 44.4 ... 98

Симметрические (самосопряженные) операторы ... 100

Приведение квадратичной функции к главным осям ... 100

Задача 45.19 г) ... 101

Семинар 18. Положительно определенные симметрические операторы, извлечение квадратного корня. Полярное разложение линейного оператора. ... 103

Задача 45.9 ... 103

Задача 45.18 ... 103

Положительно определённые симметрические операторы ... 104

Задача ... 105

Полярное разложение линейного оператора ... 106

Задача ... 106

Семинар 19. Критические точки квадратичной функции на единичной сфере в евклидовом пространстве и собственные векторы симметрического оператора. Задание плоскостей в аффинном пространстве разными способами. Барицентрические координаты. ... 110

Задача 45.15 ... 110

Критические точки квадратичной функции на единичной сфере в евклидовом пространстве и собственные векторы симметрического оператора ... 110

Упражнение ... 111

Аффинная геометрия ... 111

Задание плоскостей в аффинном пространстве ... 111

Задача 49.10 а) ... 112

Барицентрические комбинации точек и барицентрические координаты в аффинном пространстве ... 113

Утверждение ... 113

Задача 1 ... 115

Задача 2 ... 115

Семинар 20. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве. Проведение через точку прямой, пересекающей две плоскости. ... 116

Задача ... 116

Задача 49.23 ... 116

Задача 49.16 б) ... 118

Задача 49.20 а) ... 119

Семинар 21. Матрица расстояний между точками евклидова пространства. Вычисление расстояния между плоскостями. ... 121

Задача 49.18 ... 121

Матрица расстояний между точками евклидова пространства ... 121

Задача 51.2 а) ... 122

Задача 51.14 а) ... 122

Семинар 22. Аффинные отображения, их линейность относительно барицентрических комбинаций точек. Неподвижные точки аффинных преобразований и движений. Геометрическое описание движений 2-мерного и 3-мерного евклидова пространства. ... 125

Задача 49.27 а) ... 125

Задача 49.24 ... 125

Задача 51.19 а) ... 125

Геометрическое описание движений 2-мерного и 3-мерного евклидова пространства ... 126

Задача 51.24 б) ... 127

Задача ... 128

Семинар 23. Приведение квадратичной функции к каноническому виду и к главным осям. Аффинная и метрическая классификация вещественных квадрик. ... 130

Задача 51.21 ... 130

Задача 49.28 ... 130

Задача 49.33 а) ... 131

Приведение квадратичной функции на аффинном пространстве к каноническому виду ... 131

Задача 52.20 а) ... 133

Семинар 24. Вычисление значений и компонент тензоров в разных базисах. Разложимость тензоров в тензорное произведение. ... 135

Задача ... 135

Тензорная алгебра ... 136

Задача 47.3 а) ... 136

Задание тензоров в координатах 137

Операции над тензорами в координатах 137

Задача 47.5 137

Задача 47.1 а), д) 138

Семинар 25. Тензоры типа (1,1) и линейные операторы. Свёртка тензоров. Тензорное произведение линейных операторов, его след. 140

Задача 47.1 е) 140

Задача 140

Задача 47.9 а) 140

Задача 47.13 а) 141

Задача 47.15 а) 141

Тензорное произведение линейных операторов 142

Задача 47.18 а) 142

Семинар 26. Матрица двойственного метрического тензора. Подъём и опускание индексов у тензора. Приведение кососимметрической билинейной функции к каноническому виду с использованием внешнего умножения. 143

Задача 47.16 б) 143

Приведение кососимметрических билинейных функций к каноническому виду 144

Задача 37.33 б) 144

Семинар 1. Векторные пространства. Линейная зависимость.

На протяжении всего курса в качестве задачника используется Сборник задач по алгебре под ред. А.И. Кострикина. Часть 2. Линейная алгебра и геометрия, издание МЦНМО, 2009 (или позднее).

Начнем с обсуждения понятия векторного пространства. Приведем не совсем привычный пример векторного пространства.

Пример. Пусть X – произвольное множество. Рассмотрим множество всех его подмножеств 2^X (такое обозначение не случайно: если X – конечное множество из n элементов, то во множестве всех его подмножеств будет 2^n элементов).

Превратим $V = 2^X$ в векторное пространство над полем $K = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ – зададим операции сложения и умножения на скаляры.
Операция сложения:

$$A + B = A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

Проверим, что при так заданной операции $V = 2^X$ будет абелевой группой по сложению:

- коммутативность: следует из симметричности операции симметрической разности относительно множеств A и B
- ассоциативность: легко видеть, что $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$ – в обоих случаях результат будет одинаковым – см. рис. 1.1:

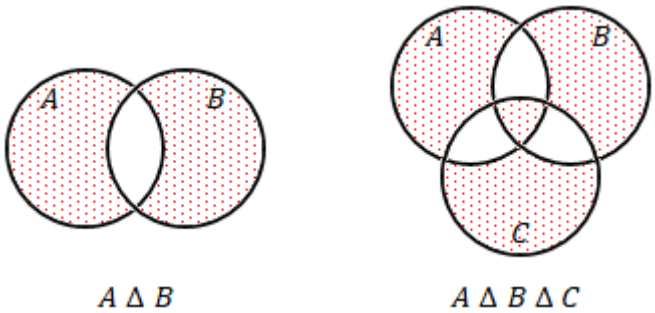

Рис. 1.1. Симметрическая разность двух и трех множеств

- нейтральный элемент: пустое множество $\emptyset$
- противоположный элемент: $-A = A$ – каждое множество является противоположным самому себе

Операция умножения на скаляры:

$$\bar{0} \cdot A = \emptyset$$
$$\bar{1} \cdot A = A$$

По-другому задать умножение на скаляры нельзя, так как $\bar{1} \cdot A = A$ – это аксиома нормировки (8-ая аксиома векторного пространства), а $\bar{0} \cdot A = \emptyset$ - это одно из следствий аксиом векторного пространства (умножение на нулевой скаляр должно давать нулевой вектор).

Итак, операции определены корректно, осталось проверить, что выполняются аксиомы векторного пространства. То, что V – абелева группа по сложению, мы уже проверили, остальные аксиомы несложно проверить непосредственно, но мы не будем этого делать – вместо этого заметим, что 2^X изоморфно следующим векторным пространствам:

- если X конечно, то без ограничения общности можно считать, что $X = \{1, \dots, n\}$. Тогда $2^X \simeq (\mathbb{Z}_2)^n$. Биекция осуществляется следующим образом: множеству A соответствует последовательность, состоящая из $\bar{0}$ и $\bar{1}$, которая строится по правилу: на i-ом месте стоит $\bar{1}$, если $i \in A$, и $\bar{0}$, если $i \notin A$.

- если X бесконечно, то $2^X \simeq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$, где $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}_2)$ – пространство функций из X в $\mathbb{Z}_2$. Биекция осуществляется следующим образом: множеству A соответствует χ_A – характеристическая функция этого множества. Она определяется так: $\chi_A = \begin{cases} \bar{1}, x \in A \\ \bar{0}, x \notin A \end{cases}$.

Несложно проверить, что так определённые отображения действительно являются изоморфизмом, т.е. согласованы с операциями.

Отметим, что если X конечно: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то в пространстве 2^X в качестве базиса можно выбрать всевозможные одноэлементные подмножества: $\{x_1\}, \dots, \{x_n\}$.

Задача 34.7 а). Доказать, что группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства.

Решение.
Допустим, такой изоморфизм существует. Рассмотрим два случая (векторы понимаем как элементы $\mathbb{Z}$):

1) В поле K: $2 = 1 + 1 = 0$. Тогда:

$$(1 + 1) \cdot \vec{1} = 0 \cdot \vec{1} = \vec{0} = 1 \cdot \vec{1} + 1 \cdot \vec{1} = \vec{1} + \vec{1} = \vec{2}$$

т.е. в $\mathbb{Z}$ верно равенство $0 = 2$ – противоречие.

2) В поле K: $2 = 1 + 1 \neq 0$. Тогда $2^{-1} = \frac{1}{2} \in K$. Пусть $\frac{1}{2} \cdot \vec{1} = \vec{n}$, имеем:

$$\vec{n}+\vec{n}=(1+1)\cdot\vec{n}=2\cdot\vec{n}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{1}=1\cdot\vec{1}=\vec{1}$$

т.е. в $\mathbb{Z}$ существует элемент, который при сложении с собой дает 1 – противоречие. ■

Упражнение. Рассмотрим множество $V=\mathbb{R}^+$ положительных чисел с операциями $x\oplus y=x\cdot y$ и умножением на скаляры из поля $K=\mathbb{R}$ по правилу $\lambda\odot y=y^\lambda$. Доказать, что V – векторное пространство и найти его размерность.

Задача 34.3 а), г). Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:
а) $\sin x, \cos x$;
г) $1, \cos x, \dots, \cos nx$.

Решение.
а) Пусть существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda \sin x+\mu\cos x=0$$

Тогда $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ и

$$\lambda\sin x+\mu\cos x=0\Leftrightarrow\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin x+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos x=0\Leftrightarrow\sin(x+\varphi)=0$$

где $\varphi=\arccos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)$. Получили противоречие, так как $\sin(x+\varphi)$ не является функцией, тождественно равной нулю.

Другой способ доказательства: подставим в линейную комбинацию $\lambda\sin x+\mu\cos x=0$ значения переменной x: подставляя $x=0$ получим, что $\mu=0$, а подставляя $x=\frac{\pi}{2}$ получим, что $\lambda=0$.

г) Докажем индукцией по n.
База индукции: $n=0$. Функция 1 линейно независима.

Шаг индукции: пусть существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_0+\lambda_1\cos x+\dots+\lambda_n\cos nx=0$$

Дважды продифференцируем это равенство:

$$-\lambda_1\cos x-\dots-\lambda_n n^2\cos nx=0$$

Домножив первое равенство на n^2 и сложив со вторым, получим:

$$\lambda_0 n^2+\lambda_1(n^2-1^2)\cos x+\dots+\lambda_{n-1}(n^2-(n-1)^2)\cos(n-1)x=0$$

По предположению индукции $\lambda_0 n^2 = \lambda_1(n^2 - 1^2) = \cdots = \lambda_{n-1}(n^2 - (n-1)^2) = 0$, откуда $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Но тогда $\lambda_n \cos nx = 0$, откуда $\lambda_n = 0$. ■

Задача 34.3 а). Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:
а) $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – попарно различные вещественные числа.

Решение.
Пусть существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$$

На это равенство можно смотреть как на уравнение относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – мы хотим доказать, что оно имеет только нулевое решение. Подставим несколько значений x в это равенство:

$x = 0$: $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$
$x = 1$: $\lambda_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n} = 0$
$x = 2$: $\lambda_1 e^{2\alpha_1} + \cdots + \lambda_n e^{2\alpha_n} = 0$
…
$x = n - 1$: $\lambda_1 e^{(n-1)\alpha_1} + \cdots + \lambda_n e^{(n-1)\alpha_n} = 0$

Получаем однородную систему линейных уравнений $n \times n$ относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Определитель матрицы этой системы – определитель Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{\alpha_1} & \dots & e^{\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (e^{\alpha_1})^{n-1} & \dots & (e^{\alpha_n})^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (e^{\alpha_i} - e^{\alpha_j})$$

Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ попарно различны, то $\Delta \neq 0$ и система имеет единственное (нулевое) решение $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Это доказывает линейную независимость исходной системы функций. ■

Расширения полей.

Мы знаем, что расширение $L \supseteq K$ поля K можно рассматривать как векторное пространство над K. Применим эту идею к изучению конечных полей.

Пусть F – конечное поле. Устройство конечных полей и их классификацию мы изучим в курсе “Алгебра. Часть 2” (см. https://teach-in.ru/course/algebra-letctures-p2-timashev), но кое-что о конечных полях мы можем узнать уже сейчас, пользуясь только средствами линейной алгебры.

Изучим, какое наименьшее поле F_0 может содержаться в F в качестве подполя. 0 и 1 должны принадлежать F_0, а также $1+1,\ 1+1+1, \ldots$ Так как F_0 конечно, то на каком-то шаге сумма k единиц должна быть равна сумме l единиц, откуда следует, что сумма $p = k - l$ единиц равна нулю:

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{k} = \underbrace{1+\cdots+1}_{l} \Rightarrow \underbrace{1+\cdots+1}_{k-l} = 0$$

Наименьшее такое $p = char\, F$ называется характеристикой поля F. Из курса алгебры известно, что p – простое число. Получаем, что множество $\{0, 1, 1+1,\ 1+1+1, \ldots\}$ содержит p элементов, откуда следует, что $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$.

Итак, в любом конечном поле F содержится наименьшее подполе, которое изоморфно полю вычетов по простому модулю p, равному характеристике поля F.

Для того, чтобы понять, сколько элементов содержится в F, рассмотрим F как векторное пространство над F_0 (оно конечномерно, так как F конечно). Пусть $dim\, F = n$. Тогда

$$F \simeq (\mathbb{Z}_p)^n$$

Отсюда следует, что

$$|F| = p^n$$

Семинар 2. Преобразование координат вектора при замене базиса. Примеры подпространств. Применения формулы Грассмана.

Задача 34.8 з). Пусть α – комплексный корень многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$, неприводимого над $\mathbb{Q}$. Найти размерность над $\mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{Q}[\alpha]$, состоящего из чисел вида $f(\alpha)$, $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Решение.
1 способ. Докажем, что $dim\, \mathbb{Q}[\alpha] = deg\, p$. Рассмотрим гомоморфизм φ:

$$\varphi\colon\ \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto f(\alpha)$$

Образ φ – это $\mathbb{Q}[\alpha]$ (по определению $\mathbb{Q}[\alpha]$):

$$Im\, \varphi = \mathbb{Q}[\alpha]$$

Ядро φ:

$$Ker\, \varphi = \{\, pq \mid q \in \mathbb{Q}[x] \,\}$$

Действительно, пусть $f(\alpha) = 0, f \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда f имеет общий корень α с многочленом p, значит, они оба делятся на $x - \alpha$ и НОД$(f, p) \neq 1$. Из алгоритма Евклида следует, что НОД$(f, p) \in \mathbb{Q}[x]$. Но p – неприводимый многочлен, следовательно, НОД$(f, p) = p$, т.е. f делится на p.

Далее можно воспользоваться основной теоремой о гомоморфизме и доказать, что $dim\, \mathbb{Q}[\alpha] = deg\, p$. Однако, такой способ решения может показаться слишком сложным – мы решим эту задачу несколько проще.

2 способ. Пусть $deg\, p = n$. Докажем, что в $\mathbb{Q}[\alpha]$ можно выбрать базис, состоящий из степеней α:

$$(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$$

т.е. $p(\alpha)$ можно единственным способом представить в виде линейной комбинации $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ с рациональными коэффициентами.

Существование: пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$. Разделим f с остатком на p:

$$f = pq + r, \quad deg\, r < n$$

Подставим α:

$$f(\alpha) = p(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha)$$

Так как $p(\alpha) = 0$, то $f(\alpha) = r(\alpha)$. Но $deg\, r < n$, следовательно,

$$f(\alpha) = r(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

Таким образом, система $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ порождает $\mathbb{Q}[\alpha]$.

Линейная независимость: пусть

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = 0, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

Но $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = g(\alpha)$, где $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{Q}[x]$. Отсюда следует, что $g(x) \vdots p(x)$. Но $deg\, g \le n-1$, а $deg\, p = n$, следовательно, $g(x) \equiv 0$, т.е. $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Таким образом, $dim\, \mathbb{Q}[\alpha] = deg\, p$. ■

Задача 34.10 а). Пусть векторы $e_1, \dots, e_n$ и x заданы своими координатами в некотором базисе $e' = (e_1', e_2', e_3')$:

$$e_1 = (1,1,1), \;\; e_2 = (1,1,2), \;\; e_3 = (1,2,3), \;\; x = (6,9,14)$$

Доказать, что $e_1, \dots, e_n$ – тоже базис пространства, и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение.
Матрица перехода $e' \xrightarrow{C} e$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы доказать, что $e_1, \dots, e_n$ – тоже базис пространства, нужно доказать, что матрица C невырождена. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – координаты вектора x в новом базисе. Они связаны с координатами $X' = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ в старом базисе соотношением $X' = CX$ – это система линейных уравнений относительно x_1, x_2, x_3. Решим ее:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 1 & 2 & 3 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & | & -3 \\ 0 & -1 & -1 & | & -5 \\ 1 & 2 & 3 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ (заодно мы доказали, что матрица C невырождена).

Ответ: $(1,2,3)$.

Задача 35.3 б), г). Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем F образуют подпространства в пространстве матриц $M_n(F)$, найти их базисы и размерности:
б) симметрические матрицы $Sym_n(F) = \{A \mid A^T = A\}$,
г) невырожденные матрицы $U = \{A \mid det\ A \neq 0\}$.

Решение.
б) Это подпространство (проверка очевидна). В качестве базиса можно рассмотреть матрицы вида $E_{ij} + E_{ji}$ $(i \neq j)$ и матрицы E_{ii}. Действительно, если $A^T = A$, то $\forall i, j$ выполнено: $a_{ij} = a_{ji}$. Тогда

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

- всякая симметричная матрица представляется в виде линейной комбинации матриц такого вида. Линейная независимость таких матриц очевидна. Из построения базиса вытекает, что

$$dim\ Sym_n(F) = \frac{n(n+1)}{2}$$

г) Это не подпространство, так как U не замкнуто относительно сложения: $E \in U$ и $-E \in U$, но $-E + E = 0 \notin U$.

Задача 35.10 д). Пусть V – n-мерное пространство над полем F, состоящим из q элементов. Найти число k-мерных подпространств пространства V.

Решение.
Ясно, что $|V| = q^n$. Пусть U – k-мерное подпространство V, тогда $U = < v_1, \dots, v_k >$, где $v_1, \dots, v_k \in V$ и линейно независимы. Подсчитаем количество таких наборов.

Первый вектор базиса v_1 должен быть ненулевым – его можно выбрать $q^n - 1$ способами. Второй вектор базиса v_2 должен быть не пропорциональным первому вектору: $v_2 \neq \lambda v_1$. Так как коэффициентов пропорциональности λ столько же, сколько элементов поля F, т.е. q штук, то v_2 можно выбрать $q^n - q$ способами, и так далее.

Если мы выбрали первые $m - 1$ векторов базиса U, то v_m не должен принадлежать их линейной оболочке. Но $< v_1, \dots, v_{m-1} >$ - это подпространство в U размерности $m - 1$, в котором лежит q^{m-1} векторов. Значит, вектор v_m мы можем выбрать $q^n - q^{m-1}$ способами.

Тогда всего таких наборов $v_1, \dots, v_k$ будет $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$. Поймем, какие из этих наборов задают одно и то же подпространство, т.е. сколько существует

базисов в каждом k-мерном подпространстве V. Аналогичными рассуждениями можно получить, что всего базисов в подпространстве $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})$ штук.

Тогда число k-мерных подпространств пространства V:

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}=\left[{n \atop k}\right]_q$$

Число $\left[{n \atop k}\right]_q$ называется q-биноминальным коэффициентом. Отметим, что $\lim\limits_{q\to 1}\left[{n \atop k}\right]_q=\left[{n \atop k}\right]$.

Ответ: $\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$.

Задача. Рассмотрим пространство $V=Mat_{4\times 4}(K)$ – его размерность равна 16. Пусть U – подпространство $Mat_{4\times 4}(K)$ размерности 7. Доказать, что U содержит ненулевую симметрическую матрицу X.

Решение.
Рассмотрим $W=Sym_4(K)$ – подпространство симметрических матриц в $Mat_{4\times 4}(K)$. Его размерность (см. задачу 35.3.б):

$$dim\,W=\frac{4(4+1)}{2}=10$$

Так как $dim\,U+dim\,W=7+10=17>16=dim\,V$, то по формуле Грассмана

$$dim\,U\cap W=dim\,U+dim\,W-dim(U+W)>dim\,U+dim\,W-dim\,V=1$$

т.е. $U\cap W$ непусто, а это и означает, что U содержит ненулевую симметрическую матрицу X. ■

Расположение подпространств в конечномерном пространстве.

Будем рассматривать конфигурации подпространств $(V;U_1,\dots,U_m)$ в конечномерном векторном пространстве V. Конфигурации эквивалентны:

$$(V;U_1,\dots,U_m)\sim(V';U_1',\dots,U_m'),$$

если существует изоморфизм φ: $V\Rightarrow V'$, при котором $\varphi(U_i)=U_i'$, $\forall i=1,\dots,m$.

Понятно, что две конфигурации эквивалентны тогда и только тогда, когда подпространства в обоих наборах подпространств расположены одинаково друг относительно друга. Поймем, какие инварианты определяют эквивалентные конфигурации.

$m = 1$:

$$(V;U)\sim(V';U') \Leftrightarrow \begin{cases} dim\,V = dim\,V' \\ dim\,U = dim\,U' \end{cases}$$

$\Rightarrow$: очевидно,
$\Leftarrow$: выберем $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ – базис V, где $(e_1, \dots, e_m)$ – базис U, аналогично выберем $(e'_1, \dots, e'_m, e'_{m+1}, \dots, e'_n)$ – базис V', где $(e'_1, \dots, e'_m)$ – базис U'. Тогда изоморфизм φ, очевидно, таков:

$$\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} V'$$
$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \mapsto \varphi(x) = x_1e'_1 + \dots + x_ne'_n$$

$m = 2$:

$$(V;U_1,U_2)\sim(V';U'_1,U'_2) \Leftrightarrow \begin{cases} dim\,V = dim\,V' \\ dim\,U_1 = dim\,U'_1 \\ dim\,U_2 = dim\,U'_2 \\ dim(U_1 \cap U_2) = dim(U'_1 \cap U'_2) \end{cases}$$

Отметим, что условие $dim(U_1 + U_2) = dim(U'_1 + U'_2)$ будет лишним (следует из формулы Грассмана).

$\Rightarrow$: очевидно,
$\Leftarrow$: доказывается аналогично случаю $m = 1$ – следует из существования согласованных базисов для пар подпространств.

$m = 3$:

$$(V;U_1,U_2,U_3)\sim(V';U'_1,U'_2,U'_3) \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} dim\,V = dim\,V' \\ dim\,U_i = dim\,U'_i\,, \forall i = 1,2,3 \\ dim(U_i \cap U_j) = dim(U'_i \cap U'_j)\,, \forall i,j = 1,2,3 \\ dim(U_i + U_j) = dim(U'_i + U'_j)\,, \forall i,j = 1,2,3 \\ dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = dim(U'_1 \cap U'_2 \cap U'_3) \\ dim(U_1 + U_2 + U_3) = dim(U'_1 + U'_2 + U'_3) \end{cases}$$

Задача 1. Достаточно ли перечисленных инвариантов для выяснения эквивалентности троек подпространств?

Задача 2. Доказать, что для $m = 4$ дискретных инвариантов недостаточно (типа dim).

Семинар 3. Линейная независимость подпространств, прямые суммы, проекции на слагаемые.

Задача 35.3 ж). Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем F образуют подпространства в пространстве $Mat_n(F)$, найти их базисы и размерности:
ж) матрицы, перестановочные с данным множеством матриц (при вычислении базиса и размерности предположить, что данное множество матриц состоит из одной диагональной матрицы с различными диагональными элементами).

Задача. Пусть $A \in Mat_n(K)$, $rk\ A \leq \frac{n}{2}$. Доказать, что среди решений уравнения $AX = 0$ есть ненулевая симметрическая матрица.

Решение.
Пусть $U \subseteq Mat_n(K)$ – пространство решений уравнения $AX = 0$. Его размерность равна $dim\ U = n(n-r)$, так как

$$U = U' \oplus \cdots \oplus U',$$

где U' - пространство решений ОСЛУ с матрицей A.

Размерность подпространства симметрических матриц равна $dim\ Sym_n(K) = \frac{n(n+1)}{2}$ (см. задачу 35.3 б). Так как $rk\ A \leq \frac{n}{2}$, то $dim\ U = n(n-r) \geq \frac{n^2}{2}$. Так как

$$dim\ U + dim\ Sym_n(K) \geq \frac{n^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2} > n^2 = dim\ Mat_n(K),$$

то по формуле Грассмана

$$dim(U \cap Sym_n(K)) = dim\ U + dim\ Sym_n(K) - dim\ (U + Sym_n(K)) >$$

$$> dim\ U + dim\ Sym_n(K) - dim\ Mat_n(K) > n^2 - n^2 = 0$$

т.е. $U \cap Sym_n(K)$ непусто, а это и означает, что U содержит ненулевую симметрическую матрицу. ■

Разберем задачи 1 и 2 с прошлого семинара:

Задача 2. Доказать, что для выяснения эквивалентности четверок подпространств дискретных инвариантов недостаточно.

Решение.
Пусть $dim\ V = 2$. Рассмотрим в V четверку одномерных подпространств (т.е. прямых): $U_1, U_2, U_3, U_4 \subset V$ и поймем, чем задается их взаимное расположение.

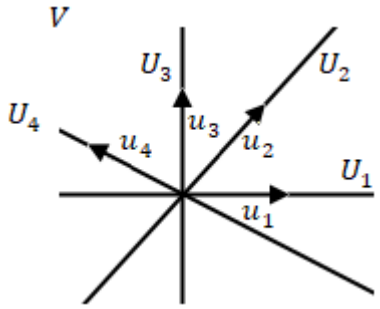

Рис. 3.1. К задаче 2

Начнем со случая пересечения двух прямых U_1 и U_2 – выберем в V базис и рассмотрим матрицу 2×2, составленную по столбцам из координат направляющих векторов этих прямых:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$$

U_1 и U_2 совпадают тогда и только тогда, когда их направляющие векторы пропорциональны, т.е. $\begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = det\ (u_1, u_2) = 0$. Таким образом, равенство нулю такого определителя полностью определяет взаимное расположение двух прямых на плоскости (отметим, что $det\ (u_1, u_2)$ при замене базиса в V умножается на определитель матрицы перехода, т.е. сам $det\ (u_1, u_2)$ инвариантом не является).

Теперь поймем, можно ли из таких определителей сконструировать инвариант, отвечающий за взаимное расположение четверки прямых. Заметим, что двойное отношение четверки прямых:

$$\Delta = \frac{det\ (u_1, u_3) \cdot det\ (u_2, u_4)}{det\ (u_1, u_4) \cdot det\ (u_2, u_3)} = \delta(U_1, U_2, U_3, U_4)$$

не меняется при замене базиса. Это инвариант конфигурации четырех прямых на плоскости: легко понять, что у эквивалентных конфигураций Δ будет одинаковым.

Действительно, пусть U_1', U_2', U_3', U_4' - четверка прямых в двумерном пространстве V'. Если конфигурации $(V; U_1, U_2, U_3, U_4)$ и $(V'; U_1', U_2', U_3', U_4')$ эквивалентны, то существует изоморфизм φ: $V \Rightarrow V'$, переводящий прямые U_1, U_2, U_3, U_4 в U_1', U_2', U_3', U_4'. Выбрав базисы в V и V' так, чтобы φ переводил базис V в базис V', в котором прямые U_1', U_2', U_3', U_4' задаются теми же уравнениями, что и прямые U_1, U_2, U_3, U_4 в V, получим, что и двойные отношения четверок прямых также будут совпадать.

Поймем, что Δ может принимать любые значения. Для этого выберем в качестве базисных векторов в V векторы $u_1 = e_1$ и $u_2 = e_2$. Можно считать, что $u_3 = e_1 + e_2$ (иначе выберем в качестве базисных векторы, пропорциональные u_1 и u_2 с нужным коэффициентом), также можно считать, что $u_4 = e_1 + \lambda e_2$, $\lambda \neq 0{,}1$. Тогда

$$\delta(U_1, U_2, U_3, U_4) = \frac{det\,(u_1, u_3) \cdot det\,(u_2, u_4)}{det\,(u_1, u_4) \cdot det\,(u_2, u_3)} = \frac{1}{\lambda}$$

Таким образом, для выяснения эквивалентности четверок подпространств дискретных инвариантов недостаточно – нужны непрерывные варианты (как Δ). ■

Задача 1. Достаточно ли размерностей подпространств, размерностей их сумм и пересечений для выяснения эквивалентности троек подпространств?

Решение.
Идея: построить базис в V, в котором координатное задание подпространств U_1, U_2, U_3 имеет вполне определенный однозначный вид (в зависимости от значений инвариантов $dim\, U_i$, $dim(U_i \cap U_j)$, $dim(U_i + U_j)$).

В случае двух подпространств мы строили согласованный базис (см. предыдущий семинар). Можно попробовать поступить так же и в случае трех подпространств: пусть $e_1, \dots, e_m$ – базис $U_1 \cap U_2 \cap U_3$, дополним его векторами $e_{m+1}, \dots, e_k$ до базиса $U_1 \cap U_2$, затем дополним его векторами $e_{k+1}, \dots, e_l$ до базиса $U_1 \cap U_3$, затем дополним его векторами $e_{l+1}, \dots, e_p$ до базиса $U_2 \cap U_3$, и т.д. Однако, так согласованный базис построить не получится:

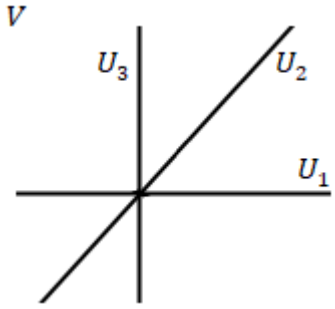

Рис. 3.3. К задаче 1

Понятно, что в случае, показанном на рис. 3.2, нельзя выбрать согласованный базис, т.е. такой базис на плоскости, чтобы часть векторов этого базиса давала базис каждой из этих прямых.

Таким образом, согласованный базис нужно строить несколько иначе. Додумать решение предоставляется читателю. ■

Задача 35.26. Пусть V – линейное пространство над полем F, U, W – подпространства в V, причем $U \cup W = V$. Доказать, что $V = U$ или $V = W$.

Решение.
Другими словами, $U \cup W$ – подпространство $\Leftrightarrow U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.

$\Leftarrow$: очевидно,

$\Rightarrow$: от противного: пусть $U \nsubseteq W$ и $W \nsubseteq U$, тогда $\exists u \in U$, такой что $u \notin W$ и $\exists w \in W$, такой что $w \notin U$. Тогда $v = u + w$ не принадлежит ни U, ни W, т.е. $v \notin U \cup W = V$.

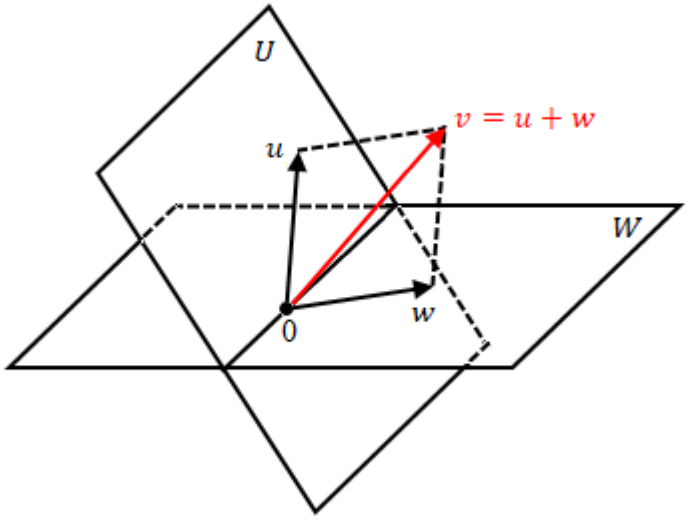

Рис. 3.3. К задаче 35.26

Действительно, если $v \in U \cup W$, то либо $v \in U$, тогда $v - u = w \in U$ – противоречие, либо $v \in W$, тогда $v - w = u \in W$ – противоречие. ■

Задача 35.17 б). Пусть $U_1, \dots, U_m$ – подпространства векторного пространства V. Доказать, что условие $U_i \cap U_j = 0$ для любых различных i и j от 1 до m не является достаточным для того, чтобы сумма этих подпространств была прямой.

Решение.
Рассмотрим двумерное пространство V и подпространства $U_1 = < e_1 >$, $U_2 = < e_2 >$, $U_3 = < e_1 + e_2 >$:

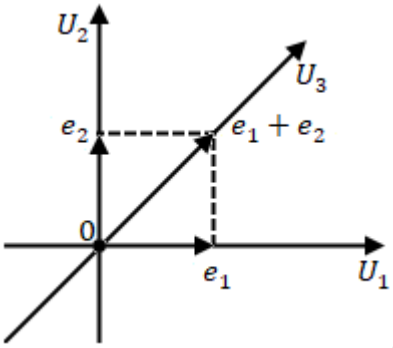

Рис. 3.4. $U_i \cap U_j = 0$, но сумма $U_1 + U_2 + U_3$ не является прямой

Тогда $e_1 + e_2 + (-e_1 - e_2) = 0$, где $e_1 \in U_1$, $e_2 \in U_2$, $-e_1 - e_2 \in U_3$, т.е. сумма $U_1 + U_2 + U_3$ не является прямой. ■

Задача 35.18. Пусть подпространства $U, W \subseteq V = \mathbb{R}^n$ заданы уравнениями:

$$U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0\}, \qquad W = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_1 = z_2 = \cdots = z_n\}$$

Доказать, что $V = U \oplus W$, и найти проекции единичных векторов $e_i \in \mathbb{R}^n$ на U и на W.

Решение.
Для того, чтобы доказать, что $V = U \oplus W$, достаточно доказать, что каждый вектор $x \in V$ единственным способом разлагается в сумму векторов $y \in U$ и $z \in W$.

Единственность. Пусть

$$x = y + z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Тогда

$$x_1 + \cdots + x_n = (y_1 + \cdots + y_n) + (z_1 + \cdots + z_n) = n\lambda, \qquad \text{где } \lambda = z_i$$

Отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{1}{x_1 + \cdots + x_n},$$

т.е. вектор z определен однозначно. Но тогда однозначно определен и $y = x - z$.

Существование. Доказательство единственности подсказывает вид такого разложения. Возьмем $\lambda = \frac{1}{x_1 + \cdots + x_n}$ и положим

$$z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ \vdots \\ x_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $y + z = x$ и $y \in U, z \in W$.

Теперь найдем проекции единичных векторов $e_i \in \mathbb{R}^n$ на U и на W. Пусть $e_i = u_i + w_i$, где u_i – проекция на U, а w_i – проекция на W. Тогда

$$w_i = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}, \qquad u_i = e_i - \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

■

Задача 35.22 а). Пусть $U = Skew_n(\mathbb{R})$ – подпространство кососимметрических матриц, W – подпространство верхнетреугольных матриц в $V = Mat_n(\mathbb{R})$. Доказать, что $U \oplus W = V$.

Решение.

Для того, чтобы доказать, что $V = U \oplus W$, достаточно доказать, что любая матрица $C \in Mat_n(\mathbb{R})$ единственным способом разлагается в сумму матриц $A \in U$ и $B \in W$.

Единственность. Пусть $C = A + B$. Тогда при $i > j$ имеем: $a_{ij} = c_{ij}$ (так как в этом случае $b_{ij} = 0$), следовательно, при $i < j$ выполнено: $a_{ij} = -a_{ji} = -c_{ji}$, а при $i = j$ выполнено: $a_{ij} = 0$. Таким образом, мы однозначно восстановили матрицу A, тогда $B = C - A$.

Существование. Доказательство единственности подсказывает вид такого разложения. При $i > j$ положим: $a_{ij} = c_{ij}$, тогда при $i \leq j$ выполнено: $a_{ij} = -a_{ji}$ – тем самым мы задали матрицу A. При $i > j$ положим $b_{ij} = 0$, а при $i \leq j$ положим $b_{ij} = c_{ij} - a_{ij}$ – тем самым мы задали матрицу B. ■

Семинар 4. Ядро линейной функции. Задание подпространства однородной системой линейных уравнений.

Задача 35.24. Пусть F – поле из q элементов, U – подпространство размерности m в пространстве V размерности n. Найти число таких подпространств W в V, что $V = U \oplus W$.

Решение.
Пусть $U = < e_1, \dots, e_m >$, тогда $U = < e_{m+1}, \dots, e_n >$, где $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ – базис V. Поймем, сколько подпространств порождают векторы $e_{m+1}, \dots, e_n$. Вектор e_{m+1} не может принадлежать $< e_1, \dots, e_m > = U$, а так как $|V| = q^n, |U| = q^m$, то число способов выбрать e_{m+1} равно $q^n - q^m$. Аналогично, вектор e_{m+2} не может принадлежать $< e_1, \dots, e_{m+1} >$, число способов выбрать e_{m+2} равно $q^n - q^{m+1}$, и так далее... Число способов выбрать e_n равно $q^n - q^{n-1}$. Тогда число способов выбрать $e_{m+1}, \dots, e_n$ равно

$$(q^n - q^m)(q^n - q^{m+1}) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

Количество самих W равно числу способов выбрать $e_{m+1}, \dots, e_n$, деленному на количество базисов в каждом W – см. семинар 2, задача 35.10 д):

$$\frac{(q^n - q^m)(q^n - q^{m+1}) \cdots (q^n - q^{n-1})}{(q^{n-m} - 1)(q^{n-m} - q) \cdots (q^{n-m} - q^{n-m-1})}$$

Ответ: $\frac{(q^n-q^m)(q^n-q^{m+1})\cdots(q^n-q^{n-1})}{(q^{n-m}-1)(q^{n-m}-q)\cdots(q^{n-m}-q^{n-m-1})}$.

Задача 35.27. Привести пример такого пространства V над конечным полем, что $V = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где U_1, U_2, U_3 – собственные подпространства в V.

Решение.

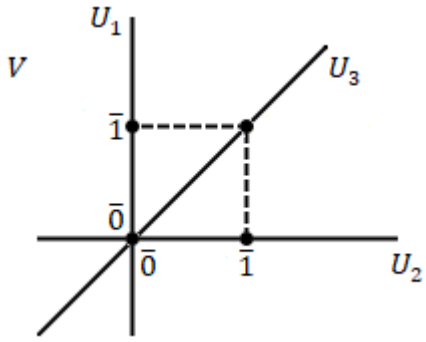

Рис. 4.1. $V = (\mathbb{Z}_2)^2$

$$V = (\mathbb{Z}_2)^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

■

Задача 35.25. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем K и $U_1, \dots, U_m$ – подпространства в V, причем $V = U_1 \cup \dots \cup U_m$. Доказать, что $V = U_i$ для некоторого $i = 1, \dots, m$.

Решение.
Докажем индукцией по m.
База индукции: $m = 2$ – доказали ранее (см. задачу 35.26 прошлого семинара).

Шаг индукции: если $U_i \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_{i-1} \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_m$, то

$$V = U_1 \cup \dots \cup U_{i-1} \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_m$$

и можно применить предположение индукции. Иначе возьмем векторы $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_2$, такие что $v_1 \notin U_2 \cup \dots \cup U_m$ и $v_2 \notin U_1 \cup U_3 \cup \dots \cup U_m$. Рассмотрим линейные комбинации $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ – так как поле K бесконечно, то можно выбрать бесконечно много таких линейных комбинаций, не пропорциональных друг другу.

Так как $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U_1 \cup \dots \cup U_m$, то $\exists i$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U_i$. Так как подпространств U_i конечное число, то существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in K$, что $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ и $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ не пропорциональны, но лежат в одном U_i. Но тогда $v_1, v_2 \in U_i$, так как $< \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 > = < v_1, v_2 >$. Но из выбора v_1 и v_2 следует, что эти векторы не могут лежать в одном подпространстве – противоречие. ■

Задача 35.17 а). Пусть $U_1, \dots, U_m$ – подпространства векторного пространства V. Доказать, что сумма этих подпространств является прямой тогда и только тогда, когда хотя бы один ее вектор однозначно представляется в виде

$$u_1 + \dots + u_m, \qquad u_i \in U_i, \;\; i = 1, \dots, m$$

Решение.
$\Leftarrow$: если подпространства $U_1, \dots, U_m$ линейно независимы, то для любого вектора v из их суммы разложение $v = u_1 + \dots + u_m$, $u_i \in U_i$, $i = 1, \dots, m$ является единственным.

$\Rightarrow$: от противного: пусть $U_1, \dots, U_m$ линейно зависимы, тогда существует векторы $v_1, \dots, v_m$, удовлетворяющие соотношению $v_1 + \dots + v_m = 0$, $v_i \in U_i$, $i = 1, \dots, m$, где хотя бы одно из v_i не равно 0. Прибавим это равенство к равенству $v = u_1 + \dots + u_m$, получим

$$v = (u_1 + v_1) + \dots + (u_m + v_m)$$

- получили еще одно разложение v. Противоречие. ■

Задача 36.13. Пусть α – ненулевая линейная функция на векторном пространстве V (не обязательно конечномерном), $U = Ker\ \alpha$. Доказать, что:
а) U – максимальное подпространство V, т.е. не содержится ни в каком другом подпространстве, отличном от V;

б) $V = U \oplus < w >$ для любого $w \notin U$.

Определение. Пусть $\alpha \in V^*$. Ядро α – это все векторы из V, на которых $\alpha = 0$:

$$Ker\ \alpha = \{x \in V \mid \alpha(x) = 0\}$$

Если V конечномерно, то $\alpha(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ и $Ker\ \alpha$ – это пространство решений линейного уравнения $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Решение.
б) Легко понять, что U – подпространство. Нужно доказать, что $\forall v \in V$ существует единственное разложение $v = u + \lambda w$, где $u \in U$.

Единственность. Пусть $v = u + \lambda w$, где $u \in U$. Тогда $\alpha(v) = \alpha(u) + \lambda\alpha(w)$. Так как $u \in U$, а $w \notin U$, то $\alpha(u) = 0$, а $\alpha(w) \neq 0$, следовательно, $\lambda = \frac{\alpha(v)}{\alpha(w)}$. Отсюда следует, что

$$u = v - \frac{\alpha(v)}{\alpha(w)}w$$

Существование. Возьмем $u = v - \frac{\alpha(v)}{\alpha(w)}w$, тогда $\alpha(u) = \alpha(v) - \frac{\alpha(v)}{\alpha(w)}\alpha(w) = 0$, т.е. $u \in U$.

а) Пусть $U \subset W \subset V$, тогда $\exists w$: $w \in W$, но $w \notin U$. Воспользуемся пунктом б): $V = U \oplus < w >$, но так как $U \subset W$ и $< w > \subset W$, то и $U \oplus < w > = V \subseteq W$ – противоречие (мы предполагали, что $W \subset V$). ■

Критерий базисности.

Набор линейных функций $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$, $n = dim\ V$ образует базис пространства V^* тогда и только тогда, когда система уравнений $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$ имеет только нулевое решение (иначе говоря, $Ker\ (\alpha_1) \cap \cdots \cap Ker\ (\alpha_n) = \{0\}$).

Пример. $V = K[t]_{<n}$ – пространство многочленов степени меньше n. Размерность этого пространства равна n, базис: $(1, t, t^2, \dots, t^{n-1})$.

Пусть $t_1, \dots, t_n$ – попарно различные элементы K. Рассмотрим $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ - функции вычисления значения в этих точках: $\alpha_i(f) = f(t_i)$, $f \in K[t]_{<n}$. Рассмотрим ОСЛУ:

$$\begin{cases} \alpha_1(f) = f(t_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n(f) = f(t_n) = 0 \end{cases}$$

Многочлен из $K[t]_{<n}$, удовлетворяющий этой системе, должен иметь не менее n корней, следовательно, система имеет единственное решение $f = 0$. Тогда по критерию базисности, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – базис V^*. Ему соответствует двойственный базис $(f_1, \dots, f_n)$ в V. Условие двойственности: $\alpha_i(f_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow f_j(t_i) = \delta_{ij}$, где:

$$f_j(t) = \frac{(t - t_1) \cdots f_j(t_i) \cdots (t - t_n)}{(t_j - t_1) \cdots f_j(t_i) \cdots (t_j - t_n)}$$

Тогда $\forall f \in K[t]_{<n}$:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(f) f_j(t) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \frac{(t - t_1) \cdots f_j(t_i) \cdots (t - t_n)}{(t_j - t_1) \cdots f_j(t_i) \cdots (t_j - t_n)}$$

- интерполяционная формула Лагранжа.

Упражнение. Пусть поле K бесконечно, $t_0 \in K$, $\beta_0, \dots, \beta_n \in V^*$, $V = K[t]_{\leq n}$, $\beta_i(f) = f^{(i)}(t_0)$. Доказать, что $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ – базис V^*, найти сопряженный базис в V и записать разложение $\forall f \in V$ по этому базису.

Задача 35.16 а). Найти систему линейных уравнений, задающую систему векторов:

$$< (1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1) >$$

Решение.
Обозначим $U = < (1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1) >$. ОСЛУ

$$\begin{cases} < \alpha_1 \mid x > = 0 \\ \vdots \\ < \alpha_k \mid x > = 0 \end{cases}$$

задает U тогда и только тогда, когда $< \alpha_1, \dots, \alpha_k > = U^0$. Но U^0 задается ОСЛУ

$$\begin{cases} < v_1 \mid y > = 0 \\ \vdots \\ < v_m \mid y > = 0 \end{cases}$$

где $y \in V^*$. В нашем случае:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

Строки этой системы – координаты векторов, порождающих U.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y_1, y_4 – главные неизвестные, y_2, y_3 – свободные. ФСР: $(1, 1, 0, -2)$, $(-1, 0, 1, 1)$. Получаем

$$U^0 = < \alpha_1, \alpha_2 >,$$

где $\alpha_1 = x_1 + x_2 - 2x_4$, $\alpha_2 = -x_1 + x_3 + x_4$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- ОСЛУ для U.

Ответ: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Семинар 5. Нахождение базиса и системы линейных уравнений для суммы и пересечения подпространств.

Задача 36.9 в). Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\gamma_i\colon V \to \mathbb{R}$:

$$\gamma_i(f) = \int_0^{i+1} f(x)dx$$

Доказать, что система $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ является базисом V^*.

Решение.
Применим критерий базисности (см. предыдущий семинар): система $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ является базисом V^* тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \gamma_0(f) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_n(f) = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение $f = 0$.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, тогда $F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ и

$$\gamma_i(f) = F(i+1) - F(0) = a_0(i+1) + a_1 \frac{(i+1)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(i+1)^{n+1}}{n+1}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n = 0 \\ \vdots \\ (n+1)a_0 + \frac{(n+1)^2}{2} a_1 + \dots + \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} a_n = 0 \end{cases}$$

Определитель матрицы этой системы отличается от определителя Вандермонда лишь ненулевым числовым множителем. Так как числа $1, \dots, n+1$ различны, то этот определитель не равен нулю, следовательно, система имеет единственное решение (нулевое), т.е. $f = 0$. ■

Задача 36.16. Доказать, что векторы $v_1, \dots, v_k$ конечномерного векторного пространства V линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют линейные функции $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$, такие что $det\ \alpha_i(v_j) \neq 0$.

Решение.

$\Leftarrow$: от противного: пусть $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ – нетривиальная линейная комбинация. Применяя к обеим частям равенства функции α_i $(i = 1, \dots, k)$, получим нетривиальную линейную комбинацию столбцов матрицы $\alpha_i(v_j)$ с теми же коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, равную нулю, откуда $det\ \alpha_i(v_j) \neq 0$ – противоречие.

$\Rightarrow$: дополним векторы $v_1, \dots, v_k$ до $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ – базиса пространства V и рассмотрим сопряженный базис $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ пространства V^*. Тогда $\alpha_i(v_j) = E$, откуда $det\ \alpha_i(v_j) = 1 \neq 0$. ■

Задача 36.17 б), в). Для всякого подмножества U конечномерного пространства V и для всякого подмножества W сопряженного пространства V^* положим

$$U^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ для любого } x \in U\},$$
$$W^0 = \{x \in V \mid f(x) = 0 \text{ для любого } f \in V^*\}$$

Доказать, что:

б) если U_1 и U_2 – подпространства в V, то $U_1^0 = U_2^0$ тогда и только тогда, когда $U_1 = U_2$;
в) для любого подпространства U пространства V выполнено:

$$(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0 \qquad (U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$$

Решение.
б) $\Leftarrow$: очевидно,

$\Rightarrow$: если $U_1^0 = U_2^0$, то $(U_1^0)^0 = (U_2^0)^0$. Но $(U_1^0)^0 = U_1$, $(U_2^0)^0 = U_2$, поэтому $U_1 = U_2$.

в) Пусть $\alpha \in V^*$

$$\alpha \in (U_1 + U_2)^0 \Leftrightarrow \forall u \in U_1 + U_2 : \ < \alpha | u > = 0$$

Так как $u \in U_1 + U_2$, то $u = u_1 + u_2$ $(u_i \in U_i)$ и $< \alpha | u > = < \alpha | u_1 > + < \alpha | u_2 > = 0$. Если $\alpha \in U_1^0 \cap U_2^0$, то $< \alpha | u_1 > = 0$ и $< \alpha | u_2 > = 0$, поэтому $< \alpha | u > = 0$. И обратно, если $\forall u \in U_1 + U_2 : \ < \alpha | u > = 0$, то $< \alpha | u_1 > = 0$ и $< \alpha | u_2 > = 0$, так как $U_1 \subseteq U_1 + U_2$ и $U_2 \subseteq U_1 + U_2$. Таким образом, мы доказали равенство

$$(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$$

Для того, чтобы доказать, что $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$, необходимо и достаточно доказать, что $((U_1 \cap U_2)^0)^0 = (U_1^0 + U_2^0)^0$ (как следует из пункта б). Из первого равенства пункта в) следует, что $(U_1^0 + U_2^0)^0 = U_1^{00} \cap U_2^{00} = U_1 \cap U_2$. Также $((U_1 \cap U_2)^0)^0 = U_1 \cap U_2$. Следовательно,

$$(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$$

■

Задача (о кратной интерполяции). Пусть $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Пусть также $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ и $\forall i = 1, \dots, k$, $\forall j = 0, \dots, n_i - 1$ задано $y_{ij} \in \mathbb{R}$. Доказать, что существует единственный многочлен f степени меньше $n_1 + \dots + n_k$, такой что $f^{(j)}(x_i) = y_{ij}$.

Решение.
Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{<n_1+\dots+n_k}$ – пространство многочленов степени меньше $n_1 + \dots + n_k$ размерности $dim\, V = n_1 + \dots + n_k$. Рассмотрим $\alpha_{ij} \in V^*$ - функции вычисления значения $f^{(j)}(x_i)$:

$$\alpha_{ij}(f) = f^{(j)}(x_i), \qquad i = 1, \dots, k, \;\; j = 0, \dots, n_i - 1$$

Всего таких функций $n_1 + \dots + n_k$ штук. Для того, чтобы доказать, что они образуют базис V^*, применим критерий базисности (см. предыдущий семинар): система функций α_{ij} является базисом V^* тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \alpha_{ij}(f) = 0 \\ \forall i, j \end{cases}$$

имеет только нулевое решение $f = 0$.

Зафиксируем i. Условие $\alpha_{ij}(f) = 0$ при $j = 0, \dots, n_i - 1$ равносильно тому, что $f(x)$ делится на $(x - x_i)^{n_i}$. Так как это условие выполнено для всех $i = 1, \dots, k$, то $f(x)$ должен делиться на $(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_k)^{n_k}$, т.е. его степень должна быть не меньше $n_1 + \dots + n_k$. Но $f \in \mathbb{R}[x]_{<n_1+\dots+n_k}$, следовательно, $f = 0$.

Таким образом, α_{ij} образуют базис V^*, поэтому существует единственный многочлен f степени меньше $n_1 + \dots + n_k$, такой что $f^{(j)}(x_i) = y_{ij}$ (иными словами, существует единственный элемент пространства V, на котором базисные элементы V^* принимают заданные значения). ■

Задача. Пусть поле K бесконечно, $t_0 \in K$, $\beta_0, \dots, \beta_n \in V^*$, $V = K[t]_{\leq n}$, $\beta_i(f) = f^{(i)}(t_0)$. Доказать, что $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ – базис V^*, найти сопряженный базис в V и записать разложение $\forall f \in V$ по этому базису.

Решение.
Для доказательство того, что $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ – базис V^*, применим критерий базисности (см. предыдущий семинар): система функций β_i является базисом V^* тогда и только тогда, когда система $\beta_i(f) = 0$ имеет только нулевое решение $f = 0$.

Условие $\beta_i(f) = 0$ при $i = 0, \dots, n$ равносильно тому, что $f(t)$ делится на $(t - t_0)^n$, т.е. степень $f(t)$ должна быть не меньше $n + 1$. Но $f \in K[t]_{\leq n}$, следовательно, $f = 0$ и $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ – базис V^*.

Пусть $f_0, \dots, f_n$ – двойственный базис V. Тогда $\beta_i(f_j) = \delta_{ij}$, т.е. все производные многочлена f_i в точке t_0 порядка $0, \dots, n$, кроме i-ой равны нулю, а i-ая производная равна 1. Тогда

$$f_i(t) = \frac{(t-t_0)^i}{i!}$$

Разложение f по этому базису:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(f) f_i(t) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!}$$

- формула Тейлора. ■

Задача 35.15 а). Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $< u_1, u_2, u_3 >$ и $< w_1, w_2, w_3 >$:

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,1,-1), u_3 = (1,3,3)$$
$$w_1 = (1,2,2), w_2 = (2,3,-1), w_3 = (1,1,-3)$$

Решение.
Обозначим $U = < u_1, u_2, u_3 >$, $W = < w_1, w_2, w_3 >$.

Базис $U + W$: так как $U + W = < u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3 >$, то для нахождения базиса $U + W$ нужно выбрать максимальную линейно независимую подсистему среди векторов $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ – для этого нужно записать эти векторы в матрицу по столбцам и элементарными преобразованиями строк привести ее к ступенчатому виду. Столбцы исходной матрицы, соответствующие столбцам, содержащим лидеры строк в ступенчатом виде, и будут базисом $U + W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получаем u_1, u_2, w_1 – базис $U + W$ (так как размерность суммы оказалась равной размерности объемлющего пространства V, то в качестве базиса суммы можно выбрать любой базис V).

Базис $U \cap W$: для нахождения базиса пересечения подпространств удобно задать каждое из них с помощью системы линейных уравнений, тогда пересечение задается объединением этих систем, а базис пересечения – это ФСР объединенной системы.

ОСЛУ для U^0:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(3, -2, 1)$ – базис U^0. Тогда ОСЛУ для U:

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

ОСЛУ для W^0:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(8, -5, 1)$ – базис W^0. Тогда ОСЛУ для W:

$$8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$$

ОСЛУ для $U \cap W$:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(3, 5, 1)$ – базис $U \cap W$.

Ответ: $(1, 2, 1), (1, 1, -1), (1, 2, 2)$ – базис $U + W$, $(3, 5, 1)$ – базис $U \cap W$.

Задача. Пусть в пространстве $V, dim\ V = 4$ заданы подпространства:

$$U: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}, \qquad W: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Найти систему уравнений, которая задает $U + W$.

Решение.
Найдем базис U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $u_1 = (-2, 1, 0, 5), u_2 = (-1, 0, 1, 2)$ – базис U.

Найдем базис W:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ФСР: $w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (-1, 0, -2, 1)$ – базис W.

Тогда $U + W = < u_1, u_2, w_1, w_2 >$. Найдем систему, задающую $U + W$: приведем элементарными преобразованиями строк к ступенчатому виду матрицу, составленную из u_1, u_2, w_1, w_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(5, -5, -1, 3)$. Тогда система

$$5x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

задает $U + W$.

Ответ: $5x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

Семинар 6. Связь свойств инъективности и сюръективности сопряженных друг другу линейных отображений. Квазиобратная матрица. Нахождение матрицы линейного оператора, ее преобразование при замене базиса.

Задача 36.2 б), в). Пусть F – поле из q элементов. Найти:
б) число линейных инъективных отображений F^n в F^k;
в) число линейных сюръективных отображений F^n в F^k.

Решение.
в) Очевидно, что количество сюръективных отображений $\mathcal{A}$: $F^n \to F^k$ равно нулю при $n < k$. Пусть $n \geq k$ и $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_k$ – стандартные базисы F^n и F^k соответственно.

Каждому линейному отображению $\mathcal{A}$: $F^n \to F^k$ можно взаимно-однозначно сопоставить матрицу $A \in Mat_{k\times n}(F)$, у которой $rk\, A = dim(Im\, \mathcal{A}) = k$. Получили задачу, которую мы уже решали – см. задача 35.10 д), семинар 2. Тогда количество таких отображений равно

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$$

- это количество способов выбрать k линейно независимых строк длины n.

б) Очевидно, что количество линейных сюръективных отображений F^n в F^k равно нулю при $n > k$. При $n \leq k$ рассуждениями, аналогичными рассуждениям из пункта в) получаем, что количество таких отображений равно

$$(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{n-1})$$

Дело в том, что при сопряжении понятия инъективности и сюръективности меняются ролями: $\mathcal{A}$ инъективно $\Leftrightarrow$ $Ker\, \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow (Ker\, \mathcal{A})^0 = (F^n)^*$. Но $(Ker\, \mathcal{A})^0 = Im\, \mathcal{A}^*$, поэтому $\mathcal{A}$ инъективно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*$ сюръективно. Отсюда также следует, что $\mathcal{A}$ сюръективно $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*$ инъективно.

Если мы рассмотрим отображение $\mathcal{A}^*$: $(F^k)^* \to (F^n)^*$, сопряженное к отображению $\mathcal{A}$, то его матрицей будет $A^T \in Mat_{k\times n}(F)$ – транспонированная матрица отображения $\mathcal{A}$. Ее ранг: $rk\, A^T = dim(Im\, \mathcal{A}^*) = k$.

Ответ: б) $(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{n-1})$, в) $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$.

Квазиобратная матрица.

Как известно, понятие обратной матрицы имеет смысл только для квадратных матриц (это следует из определения обратной матрицы: $AB = BA = E$ и правила умножения матриц).

Задача 1. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(K)$, $B \in Mat_{n\times m}(K)$ и выполнены равенства $AB = E$ и $BA = E$. Доказать, что $m = n$.

Расширим понятие обратной матрицы – назовем матрицу B квазиобратной к A, если выполнены равенства $ABA = A$ и $BAB = B$.

Как видно из определения, всякая обратная матрица является квазиобратной, однако, не всякая квазиобратная матрица является обратной (например, нулевая матрица является квазиобратной самой себе).

Задача 2. Пусть $A \in Mat_{m\times n}(K)$. Доказать, что существует квазиобратная к ней матрица $B \in Mat_{n\times m}(K)$.

Решение.
Пусть A – матрица отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$. Выберем в W базис $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ такой, что $(f_1, \dots, f_r)$ – базис $Im\,\mathcal{A}$. Рассмотрим $e_1, \dots, e_r \in V$, такие что $\mathcal{A}(e_i) = f_i$ $(i = 1, \dots, r)$ и положим

$$\mathcal{B}(f_i) = \begin{cases} e_i \text{ при } i = 1, \dots, r \\ 0 \text{ при } i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

Проверим, что B (матрица отображения $\mathcal{B}$) будет квазиобратной к A. Равенства $ABA = A$ и $BAB = B$ достаточно проверить на базисных векторах.

$BAB = B$: выше мы определили, куда переходит вектор f_i при отображении $\mathcal{B}$. Туда же f_i переходит и при отображении $\mathcal{BAB}$:

$$\begin{tikzcd} & e_i \arrow[r, mapsto, "\mathcal{A}"] & f_i \arrow[r, mapsto, "\mathcal{B}"] & e_i \\ f_i \arrow[ur, "\mathcal{B}"] \arrow[dr] & & & \\ & 0 \arrow[r, mapsto, "\mathcal{A}"] & 0 \arrow[r, mapsto, "\mathcal{B}"] & 0 \end{tikzcd}$$

$ABA = A$: как мы знаем, если U – дополнительное пространство к $Ker\,\mathcal{A}$, т.е. $V = Ker\,\mathcal{A} \oplus U$, то имеет место изоморфизм $U \simeq V/Ker\,\mathcal{A}$, т.е. $U \simeq Im\,\mathcal{A}$.

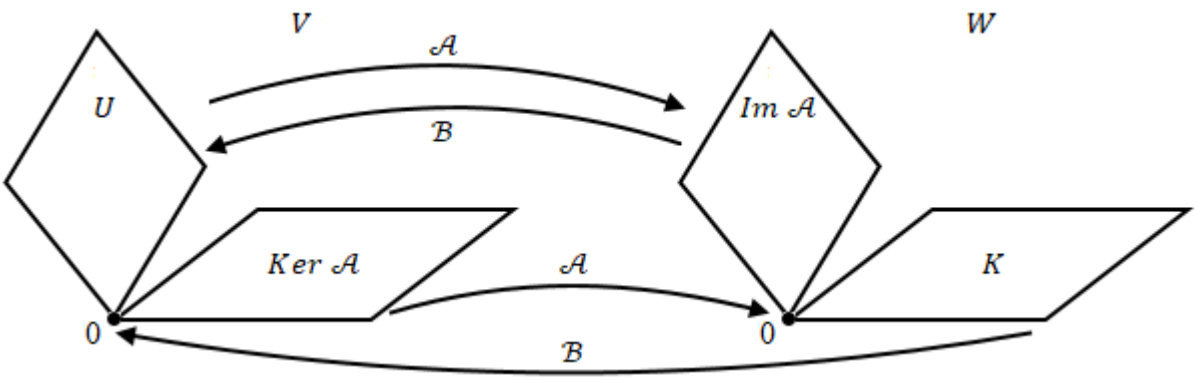

Рис. 6.1. К задаче 2

Тогда на $Im\,\mathcal{A}$ отображение $\mathcal{B}$ обратимо. Из задания $\mathcal{B}(f_i)$ следует, что W раскладывается в прямую сумму подпространств $Im\,\mathcal{A}$ и K, где K порождено f_i, $i = r+1, \dots, n$. На K доопределим $\mathcal{B}$ как отображение, переводящее каждый вектор в 0. Таким образом, мы определили $\mathcal{B}$ на всем W, так как определили его на каждом из прямых слагаемых, в которые раскладывается W.

Построенное таким образом отображение $\mathcal{B}$ будет квазиобратным к отображению $\mathcal{A}$: действительно, для того, проверить, например, что $ABA = A$, достаточно проверить это на каждом из слагаемых прямой суммы. На $Ker\,\mathcal{A}$ эта проверка тривиальна, на U: отображение из U в $Im\,\mathcal{A}$ – изоморфизм, т.е. обратимое отображение и для него выполнено даже более сильное свойство $AB = E$. Свойство $BAB = B$ проверяется аналогично. ■

Задача 39.15 в), м). Найти матрицу оператора:
в) поворота трехмерного пространства на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$, в базисе из единичных векторов осей координат;
м) дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ в базисе $x^n, x^{n-1}, \dots, 1$.

Решение.
в)

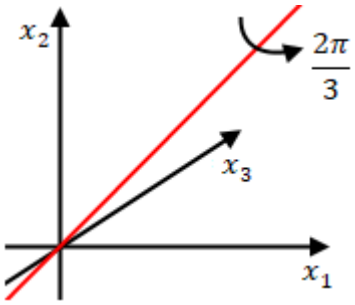

Рис. 6.2. К задаче 39.15 в

Если мы посмотрим вдоль оси вращения на базисные векторы, то увидим такую картину:

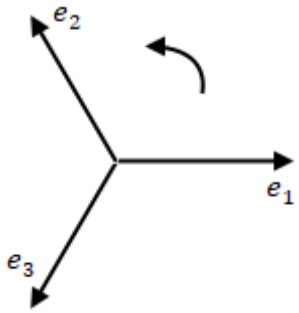

Рис. 6.3. К задаче 39.15 в

– оператор $\mathcal{A}$ совершает циклическую перестановку базисных векторов:

$$\mathcal{A}e_1 = e_2$$
$$\mathcal{A}e_2 = e_3$$
$$\mathcal{A}e_3 = e_1$$

Значит,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

м) Пусть $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования. Имеем: $\mathcal{A}(x^k) = kx^{k-1}$, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 39.19. Пусть линейный оператор в пространстве V в базисе $(e_1, \dots, e_4)$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе: $(e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

Решение.
Матрицы оператора в новом и старом базисе связаны соотношением $A' = C^{-1}AC$, где C – матрица перехода от старого базиса к новому:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Соотношение $A' = C^{-1}AC$ можно записать в виде $CA' = AC$ – получим матричное уравнение. Решим его:

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(C|AC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 5 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 & 5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -5 & -8 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -3 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$.

Семинар 7. Инвариантные подпространства. Вычисление коэффициентов характеристического многочлена. Вычисление собственных значений и нахождение собственных векторов.

Задача 39.13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется псевдоотражением, если $rk\,(\mathcal{A}-\mathcal{E})=1$. Доказать, что в n-мерном пространстве всякий линейный оператор является произведением не более чем n псевдоотражений.

Попытка решения.
Пусть $(e_1,\dots,e_k)$ – базис $Im\,\mathcal{A}$. Дополним его до базиса всего пространства V: $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ – базис V. Рассмотрим операторы $\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{n-k}$, такие что оператор $\mathcal{A}_j$ все базисные векторы, кроме e_{n-j+1} переводит в себя, а e_{n-j+1} переводит в 0. Тогда возникает идея:

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_{n-k}\cdots\mathcal{A}_1$$

при этом операторы $\mathcal{A}_j$ являются псевдоотражениями, так как матрица $\mathcal{A}_j$ отличается от матрицы тождественного оператора $\mathcal{E}$ наличием нуля на $(n-j+1)$-ом месте на диагонали, следовательно, матрица $\mathcal{A}-\mathcal{E}$ отличается от матрицы нулевого оператора наличием единицы на $(n-j+1)$-ом месте на диагонали, поэтому $rk\,(\mathcal{A}-\mathcal{E})=1$.

Однако, композиция $\mathcal{A}_{n-k}\cdots\mathcal{A}_1$ не обязана давать оператор $\mathcal{A}$: если мы применим ее к векторам $e_{k+1},\dots,e_n$, то они перейдут в 0, но оператор $\mathcal{A}$ не обязан переводить их в 0 (если он не является проектором на свой образ).

Читателю предлагается додумать решение этой задачи самостоятельно. ■

Задача. Пусть $\mathcal{A}\in L(V)$. Доказать, что $Im\,(\mathcal{A}^*)\simeq(Im\,\mathcal{A})^*$ (построить канонический изоморфизм). Как из этого утверждения следует теорема о ранге матрицы?

Решение.
Мы знаем, что $Im\,(\mathcal{A}^*)=(Ker\,\mathcal{A})^0$. Далее воспользуемся тем, что если $U\subset V$, то $U^*\simeq V^*/U^0$, также $(V/U)^*\simeq U^0$: получаем $(Ker\,\mathcal{A})^0\simeq(V/Ker\,\mathcal{A})^*$, а так как $V/Ker\,\mathcal{A}\simeq Im\,\mathcal{A}$, то $(V/Ker\,\mathcal{A})^*\simeq(Im\,\mathcal{A})^*$. Получаем цепочку изоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} Im\,(\mathcal{A}^*) & \simeq & (Im\,\mathcal{A})^* \\ \| & & \wr \\ (Ker\,\mathcal{A})^0 & \simeq & (V/Ker\,\mathcal{A})^* \end{array}$$

Ранг матрицы по столбцам – это размерность линейной оболочки системы столбцов, те размерность образа $\mathcal{A}$:

$$r_c(A)=dim<\text{столбцы } A>=dim<\mathcal{A}e_1,\dots,\mathcal{A}e_n>=dim\,Im\,\mathcal{A}$$

Ранг матрицы по строкам – это ранг по столбцам матрицы A^T, т.е. ранг по столбцам матрицы сопряженного оператора:

$$r_r(A) = r_c(A^T) = dim\ Im\ \mathcal{A}^*$$

Так как $Im\ (\mathcal{A}^*) \simeq (Im\ \mathcal{A})^*$, то $dim\ Im\ (\mathcal{A}^*) = dim\ (Im\ \mathcal{A})^*$, откуда $r_c(A) = r_r(A)$. ■

Задача 40.22. Найти все инвариантные подпространства для оператора дифференцирования $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$ в пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

Решение.
Обозначим $U_k = \mathbb{R}[x]_{\leq k}$. Очевидно, что $U_k \subseteq V$ при $k = 0, \dots, n$ – это инвариантные подпространства (при дифференцировании степень многочлена не повышается), также $\{0\}$ является инвариантным подпространством. Докажем, что других нет: пусть $U \subseteq V$ – ненулевое инвариантное подпространство, $f \in U$ – многочлен максимально возможной степени k в U.

Докажем по индукции, что если $f \in U$, $deg\ f = k \geq 0$, то $U \supseteq U_k$.

База индукции: $k = 0$: $f(x) = a \neq 0$. Тогда $U = U_0$.

Шаг индукции: пусть $f \in U$ – многочлен максимально возможной степени k в U, тогда $\frac{df}{dx} \in U$, $deg\ \frac{df}{dx} = k - 1$. Отсюда следует, что $U \supseteq U_{k-1}$. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$. Так как $f \in U$ и $a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} \in U$, то и $x^k \in U$, откуда $U \supseteq U_k$.

Если k – максимальная степень многочлена U, то $U = U_k$. ■

Задача 40.5. Доказать, что все ненулевые векторы пространства являются собственными для линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ – оператор подобия $x \mapsto \alpha x$, где α – некоторый фиксированный скаляр.

Решение.
Пусть $v_1, v_2 \in V$ – линейно независимые векторы, $\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$, $\mathcal{A}v_2 = \lambda_2 v_2$. Тогда $\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \lambda_3(v_1 + v_2)$, с другой стороны, $\mathcal{A}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}v_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Получаем

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0$$

Так как v_1 и v_2 линейно независимы, то отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_3$ и $\lambda_2 = \lambda_3$. В частности, для произвольной пары базисных векторов $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, т.е. для всех базисных векторов скаляр α один и тот же, а значит, он один и тот же и для всех векторов пространства V. ■

Вычисление коэффициентов характеристического многочлена.

Как известно:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det\,(tE - A) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{11} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= t^n - (tr\,A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n det\,A$$

Поймем, какой будет коэффициент при t^{n-k}. При раскрытии $det\,(tE - A)$ степени t^{n-k} могут получаться только из произведения $n - k$ элементов, стоящих на главной диагонали (пусть эти элементы стоят на пересечении строки и столбца с номерами $i_1, \dots, i_{n-k}$).

Пусть $\{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, n\}/\{i_1, \dots, i_{n-k}\}$. Обозначим $M_{j_1 \cdots j_k}$ минор, образованный пересечением строк и столбцов с номерами $j_1 \cdots j_k$ (такие миноры называются главными). При раскрытии $det\,(tE - A)$ минор $M_{j_1 \cdots j_k}$ будет умножаться на t^{n-k}, т.е. при раскрытии минора $M_{j_1 \cdots j_k}$ матрицы $tE - A$ нам будут нужны все слагаемые, не содержащие t в качестве сомножителя. Несложно видеть, что они образуют минор $M_{j_1 \cdots j_k}$, но уже матрицы $-A$. Минор $M_{j_1 \cdots j_k}$ матрицы $-A$ отличается от минора $M_{j_1 \cdots j_k}$ матрицы A множителем $(-1)^k$. Тогда коэффициент в $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ при t^{n-k} равен:

$$(-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} M_{j_1 \cdots j_k}$$

где $M_{j_1 \cdots j_k}$ – миноры матрицы A, т.е. числовой матрицы, не содержащей t.

Задача 40.15 б). Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.
Вычислим коэффициенты характеристического многочлена:

- коэффициент при t^2: $-tr\,A = -6$
- коэффициент при t: сумма миноров порядка 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 + 0 = 12$$

- свободный член:

$$(-1)^n det\,A = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

Получаем

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8$$

Найдем корни $\chi_{\mathcal{A}}(t)$: заметим, что $\lambda_1 = 2$ является корнем. Поделив на $t - 2$, получим

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-2)(t^2 - 4t + 4) = (t-2)^3,$$

откуда $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Найдем собственные векторы:

$$V_\lambda = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_1 = (0,0,1), v_2 = (1,2,0)$. Получаем

$$V_\lambda = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = < v_1, v_2 >$$

Тогда собственные векторы – это $\lambda v_1 + \mu v_2 = (\mu, 2\mu, \lambda)$, кроме $\lambda = \mu = 0$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_{1,2,3} = 2$, собственные векторы: $(\mu, 2\mu, \lambda)$, где $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$.

Задача 40.16 г). Выяснить, можно ли данную матрицу привести к диагональному виду путем перехода к новому базису над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.
Найдем собственные значения: воспользуемся тем, что λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ вырожден. Заметим, что

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и $rk\,(A - 2E) = 1$. Таким образом, $\lambda = 2$ – собственное значение геометрической кратности 3, так как $n(\lambda) = dim\,V_\lambda = dim\,Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = n - rk\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$.

Так как алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности, то $m(2) \geq 3$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственное значение λ_4 найдем из условия $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = tr\,\mathcal{A}$ (сравниваем коэффициенты при t^{n-1} в $\chi_{\mathcal{A}}(t)$), откуда $\lambda_4 = -2$, т.е. $m(2) = 3$. Для $\lambda_4 = -2$: $m(-2) = n(-2) = 1$.

Таким образом, A диагонализуема над $\mathbb{R}$ (у характеристического многочлена n корней с учетом кратности и алгебраическая кратность каждого корня равна геометрической кратности).

Семинар 8. Коммутирующие семейства линейных операторов. Нахождение корневых подпространств. Корневое разложение инвариантного подпространства.

Задача 40.25. Доказать, что в n-мерном комплексном пространстве всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет инвариантное подпространство U размерности $n-1$.

Решение.
Пусть $Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \neq \{0\}$, тогда $dim\,Im\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = n - dim\,Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) < n$ и $Im\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \subset V$. Воспользуемся тем, что если подпространство содержит образ линейного оператора, то оно инвариантно относительно этого линейного оператора.

Выберем подпространство U таким образом, чтобы $Im\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \subseteq U \subset V$, тогда U инвариантно относительно $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$. Но тогда U инвариантно и относительно $\mathcal{A}$: действительно, рассмотрим $u \in U$, тогда $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})u = u' \in U$, откуда $\mathcal{A}u = (\lambda u + u') \in U$.

Другой вариант решения.
Всякое $(n-1)$-мерное подпространство n-мерного пространства (т.е. гиперплоскость) задаётся ядром некоторой линейной функции. Рассмотрим $\mathcal{A}^* \in L(V^*)$ - оператор, сопряжённый к $\mathcal{A}$. Это тоже оператор в n-мерном комплексном пространстве, поэтому существует ненулевая $\omega \in V^*$, такая что $\mathcal{A}^*\omega = \lambda\omega$. Проверим, что $U = Ker\,\omega$ – инвариантное подпространство (относительно $\mathcal{A}$): пусть $u \in U$, тогда

$$< \omega \mid \mathcal{A}u > = < \mathcal{A}^*\omega \mid u > = < \lambda\omega \mid u > = \lambda < \omega \mid u > = 0 \Rightarrow \mathcal{A}u \in U$$

■

Задача. Пусть $\mathcal{R} \in L(V)$, $\mathcal{R}^2 = \mathcal{E}$. Доказать, что V раскладывается в прямую сумму двух собственных подпространств, соответствующих собственным значениям ± 1.

Решение.
Если λ – собственное значение оператора, а v – собственный вектор оператора $\mathcal{R}$, то с одной стороны, $\mathcal{R}^2 v = \mathcal{E}v = v$, а с другой стороны, $\mathcal{R}^2 v = \mathcal{R}(\lambda v) = \lambda^2 v$, откуда $v = \lambda^2 v$, т.е. $\lambda = \pm 1$. Таким образом, собственных подпространств не больше двух:

$$V_{\pm 1} = Ker\,(\mathcal{R} \mp \mathcal{E})$$

Эти подпространства линейно независимы, т.е. $V \supseteq V_1 \oplus V_{-1}$. Поймем, почему их прямая сумма равна V: допустим, для каждого $v \in V$ существует единственное разложение $v = u + w$, где $u \in V_1$, $w \in V_2$. Применим к обеим частям равенства оператор $\mathcal{R}$, получим:

$$\mathcal{R}v = \mathcal{R}u + \mathcal{R}w = u - w$$

Тогда

$$\begin{cases} v = u + w \\ \mathcal{R}v = u - w \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = \frac{1}{2}(v + \mathcal{R}v) \\ w = \frac{1}{2}(v - \mathcal{R}v) \end{matrix}$$

Проверка (применим $\mathcal{R}$) показывает, что так определенные векторы u и w действительно лежат в V_1 и V_{-1} соответственно. ■

Задача 40.8. Доказать, что для любой (быть может, бесконечной) совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного комплексного пространства:
а) существует общий собственный вектор;
б) существует базис, в котором матрицы всех этих операторов верхние треугольные.

Решение.
Решим эту задачу, используя результат задачи 40.7: подпространство $V_\lambda(\mathcal{A}) = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\}$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}_i \in L(V)$ и $\forall i, j$ выполнено $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i$.

а) Докажем индукцией по размерности V.

База индукции: $dim\, V = 1$ - очевидно, так как в одномерном пространстве все операторы скалярны, и любой ненулевой вектор будет для них собственным (общим).

Шаг индукции:
1) Если все $\mathcal{A}_i$ скалярны, т.е. имеют вид $\mathcal{A}_i = \lambda_i\mathcal{E}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, тогда в качестве общего собственного вектора подойдет любой ненулевой вектор $v \in V$.

2) Пусть $\mathcal{A}_i$ не скалярен и λ – собственное значение $\mathcal{A}_i$. Тогда по задаче 40.7, подпространство $V_\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно $\mathcal{A}_j \subset V$, $\forall j$. Применим предположение индукции к $\mathcal{A}_j\big|_{V_\lambda(\mathcal{A})}$ – для этих операторов существует общий собственный вектор, значит, он будет собственным и для всех $\mathcal{A}_i$.

б) Докажем индукцией по размерности V.

База индукции: $dim\, V = 1$ - очевидно, так как в одномерном пространстве все операторы скалярны, и все их матрицы верхнетреугольны.

Шаг индукции:

Выберем вектор v из пункта а) в качестве первого базисного вектора e_1 и дополним его до базиса: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. В этом базисе матрицы $\mathcal{A}_i$ будет иметь вид:

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \overline{A}_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

где $\overline{A}_i$ – матрица фактороператора $(\mathcal{A}_i)_{V/<v>}$ в базисе $e_2 + < v >, \dots, e_n + < v >$. Пространство, в котором действует оператор $(\mathcal{A}_i)_{V/<v>}$ имеет размерность $n-1$, значит, по предположению индукции, в нем можно выбрать базис, в котором матрица $\overline{A}_i$ будет верхнетреугольной.

Заменим базис в $V/< v >$ на $e_2' + < v >, \dots, e_n' + < v >$ так, чтобы матрицы $\overline{A}_i$ были верхнетреугольными, тогда в базисе $e_1, e_2', \dots, e_n'$ матрицы A_i также будут верхнетреугольными. ■

Упражнение. Доказать, что для любого семейства коммутирующих диагонализуемых линейных операторов существует базис, в котором матрицы всех этих операторов диагональны (см. решение на следующем семинаре).

Задача 40.35 а). Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.
Заметим, что матрица A вырождена (вторая строка является полусуммой двух других), следовательно, $\lambda_1 = 0$ – собственное значение. Для нахождения λ_2 и λ_3 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни (см. предыдущий семинар), получим:

$$\begin{cases} tr\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

откуда $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$.

Получаем два корневых подпространства: V^0, $dim\, V^0 = 2$ и V^1, $dim\, V^1 = 1$. Найдем их.

$\lambda = 0$:

$$(A - \lambda E)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили $rk\ (A-\lambda E)^2 = 1$. Найдем базис $V^0 = Ker\ \mathcal{A}^2$:

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

ФСР: $v_1 = (0,1,3), v_2 = (1,0,-3)$. Тогда $V^0 = < v_1, v_2 >$.

$\lambda = 1$:

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем базис $V^1 = Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_3 = (1,1,1)$. Тогда $V^1 = < v_3 >$.

Ответ: собственные значения: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$, корневые подпространства: $V^0 = < v_1, v_2 >$, где $v_1 = (0,1,3), v_2 = (1,0,-3)$, и $V^1 = < v_3 >$, где $v_3 = (1,1,1)$.

Корневое разложение инвариантного подпространства.

Пусть $\mathcal{A} \in L(V)$, найдем инвариантное подпространство $U \subseteq V$. Пусть $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители (что равносильно тому, что пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$):

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}.$$

Тогда

$$U = U^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U^{\lambda_s},$$

т.е. $U^{\lambda_i} = U \cap V^{\lambda_i}$.

Действительно, матрица оператора $\mathcal{A}$ в согласованном базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A|_U & C \\ \hline 0 & A|_{V/U} \end{array}\right)$$

Следовательно, характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ будет иметь вид:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}|_U}(t) \cdot \chi_{\mathcal{A}_{V/U}}(t)$$

Так как $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители, то и $\chi_{\mathcal{A}|_U}(t)$ разлагается на линейные множители, откуда следует, что $U = U^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U^{\lambda_s}$.

Таким образом, для нахождения инвариантных подпространств для оператора $\mathcal{A}$, достаточно найти их в каждом корневом подпространстве (т.е. найти U^{λ_i} внутри V^{λ_i}), а затем взять прямую сумму $U^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U^{\lambda_s}$.

Семинар 9. Нахождение жордановой нормальной формы и жорданова базиса.

Задача 40.38. Доказать, что всякое корневое подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

Решение.
Пусть $v \in V^{\lambda}(\mathcal{A})$ – докажем, что и $\mathcal{B}v \in V^{\lambda}(\mathcal{A})$ при условии, что $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, т.е. докажем, что если $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k v = 0$, то и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \mathcal{B}v = 0$.

Заметим, что из условия $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ следует, что оператор $\mathcal{B}$ перестановочен с $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$: $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, а значит, $\mathcal{B}$ будет перестановочен и с $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$: $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$. Тогда если $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k v = 0$, то и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \mathcal{B}v = \mathcal{B}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k v = \mathcal{B}(0) = 0$, т.е. $\mathcal{B}v \in V^{\lambda}(\mathcal{A})$. ■

Задача 40.27. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном векторном пространстве имеет в некотором базисе диагональную матрицу с различными элементами на диагонали. Найти все подпространства, инвариантные относительно $\mathcal{A}$.

Решение.
Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j$$

В этом случае геометрическая кратность любого собственного значения совпадает с его алгебраической кратностью, поэтому корневые подпространства совпадают с собственными подпространствами, и все они имеют размерность 1:

$$\forall i\colon\ V_{\lambda_i} = V^{\lambda_i} = < v_i >$$

Тогда если $U \subset V$ – инвариантное подпространство, то $U = < e_{i_1}, \dots, e_{i_k} >$ - см. тему “корневое разложение инвариантного подпространства” на прошлом семинаре.

Ответ: $U = < e_{i_1}, \dots, e_{i_k} >$.

Задача 40.29. Найти в трехмерном векторном пространстве все подпространства, инвариантные относительно линейного оператора с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.
Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Корневые подпространства: $V^1 = < v_1 >$, где $v_1 = (2, 2, -1)$, и $V^2 = < v_2, v_3 >$, где $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$.

Если $U \subset V$ – инвариантное подпространство, то $U = U^1 \oplus U^2$, где $U^{\lambda_i} = U \cap V^{\lambda_i}$ (см. тему "корневое разложение инвариантного подпространства" на прошлом семинаре). Таким образом, решение задачи сводится к нахождению инвариантных подпространств в корневых подпространствах.

U^1: в качестве U^1 можно взять $\{0\}$, либо V^1.
U^2:

$$dim\, U^2 = \begin{cases} 0 \Rightarrow U^2 = \{0\} \\ 1 \Rightarrow U^2 = < \alpha v_2 + \beta v_3 >, \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0) \\ 2 \Rightarrow U^2 = V^2 \end{cases}$$

- случаи $dim\, U^2 = 0$ и $dim\, U^2 = 2$ тривиальны, случай $dim\, U^2 = 1$ разбирается так: заметим, что $V^2 = V_2$, т.е. корневое подпространство совпадает с собственным. Тогда в V^2 любой ненулевой вектор является собственным, а значит, порождает одномерное инвариантное подпространство, т.е. в качестве U^2 можно взять подпространство, порожденное любым ненулевым вектором из $< v_2, v_3 >$. ■

Задача 40.33. Доказать, что если для операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$ выполняются равенства $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, то в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Решение.
На прошлом семинаре мы обсуждали, что если оператор удовлетворяет условию $\mathcal{R}^2 = \mathcal{E}$, то V раскладывается в прямую сумму двух собственных подпространств, соответствующих собственным значениям ± 1. Отсюда, в частности, следует, что все такие операторы обратимы, поэтому оператор $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ обратим.

Пусть $(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E})v = 0$, т.е. v – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$ оператора $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$. Домножая это равенство слева на $\mathcal{A}$, получаем $\mathcal{B}v = \lambda\mathcal{A}v$. Отсюда следует, что $< v, \mathcal{A}v > = < v, \mathcal{B}v >$.

Обозначим $\mathcal{A}v = u$ и заметим, что $\mathcal{A}u = v$, т.е. векторы v и $\mathcal{A}v$, порождающие подпространство $< v, \mathcal{A}v >$, переставляются между собой под действием оператора $\mathcal{A}$, а значит, любая их линейная комбинация под действием оператора $\mathcal{A}$ будет переходить в линейную комбинацию из $< v, \mathcal{A}v >$, т.е. $< v, \mathcal{A}v >$ - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$. Аналогично получаем ,что $< v, \mathcal{B}v >$ - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{B}$.

Таким образом, $U = < v, \mathcal{A}v > = < v, \mathcal{B}v >$ - одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. ■

Задача. Доказать, что для любого семейства коммутирующих диагонализуемых линейных операторов существует базис, в котором матрицы всех этих операторов диагональны.

Решение.
Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}_i \in L(V)$ и $\forall i, j$ выполнено $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i$, причем $\forall i$ оператор $\mathcal{A}_i$ диагонализуем.

Докажем утверждение задачи индукцией по размерности V.

База индукции: $dim\, V = 1$ - очевидно, так как в одномерном пространстве все операторы скалярны, и все их матрицы диагональны.

Шаг индукции:
1) Если все $\mathcal{A}_i$ скалярны, т.е. имеют вид $\mathcal{A}_i = \lambda_i\mathcal{E}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, тогда подойдет любой базис.

2) Пусть $\mathcal{A}_i$ не скалярен и λ – собственное значение $\mathcal{A}_i$. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму корневых (в данном случае они же собственные) подпространств оператора $\mathcal{A}_i$:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

Так как $\mathcal{A}_i$ не скалярен, то $s > 1$ и $dim\, V_{\lambda_k} < dim\, V$. Как следует из задачи 40.38, каждое из V_{λ_k} инвариантно относительно всех $\mathcal{A}_j$. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям из задачи 40.8 (см. прошлый семинар), получаем, что матрицы операторов $\mathcal{A}_j\big|_{V_{\lambda_k}}$ диагонализуемы. Применим к $\mathcal{A}_j\big|_{V_{\lambda_k}}$ предположение индукции – существует базис, в котором матрицы всех этих операторов диагональны, следовательно, в базисе, являющимся объединением базисов для всех $\mathcal{A}_j\big|_{V_{\lambda_k}}$ по всем V_{λ_k}, будут диагональны и матрицы операторов $\mathcal{A}_i$, $\forall i$. ■

Приведение линейных операторов к жордановой нормальной форме.

Пусть $\mathcal{A} \in L(V)$, $dim\, V < \infty$, и характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ разлагается на линейные множители над основным полем.

1) Находим собственные значения и раскладываем пространство V в прямую сумму корневых подпространств:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}$$

Тогда в согласованном базисе (т.е. составленном из базисов подпространств V^{λ_i}) оператор $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$

2) Разбираемся, как устроен каждый блок – выберем $\lambda = \lambda_i$ и поймем, как устроен $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$. Как мы знаем, $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \lambda\mathcal{E} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ - нильпотентный оператор. Пространство V^λ может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств для оператора $\mathcal{B}$:

$$V^\lambda = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

Схема действия $\mathcal{B}$ на V^λ задается диаграммой Юнга:

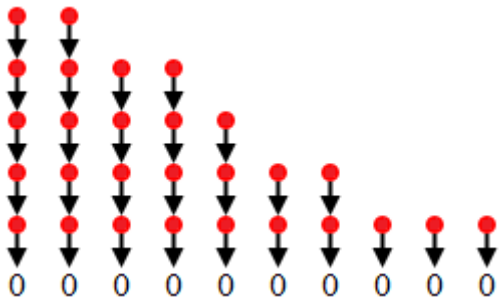

Рис. 9.1. Диаграмма Юнга

Здесь точки обозначают векторы из жорданова базиса, а стрелки обозначают то, как на них действует оператор $\mathcal{B}$.
С помощью такого рода диаграмм нильпотентный оператор задается однозначно. Например:

- высота строки на диаграмме Юнга соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора, являющегося линейной комбинацией базисных векторов, определяется как максимальная высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом
- i-ый столбец соответствует жорданову циклу – базису U_i
- ядро оператора $\mathcal{B}^k$ – это линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k

В базисе V^λ, составленном из базисов U_i – жордановых циклов (такой базис называется жордановым), матрица $\mathcal{B}$ имеет блочно-диагональный вид, где в качестве блоков выступают жордановы клетки:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p} \end{pmatrix}$$

где $k_i = dim\, U_i$.
Такая матрица называется нильпотентной жордановой матрицей. Матрица оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda} = \lambda\mathcal{E} + \mathcal{B}$ получается из нее прибавлением λ к диагональным элементам.

3) Собираем из всех блоков $\mathcal{A}|_{V^{\lambda_i}}$ матрицу оператора $\mathcal{A}$:

$$J(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

- жорданова матрица, где

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

- жорданова клетка размера $k \times k$ с собственным значением λ.

Осталось понять, как в пункте 2) найти жорданов базис и построить диаграмму Юнга. Пусть $n(\lambda)$ – количество жордановых клеток в $J(\mathcal{B})$ с собственным значением λ. Заметим, что $n(\lambda)$ равно количеству столбцов в диаграмме Юнга, т.е. количеству базисных векторов в нижней строке диаграммы. Линейная оболочка этих векторов – это ядро оператора $\mathcal{B}$. Имеют место равенства:

$$n(\lambda) = dim\, Ker\, \mathcal{B} = dim\, Ker\, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = n - r_1(\lambda),$$

где $r_k(\lambda) = rk\, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k$.

Пусть $n_k(\lambda)$ – количество жордановых клеток размера $k \times k$ в $J(\mathcal{B})$ с собственным значением λ. Заметим, что жордановы клетки размера $k \times k$ соответствуют столбцам диаграммы Юнга высоты k. Так как ядро оператора $\mathcal{B}^k$ – это линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k, то

$$n_k(\lambda) = dim\, Ker\, \mathcal{B}^k - dim\, Ker\, \mathcal{B}^{k-1} - (dim\, Ker\, \mathcal{B}^{k-1} - dim\, Ker\, \mathcal{B}^k)$$

Таким образом,

$$n_k(\lambda) = 2dim\ Ker\ \mathcal{B}^k - dim\ Ker\ \mathcal{B}^{k-1} - dim\ Ker\ \mathcal{B}^{k+1}$$

Так как $Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \subseteq V^\lambda$, откуда $Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k = Ker\ \mathcal{B}^k$, $\forall k$, то

$$n_k(\lambda) = 2dim\ Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k - dim\ Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k-1} - dim\ Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{k+1}$$

Так как $dim\ Ker\ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k = n - r_k(\lambda)$, то эту формулу можно переписать так:

$$n_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda)$$

Построение жорданова базиса рассмотрим на примерах.

Задача 41.1 е). Найти жорданову форму матрицы и жорданов базис:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение.
Заметим, что $\lambda_1 = 1$ является собственным значением (матрица $A - \lambda E$ вырождена, так как у нее есть нулевой столбец). Найдем ранг этой матрицы:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем $r_1(1) = rk\ (A - E) = 2$. Отсюда следует, что и $\lambda_2 = 1$.

Для нахождения λ_3 и λ_4 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни (см. семинар 7), получим:

$$\begin{cases} tr\ A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ det\ A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

$tr\ A = 4$, найдем $det\ A$ (разложим по третьему столбцу):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -12 & 19 \\ 0 & -7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 19 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

Тогда

$$\begin{cases} tr\ A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ det\ A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \lambda_3\lambda_4 = 1 \end{cases},$$

откуда $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ и $V = V^\lambda$ – все пространство V является корневым. Количество жордановых клеток с собственным значением λ: $n(\lambda) = n - r_1(\lambda)$, количество жордановых клеток размера $k \times k$: $n_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda)$. Получаем:

$$n(1) = n - r_1(1) = 4 - 2 = 2 \text{ – две жордановых клетки.}$$

Для того, чтобы найти $n_k(\lambda)$, найдем $r_i(\lambda)$:

$$r_0(1) = 4$$
$$r_1(1) = 2$$

Заметим, что $rk\ (A-E)^2 = rk\ (A'(A-E))$, где A' - улучшенный ступенчатый вид матрицы $A - E$, поэтому $r_2(1) = rk\ (A-E)^2 = rk\ (A'(A-E))$.

$$A'(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ -1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$r_2(1) = 1$$

Заметим, что $rk\ (A-E)^3 = rk\ (A''(A-E))$, где A'' - улучшенный ступенчатый вид матрицы AA', поэтому $r_3(1) = rk\ (A-E)^3 = rk\ (A''(A-E))$.

$$A''(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$r_3(1) = 0$$

Тогда

$$n_1(\lambda) = r_0(\lambda) - 2r_1(\lambda) + r_2(\lambda) = 1$$
$$n_2(\lambda) = r_1(\lambda) - 2r_2(\lambda) + r_3(\lambda) = 0$$
$$n_3(\lambda) = r_2(\lambda) - 2r_3(\lambda) + r_4(\lambda) = 1$$

- одна жорданова клетка размера 1×1 и одна жорданова клетка размера 3×3. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую жорданову форму:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем жорданов базис. Диаграмма Юнга для оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{E}$:

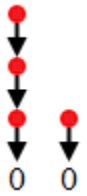

Рис. 9.2. Диаграмма Юнга для оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{E}$

Начинаем построение жорданова базиса с “самого высокого” вектора диаграммы Юнга (для нашей жордановой формы это e_4) – он не должен обнулять матрицу $(A - E)^2$, что равносильно тому, что он не должен обнулять матрицу $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Выберем $e_4 = (1, 0, 0, 0)$. Тогда

$$e_3 = (A - E)e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = (A - E)e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Осталось найти e_1. Это вектор, который дополняет e_2 до базиса $Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$, поэтому в качестве e_1 можно взять любой вектор из $Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$, линейно независимый с e_2, например, $e_1 = (0, 0, 1, 0)$.

Ответ: $J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, жорданов базис: $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (3, 1, 3, 1)$, $e_3 = (0, -1, 0, -1)$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$.

Семинар 10. Приложения ЖНФ: критерий нильпотентности в терминах собственных значений, вычисление циркулянта, оценка снизу размерности централизатора матрицы.

Задача 41.5 а). Найти жорданову форму матрицы A^2, если A имеет жорданову форму $J(A)$.

Решение.
Пусть в жордановом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $J(A)$:

$$J(A) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Тогда в этом же базисе оператор $\mathcal{A}^2$ имеет матрицу $J^2(A)$:

$$J^2(A) = \begin{pmatrix} J^2_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J^2_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Посмотрим, что происходит при возведении в квадрат одной жордановой клетки:

$$J_k^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & & 0 \\ \cdots & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \\ & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \cdots & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & 0 & & \cdots & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & & & \cdots & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

- получившаяся матрица уже не является жордановой клеткой и не является жордановой матрицей. Найдем ее жорданову нормальную форму. Так как матрица диагональна, то ее собственные значения – это элементы, стоящие на диагонали, т.е. собственное значение одно – это λ^2. Найдем количество жордановых клеток, соответствующих этому собственному значению:

$$n(1) = k - r_1(\lambda^2) = k - rk\,(J_k^2(\lambda) - \lambda^2 E) = \begin{cases} 1, \text{при } \lambda \neq 0 \\ 2, \text{при } \lambda = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\lambda \neq 0$ ЖНФ матрицы $J_k^2(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \cdots & & & \\ \cdots & \lambda^2 & 1 & \cdots & \mathbf{0} & \\ & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda^2 & 1 & \cdots \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \lambda^2 & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Если $\lambda = 0$, то жордановых клеток будет две, размера $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ и $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$:

$$\left(\begin{array}{c|c} J_{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & J_{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} \end{array}\right)$$

ЖНФ матрицы A^2 будет состоять из ЖНФ блоков $J_k^2(\lambda)$. ■

Задача 41.7. Доказать, что всякая периодическая комплексная матрица подобна диагональной матрице, и найти вид этой диагональной матрицы.

Решение.
Матрицы A и A' называются подобными, если существует невырожденная матрица C, такая что $A' = C^{-1}AC$ (другими словами, это матрицы одного и того же линейного оператора, но в разных базисах).

Матрица называется периодической, если некоторая ее степень равна единичной матрице.

Найдем вид диагональной матрицы, которой подобна периодическая комплексная матрица. Пусть $A^m = E$. Если $A' = C^{-1}AC$, где $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица, то

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix} = (A')^m = C^{-1}A^mC = E,$$

откуда $\lambda_1^m = \cdots = \lambda_n^m = 1$, т.е. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни степени m из единицы.

И обратно – матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни некоторой степени из единицы,

является периодической с периодом, равным НОК этих степеней.

Кроме того, заметим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – это собственные значения матрицы A.

Для того, что доказать, что всякая периодическая матрица подобна диагональной, перейдем к жордановой нормальной форме $J(A)$: при возведении матрицы A в степень m в ту же степень возводятся и блоки, из которых состоит $J(A)$. Должно выполняться условие:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \mathbf{0} & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \cdots & & & \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ast & \\ & \cdots & \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda^m & \ddots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & m\lambda^{m-1} \\ & & & & \cdots & \lambda^m \end{pmatrix} = E$$

Отсюда следует, что размер жордановых клеток должен быть равен 1×1, т.е. матрица A подобна диагональной матрице. ■

Задача 41.17. В пространстве комплексных полиномов от x, y степени не выше n действует оператор $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. Найти жорданову форму $\mathcal{A}$.

Решение.
Схематически базис пространства комплексных полиномов от x, y степени не выше n можно изобразить следующим образом:

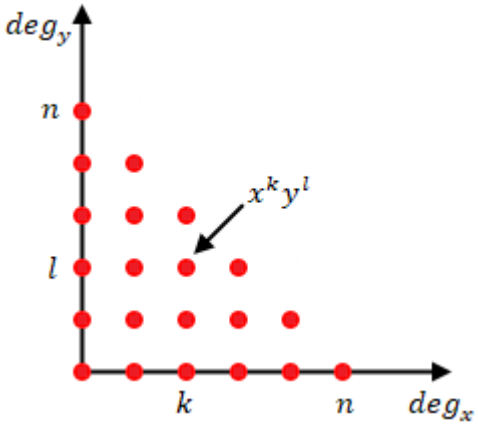

Рис. 10.1. К задаче 41.17

В этом базисе оператор дифференцирования $\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ действует по такой схеме:

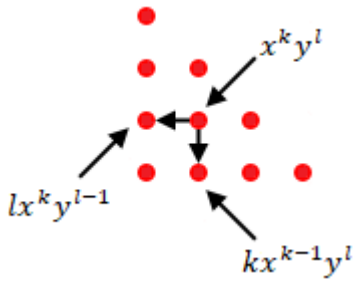

Рис. 10.2. К задаче 41.17

Понятно, что этот оператор будет нильпотентным, так как каждый раз после его применения степень базисного полинома понижается на единицу. Все его собственные значения равны нулю.

Размерность пространства V, в котором действует $\mathcal{A}$:

$$dim\, V = 1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Образ оператора $\mathcal{A}^k$ – это подпространство комплексных полиномов от x, y степени не выше $n-k$:

$$Im\,(\mathcal{A}^k) = \mathbb{C}[x,y]_{\leq n-k}$$

Тогда

$$r_k(0) = dim\, \mathbb{C}[x,y]_{\leq n-k} = 1 + 2 + \cdots + (n-k+1) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$$

Количество жордановых клеток с данным размером:

$$n_k(0) = r_{k-1}(0) - 2r_k(0) + r_{k+1}(0) = 1$$

Таким образом, для каждого k от 1 до $n+1$ существует ровно одна нильпотентная жорданова клетка соответствующего размера. В сумме получается размерность V, т.е. никаких других жордановых клеток нет. ■

Задача 41.8. Доказать, что матрица A нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее собственные значения равны нулю.

Решение.
Заметим, что свойство нильпотентности матрицы не зависит от выбора базиса (так как это свойство линейного оператора, задающего матрицу), поэтому можно считать, что матрица A приведена к жордановой нормальной форме:

$$J(A) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Так как при возведении $J(A)$ в степень каждый блок отдельно возводится в степень, то $J(A)$ нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая жорданова клетка $J_k(\lambda)$ этой матрицы будет нильпотентна, но это условие равносильно тому, что $\lambda = 0$ (следует из вида матрицы $J_k(\lambda)$):

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

■

Задача 15.3. Доказать, что циркулянт

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

равен $f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$, где $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – все корни степени n из единицы.

Решение.
Заметим, что имеет место равенство:

$$A = a_1E + a_2B + a_3B^2 + \cdots + a_nB^{n-1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица линейного оператора $\mathcal{B}$, который осуществляет циклический сдвиг базисных векторов (первый базисный вектор переходит в последний, второй в первый и т.д.):

$$e_1 \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} e_2 \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \cdots \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} e_{n-1} \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} e_n \overset{\mathcal{B}}{\leftarrow} e_1$$

Тогда и для линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеет место равенство:

$$\mathcal{A} = a_1\mathcal{E} + a_2\mathcal{B} + a_3\mathcal{B}^2 + \cdots + a_n\mathcal{B}^{n-1}$$

Заметим, что оператор $\mathcal{B}$ - периодический: $\mathcal{B}^n = \mathcal{E}$, поэтому (см. задачу 41.7) в некотором базисе матрица $\mathcal{B}$ будет диагональной, причем собственные значения оператора $\mathcal{B}$ – это корни степени n из единицы. Поймем, что каждый корень степени n из единицы будет собственным значением для оператора $\mathcal{B}$.

Заметим, что $v_1 = e_1 + \cdots + e_n$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению 1. Пусть $\varepsilon^n = 1$, рассмотрим вектор $v_\varepsilon = e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^2 e_3 + \cdots + \varepsilon^{n-1}e_n$, тогда $\mathcal{B}v_\varepsilon = e_n + \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}e_{n-1} = \varepsilon v_\varepsilon$, то есть, v_ε – собственный вектор с собственным значением ε. Всего получаем n собственных векторов с различными собственными значениями $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – все корни степени n из единицы. Отсюда следует, что эти собственные векторы образуют базис. В этом базисе $(v_1, v_\varepsilon, \dots, v_{\varepsilon^{n-1}})$ матрица оператора $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим многочлен

$$f(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}$$

Тогда в базисе $(v_1, v_\varepsilon, \dots, v_{\varepsilon^{n-1}})$ матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varepsilon) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & f(\varepsilon^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$det\ A = det\ A' = f(1)f(\varepsilon)\cdots f(\varepsilon^{n-1}) = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – все корни степени n из единицы. ■

Задача 41.13. Доказать. что множество линейных операторов в n-мерном комплексном векторном пространстве, перестановочных с данным оператором $\mathcal{A}$, является векторным пространством размерности $\geq n$.

Решение.
Понятно, что операторы, перестановочные с $\mathcal{A}$, образуют подпространство в $L(V)$ – линейная комбинация таких операторов снова будет перестановочна с $\mathcal{A}$. Докажем, что размерность этого подпространства будет $\geq n$.

Обозначим это подпространство $U = \{\mathcal{B} \in L(V) \mid \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}\}$ – оно называется централизатором оператора $\mathcal{A}$ и иногда обозначается $Z(\mathcal{A})$. В жордановом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

где

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & \mathbf{0} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + J_k$$

Заметим, что матрицы

$$J_k^m = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\ddots}^{\mathrm{m}} & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \\ & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & 1 \\ & & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & \ddots \\ & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где $m = 1, \dots, k-1$, лежат в централизаторе $J_k(\lambda)$. При этом очевидно, что они линейно независимы. Отсюда следует, что размерность централизатора жордановой клетки размера $k \times k$ не меньше k. Тогда размерность централизатора $\mathcal{A}$ не меньше, чем сумма размерностей централизаторов всех жордановых клеток, то есть, не меньше n. ■

Семинар 11. Извлечение корней из матриц. Вычисление значений аналитических функций от матриц.

Задача 41.45. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы $A \in Mat_n(\mathbb{C})$. Доказать, что:
а) для любого $k \in \mathbb{N}$:

$$tr\ A^k = \lambda_1^k + \cdots \lambda_n^k$$

б) коэффициенты характеристического многочлена матрицы A являются многочленами от $tr\ A, \dots, tr\ A^n$;

в) если $tr\ A = tr\ A^2 = \cdots = tr\ A^n = 0$, то матрица A нильпотентна.

Решение.
Обозначим $s_k(t_1, \dots, t_n) = t_1^k + \cdots t_n^k$. Имеют место следующие формулы (Ньютона):

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1(-1)^k k\sigma_k = 0$$

С помощью формул Ньютона можно рекуррентно выражать степенные суммы через элементарные симметрические многочлены, и наоборот. Потому если $s_k = 0$ для $k = 1, \dots, n$, то и все однородные многочлены от s_k будут равны нулю, в частности, $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда и $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ (следует из формул Виета).

Таким образом, получаем цепочку равносильностей:

$$A \text{ нильпотентна} \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \cdots \lambda_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \cdots \lambda_n^n = 0 \end{cases}$$

Осталось заметить, что

$$tr\ A^k = \lambda_1^k + \cdots \lambda_n^k$$

- если матрица записана в жордановой форме, то это очевидно, но $tr\ A$ – это инвариант, не меняющийся при переходе к другому базису, следовательно, это верно для любой матрицы A. Таким образом,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \cdots \lambda_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \cdots \lambda_n^n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow tr\ A^k = \lambda_1^k + \cdots \lambda_n^k, \qquad k = 1, \dots, n$$

■

Задача 41.15. Доказать, что если матрицы A и B удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.

Решение.
Без ограничения общности можно считать, что B – жорданова матрица:

$$B = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Так как $tr\ (AB) = tr\ (BA)$, то из равенства $AB - BA = B$ следует, что $tr\ B = 0$. Также

$$AB^k = ABB^{k-1} = (BA + B)B^{k-1} = BAB^{k-1} + B^k = B^2AB^{k-2} + 2B^k = \cdots = B^kA + kB^k$$

Тогда

$$AB^k - B^kA = kB^k$$

Отсюда следует, что $\forall k$:

$$tr\ (AB^k - B^kA) = 0 \Leftrightarrow tr\ B^k = 0$$

Поэтому (см. задачу 41.45) матрица B нильпотентна. ■

Задача 41.20. Доказать, что для любой невырожденной квадратной комплексной матрицы A и любого натурального числа m уравнение $B^m = A$ имеет решение.

Решение.
Матрицы A и B можно рассматривать как матрицы соответствующих линейных операторов. Так как для операторов выполнение условия $B^m = A$ не зависит от выбора базиса, можно считать, что A и B – жордановы матрицы с блоками одинакового размера. Таким образом, задача свелась к решению уравнения $B^m = A$, где A и B – жордановы блоки ($\lambda \neq 0$):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \lambda & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \lambda & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Рассмотрим

$$B' = \begin{pmatrix} \mu & 1 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \mu & 1 & \cdots & \\ & & \cdots & \mu & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 1 \\ & & & & \cdots & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow (B')^m = \begin{pmatrix} \mu^m & m\mu^{m-1} & \cdots & & & * \\ \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & \cdots & \mu^m & m\mu^{m-1} & \cdots & \\ & & \cdots & \mu^m & \ddots & \cdots \\ & 0 & & \cdots & \ddots & m\mu^{m-1} \\ & & & & \cdots & \mu^m \end{pmatrix}$$

где $\mu^m = \lambda$. Тогда нормальная жорданова форма матрицы $(B')^m$ будет матрицей A – действительно, у матрицы $(B')^m$ одно собственное значение ($\mu^m = \lambda$), и одна жорданова клетка, соответствующая этому собственному значению (следует из того, что $rk\ ((B')^m - \lambda E) = n - 1$).

Тогда $B = C^{-1}B'C$, где C – матрица перехода от $(B')^m$ к ЖНФ $(B')^m$. ■

Посмотрим, как работает алгоритм из задачи 41.20 на конкретном примере.

Задача. Решить уравнение $B^2 = A$, где

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 18 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\chi_A(t) = t^2 - t \cdot tr\ A + det\ A = t^2 - 2t + 1$$

Корни $\chi_A(t)$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Количество жордановых клеток, соответствующих этому собственному значению:

$$n(1) = n - r_1(1) = n - rk\ (A - E) = 1$$

Тогда

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Жорданов базис:
Выберем в качестве e_2' вектор, который не обнуляет $A - E$:

$$e_2' = (1, 0) = e_1$$

Тогда

$$e_1' = (A - E)e_2' = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от (e_1, e_2) к (e_1', e_2'):

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем ($\mu = 1$):

$$(B'')^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЖНФ матрицы $(B'')^2$ – это матрица $J(A)$. Пусть $(B'')^2$ – это матрица оператора $(\mathcal{B}'')^2$ в некотором базисе (e_1'', e_2''). Тогда этот оператор действует на базисные векторы следующим образом:

$$e_1'' \mapsto e_1''$$
$$e_2'' \mapsto 2e_1'' + e_2''$$

В то же время оператор, матрицей которого является $J(A)$, действует на базисные векторы так:

$$e_1' \mapsto e_1'$$
$$e_2' \mapsto e_1' + e_2'$$

Отсюда следует, что

$$2e_1'' = e_1'$$
$$e_2'' = e_2'$$

и матрица перехода от (e_1'', e_2'') к (e_1', e_2'):

$$C' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$B' = (C')^{-1}B''C' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$B = CB'C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Случаю $\mu = -1$ соответствует матрица $-B$.

Ответ: $B = \pm\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычисление значений многочленов и аналитических функций от линейных операторов и матриц.

Пусть $f \in K[t]$, $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$. Определим $f(A)$:

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

Отметим, что $f(A) = r(A)$, где $r(A)$ – остаток при делении $f(A)$ на $\mu_A(A)$ – минимальный многочлен матрицы A:

$$\mu_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ – все различные собственные значения A, а k_i – максимальный размер жордановой клетки с собственным значением λ_i в $J(A)$. В частности, $deg\ \mu_A \leq n$.

Пусть $f(t) = \mu_A(t) \cdot q(t) + r(t)$. Тогда $f(t) - r(t)$ делится на $\mu_A(t)$, т.е. $f(t) - r(t)$ имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, кратность которых соответственно не ниже, чем $k_1, \dots, k_s$. Это условие равносильно тому, что

$$f^{(k)}(\lambda_i) = r^{(k)}(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, s, \quad \forall k = 0, \dots, k_i - 1$$

- на эти условия можно смотреть как на систему линейных уравнений $m \times m$ на коэффициенты многочлена $r(t)$. На практике иногда бывает удобнее решить эту систему, чем делить $f(t)$ на $q(t)$ с остатком.

Удивительно, но этот способ работает и для нахождения значения произвольной аналитической функции от матрицы.

Определение. Аналитическая функция f задается сходящимся степенным рядом:

$$f(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \cdots + c_n(t - t_0)^n + \cdots$$

$(t_0 \in \mathbb{C})$.

Если обозначить $f_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \cdots + c_n(t - t_0)^n$, то

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

Тогда

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} r_n(A)$$

- все многочлены $r_n(t)$ можно найти вышеуказанным способом (с помощью систем линейных уравнений). Коэффициенты этих многочленов стремятся к некоторым предельным значениям при $n \to \infty$ - это следует из формул Крамера для решения систем линейных уравнений (матрица коэффициентов одна и та же для всех $r_n(t)$), а также из того, что аналитические функции можно почленно дифференцировать.

Таким образом, $r_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} r(t)$, где $r(t)$ – многочлен, удовлетворяющий системе

$$f^{(k)}(\lambda_i) = r^{(k)}(\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, s, \quad \forall k = 0, \dots, k_i - 1$$

и

$$f(A) = r(A)$$

Семинар 12. Билинейные функции, их матрицы.

Задача. Вычислить:

$$A^{50} - A^{49} + A^{48} - \cdots + A^2 - A + E,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 6 & 2 & -8 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Решение.
Найдем минимальный многочлен матрицы A:

$$\mu_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ – все различные собственные значения A, а k_i – максимальный размер жордановой клетки с собственным значением λ_i в $J(A)$.

Найдем ЖНФ матрицы A: заметим, что $\lambda_1 = -1$ является собственным значением (матрица $A + E$ вырождена) и $r_1(-1) = rk\ (A + E) = 1$. Отсюда следует, что и $\lambda_2 = -1$.

Для нахождения λ_3 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни (см. семинар 7), получим:

$$tr\ A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2$$

откуда $\lambda_3 = 0$.
Тогда ЖНФ матрицы A:

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mu_A(t) = t(t + 1) = t^2 + t$$

Пусть

$$f(t) = t^{50} - t^{49} + t^{48} - \cdots + t^2 - t + 1$$

Поделим $f(t)$ на $\mu_A(t)$ с остатком: $f(t) = \mu_A(t) \cdot q(t) + r(t)$, где $r(t) = at + b$. Тогда

$$\begin{cases} f(-1) = r(-1) \\ f(0) = r(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 51 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -50 \\ b = 1 \end{cases}$$

Получаем

$$f(A) = r(A) = -50A + E = \begin{pmatrix} -249 & -150 & 400 \\ -300 & -99 & 400 \\ -300 & -150 & 451 \end{pmatrix}$$

Задача 42.19 в). Вычислить $exp\ A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем минимальный многочлен матрицы A – для этого найдем ЖНФ матрицы A: заметим, что $\lambda_1 = 0$ является собственным значением (матрица A вырождена – третья строка является полусуммой первых двух), $r_1(0) = rk\ A = 2$ и $n(0) = 1$.

Для нахождения λ_2 и λ_3 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни (см. семинар 7), получим:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr\ A \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

откуда $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

Тогда ЖНФ матрицы A:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\mu_A(t) = (t-1)t^2 = t^3 - t^2$$

Тогда $exp\ A = r(A)$, где $deg\ r(t) < 3$, т.е. $r(t) = at^2 + bt + c$ – многочлен, удовлетворяющий системе:

$$f^{(k)}(\lambda_i) = r^{(k)}(\lambda_i),\ \ \forall i = 1, \dots, s,\ \ \forall k = 0, \dots, k_i - 1$$

Получаем:

$$\begin{cases} r(1) = f(1) \\ r(1) = f(1) \\ r'(0) = f'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = e \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

откуда

$$r(t) = (e-2)t^2 + t + 1$$

Тогда

$$exp\ A = r(A) = (e-2)A^2 + A + E = \begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}$.

Задача 37.1+37.2 а), б), г). Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в соответствующих пространствах? В конечномерных пространствах выбрать базис и найти матрицы соответствующих билинейных функций.

а) $\beta(x,y) = x^T y$ ($x, y \in K^n$ – столбцы),
б) $\beta(X,Y) = tr\,(XY)$ ($X, Y \in Mat_n(K)$),
г) $\beta(X,Y) = det\,(XY)$ ($X, Y \in Mat_n(K)$).

Решение.
а) да (очевидно)

$$\beta(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Матрица $\beta(x,y)$ в стандартном базисе: $b_{ij} = \beta(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

б) да (проверяли ранее)

Матрица $\beta(X,Y)$ в базисе, состоящем из матричных единиц E_{ij}:

$$b_{ij,kl} = \beta(E_{ij}, E_{kl}) = tr\,(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} E_{il} \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k, \ \ i = l \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Таким образом, $b_{ij,ji} = 1$, остальные матричные элементы равны нулю. Упорядочим базисные векторы: $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}, \dots, E_{ij}, E_{ji}, \dots$ В этом базисе

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{1 \quad \cdots}^{n} & & & & & \\ \cdots \quad \ddots \quad \cdots & & & & \mathbf{0} & \\ \cdots \quad 1 & & & \cdots & & \\ \hline & \cdots & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \cdots & \\ & & & \cdots & \ddots & \cdots \\ & \mathbf{0} & & & \cdots & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

Количество блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

г) данная функция не является билинейной: например, $det\,(\lambda XY) = \lambda^n det\,(XY)$.

Задача 37.6 а). Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы ее матрица в старом базисе и формулы перехода:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2 \\ e_2' &= e_1 + e_3 \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Решение.

Матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица f в новом базисе:

$$B' = C^T B C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

Ответ: $B' = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$.

Постараемся понять, к какому наиболее простому виду можно привести матрицу билинейной функции – для этого поймем, какими инвариантами она обладает. Один из таких инвариантов – это ранг, поэтому естественно ставить задачу классификации билинейных функций фиксированного ранга.

Классификация билинейных функций с точностью до эквивалентности.

Билинейные функции будем называть эквивалентными, если существуют базисы, в которых они задаются одинаковыми матрицами.

1) $rk\,\beta = 0$. В этом случае $\beta = 0$.

2) $rk\,\beta = 1$. В этом случае все строки матрицы B пропорциональны:

$$B = \begin{pmatrix} a_1c_1 & a_1c_2 & \cdots & a_1c_n \\ a_2c_1 & a_2c_2 & \cdots & a_2c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nc_1 & a_nc_2 & \cdots & a_nc_n \end{pmatrix}$$

и

$$\beta(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = \alpha(x)\gamma(y)$$

То есть, если $rk\,\beta = 1$, то $\beta(x,y)$ раскладывается в произведение двух ненулевых линейных функций $\alpha(x)$ и $\gamma(y)$. Рассмотрим два случая:

а) $\alpha \sim \gamma$, т.е. $\gamma = \lambda\alpha$, $\lambda \in K, \lambda \neq 0$. Выберем в качестве первого базисного вектора в V^* функцию α, тогда в двойственном базисе в V: $\alpha(x) = x_1$ и $\beta(x,y) = \lambda x_1 y_1$. В этом случае

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что коэффициент λ определен неоднозначно (с точностью до умножения на квадрат).

б) $\alpha \nsim \gamma$. Выберем в качестве первых двух базисных векторов в V^* функции α и γ, тогда в двойственном базисе в V: $\alpha(x) = x_1, \gamma(y) = y_2$ и $\beta(x, y) = x_1 y_2$. В этом случае

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Семинар 13. Симметрические билинейные и квадратичные функции, поляризация. Приведение к каноническому виду алгоритмом Лагранжа и методом Якоби.

Задача 37.32. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные функции:
а) $f_1(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$f_2(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

б) $f_1(x,y) = x_1y_1 + ix_1y_2$,
$f_2(x,y) = 2x_1y_1 + (1+i)x_1y_2 + (1-i)x_2y_1 - ix_2y_2$.

Решение.
б) Выпишем матрицы этих функций:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -i \end{pmatrix}$$

Так как $rk\ F_1 = 1$, а $rk\ F_2 = 2$, то функции f_1 и f_2 не эквивалентны.

а) Выпишем матрицы этих функций:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как F_1 кососимметрическая, а F_2 таковой не является, то функции f_1 и f_2 не эквивалентны.

Ответ: а) нет, б) нет.

Задача 37.28. Пусть F – матрица невырожденной билинейной функции f на вещественном пространстве размерности n.
а) доказать, что при нечетном n матрица $-F$ не является матрицей функции f ни в каком базисе пространства V.
б) верно ли утверждение а) для четного n ?
в) верно ли утверждение а) при четном n для диагональной матрицы F ?

Решение.
а) Докажем от противного – пусть такой базис существует, тогда $-F = C^TFC$ для некоторой невырожденной матрицы C. Тогда $det\ (-F) = det\ (C^TFC)$, откуда $(det\ C)^2 = (-1)^n = -1$ – противоречие.

б) Неверно, контрпример: пусть

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & \mathbf{0} \\ \cdots & -1 & \cdots & & \\ & \cdots & \ddots & \cdots & \\ & & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & & & \cdots\ 1 & \cdots \\ & & & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

в базисе $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_{n-1}, e_n)$, тогда

$$-F = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & & & \mathbf{0} \\ \cdots & 1 & \cdots & & \\ & \cdots & \ddots & \cdots & \\ & & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & & & \cdots\ -1 & \cdots \\ & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе $e' = (e_2, e_1, e_4, e_3, \dots, e_n, e_{n-1})$.

в) Неверно, см. пункт б). ■

Задача 38.16 а). Найти симметрическую билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной функцией $q(x) = \beta(x, x)$, где

$$\beta(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3.$$

Решение.

$$q(x) = \beta(x, x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_1 - 5x_2x_3 + x_3^2 =$$

$$= 2x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 5x_2x_3$$

Построим симметрическую билинейную функцию $\tilde{\beta}(x, y)$, ассоциированную с $q(x)$. В общем виде: пусть

$$\gamma(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_iy_j,$$

тогда симметрическая билинейная функция, ассоциированная с $\gamma(x, x)$ – это:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}^{n} c_{ij}x_ix_j$$

В нашем случае матрица $q(x)$:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -5/2 \\ -2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\tilde{\beta}(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 - 5/2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 5/2x_3y_2 + x_3y_3$$

Ответ: $x_1y_1 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 - 5/2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 5/2x_3y_2 + x_3y_3$.

Задача 38.18 а). Найти нормальный вид квадратичных функций:
а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
н)

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (i+j)x_ix_j$$

Решение.
а) Немного видоизменим условие: пусть дана симметрическая билинейная функция

$$\beta(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

Приведем $\beta(x,y)$ методом Лагранжа к каноническому виду:

$$q(x) = \beta(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2$$

Замена:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3' = x_2 \end{cases}$$

Канонический вид $q(x)$:

$$(x_1')^2 + 2(x_2')^2 - \frac{7}{2}(x_3')^2$$

Канонический вид $\beta(x,y)$:

$$x_1'y_1' + 2x_2'y_2' - \frac{7}{2}x_3'y_3'$$

н)

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (i+j)x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} 2ix_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}^{n} (i+j)x_ix_j$$

Приведем к каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^{n} 2ix_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}^{n} (i+j)x_ix_j = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \dots + \frac{j+1}{2}x_j + \dots + \frac{n+1}{2}x_n\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left(2i-\frac{(i+1)^2}{2}\right)x_i^2+\sum_{2\le i<j\le n}^{n}\big(2(i+j)-(i+1)(j+1)\big)x_ix_j=$$

$$=2\tilde{x}_1^2-\sum_{i=2}^{n}\frac{(i-1)^2}{2}x_i^2-\sum_{2\le i<j\le n}^{n}(i-1)(j-1)x_ix_j=$$

$$=2\tilde{x}_1^2-\frac{1}{2}\left(x_2+\sum_{j=3}^{n}(j-1)x_j\right)^2=2\tilde{x}_1^2-\frac{1}{2}\tilde{x}_2^2=\frac{1}{2}\tilde{x}_1^2-\frac{1}{2}\tilde{x}_2^2$$

где

$$\tilde{x}_1=\sum_{j=1}^{n}(j+1)x_j$$
$$\tilde{x}_2=\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j$$

Задача. Методом Якоби найти канонический вид квадратичной функции:

$$q(x)=4x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$$

Решение.

$$B=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

Найдем угловые миноры:

$\Delta_1=4$
$\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0$

- так как $\Delta_2=0$, переставим переменные x_1 и x_3 местами, получим:

$\Delta_1=3$
$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-6$
$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-25$

Тогда

$$q(x)=3\tilde{x}_1^2-2\tilde{x}_2^2+\frac{25}{6}\tilde{x}_3^2$$

Ответ: $3\tilde{x}_1^2-2\tilde{x}_2^2+\frac{25}{6}\tilde{x}_3^2$.

Задача 38.6 а). Найти ортогональное дополнение к линейной оболочке $U = < v_1, v_2 >$ относительно билинейной функции β с матрицей B, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = (1, 2, 3), \qquad v_2 = (4, 5, 6)$$

Решение.

$$x \in U^{\perp} \Leftrightarrow \beta(x, y) = 0, \ \ \forall y \in U \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(x, v_1) = 0 \\ \beta(x, v_2) = 0 \end{cases}$$

Имеем:

$$\beta(x, y) = X^T B Y$$

Тогда

$$\beta(x, v_1) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\beta(x, v_2) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 + 17x_3 = 0 \\ 11x_1 - 22x_2 + 35x_3 = 0 \end{cases}$$

ФСР: $(2, 1, 0)$. Тогда

$$U^{\perp} = < (2, 1, 0) >$$

Ответ: $< (2, 1, 0) >$.

Семинар 14. Эквивалентность квадратичных форм. Проверка положительной или отрицательной определенности квадратичной функции.

Задача 38.29. Доказать, что если в симметрической матрице некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все окаймляющие его главные миноры порядков $r+1$ и $r+2$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен r.

Решение.
Не ограничивая общности, можно считать, что главный минор порядка r, отличный от нуля, образован пересечением первых r строк и r столбцов:

$$B = \begin{array}{c} \\ r\{ \end{array} \overbrace{}^{r} \left(\begin{array}{c|c} R & * \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Тогда можно подобрать матрицу C вида:

$$C = \begin{array}{c} \\ r\{ \end{array} \overbrace{}^{r} \left(\begin{array}{c|c} E & * \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$$

удовлетворяющую соотношению:

$$C^T BC = \begin{array}{c} \\ r\{ \end{array} \overbrace{}^{r} \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Так как матрицы B и $C^T BC$ – это матрицы некоторой симметрической билинейной формы в разных базисах, то окаймляющие минор R главные миноры порядков $r+1$ и $r+2$ останутся равны нулю. Отсюда следует, что на самом деле матрица $C^T BC$ имеет вид:

$$C^TBC = \begin{array}{c} \\ r\left\{\right. \end{array}\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{R}^{r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

и $rk\ (C^TBC) = r$. Значит, и $rk\ B = r$. ■

Задача 38.33. Пусть q – невырожденная квадратичная функция на пространстве V над произвольным полем F. Доказать, что если существует ненулевой вектор $x \in V$, для которого $q(x) = 0$, то отображение $q\colon\ V \to F$ сюръективно.

Решение.
Пусть q ассоциирована с билинейной формой β, т.е. $\forall z \in V$ выполнено $q(z) = \beta(z, z)$. Тогда если $x \in V$ – ненулевой вектор, для которого $q(x) = 0$, то

$$q(\lambda x + z) = \beta(\lambda x + z, \lambda x + z) = \lambda^2\beta(x, x) + 2\lambda\beta(x, z) + \beta(z, z) = 2\lambda\beta(x, z) + q(z)$$

С другой стороны, $\beta(x, z) = < \mathcal{B}x \mid z >$, где $\mathcal{B}\colon\ V \to V^*$ - отображение, соответствующее β. Так как $\mathcal{B}$ невырождено, то $\mathcal{B}x \neq 0$ и $< \mathcal{B}x \mid z > \neq 0$ при некотором z. Тогда для этого z:

$$q(\lambda x + z) = a\lambda + b,$$

где $a = 2\beta(x, z) \neq 0$, $b = q(z)$. Это выражение принимает все возможные значения в F, так как уравнение $a\lambda + b = c$ имеет решение для любого $c \in F$. Таким образом, отображение $q\colon\ V \to F$ сюръективно. ■

Задача 38.19 а). Эквивалентны ли над полем комплексных чисел квадратичные функции: $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_1x_2$ и $q_2(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$?

Решение.
Запишем матрицы этих квадратичных форм и найдем их ранги:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- получили $rk\ B_1 = 3$. Так как $rk\ B_2 = 4$ (это блочно-диагональная матрица, состоящая из невырожденных блоков), то функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ не эквивалентны.

Ответ: нет.

Задача 38.17 а). Эквивалентны ли над полем вещественных чисел квадратичные функции: $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ и $q_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$?

Решение.
Запишем матрицы этих квадратичных форм и найдем их индексы инерции:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B_1:

$$\Delta_1 = 1$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Тогда $q_1(x) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2$, сигнатура $(3, 0)$.

B_2: так как $\Delta_2 = 0$, переставим переменные x_1 и x_3 местами, получим:

$$\Delta_1 = 1$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Тогда $q_2(x) = \tilde{\tilde{x}}_1^2 + 4\tilde{\tilde{x}}_2^2 - \tilde{\tilde{x}}_3^2$, сигнатура $(2, 1)$. Отсюда следует, что функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ не эквивалентны.

Ответ: нет.

Задача 38.22 а). Найти положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной функции $q(X) = tr\ (X^2)$ на пространстве $Mat_n(\mathbb{R})$.

Решение.
Как мы знаем (см. задачу 37.1+37.2 б) семинара 11), матрица соответствующей билинейной формы $\beta(X, Y) = tr\ (XY)$ в базисе, состоящем из матричных единиц E_{ij}:

$$b_{ij,kl} = \beta(E_{ij}, E_{kl}) = tr\,(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} E_{il} \text{ при } j = k \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k, \quad i = l \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

в котором базисные векторы упорядочены следующим образом: $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}, \dots, E_{ij}, E_{ji}, \dots$, имеет вид:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots \\ \cdots & \ddots \end{matrix}}^{n} & \cdots & & & \mathbf{0} & \\ \cdots & 1 & \cdots & & & \\ \hline & \cdots & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \cdots & & \\ & & \cdots & \ddots & & \cdots \\ \mathbf{0} & & & \cdots & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

Количество блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Для приведения матрицы B к диагональному виду приведем каждый такой блок к диагональному виду: так как сигнатура квадратичной формы с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равна $(1, 1)$, то диагональный вид – это $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда положительный индекс инерции $q(X)$ равен $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, а отрицательный индекс инерции равен $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ответ: $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 38.11 б). При каких значениях λ следующая квадратичная функция является положительно определенной: $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$?

Решение.
Запишем матрицу этой квадратичной формы и воспользуемся критерием Сильвестра:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 3$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda^2$

Для того, чтобы $q(x)$ была положительно определена, необходимо и достаточно ,чтобы выполнялось условие

$$5 - 3\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$$

Ответ: при $\lambda \in (-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$.

Задача 38.14 а). При каких значениях λ следующая квадратичная функция является отрицательно определенной: $q(x) = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$?

Решение.
Запишем матрицу этой квадратичной формы и воспользуемся критерием Сильвестра:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \lambda + 20$

Для того, чтобы $q(x)$ была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\lambda + 20 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -20$$

Ответ: при $\lambda < -20$.

Нормальный вид квадратичных функций над полем вычетов.

Как мы знаем, нормальный вид квадратичных функций над полями действительных и комплексных чисел определен однозначно. Обсудим нормальный вид квадратичных функций над $\mathbb{Z}_p$ (p – нечетное простое число).

1) Приводим к каноническому виду: $q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, где $\lambda_i \neq 0$. Как мы знаем, путем замены базиса можно менять канонический вид, умножая λ_i на полные квадраты: $\lambda_i' = \lambda_i \mu_i^2$. Таким образом, если λ_i – квадратичный вычет, то подходящей заменой базиса можно добиться того, чтобы $\lambda_i' = 1$. Если же λ_i не является квадратичным вычетом, то можно выбрать ε – фиксированный квадратичный невычет, и подходящей заменой базиса добиться того, чтобы $\lambda_i' = \varepsilon$. Таким образом, матрицу $q(x_1, \dots, x_n)$ можно привести к виду:

$$B' = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 \text{ или } \varepsilon & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \text{ или } \varepsilon \end{matrix}}^{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Лемма. Невырожденная квадратичная функция на V, $dim\, V = 2$, над $\mathbb{Z}_p$, принимает значение 1.

Доказательство.
В каноническом виде $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$. Тогда $q(x) = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 = 1 - \lambda_2 x_2^2$. Подберем x_1 и x_2: когда x_1 пробегает все элементы $\mathbb{Z}_p$ (p штук), то x_1^2 пробегает $\frac{p+1}{2}$ элементов $\mathbb{Z}_p$ (в самом деле, все элементы $\mathbb{Z}_p$, кроме нуля, можно разбить на пары вида x и $-x$, которые при возведении в квадрат дают один и тот же элемент – получаем $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ различных значений x_1^2), тогда и $\lambda_1 x_1^2$ пробегает $\frac{p+1}{2}$ элементов $\mathbb{Z}_p$. Аналогичными рассуждениями получаем, что и $1 - \lambda_2 x_2^2$ пробегает $\frac{p+1}{2}$ элементов $\mathbb{Z}_p$. Отсюда следует, что множества значений $\lambda_1 x_1^2$ и $1 - \lambda_2 x_2^2$ пересекаются, т.е. можно подобрать x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $q(x) = 1$. ■

2) Теперь последовательно будем делать замены базиса и избавляться от ε: рассмотрим $q(x)$ на линейной оболочке первых двух базисных векторов – из доказанной выше леммы следует, что существует замена, переводящая блок $\begin{pmatrix} 1 \text{ или } \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \text{ или } \varepsilon \end{pmatrix}$ в блок $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \text{ или } \varepsilon \end{pmatrix}$ (выберем в качестве первого базисного вектора вектор, на котором $q(x)$ принимает значение 1). Затем рассмотрим $q(x)$ на линейной оболочке второго и третьего получившихся базисных векторов, и сделаем замену, переводящую блок $\begin{pmatrix} 1 \text{ или } \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \text{ или } \varepsilon \end{pmatrix}$ в блок $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \text{ или } \varepsilon \end{pmatrix}$, и так далее. В итоге, функцию $q(x_1, \dots, x_n)$ можно привести к виду:

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

или

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$$

Осталось заметить, что эти два вида неэквивалентны друг другу (в первом случае определитель матрицы квадратичной формы равен 1, а во втором случае ε – при замене базиса определитель умножается на полный квадрат, а ε не является квадратичным вычетом).

Упражнение. Продумать приведение квадратичной функции над $\mathbb{Z}_p$ к каноническому виду в вырожденном случае.

Семинар 15. Нахождение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора, угла между вектором и подпространством. Ортогонализация системы векторов. Свойства определителя Грама.

Задача 38.21. Пусть $f_1, \dots, f_{r+s}$ – линейные функции. Доказать, что положительный индекс инерции функции

$$q(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_r(x)^2 - f_{r+1}(x)^2 - \dots - f_{r+s}(x)^2$$

не превосходит r, а отрицательный индекс не превосходит s.

Решение.
Достаточно доказать, что положительный индекс инерции этой функции не превосходит r. Обозначим V_+ пространство функций, на которых $q(x)$ неотрицательна. Предположим, что $dim\, V_+ > r$. Пусть W – пространство решений ОСЛУ

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_r(x) = 0 \end{cases}$$

Тогда $dim\, W \geq n - r$ и пересечение $W \cap V_+$ непусто. Рассмотрим ненулевой вектор $u \in W \cap V_+$. Тогда должно выполняться условие $q(u) > 0$, но также $q(u) = f_1(u)^2 + \dots + f_r(u)^2 - f_{r+1}(u)^2 - \dots - f_{r+s}(u)^2 = -f_{r+1}(u)^2 - \dots - f_{r+s}(u)^2 < 0$ - противоречие. Таким образом, положительный индекс инерции $q(x)$ не превосходит r.
■

Задача 38.24. Пусть f – невырожденная симметрическая билинейная (эрмитова) функция, имеющая отрицательный индекс инерции, равный 1, и $f(v, v) < 0$ для некоторого вектора v. Доказать, что ограничение f на любое подпространство, содержащее v, невырождено.

Решение.
Так как $f(v, v) < 0$, то $f|_{<v>}$ невырождена, и пространство V можно разложить в прямую сумму:

$$V = < v > \oplus < v >^{\perp}$$

Тогда на $< v >$ функция $f|_{<v>}$ имеет сигнатуру $(0, 1)$, а на $< v >^{\perp}$ сигнатуру $(n - 1, 0)$, т.е. f положительно определена на $< v >^{\perp}$.

Пусть $< v > \subset U \subset V$. Аналогично разложим U в прямую сумму:

$$U = < v > \oplus < v >_U{}^{\perp}$$

Так как $< v >_U{}^{\perp} \subset < v >^{\perp}$ и f положительно определена на $< v >^{\perp}$, то f будет положительно определена и на $< v >_U{}^{\perp}$, следовательно, невырождена на $< v >_U{}^{\perp}$. Так как f невырождена и на $< v >$, то она будет невырождена и на $U = < v > \oplus < v >_U{}^{\perp}$. ■

Задача 38.30. Доказать, что вещественная симметрическая матрица A может быть представлена в виде $A = C^T C$, где C – квадратная матрица, тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A неотрицательны.

Решение.
$\Leftarrow$: приведем матрицу A элементарными преобразованиями к нормальному виду A'. Тогда $A' = D^T A D$ для некоторой квадратной матрицы D, откуда $A = (D^{-1})^T A' D^{-1}$.

Матрице A соответствует некоторая квадратичная форма $q(x)$. Неотрицательность главных миноров матрицы A соответствует неотрицательности $q(x)$. Действительно, рассмотрим функцию $q_\varepsilon(x) = q(x) + \varepsilon(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, $\varepsilon > 0$. У этой функции будет матрица $A + \varepsilon E$, все главные миноры которой положительны, откуда следует, что $q_\varepsilon(x)$ положительно определена. Устремляя ε к нулю, получаем, что $q(x)$ определена неотрицательно. Таким образом, на диагонали A' стоят только единицы и нули:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \mathbf{0} & \\ & \cdots & 1 & \cdots & & \\ & & \cdots & 0 & \cdots & \\ & \mathbf{0} & & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$A = (D^{-1})^T A' D^{-1}$. Так как $(A')^T = A'$ и $(A')^2 = A'$, то $A = (A'D^{-1})^T (A'D^{-1})$, т.е. в качестве C выступает матрица $A'D^{-1}$.

$\Rightarrow$: если C невырождена, то условие $A = C^T C \Leftrightarrow A = C^T E C$ означает, что в некотором базисе матрица A будет единичной, откуда следует, что квадратичная форма $q(x)$, чьей матрицей является A, положительно определена, тогда из критерия Сильвестра следует, что все главные миноры матрицы A неотрицательны.

Если C вырождена, то рассмотрим матрицу $C_\varepsilon = C + \varepsilon E$ – она невырождена при малых $\varepsilon \neq 0$. Отсюда следует, что у матрицы $A_\varepsilon = C_\varepsilon^T C_\varepsilon$ все главные миноры положительны. Устремляя ε к нулю, получаем, что все главные миноры матрицы A неотрицательны. ■

Задача 43.38 а). Найти v_0, $v_\perp$, $\widehat{(v, U)}$, где $v = (2, 2, 1, 1)$, $U = < v_1, v_2 >$, $v_1 = (3, 4, -4, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2) >$.

Решение.
Матрица Грама системы векторов v_1, v_2:

$$G(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдём скалярные произведения v_1 и v_2 с v:

$$(v_1, v) = 9, \qquad (v_2, v) = 3$$

Далее составляем систему линейных уравнений с матрицей коэффициентов $G(v_1, v_2)$ и столбцом свободных членов, состоящим из (v_1, v) и (v_2, v):

$$\begin{pmatrix} 42 & 6 & | & 9 \\ 6 & 6 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & -12 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1/6 \\ 0 & 1 & | & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ее решения – это коэффициенты в разложении $v_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Получаем

$$v_0 = \frac{1}{6} v_1 + \frac{1}{3} v_2 = (\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{1}{2})$$

Тогда

$$v_\perp = v - v_0 = (\frac{3}{2}, 1, 2, \frac{1}{2})$$

Теперь найдем $(\widehat{v, U})$:

$$(\widehat{v, U}) = (\widehat{v_0, U}) = arccos\, \frac{|v_0|}{|v|} = arccos\, \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = arccos\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $v_0 = (\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{1}{2})$, $v_\perp = (\frac{3}{2}, 1, 2, \frac{1}{2})$, $(\widehat{v, U}) = \frac{\pi}{3}$.

Задача 43.15 а). С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов евклидова пространства:

$$v_1 = (1, 2, 2, -1), \qquad v_2 = (1, 1, -5, 3), \qquad v_3 = (3, 2, 8, -7)$$

Решение.

В качестве w_1 выбираем v_1:

$$w_1 = v_1 = (1, 2, 2, -1)$$

Далее строим w_2:

$$w_2 = v_2 - \mu w_1$$

Коэффициент μ подбираем таким образом, чтобы вектора w_1 и w_2 были ортогональны:

$$0 = (w_1, w_2) = (w_1, v_2 - \mu w_1) = (w_1, v_2) - \mu (w_1, w_1)$$

Отсюда следует, что $\mu = \frac{(w_1, v_2)}{(w_1, w_1)}$, поэтому

$$w_2 = v_2 - \frac{(w_1, v_2)}{(w_1, w_1)} w_1 = v_2 + w_1 = (2, 3, -3, 2)$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражение для w_3. Пусть

$$w_3 = v_3 - \mu_1 w_1 - \mu_2 w_2$$

Домножим скалярно это равенство на v_1, получим $\mu_1 = \frac{(w_3,e_1)}{(v_1,v_1)}$. Домножим скалярно это равенство на v_2, получим $\mu_2 = \frac{(w_3,v_2)}{(v_2,v_2)}$. Таким образом,

$$w_3 = v_3 - \frac{(w_3,e_1)}{(v_1,v_1)} w_1 - \frac{(w_3,v_2)}{(v_2,v_2)} w_2 = v_3 - 3w_1 + w_2 = (2,-1,-1,-2)$$

Ответ: $w_1 = (1,2,2,-1), w_2 = (2,3,-3,2), w_3 = (2,-1,-1,-2)$.

Задача 43.25 а), г). Доказать, что определитель Грама любой системы векторов:
а) в процессе ортогонализации не меняется;
г) не превосходит произведения квадратов длин векторов системы, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы попарно ортогональны, или один из них нулевой.

Решение.
а) Пусть система $(w_1, \dots, w_m)$ получена из системы $(v_1, \dots, v_m)$ с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Для того, чтобы доказать, что $g(v_1, \dots, v_m) = g(w_1, \dots, w_m)$, докажем по индукции, что определитель Грама не меняется на каждом шаге построения $(w_1, \dots, w_m)$.

База индукции. На первом шаге мы выбираем $w_1 = v_1$, поэтому $g(v_1, \dots, v_m) = g(w_1, v_2, \dots, v_m)$.

Шаг индукции. Пусть $g(v_1, \dots, v_m) = g(w_1, v_2, \dots, v_m) = \dots = g(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_m)$. Так как $w_{k+1} = v_{k+1} - \mu_1 w_1 - \dots - \mu_k w_k$, то вычитая из $(k+1)$-го столбца матрицы $G(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_m)$ предыдущие k столбцов с коэффициентами $\mu_1, \dots, \mu_k$, а затем вычитая из $(k+1)$-ой строки предыдущие k строк с коэффициентами $\mu_1, \dots, \mu_k$, получим как раз $G(w_1, \dots, w_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_m)$, определитель при этом не изменится. ■

г) Докажем, что

$$g(v_1, \dots, v_m) \le |v_1|^2 \cdots |v_m|^2$$

Воспользуемся пунктом а):

$$g(v_1, \dots, v_m) = g(w_1, \dots, w_m) = \begin{vmatrix} (w_1|w_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (w_m|w_m) \end{vmatrix} = |w_1|^2 \cdots |w_m|^2$$

Но

$$|w_1|^2 \cdots |w_m|^2 \le |v_1|^2 \cdots |v_m|^2,$$

так как w_k – это ортогональная составляющая вектора v_k, и $|w_k|^2 \le |v_k|^2$.

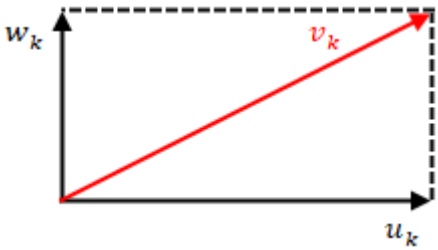

Рис. 15.1. $v_k = w_k + u_k$

Из этих же соображений следует, что равенство $g(v_1, \dots, v_m) = |v_1|^2 \cdots |v_m|^2$ достигается тогда и только тогда, когда векторы попарно ортогональны, или один из них нулевой. ■

Семинар 16. Углы между векторами, количество векторов с попарными углами π/3. Ортогональные операторы, их собственные значения, ортогональность собственных подпространств. Приведение ортогонального оператора к каноническому виду.

Задача 43.11. Доказать, что всякая вещественная симметрическая матрица ранга $\leq n$ с неотрицательными (соответственно положительными) главными минорами является матрицей Грама некоторой системы (соответственно линейно независимой системы) векторов n-мерного евклидового пространства.

Решение.
$\Rightarrow$: пусть $A = G(v_1, \dots, v_m)$. Ее главный минор на строках и столбцах с номерами $i_1, \dots, i_k$ – это $g(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \geq 0$.

$\Leftarrow$: если все главные миноры матрицы A неотрицательны, то (см. задачу 38.30 на предыдущем семинаре) $A = C^T C$, где C – квадратная матрица. Тогда A – матрица Грама системы столбцов матрицы C.

Если все главные миноры положительны:

$\Rightarrow$: если все главные миноры положительны, в частности, $g(v_1, \dots, v_m) > 0$, то $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы – это одно из свойств матрицы Грама.

$\Leftarrow$: если $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то любая подсистема $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ этой системы векторов будет линейно независима, поэтому $g(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) > 0$, т.е. все главные миноры будут положительными. ■

Задача 43.12. Доказать, что сумма квадратов длин проекций векторов любого ортонормированного базиса евклидова пространства на k-мерное подпространство равна k.

Решение.
Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис V, $U \subset V$, $dim\, U = k$, e_{i0} – ортогональная проекция e_i на U. Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} |e_{i0}|^2 = k$$

Выберем $v_1, \dots, v_n$ – ортонормированный базис V, согласованный с U, т.е. $U = < v_1, \dots, v_k >$. Рассмотрим матрицу перехода от $v_1, \dots, v_n$ к $e_1, \dots, e_n$:

$$C = (e_1 | \dots | e_n)$$

- по ее столбцам записаны координаты e_i в базисе $v_1, \dots, v_n$. Так как $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис, то матрица C ортогональна, т.е. $CC^T = E$. Обнуляя последние $n-k$ строк в матрице C, мы получим матрицу, состоящую из проекций $e_1, \dots, e_n$ на U. Тогда из равенства $CC^T = E$ следует, что сумма квадратов длин этих проекций равна k (суммируем соответствующие ненулевые элементы в матрицах CC^T и E). ■

Задача 43.39. Доказать, что если каждые два различных из k векторов евклидова пространства V образуют между собой угол $\frac{\pi}{3}$, то $k \le dim\, V$.

Решение.
Можно считать, что длины векторов $e_1, \dots, e_k$ (попарные углы между которыми равны $\frac{\pi}{3}$) равны 1. Рассмотрим матрицу Грама этой системы векторов:

$$G(e_1, \dots, e_k) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Если ее определитель положителен, то $e_1, \dots, e_k$ линейно независимы, откуда следует, что $k \le dim\, V$.

Докажем, что $det\, G > 0$: так как определитель матрицы равен произведению ее собственных значений с учетом кратности, то достаточно найти собственные значения. Одно из них угадывается сразу – это $\frac{1}{2}$, причем его кратность не меньше $k-1$, так как $rk\left(G - \frac{1}{2}E\right) = 1$. Получаем $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = \frac{1}{2}$, а $\lambda_k > 0$, так как $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k = tr\, G = k$. Отсюда следует, что $det\, G > 0$. ■

Ортогональные операторы.

Напоминание: оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ ортогонален, если $(x \mid y) = (\mathcal{A}x \mid \mathcal{A}y)$, $\forall x, y \in V$, т.е. если он сохраняет скалярное произведение векторов.

Задача 46.3. Доказать, что если векторы v и w евклидова пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональный оператор, переводящий v в w.

Решение.
Пусть $U = < v, w >$. Возможны два случая: $dim\, U = 1$ или $dim\, U = 2$. Рассмотрим разложение пространства V в прямую сумму:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Если $dim\, U = 1$, то векторы v и w либо совпадают (тогда $\mathcal{A}|_U\colon v \mapsto v$), либо противоположно направлены (тогда $\mathcal{A}|_U\colon v \mapsto -v$) . Если $dim\, U = 2$, то $\mathcal{A}|_U$ – это

поворот на угол между векторами v и w. На $U^{\perp}$ доопределим оператор $\mathcal{A}$ как тождественный оператор. ■

Обсудим структуру ортогональных операторов. Ортогональный оператор может не иметь собственных векторов (например, оператор поворота на угол, не кратный π), но если собственное значение есть, то оно равно ± 1, поэтому собственных подпространств у ортогонального оператора не более двух: V_1 и V_{-1}, причем $V_1 \perp V_{-1}$. Действительно, пусть $v \in V_1$, $w \in V_{-1}$, тогда $(v \mid w) = (\mathcal{A}v \mid \mathcal{A}w) = (v \mid -w) = -(v \mid w)$, откуда $(v \mid w) = 0$.

Нахождение канонического вида матрицы ортогонального оператора.

Канонический вид матрицы ортогонального оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\varphi_r & -\sin\varphi_r \\ \sin\varphi_r & \cos\varphi_r \end{pmatrix} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Находим $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$: ищем базис ФСР соответствующей ОСЛУ, ортогонализуем его процессом Грама-Шмидта и нормируем – получаем ортонормированный базис V_1.
- Находим $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E})$ – действуем аналогично.

Рассмотрим $(V_1 \perp V_{-1})^{\perp} = W$. Имеем: $V = W \oplus U \oplus U^{\perp}$.

- Ищем двумерное инвариантные подпространство $U_1 \subseteq W$, соответствующее блоку $\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$ – для этого ищем собственный вектор $w = u + iv$ в $W^{\mathbb{C}}$ (комплексификации W) относительно $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ (комплексифицированного оператора $\mathcal{A}$) с собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда $U_1 = < u, v >$, $\mathcal{A}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{A}v = \beta u + \alpha v$. Далее ортогонализуем (u, v) процессом Грама-Шмидта и нормируем – получаем (e, f) ортонормированный базис U_1. При этом:

$$(e \mid \mathcal{A}e) = \cos\varphi_1$$
$$(f \mid \mathcal{A}e) = \sin\varphi_1$$

Имеем: $W = U_1 \oplus U_1^{\perp}$. Далее ищем двумерное инвариантные подпространство $U_2 \subseteq U_1^{\perp}$, соответствующее блоку $\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$, и так далее.

Пример. Привести к каноническому виду ортогональный оператор, заданный в исходном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Решение.
Выясняем, есть ли собственные значения:
$\lambda = 1$:

$$A - E = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- вторая и третья строки матрицы $A - E$ совпадают, значит, $det\,(A - E) = 0$ и $\lambda = 1$ является собственным значением. Найдем $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$ – базис V_1. Заметим, что $v_1 \perp v_2$. Нормируем:

$$w_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$
$$w_2 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$\lambda = -1$:

$$A + E = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- так как $det\ (A+E) \neq 0$, то $\lambda = -1$ не является собственным значением.

Получаем $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$, (w_1, w_2) – ортонормированный базис V_1. Найдем (w_3, w_4) – ортонормированный базис $V_1^{\perp}$. Легко видеть, что в качестве w_3 и w_4 можно выбрать следующие векторы:

$$w_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$
$$w_4 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

На $V_1^{\perp}$ оператор $\mathcal{A}$ действует поворотом на угол φ, где $(w_3 \mid \mathcal{A}w_3) = \cos\varphi$, $(w_4 \mid \mathcal{A}w_3) = \sin\varphi$. Имеем:

$$\mathcal{A}w_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\cos\varphi = (w_3 \mid \mathcal{A}w_3) = 0,$$
$$\sin\varphi = (w_4 \mid \mathcal{A}w_3) = 1,$$

откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Канонический вид матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- в базисе (w_3, w_4, w_1, w_2). ■

Семинар 17. Сопряженный оператор. Симметрические операторы. Приведение симметрического оператора к каноническому виду.

Задача 46.12. Пусть V – евклидово пространство с ортонормированным базисом (e_1, e_2, e_3) и $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор в V с определителем 1. Доказать, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi \mathcal{B}_\theta \mathcal{A}_\psi$$

где $\mathcal{A}_\varphi$ и $\mathcal{A}_\psi$ – повороты в плоскости $< e_1, e_2 >$ на углы φ и ψ, $\mathcal{B}_\theta$ — поворот плоскости $< e_2, e_3 >$ на угол θ.

Решение.
Так как $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то он переводит ортонормированный базис в ортонормированный: $e_i' = \mathcal{A}(e_i)$.

Равенство $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi \mathcal{B}_\theta \mathcal{A}_\psi$ равносильно равенству $\mathcal{A}_\psi^{-1} \mathcal{B}_\theta^{-1} \mathcal{A}_\varphi^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{E}$, которое, в свою очередь, равносильно равенству $\mathcal{A}_{-\psi} \mathcal{B}_{-\theta} \mathcal{A}_{-\varphi} \mathcal{A} = \mathcal{E}$. Таким образом, задача свелась к тому, чтобы с помощью композиции трех поворотов, два из которых происходят вокруг оси e_3, а третий – вокруг оси e_1, перевести базис (e_1', e_2', e_3') в базис (e_1, e_2, e_3).

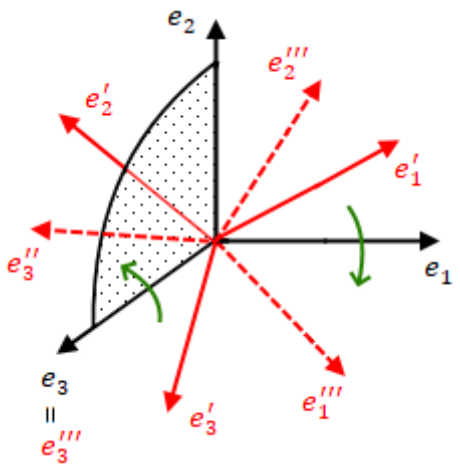

Рис. 17.1. К задаче 46.12

1) Вначале поворотом вокруг оси e_3 добьемся того, чтобы вектор e_3' попал в плоскость $< e_2, e_3 >$ (обозначим полученный вектор e_3''): $\mathcal{A}_\varphi^{-1}$: $e_i' \mapsto e_i''$

2) Далее осуществим поворот вокруг оси e_1 так, чтобы вектор e_3'' совпал с вектором e_3 (обозначим полученный вектор e_3'''): $\mathcal{B}_\theta^{-1}$: $e_i'' \mapsto e_i'''$. При этом векторы e_1''' и e_2''' окажутся в плоскости $< e_1, e_2 >$.

3) Наконец, поворотом вокруг e_3 добьемся того, чтобы векторы e_1''' и e_2''' совпали с векторами e_1 и e_2 соответственно: $\mathcal{A}_\psi^{-1}$: $e_i''' \mapsto \tilde{e}_i = e_i$ (это можно сделать, так как $\det \mathcal{A} = 1$). ■

Задача 43.40. Доказать, что если каждые два различных из k векторов евклидова пространства V образуют тупой угол, то $k \leq 1 + dim\, V$.

Решение.
1 способ. Докажем индукцией по $n = dim\, V$.

База индукции: $n = 1$ – очевидно (в одномерном пространстве угол между двумя векторами равен либо 0, либо π, если он равен π, тогда третий вектор образует с одним из них угол 0).

Шаг индукции: рассмотрим векторы $v_1, \dots, v_k$, угол между любыми двумя из которых – тупой. Пространство V можно разбить в прямую сумму: $V = U \oplus U^\perp$, где $U = < v_1 >$.

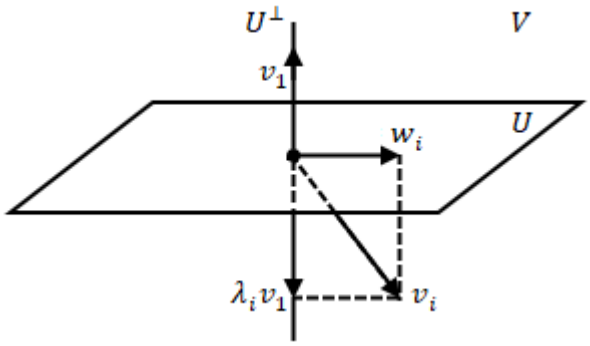

Рис. 17.2. К задаче 43.40

Рассмотрим ортогональные проекции векторов $v_2, \dots, v_k$ на $U^\perp$ (обозначим их $w_2, \dots, w_k$). Тогда углы между $w_2, \dots, w_k$ тоже будут тупыми (т.е. их попарные скалярные произведения отрицательны). В самом деле, $v_i = w_i + \lambda_i v_1$. Из того, что

$$0 > (v_i \mid v_1) = (w_i + \lambda_i v_1 \mid v_1) = \lambda_i (v_1 \mid v_1),$$

следует, что $\lambda_i < 0$. Тогда

$$0 > (v_i \mid v_j) = (w_i + \lambda_i v_1 \mid w_j + \lambda_j v_1) = \lambda_i \lambda_j (v_1 \mid v_1) + (w_i \mid w_j).$$

Так как $\lambda_i < 0$ и $\lambda_j < 0$, то $\lambda_i \lambda_j (v_1 \mid v_1) > 0$, откуда $(w_i \mid w_j) < 0$.

Таким образом, можно применить предположение индукции к подпространству $U^\perp$ (размерность которого на 1 меньше размерности V): $k - 1 \leq 1 + dim\, U^\perp$, откуда следует, что $k \leq 1 + dim\, V$.

2 способ.

Пусть углы между векторами $v_1, \dots, v_m$ попарно тупые. Рассмотрим их нетривиальную линейную комбинацию: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$. Неотрицательные коэффициенты оставим в левой части равенства, а отрицательные коэффициенты перенесем в правую часть. Тогда (если нужно, подходящим образом перенумеровывая векторы) получим равенство

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_m v_m,$$

где $\lambda_i > 0$, $\mu_i \geq 0$.

Теперь скалярно умножим левую часть равенства на правую, получим неотрицательное число (так как это скалярный квадрат):

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_m v_m) \geq 0$$

С другой стороны, получаем

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_m v_m) = \sum_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=k+1,\dots,m}} \lambda_i \mu_j \, (v_i \mid v_j) \leq 0$$

Отсюда следует, что $\mu_{k+1} = \dots = \mu_m = 0$.

Теперь заметим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ положительны. Действительно, если $\lambda_i = 0$, то

$$0 = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid v_i) = \sum_{j \neq i} \lambda_j \, (v_i \mid v_j) < 0$$

- противоречие.

Отсюда, в частности, следует, что любая подсистема из $m - 1$ вектора системы $v_1, \dots, v_m$ будет линейно независимой, т.е. $m - 1 \leq dim\, V$. ■

Сопряженные операторы.

Напоминание: пусть V – евклидовое пространство, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – линейный оператор. Тогда сопряженный оператор $\mathcal{A}^*\colon V \to V$ определяется соотношениями:

$$(x \mid \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^* x \mid y), \qquad \forall x, y \in V$$
$$(\mathcal{A}x \mid y) = (x \mid \mathcal{A}^* y), \qquad \forall x, y \in V$$

В ортонормированном базисе: если $\mathcal{A}$ имеет матрицу A, тогда $\mathcal{A}^*$ имеет матрицу A^T.

Задача 44.4. Найти оператор, сопряжённый к проектированию координатной плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе первой и третьей четвертей.

Решение.
Обозначим ось абсцисс U_1, биссектрису первой и третьей четвертей U_2, тогда $V = U_1 \oplus U_2$ и $\mathcal{A}$ – оператор проектирования на U_1 параллельно U_2.

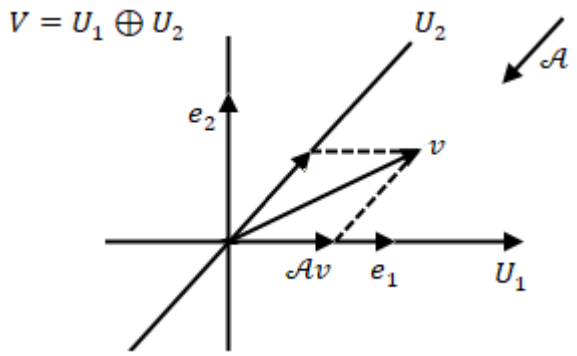

Рис. 17.3. Оператор $\mathcal{A}$

Найдем $\mathcal{A}^*$. Матрица оператора $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица оператора $\mathcal{A}^*$:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл оператора $\mathcal{A}^*$: проектирование $V = W_1 \oplus W_2$ на W_1 параллельно W_2, где W_1 – биссектриса второй и четвертой четверти, W_1 – ось ординат.

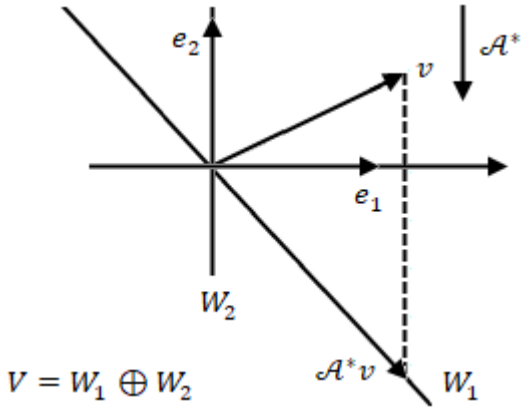

Рис. 17.4. Оператор $\mathcal{A}^*$

Найти $\mathcal{A}^*$ можно было и без выписывания его матрицы, а именно: как было доказано на лекциях, $Ker\ \mathcal{A}^* = (Im\ \mathcal{A})^\perp$, также $Im\ \mathcal{A}^* = (Ker\ \mathcal{A})^\perp$.

Имеем: $Im\ \mathcal{A} = U_1$, тогда $Ker\ \mathcal{A}^* = (U_1)^\perp = W_2$, также $Ker\ \mathcal{A} = U_2$, тогда $Im\ \mathcal{A}^* = (U_2)^\perp = W_1$. Однако, отсюда не следует автоматически, что $\mathcal{A}^*$ - проектор на W_1 параллельно W_2, докажем это.

Пусть $w \in W_1$, тогда $\mathcal{A}^* w \in W_1$ – чтобы его однозначно определить, достаточно знать $(\mathcal{A}^* w \mid e_1)$:

$$(\mathcal{A}^* w \mid e_1) = (w \mid \mathcal{A} e_1) = (w \mid e_1),$$

откуда следует, что $\mathcal{A}^* w = w$. Таким образом, на W_1 оператор $\mathcal{A}^*$ действует тождественно, а W_2 – его ядро. Отсюда следует, что $\mathcal{A}^*$ - проектор на W_1 параллельно W_2. ■

Симметрические (самосопряженные) операторы.

Напоминание: линейный оператор $\mathcal{A}$ на евклидовом векторном пространстве V называется самосопряженным (симметрическим), если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow A^T = A$.

Самосопряженный оператор диагонализуем в ортонормированном базисе (верно и обратное). Отсюда следует, что V разлагается в прямую сумму собственных подпространств оператора $\mathcal{A}$:

$$V = V_{\lambda_1}(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}(\mathcal{A}),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ попарно различны и действительны, также $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ при $i \neq j$.

Отсюда следует алгоритм нахождения канонического вида самосопряженного оператора: нужно найти его собственные подпространства, в каждом из них выбрать ортонормированный базис, а затем объединить эти базисы – получим ортонормированный базис пространства V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет канонический вид (диагональный, с собственными числами на диагонали).

Приведение квадратичной функции к главным осям.

Обсудим задачу, связанную с приведением симметрического оператора к каноническому виду – приведение квадратичной функции к главным осям.

С каждым симметрическим оператором $\mathcal{A}$ связана симметрическая билинейная функция $\beta(x, y) = (x \mid \mathcal{A} y)$ и квадратичная функция $q(x) = (x \mid \mathcal{A} x)$. Привести ее к главным осям означает привести ее к каноническому виду в ортонормированном базисе:

$$q(x) = (x \mid \mathcal{A} x) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \cdots + \lambda_n \tilde{x}_n^2,$$

где $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ – ортонормированный базис, $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

Пусть C – матрица перехода от исходного базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$. Матрица C ортогональна, потому $\tilde{X} = C^{-1}X = C^T X$, где $\tilde{X}$ – столбец координат в новом базисе, X – столбец координат в старом базисе.

Задача 45.19 г). Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям:

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Решение.
Матрица $q(x)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$:

Легко видеть, что $\lambda = -1$ – собственное значение:
$\lambda = -1$:

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- все строки матрицы $A + E$ совпадают, значит, $rk(A + E) = 1$, поэтому $\lambda = -1$ является собственным значением кратности два: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Для нахождения λ_3 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни (см. семинар 7), получим:

$$tr\ A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3$$

откуда $\lambda_3 = 5$.

Тогда $q(x)$ в главных осях записывается следующим образом:

$$q(x) = -\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 5\tilde{x}_3^2$$

Найдем собственные векторы, соответствующие $\lambda_{1,2}$ и λ_3:
$\lambda_{1,2} = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, -1, 0)$ – базис $V_1 = Ker\ (\mathcal{A} + \mathcal{E})$. Применяя к этому базису процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим:

$$\tilde{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(v_2 - \frac{(v_1|v_2)}{(v_1|v_1)}v_1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Вектор $\tilde{e}_3$ найдем из условия его ортогональности векторам $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$: так как $< \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 > = < v_1, v_2 >$, а v_1 и v_2 – ФСР системы, написанной выше, то вектор $(1, 1, 1)$ ортогонален v_1 и v_2, поэтому

$$\tilde{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Получаем

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Замена координат:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \\ \tilde{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \end{cases}$$

■

Семинар 18. Положительно определенные симметрические операторы, извлечение квадратного корня. Полярное разложение линейного оператора.

Задача 45.9. Доказать, что самосопряжённые операторы евклидова пространства перестановочны тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный собственный базис.

Решение.
На семинаре 9 мы уже разбирали похожую задачу (доказать, что для любого семейства коммутирующих диагонализуемых линейных операторов существует базис, в котором матрицы всех этих операторов диагональны). Ее решение можно использовать для решения задачи 45.9.

Пусть V – конечномерное евклидово векторное пространство, $\mathcal{A}_i \in L(V)$ и $\forall i, j$ выполнено $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i$, причем $\forall i$ оператор $\mathcal{A}_i$ самосопряжен.

Докажем утверждение задачи индукцией по размерности V.

База индукции: $dim\, V = 1$ - очевидно, так как в одномерном пространстве все операторы скалярны, и ортонормированный базис V будет для них общим.

Шаг индукции:
1) Если все $\mathcal{A}_i$ скалярны, т.е. имеют вид $\mathcal{A}_i = \lambda_i\mathcal{E}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, тогда подойдет любой базис.

2) Пусть $\mathcal{A}_i$ не скалярен и λ – собственное значение $\mathcal{A}_i$. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму собственных подпространств оператора $\mathcal{A}_i$:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

Так как $\mathcal{A}_i$ не скалярен, то $s > 1$ и $dim\, V_{\lambda_k} < dim\, V$. Как следует из задачи 40.38 (см. семинар 9), каждое из V_{λ_k} инвариантно относительно всех $\mathcal{A}_j$.

Применим к $\mathcal{A}_j\big|_{V_{\lambda_k}}$ предположение индукции – на этом подпространстве существует общий ортонормированный собственный базис для всех $\mathcal{A}_i$, следовательно, существует общий ортонормированный собственный базис для всех $\mathcal{A}_i$ на пространстве V, являющимся объединением базисов для всех $\mathcal{A}_j\big|_{V_{\lambda_k}}$ по всем V_{λ_k}. ■

Задача 45.18. Пусть A – вещественная матрица Якоби, т.е. симметрическая матрица вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

причём $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \neq 0$. Доказать, что A не имеет кратных собственных значений.

Решение.
1) Заметим, что $rk\,(A - \lambda E) \geq n - 1$, $\forall \lambda$, так как минор, получающийся из матрицы A выбрасыванием первой строки и последнего столбца, всегда будет невырожденным (это диагональная матрица с ненулевыми числами на диагонали):

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

2) Следовательно, геометрическая кратность любого собственного значения λ равна 1.

3) Матрица A диагонализуема (т.к. она симметрическая, т.е. является матрицей некоторого самосопряженного оператора, который в подходящем базисе диагонален), поэтому геометрическая кратность любого собственного значения λ равна его алгебраической кратности. Отсюда следует, что алгебраическая кратность любого собственного значения λ равна 1, т.е. A не имеет кратных собственных значений. ■

Положительно определённые симметрические операторы.

Вернемся к симметрическим операторам на евклидовом пространстве. Как мы помним, линейным операторам соответсвтует симметрическая билинейная функция по правилу $\alpha(x, y) = (x \mid \mathcal{A}y)$, $\forall x, y \in V$, или, что то же самое, квадратичная функция по правилу $q(x) = (x \mid \mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$. Таким образом, мы можем говорить о положительной определенности линейных операторов, используя связанные с ними квадратичные формы.

Симметрический линейный оператор $\mathcal{A}$ положительно определен, если $q(x) = (x \mid \mathcal{A}x) > 0$, $\forall x \neq 0$ (обозначение: $\mathcal{A} \gg 0$). Это условие равносильно тому, что все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Если $\mathcal{A} \gg 0$, то существует единственный оператор $\mathcal{B} \gg 0$, такой что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ (обозначение: $\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}$). Причем, если в ортонормированном базисе $(e_1', \dots, e_n')$ канонический вид матрицы оператора $\mathcal{A}$:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i > 0$$

тогда в этом же базисе:

$$B' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}, \qquad \mu_i > 0$$

В исходном ортонормированном базисе $(e_1, \dots, e_n)$:

$$A = CA'C^{-1} \Leftrightarrow A = CA'C^T,$$
$$B = CB'C^{-1} \Leftrightarrow B = CB'C^{-T},$$

где C – матрица перехода от $(e_1, \dots, e_n)$ к $(e_1', \dots, e_n')$.

Замечание. Не обязательно брать базис $(e_1', \dots, e_n')$ ортонормированным, вид матрицы B' все равно останется тем же. Однако, при этом $B \neq CB'C^{-T}$ – придется воспользоваться формулой $B = CB'C^{-1}$ и искать матрицу C^{-1} (либо найти матрицу B из условия $BC = CB' \Leftrightarrow C^T B = B'C^T$).

Задача. Найти $B = \sqrt{A}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.
Найдем собственные значения A: легко видеть, что $\lambda_1 = 1$ – собственное значение:

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Для нахождения λ_2 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни:

$$tr\, A = \lambda_1 + \lambda_2 = 10$$

откуда $\lambda_2 = 9$. Получаем

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

тогда

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы:

$\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 9$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Векторы e_1' и e_2' ортогональны друг другу, можно нормировать их, и найти матрицу B из условия $B = CB'C^{-T}$. Решим задачу вторым способом (для не ортонормированного базиса):

$$B = CB'C^{-1} \Leftrightarrow BC = CB' \Leftrightarrow C^T B = B'C^T$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},$$

найдем B:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Получаем

$$B = \sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Полярное разложение линейного оператора.

Напоминание: для любого невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}$ на евклидовом векторном пространстве V существуют единственные ортогональный оператор U и положительно определенный оператор $\mathcal{R}$, для которых $\mathcal{A} = U\mathcal{R}$ (полярное разложение).

Также существует единственный ортогональный оператор U и положительно определенный оператор $\mathcal{S}$, для которых $\mathcal{A} = \mathcal{S}U$. Если $\mathcal{A} = U\mathcal{R}$, то это равенство можно переписать в виде $\mathcal{A} = U\mathcal{R}U^{-1}U$, и в качестве $\mathcal{S}$ выбрать $\mathcal{S} = U\mathcal{R}U^{-1}$. Оператор $\mathcal{S}$ самосопряжен: $\mathcal{S} = U\mathcal{R}U^{-1} = U\mathcal{R}U^* = \mathcal{S}^*$.

Алгоритм нахождения полярного разложения оператора:

$\mathcal{A} = U\mathcal{R}$:

- Находим $\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$, его матрица: $R = \sqrt{A^T A}$
- Находим $U = AR^{-1}$, либо решаем матричное уравнение $A = UR \Leftrightarrow RU^T = A^T$

$\mathcal{A} = \mathcal{S}U$:

- Находим $\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$, его матрица: $S = \sqrt{AA^T}$
- Находим $U = S^{-1}A$, либо решаем матричное уравнение $A = SU$

Задача. Найти полярное разложение $A = UR$, где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдем $R = \sqrt{A^T A}$, для этого найдем собственные значения A: легко видеть, что $\lambda_1 = 1$ – собственное значение:

$$A^T A - \lambda E = A^T A - E = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- все строки матрицы $A^T A - E$ совпадают, значит, $rk(A^T A - E) = 1$, поэтому $\lambda_1 = 1$ является собственным значением кратности два: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Для нахождения λ_3 воспользуемся выражением коэффициентов характеристического многочлена через его корни, получим:

$$tr\ A^T A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18,$$

откуда $\lambda_3 = 16$. Получаем

$$(A^T A)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

тогда

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные векторы:

$\lambda_{1,2} = 1$:

$$A^T A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор e_3' найдем из условия его ортогональности векторам e_1' и e_2': например, $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу R находим из условия $C^T R = R' C^T$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем R:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Получаем

$$R = \sqrt{A^T A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрицу U находим из матричного уравнения $RU^T = A^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -3 & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

Получаем

$$U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$A = UR,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Семинар 19. Критические точки квадратичной функции на единичной сфере в евклидовом пространстве и собственные векторы симметрического оператора. Задание плоскостей в аффинном пространстве разными способами. Барицентрические координаты.

Задача 45.15. Доказать, что собственные значения произведения двух неотрицательных самосопряжённых операторов в евклидовом или эрмитовом пространстве, один из которых обратим, являются вещественными и неотрицательными.

Решение.
Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - неотрицательные самосопряженные операторы, $\mathcal{A}$ обратим. Имеем:

$$\mathcal{AB} = \left(\sqrt{\mathcal{A}}\right)^2\left(\sqrt{\mathcal{B}}\right)^2 = \sqrt{\mathcal{A}}\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\sqrt{\mathcal{B}}\sqrt{\mathcal{A}}\right)\left(\sqrt{\mathcal{A}}\right)^{-1} =$$

$$= \sqrt{\mathcal{A}}\left(\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)^*\right)\left(\sqrt{\mathcal{A}}\right)^{-1}$$

Заметим, что оператор $\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)^*$ самосопряжен и неотрицателен, следовательно, его собственные значения вещественны и неотрицательны. Но тогда и собственные значения оператора $\mathcal{AB}$ вещественны и неотрицательны, так как из полученного выше соотношения следует, что матрица оператора $\mathcal{AB}$ и матрица оператора $\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)\left(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}\right)^*$ - это матрицы одного и того же оператора в разных базисах. ■

Критические точки квадратичной функции на единичной сфере в евклидовом пространстве и собственные векторы симметрического оператора.

Пусть q – квадратичная функция на евклидовом пространстве V. Как известно, существует симметрический линейный оператор $\mathcal{A}$, который связан с q следующим образом: $q(x) = (x \mid \mathcal{A}x), \forall x \in V$.

Рассмотрим $q(x)$ как функцию на сфере $S = \{x \in V \mid |x| = 1\}$. Так как сфера – компакт, а $q(x)$ – гладкая функция, то можно говорить о критических точках q на сфере S: продифференцируем q в точке x по касательному направлению y:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q(x+ty) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x+ty \mid \mathcal{A}(x+ty)) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left((x \mid \mathcal{A}x) + t(y \mid \mathcal{A}x) + t(x \mid \mathcal{A}y) + t^2(y \mid \mathcal{A}y)\right) =$$

$$= (y \mid \mathcal{A}x) + (x \mid \mathcal{A}y) = 2(y \mid \mathcal{A}x)$$

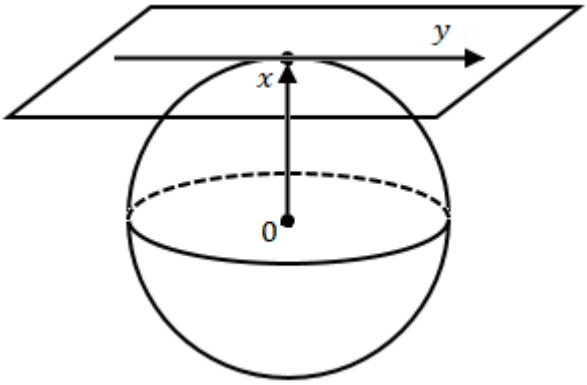

Рис. 19.1. Дифференцирование q в точке x по касательному направлению y

Получаем x – критическая точка $\Leftrightarrow (y \mid \mathcal{A}x) = 0$, $\forall y \perp x \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. x – собственный вектор для оператора $\mathcal{A}$.

Отметим, что это дает еще одно доказательства существования собственного вектора для симметрического оператора.

Приведем к главным осям:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ – собственные значения $\mathcal{A}$, причем $\lambda_1 = \max\limits_{x \in S} q(x)$, $\lambda_n = \min\limits_{x \in S} q(x)$.

Упражнение. Доказать, что $\forall k = 0, \dots, n-1$ выполнено $\lambda_{k+1} = \min\limits_{\substack{U \subseteq V \\ codim\, U = k}} \max\limits_{x \in U \cap S} q(x)$, также $\lambda_{n-k} = \max\limits_{\substack{U \subseteq V \\ codim\, U = k}} \min\limits_{x \in U \cap S} q(x)$.

Аффинная геометрия.

Задание плоскостей в аффинном пространстве.

1) Параметрическое задание плоскости. Выберем $p_0 \in S$ и подпространство $U \subseteq V$, $U = < v_1, \dots, v_n >$. Тогда

$$P = p_0 + U = \{p = p_0 + t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m \mid t_1, \dots, t_m \in K\}.$$

Точка p_0 называется опорной точкой плоскости.

В координатах: пусть v_j имеет координаты $c_{1j}, \dots, c_{nj}$, p_0 имеет координаты $x_1^0, \dots, x_n^0$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + c_{11}t_1 + \dots + c_{1m}t_m \\ \vdots \\ x_n = x_n^0 + c_{m1}t_1 + \dots + c_{nm}t_m \end{cases}, \quad t_1, \dots, t_m \in K$$

2) С помощью аффинной оболочки множества точек. Пусть $M \subseteq S$, $M = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$. Аффинная оболочка: $P = < M > =$ наименьшая плоскость в S, содержащая M.
Существование такой наименьшей плоскости доказывается построением: пусть $p_0 \in M$, тогда $P = p_0 + U$, где $U = < \overrightarrow{p_0 p} \mid p \in M >$.

3) С помощью системы линейных уравнений. Зададим $U \subseteq V$ с помощью однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Тогда плоскость $P = p_0 + U$ можно с помощью системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

где свободные члены $b_i = a_{i1}x_1^0 + \dots + a_{in}x_n^0$ (здесь $x_1^0, \dots, x_n^0$ – координаты p_0).

Задача 49.10 а). Найти систему уравнений и параметрические уравнения, задающие аффинную оболочку множества $P = < p_1, p_2, p_3, p_4 >$:

$$p_1 = (-1, 1, 0, 1), p_2 = (0, 0, 2, 0), p_3 = (-3, -1, 5, 4), p_4 = (2, 2, -3, -3)$$

Решение.
$P = p_2 + U$, где $U = < \overrightarrow{p_2p_1}, \overrightarrow{p_2p_3}, \overrightarrow{p_2p_4} >$:

$$\overrightarrow{p_2p_1} = (-1, 1, -2, 1)$$
$$\overrightarrow{p_2p_3} = (-3, -1, 3, 4)$$
$$\overrightarrow{p_2p_4} = (2, 2, -5, -3)$$

Найдем систему уравнений, задающих U:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $(5, 1, 0, 4)$, $(-11, 0, 1, -9)$. Тогда U задается следующей системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

А P задается системой уравнений (свободные члены – результат подстановки координат точки p_2 в соответствующие уравнения системы):

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ 11x_1 - x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}$$

Параметрическое задание плоскости P: выберем p_2 в качестве опорной точки, а в качестве базиса U – векторы $(-1, 1, -2, 1)$ и $(0, 4, -9, -1)$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 0 - t_1 + 0t_2 \\ x_2 = 0 + t_1 + 4t_2 \\ x_3 = 2 - 2t_1 - 9t_2 \\ x_4 = 0 + t_1 - t_2 \end{cases}$$

- параметрическое задание плоскости P. ■

Барицентрические комбинации точек и барицентрические координаты в аффинном пространстве.

Как мы знаем, в векторном пространстве можно определить линейную комбинацию его элементов – векторов. В аффинном пространстве нельзя общим образом инвариантно определить линейную комбинацию точек, но можно определить т.н. барицентрическую линейную комбинацию.

Пусть $p_0, \dots, p_m \in S$, и $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ – набор коэффициентов, удовлетворяющий условию $\lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1$. Тогда рассмотрим вектор $\lambda_0\overrightarrow{op_0} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{op_m} = v$ и точку $p = o + v$.

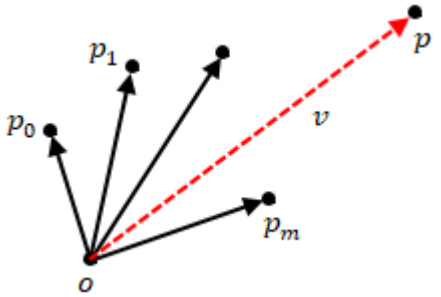

Рис. 19.2. К определению барицентрической комбинации точек

Утверждение. Точка p не зависит от выбора o.

Доказательство.

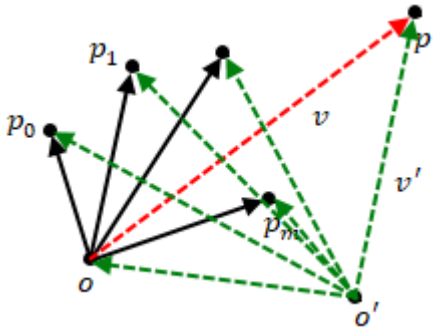

Рис. 19.3. К доказательству утверждения

Пусть o' - другое начало отсчета. Тогда

$$v' = \lambda_0\overrightarrow{o'p_0} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{o'p_m} = (\lambda_0 + \cdots + \lambda_m)\overrightarrow{o'o} + \lambda_0\overrightarrow{op_0} + \cdots + \lambda_m\overrightarrow{op_m} = \overrightarrow{o'o} + v,$$

и

$$o' + v' = o' + \overrightarrow{o'o} + v = o + v = p$$

■

Барицентрическая комбинация точек: $p = \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_m p_m,\ \lambda_0 + \cdots + \lambda_m = 1.$

Такие название объясняется тем, что если точки $p_0, \dots, p_m$ имеют массы $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ соответственно, то p – центр масс этой системы точек.

Определение. Система точек $p_0, \dots, p_m$ называется *аффинно независимой*, если векторы $v_i = \overrightarrow{p_0p_i}$ $(i = 1, \dots, m)$ линейно независимы.

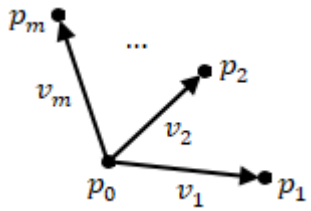

Рис. 19.4. Аффинно независимая система точек

Отметим, что $\overrightarrow{p_jp_i} = v_i - v_j$ $(i = 1, \dots, m,\ i \neq j)$, $\overrightarrow{p_jp_0} = -v_j$, откуда следует, что от выбора точки p_0 из системы, состоящей из m точек, понятие аффинной независимости системы не зависит (линейные оболочки соответствующих систем векторов совпадают).

Пусть $p_0, \dots, p_n$ аффинно независимы, $n = \dim S$. Тогда $\forall p \in S$ существует единственная барицентрическая комбинация $p = x_0p_0 + \cdots + x_np_n$. Числа $x_0, \dots, x_n$ называются *барицентрическими координатами* точки p ($x_1, \dots, x_n$ – координаты $x = \overrightarrow{p_0p}$ в базисе $v_1, \dots, v_n$; $x_0 = 1 - x_1 - \cdots - x_n$).

По своим свойствам барицентрические координаты во многом напоминают свойства координат векторов в векторном пространстве.

Задача 1. Доказать, что система точек $q_0, \dots, q_m$ аффинно независима $\Leftrightarrow$

$$rk\begin{pmatrix} x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m0} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = m + 1,$$

где $(x_{i0}, \dots, x_{in})$ – барицентрические координаты точки q_i.

Задача 2. С помощью барицентрических координат доказать теорему Менелая.

Семинар 20. Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве. Проведение через точку прямой, пересекающей две плоскости.

Задача. Пусть $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ – собственные значения симметрического оператора $\mathcal{A}$, q – квадратичная функция на V, соответсвующая $\mathcal{A}$, т.е. $q(x) = (\mathcal{A}x \mid x)$, $\forall x \in V$, $S = \{x \in V \mid |x| = 1\}$ – сфера единичного радиуса. Доказать, что $\forall k = 0, \dots, n-1$ выполнено: $\lambda_{k+1} = \min\limits_{\substack{U \subseteq V \\ codim\, U = k}} \max\limits_{x \in U \cap S} q(x)$ (упражнение с прошлого семинара).

Решение.
Приведем q к главным осям:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

$\forall x \in < e_l, \dots, e_m > \cap S$ выполнено $\lambda_m \leq (\mathcal{A}x \mid x) \leq \lambda_l$.

Рассмотрим $U_0 = < e_{k+1}, \dots, e_n >$. Имеем: $\forall x \in < e_{k+1}, \dots, e_n > \cap S$ выполнено $\lambda_n \leq (\mathcal{A}x \mid x) \leq \lambda_{k+1}$.

Рассмотрим подпространства $U \subset V$, $\dim U = n - k$ и $W = < e_1, \dots, e_{k+1} >$, $\dim W = k + 1$. Так как $\dim U + \dim W > n$, то $\exists x \in (U \cap W) \cap S$. Имеем:

$$\max_{x \in W \cap S} (\mathcal{A}x \mid x) \geq \lambda_{k+1}$$

Таким образом, в любом $U \subset V$, $\dim U = n - k$, найдется вектор x, на котором значение $(\mathcal{A}x \mid x)$ на единичной сфере не меньше λ_{k+1}, также мы можем предъявить пространство (U_0), на котором максимальное значение $(\mathcal{A}x \mid x)$ равно λ_{k+1}. Отсюда и следует утверждение задачи. ■

Задача 49.23. Пусть (A, V) аффинное пространство над полем K, $|K| \geq 3$, P – непустое подмножество в A. Доказать, что P является плоскостью тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными точками $a, b \in P$ в P содержится прямая $< a, b >$. Верно ли это утверждение, если K – поле из двух элементов?

Решение.
Несложно видеть, что если K – поле из двух элементов, то утверждение задачи неверно: рассмотрим двумерное аффинное пространство (A, V), в качестве P рассмотрим множество из точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ – это множество удовлетворяет условию задачи, но не является плоскостью.

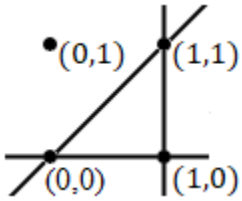

Рис. 20.1. К задаче 49.23

Теперь перейдем к основному утверждению задачи. Ясно, что условие “вместе с любыми двумя различными точками $a, b \in P$ в P содержится прямая $< a, b >$”, является необходимым, для того, чтобы P было плоскостью.

Достаточность: выберем точку $p_0 \in P$ и рассмотрим $U = \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in P\}$ – множество векторов, соединяющих эту точку со всеми точками множества P. Докажем, что это множество является подпространством, т.е. докажем, что оно замкнуто относительно умножения на скаляры и относительно сложения.

Замкнутость относительно умножения на скаляры: прямая, соединяющая p_0 и произвольную точку $p \in P$, также принадлежит P, и векторы, которые соединяют p_0 с разными точками на этой прямой, как раз и есть все возможные векторы, пропорциональные $\overrightarrow{p_0p}$.

Замкнутость относительно сложения: пусть $p, q \in P$ – рассмотрим $\overrightarrow{p_0p} + \overrightarrow{p_0q} = r$ и докажем, что $r \in P$. Обозначим $\overrightarrow{p_0p} = u$, $\overrightarrow{p_0q} = v$, $\overrightarrow{p_0r} = u + v$

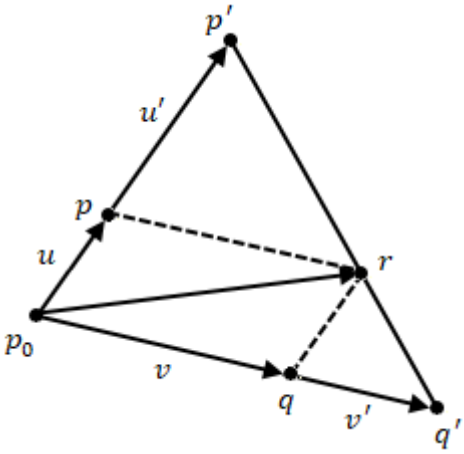

Рис. 20.2. К задаче 49.23

Пусть $\lambda \neq 0{,}1$, $\mu = 1 - \lambda \neq 0{,}1$. Для любых $p, q \in P$ верно, что $\lambda p + \mu q \in P$ (т.к. такая барицентрическая комбинация лежит на прямой, соединяющей p и q), поэтому $\lambda u + \mu v \in U$.

Имеем: $u' = \lambda^{-1}u \in U$ и $v' = \mu^{-1}v \in U$, так как это точки, лежащие на прямых, соединяющих p_0 и p и p_0 и q соответственно (обозначим концы этих векторов p' и q'). Тогда $\lambda u' + \mu v' = u + v = r \in U$.

Осталось доказать, что P вместе с каждой точкой q содержит и точку r, являющуюся концом некоторого вектора $u \in U$, отложенного от точки q. В самом деле, откладывание произвольного вектора $u \in U$ от q равносильно откладыванию от точки p_0 вектора $v + u$, где $v = \overrightarrow{p_0q}$. Так как $v + u \in U$, то и конец вектора $\overrightarrow{p_0q}$ (т.е. точка r) принадлежит P. ■

Задача 49.16 б). Найти размерность аффинной оболочки объединения плоскостей P и Q и размерность их пересечения или степень их параллельности, если:

$$P\colon \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$Q\colon \begin{cases} x_1 = 1 - t_1 \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 - 2t_1 + 2t_2 \\ x_4 = 1 + t_1 + t_2 \end{cases}$$

Решение.
Зададим плоскости P и Q с помощью аффинной оболочки множества точек: $P = p_0 + U$ и $Q = q_0 + W$.

Найдем p_0 и U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & | & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -8 & | & -12 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & | & 10 \end{pmatrix}$$

Частное решение: $p_0 = (-12, 10, 0, 0)$.

ФСР однородной системы: $u_1 = (4, -4, 1, 0)$, $u_2 = (8, -7, 0, 1)$ – базис U.

Найдем q_0 и W: из параметрического задания плоскости Q следует, что можно взять $q_0 = (1, 1, 1, 1)$, также $W = < w_1, w_2 >$, где $w_1 = (-1, 2, -2, 1)$, $w_2 = (0, 1, 2, 1)$.

Далее проверим, принадлежит ли вектор $\overrightarrow{p_0q_0}$ подпространству $U + W$, т.е. является ли $\overrightarrow{p_0q_0} = (13, -9, 1, 1)$ линейной комбинацией векторов u_1, u_2, w_1, w_2:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & 0 & 13 \\ -4 & -7 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & 9 & -5 \\ 0 & 8 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- система несовместна, т.е. $\overrightarrow{p_0q_0} \notin U + W$, следовательно, $P \cap Q \neq \emptyset$.

Найдем степень параллельности P и Q (т.е. $dim(U \cap W) = \delta(P, Q)$): проверяя, принадлежит ли вектор $\overrightarrow{p_0 q_0}$ подпространству $U + W$, мы заодно нашли ранг матрицы, составленной из векторов u_1, u_2, w_1, w_2 – он равен 3, откуда следует, что $dim(U + W) = 3$. Так как $dim\, U = dim\, W = 2$, то $dim(U \cap W) = 1$ (следует из формулы Грассмана).

Осталось найти размерность аффинной оболочки объединения плоскостей P и Q:

$$dim(P \cup Q) = dim\, P + dim\, Q - \delta(P, Q) + 1 = 4$$

Ответ: $dim(P \cup Q) = 4$, $\delta(P, Q) = 1$.

Задача 49.20 а). Найти прямую, проходящую через точку b, и пересекающую плоскости P и Q:

$$b = (6, 5, 1, -1),$$

$$P: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}, \qquad Q: \begin{cases} x_1 = 4 + t \\ x_2 = 4 + 2t \\ x_3 = 5 + 3t \\ x_4 = 4 + 4t \end{cases}$$

Решение.

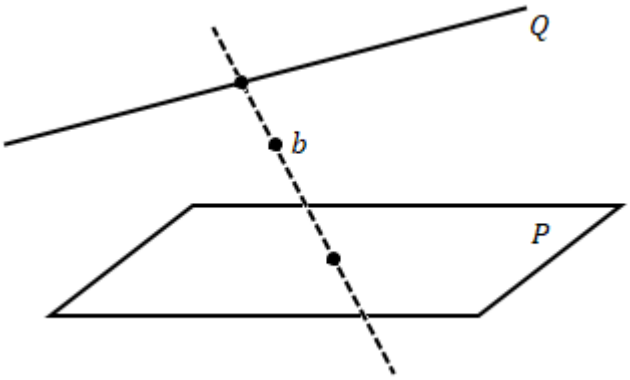

Рис. 20.3. К задаче 49.20 а)

Легко видеть, что $b \notin Q$. Найдем плоскость наименьшей размерности, содержащую b и Q: для этого выберем точку $q_0 \in Q$, например, $q_0 = (4, 4, 5, 4)$, и проведем плоскость R через вектор $w_1 = \overrightarrow{q_0 b}$ и направляющий вектор w_2 прямой Q:

$$w_1 = (2, 1, -4, -5)$$
$$w_2 = (1, 2, 3, 4)$$

$$R = q_0 + < w_1, w_2 >$$

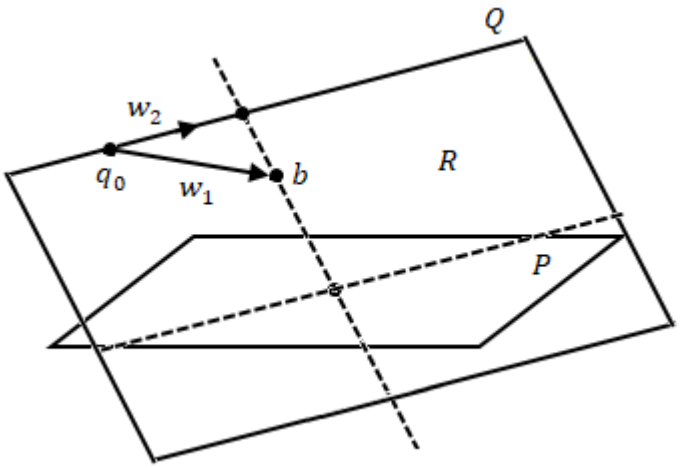

Рис. 20.4. К задаче 49.20 а)

Теперь поймем, как плоскость R пересекает плоскость P – для этого зададим плоскость R в параметрическом виде, а затем подставим параметрические выражения для координат точки плоскости R в уравнения, задающие плоскость P, и поймем, существуют ли значения параметров, удовлетворяющие этим уравнениям.

$$R: \begin{cases} x_1 = 4 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 4 + t_1 + 2t_2 \\ x_3 = 5 - 4t_1 + 3t_2 \\ x_4 = 4 - 5t_1 + 4t_2 \end{cases}$$

Подставляем в уравнения P:

$$\begin{cases} -(4 + 2t_1 + t_2) + 2(4 + t_1 + 2t_2) + (5 - 4t_1 + 3t_2) = 1 \\ (4 + 2t_1 + t_2) + (4 - 5t_1 + 4t_2) = 1 \end{cases}$$

Если система имеет решение, получаем координаты точек p, лежащих в пересечении плоскостей P и R. Прямая, проходящая через точки b и p, будет кандидатом на пересечение Q. Для того, чтобы понять, пересекает ли она Q, нужно проверить, что $\overrightarrow{pb}$ не параллелен w_2.

Семинар 21. Матрица расстояний между точками евклидова пространства. Вычисление расстояния между плоскостями.

Задача 49.18. Пусть P и Q – две плоскости в аффинном пространстве A над полем K, $< P \cup Q > = A$, $P \cap Q = \emptyset$ и пусть λ – фиксированный элемент из K, $\lambda \neq 0,1$. Найти геометрическое место точек $\lambda p + (1-\lambda)q$, где p и q пробегают соответственно P и Q.

Решение.
Зададим плоскости P и Q как $P = p_0 + U$ и $Q = q_0 + W$. Тогда

$$\lambda p + (1-\lambda)q = \lambda(p_0 + u) + (1-\lambda)(q_0 + w) = \lambda p_0 + (1-\lambda)q_0 + \lambda u + (1-\lambda)w$$

Здесь $r_0 = \lambda p_0 + (1-\lambda)q_0$ – фиксированная точка, а $\lambda u + (1-\lambda)w$ пробегает все векторы из $U + W$. Таким образом, искомое множество – это $r_0 + (U + W)$ – плоскость, проходящая через точку r_0 с направляющим подпространством $U + W$. ■

Матрица расстояний между точками евклидова пространства.

Перейдем к евклидовым пространствам. Пусть в евклидовом аффинном пространстве задан набор точек $p_0, p_1, \dots, p_m$. Обозначим через d_{ij} расстояние между p_i и p_j. Имеем: $d_{ij} \geq 0$, $d_{ii} \geq 0$, также $d_{ij} = d_{ji}$, т.е. набор расстояний между точками образует симметричную матрицу, которая называется матрицей расстояний:

$$\begin{pmatrix} d_{00} & \cdots & d_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m0} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

Поймем, какая симметрическая матрица может быть матрицей расстояний для некоторого набора точек в евклидовом пространстве. Помимо указанных условий, должно выполняться неравенство треугольника: $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$.

Также: предположим, такой набор точек нашелся. Рассмотрим векторы, соединяющие одну из этих точек с остальными (вектор, соединяющий p_0 с p_i обозначим v_i)

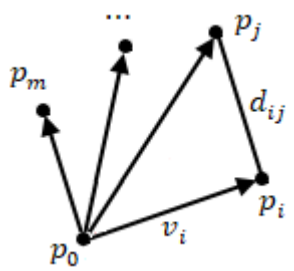

Рис. 21.1. Набор точек $p_0, p_1, \dots, p_m$ и расстояния между ними

Рассмотрим матрицу Грама этого набора векторов: из определения матрицы расстояний следует, что $d_{ij} = |v_i - v_j| = \sqrt{(v_i - v_j \mid v_i - v_j)}$, откуда

$$d_{ij}^2 = (v_i - v_j \mid v_i - v_j) = (v_i \mid v_i) + (v_j \mid v_j) - 2(v_i \mid v_j) = d_{i0}^2 + d_{j0}^2 - 2(v_i \mid v_j),$$

тогда

$$(v_i \mid v_j) = \frac{d_{i0}^2 + d_{j0}^2 - d_{ij}^2}{2} = g_{ij}$$

- матрица (g_{ij}) должна быть матрицей Грама системы векторов $v_1, \dots, v_m$.

Таким образом, для того, чтобы симметрическая матрица была матрицей расстояний, необходимо и достаточно, чтобы матрица (g_{ij}) была матрицей Грама некоторой системы векторов в евклидовом пространстве, т.е. все главные миноры этой матрицы должны быть неотрицательными.

Задача 51.2 а). Существует ли в евклидовом пространстве набор точек d_1, d_2, d_3, d_4, для которого матрица D есть матрица расстояний $\left(\rho(d_i, d_j)\right)$, и какова наименьшая размерность пространства, в которое такой набор можно поместить:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 3 \\ 2 & \sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 3 & 2 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

Проверим, является ли матрица (g_{ij}), где $g_{ij} = \frac{d_{i0}^2 + d_{j0}^2 - d_{ij}^2}{2}$, матрицей Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Это матрица Грама (следует из критерия Сильвестра), значит, исходный набор точек с матрицей расстояний D существует, и 4 – наименьшая размерность пространства, в которое такой набор можно поместить. ■

Задача 51.14 а). В евклидовом пространстве найти расстояние между плоскостями P и Q, если:

$$P: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases},$$

$$Q = q_0 + W, \qquad W = < w_1, w_2 >,$$

где $q_0 = (0, 2, 6, -5), w_1 = (-7, 1, 1, 1), w_2 = (-10, 1, 2, 3)$.

Решение.
Пусть $P = p_0 + U$, $Q = q_0 + W$. Тогда

$$\rho(P, Q) = |(\overrightarrow{p_0 q_0})_\perp|,$$

где $(\overrightarrow{p_0 q_0})_\perp$ - ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{p_0 q_0}$ относительно $U + W$ – достигается на $p \in P$, $q \in Q$, для которых прямая $< p, q >$ перпендикулярна P и Q, т.е. $\overrightarrow{pq} \perp U, W$.

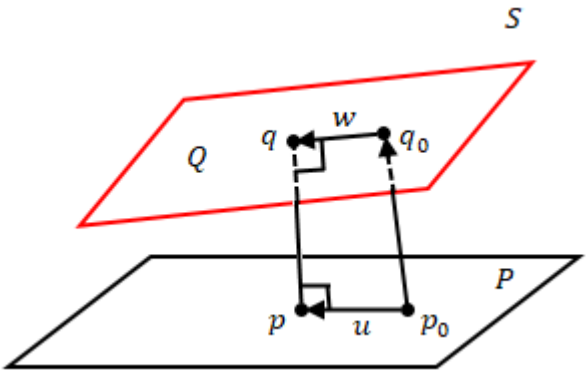

Рис. 21.2. Нахождение расстояния между плоскостями

Зададим плоскость P в нужном нам виде: $P = p_0 + U$. Найдем p_0 и U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Частное решение: $p_0 = (0, 0, 0, 3)$.

ФСР однородной системы: $u_1 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 0, 1, 2)$ – базис U.

Тогда $v = \overrightarrow{p_0 q_0} = (0, 2, 6, -8)$. Осталось найти $|v_\perp|$ относительно $U + W = < u_1, u_2, w_1, w_2 >$. Для этого найдем v_0 – ортогональную проекцию v на $U + W$ (в левой части матрицы, приведенной ниже, – матрица Грама системы векторов u_1, u_2, w_1, w_2, последний столбец состоит из скалярных произведений v с этими векторами):

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 22 & 31 & | & 2 \\ 9 & 14 & 24 & 38 & | & -10 \\ 22 & 24 & 52 & 76 & | & 0 \\ 31 & 38 & 76 & 114 & | & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 & -7 & | & 12 \\ 9 & 14 & 24 & 38 & | & -10 \\ 2 & 6 & 8 & 14 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & -7 & | & 12\\ 0 & 59 & 42 & 101 & | & -118\\ 0 & 16 & 12 & 28 & | & -28\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -5 & -2 & -7 & | & 12\\ 0 & -5 & 0 & -11 & | & -6\\ 0 & 4 & 3 & 7 & | & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 4 & | & 18\\ 0 & -1 & 3 & -4 & | & -13\\ 0 & 0 & 15 & -9 & | & -59\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем $x_1 = \frac{94}{9}$, $x_2 = \frac{13}{9}$, $x_3 = -4$, $x_4 = -\frac{1}{9}$, т.е.

$$v_0 = \frac{94}{9}u_1 + \frac{13}{9}u_2 - 4w_1 - \frac{1}{9}w_2$$

Семинар 22. Аффинные отображения, их линейность относительно барицентрических комбинаций точек. Неподвижные точки аффинных преобразований и движений. Геометрическое описание движений 2-мерного и 3-мерного евклидова пространства.

Задача 49.27 а). Пусть $\varphi\colon S \to T$ – аффинное отображение, $p_1, \dots, p_m \in S$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Доказать, что

$$\varphi(\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m) = \lambda_1 \varphi(p_1) + \dots + \lambda_m \varphi(p_m)$$

Решение.
Выберем $o \in S$ и $o' = \varphi(o) \in T$ – начала отсчета в пространствах S и T. Имеем (обозначили $v_i = \overrightarrow{op_i}$):

$$p = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m = o + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m,$$

тогда

$$\varphi(p) = \varphi(o) + d\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = o' + \lambda_1 d\varphi(v_1) + \dots + \lambda_m d\varphi(v_m)$$

Так как $d\varphi(v_i) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p_i)} = \overrightarrow{o'\varphi(p_i)}$, получаем $\varphi(p) = \lambda_1 \varphi(p_1) + \dots + \lambda_m \varphi(p_m)$. ■

Задача 49.24. Доказать, что всякое аффинное преобразование $\varphi\colon S \to S$, дифференциал которого $\mathcal{A} = d\varphi\colon V \to V$ не имеет собственного значения 1, обладает неподвижной точкой, т.е. $\exists p \in S\colon \varphi(p) = p$.

Решение.
Векторизуем:

$$S \leftrightarrow V,$$
$$p \leftrightarrow x = \overrightarrow{op}$$

Тогда $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$. Решим уравнение $\mathcal{A}x + b = x$: так как дифференциал не имеет собственного значения 1, то оператор $\mathcal{A} - \mathcal{E}$ невырожден, тогда $x = -(\mathcal{A} - \mathcal{E})^{-1} b$.

Таким образом, мы кроме существования неподвижной точки заодно доказали и ее единственность. ■

Теперь от аффинных преобразований перейдем к ортогональным.

Задача 51.19 а). Доказать, что если движение евклидова пространства $\varphi \in Isom(S)$ имеет две скрещивающиеся инвариантные плоскости P и Q, то оно обладает неподвижной точкой.

Решение.

Пусть $P = p_0 + U$, $Q = q_0 + W$, $\mathcal{A} = d\varphi$. Можно считать, что $\overrightarrow{p_0q_0} \perp U, W$, тогда $\rho(p_0, q_0) = \min\limits_{p \in P, q \in Q} \rho(p, q)$.

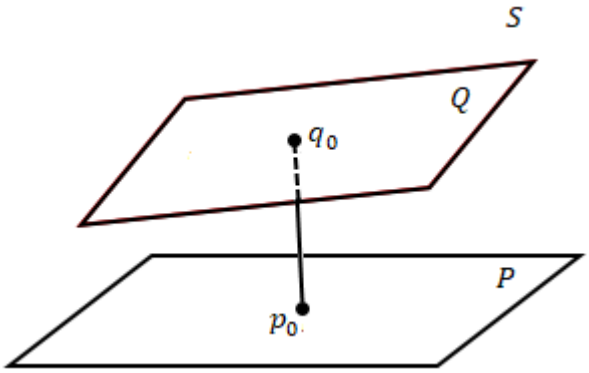

Рис. 22.1. К задаче 51.19 а)

Расстояние между плоскостями P и Q достигается на единственной паре точек (p_0, q_0) – в самом деле, если $p \in P$, $q \in Q$, то $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p_0q_0} - u + w$, тогда $|\overrightarrow{pq}| = \sqrt{|p_0q_0|^2 + |w - u|^2} \geq |p_0q_0|$, равенство достигается только при $w - u = 0 \Leftrightarrow w = u = 0$ (так как $U \cap W = \emptyset$ - по условию плоскости P и Q скрещиваются), т.е. $p = p_0$, $q = q_0$.

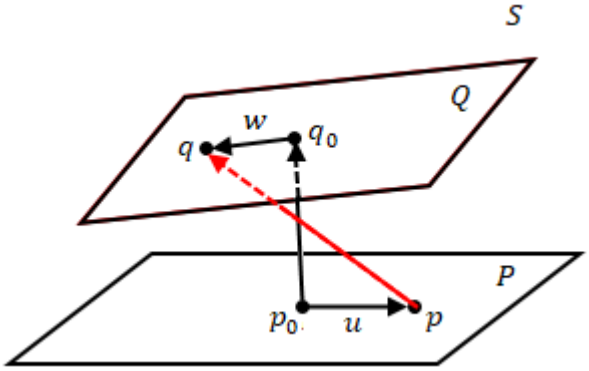

Рис. 22.2. К задаче 51.19 а)

Так как $\varphi \in Isom(S)$, то $\rho(\varphi(p_0), \varphi(q_0)) = \rho(p_0, q_0)$. Но $\varphi(p_0) \in P$, $\varphi(q_0) \in Q$, поэтому $\varphi(p_0) = p_0$, $\varphi(q_0) = q_0$ (так как расстояние между плоскостями достигается на единственной паре точек).

Таким образом, мы получили сразу две неподвижные точки движения φ (неподвижными будут и все точки, лежащие на прямой, их соединяющей). ■

Геометрическое описание движений 2-мерного и 3-мерного евклидова пространства.

Далее будем считать, что в ортогональной системе координат движение задано в виде $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$. Нужно определить его тип и описать это движение геометрически ($\dim S = 2,3$). Алгоритм решения:

- определить тип ортогонального оператора $\mathcal{A}$ (канонический вид),
- определить ось движения φ,
- определить вектор скольжения,
- (если в φ участвует поворот) найти угол и направление поворота.

1) Находим собственные подпространства $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$ и $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E})$. По их размерностям определяем тип $\mathcal{A}$.

2) Находим ось движения $P = p_0 + V_1$, где $p_0 = o + x$, а x удовлетворяет системе $(\mathcal{A} - \mathcal{E})x_\perp = -b_\perp$.

3) Находим вектор скольжения $b_0 = b - b_\perp$

4) Если в φ участвует поворот, то $\dim V_{\pm 1} = 1$, т.е. $V_{\pm 1} = < v >$. Выбираем $w \perp v$ и смотрим, в какой вектор переходит w под действием оператора $\mathcal{A}$. Далее находим угол φ между w и $\mathcal{A}w$: $\varphi = \arccos\frac{(w|\mathcal{A}w)}{|w||w|}$. Осталось определить направление поворота.

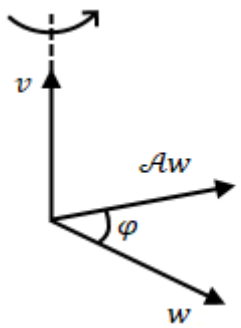

Рис. 22.3. Нахождение угла и направления поворота

Поворот плоскости: если $\det(w, \mathcal{A}w) < 0$, то поворот происходит по часовой стрелке, а если $\det(w, \mathcal{A}w) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки.

Поворот пространства: если $\det(w, \mathcal{A}w, v) > 0$, то поворот происходит по часовой стрелке, а если $\det(w, \mathcal{A}w, v) < 0$, то поворот происходит против часовой стрелки.

Задача 51.24 б). Дать геометрическое описание несобственного движения $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$ евклидова пространства, если:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Решение.

Заметим, что $\det A = -1$, поэтому канонический вид $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, φ – отражение, или скользящее отражение относительно прямой.

1) Ищем $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v = (\sqrt{3}, 1)$. Таким образом, $V_1 = <(\sqrt{3}, 1)>$.

2) Ищем вектор скольжения b_0:

$$b_0 = \frac{(b \mid v)}{(v \mid v)} v = 0$$

Таким образом, φ – это отражение, осталось найти его ось.

3) Имеем: $b_\perp = b - b_0 = b$. Решаем систему $(\mathcal{A} - \mathcal{E})x_\perp = -b_\perp$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & \sqrt{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выберем $p_0 = (2,0)$.

Таким образом, φ – отражение относительно прямой, проходящей через точку $(2,0)$ и направляющим вектором $(\sqrt{3}, 1)$. ■

Задача. Дать геометрическое описание движения $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$ евклидова пространства, если:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

1) Ищем $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v = (1, 1, 1)$. Таким образом, $V_1 = <(1, 1, 1)>$.

Ищем $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E})$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица $A + E$ невырождена, т.е. $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E}) = \{0\}$.

Таким образом, φ - поворот вокруг оси, или винтовое движение (см. окончание решения в начале семинара 24). ■

Семинар 23. Приведение квадратичной функции к каноническому виду и к главным осям. Аффинная и метрическая классификация вещественных квадрик.

Задача 51.21. Доказать, что для всякого движения $\varphi\colon S \to S$ евклидова пространства совокупность точек $p \in S$, на которых достигается минимум расстояния $\rho(p, \varphi(p))$, является плоскостью, инвариантной относительно φ, и что ограничение φ на эту плоскость есть параллельный перенос.

Решение.
Так как φ – движение, то $\rho(p, \varphi(p)) = \rho(\varphi(p), \varphi^2(p))$, т.е. множество $p \in S$, на которых достигается минимум расстояния $\rho(p, \varphi(p))$, инвариантно относительно φ.

Пусть $P = p_0 + V_1$ – ось движения φ. Тогда для любой точки $p \in S$ выполнено: $p = p_0 + v$, где $v \in V$. Пространство V можно разложить в прямую сумму: $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$, т.е. v можно представить в виде $v = v_0 + v_{\perp}$, где $v_0 \in V_1$, $v_{\perp} \in V_1^{\perp}$.

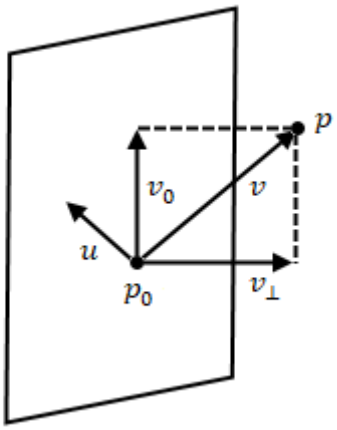

Рис. 23.1. К задаче 51.21

Тогда $\varphi(p) = \varphi(p_0) + \mathcal{A}v = p_0 + u + \mathcal{A}v_0 + \mathcal{A}v_{\perp}$, где $\mathcal{A} = d\varphi$, $u \in V_1$. Получаем

$$\rho(p, \varphi(p)) = \left|\overrightarrow{p\varphi(p)}\right| = |u + (\mathcal{A} - \mathcal{E})v_{\perp}| = \sqrt{|u|^2 + |(\mathcal{A} - \mathcal{E})v_{\perp}|^2}$$

Полученное выражение будет минимальным при $v_{\perp} = 0$, т.е. минимум расстояния $\rho(p, \varphi(p))$ достигается на оси движения φ. Тот факт, что ограничение φ на ось движения есть параллельный перенос, был доказан на лекциях. ■

Задача 49.28. Пусть $\varphi\colon S \to S$ – аффинное преобразование аффинного пространства (S, V) над полем K, имеющее конечный порядок n. Доказать, что если $char\ K \nmid n$, то φ имеет неподвижную точку. Верно ли это, если $char\ K \mid n$?

Решение.
Пусть $p \in S$, тогда точка

$$p_0 = \frac{1}{n}p + \frac{1}{n}\varphi(p) + \frac{1}{n}\varphi^2(p) + \cdots + \frac{1}{n}\varphi^{n-1}(p)$$

будет неподвижной: $\varphi(p_0) = p_0$.
Если $char\ K \mid n$, то утверждение задачи неверно – в качестве контрпримера можно рассмотреть сдвиг на ненулевой вектор. ■

Задача 49.33 а). Существует ли аффинное преобразование φ, переводящее точки a, b, c соответственно в точки a_1, b_1, c_1, а прямую l – в прямую l_1, если:

$$a = (1,1,1,1),\ \ b = (2,3,2,3),\ \ c = (3,2,3,2),\qquad l = (1,2,2,2)\ +\ (0,1,0,1)t,$$

$$a_1 = (-1,1,-1,1),\ \ b_1 = (0,4,0,4),\ \ c_1 = (2,2,2,2),\qquad l_1 = (-1,2,0,3)\ +\ (1,-5,1,-5)t$$

Решение.
Аффинное преобразование $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$ задается дифференциалом $\mathcal{A} = d\varphi$ и вектором сдвига b. Нам нужно, чтобы при этом преобразовании точка a переходила в точку a_1 – получаем, что вектор сдвига $b = \overrightarrow{aa_1}$ равен $(-2, 0, -2, 0)$.

Также из условия задачи следует, что $\mathcal{A}$ должно переводить векторы $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{ac}$ в векторы $\overrightarrow{a_1b_1}$ и $\overrightarrow{a_1c_1}$ соответственно, а также направляющий вектор прямой l в направляющий вектор прямой l_1:

$$\overrightarrow{ab} = (1,2,1,2) \mapsto (1,3,1,3) = \overrightarrow{a_1b_1}$$
$$\overrightarrow{ac} = (2,1,2,1) \mapsto (3,1,3,1) = \overrightarrow{a_1c_1}$$
$$\vec{v} = (0,1,0,1) \mapsto (1,-5,1,-5)t = t\overrightarrow{v_1}$$

Эти условия задают матричное уравнение на матрицу A, которое имеет решение.

Ответ: существует.

Приведение квадратичной функции на аффинном пространстве к каноническому виду.

В некоторой системе координат квадрику $Z(Q) = \{p \in S \mid Q(p) = 0\}$ можно задать одним из следующих уравнений:

I. $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 1$ (центральные не конические квадрики),

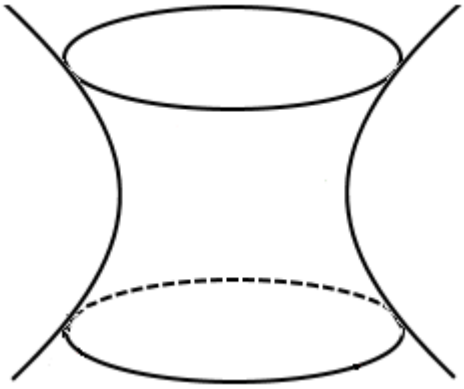

Рис. 23.2. Центральная не коническая квадрика

I′. $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0$ (центральные конические квадрики),

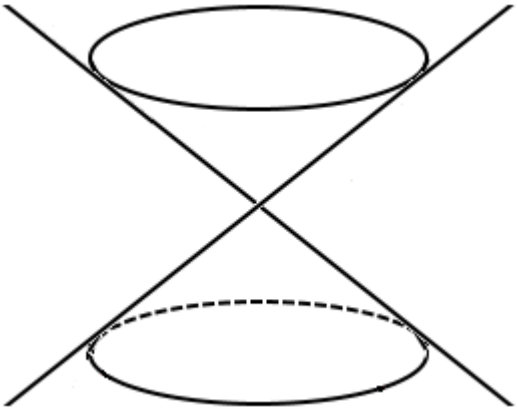

Рис. 23.3. Центральная коническая квадрика

II. $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = x_{r+1}$ (нецентральные квадрики)

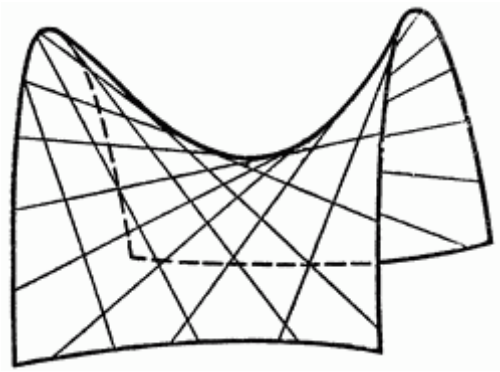

Рис. 23.4. Нецентральная квадрика

Тип I, I′ или II и число r определены однозначно. При $K = \mathbb{C}$ можно считать, что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 1$, при $K = \mathbb{R}$ можно считать, что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$, $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_r = -1$,

причем пара $(k, r-k)$ определена однозначно. В евклидовом случае можно считать систему координат ортогональной и тогда $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ определены однозначно с точностью до перестановки в случаях I и II и с точностью до одновременного умножения на константу в случае I$'$.

Также используется терминология:

- Цилиндрические квадрики: $r < n = \dim S$ (тип I, I$'$) или $r+1 < n = \dim S$ (тип II).
- Эллипсоиды: квадрики вида $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.
- Гиперболоиды: квадрики вида $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 1$.
- Параболоиды: квадрики вида $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 = x_n$.

Задача 52.20 а). Найти аффинный и метрический типы квадрики, заданной в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением:

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j + x_1 + x_{n+1} = 0$$

Решение.
Найдем центр Q:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1/2 & 0 & | & -1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & | & -1/2 \end{pmatrix}$$

- данная система несовместна, значит, у Q нет центра. Однако, если не принимать во внимание координату x_{n+1} (которая не входит в квадратичную часть Q), то можно получить совместную систему относительно $x_1, \dots, x_n$, из которой мы найдем вектор сдвига, который упростит дальнейшие преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 & | & -1/2 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & \vdots & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 & | & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & | & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & | & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & | & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & | & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & | & -\frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & | & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Получаем решение $o' = \left(\frac{-n}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{n+1}\right)$ – если сдвинуть начало координат в эту точку, то новые координаты точки p будут выглядеть так:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{n}{n+1} \\ x_2' = x_2 - \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ x_n' = x_n - \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

Тогда

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{n} (x_i')^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i' x_j' + x_{n+1}' + c' = 0,$$

где $c' = Q(o')$.

Теперь приведем к главным осям квадратичную часть. Найдем собственные значения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- заметим, что $\lambda = \frac{1}{2}$ является собственным значением кратности $n-1$ (так как ранг матрицы $A - \lambda E$ равен 1): $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}$, тогда (так как $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = tr\ C = n$), $\lambda_n = \frac{n+1}{2}$.

Тогда в новых координатах $Q(p)$ будет выглядеть так:

$$Q(p) = \frac{1}{2}\tilde{x}_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}\tilde{x}_{n-1}^2 + \frac{n+1}{2}\tilde{x}_n^2 - \tilde{x}_{n+1},$$

где $-\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1}' + c'$.

Таким образом, наша квадрика – параболоид. ■

Семинар 24. Вычисление значений и компонент тензоров в разных базисах. Разложимость тензоров в тензорное произведение.

Продолжим решение задачи, которую мы начали решать в конце семинара 22.

Задача. Дать геометрическое описание движения $\varphi(x) = \mathcal{A}x + b$ евклидова пространства, если:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

1) Ищем $V_1 = Ker\,(\mathcal{A} - \mathcal{E})$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v = (1, 1, 1)$. Таким образом, $V_1 = <(1, 1, 1)>$.

Ищем $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E})$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица $A + E$ невырождена, т.е. $V_{-1} = Ker\,(\mathcal{A} + \mathcal{E}) = \{0\}$.

Таким образом, φ - поворот вокруг оси, или винтовое движение.

2) Ищем вектор скольжения $b_0 = b - b_\perp$:

$$b_0 = \frac{(b \mid v)}{(v \mid v)} v = v$$

3) Имеем: $b_\perp = b - b_0 = (1, 0, -1)$. Ищем ось движения $P = p_0 + V_1$, где $p_0 = o + x$, а x удовлетворяет системе $(\mathcal{A} - \mathcal{E})x_\perp = -b_\perp$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выберем $p_0 = (1,2,0)$.

Таким образом, φ – винтовое движение, ось – прямая, проходящей через точку $(1,2,0)$ с вектором скольжения $(1,1,1)$.

4) Осталось определить угол и направление поворота. Выберем $w \perp v$ (например, $w = b_\perp = (1,0,-1)$) и найдем, в какой вектор переходит w под действием оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}w = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Угол поворота α между w и $\mathcal{A}w$:

$$\alpha = \arccos\frac{(w|\mathcal{A}w)}{|w||w|} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Направление поворота: если $\det(w, \mathcal{A}w, v) > 0$, то поворот происходит по часовой стрелке, а если $\det(w, \mathcal{A}w, v) < 0$, то поворот происходит против часовой стрелки.

$$\det(w, \mathcal{A}w, v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Итак, φ – винтовое движение, ось – прямая, проходящей через точку $(1,2,0)$ с вектором скольжения $(1,1,1)$, поворот происходит на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке. ■

Тензорная алгебра.

Задача 47.3 а). Найти значение тензора $T = A \otimes B - B \otimes A \in \mathbb{T}_5^0(V)$ от набора $(v_1, \dots, v_5)$:
$A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2 \in \mathbb{T}_2^0(V)$,
$B = e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3) \in \mathbb{T}_3^0(V)$,
$v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_2 + e_3, v_4 = v_5 = e_2$.

Решение.

$$T(v_1, \dots, v_5) = A(v_1, v_2)B(v_3, v_4, v_5) - B(v_1, v_2, v_3)A(v_4, v_5)$$

Имеем:

$$A(v_1, v_2) = e^1(v_1)e^2(v_2) + e^2(v_1)e^3(v_2) + e^2(v_1)e^2(v_2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$B(v_3, v_4, v_5) = e^1(v_3)e^1(v_4)\big(e^1(v_5) - e^3(v_5)\big) = 0 \cdot 0(0 - 0) = 0$$

$$B(v_1, v_2, v_3) = e^1(v_1)e^1(v_2)\big(e^1(v_3) - e^3(v_3)\big) = 1 \cdot 1(0 - 1) = -1$$

$$A(v_4, v_5) = e^1(v_4)e^2(v_5) + e^2(v_4)e^3(v_5) + e^2(v_4)e^2(v_5) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

Получаем

$$T(v_1, \dots, v_5) = A(v_1, v_2)B(v_3, v_4, v_5) - B(v_1, v_2, v_3)A(v_4, v_5) = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$$

Ответ: 1.

Задание тензоров в координатах.

Разложение тензора $T \in \mathbb{T}_p^q(V)$ по тензорному базису имеет вид:

$$T = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \le n} T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q},$$

где $T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$ – компоненты тензора T в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. В сокращенном виде:

$$T = T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}$$

Операции над тензорами в координатах.

1) Сложение.

$$(T + S)_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} + S_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}$$

2) Умножение на скаляры.

$$(\lambda T)_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = \lambda T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q}$$

3) Тензорное умножение.

$$(T \otimes S)_{i_1 \cdots i_{p+k}}^{j_1 \cdots j_{q+l}} = T_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} \cdot S_{i_{p+1} \cdots i_{p+k}}^{j_{q+1} \cdots j_{q+l}}$$

Задача 47.5. Найти координату $\tilde{T}_{123}^{12}$ тензора $T \in \mathbb{T}_3^2(V)$, все координаты которого в базисе (e_1, e_2, e_3) равны 2, в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\tilde{T}_{123}^{12} = T(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}^1, \tilde{e}^2)$$

Имеем:

$$\tilde{e}_1 = e_1, \qquad \tilde{e}_2 = 2e_1 + e_2, \qquad \tilde{e}_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3,$$

также

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}^1 \\ \tilde{e}^2 \\ \tilde{e}^3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}$$

Найдем C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\tilde{e}^1 = e^1 - 2e^2 + e^3, \qquad \tilde{e}^2 = e^2 - 2e^3, \qquad \tilde{e}^3 = e^3$$

В нашем случае разложение тензора $T \in \mathbb{T}_3^2(V)$ по тензорному базису имеет вид:

$$T = \sum_{1 \le i,j,k,l,m \le 3} 2e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e_l \otimes e_m = 2(e^1 + e^2 + e^3) \otimes (e^1 + e^2 + e^3) \otimes$$

$$\otimes (e^1 + e^2 + e^3) \otimes (e_1 + e_2 + e_3) \otimes (e_1 + e_2 + e_3)$$

Тогда

$$\tilde{T}_{123}^{12} = T(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}^1, \tilde{e}^2) =$$

$$= 2(1+0+0)(2+1+0)(3+2+1)(1-2+1)(1-2+0) = 0$$

Ответ: 0.

Задача 47.1 а), д). Какие из следующих тензоров, заданных своими координатами, разложимы:
а) $T_{ij} = ij$,
д) $T_k^{ij} = \delta_{ij}\delta_{jk}$.

Решение.
а) Да:

$$T = S \otimes R,$$

где $S_i = i$, $R_i = i$.

д) Нет. Пусть $T_k^{ij} = \delta_{ij}\delta_{jk} = S^{ij}R_k$. Так как

$$T_k^{ij} = \delta_{ij}\delta_{jk} = \begin{cases} 1, \text{при } i = j = k \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

то должно быть выполнено

$$S^{ij} = \begin{cases} \lambda_i, \text{при } i = j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \qquad R_k = \frac{1}{\lambda_k}$$

Выбирая $i = j \neq k$ получаем

$$T_k^{ii} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \neq 0$$

- противоречие.

Остальные варианты разложения T_k^{ij} разбираются аналогично. ■

Семинар 25. Тензоры типа (1,1) и линейные операторы. Свёртка тензоров. Тензорное произведение линейных операторов, его след.

Задача 47.1 е). Какие из следующих тензоров, заданных своими координатами, разложимы:
е) $T_{ijk} = \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{k1}$.

Решение.
Да:

$$T = S \otimes R,$$

где

$$S_i = \begin{cases} 1, \text{при } i = 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \qquad R_{ij} = \begin{cases} 1, \text{при } i = j = 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

■

Задача. Доказать, что тензор det не является разложимым.

Решение.
Пусть $\det = S \otimes T$, где S – тензор типа $(k, 0)$, T – тензор типа $(n-k, 0)$.

Заметим, что $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ линейно независимы. С другой стороны,

$$\det(v_1, \dots, v_n) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_n)$$

Отсюда следует:

1) Если набор векторов $v_1, \dots, v_k$ можно дополнить до базиса (т.е. эти векторы линейно независимы), то $S(v_1, \dots, v_k) \neq 0$.

2) Аналогично, если векторы $v_{k+1}, \dots, v_n$ линейно независимы, то $T(v_{k+1}, \dots, v_n) \neq 0$.

Пусть векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно независимы. Рассмотрим систему $v_1, \dots, v_k, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1}$ – она линейно зависима, поэтому $\det(v_1, \dots, v_k, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1}) = 0$. С другой стороны,

$$\det(v_1, \dots, v_k, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_k, \dots, v_{n-1}) \neq 0$$

- противоречие. ■

Задача 47.9 а). Пусть $n = 4$, $T = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 + e^3 \otimes e_4 \in \mathbb{T}_1^1(V)$. Найти все такие $\omega \in V^*$, что $T(v, \omega) = 0$ для любого $v \in V$.

Решение.

$$T(v,\omega) = e^1(v)e_2(\omega) + e^2(v)e_3(\omega) + e^3(v)e_4(\omega) = 0, \qquad \forall v \in V$$

Достаточно проверить, что $T(v,\omega) = 0$ на базисных векторах:

$$\begin{aligned} T(e_1,\omega) &= e_2(\omega) = 0, \\ T(e_2,\omega) &= e_3(\omega) = 0, \\ T(e_3,\omega) &= e_4(\omega) = 0, \\ T(e_4,\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\omega = \lambda e^1$.

Ответ: $\omega = \lambda e^1$.

Задача 47.13 а). Найти полную свертку тензора:

$$T = (e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^2 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4) \in \mathbb{T}_1^1(V)$$

Решение.

$$C_1^1(T) = \sum_i \mathbb{T}_i^i = 1 - 6 - 1 + 3 = -3$$

Ответ: -3.

Задача 47.15 а). Найти $S \in \mathbb{T}_1^1(V)$, такой что $S \to \mathcal{B} = \mathcal{A}^2$ для $T \to \mathcal{A} \in L(V)$, равного $T = (2e^1 - e^3) \otimes (e_1 + e_2)$.

Решение.
Найдем оператор $\mathcal{A}$, соответствующий тензору T:

$$\mathcal{A}(e_j) = C_1^2(T \otimes e_j) = C_1^2\left((2e^1 - e^3) \otimes (e_1 + e_2) \otimes e_j\right) = < 2e^1 - e^3, e_j > (e_1 + e_2) =$$

$$= (e_1 + e_2) \cdot \begin{cases} 2, j = 1 \\ -1, j = 3 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем тензор S, соответствующий оператору $\mathcal{B} = \mathcal{A}^2$:

$$S = 4e^1 \otimes e_1 + 4e^2 \otimes e_2 - 2e^3 \otimes e_1 - 2e^3 \otimes e_2$$

Также можно было заметить, что $A^2 = 2A$, тогда $S = 2T$.

Ответ: $S = 4e^1 \otimes e_1 + 4e^2 \otimes e_2 - 2e^3 \otimes e_1 - 2e^3 \otimes e_2 = 2(2e^1 - e^3) \otimes (e_1 + e_2)$.

Тензорное произведение линейных операторов.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(V)$. Как мы знаем, $L(V) \simeq \mathbb{T}_1^1(V)$, поэтому можно рассмотреть тензорное произведение операторов $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \in \mathbb{T}_2^2(V)$. Пусть $w \in \mathbb{T}_0^2(V)$, тогда и $C_{12}^{34}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes w) \in \mathbb{T}_0^2(V)$, что позволяет нам рассматривать $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ в качестве линейного оператора на пространстве $\mathbb{T}_0^2(V)$.

Несложно понять, как действует оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ на элементы пространства $\mathbb{T}_0^2(V)$: всякий тензор $w \in \mathbb{T}_0^2(V)$ разложим: $w = u \otimes v$, где $u, v \in V$, тогда

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(w) = C_{12}^{34}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes u \otimes v) = \mathcal{A}u \otimes \mathcal{B}v$$

Задача 47.18 а). Пусть $\lambda = tr\mathcal{A}$. Найти $tr(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$.

Решение.

$$tr(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) = C_{12}^{12}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) = \sum_{i,j=1}^{n} < e^i \otimes e^j \mid (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})(e_i \otimes e_j) > =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} < e^i \otimes e^j \mid \mathcal{A}e_i \otimes \mathcal{B}e_j > = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^i a_j^j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^j\right) = (tr\mathcal{A})^2 = \lambda^2$$

Ответ: λ^2.

Семинар 26. Матрица двойственного метрического тензора. Подъём и опускание индексов у тензора. Приведение кососимметрической билинейной функции к каноническому виду с использованием внешнего умножения.

Задача 47.16 б). Пусть на пространстве V задано скалярное произведение с матрицей

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Провести опускание и подъем индекса у тензора

$$T = (e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3$$

Решение.
Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$T = (e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3 = e^1 \otimes e_4 + e^2 \otimes e_3 + e^2 \otimes e_4 - e^3 \otimes e_3$$

Матрица T имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$T_{ij} = \sum_k g_{ik} T_j^k,$$

т.е.

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{T} = \sum_{i,j} T_{ij}\, e^i \otimes e^j = e^3 \otimes e^1 + 2e^3 \otimes e^2 - e^3 \otimes e^3 + 2e^4 \otimes e^1 + 3e^4 \otimes e^2 - e^4 \otimes e^3$$

Аналогично

$$T^{ij} = \sum_k g^{ik} T_k^j,$$

где g^{ik} – элементы матрицы $G^* = G^{-1}$ в базисе $(e^1, \dots, e^n)$. ■

Приведение кососимметрических билинейных функций к каноническому виду.

На лекциях были доказаны теоремы о приведении к каноническому виду симметрических и кососимметрических билинейных функций, причем для симметрических билинейных функций был указан метод нахождения канонического вида (метод Лагранжа). Оказывается, и для кососимметрических билинейных функций существует алгоритм нахождения канонического вида, при котором обычное умножение координатных функций заменяется на внешнее.

Пусть

$$\omega(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}x_iy_j=\sum_{1\le i<j\le n}\omega_{ij}(x_iy_j-x_jy_i)$$

- кососимметрическая билинейная функция. Приведем ее к каноническому виду. Заметим, что

$$x_iy_j-x_jy_i=\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_j & y_j\end{vmatrix}=\left(e^i\wedge e^j\right)(x,y)$$

Тогда

$$\omega=\sum_{1\le i<j\le n}\omega_{ij}e^i\wedge e^j=\sum_{1\le i<j\le n}\omega_{ij}x_i\wedge x_j,$$

где x_i – координатные функции. Без ограничения общности можно считать, что $\omega_{12}\neq 0$. Тогда

$$\omega=\sum_{1\le i<j\le n}\omega_{ij}x_i\wedge x_j=$$

$$=\left(x_1-\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}x_3-\cdots-\frac{\omega_{2n}}{\omega_{12}}x_n\right)\wedge(\omega_{12}x_2+\omega_{13}x_3+\cdots+\omega_{1n}x_n)+\overline{\omega}(x_3,\dots,x_n)$$

Обозначим $x_1'=x_1-\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}x_3-\cdots-\frac{\omega_{2n}}{\omega_{12}}x_n$, $x_2'=\omega_{12}x_2+\omega_{13}x_3+\cdots+\omega_{1n}x_n$, тогда

$$\omega=x_1'\wedge x_2'+\overline{\omega}(x_3,\dots,x_n)$$

Далее повторяем те же действия с $\overline{\omega}(x_3,\dots,x_n)$, и т.д. В итоге получим

$$\omega(x,y)=x_1'y_2'-x_2'y_1'+x_3'y_4'-x_4'y_3'+\cdots+x_{2r-1}'y_{2r}'-x_{2r}'y_{2r-1}'$$

Задача 37.33 б). Привести к каноническому виду симметрическую билинейную функцию:

$$\omega(x,y)=2x_1y_2+x_1y_3-2x_2y_1+3x_2y_3-x_3y_1-3x_3y_2$$

Решение.

$$\omega=2x_1\wedge x_2+x_1\wedge x_3+3x_2\wedge x_3=(x_1-\frac{3}{2}x_3)\wedge(2x_2+x_3)$$

Замена координат:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2' = 2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Получаем

$$\omega(x, y) = x_1'y_2' - x_2'y_1'$$

■

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ