ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. СЕМИНАРЫ

ЛЕВАШОВА
НАТАЛИЯ ТИМУРОВНА

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КАРПОВА АНДРЕЯ ПАВЛОВИЧА

Содержание

Семинар 1. Основные понятия линейной алгебры

Линейное пространство

Введём основные определения.

Определение: **Числовое поле** - множество числовых элементов, для которых результат сложения, вычитания, умножения, деления приводит к элементу из этого множества.

Примеры:

Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Не являются числовыми полями:

- Множество иррациональных чисел $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{R}/\mathbb{Q}$)
- Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$

$\mathbb{K}$ - одно из используемых полей

Определение: **Линейным пространством** L над числовым полем $\mathbb{K}$ назыется множество элементов любой природы, для которых определены операции сложения("+") и умножения на число из поля $\mathbb{K}$ ("$\cdot$"). При этом для этих операций выполнены 8 аксиом:

Аксиомы сложения

1) $\forall x, y \in L : x + y = y + x$

2) $\forall x, t \in L : (x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\exists \theta \in L, \forall x \in L : x + \theta = x$

4) $\forall x \in L, \exists x' \in L : x + x' = \theta$

Аксиомы умножения на число:

5) $\forall x \in L : 1 \cdot x = x$

6) $\forall x \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $\forall x, y \in L, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in L : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta x)$

Важные следствия из аксиом:

$$x + \theta = x$$

$$1 \cdot x = x$$

$$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x \Rightarrow 0 \cdot x = \theta$$

$$\theta = (1 - 1)x = x + (-1) \cdot x$$

$$x + x' = \theta$$

$$x' = (-1) \cdot x = -x$$

Пример: Дано множество положительных чисел P. Для них введены следующие операции:

$\oplus$: $\forall x, y \in P : x \oplus y = x \cdot y$

$\odot$: $\forall x \in P, c \in \mathbb{R} : c \odot x = x^c$

Является ли P линейным пространством? $\theta-$?

Для ответа на первый вопрос проверим выполнение аксиом.

1) $\forall x, y \in P : x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$

2) $\forall x, y, z \in P : (x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y)z = x(y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z)$

3) $\forall x \in P : x \oplus \theta = x \cdot \theta = x \cdot 1 = x$

4) $\forall \in P, \exists x' = x^{-1} : x \cdot x' = x \cdot x^{-1} = 1$

5) $\forall x \in P : 1 \odot x = x^1 = x$

6) $\forall x \in P, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha + x^\beta = \alpha \odot x + \beta \odot x$

7) $\forall x, y \in P, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \odot (x \oplus y) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in P : \alpha \odot (\beta \odot x) = (x^\alpha)^\beta = (\alpha\beta) \odot x$

Таким образом получаем, что P - линейное пространство.

Линейная комбинация, базис, линейное подпространство

Определение: **Линейной комбинацией**(ЛК) элементов линейного пространства(ЛП) L называется любая конечная сумма вида: $\sum_i \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in L, i = 1, 2...$

Определение: Линейная комбинация называется **тривиальной**, если $\forall i, \alpha_i = 0$.

Определение: Элементы $x_1, x_2, ...x_n \in L$ называются **линейно зависимыми**(ЛЗ), если существует нетривиальная ЛК, равная нулевому элементу ЛП $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \theta$.

Определение: Элементы $x_1, x_2, ...x_n \in L$ называются **линейно независимыми**(ЛНЗ), если не существует нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому элементу ЛП.

Замечание: Если $x_1, x_2, ...x_n$-ЛНЗ, и $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \theta$, то $\alpha_i = 0, \forall i$.

Определение: **Размерностью** $\dim L$ ЛП L называется натуральное число n т.ч. в L существует n ЛНЗ элементов, а любые $n+1$ элементов линейно зависимы.

Определение: **Базисом** ЛП L называется набор ЛНЗ элементов из L, т.ч $\forall x \in L$ может быть представлен как ЛК базисных элементов.

Из последних двух определений следует, что размерность ЛП равна количеству базисных элементов.

Для множества P положительных чисел (см. пример выше) определим размерность и базис.

Любой $x \in P$ может быть представлен как $x = 2^{\log_2 x} = 2^C$

Получаем, что число 2 является базисным элементом, следовательно $dimL = 1$

Определение: **Линейным подпространством** ЛП L называется множество $P \subseteq L$ такое что:

1) $\forall x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in P \Rightarrow \alpha x \in P$

Пример: Определить будет ли $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Q}^+$ подпространством ЛП P из предыдущего примера.

Ответ: Нет, так как при $\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha x = x^{\frac{1}{2}}$ не всегда является натуральным(рациональным).

Определение: **Линейной оболочкой** (ЛО) элементов ЛП L называется совокупность всех ЛК элементов этого ЛП.

Пример: Составить ЛО, натянутую на элементы $x = 2, y = 3$ из ЛП P.

Ответ: поскольку x, y являются ЛК одного элемента (например, 2), то линейная оболочка из элементов 2, 3 совпадает с ЛП P.

Задача *Используя метод Гаусса найти базис и размерность ЛО:*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$$

Решение: Обозначим векторы как (x_1, x_2, x_3, x_4).

Применяя алгоритм Гаусса, получаем

$$\begin{pmatrix}1&5&2&4\\0&2&1&1\\1&3&1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&5&2&4\\0&2&1&1\\0&-2&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&5&2&4\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что $x_2 = x_1 + 2x_3$, $x_4 = 2x_1 + x_3$.

Видно, что алгоритм Гаусса сохраняет линейные зависимости стобцов. Связано это с тем, что алгоритм Гаусса - это преобразование, которое является изоморфизмом.

Понятие изоморфизма

Определение: **Изоморфизмом** двух линейных пространств L, L' называется взаимно однозначное соответствие $\forall x \in L \leftrightarrow x' \in L'$, при котором:

1) $\forall x, y \in L : x + y \leftrightarrow x' + y', x', y' \in L'$

2) $\forall x \in L, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha x \leftrightarrow \alpha x', x' \in L'$

Свойства изоморфизма

1) $\theta \in L \leftrightarrow \theta' \in L'$

Доказательство:

Воспользуемся свойством $0 \cdot x = \theta$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Для $x \in L$: $\theta = 0 \cdot x = 0 \cdot x' = \theta' \Rightarrow \theta = \theta'$

2)$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i'$ где $x_i \in L, x_i' \in L'$

Доказательство:

Доказательство проводится методом индукции.

База: свойство 2) изоморфизма;

Предположение: пусть для $k \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i'$.

Для $k+1 : \underbrace{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i}_{\in L} + \underbrace{\alpha_{k+1} x_{k+1}}_{\in L} \overset{\text{св-во1}^o}{\longleftrightarrow} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i' = \sum\limits_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i'$

3) ЛП одинаковой размерности изоморфны.

Доказательство:

Справедливость свойства следует из единственности разложения по базису.

Из свойств 1-3 следует изоморфность алгоритма Гаусса.

Задача. *Достроить ЛО векторов из предыдущей задачи до базиса в L_3*

Решение: Из системы векторов (x_1, x_2, x_3, x_4) векторы x_1, x_3 являются линейно независимыми.

Как было получено: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Из вида последней матрицы ясно, что в качестве третьего вектора, дополняющего x_1, x_3 до базиса, можно выбрать: $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Убедимся, что полученная совокупность векторов линейно независима.

$det(x_1, x_3, y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Чтд.

Сумма и пересечение линейных подпространств

Определение: Линейное пространство L называется **суммой** ЛП P и Q ($L = P \cup Q$), если $\forall x \in P \Rightarrow x \in L$ и $\forall y \in Q \Rightarrow y \in L$

Определение: Линейное пространство V называется **пересечением** ЛП P и Q ($L = P \cap Q$), если $\forall x \in V \Rightarrow x \in P, x \in Q$

Задача. *Найти размерность и базис суммы и пересечения ЛПП:*

$$P = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\}; \qquad Q = L\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\}$$

Решение: Нетрудно заметить, что для P векторы $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ являются ЛНЗ и образуют базис.

Для Q базисом является вектор $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Так как размерности L и P совпадают, то P изоморфно L. Следовательно новых ЛНЗ векторов с двумя координатами нет ни в P, ни в Q. Поэтому любой вектор $x \in Q$ будет принадлежать P. Т.е. $P \cup Q = P = L$.

Пересечнием же является вектор, принадлежащий и P и Q. Значит $P \cap Q = Q$.

Теорема. $\dim(P \cup Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$

Доказательство:

Пусть $e_1, e_2, ...e_r$ - базис в $P \cap Q$.

Пусть $f_1, f_2, ...f_p$ - дополнение $\{e_i, i = 1, r\}$ до базиса P.

Пусть $g_1, g_2, ...g_q$ - дополнение $\{e_i, i = 1, r\}$ до базиса Q

Тогда $\dim(P + Q) = r + p + q = \underbrace{r + p}_{\dim P} + \underbrace{r + q}_{\dim Q} - r = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$.

Чтд.

Задача №1. *Показать , что если размерность $P \cup Q$ на 1 больше размерности $P \cap Q$, то одно из ЛПП(P или Q) содержится в другом.*

Решение: $\dim(P \cup Q) = \dim(P \cap Q) + 1 \overset{\text{по теореме}}{=} \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim P + \dim Q = 2\dim(P \cup Q) + 1$

Пусть для определённости $\dim P > \dim Q$. Тогда $\underbrace{\dim P}_{\geqslant \dim(P \cap Q)} + \underbrace{\dim Q}_{\geqslant \dim(P \cap Q)} = 2\dim(P \cap Q) + 1 \Rightarrow \dim P = \dim(P \cap Q) + 1, \dim Q = \dim(P \cap Q)$

В итоге получаем: $\dim(P \cup Q) = \dim P + \dim Q - \underbrace{\dim(P \cap P)}_{\dim Q} = \dim P \Rightarrow Q \subset P$ $(\forall x \in Q \in (P \cup Q) = P)$

Задача №2. *Пусть дано ЛП L, $P \subseteq L, Q \subseteq L$ и $\dim P + \dim Q > \dim L$. Нужно доказать, что $P \cap Q$ содержит ненулевой элемент θ.*

Решение: Докажем от противного. Пусть $P \cap Q = \theta \Rightarrow \dim(P \cap Q) = 0$. Тогда по теореме $\underbrace{\dim(P \cup Q)}_{\leqslant \dim L} = \underbrace{\dim P + \dim Q}_{> \dim L}$. Пришли к противоречию.

Задача №3. *Найти размерность и базим суммы и пересечения ЛПП*

$$P = L\{\overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{x_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}\}, Q = L\{\overset{y_1}{\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}}, \overset{y_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{y_3}{\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}}\}$$

Решение: Заметим, что $x_2 = x_1 - x_3$, $y_2 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_3)$. Также можно убедиться, что векторы x_1 и x_3, y_1 и y_3 ЛНЗ. Получаем:

$\dim P = 2$, базис $\{x_1, x_3\}$, $\dim Q = 2$, базис $\{y_1, y_3\}$.

Найдём размерность суммы P и Q. Для этого посчитаем определитель (x_1, x_3, y_1) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -11 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Следовательно (x_1, x_3, y_1) - ЛНЗ и образуют базис и $P \cup Q = L \Rightarrow \dim(P \cup Q) = \dim L$

Поскольку $\dim P + \dim Q = 2 + 2 = 4 > 3 = \dim(P \cup Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) \neq 0$

$\dim(P \cup Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) = 2 + 2 - 3 = 1$

Пусть $x \in (P \cap Q)$. Раскладывая по базису в P и в Q, получим $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 = \alpha_3 y_1 + \alpha_4 y_3$.

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_3 - \alpha_3 y_1 - \alpha_4 y_3 = \theta$

Запишем получившуюся систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \theta$$

Применим алгоритм Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 11 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исходная система приняла вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Положив $\alpha_4 = 1$, получим $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -1$.

В итоге $x = -x_1 + 2x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$x = -y_1 + y_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Следовательно пересечением P и Q является вектор x.

Задача №4 *Найти размерность и базис суммы и пересечения ЛПП*

$$P = L\{\overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}}, \overset{x_3}{\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}}\}, Q = L\{\overset{y_1}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}, \overset{y_2}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{y_3}{\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}}\}$$

Решение: Очевидно, что $\dim P = 1$, базис: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Для Q заметим, что $y_3 = y_1 + y_2$, при этом y_1, y_2 - ЛНЗ, следовательно $\dim Q = 2$, базис: y_1, y_2.

Проверим линейную зависимость x_1, y_1, y_2.

$$det(x_1, y_1, y_2) = \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + (-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow (x_1, y_1, y_2)\text{-ЛНЗ}$$

Следовательно $\dim(P \cup Q) = 3 = \underbrace{\dim P}_{=1} + \underbrace{\dim Q}_{=2} - \dim(P \cap Q) \Rightarrow \dim(P \cap Q) = 0$

Определение: Будем называть ЛПП P и Q **линейно независимыми**, если из равенства $x + y = \theta$, где $x \in P, y \in Q$ следует $x = \theta, y = \theta$.

Определение: Сумма линейно независимых подпространств называется **прямой суммой**. Обозначается как $P \oplus Q$.

Утверждение: Если $L = P \oplus Q$, то $\forall x \in L$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in P, z \in Q$.

Доказательство: Докажем от противного. Пусть имеются два представления. $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, где $y_1, y_2 \in P, z_1, z_2 \in Q$.

$$x - x = \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\in P} + \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\in Q} = \theta \overset{\text{из ЛН ЛПП}}{\Rightarrow} y_1 - y_2 = z_1 - z_2 = \theta.$$

Задача №5 *Докажите, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой пространства многочленов чётных степеней не выше n и пространства многочленов нечётных степеней не выше n*

Решение: $P_n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\\vdots\\a_0\end{pmatrix}$

Для определённости положим $n = 2k$. Тогда $P_{2k} = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + ... + a_0$.

Если $P_{2k} = P_{\text{чёт}} + P_{\text{нечёт}} = \theta \Rightarrow \underbrace{a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + ... + a_0}_{P_{\text{чёт}}} =$

$= \underbrace{-a_{2k-1}x^{2k-1} - a_{2k-3}x^{2k-3} - ... - a_1 x}_{P_{\text{нечёт}}}$

Получаем, что многочлен с чётными степенями при всех x должен быть равен многочлену с нечётными степенями. Такое возможно, если все коэффициенты многочленов равны нулю $a_i = 0, i = \overline{1, 2k}$.

Получаем, что из $P_{\text{чёт}} + P_{\text{нечёт}} = \theta$ следует, что $P_{\text{чёт}} = \theta$ и $P_{\text{нечёт}} = \theta$. Т.е. $P_{\text{чёт}}$

и $P_{\text{нечёт}}$ являются ЛН, а значит их сумма является прямой.

Семинар 2. Системы линейных алгебраических уравнений.

Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Изучение темы будем проводить на примере следующей системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \theta$$

Эту систему можно переписать в таком виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \theta$$

Тем самым решение этой однородной системы эквивалентно нахождению линейной зависимости столбцов матрицы.

Линейные зависимости удобно искать методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку алгоритм Гаусса не меняет коэффициентов линейных комбинация в линейных зависимостях, можно записать:

$$x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$$

$$x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 2x_1 + 13x_4 - x_5$

$x_3 = 5x_4 + x_5$

Учитывая полученные зависимости, столбец x можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 13x_4 - x_5 \\ 5x_4 + x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, где x_1, x_4, x_5-произвольные числа.

Замечание 1. Количество произвольных коэффиентов равно размерности пространства решений минус ранг матрицы системы (в нашем примере: $5 - 2 = 3$).

Замечание 2. Любое решение системы может быть представлено как линейная комбинация линейно независимых столбцов.

Замечание 3. Линейно независимые столбцы матрицы системы образуют базис в подпространстве решений.

Определение: Базис в пространстве решений однородной системы линеёных алгебраических уравнений называется **фундаментальной совокупностью решени** (ФСР).

На рассмотренном примере определим *алгоритм нахождения НФСР (нормальной ФСР)*:

1) Преобразовываем систему с помощью алгоритма Гаусса.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где A - матрица системы.

2) Определив ранг матрицы системы, находим размерность пространства решений l.

$$l = n - r$$

, где n-число неизвестных, r - ранг матрицы системы.

В примере: $l = 5 - 2 = 3$

3) Находим ФСР, состоящую из l ЛНЗ столцов с n координатами.

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Выделяем из системы *базисные неизвестные*(не путать с базисом), т.е. такие неизвестные, которые входят только в одно уравнение системы. В нашем случае это x_2 и x_3. Остальные переменные, которые принято называть *свободными*, в общем решении могут принимать произвольные значения. Выберем их таким образом, чтобы наши искомые 3 столбца были линейно независимыми. Самый простой вариант это:

$$\begin{pmatrix}1\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Для отыскания оставшихся координат, подставляем столбцы ФСР в исходную систему уравнений. Подставив первый столбец, получим:

$$\begin{cases}-2+x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

После постановки второго получим:

$$\begin{cases}x_2-13=0\\ x_3-5=0\end{cases}$$

И наконец, подставляя полследний столбец, приходим к системе:

$$\begin{cases}x_2-1=0\\ x_3+1=0\end{cases}$$

В итоге полученная ФСР имеет вид:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Задача. *Построить НФСР для ОСАУ* $AX=\theta$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&-2&1\\3&1&0&2\\4&1&2&3\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

Решение: Заметим, что $X\in L_4$. Определим ранг матрицы A

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&1&-2&1\\3&1&0&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-6&-1\\0&1&-6&-1\\0&1&-6&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-6&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Как видно $rankA=2$. Значит $l=4-2=2$.

Первые 2 столбца матрицы определим как базисные, остальные как свободные.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Выбирая 3 и 4 столбцы так, чтобы они были ЛНЗ, получим:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Подставляем столбцы в систему и находим неизвестные:

Для первого:

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 0 \\ x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Для второго:

$$\begin{cases} x_1 + 2 = 0 \\ x_2 - -6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений(НСЛАУ)

Теорема (Кронекера-Капелли). *НСЛАУ разрешима тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы.*

$AX = B$, где A-основная матрица, $(A|B)$ -расширенная матрица.

Теорема. *Общее решение НСЛАУ равно сумме общего решения ОСЛАУ и любой отличному от нуля частному решению НСЛАУ.*

Пример:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & -3 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Как было получено ранее:

$$X_{\text{общ}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для определения частного решения системы положим $x_1 = x_4 = x_5 = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{общ}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Семинар 3. Составление системы уравнений по заданной фундаментальной совокупности решений (ФСР). Преобразование базиса по координатам.

Составление системы уравнений по заданной фундаментальной совокупности решений

Задача. *Дано:*

$$x_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -10 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Составить систему ЛАУ, для которых x_1 и x_2 являются ФСР.

Решение: Как видно векторы x_1 и x_2 линейно независимы. Будем исходить из следующих соображений: если какой-то вектор x является решением системы, то векторы x_1, x_2 и x - линейно зависимы.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & x_1 \\ -10 & 4 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы полученные три вектора из четырёх координат оказались линейно зависимы, нужно, чтобы базисный минор этой был размером 2x2 ($rankM = 0$). Используем метод Гаусса и получим необходимые соотношения.

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & x_1 \\ -10 & 4 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ -1 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -12 & 6 & x_1 \\ -10 & 4 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -6 & 12x_3 + x_1 \\ 0 & -6 & 10x_3 + x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2x_3 + x_1 - x_2 \\ 0 & -6 & 10x_3 + x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы ранг полученной матрицы был равен 2, нужно, чтобы первый и четвертый элементы третьей строки были равны нулю. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_3 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Преобразование базиса

Стандартный базис - базис, состоящий из векторов, у которых одна координата единичная, а остальные равны нулю.

Стандартный базис в L_3:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование в другой базис e' будет выглядеть следующим образом:

$$e' = eC$$

, где C-матрица перехода.

Поскольку матрица $e = (e_1, e_2, e_3)$ является единичной, то *матрица перехода от базиса e к e' состоит из столбцов координат нового базиса в старом.*

Данное правило справедливо для любых базисов.

Преобразование координат

Пусть имеется $X \in L_n$, а также два различных базиса e', e.

$e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, $e = \{e_1, e_2, e_3\}$

Запишем разложение X по двум базисам.

$e_i x'^i = X = e'_i x^i$

Вводя обозначения $C = \{c^i_{i'}\}$, $C^{-1} = \{c^{i'}_i\}$ (тензорная запись) и учитывая, что $e = C^{-1}e'$ или по-другому $e_i = e_{i'} c^{i'}_i$, приходим к следующим соотношениям:

$e_i x'^i = e'_i x^i = e_{i'} c^{i'}_i x^i$

Из последнего соотношения следует закон преобразования координат:

$$x^{i'} = c^{i'}_i x^i$$

или

$$X' = C^{-1}X$$

Обратим внимание, что координаты преобразуются с помощью обратной матрицы перехода в отличие от базиса.

Те объекты, которые преобразуются с помощью прямой матрицы перехода, называются **ковариантными**, а те объекты, которые преобразуются с помощью обратной матрицы перехода, называются **контравариантными**. При этом для контравариантных величин индексы обычно пишутся сверху, а для ковариантных снизу.

Задача. *В стандартном базисе даны наборы ЛНЗ векторов.*

$$f = \{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\}, g = \{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\}$$

Нужно получить матрицу перехода от базису к f и g.

Решение: Пусть:

$g = fC$

При этом справедливо следующее:

$$\begin{cases} f = eF \\ g = eG \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} fF^{-1} = e \\ g = fF^{-1}G \end{cases}$$

, где F, G-матрицы переходов от стандартного базиса e к базисам f и g соответственно.

Таким образом из последнего выражения видно, что $C = F^{-1}G$.

Найдём F^{-1} с помощью алгоритма Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Таким образом

$$F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = F^{-1}G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача. *Дан вектор X в базисе f:*

$$X_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найти X_g

Решение: Как мы уже знаем:

$$X_g = C^{-1} X_f$$

Матрицу перехода C мы нашли в предыдущем задании.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью алгоритма Гаусса найдём C^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В итоге:

$$X_g = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Семинар 4. Линейные операторы.

Определение: **Линейным оператором** (ЛО), действующим из пространства L_n в пространство L_m называется векторная функция $A(\vec{x})$ векторного аргумента, обладающая свойствами линейности:

1) $A\vec{x} + \vec{y} = A(\vec{x}) + A(\vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n$

2) $A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x}), \forall \vec{x} \in L_n, \alpha \in \mathbb{K}$

Определение: **Матрицей линейного оператора** $A(e)$ называется результат действия этого оператора на базис.

$$\vec{a_i} = A(\vec{e_i})$$

$$\vec{a_i} = a_i^k \vec{e_k}$$

$$A = \{a_i^k\}$$

Рассмотрим действие оператора A на вектор $\vec{y} \in L_n$

$$A(\vec{y}) = A(e_i y^i) = y^i A(e_i) = y^i \vec{a_i} = y^i a_i^k e_k = AY$$

Закон преобразования операторов

Пусть Y'- столбец координат вектора $Y = AX$ в базисе $e' = eC$.

$$A'X' = Y' = C^{-1}Y = C^{-1}AX = C^{-1}ACX'$$

Таким образом в матричном виде закон преобразования оператора имеет вид:

$$A' = C^{-1}AC$$

Получим теперь вид преобразования в тензорном виде.

$$e_{i'} a_{k'}^{i'} x^{k'} = \vec{y} = e_{i'} y^{i'} = e_{i'} c_i^{i'} y^i = e_{i'} c_i^{i'} a_k^i x^k = e_{i'} c_i^{i'} a_k^i c_{k'}^k x^{k'}$$

В итоге:

$$a_{k'}^{i'} = c_i^{i'} a_k^i c_{k'}^k$$

Поскольку преобразование осуществляется как с помощью прямой матрицы перехода C, так и с помощью обратной C^{-1}, линейный оператор является 1 раз ковариантным и 1 раз контравариантным тензором (тензор 2 ранга).

Задача. *Пусть $\vec{y} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ -фиксированный вектор ЛП L_3, A - оператор: $\forall x \in L_3 : A(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{y}]$. Докажите, что оператор A линейный и найдите его матрицу в базисе $\{i, j, k\}$.*

Решение: Линейность оператора непосредственно следует из линейности векторного произведения. Найдём матрицу оператора.

Каждый столбец матрицы A - это координаты столбца, являющегося результатом действия оператора на базисные векторы.

$$\vec{a_1} = [\vec{i}, \vec{y}] = [\vec{i}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}] = \underbrace{a[\vec{i}, \vec{i}]}_{=0} + b[\vec{i}, \vec{j}] + c[\vec{i}, \vec{k}] = b\vec{k} - c\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_2} = [\vec{j}, \vec{y}] = [\vec{i}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}] = a[\vec{j}, \vec{i}] + \underbrace{b[\vec{j}, \vec{j}]}_{=0} + c[\vec{j}, \vec{k}] = -a\vec{k} + c\vec{i} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_3} = [\vec{k}, \vec{y}] = [\vec{k}, a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}] = a[\vec{k}, \vec{i}] + b[\vec{k}, \vec{j}] + \underbrace{c[\vec{k}, \vec{k}]}_{=0} = a\vec{j} - b\vec{i} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Задача. *Найти матрицу оператора дифференцирования* $D(\cos x, \sin x)$ $x \in \mathbb{R}$.

Решение: Как мы уже говорили, любое двумерное пространство изоморфно двумерному пространству столбцов с двумя координатами. Поэтому мы можем поставить взаимно однозначное соответствие:

$$\cos x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \sin x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\cos x) = -\sin x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad D(\sin x) = \cos x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

В итоге: $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Задача. *В двумерном линейном пространстве* B_2 *радиус-векторов с общим началом* O *задан ортонормированный базис* $\{e_1, e_2\}$ *и введена прямоугольная система координат. ЛО* A *переводит* $\forall \vec{a} \in B_2$ *в вектор* $\vec{b}$*, симметричный* $\vec{a}$ *относительно прямой* $x^2 = kx^1$*. Найти матрицу в базисе* $\{e_1, e_2\}$

Решение: Пусть f_1 - вектор, направленный вдоль прямой, а f_2-вектор, перпендикулярный ей, тогда $Af_1 = f_1$ и $Af_2 = -f_2$. Получаем, что в базисе f:

$$A_f = (f_1, f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Определим матрицу перехода из e в f. Для начала запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{k}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

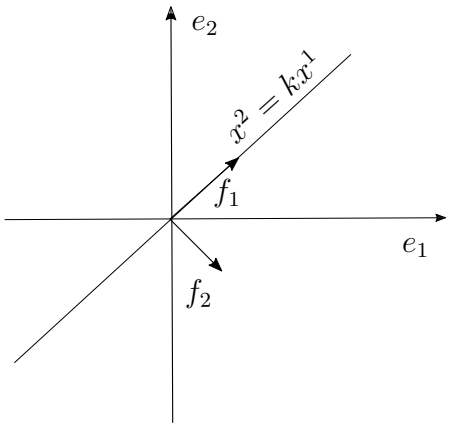

Рис. 4.1: Рисунок к задаче

Отсюда получаем, что $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$. Учитывая, что $f_1^T f_2 = 0$, находим $f_2 = \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$.

Таким образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = C^{-1} A_e C \Rightarrow C A_f C^{-1} = A_e$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}$$

$A_e = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$

Задача. *В трёхмерном декартовом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задан оператор A, который каждой точке пространства ставит в соответствие её ортогональную проекцию на плоскость $x + y + z = 0$. Составить матрицу этого оператора в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.*

Решение:

1) Укажем три вектора, результат действия оператора A на которые будет наиболее очевиден.

Пусь $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда $Af_1 = \theta$. Для векторов f_2 и f_3, лежащих в плоскости

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

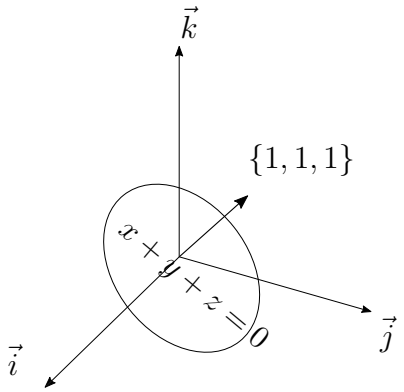

Рис. 4.2: Пояснительный рисунок к задаче

$x+y+z=0$, $Af_2=f_2, Af_3=f_3$. В базисе f:

$$f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

В итоге: $A_f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Для того чтобы найти A в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, определим матрицу перехода.

$$C=(f_{1e},f_{2e},f_{3e})$$

Поскольку f_2 и f_3 лежат в плоскости, для их определения необходимо решить линейное алгебраическое уравнение $x+y+z=0$.

Данное уравнение задано матрицей, имеещей ранг, равный 1 в L_3. Отсюда $l=3-1=2$ - кол-во элементов ФСР.

В качестве свободных координат выберем y и z. Тогда:

$$\begin{pmatrix}\cdot\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cdot\\0\\1\end{pmatrix}$$

Подставив поочерёдно данные значения в уравнения, определим координаты x ФСР:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Таким образом в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью алгоритма Гаусса находим, что:

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_e = CA_fC^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ядро и образ линейного оператора.

Определение: **Образом** ЛО $A(L_n \longrightarrow L_m)$ называется множество $y \in L_m$, таких что $\exists x \in L_n : A(x) = y$.

$y = Ax = A(e_i x^i) = x^i A(e_i)$

Как можно заметить вектор y - линейная комбинация столбцов матрицы оператора. Иначе говоря, *образ (imA) - линейная оболочка столбцов матрицы A*.

Определение: **Ядром**$(kerA)$ ЛО $A(L_n \longrightarrow L_m)$ называется множество $x_n \in L_n$, таких что $A(x) = \theta$.

Размерность пространства решений системы $A(x) = \theta$ можно посчитать как: $dim(kerA) = n - \underbrace{dim(imA)}_{=rankA}$. Отсюда получаем общую формулу:

$$dim(kerA) + dim(imA) = n$$

Замечание: $kerA \oplus imA \underbrace{\neq}_{\text{не обязательно}} L_n$ (ядро и образ не всегда являются прямой суммой).

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, imA = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, kerA = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача. *Найти ядро и образ линейного оператора:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Заметим, что первый и последний столбцы линейно зависимы. Значит:

$$imA = L\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Для того чтобы найти ядро оператора, необходимо решить систему линейных уравнений:

$$AX = \theta$$

Воспользуемся алгоритмом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Последние два столбца примем как базисный, а первый как свободный. $l = 3 - 2 = 1$ -размерность ФСР.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Подставив в систему, получим: $\begin{cases} 1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

В итоге ядро оператора имеет вид:

$$kerA = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Далее будем рассматримать лишь те операторы A, которые действуют из L_n в L_n.

Инвариантное подпространство. Собственные значения и собственные векторы.

Определение: ЛПП I называется **инвариантным подпространством** ЛО A, если $\forall x \in L_n \Rightarrow A(x) \in I$.

Примеры ИПП:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) L_n;
2) θ;
3) $kerA$;
Доказательство: Пусть $x \in kerA \Rightarrow Ax = \theta$, тогда $A(Ax) = \theta \Rightarrow Ax \in kerA$
4) imA.
Доказательство: Пусть $y \in imA \Rightarrow \exists x : Ax = y$. По определению $Ay \in imA$.

Если f - базис одномерного ИПП ЛО A, то f удовлетворяет уравнению $Af = \lambda f, \lambda \in \mathbb{K}$.

Базис ИПП может быть найдет как решение следующей системы:

$$(A - \lambda E) = \theta$$

Как известно, нетривиальное решение системы будет существовать тогда и только тогда, когда:

$$det(A - \lambda E) = 0$$

Полученный многочлен называется **характеристическим**, а λ называется **собственным значением**(СЗ) ЛО A.

Определение: **Собственным вектором** оператора A называется базис одномерного ИПП ЛО A.

Определение: **Собственным вектором** оператора A, соответствующем СЗ λ, называется *ненулевой* вектор f, являющийся решением уравнения $det(A - \lambda E) = 0$.

Оба определения эквивалентны.

Пример №1. Найти собственные векторы и собственные значения ЛО A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

Найдём собственные векторы:

$\lambda = 1 : (A - \lambda E) f_1 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} f_1 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_1 = \theta \Rightarrow$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\lambda = 3 : (A - \lambda E)f_2 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} f_2 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 = \theta \Rightarrow$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Пример №2. Найти собственные векторы и собственные значения ЛО A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$(A - \lambda E)f = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} f = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f = \theta \Rightarrow$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Мы получили, что оператор A имеет только один собственный вектор. Это означает, что ни в каком базисе матрица A не принимает диагонального вида.

Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений

Определение: **Алгебраической кратностью**(АК) СЗ λ_0 оператора A называется степень одночлена $(\lambda - \lambda_0)$ в разложении характеристического многочлена(ХМ) на простые множители.

Определение: **Геометрической кратностью**(ГК) СЗ оператора СЗ λ_0 оператора A называется кол-ло ЛНЗ СВ, отвечающих λ_0.

В примере 2 АК $\lambda_0 = 1 \longrightarrow 1$, ГК $\lambda_0 = 1 \longrightarrow 1$.

Пример №3. Найти собственные векторы и собственные значения ЛО а)$A(L_n(\mathbb{R}))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Задача не имеет решения над полем действительных чисел.

б) $A(L_n(\mathbb{C}))$

$\lambda_1 = i : \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} f_1 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} f_1 = \theta \Rightarrow$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -i : \begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} f_2 = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} f_2 = \theta \Rightarrow$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример №3. Найти собственные векторы и собственные значения ЛО A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} == -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(1-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda(\lambda-2)+1) = -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda-1)^3 \Rightarrow \lambda = 1(\text{АК} = 3)$

$(A-\lambda E)f = \theta \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f = \theta \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ГК $\lambda = 1$ равна 2.

Утверждение: Алгебраическая кратность СЗ больше либо равна геометрической кратности этого СЗ.

Семинар 5. Билинейные формы.

Определение: Скалярная функция $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется **билинейной формой**(БФ), если она обладает свойством линейности по двум аргументам. Т.е. $\forall \vec{x_1}, \vec{y_1} \in L_n$ и $\forall \vec{x_2}, \vec{y_2} \in L_n, \forall \alpha \in \mathbb{K}$:

$B(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y_1}) = B(\vec{x_1}, \vec{y_1}) + B(\vec{x_2}, \vec{y_1})$;

$B(\alpha\vec{x_1}, \vec{y_1}) = \alpha B(\vec{x_1}, \vec{y_1})$.

$B(\vec{x_1}, \vec{y_1} + \vec{y_2}) = B(\vec{x_1}, \vec{y_1}) + B(\vec{x_1}, \vec{y_2})$

$B(a\vec{x_1}, \alpha\vec{y_1}) = \alpha B(\vec{x_1}, \vec{y_1})$

Определение: **Матрицей БФ** называется результат её действия на базис $B(e_i, e_k) = b_{ik}$.

Пример: В пространстве многочленов степени на выше 1, заданный на $[-1, 1]$: $P_0(n \leqslant 1, [-1, 1])$ задана БФ:

$$B(g, f) = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx$$

Найти матрицу БФ.

Решение: Из свойств интеграла ясно, что данная конструкция линейна по двум аргументам. Будем искать её матрицу, исходя из определения. Зададим базис: $e_1 = 1, e_2 = x$

$$B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} e_1e_1dx & \int_{-1}^{1} e_1e_2dx \\ \int_{-1}^{1} e_2e_1dx & \int_{-1}^{1} e_2e_2dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} 1dx & \int_{-1}^{1} xdx \\ \int_{-1}^{1} xdx & \int_{-1}^{1} x^2dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Посколько линейное пространство изоморфно пространству столбцов координат, билинейную форму можно представить в виде:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(x^ie_i, y^ke_k) = x^iy^kB(e_i, e_k) = b_{ik}x^iy^k = X^TBY$$

Закон преобразования билинейной формы

Так билинейная форма является скаляром, то она инвариантна по отношению к изменению базиса.

$X'^TBY' = X^TBY = (CX')^TBCY = X'^TC^TBCY$.

Сопоставляя левую и правую части, получаем:

$$B' = C^TBC$$

Поскольку в преобразовании билинейной формы учавствуют две прямых матрицы перехода, то является дважды ковариантным тензором (тензором ранга 2).

Для тренировки получим закон преобразования в тензорном виде.

$B(\vec{x'}, \vec{y'}) = B(e_{i'}x_{i'}, e_{k'}x^{k'}) = B(e_{i'}, e_{k'})x^{i'}x^{k'} = b_{i'k'}x^{i'}x^{k'}$

С другой стороны, учитывая $e_{i'}c^i_{i'}e_i$:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$B(e_{i'}x_{i'}, e_{k'}x^{k'}) = B(c^i_{i'}e_i, c^k_{k'}e_k)x^{i'}x^{k'} = c^i_{i'}c^k_{k'}B(e_i, e_k)x^{i'}x^{k'} = c^i_{i'}c^k_{k'}b_{ik}x^{i'}x^{k'}$

Сравнивая результаты первого уравнения со вторым, получаем:

$$b_{i',k'}c^i_{i'}c^k_{k'}b_{ik}$$

Вывод: $rankB$ и знак $detB$ инвариантен по отношению к преобразованию базиса.

Определение: Билинейная форма называется **симметричной**, если $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n$.

Определение: Билинейная форма называется **кососимметричной**, если $B(\vec{x}, \vec{y}) = -B(\vec{y}, \vec{x})\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n$.

Теорема: *Любая БФ может быть представлена как сумма симметричной и кососимметричной БФ*

Доказательство:

$B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}B(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2}B(\vec{x}, \vec{y}) + \frac{1}{2}B(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{1}{2}B(\vec{y}, \vec{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}(B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{y}, \vec{x}))}_{\text{симметричная БФ}} + \underbrace{\frac{1}{2}(B(\vec{x}, \vec{y}) - B(\vec{y}, \vec{x}))}_{\text{кососимметричная БФ}}$

Задача: *Представить БФ*

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^2 + 4x^2y^3 + 5x^3y^3$$

в виде суммы симметричной и кососимметричной форм.

Решение: Запишем матрицу БФ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Как было показано ранее:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T)$$

Тогда:

$$B_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма

Определение: **Квадратичной формой**(КФ), полярной к БФ $B(\vec{x},\vec{y})$ называется функция $Q(\vec{x}) = B(\vec{x},\vec{x})\ \forall \vec{x} \in L_n$.

Задача: *Определить матрицу КФ, полярной к $B(\vec{x},\vec{y})$ из предыдущей задачи.*

Решение: Подставляя вместо $\vec{y}$ $\vec{x}$, получим:

$$Q(\vec{x}) = (x^1)^2 + \underbrace{2x^1x^2)}x^1x^2 + x^2x^1 + 2(x^2)^2 + \underbrace{4x^2x^3}_{2x^2x^3+2x^3x^2} + 5(x^3)^2$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = B_s$$

Теорема: *В ЛП, в котором задана КФ $Q(\vec{x})$ существует такой базис $\{e_k\}$, в котором КФ имеет диагональный вид $Q = diag(\lambda_i), i = \overline{1,n}, \lambda_i = \{0, \pm 1\}$.*

Вид, в котором $Q = diag(\lambda_i)$ называется **каноническим видом** КФ.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Пример №1. Привести к каноническому виду КФ:

$$Q = 2x^1x^2 + (x^3)^2 + x^2x^3 + 2x^1x^3$$

Решение: Заметим, что координата x^3 присутствует в Q в квадрате. Выделим полный квадрат из всех слагаемых, которые содержат эту координату (если таких координат несколько, выбирать нужно ту, слагаемых с которой в КФ больше).

$Q = 2x^1x^2 + ((x^3)^2 + x^2x^3 + 2x^1x^3 + \frac{1}{4}(x^2)^2 - \frac{1}{4}(x^2)^2 + (x^1)^2 - (x^1)^2) = 2x^1x^2 + (x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x^1)^2 - \frac{1}{4}(x^2)^2 - (x^1)^2$

Повторяя такую же процедуру для x^1, получим:

$Q = (x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x^1)^2 - (x^1 - x^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2)^2$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y^1 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x^1 \\ y^2 = x^1 - x^2 \\ y^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2$$

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём теперь матрицу перехода к каноническому базису.

$Y = C^{-1}X$, где $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Пример №2. Привести к каноническому виду КФ:

$$Q = x^1x^2 + (x^3)^2 + x^2x^3 + 2x^1x^3$$

Решение: $Q = x^1x^2 + (x^3)^2 + x^2x^3 + 2x^1x^3 = (x^3)^2 + 2\frac{1}{2} + 2x^1x^3 + \frac{1}{4}(x^2)^2 + (x^1)^2 - \frac{1}{4}(x^2)^2 - (x^1)^2 + x^1x^2 = (x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x^1)^2 - (x^1 - \frac{1}{2}x^2)^2 = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 0(y^3)^2$

Заметим, что координата y^3 не определена однозначно. Выберем её так, чтобы матрица перехода к каноническому базису была невырожденной. В нашем случае можно выбрать $y^3 = x^3$. Тогда $\begin{cases} y^1 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x^1 \\ y^2 = x^1 - \frac{1}{2}x^2 \\ y^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пример №3. Привести к каноническому виду КФ:

$$Q = x^1x^2 + x^3x^4$$

Решение: В качестве новых координат выберем:

$$y^1 = \frac{1}{2}(x^1 + x^2) \qquad y^3 = \frac{1}{2}(x^3 + x^4)$$
$$y^2 = \frac{1}{2}(x^1 - x^2) \qquad y^4 = \frac{1}{2}(x^3 - x^4)$$

Тогда

$$x^1 = y^1 + y^2 \qquad x^3 = y^3 + y^4$$
$$x^2 = y^1 - y^2 \qquad x^4 = y^3 - y^4$$

Подставляя данные выражения в КФ, получим:

$$Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2 - (y^4)^2$$

Матрица перехода к каноническому базису для данной КФ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Обобщая приведённые выше примеры, запишем теперь основные *приёмы метода Лагранжа.*

Приём №1. Если в записе КФ какая-то координата x^i содержится в квадрате, то необходимо сначала объединить все слагаемые, содержащие координату x^i в полный квадрат. При этом стоит выбирать ту координату, которая содержится в наибольшем кол-ве слагаемых.

Приём №2. Если в каноническом виде КФ какая-то координата умножается на 0, то при составлении матрицы перехода, строчку, соответствующей этой координате, выбираем таким образом, чтобы матрица C^{-1} оказалась невырожденной.

Приём №3. Если в записи КФ ни одна из координат не содержится в квадрате, то необходимо совершить преобразование, представленное в примере №3.

Семинар 6. Евклидово пространство.

Скалярное произведение. Евклидово пространство

Определение: Билинейная форма $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется **положительной определённой**, если $\forall \vec{x} \in L_n, \vec{x} \neq \theta : B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Определение: Линейное пространство L_n называется **евклидовым**(E_n), если в нём определена симметричная, положительно определённая БФ $G(\vec{x}, \vec{y})$, называемая скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y})$.

$$G(x, y) = X^T G Y = g_{ik} x^i x^k,$$

где $g_{ik} = (e_i, e_k)$ - ковариантный метрический тензор(тензор Грамма).

Свойства скалярного произведения:

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n : (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

2)$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L_n : (x \vec{+} y, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;

3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n, \alpha \in \mathbb{K} : (\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$;

4) $\forall \vec{x} \in L_n : (\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, при этом $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \theta$.

Определение: **Нормой** вектора $x \in E_n$ называется величина $||\vec{x}|| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$.

Задача: *В базисе* $\vec{e_1}, \vec{e_2} \in E_2$:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e_1} + x^2 \vec{e_2}$$
$$\vec{y} = y^1 \vec{e_1} + y^2 \vec{e_2}$$

а) Можно ли в E_2 ввести скалярное произведение по формуле:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 y^1 - 2x^2 y^2$;

2) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x^1 y^1 + 3x^2 y^2$;

3) $(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 y^1 - x^1 y^2 - x^2 y^1 + 3x^2 y^2$.

б) Вычислить скалярное произведение $\vec{x} = \vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{y} = -\vec{e_1}$.

в) Найти $||x||$.

Решение: Запишем матрицы БФ.

1)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Как видно матрица является симметричной. Чтобы определить, является ли матрица положительно определённой воспользуемся критерием Сильвестра (если все миноры матрицы положительны, то матрица положительно определённая). В нашем случае второй минор матрицы отрицателен, следовательно матрица не положительно определённая.

2)$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Матрица симметричная и положительно определённая, следовательно может задавать скалярное произведение.

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Очедидно, что матрица симметричная. Первый минор матрицы равен 1, второй $(1 \cdot 3 - (-1)(-1) = 2$. То есть матрица положительно определённая и может задавать скалярное произведение.

Найдём теперь скалярное произведение векторов из пункта б) с помощью формулы 3).

$(\vec{x}, \vec{y}) = X^T G Y$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Наконец найдём норму x.

$||x|| = \sqrt{X^T G Y} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$

Определение: Скалярная функция $B(\vec{x}, \vec{y})$ двух векторных аргументов $\vec{x}, \vec{y} \in L_n(\mathbb{C})$ называется **полуторалинейной**, если:

$\forall \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{y_1}, \vec{y_2} \in L_n(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1) $B(\vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y_1}) = B(\vec{x_1}, \vec{y_1}) + B(\vec{x_2}, \vec{y_1})$;

2) $B(\alpha \vec{x_1}, \vec{y_1}) = \alpha B(\vec{x_1}, \vec{y_1})$;

3) $B(\vec{x_1}, \vec{y_1} + \vec{y_2}) = B(\vec{x_1}, \vec{y_1}) + B(\vec{x_1}, \vec{y_2})$;

4) $B(\vec{x_1}, \alpha \vec{y_1}) = \overline{\alpha} B(\vec{x_1}, \vec{y_1})$.

Действие полуторалинейной формы.

$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(e_i x^i, e_k y^k) = B(e_i, e_k) x^i \overline{y^k} = X^T B \overline{Y}$

Определение: Полуторалинейная форма называется **эрмитовой**, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L_n : B(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{B(\vec{y}, \vec{x})}$.

$\overline{B(\vec{y}, \vec{x})} = \overline{B(e_k x^k, e_i x^i)} = \overline{B(e_k, e_i) y^k \overline{x^i}} = \overline{B(e_k, e_i) y^k} x^i$

$B(e_i, e_k) = \overline{B(e_k, e_i)} \Rightarrow B = \overline{B^T}$

Определение: Полуторалинейная форма $B(\vec{x}, \vec{y})$, заданная в $L_n(\mathbb{C})$ называется **положительно определённой**, если $\forall x \in L_n, \vec{x} \neq \theta : B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Отметим, что $B(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{B(\vec{x}, \vec{x})}$.

Унитарное пространство

Определение: Линейное пространство $L_n(\mathbb{C})$ называется **унитарным**(U_n), если в нём определена эрмитова положительно определённая полуторалинейная форма $G(\vec{x}, \vec{y})$, называемая скалярным произведением.

Задача: *Можно ли ввести в ЛП $L_2(\mathbb{C})$ скалярное произведение по формуле:*

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = x^1 \overline{y^1} + i x^1 \overline{y^2} + (i+1) x^2 \overline{y^1} + 3 x^2 \overline{y^2}$;

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x^1\overline{y^1} + ix^1y^2 - ix^2\overline{y^1} + x^2\overline{y^2}$;
3) $(\vec{x}, \vec{y}) = x^1\overline{y^1} + (1+i)x^1y^2 + (1-i)x^2\overline{y^1} - x^2\overline{y^2}$.

Решение: Составим матрицы форм.

1) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i-1 & 3 \end{pmatrix}$

Как видно $B \neq \overline{B^T}$, значит матрица ПФ не является эрмитовой. ПФ не может задавать скалярного произведения.

2) $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$$\overline{\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}^T} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Свойство эрмитовости выполнено. Первый минор равен 2, второй $2-(-i)i = 1$, следовательной матрица положительно определённая. Значит с её помощью можно задать скалярное произведение.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & -1 \end{pmatrix}$

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & -1 \end{pmatrix}^T} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$$

Как видно, матрица не эрмитова.

С помощью формулы 2) найдём скалярное произведение векторов:

$$x = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = X^T G\overline{Y} = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3i \\ 1+i \end{pmatrix} = 1-2i$$

Найдём норму x.

$$||x|| = \sqrt{X^T G\overline{Y}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1+i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+i \end{pmatrix}} = \sqrt{1-i+2+i} = \sqrt{3}$$

Семинар 7. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональное дополнение.

Неравенство Коши-Буняковского

$\forall x, y \in E_n, \lambda \in \mathbb{R}$ рассмотрим конструкцию $(x + \lambda y, x + \lambda y)$.

По свойствам скалярного произведения:

$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0$

$(x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y) \geqslant 0$

$(\lambda^2(y, y) + 2\lambda(x, y) + (x, x) \geqslant 0$

Неравенство будет выполнено, если дискриминант полученного квадратного-уравнения отрицателен.

$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0$

$$(x, y) \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)}$$

Полученное неравенство называется **неравенством Коши-Буняковского**.

С помощью него можно ввести понятие угла между элементами линейного пространства.

$$\cos((\widehat{x, y})) = \frac{(x, y)}{||x||||y||}$$

Определение: Элементы $x, y \in E_n$ называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$

Определение: Базис $\{e_i\}$ в E_n называется **ортонормированным**, если $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$ -символ Кронекера.

Метрический тензор в ортонормированном базисе: $g_{ik} = \delta_{ik}$.

Алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта

Пусть $g_1, ...g_n$ не является ортонормированным базисом (ОБ). Чтобы постоить из него ОБ необходимо воспользоваться алгоритмом:

$e_1 = g_1$

$e_2 = g_2 - \frac{(g_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$

...

$e_n = g_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{(g_n, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$

Задача: *В* $Pol(2; [-1, 1]) : (f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. *Постоить метрический тезор и ортонормированный базис в этом пространстве*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Решение: Для полинома не выше второй степени $a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ базис имеет вид: $g_1 = 1, g_2 = x, g_3 = x^2$.

Составим метрический тензов в данном базисе. Если он окажется единичной матрицей, то базис-ортонормированный.

$$G = \begin{pmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & (g_1, g_3) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & (g_2, g_3) \\ (g_3, g_1) & (g_3, g_2) & (g_3, g_3) \end{pmatrix}$$

$$(g_1, g_1) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx = 2 \qquad (g_2, g_2) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$(g_1, g_2) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x dx = 0 \qquad (g_2, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0$$

$$(g_1, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \qquad (g_3, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$e_1 = g_1 = 1$
$e_2 = g_2 = x$
$e_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$
Нормируем полученные векторы.
$\tilde{e_1} = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tilde{e_2} = \frac{e_2}{||e_2||} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
$\tilde{e_3} = \frac{e_3}{||e_3||}$
$||e_3||^2 = \int\limits_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx = \int\limits_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$
$\tilde{e_3} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})$

Задача: *Провести ортогонализацию и построить ОНБ, если исходный базис:*

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$e_1 = g_1$

$$e_2 = g_2 - \frac{(g_2,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2 = g_3 - \frac{(g_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1 - \frac{(g_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\7\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\5\\1\end{pmatrix}$$

Нормируем базис.

$\tilde{e_1} = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{e_1}{\sqrt{3}}$
$\tilde{e_2} = \frac{e_2}{||e_2||} = \frac{e_2}{\sqrt{3}}$
$\tilde{e_3} = \frac{e_3}{||e_3||} = \frac{e_3}{\sqrt{19}}$

Разложение произвольного вектора по ортонормированному базису.

Разложение вектора по базису записывается как:

$$x = e_k x^k$$

Если $\{e_i\}$-ортонормированный базис:

$$(x, e_i) = (e_k x^k, e_i) = x^k(e_k, e_i) = x^k \delta_{ik} = x^i$$

Если $\{e_i\}$-не ортонормированный базис:

$$(x, e_i) = x^k(e_k, e_i) = x^k g_{ik}$$

$$x^k = (g_{ik})^{-1}(x, e_i)$$

$$G' = C^T G C$$

$$G'^{-1}G' = E = G'^{-1}C^T G C \Rightarrow C^{-1} = G'^{-1}C^T G \Rightarrow C^{-1}G^{-1} = G'^{-1}C^T \Rightarrow$$

$$G'^{-1} = C^{-1}G^{-1}(C^T)^{-1}$$

Поскольку в преобразовании G' учавствуют две обратные матрицы перехода, то G' является дважды контравариантным тензором.

$$(g_{ik})^{-1} = g^{ik}$$

$(x, e_i) = x_i$ называется ковариантной координатой вектора x.

$$x^k = g^{ik} x_i$$

$$x_i = g_{ik} x^k$$

Определение: Базис $\{e^k\}$, в котором $x \in E_n$ раскладывается по ковариантным координатам $x = x_k e^k$ называется **взаимным** к базису $\{e_k\}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Связь между базисом и взаимным базисом

$$x_i = x^k g_{ik} = x^k(e_k, e_i) = (x, e_i) = (x_k e^k, e_i) = x_k(e^k, e_i) = x_i \Rightarrow (e^k, e_i) = \delta_i^k$$

$$(e^k, e_i) = \delta_i^k$$

Задача: *Получить разложение вектора* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *по базису:*

$$e = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Решение:

Учитывая $x_i = (X, e_i)$, запишем X в ковариантных координатах.

$X_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Составим ковариантный метрический тензор.

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Поскольку полученная матрица g_{ik} имеет простой вид, её можно записать в блочном виде: $g_{ik} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow (g_{ik})^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Учитывая $x^k = g^{ik} x_i$, в контравариантных координатах X запишется как:

$$X^k = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Разложение по базису e, выглядит следующим образом:

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ортогональное дополнение

Определение: **Ортогональным дополнением** к ЛПП $L \subseteq E_n$ называется ЛПП $P = L^{\perp}$, если $\forall x \in P, \forall y \in L : (x, y) = 0$.

Задача: *Построить ортогональное дополнение* $L^{\perp}$ *к* $L = \{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\}$

Решение: Нужно найти векторы, ортогональные каждому вектору из линейной оболочки L. Эта задачу можно записать как:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\\x^4\end{pmatrix} = \theta$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\0 & 5 & -5 & -5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Элементы ФСР этой матрицы:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

То есть

$$L^{\perp} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

Определение: Вектор $z \in E_n$ называется **ортогональной проекцией** вектора $x \in E_n$ на ЛПП P, если $z \in P$ и $(x - z) \in P^{\perp}$.

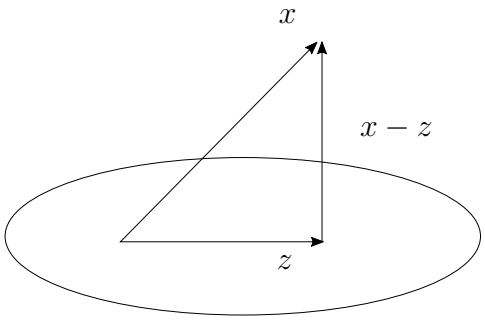

Рис. 7.1: Рисунок к задаче

Задача: *Найти проекцию Z вектора $X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ на ЛО $L = \{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}\}$ и найти перепендикуляр $(X - Z)$, опущенный из X на L.*

Решение: Решим задачу двумя способами.

<u>1-й способ:</u>

Составим ОНБ из векторов ЛО g_1, g_2. Заметим, что $g_1 \perp g_2$. Для построения ОНБ осталось только нормировать векторы.

$e_1 = \frac{g_1}{||g_1||} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$

$e_2 = \frac{g_2}{||g_2||} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$

Поситаем координаты вектора Z.

$(Z, e_1) = \frac{3}{\sqrt{15}}$

$(Z, e_2) = \frac{1}{\sqrt{15}}$

$$Z = \frac{3}{\sqrt{15}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_2 = \frac{3}{15}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\\2/3\end{pmatrix}$$

$$X - Z = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\1\\1/3\end{pmatrix}$$

<u>2-й способ:</u>

Как ранее мы получили:

$$X = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}}_{\in L} + \underbrace{\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in L^{\perp}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\\2/3\end{pmatrix}}_{Z} + \underbrace{\begin{pmatrix}2/3\\4/3\\1\\1/3\end{pmatrix}}_{X-Z}$$

Семинар 8. Операторы в евклидовых и унитарных пространствах.

Ортогональный проектор

Определение: Оператор $\hat{P}$, действующий в E_n называется **ортогональным проектором** на ЛПП $P \subseteq E_n$, если $\forall \in E_n : \hat{P}x = y \in P$.

Свойства $\hat{P}$:

1) $im\hat{P} = P$;

2) $\hat{P}^2 = \hat{P}$

Доказательство:

Пусть $x \in P$, тогда $\hat{P}x = x$, $\hat{P}^2 = \hat{P}(\hat{P}x) = \hat{P}x \Rightarrow \hat{P}^2 = \hat{P}$.

$\forall y \in E_n : \hat{P}y = x, x \in P \Rightarrow \hat{P}^2 y = \hat{P}(\hat{P}y) = \hat{P}x = x = \hat{P}y$

3) $ker\hat{P} = P^{\perp}$

Доказательство:

$\forall y \in E_n : (y - \hat{P}y) \in P^{\perp}$

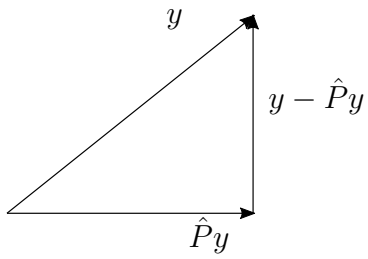

Рис. 8.1: Пояснение к доказательству

Если $y \in ker\hat{P}$, то $\hat{P}y = \theta$. Тогда $y \in P^{\perp}$.

4) $ker\hat{P} \cap im\hat{P} = \theta$

Доказательство:

Пусть $x \in im\hat{P}$ и $x \in ker\hat{P} \Rightarrow x \in (im\hat{P})^{\perp}$, но по условию $x \in im\hat{P} \Rightarrow x \perp x \Rightarrow x = \theta$.

Из свойства 4) и теоремы $dimE_n = dim(ker\hat{P}) + dim(im\hat{P})$

Теорема: *Любое евклидово пространство разлагается в прямую сумму двух взаимно ортогональных ЛПП.*

$$E_n = ker\hat{P} \oplus im\hat{P}$$

Сопряжённый оператор

Определение: Оператор A^*, действующий в E_n, называется **сопряжённым** к оператору A, также действующему в E_n, если $\forall x, y \in E_n : (Ax, y) = (x, A^*y)$.

Свойства сопряжённого оператора:

1) A^* - линейный оператор (следует из свойств скалярного произведения);

2) $(A^*)^* = A$;

Доказательство:

$(x, Ay) = (Ay, x) = (y, A^*x) = (A^*x, y) = (x, (A^*)^*y)$

3) $(AB)^* = B^*A^*$;

Доказательство:

$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*(A^*y)) = (x, B^*A^*y)$.

4) Матрица сопряжённого оператора

$(Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow (AX)^TGY = X^TG(A^*Y) \Rightarrow X^TA^TGY = X^TGA^*Y \Rightarrow$

$$A^* = G^{-1}A^TG$$

В ОНБ:

$$A^* = A^T$$

Теорема Фредгольма

Задача: *Доказать, что* $imA \perp kerA^*$

Решение:

1) Пусть $B \in imA \Rightarrow \exists X \in E_n : B = AX$.

2) Пусть $Y \in kerA^* \Rightarrow A^*Y = \theta$.

$(B, Y) = (AX, Y) = (X, A^*Y) = (x, \theta) = 0$.

Теорема (Фредгольма): *Система неоднородных уравнений $AX = B$ с квадратной матрицей A разрешима тогда и только тогда, когда неоднородность B ортогональна решению однородной системы $A^TX = \theta$.*

Задача: *A действует в $Pol(n \leqslant 1, [0, 1])$, где скалярное произведение задаётся как $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$:*

$$Ap = \int\limits_0^1 K(x, s)p(s)ds, K(x, s) = x + 2s$$

Построить матрицу A^*

Решение:

1-й способ(решить самостоятельно):

Построить ОНБ. Найти матрицу A. В итоге $A^* = A^T$.

2-й способ:

Выберем базис $e_1 = 1, e_2 = x$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$(Ap, g) = \int\limits_0^1 g dx \int\limits_0^1 K(x,s)p(s)ds = \int\limits_0^1 p(s)ds \int\limits_0^1 K(x,s)g(x)dx = |x \to s, s \to x| = \int\limits_0^1 p(x)dx \int\limits_0^1 K(s,x)g(s)ds = (p, A^*g)$

$$A^*g = \int\limits_0^1 K(s,x)g(s)ds$$

Подействуем A^* на базис.

$$A^*e_1 = \int\limits_0^1 (s+2x)\cdot 1ds = \frac{1}{2} + 2x \qquad A^*e_2 = \int\limits_0^1 (s+2x)sds = \frac{1}{3} + x$$

В итоге:

$$A^* = (A^*e_1, A^*e_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу A.

$$Ae_1 = \int\limits_0^1 (x+2s)\cdot 1ds = x + 1 \qquad Ae_2 = \int\limits_0^1 (x+2s)sds = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Самосопряжённый оператор

Определение: Оператор A, действующий в пространстве E_n называется **самосопряжённым (симметричным)**, если $\forall x, y \in E_n : (Ax, y) = (x, Ay)$, т.е. $A = A^*$.

Свойства симметричного(самосопряжённого) оператора:

1) У симметричного оператора в E_n существует хотя бы одно собственное значение и хотя бы один собственный вектор;

Доказательство: У симмеричного оператора $A = A^* = A^T$ (в ОНБ).

Рассмотрим КФ $A(x), x \in E_n$ с той же матрицей. Поставим задачу о нахождении экстремума $A(x) \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j$ при условии $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2 = 1$. Задача будет иметь решение, поскольку по теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция на замкнутом множестве достигает своего максимального и минимального значений. Воспользуемся методом Лагранжа.

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^ix^j - \lambda(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 - 1)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$dL = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^j dx_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x^j dx_i - \lambda 2 \sum_{i=1}^{n} x^i dx_i = 0$$

Приравнивая к 0 все слагаемые перед dx_i и учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, получим: $dx_i : 2(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x^j - \lambda x^i) = 0$

Полученные уравнения можно записать в виде системы $AX - \lambda X = \theta$.

Данная система имеет нетривиальное решение ($||x|| = 1$), следовательно уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет хотя бы одно вещественное решение, т.е. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Ортогональное дополнение $L_1^{\perp}$ к одномерному ИПП симметричного оператора A является ИПП этого оператора.

Доказательство: Пусть $x \in I_1, Ax = \lambda x$.

Если $y \in I_1^{\perp}$, т.е. $(y, x) = 0$, то $(Ay, x) = (y, Ax) = (y, \lambda x) = \lambda(y, x) = 0 \Rightarrow Ay \in I_1^{\perp}$.

3) Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям симметричного оператора, ортогональны.

Доказательство: Пусть $x, y \in E_n, Ax = \lambda_1 x, Ay = \lambda_2 y$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_2(x, y) = (x, \lambda_2 y) = (x, Ay) = (Ax, y) = \lambda_1(x, y)$

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(x, y) = 0$

Эрмитов оператор

Определение: Оператор A, действующий в унитарном пространстве $U_n(\mathbb{C})$, называется **эрмитовым**, если $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Свойства эрмитова оператора:

1) Собственные значения эрмитова оператора вещественны;

Доказательство: Пусть $Ax = \lambda x$, A-эрмитов.

$\overline{\lambda}(x, x) = (x, \lambda x) = (x, Ax) = (Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda$

2) Матрица эрмитова оператора

$(Ax, y) = (x, Ay) \Rightarrow (AX)^T G\overline{Y} = X^T G\overline{AY} \Rightarrow X^T A^T G\overline{Y} = X^T G\overline{AY} \Rightarrow$

$$A = \overline{G^{-1}A^T G}$$

В ОНБ:

$$A = \overline{A^T}$$

Задача: *Построить ОНБ из СВ ЛО A:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -1\\ 2 & -1-\lambda & 2\\ -1 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2+(\lambda+1)+8(\lambda-2)-$$
$$-8=(\lambda+1)(1-(\lambda-2)^2)+8(\lambda-3)=(\lambda+1)(1-\lambda+2)(1+\lambda-2)+8(\lambda-3)=$$
$$=-(\lambda^2-1)(\lambda-3)+8(\lambda-3)=(\lambda-3)(9-\lambda^2)=0$$

$\lambda_{1,2}=3:$

$$(A-\lambda E)X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}X=\theta$$

ФСР системы:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2}=-3:$

$$(A-\lambda E)X=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}X=$$
$$=\theta$$

ФСР системы:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что вектор, соответствующий λ_3, ортогонален векторам, соответствующим $\lambda_{1,2}$.

Чтобы построить ОНБ, ортогонализуем полученные векторы.

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-2}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/5\\2/5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow e_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\tilde{e_1}=\frac{e_1}{||e_1||}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\tilde{e_2}=\frac{e_2}{||e_2||}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$$

$$\tilde{e_3}=\frac{e_3}{||e_3||}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

В полученном базисе матрица оператора выглядит следующим образом:

$$A_{\tilde{e}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ортогональный оператор

Определение: Оператор Q, действующий в E_n, называется **ортогональным**, если $\forall x, y \in E_n : (x, y) = (Qx, Qy)$.

Свойства ортогонального оператора:

1) $(x, y) = (Qx, Qy) = (x, Q^*Qy) \Rightarrow Q^*Q = E \Rightarrow Q^{-1} = Q^*$;

2) Матрица ортогонального оператора.

$(Qx, Qy) = (QX)^T G(QY) = X^T Q^T GQY \Rightarrow$

$$G = Q^T GQ$$

В ОНБ:

$$Q^T Q = E$$

Столбцы матрицы оператора Q попарно ортогональны и единичные (образуют ОНБ).

3) Собственные значения ортогонального оператора по модулю равны 1.

Доказательство: Пусть $x : Qx = \lambda x$.

$(x, x) = (Qx, Qx) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x) \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Определение: Оператор U, действующий в унитарном пространстве $U_n(\mathbb{C})$, называется **унитарным**, если $\forall x, y \in U_n : (x, y) = (Ux, Uy)$.

Свойства унитарного оператора:

1) Матрица унитарного оператора.

$X^T G\overline{Y} = (x, y) = (Ux, Uy) = (UX)^T G\overline{(UX)} = X^T U^T G\overline{UY} \Rightarrow$

$$G = U^T G\overline{U}$$

В ОНБ:

$$U^T\overline{U} \Rightarrow U^{-1} = \overline{U^T}$$

2) Собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1.

Доказательство: Пусть $x : Ux = \lambda x$.

$(x, x) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\lambda^*(x, x) = |\lambda|^2(x, x) \Rightarrow |\lambda| = 1$

Определение: Матрица с вещественными элементами, обладающая свойством $Q^{-1} = Q^T$, называется **ортогональной**.

Определение: Матрица с комплексными элементами, обладающая свойством $U^{-1} = \overline{U^T}$, называется **унитарной**.

Свойства ортогональных матриц:

1) В E_n переход от одного ОНБ к другому ОНБ осуществляется с помощью ортогональной матрицы.

Доказательство: Пусть $\{e\}, \{e'\}$-ОНБ в E_n. Тогда:

$\underbrace{(e_{i'}, e_{j'})}_{=\delta_{i'}^{j'}} = (e_i c_{i'}^i, e_j c_{j'}^j) = c_{i'}^i c_{j'}^j (e_i, e_j) = c_{i'}^i c_{j'}^j \delta_i^j \Rightarrow C^T C = E$

Из этого свойства следует, что в ОНБ закон преобразования ЛО A записывается как:

$$A' = C^{-1}AC = C^T AC,$$

что совпадает с законом преобразования билинейных форм.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования

Задача: *Привести КФ Q к каноническому виду методом ортогонального преобразования.*

$$Q = 2(x^1)^2 - (x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 + 4x^2x^3$$

Решение: Запишем матрицу Q.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача о диагонализации оператора с такой матрицей уже решалась выше. В ортонормированном базисе из векторов

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матрица Q запишется как:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода к данному базису:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Задача: *Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить тип поверхности.*

$$\underline{2(x^1)^2 - (x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 + 4x^2x^3} + \sqrt{30}x^1 + \sqrt{30}x^2 + \sqrt{30}x^3 + c = 0$$

Решение: Как видно подчёркнутая часть уравнения совпадает с БФ из предыдущей задачи. Подействуем на неподчёркнутую часть матрицей преобразования.

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}x'^1 - \frac{1}{\sqrt{30}}x'^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'^3 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x'^1 + \frac{2}{\sqrt{30}}x'^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}x'^3 \\ \frac{5}{\sqrt{30}}x'^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x'^3 \end{cases}$$

$$\sqrt{30}x^1 + \sqrt{30}x^2 + \sqrt{30}x^3 = \sqrt{30}(\frac{3}{\sqrt{5}}x'^1 + \frac{6}{\sqrt{30}x'^2}) = 3\sqrt{6}x'^1 + 6x'^2$$

В итоге после преобразования уравнения поверхности запишется в виде:

$$3(x^1)^2 + 3(x^2)^2 - 3(x^3)^2 + 3\sqrt{6}x'^1 + 6x'^2 + c = 0$$

Выделим полный квадрат.

$$3\underbrace{(x'^1 + \frac{\sqrt{6}}{2})}_{y^1} - \frac{9}{2} + \underbrace{(x'^2 + 1)^2 - 3 - 3(x'^3)^2}_{y^2} + c = 0$$

$$3(y^1)^2 + 3(y^2) - 3(x^3)^2 = \frac{15}{2} - c$$

1) $c = \frac{15}{2}$ - коническая поверхность;
2) $c < \frac{15}{2}$ - однополостный гиперболоид;
3) $c > \frac{15}{2}$ - двуполостный гиперболоид.

Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду одним невырожденным преобразованием

Пусть есть Q_1-положительно определённая КФ, Q_2-любая КФ.

1) Приводим Q_1 к виду $Q_1' = C^T Q_1 C = E$;

2) Рассматриваем евклидово пространство, в котором Q_1' является метрическим тензором. В полученом ОНБ записываем Q_2';

3) Применяем к Q_2' ортогональное преобразование. Q_1' при этом не изменяется.

Задача: *Привести две КФ Q_1 и Q_2 одним невырожденным преобразованием к каноническому виду.*

$$Q_1 = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4(x^2)^2$$

$$Q_2 = -4x^1x^2$$

Решение: Определим, какая из них является положительно определённой.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Как видно, первые два минора Q_1 положительны, следовательно Q_1 является положительно определённой.

Выделим полный квадрат.

$Q_1 = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4(x^2)^2 = (x^1 - x^2)^2 + (\sqrt{3}x^2)^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2' = C^T Q_2 C$$

$Q_2' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}$

Приведём Q_2' к каноническому виду ортогональным преобразованием.

$\det(Q_2' - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -4/3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{4}{3}) = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} = (\lambda - \frac{2}{3})(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = -2$

Найдём ОНБ из СВ Q_2'

$\lambda_1 = \frac{2}{3}$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} f_1 = \theta \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_1 = \theta$$

ФСР системы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{e_1} = \frac{e_1}{||e_1||}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} f_2 = \theta \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} f_1 = \theta$$

ФСР системы:

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{e_2} = \frac{e_2}{||e_2||}\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу перехода Z к базису, где Q диагональна.

$$Z = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Таким образом с помощью матрицы:

$$CZ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1 \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}$$

мы приводим 2 КФ к каноничному виду:

$$Q_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2'' = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Спектральное разложение самосопряжённого оператора

1) У самосопряжённого ЛО A существует базис, в котором $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Мы можем записать, что в базисе f:

$$A_f = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{P}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{P}_2} + \dots + \lambda_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{P}_n}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{P}_i$$

При переходе к базису e:

$$A_e = C A_f C^{-1}$$

Задача: *Построить спектральное разложение самосопряжённого оператора. Найти $A^{\frac{1}{2}}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдём СЗ и СВ оператора A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 8)(\lambda - 5) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

В базисе СФ:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{P}_{1f}} + 9 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{P}_{2f}}$$

$$P_e = CP_fC^{-1}$$

$\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} f_1 = \theta \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_1 = \theta$$

ФСР системы:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{f}_1 = \frac{f_1}{||f_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} f_2 = \theta \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_2 = \theta$$

ФСР системы:

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{f}_2 = \frac{f_2}{||f_2||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода:

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_{1e} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{2e} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_e = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдём $A^{\frac{1}{2}}$.

$A_e = 4P_1 + 9P_2 \Rightarrow A_e^{\frac{1}{2}} = 2P_1 + 3P_2$

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Семинар 9. Тензоры. Операции над тензорами.

Понятие тензора

Пусть есть линейное пространство L с базисом e и линейное пространство L' с базисом e'. Матрица перехода от одного базиса к другому записывается как: $C = \{c^i_{i'}\}, C^{-1} = \{c^{i'}_i\}$, где $c^i_{i'}c^{i'}_i = \delta^{i'}_i$.

Преобразование координат

$$x^{i'} = c^{i'}_i x^i \qquad\qquad x^i = c^i_{i'} x^{i'}$$

Правила тензорной записи:

1) В обозначении прямой матрицы перехода "штрихованный"индекс стоит снизу, а в обратной матрице перехода сверху.

2) Суммирование производится по повторяющимся нижнему и верхнему индексам.

3) Не суммируемые (не повторяющиеся) индексы занимают одно и то же положение в левой и правой частях равенства.

4) Суммирование с символом Кронекера δ:

$$c^i_{i'}c^{i'}_k = \delta^i_k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$$

Примеры:

$\delta^k_i a^i_j = a^k_j$, $\delta^k_i b^i = b^k$, $z_k \delta^k_j = z_j$

Определение: p раз **ковариантрым** и q раз **контравариантным тензором** A^q_p называется объект, который про переходе от базиса e к базису e' преобразуеся как:

$$A^{i'_1 \dots i'_q}_{j'_1 \dots j'_p} = c^{j_1}_{j'_1} \dots c^{j_p}_{j'_p} c^{i'_1}_{i_1} \dots c^{i'_q}_{i_q} A^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p}$$

Величина $r = p + q$ называется **рангом** тензора.

Примеры:

A^1_1-оператор в L_n. $A' = C^{-1}AC$, $a^{i'}_{j'} = c^{i'}_i c^j_{j'} a^i_j$

B^0_2-билинейная форма. $B' = C^T BC$, $b_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} b_{ij}$

Задача: *В 4-мерном пространстве задан тензор ранга 3*

1) *Сколько компонент имеет тензор?*

Удобно представлять тензор 3-го ранга в виде схемы (Рис. 9.1), где каждый вертикальный слой представляет собой матрицу $n \times n$, где n–размер пространства, а кол-во вертикальных слоёв равно n.

В нашем случае получаем 4 слоя матриц 4×4, т.е. общее кол-во компонент равно $4^3 = 64$.

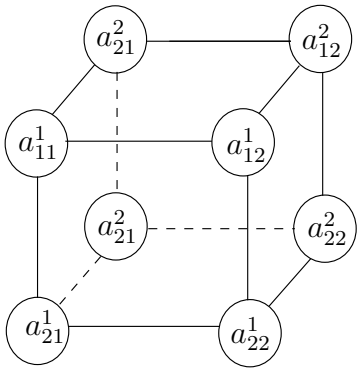

Рис. 9.1: Схема 1 раз контравариантного, 2 раза ковариантного тензора в L_2.

2) *Сколько слагаемых входит в выражение новой компоненты через старую в записи закона преобразования.*

Для определённости рассмотрим трижды ковариантный $(3,0)$ тензор. Запишем закон преобразования.

$$A_{i'j'k'} = c^i_{i'} c^j_{j'} c^k_{k'} A_{ijk}$$

Поскольку $i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}, k = \overline{1,4}$, кол-во слагаемых равно $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Задача: *Даны тензоры a^i_j, ξ^i, b_i. Определим величины z и d как:*

$$z^i = a^i_j \xi^j \qquad\qquad d_i = b_j a^j_i$$

Показать, что z^i – вектор (0,1), d_i – ковектор (1,0).

Решение: Запишем законы преобразования величин.

$z^{i'} = a^{i'}_{j'} \xi^{j'} = c^{i'}_i c^j_{j'} a^i_j c^{j'}_j \xi^j = c^{i'}_i \underbrace{c^j_{j'} c^{j'}_j}_{\delta^{j'}_j} a^i_j \xi^j = c^{i'}_i a^i_j \xi^j = c^{i'}_i z^i$

z преобразуется с помощью обратной матрицы перехода, т.е. z - тензор (0,1).

$d_{i'} = b_{j'} a^{j'}_{i'} = c^j_{j'} b_j c^{j'}_j c^i_{i'} a^j_i = \underbrace{c^j_{j'} c^{j'}_j}_{\delta^{j'}_j} c^i_{i'} b_j a^j_i = c^i_{i'} d_i$

d преобразуется с помощью прямой матрицы перехода, т.е. d - тензор (1,0).

Задача: *Даны тензоры a_{ij} a^i_j, ξ^i, η^i, b_i. Определим величины z и g как:*

$$z = a_{ij} \xi^i \eta^j \qquad\qquad g = b_i a^i_j \xi^j$$

Показать, что z и g –инварианты.

Решение: Запишем законы преобразования

$z' = a_{i'j'} \xi^{i'} \eta^{j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} a_{ij} c^{i'}_i \xi_i c^{j'}_j \eta^j = \underbrace{c^i_{i'} c^{i'}_i}_{\delta^{i'}_i} \underbrace{c^j_{j'} c^{j'}_j}_{\delta^{j'}_j} a_{ij} \xi_i \eta^j = a_{ij} \xi_i \eta^j$

Таким образом в преобразовании z не учавствует матрица перехода, следовательно z-инвариант. Для g всё делается аналогично.

Утверждение: *Совокупность всех тензоров ранга r в L_N образует N^r-мерное пространство.*

Операции над тензорами

Сложение тензоров

Пусть $a^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}$, $b^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}$ – координаты тензоров A^q_p и B^q_p соответственно в некотором базисе e.

Суммой тензоров A^q_p и B^q_p называется тензор $Z^q_p = A^q_p + B^q_p$, координаты которого определяются как:

$$z^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} = a^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p} + b^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}$$

Теорема: $Z^q_p = A^q_p + B^q_p$ - *тензор порядка* (p, q)

Умножение тензора на число

Пусть A^q_p заданный в $L_n(\mathbb{K})$ имеет в базисе e координаты $a^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}$, а α - число из поля $\mathbb{K}$.

Произведением αA^q_p называется объект, который в этом же базисе имеет координаты $\alpha a^{i_1\dots i_q}_{j_1\dots j_p}$.

Задача: *Даны тензоры одно и того же типа.*

$$a = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right\| \qquad b = \left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right\|$$

Найти $a + b$, $b - 2a$

Решение:

$$a + b = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1+3 & 1+4 & 1+2 & -1+5 \\ 1+5 & 1+7 & 1+1 & -1+3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right\|$$

$$b - 2a = \left\|\begin{array}{cc|cc} 3-2 & 4-2 & 2-2 & 5+2 \\ 5-2 & 7-2 & 1-2 & 3+2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \end{array}\right\|$$

Прямое умножение тензоров

Пусть даны тензоры $A^{q_1}_{p_1}$ и $B^{q_2}_{p_2}$, координаты которых в некотором базисе e равны $a^{i_1\dots i_{q_1}}_{j_1\dots j_{p_1}}$ и $b^{i_1\dots i_{q_2}}_{j_1\dots j_{p_2}}$ соответственно.

Определение: **Прямым произведением** $A \otimes B$ называется объект, координаты которого в базисе e выражаются как:

$$(A \otimes B)^{i_1\dots i_{q_1+q_2}}_{j_1\dots j_{p_1+p_2}} = a^{i_1\dots i_{q_1}}_{j_1\dots j_{p_1}} b^{i_{q_1+1}\dots i_{q_1+q_2}}_{j_{p1+1}\dots j_{p_1+p_2}}$$

Задача: *В некотором базисе e заданы два тензора:*

$$X_0^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Y_0^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найти $X \otimes Y$.

Решение:

1) Докажем, что $X_0^1 \otimes Y_0^1 = A_0^2$.

$$(X \otimes Y)^{i'j'} = x^{i'} y^{j'} = c_i^{i'} x^i c_j^{j'} y^j = c_i^{i'} c_j^{j'} x^i y^j$$

В преобразовании учавствуют две обратные матрицы перехода, следовательно $X_0^1 \otimes Y_0^1 = A_0^2$

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 0 & 1\cdot 3 \\ 0\cdot(-1) & 0\cdot 0 & 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача: *Найти $Z = A \otimes B$.*

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$z_{i'}^{j'k'} = a_{i'}^{j'} b^{k'} = c_j^{j'} c_{i'}^i a_i^j c_k^{k'} b^k = c_j^{j'} c_{i'}^i c_k^{k'} a_i^j b^k \Rightarrow z\text{-тензор (1,2)}$$

$$Z_1^2 = \left\| \begin{matrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right\|$$

Задача: *Даны тензоры X_1^0, Y_0^1, Z_0^1. Имеют ли смысл выражения:*

1) $X_1^0 \otimes Y_0^1 + Y_0^1 \otimes Z_0^1$

2) $X_1^0 \otimes Y_0^1 - 2Y_0^1 \otimes X_1^0$

Решение:

1) $X_1^0 \otimes Y_0^1 + Y_0^1 \otimes Z_0^1 = A_1^1 + B_0^2 \Rightarrow$ не имеет смысла

2) $X_1^0 \otimes Y_0^1 - 2Y_0^1 \otimes X_1^0 = A_1^1 - 2B_1^1 \Rightarrow$ имеет смысл

Свёртка тензора

Пусть тензор A_p^q в некотором базисе e имеет координаты $a_{j_1\ldots j_p}^{i_1\ldots i_q}$. Выделим какой-либо верхний i_m индекс и какой-либо нижний j_k и сложим координаты тензора, у которого $i_m = j_k = i$. Полученный результат называется свёрткой тензора.

$$\langle A \rangle_k^m = a_{j_1\ldots i j_{k+1}\ldots j_p}^{i_1\ldots i i_{m+1}\ldots i_q}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема: *Свёртка тензора по индексам j_k и i_m - это тензор порядка* $(p-1, q-1)$

Задача: *Убедитесь, что свёрткой тензора A^1_1 в L_n является след матрицы A.*

Решение: Запишем закон преобразования
$a^{j'}_{i'} = c^{j'}_j c^i_{i'} a^i_i$
Рассмотрим компоненты при $j' = i'$
$a^{i'}_{i'} = \underbrace{c^{i'}_j c^i_{i'}}_{\delta^i_j} a^j_i = a^1_1 + ... + a^n_n$

Задача: *Задан тензор:*

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array} \right\|$$

Найти свёртки 1) a^{ij}_i, *2)* a^{ij}_j

Решение:

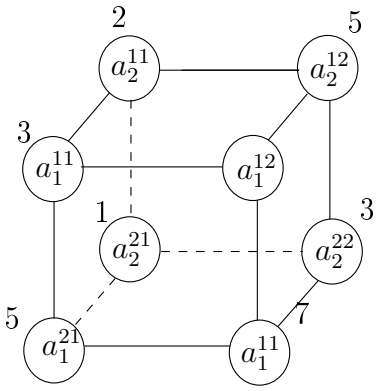

Рис. 9.2: Схема тензора A

$$1)\ a^{ij}_i = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad 2)\ a^{ij}_j = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Свёртка произведения тензоров

Примеры:

1) Произведение матриц (ЛО)

$$z^j_k = a^j_i b^i_k$$

2) Подъём и опускание индекса (свёртка с метрическим тензором)

$$B^{i_2 \dots i_q}_{j j_1 \dots j_p} = g_{i_1 j} A^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \text{ (опускание индекса)}$$

$$B^{i i_1 \dots i_q}_{j_2 \dots j_p} = g^{j_1 i} A^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_p} \text{ (подъём индекса)}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Семинар 10. Знакомство с теорией групп.

Понятие группы и подгруппы

Определение: Будем говорить, что для некоторого множества элементов G определена бинарная операция $\bigstar$, если каждой паре $a, b \in G$ однозначно ставится в соответствие $c \in G$.

$$c = a \bigstar b$$

Определение: Элемент $u \in G$ называется **правым нейтральным элементом**, если он обладает следующими свойствами:

1) $\forall a \in G : a \bigstar u = a$

2) $\forall a \in G, \exists y \in G : a \bigstar y = u$

Определение: Множество G называется **группой** относительно операции $\bigstar$, если для элементов G выполнены аксиомы:

A1) $\forall a, b, c \in G : (a \bigstar b) \bigstar c = a \bigstar (b \bigstar c)$ (ассоциативность)

A2) Существует хотя бы один правый нейтральный элемент

Определение: Группа G называется **абелевой (коммутативной)**, если $\forall a, b \in G$ выполнено $a \bigstar b = b \bigstar a$

Пример 1: $G = e$ с операцией $e \bigstar e = e$

Пример 2: Множество матриц $A_{m \times n}$ образует абелеву группу относительно сложения.

Пример 3: Множество квадратных матриц $A_{n \times n}$ с $\det A \neq 0$ образуют некоммутативную группу относительно умножения матриц. $u = E$.

Пример 4: Множество $\mathbb{Z}$ относительно операции сложения – абелева группа . $u = 0$, $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists a^{-1} = -a$.

Пример 5: Множество $\mathbb{R}$ относительно операции сложения – абелева группа. $u = 0$, $\forall a \in \mathbb{R} : \exists a^{-1} = -a$

Пример 6: Множество $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ образует группу относительно операции умножения. $u = 1$, $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \exists a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Определение: Множество G' называется **подгруппой** группы G, если

1) $G' \neq \varnothing$

2) $\forall a, b \in G' : a \bigstar b \in G'$

3) $\forall a \in G' : a^{-1} \in G'$

Утверждение: *Подгруппа G' сама по себе является группой.*

Гомоморфизм групп

Определение: Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный $y \in Y$ по закону $y = F(x)$, то говорится, что задано отображение F множества X в множество Y.

Определение: Пусть G, G_1 – два множества, на которых заданы соответствующие операции $\bigstar$, $\circ$. Отображение F множества G на множество G_1 называется **гомоморфизмом**, если $\forall x, y \in G : F(x \bigstar y) = F(x) \circ F(y)$.

G_1 называется **гомоморфным образом** G.

Утверждение: *Гомоморфный образ группы также является группой.*

Утверждение: *Гомоморфный образ абелевой группы также является абелевой группой.*

При этом гомоморфный образ не абелевой группы не обязательно является не абелевой группы.

Определение: Взаимооднозначный гомоморфизм называется **изоморфизмом**.

Группы преобразований

Определение: **Преобразованием** множества M называется однозначное отображение этого множества самого в себя

Определение: **Движение** – это такое преобразование плоскости (пространства), при которых сохраняются расстояния между точками.

Примеры движений:

1) Параллельный перенос на $\vec{b}$

Множество переносов образуют абелеву группу

2) Поворот в плоскости на угол α

Множество поворотов образуют абелеву группу

Представления групп

Определение: **Представлением** группы преобразований называется гомоморфизм этой группы в множество невырожденных квадратных матриц с операцией умножения.

Пример 1: Представление группы параллельных переносов.

Параллельный перенос на вектор $\vec{b}$ ставит в соответствие вектору (x, y) вектор (x', y') по правилу:

$$\begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$$

Матрица переноса в 2D:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x + b_1 \\ y + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Матрица переноса в 3D:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2: Представление группы поворота на плоскости

$|OA'| = |OA|$

$X' = |OA'|\cos(\alpha + \beta) = |OA'|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \underbrace{|OA|\cos\beta}_{x}\cos\alpha - \underbrace{|OA|\sin\beta}_{y}\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$Y' = |OA'|\sin(\alpha + \beta) = |OA'|(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = \underbrace{|OA|\cos\beta}_{x}\sin\alpha + \underbrace{|OA|\sin\beta}_{y}\cos\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

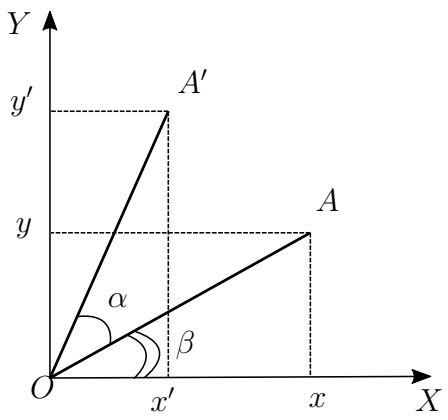

Рис. 10.1: Пояснение примеру 2

или в другом варианте:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования, осуществляющего поворот на угол α, а потом параллельный перенос на $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b_2 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Преобразования Галлилея

Введём обозначения:

$$x^0 = t \qquad x^2 = y$$
$$x^1 = x \qquad x^3 = z$$

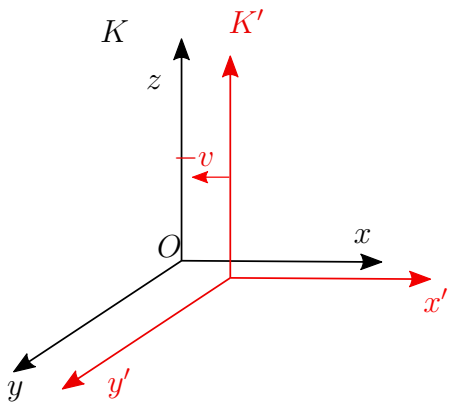

Рис. 10.2: Преобразование Галлилея

Преобразования Галлилея записываются как:

$$\begin{cases} x'^0 = x^0, & x'^1 = x^1 - Vt = x^1 - Vx^0 \\ x'^2 = x^2, & x'^3 = x^3 \end{cases}$$

Матрица преобразования:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование Галлилея образует группу.

Преобразование Лоренца

Согласно второму постулату Эйнштейна: "скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области инерциальной системы отсчёта и одинакова во всех инерциальных системах отсчёта". Это означает, что форма фронта электромагнитного поля (который образует свет) не меняется. Каждая компонента светового поля для электромагнитной волны подчиняется уравнению:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Из постулата Эйнштейна следует, что вид этого уравнения будет одинаков во всех инерциальных системах отсчёта. Исходя из этих соображений, получим вид преобразований Лоренца.

Введём обозначения:

$$x^0 = t \qquad x^2 = y$$
$$x^1 = x \qquad x^3 = z$$

В данных переменных уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 u}{(\partial x^3)^2} = 0$$

Выведем закон преобразования частных производных.

Пусть $A^i_{i'}$ – матрица перехода, $A^{i'}_i$ – обратная матрица перехода. Тогда:

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Вектор $\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$ принято называть **градиентом**(∇).

Закон преобазования градиента:

$$\nabla' = A^T \nabla$$

Для вторых производных справедливо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}}(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}) = \frac{\partial}{\partial x^k}(A^i_{i'}\frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = A^i_{i'}A^k_{k'}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$$

Введём матрицу (метрический тензор):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

С помощью данной матрицы перепишем уравнение для компонент полей в виде:

$$g^{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = 0$$

Поскольку вид этого уравнения не меняется при смене системы отсчёта:

$$g^{ik} = g^{i'k'}$$

$$g^{i'k'}\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = g^{i'k'} A^i_{i'} A^k_{k'} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k}$$
$$g^{ik} = g^{i'k'} A^i_{i'} A^k_{k'} \Rightarrow g^{i'k'} = g^{ik} A^{i'}_i A^{k'}_k$$

В матричном виде:

$$g' = A^{-1} g (A^{-1})^T \underbrace{\Rightarrow}_{g^{ik}=g^{i'k'}} g = A^{-1} g (A^{-1})^T$$

Последнее выражение определяет преобразование Лоренца.

Псевдоскалярное произведение. Интервал.

Поскольку дважды контравариантрый тензор g^{ik} не вырожден, для него существует обратный метрический тензор $g_{ik} = (g^{ik})^{-1}$, с помощью которого можно задать **псевдоскарярное** произведение:

$$(x, y) = g_{ik} x^i y^k$$

Произведение называется псевдоскалярным, поскольку матрица g не является положительно определённой.

Определение: Линейное пространство, где задано псевдоскалярное произведение называется **псевдоевксидовым**.

Утверждение: *Псевдоскалярное произведение инвариантно относительно преобразований Лоренца.*

Доказательство: Пусть

$$\vec{x} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \qquad \vec{x}' = \{x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\}$$
$$\vec{y} = \{y^0, y^1, y^2, y^3\} \qquad \vec{y}' = \{y'^0, y'^1, y'^2, y'^3\}$$

$$(x, y) = g_{ik} x^i y^k = \underbrace{g_{ik} A^i_{i'} A^k_{k'}}_{g_{ik}=g_{i'j'}} x^{i'} y^{k'} = g_{i'k'} x^{i'} y^{k'}$$

Пусть $\overbrace{M_1 M_2} = \{x_1^0 - x_2^0, x_1^1 - x_2^1, x_1^2 - x_2^2, x_1^3 - x_2^3\}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Величина $S^2 = (\overbrace{M_1M_2}, \overbrace{M_1M_2}) = (x_1^0 - x_2^0)^2 + (x_1^1 - x_2^1)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1^3 - x_2^3)^2$ называется **интервалом**.

Псевдоскалярное произведение инвариантно относительно преобразований Лоренца:

$$S' = S$$

Частный случай преобразований Лоренца.

Рассмотрим две системы отсчёта (Рис. 10.2).

Матрица преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} A^0_{0'} & A^0_{1'} & 0 & 0 \\ A^1_{0'} & A^1_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ik} = A^i_{i'} A^k_{k'} g_{ik}$$

$1 = g_{0'0'} = g_{00}(A^0_{0'})^2 + g_{11}(A^1_{0'})^2 = (A^0_{0'})^2 - (A^1_{0'})^2$
$0 = g_{0'1'} = g_{00}A^0_{0'}A^0_{1'} + g_{11}A^1_{0'}A^1_{1'} = A^0_{0'}A^0_{1'} - A^1_{0'}A^1_{1'}$
$0 = g_{1'0'} = g_{00}A^0_{0'}A^0_{1'} + g_{11}A^1_{1'}A^1_{0'} = A^0_{0'}A^0_{1'} - A^1_{1'}A^1_{0'}$
$-1 = g_{1'1'} = g_{00}(A^0_{1'})^2 + g_{11}(A^1_{1'})^2 = (A^0_{1'})^2 - (A^1_{1'})^2$

Введём величину $\beta = \dfrac{A^1_{0'}}{A^0_{0'}} = \dfrac{A^0_{1'}}{A^1_{1'}}$.

$$\begin{cases} x^0 = ct = A^0_{0'}x'^0 \\ x' = Vt = A^1_{0'}x^0 \end{cases} \Rightarrow \frac{A^1_{0'}}{A^0_{0'}} = \frac{V}{c} = \beta$$

В итоге

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покажем, что данное преобразование Лоренца образует группу.

Нужно получить, что $A(\beta_1)A(\beta_2) = A(\tilde{\beta})$, где $\tilde{\beta} = \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$.

$(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2) = 1 + \beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = 1\beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = (1 + \beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2$

При перемножении $A(\beta_1)$ и $A(\beta_2)$ возникают выражения:

$$\frac{1 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \sqrt{\frac{(1+\beta_1\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1+\beta_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}$$

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}} = \sqrt{\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1\beta_2)^2 - (\beta_1+\beta_2)^2}} = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}}$$

Таким образом $A(\beta_1)A(\beta_2) = A(\tilde{\beta})$.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ