МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕНСКОЙ
АЛЕКСЕЙ ВИКТОРОВИЧ

—

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ОНУФРИЕНКО МАРИЮ ВИКТОРОВНУ

Содержание

Лекция 1

1. Геометрия кривых

Начать курс необходимо с небольшого объяснения, что такое дифференциальная геометрия и, более точно, классическая дифференциальная геометрия. Эта наука довольно «старая»: ей почти двести лет. В течение времени взгляды на ее предмет менялись. Вначале это было изучение кривизны кривых, затем изучения кривизны связности в расслоениях. Общее здесь — кривизна. На данном этапе наша цель понять на простых объектах и примерах, что она из себя представляет, как ее можно описать, измерить, а также что с ней можно делать в математическом смысле. Слово «классическая» в названии означает, что мы будем рассматривать только объекты, которые возникли в XIX веке, а именно: кривые и поверхности.

Что такое кривая?

Это непростой вопрос. В курсе аналитической геометрии были кривые второго порядка. Пусть у нас есть некоторый многочлен второй степени $F(x, y) = 0$. Далее были тонкости: у нас было множество точек, чьи координаты удовлетворяют этому уравнению (проще говоря, заданные этим уравнением). Однако мы работали не с ними, а с некоторыми классами эквивалентности уравнений. То есть уже в аналитической геометрии связь между точками и уравнениями была косвенная. Например, были разные квадрики, которые задавали одно и то же множество.

Так что же мы можем назвать гладкой кривой? Первое, что приходит в голову — это график гладкой функции. Степень гладкости может быть разная.

Мы в прошлых курсах встречали два описания кривых. Во-первых, это *неявное описание (задание) кривой* $F(x, y) = 0$ (когда есть соотношение на x и y). Однако все не так просто. Например, кривая $xy = 0$ представляет собой координатный крест (рис.), который нельзя назвать гладкой кривой. С другой стороны, есть *параметрическое описание кривой*. Это значит, что x и y заданы как функции некоторой новой переменной, которая называется параметр:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

С таким способом задания кривой можно столкнуться, например, в механике при описании траектории движения тела. Кроме того, такой способ параметризации используется и в аналитической геометрии. Например, параметризация окружности единичного радиуса выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Комментарий 1. В курсе аналитической геометрии рассказывают следующий интересный факт. Пусть у нас есть некоторая точка на квадрике и прямая a, не пересекающая квадрику. Далее если мы проводим прямую через точку O, которая пересекает прямую a, то точке пересечения A' будет соответствовать точка A на квадрике. Теперь если мы введем некоторую параметризацию на прямой a: например, $A'(a+bt, c+dt)$, то можно вычислить координаты точки A: это будут некоторые рациональные функции

$$x = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad y = \frac{R(t)}{S(t)},$$

которые будут иметь степень не больше двух. Это называется рациональная параметризация квадрики.

Оказывается, в разных разделах геометрии предпочтительны разные способы задания кривой. В каких-то удобно решать системы уравнений, в дифференциальной же геометрии удобен параметрический способ описания.

Пример 1. Однако даже если кривые $x(t)$ и $y(t)$ гладкие, можно создать кривую, у которой будет излом. В чем же дело? Построим их явным образом.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (x'(t), y'(t))$$

Определение 1. Гладкая регулярная параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ — это отображение $\vec{r} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, причем

$$\vec{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

все $x^i(t)$ гладкие и для всякого $t \in (a, b)$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) \neq 0.$$

Перепараметризация кривой

Пусть у нас есть кривая $\vec{r}(t)$. Мы хотим параметризовать ее с помощью параметра τ, где $t = \phi(\tau)$. И $\vec{r}(\phi(\tau))$ — перепараметризация кривой $\vec{r}(t)$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(\phi(\tau)) = \frac{d\vec{r}}{dt}(\phi(\tau))\varphi'(t).$$

Утверждение 1. *Если $\varphi'(t) \neq 0$, то $\vec{r}(\phi(\tau))$ — тоже регулярная кривая.*

Обозначения отображений

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{E}$, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $f(P) = |\vec{OP}|$, $P(x, y)$. Имеем

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f(r, \varphi) = r.$$

Можно построить отображения $\Phi : \mathbb{R}^2(x, y) \to \mathbb{E}^2$ и $\Psi : \mathbb{R}^2(r, \varphi) \to \mathbb{E}^2$,

$$f \circ \Phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f \circ \Psi(r, \varphi) = r.$$

Функция f в координатах x, y имеет вид $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, но в координатах $f(r, \varphi) = r$.

Сделаем параметрическую замену

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$x = x(r, \varphi), \quad y = y(r, \varphi).$$

Имеем

$$f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = f(r, \varphi),$$

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r,$$

$$f \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \Psi = f \circ \Psi.$$

Кривизна кривой

Пусть $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$, пусть $m = 1$, $|\dot{\vec{r}}| = 1$, $k = |\ddot{\vec{r}}|$.

Определение 2. Параметр s на кривой называется натуральным, если $|\ddot{\vec{r}}| = 1$.

Длина кривой

$$l = \int_a^b |\dot{r}|dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1(t))^2 + \ldots + (\dot{x}^n(t))^2}dt.$$

Утверждение 2. *Длина l — натуральный параметр.*

Доказательство.

$$\frac{dr}{dl} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{dl} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\frac{dl}{dt}} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} \Longrightarrow \left|\frac{dr}{dl}\right| = 1.$$

□

Лекция 2

2. Геометрия кривых

Формулы Френе для трехмерного случая

Первая формула Френе

$$n(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{k(s)} = \frac{\dot{v}(s)}{k(s)},$$

$$\dot{v}(s) = k(s)n(s).$$

Имеем $|n| = 1 \Longrightarrow \dot{n} \perp n \Longrightarrow$

$$\dot{n} = \lambda(s)v(s) + \kappa(s)b(s),$$

$$(v, n) = 0,$$

$$(\dot{v}, n) + (v, \dot{n}) = 0,$$

$$(kn, n) + (v, \lambda v + \kappa b) = 0,$$

$$k + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -k.$$

Определение 3. Пусть s — натуральный параметр. Тогда кручение $\kappa(s) = (\dot{n}(s), b(s))$,

$$\dot{n}(s) = -k(s)v(s) + \kappa(s)b(s),$$

$$b = [v, n] \Longrightarrow \dot{b} = [\dot{v}, n] + [v, \dot{n}] = [kn, n] + [v, -kv + \kappa b] = \kappa[v, b] = -\kappa n.$$

Теорема 1 (формулы Френе)**.**

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = k(s)n(s), \\ \dot{n}(s) = -k(s)v(s) + \kappa(s)b(s), \\ \dot{b}(s) = -\kappa(s)n(s). \end{cases}$$

Лекция 3

3. Поверхности

В курсе аналитической геометрии мы привыкли описывать поверхности в $\mathbb{R}^3$ в неявном виде:

$$F(x, y, z) = 0$$

— неявное задание поверхности.

В этом курсе мы будем работать чаще всего с параметрически заданными поверхностями. Это обобщение параметризованных кривых. Поговорим сначала про трехмерный случай.

Параметрически заданные двумерные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим отображение некоторого множества $U \subset \mathbb{R}^2(u, v)$ в $R^3(x, y, z)$:

$$r : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

— параметрическое задание поверхности. В дальнейшем это отображение будем считать гладким.

Определение 4. *Гладкая регулярная параметризованная поверхность* — это такое гладкое отображение

$$\vec{r} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad U \subset \mathbb{R}^2,$$

что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

в каждой точке U.

Определение 5. Гладкая неявно заданная поверхность — это множество точек, заданное уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция и $\operatorname{grad} F \neq 0$ в точках, где $F = 0$.

Связь параметризованной и неявно заданной поверхностей

Теорема 2. *Пусть $F(x, y, z) = 0$ гладкая неявно заданная поверхность. Тогда для любой точки этой поверхности в некоторой её окрестности это множество точек является образом гладкой регулярной параметризованной поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим такую точку $A(x_0, y_0, z_0)$, что $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то есть

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) \neq 0.$$

Следовательно, хотя бы одна из координат $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)$ не равна нулю. Пусть, например,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции можно выразить z как функцию от x, y в некоторой окрестности, то есть существует такая функция $\varphi(x,y)$, что в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0) имеем $F(x,y,z)=0 \iff z=\varphi(x,y)$. Тогда

$$r(u,v) = (u, v, \varphi(u,v))$$

задает искомую регулярную параметризованную поверхность. Проверим ранг:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

□

Сфера

Уравнение

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$
$$F(x,y,z)=0$$

задает сферу S^2. Градиент будет равен

$$\operatorname{grad} F = (2x, 2y, 2z),$$

тогда

$$\operatorname{grad} F = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

не на сфере. По теореме о неявной функции мы получаем, что на верхней («северной») полусфере имеем

$$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

а на нижней («южной»)

$$z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Таким образом, параметризация, например, верней полусферы выглядит следующим образом:

$$r(u,v) = (u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}).$$

Многомерный случай

Определение 6. *Гладкая регулярная параметризованная k-мерная поверхность* в n-мерном пространстве — это такое отображение

$$\vec{r} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad U \subset \mathbb{R}^k,$$

что r — гладкое и

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \frac{\partial x^n}{\partial u^k} & \end{pmatrix} = k.$$

Определение 7. Гладкая неявно заданная k-мерная поверхность в n-мерном пространстве — это множество точек, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0, \end{cases}$$

причем все F^i гладкие и

$$\operatorname{rk} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) = n - k.$$

Задача 1. *У любой точки гладкой неявно заданной поверхности есть окрестность, в которой точки этой поверхности являются образом гладкой регулярной параметризованной поверхности.*

Терминология

Есть разные подходы к тому, как изучать кривизну поверхности. Первый подход был введен Эйлером: если мы хотим изучать кривизну поверхности, то нужно изучать кривизну кривых, лежащих в этой поверхности.

Кривые на поверхности

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$
$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$
$$r(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Функции $u(t)$, $v(t)$ — гладкие, следовательно, $r(t)$ тоже гладкая. Продифференцируем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u(t), v(t))\dot{v}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \dot{u}(t) + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \dot{v}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ранг матрицы J равен 2. Итак, полученное произведение не ноль, следовательно, наша кривая регулярна.

Утверждение об эквивалентности описаний кривых

Пусть у нас есть отображение r и

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, в каждой точке есть невырожденный минор 2×2, пусть, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме об обратной функции можно выразить

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y)$$

в некоторой окрестности. Следовательно, получаем кривую

$$u(t) = u(x(t), y(t)),$$

$$v(t) = v(x(t), y(t)).$$

Итак, доказали утверждение:

Утверждение 3. *Оба описания регулярных кривых на поверхности эквивалентны.*

Когда у нас есть $u(t)$, $v(t)$, то будем считать, что кривая задана в локальных координатах. Если есть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то кривая задана в глобальных координатах. В этом курсе для нас приоритетным будет первый способ описания кривых.

Касательные векторы

Посмотрим на такие координаты $u(t)$, $v(t)$, что $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$. Рассмотрим

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$

$$r(0) = r(u(0), v(0)) = r(u_0, v_0) = A,$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial r}{\partial u}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \frac{\partial r}{\partial v}(u(t), v(t))\dot{v}(t)\right|_{t=0} = \vec{r}_u(u_0, v_0)\dot{u}(0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)\dot{v}(0),$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u(t), v(t)) = r_u(u(t), v(t)), \quad \frac{\partial r}{\partial v}(u(t), v(t)) = r_v(u(t), v(t)).$$

Векторы $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ зависят только от точки A, но не от кривой, а $\dot{u}(0), \dot{v}(0)$ — числа, зависящие от кривой.

Утверждение 4. *Векторы $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ линейно независимы.*

Доказательство. Из регулярности ранг матрицы частных производных равен двум. Следовательно, $\vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)$ линейно независимы. □

Утверждение 5. *Вектор скорости в точке A любой кривой, лежащей на поверхности, лежит в плоскости, порожденной $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.*

Касательная плоскость

Определение 8. Касательная плоскость в точке A к данной поверхности Σ (будем обозначать $T_A\Sigma$) по определению

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}(r_u(A), r_v(A)).$$

Утверждение 6. *Касательная плоскость $T_A\Sigma$ состоит в точности из векторов скорости кривых, лежащих на поверхности.*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\dot{r}(0) = r_u(A)\dot{u}(0) + r_v(A)\dot{v}(0) \in T_A\Sigma,$$

$$X \in T_A\Sigma \Longrightarrow X = ar_u(A) + br_v(A).$$

Рассмотрим кривую

$$u(t) = u_0 + at,$$

$$v(t) = v_0 + bt.$$

Имеем

$$\dot{u}(0) = a, \quad \dot{v}(0) = b,$$

следовательно,

$$\dot{r}(0) = ar_u(A) + br_v(A) = X,$$

что и требовалось. □

В общем случае имеем

$$r(u^1, \ldots, u^k),$$

то есть

$$r(t) = r(u^1(t), \ldots, u^k(t)).$$

Получим

$$\dot{r}(0) = r_{u^1}(A)\dot{u}^1(0) + \ldots + r_{u^k}(A)\dot{u}^k(0),$$

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}(r_{u^1}(A), \ldots, r_{u^k}(A))$$

— k-мерное касательное пространство, где r_{u^i} и r_{u^j} линейно независимы.

Лекция 4

4. Перепараметризация поверхностей

Двумерный случай

Рассмотрим поверхность $r(u, v)$ и замену

$$(u, v) = \Phi(s, t),$$

где

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t).$$

На самом деле мы рассматриваем композицию

$$r \circ \Phi(s, t) = r(u(s, t), v(s, t)),$$

$$r(s, t) = r(u(s, t), v(s, t)).$$

Перепараметризация поверхности

Замена параметризации поверхности (перепараметризация/репараметризация) — нужно потребовать, чтобы Φ был диффеоморфизмом (т.е. Φ, Φ^{-1} гладкие)ю

Утверждение 7. *Поверхность $r(s, t)$ тоже гладкая регулярная поверхность.*

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = 2,$$

так как вторая матрица невырождена. □

В многомерном случае при рассмотрении поверхности $r(u^1, \ldots, u^k)$ с диффеоморфизмом

$$u^1 = u^1(v^1, \ldots, v^k)$$

$$\vdots$$

$$u^k = u^k(v^1, \ldots, v^k)$$

имеем

$$r(v^1, \ldots, v^k) = r(u^1(v^1, \ldots, v^k), \ldots, u^k(v^1, \ldots, v^k)).$$

Выбор локальных координат

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}(r_u(A), r_v(A)),$$
$$r(s,t) = r(u(s,t), v(s,t)),$$
$$r_s = r_u\frac{\partial u}{\partial s} + r_v\frac{\partial v}{\partial s},$$
$$r_t = r_u\frac{\partial u}{\partial t} + r_v\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Получаем
$$\operatorname{span}(r_s(A), r_t(A)) = \operatorname{span}(r_u(A), r_v(A)).$$
то есть касательная плоскость (касательное пространство) не зависит от выбора локальных координат.

Рассмотрим отображение
$$r : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^k.$$

То есть $\Sigma = r(u)$. Пусть для всякого A касательная плоскость $T_A\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано евклидово скалярное произведение
$$(a,b) = a^1b^1 + \ldots + a^nb^n.$$

Ограничение
$$(\cdot,\cdot)|_{T_A\Sigma} = I$$
— первая I квадратичная форма. Мы будем называть ее *римановой метрикой* и обозначать g.

Напоминание. Если у нас есть векторное пространство V с базисом $e_1, \ldots, e_k$ и некоторая билинейная форма Ψ. Пусть Φ — матрица билинейной формы Ψ в базисе $e_1, \ldots, e_k$. Имеем
$$\Phi_{ij} = \Psi(e_i, e_j),$$
$$\Psi(a,b) = (a^1 \ldots a^k)(\Phi_{ij})\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^k \end{pmatrix}.$$

Маломерный случай

У касательной плоскости $T_A\Sigma$ есть базис $r_u(A), r_v(A)$. У первой квадратичной формы есть матрица
$$\begin{pmatrix} (r_u,r_u) & (r_u,r_v) \\ (r_v,r_u) & (r_v,r_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g_{12} = g_{21}.$$

Кроме того,

$$\begin{pmatrix}(r_u, r_u) & (r_u, r_v)\\ (r_v, r_u) & (r_v, r_v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}.$$

Более полно, имея

$$r = (x, y, z),$$

получаем

$$r_u = \left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}\right),$$

$$r_v = \left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}\right).$$

Итак,

$$E = g_{11} = (r_u, r_u) = \left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{u}\right)^2 + \left(\frac{z}{u}\right)^2,$$

$$F = g_{12} = (r_u, r_v) = \frac{x}{u}\cdot\frac{x}{v} + \frac{y}{u}\cdot\frac{y}{v} + \frac{z}{u}\cdot\frac{z}{v},$$

$$G = g_{22} = (r_v, r_v) = \left(\frac{x}{v}\right)^2 + \left(\frac{y}{v}\right)^2 + \left(\frac{z}{v}\right)^2.$$

Напомним, что этот базис зависит от точки A, то есть являются функциями от u и v.

Если у нас есть два вектора

$$a = a^1 r_u + a^2 r_v, \quad b = b^1 r_u + b^2 r_v,$$

тогда

$$(a, b) = I(a, b) = (a^1\ a^2)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1\\ b^2\end{pmatrix}.$$

Длина вектора

$$|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{(a^1\ a^2)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^1\\ a^2\end{pmatrix}}.$$

Угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{(a, b)}{|a|\cdot|b|} = \frac{(a^1\ a^2)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1\\ b^2\end{pmatrix}}{\sqrt{(a^1\ a^2)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^1\\ a^2\end{pmatrix}}\sqrt{(b^1\ b^2)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1\\ b^2\end{pmatrix}}}.$$

Длина кривой:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\dot r| dt = ?$$

$$r(t) = r(u(t), v(t)),$$
$$\dot{r} = r_u\dot{u} + r_v\dot{v},$$

следовательно, в базисе r_u, r_v вектор имеет координаты $(\dot{u}, \dot{v})$. Тогда

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{u}\ \dot{v}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}} dt,$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt.$$

Площадь

Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S(\Sigma) = \int\int_U \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

или $du \wedge dv$.

Традиционная форма записи первой квадратичной формы с помощью дифференциалов. У нас есть запись дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial u} a^1 + \frac{\partial f}{\partial v} a^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix},$$

где

$$du(a) = a^1, \quad dv(a) = a^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(a, a) = (a^1\ a^2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} &= \\ = E(a^1)^2 + 2Fa^1a^2 + G(a^2)^2 &= \\ = E(du(a))^2 + 2Fdu(a)dv(a) + G(dv(a))^2 &= \\ &= (Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)(a). \end{aligned}$$

Итак,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Вторая квадратичная форма

Как известно, на сфере нет прямых и кривых с кривизной 0. Идея Эйлера: давайте будем рассматривать различные кривые, лежащие на поверхности, изучать их кривизну, и тогда мы сможем понять что-то про кривизну поверхности.

Рассмотрим произвольную двумерную поверхность в трехмерном пространстве. Рассмотрим касательную плоскость $T_A\Sigma$. Пусть m — нормаль к поверхности (она зависит от точки A, и есть выбор ее направления — есть поле единичных нормалей). Имеем

$$m = \pm\frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}.$$

Рассмотрим также векторы: $\operatorname{pr}_{T_A\Sigma}\vec{a}$ — ортогональная проекция $\vec{a}$ на $T_A\Sigma$; и $\operatorname{pr}_m\vec{a}$ — ортогональная проекция $\vec{a}$ на $\vec{m}$,

$$\operatorname{pr}_m\vec{a} = \frac{(m, \vec{a})}{(m, m)}m = (m, \vec{a})m.$$

Здесь (с учетом использования натурального параметра) $k_n = |\operatorname{pr}_{\vec{m}}\ddot{r}|$ — нормальная кривизна, $k_g = |\operatorname{pr}_{T_A\Sigma}\ddot{r}|$ — геодезическая кривизна. По теореме Пифагора

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}.$$

Напомним, что

$$\operatorname{pr}_m\ddot{r} = (m, \ddot{r})m.$$

Тогда

$$\pm k_n = (m, \ddot{r}),$$

знак «+» будет, если $(m, \ddot{r}) > 0$; знак «-» будет, если $(m, \ddot{r}) < 0$. Вспомним формулу

$$\dot{r} = r_u\dot{u} + r_v\dot{v},$$

следовательно,

$$\ddot{r} = (r_{uu}\dot{u} + r_{uv}\dot{v})\dot{u} + r_u\ddot{u} + (r_{vu}\dot{u} + r_{vv}\dot{v})\dot{v} + r_v\ddot{v}.$$

Имеем

$$\pm k_n = (m, \ddot{r}) = (r_{uu}, m)(\dot{u})^2 + 2(r_{uv}, m)\dot{u}\dot{v} + (r_{vv}, m)(\dot{v})^2 = (\dot{u}\ \dot{v})\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathrm{II}(\dot{r}, \dot{r}),$$

где

$$L = (r_{uu}, m),$$
$$M = (r_{uv}, m),$$
$$N = (r_{vv}, m).$$

Определение 9. Вторая квадратичная форма II — билинейная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

в базисе r_u, r_v.

Случай произвольного параметра

Мы только что вывели формулу

$$\pm k_n = \mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds},\ \frac{dr}{ds}\right)$$

где s — натуральный параметр. Пусть теперь t — некоторый произвольный параметр. Имеем

$$\pm k_n = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds},\ \frac{dr}{ds}\right)}{1} = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{ds},\ \frac{dr}{ds}\right)}{\mathrm{I}\left(\frac{dr}{ds},\ \frac{dr}{ds}\right)} = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds},\ \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right)}{\mathrm{I}\left(\frac{d\vec{r}r}{dt}\frac{dt}{ds},\ \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right)} = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)}{\mathrm{I}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)}{\mathrm{I}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)}.$$

Итак,

Утверждение 8. *Имеет место формула*

$$\pm k_n = \frac{\mathrm{II}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)}{\mathrm{I}\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{dr}{dt}\right)},$$

где t — произвольная параметризация.

Заметим, что существует такая параметризация, что для всякого вектора ξ имеет место равенство $\dot{r} = \xi$. Тогда

$$\pm k_n = \frac{\mathrm{II}(\xi,\ \xi)}{\mathrm{I}(\xi,\ \xi)}.$$

Поэтому мы можем взять кривые, у которых одинаковая нормальная кривизна, но разные k_g и k.

Лекция 5

5. Кривизна поверхности

Нормальное сечение

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, и пусть V^{n-1} — гладкое подмногообразие размерности $n-1$ (или, как говорят, «коразмерности один»), вложенное в $\mathbb{R}^n$. В настоящем параграфе мы будем в основном интересоваться только локальными свойствами этой гиперповерхности, не интересуясь ее глобальной структурой, поэтому можно считать, что у нас просто имеется гладкое вложение диска D^{n-1} в $\mathbb{R}^n$.

Выше мы уже обсуждали различные способы задания многообразий, в том числе гиперповерхностей. Для удобства выберем параметрическое задание V^{n-1}, т. е. будем считать, что V^{n-1} (или вложенный диск D^{n-1}) определяется гладким радиус–вектором $r = r(u^1, \dots, u^{n-1})$ с $\mathbb{R}^n$, где параметры (координаты) $u^1, \dots, u^{n-1}$ меняются в некотором диске в евклидовом пространстве параметров $\mathbb{R}^{n-1}(u^1, \dots, u^{n-1})$. Поскольку мы считаем, что радиус–вектор определяет гладкое подмногообразие, то это означает, что векторы $\frac{dr}{du^1}, \dots, \frac{dr}{du^{n-1}}$ линейно независимы в каждой точке области определения. Напомним, что эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку P на поверхности V^{n-1}. Как было показано выше, гладкое вложение V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ порождает на V^{n-1} индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию. Пусть $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$; тогда радиус-вектор r задается набором гладких функций $x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$; тогда возникает следующая квадратичная форма:

$$ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (x^i(u^1, \dots, u^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p,$$

$$g_{kp} = \langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} \rangle;$$

здесь через $\langle , \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение 10. Первой квадратичной формой гиперповерхности V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$ называется форма $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum\limits_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$, где функции $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ определены выше.

Функции g_{kp} зависят от радиус–вектора гиперповерхности и меняются, вообще говоря, при изменении радиус–вектора, т.е. при деформации гиперповерхности. Первая квадратичная форма определена на векторах, касательных к V^{n-1}. Более точно: если $a, b \in T_P V^{n-1}$ — два произвольных касательных вектора, то определено скалярное произведение

$$\langle a, b\rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp}a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}a^k b^p.$$

Напомним, что для упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда суммирование ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Из геометрического смысла функций g_{kp} следует, что скалярное произведение $\langle a, b\rangle_{ds^2(V^{n-1})}$ просто совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением векторов a и b, рассматриваемых как векторы объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$. Матрица метрического тензора G, составленная из функций $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь, какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности.

Пример 2. Пусть V^{n-1} задана в виде графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Имеем:

$$ds^2|_V^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}(dx^i)^2 + (dx^n(x^1, \dots, x^{n-1}))^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(dx^i)^2 + \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^p} dx^k dx^p =$$
$$= \sum_{k,p=1}^{n-1}(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^p})dx^k dx^p = g_{kp}(x^1, \dots, x^{n-1})dx^k dx^p.$$

Иногда будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ через f_{x^α}.

Пример 3. Пусть теперь поверхность V^{n-1} задана с помощью неявной функции, т.е. в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $\frac{\partial F}{\partial x^n} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует (локально) решение уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ вида $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{\partial F}{\partial x^i} / \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

Подставляя вместо f_{x^α} выражение вида

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} / \frac{\partial F}{\partial x^n},$$

получаем $G = (g_{kp})$, где

$$g_{kp} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial F}{\partial x^p}\right) / \left(\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)^2 + \delta_{kp}.$$

Вторая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим V^{n-1} — гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная радиус–вектором вида $r = r(u^1, \ldots, u^{n-1})$. Пусть $n = n(P)$ — единичный вектор, ортогональный поверхности V^{n-1} в точке P. Определим квадратичную форму $Q(a, a)$, задав ее значения $Q(a, a)$ для произвольного вектора $a \in T_P(V^{n-1})$. Для этого рассмотрим произвольную гладкую кривую $\gamma(t)$ лежащую на V^{n-1} и проходящую через точку P, причем так, что $\gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = a$. Такая кривая всегда существует, хотя и определена неоднозначно. Так как вдоль кривой $\gamma(t)$ радиус–вектор r является функцией от t, то $a = \frac{d}{dt} r(u(t))\Big|_{t=0}$. Рассмотрим радиус–функцию $\dot{r} = \frac{d}{dt} r(u(t))$ и ее производную по t, т. е. $\ddot{r} = \frac{d^2}{dt^2} r(u(t))$. Обозначим через $\ddot{r}_a$ значение $\ddot{r}$ при $t =$. Это и есть вторая производная радиус–вектора r по направлению вектора a.

Определение 11. Положим $Q(a, a) = \langle \ddot{r}; a \rangle$.

Определенное нами число является величиной проекции вектора $\ddot{r}_a$ на вектор нормали n в точке P. Вычислим значение $Q(a, a)$ в явном виде через координаты вектора r. Имеем

$$\frac{dr}{dt} = r_{u^k} \frac{du^k(t)}{dt}; \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + r_{u^k} \frac{d^2 u^k(t)}{dt^2};$$

$$\langle \frac{d^2}{dt^2} r(u(t)), n \rangle = \langle r_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, n \rangle + 0,$$

так как

$$\langle r_{u^k} \frac{d^2 u^k(t)}{dt^2}, n \rangle = \frac{d^2 u}{dt^2} \langle r_{u^k}, n \rangle = 0;$$

$$r_{u^k} \in T_P(V^{n-1}); \quad n \perp T_P(V^{n-1});$$

отсюда получаем

$$\langle \frac{d^2 r}{dt^2}\Big|_{t=0}, n \rangle = \langle r_{u^k, u^p}\Big|_{t=0}, n \rangle \frac{du^k}{dt}\Big|_{t=0} \frac{du^p}{dt}\Big|_{t=0} = Q(a, a).$$

При этом следует помнить, что вектор a имеет координаты

$$\left(\frac{du^1(0)}{dt}, \ldots, \frac{du^{n-1}(0)}{dt} \right),$$

т.е. окончательно $Q(a, a) = \langle n, r_{u^k, u^p}\Big|_{t=0} \rangle a^k a^p$.

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму $Q(a, b)$, значение которой на паре произвольных векторов $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяется так: $Q(a, b) = q_{kp}(P) a^k a^p$, где

$$q_{kp}(P) = \langle r_{u^k, u^p}\Big|_{t=0}, n \rangle.$$

Лемма 1. *Выражение $Q(a, b) = q_{kp} a^k b^p$, где $a, b \in T_P(V^{n-1})$ определяет билинейную форму.*

Доказательство. Имеем

$$q_{k'p'} = \langle r_{u^{k'},u^{p'}}\Big|_{t=0}, n\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}}\langle\frac{\partial^2 r(0)}{\partial u^k \partial u^p}\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}}\frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}}q_{kp}.$$

т.е. функции q_{kp} преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. □

Определение 12. Билинейная форма $Q(a,b)$ называется *второй квадратичной формой* поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Ясно, что форма Q зависит от способа вложения V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, т.е. при гладкой деформации V^{n-1} эта форма, вообще говоря, будет меняться. При этом форма уже не является инвариантной относительно изометрий V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Так, например, при изгибании V^{n-1}, т.е. при гладкой деформации, при которой первая форма не меняется, форма Q будет, вообще говоря, изменяться. Например, пусть V^2 — двумерная плоскость в $\mathbb{R}^3$; тогда радиус–вектор $r(u,v)$ можно считать линейной функцией от параметров u, v. Следовательно, первая форма является евклидовой плоской метрикой: $du^2 + dv^2$.

Теперь рассмотрим изометрическое преобразование V^2 — свертывание плоскости $\mathbb{R}^2$ в цилиндр, ось которого параллельна оси ox. Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число $\langle r_{vv}, n\rangle$. В то же время вторая форма плоскости $\mathbb{R}^2$ тождественно равна нулю, следовательно, при изгибании (т. е. при изометрии) вторая форма изменилась.

Инварианты пары форм

Рассмотрим фиксированное подмногообразие $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, пусть $P \in V^{n-1}$. В каждой точке P определена пара форм G и Q (первая и вторая формы). С этой парой связан набор числовых инвариантов, позволяющих изучать V^{n-1} независимо от введенной на ней системы координат. Обозначим через G и Q матрицы соответствующих форм и рассмотрим полином по переменной λ: $\det(Q - \lambda G)$. Поскольку форма G невырождена, то существует матрица G^{-1}, обратная к G; следовательно, уравнение $\det(G^{-1}Q - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ собственные числа матрицы $G^{-1}Q$, т.е. корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$. Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином $F(\lambda)$ в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k$, где σ_k — симметрические функции от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Лемма 2. *Функции $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ являются инвариантами пары форм G и Q, т.е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки $P \in V^{n-1}$.*

Доказательство. При регулярной замене координат $x \longrightarrow x'$ в окрестности точки P в касательном пространстве $T_P V^{n-1}$ возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби: $J : T_P \longrightarrow T_P$. При этом матрицы G и Q подвергаются преобразованию: $G \longrightarrow JGJ^T = G'$; $Q \longrightarrow JQJ^T = Q'$. Следовательно:

$$\det((G')^{-1}Q' - \lambda E) = \det[(J^T)^{-1}(G^{-1}Q - \lambda E)J^T] = \det(G^{-1}Q - \lambda E),$$

что и требовалось доказать. □

Нас будут особенно интересовать инварианты:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k, \quad \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(G^{-1}Q).$$

Остальные σ_k, $2 \leqslant k \leqslant n-2$ описывают более тонкие свойства V^{n-1}, которыми мы сейчас заниматься не будем. Поскольку $G^{-1}Q \neq 0$, если $Q \neq 0$, то существует хотя бы один инвариант σ_k, отличный от нуля. Инварианты σ_1 и σ_{n-1} являются «крайними» инвариантами.

Определение 13. Функция $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ называется *средней кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $P \in V^{n-1}$. Функция $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ называется *гауссовой кривизной поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в точке P.

Если $n = 3$ и $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$, $K(P) = \lambda_1\lambda_2$.

Теорема 3. *Все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ пары форм G, Q вещественны. В том случае, когда все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ парно различны, все собственные векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ матрицы $G^{-1}Q$ взаимно ортогональны, как относительно объемлющей евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$, так а относительно римановой метрики, индуцированной на V^{n-1} вложением $V^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны, и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема не может быть применена в нашей ситуации, так как матрица $G^{-1}Q$, вообще говоря, не симметрична. Симметрия $G^{-1}Q$ имела бы, например, место, если бы G и Q коммутировали. Так как форма $G(P)$ симметрична при каждом P, то в некоторой окрестности P существует регулярная замена координат $x \longrightarrow x'$ такая, что в одной точке P форма $G(P)$ приводится к диагональному виду. Такое приведение возможно, вообще говоря, только в одной точке. Поскольку приведение к диагональному виду необходимо осуществить только в одной точке, то в качестве искомой замены достаточно взять линейную замену. Приведя G к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растяжения вдоль главных осей формы. Пусть A — линейный оператор A: $T_PV^{n-1} \longrightarrow T_PV^{n-1}$, осуществляющий приведение G к единичной матрице; тогда $G = AEA^T = AA^T$. Матрица E, возникающая после выполнения A, определяет ортобазис $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в T_PV^{n-1}. Получаем $\det(Q - \lambda G) = \det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^T - \lambda E)A^T]$. Рассмотрим форму $\widetilde{Q} = BQB^T$, где $B = A^{-1}$. Исходное уравнение $\det(Q - \lambda G) = 0$ запишется в базисе $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ в виде $\det(\widetilde{Q} - \lambda E) = 0$, так как $\det A \neq 0$. При этом $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^T$, так как $Q^T = Q$.

Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы $\widetilde{Q}$ и матрицы $G^{-1}Q$ одни и те же. Так как форма $\widetilde{Q}$ симметрична, то все ее собственные числа (т.е. $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. Ортобазис $e_1, \ldots, e_{n-1}$ не обязан совпадать с ортобазисом $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Теорема доказана. □

Определение 14. Векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ (определены однозначно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) называются *главными направлениями* гиперповерхности V^{n-1} в точке P, или главными осями.

Явный вид второй формы

Рассмотрим частный случай. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ задана в виде графика $x^n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$; пусть плоскость $T_P V^{n-1}$ в некоторой точке $P \in V^{n-1}$ совпадает с плоскостью переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Тогда нормаль $n(P)$ к V^{n-1} в точке P имеет координаты $(0, \ldots, 0, 1)$; радиус-вектор r, описывающий поверхность V^{n-1} имеет вид

$$r = r(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Так как гиперплоскость $(x_1, \ldots, x_{n-1}) = T_P V^{n-1}$ касается V^{n-1} в точке P, то выполнено соотношение $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$; отсюда: $G(P) = E$, так как $g_{ij} = f_{x^i} f_{x^j} + \delta_{ij}$. Рассмотрим матрицу $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \langle r_{x^i x^j}, n \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Итак, $Q = (f_{x^i x^j}(P))$ совпадает с матрицей гессиана функции f в точке P. Средняя кривизна $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \operatorname{tr}(G^{-1}Q) = \operatorname{tr} Q = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k}.$$

для гауссовой кривизны $K(P)$ получаем

$$K(P) = \det(G^{-1}Q) = \det Q = \det(f_{x^i x^j}(P)).$$

Для двумерной поверхности (при $n = 3$) получаем

$$z = f(x, y); \quad H(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа на плоскости $\mathbb{R}^2$;

$$K(P) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Теория плоских сечений гиперповерхности

Рассмотрим произвольную точку $P \in V^{n-1}$, и пусть $n(P)$ — нормаль к гиперповерхности V^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, проходящую через P и пересекающую V^{n-1} по некоторой гладкой кривой $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ (по–прежнему нас интересуют только события, происходящие в малой окрестности точки P).

Определение 15. Гладкая кривая $\gamma(t) = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ называется *плоским сечением гиперповерхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^2$.

Через точку P проходит бесконечно много плоских сечений. В то же время далеко не всякая гладкая кривая $\gamma \subset V^{n-1}$ является плоским сечением V^{n-1}. Для того чтобы $\gamma \subset V^{n-1}$ не была плоским сечением, достаточно, чтобы γ имела ненулевое кручение. Пусть γ — плоское сечение V^{n-1} (зафиксируем содержащую ее плоскость $\mathbb{R}^2$), и пусть точка O — начало координат, из которого выходит радиус–вектор $r = r(u^1, \ldots, u^{n-1})$, описывающий поверхность V^{n-1}, принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $m(P)$ — вектор нормали к плоской кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$, содержащийся в $\mathbb{R}^2$. Поскольку мы рассматриваем произвольное плоское сечение, то нормали n и m, вообще говоря, не совпадают.

Введем на кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ натуральный параметр $s : \gamma = \gamma(s)$ (s — длина дуги). Тогда в плоскости $\mathbb{R}^2$ кривая $\gamma(s)$ задается радиус–вектором $r = r(s)$, где $r(s) = r(u^1(s), \ldots, u^{n-1}(s))$. В силу формул Френе для плоских кривых имеем

$$k(s) = \left|\frac{d^2 r(s)}{ds^2}\right|,$$

где $k(s)$ — кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке P. Напомним также, что $\frac{d^2 r(s)}{ds^2} = mk(s)$, где $m = m(P)$, $P \in \gamma(s)$. С другой стороны, если $a = \frac{d}{ds} r(s)$ — вектор скорости кривой $\gamma(s)$ в точке P, то (в силу определения второй формы Q) имеем

$$Q(a, a) = \langle \frac{d^2 r}{ds^2}, n \rangle = \langle km, n \rangle = k\langle m, n \rangle = k \cos\theta,$$

где θ — угол между нормалями m и n в точке P. С другой стороны,

$$Q(a, a) = Q\left(\frac{dr}{ds}, \frac{dr}{ds}\right) = Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2} Q\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right),$$

где t — произвольный гладкий параметр вдоль кривой $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$. Здесь $\frac{dr}{dt} = \alpha$ — произвольный касательный вектор к кривой γ в точке P. Если $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1})$, то

$$k\cos\theta = \frac{Q(\alpha, \alpha)}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j}.$$

Поскольку в направлении любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ можно провести кривую γ, являющуюся плоским сечением, то, следовательно, нами доказана.

Теорема 4 (Первая теорема Менье)**.** *Для любого касательного вектора $\alpha \in T_P V^{n-1}$ и любого плоского сеченая γ (такого, что $\dot{\gamma} = \alpha$) отношение второй формы к первой равно $k\cos\theta$, т.е.*

$$\frac{Q(\alpha,\alpha)}{G(\alpha,\alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j} = k\cos\theta.$$

Кривизна к называется *кривизной плоского сечения.* Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

Определение 16. Плоское сечение $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ в точке P называется *нормальным*, если $n(P) \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\theta = 0$.

Таким образом, каждое нормальное сечение γ в точке $P \in V^{n-1}$ взаимно–однозначно задается касательным вектором $\alpha \in T_P V^{n-1}$, т.е. двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$, определяющая это сечение, натянута на два вектора: нормаль $n(P)$ и вектор $\alpha \in T_P V^{n-1}$. Вращая плоскость $\mathbb{R}^2$ вокруг $n(P)$, получаем все нормальные сечения гиперповерхности V^{n-1} в точке P.

Для нормального сечения $\gamma = \mathbb{R}^2 \cap V^{n-1}$ доказанная в первой теореме Менье формула принимает вид

$$k = \frac{Q(\alpha,\alpha)}{G(\alpha,\alpha)} = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j},$$

так как $\theta = 0$. Так как кривизна плоского сечения (вдоль вектора α), образующего угол θ с нормалью $n(P)$, зависит от θ, то эту функцию следует записать в виде $k(\theta,\alpha)$. В силу доказанного утверждения: $k(\theta,\alpha)\cos\theta = k(0,\alpha)$, где $k(0,\alpha)$ — кривизна нормального сечения (вдоль вектора α).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения $k(0,\alpha)$, то кривизна любого плоского сечения (вдоль α), образующего угол θ с n, находится из формулы $k(\theta,\alpha) = \frac{1}{\cos\theta}k(0,\alpha)$.

Теперь напомним, что в касательной плоскости $T_P V^{n-1}$ всегда определены главные направления $e_1(P), \ldots, e_{n-1}(P)$, определяющиеся однозначно, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим эти «главные оси» $e_1(P), \ldots, e_{n-1}(P)$ и построим по каждому из них соответствующее нормальное плоское сечение $\gamma_i = \mathbb{R}^2_i \cap V^{n-1}$, где плоскость $\mathbb{R}^2_i$ натянута на $n(P), e_i(P)$. Все главные направления $e_i(P)$ взаимно ортогональны в евклидовой метрике на $T_P V^{n-1}$. Обозначим через $k_i(P)$ кривизну нормального сечения γ_i (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

Теорема 5 (Вторая теорема Менье)**.** *Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ совпадают с кривизнами $k_1, \ldots, k_{n-1}$ главных нормальных сечений.*

Доказательство. Из первой теоремы Менье имеем

$$k\cos\theta = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j};$$

так как $\theta = 0$ для нормального сечения, то

$$k = \frac{q_{ij}\alpha^i\alpha^j}{g_{ij}\alpha^i\alpha^j},$$

где α — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в T_PV^{n-1} ортобазис $e_1, \ldots, e_{n-1}$; тогда $g_{ij} = \delta_{ij}$; $q_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$; следовательно

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}.$$

Если $\alpha \in T_PV^{n-1}$ совпадает с одним из e_i, то $k_i = \lambda_i$, что и требовалось. □

Формула Эйлера

Рассмотрим в T_PV^{n-1} произвольный вектор α и рассмотрим нормальное сечение вдоль α. Обозначим через φ_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ углы, образуемые α с главными направлениями $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Теорема 6. *Для нормального сечения вдоль произвольного вектора $\alpha \in T_PV^{n-1}$ выполнено соотношение (формула Эйлера)*

$$k = k(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Доказательство. В силу второй теоремы Менье имеем

$$k(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\alpha^2)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

где

$$\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha^2)^2}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|},$$

где через $|\alpha|$ обозначена длина α. То, что $\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$ очевидно. □

Лекция 6

6. Современный взгляд на классическую дифференциальную геометрию

Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Зафикисируем на ней стандартные евклидовы координаты x_1, x_2.

Если задана функция $f(y)$ и $y \in [a, b]$, тогда можно рассмотреть на плоскости множество точек $x_2 = f(x_1)$, и если функция непрерывна, то ее график будет представлять из себя кривую.

Не все кривые представляют собой график — $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Такой способ задания кривых называется *неявным* $F(x_1, x_2) = 0$.

Определение 17. Гладкая регулярная элементарная плоская кривая — это множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемое параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases},$$

причем выполнено следующее условие:

1) $t \in [a, b]$,

2) $\gamma(t) \in C^\infty([a, b])$

3) $\dot\gamma \neq 0$

4) $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Longrightarrow t_1 = t_2$

Назовем $\dot\gamma$ — вектор скорости γ.

Замечание 1. Первое свойство отражено в определением термином «элементарная», т.е. параметризуется отрезком. Второе условие отражено термином «гладкая». Это условие можно заменить на дифференцируемость нужного порядка или на непрерывность. Третье условие означает отсутствие у кривой изломов.

Пример 4. Пример кривой с изломами, задаваемой бесконечно дифференцируемой функцией.

$$\begin{cases} x_1 = t^3, \\ x_2 = t^2, \end{cases}$$
$$t \in [-1; 1].$$

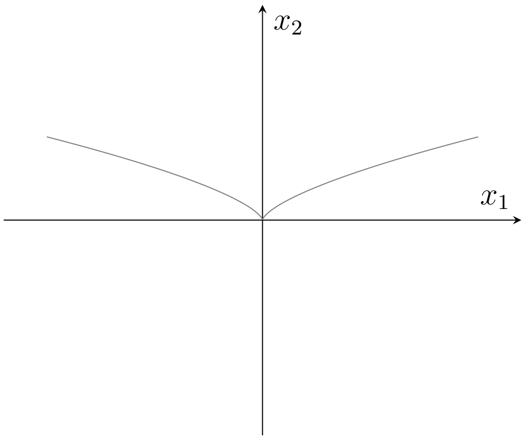
Это плоская кривая (в силу $x_3 = 0$). Из первого уравнения выражаем t и подставляем во второе. Получим

$$x_2 = x_1^{2/3}$$

Вектор скорости

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

обращается в 0 при $t = 0$.



Задача 2. *Пусть γ — прямой угол. Задать γ параметрическим уравнением*

$$x = \gamma(t) \in C^{\infty},$$

т.е. есть точка излома в вершине угла. (Нужно оперировать функциями, которые с некоторого момента тождественно равны нулю).

Если γ не регулярна (т.е. не выполнено условие 3), то точки, в которых $\dot{\gamma} = 0$ — особые. Остальные — регулярные.

Определение 18. Длина дуги, заключенной между двумя значениями $t_1 < t_2$ параметра — число l:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}| dt.$$

Задача 3. *Доказать, что l не зависит от параметризации.*

Зафиксируем на кривой точку t_0 и рассмотрим функцию

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}| dt.$$

Утверждение 9. *Верно, что $s(t) \in C^{\infty}([a, b])$ и $\dot{s} > 0$; кроме того $\dot{s} = |\dot{\gamma}|$, $t = t(s)$,*

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}.$$

Следствие 1. *Эта формула определяет корректную замену параметра (существует обратная замена $t = t(s)$).*

Определение 19. Параметр s — натуральный параметр. Его физический смысл — длина дуги, отсчитываемой от фиксированной точки.

Определение 20. Пусть s — натуральный параметр на γ. Тогда $l = |s_2 - s_1|$.

Замечание 2. Вектор скорости в натуральной параметризации равен 1:

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1.$$

Внешняя геометрия кривой

Утверждение 10. *Пусть $a(t) \in \mathbb{R}^n$ — гладкая вектор–функция, и пусть $|a(t)| = \mathrm{const}$. Тогда $\dot{a} \perp a$.*

Доказательство. Так как длина — константа, значит, и скалярный квадрат тоже константа: $(a, a) = 0$. Продифференцируем равенство: $2(a, \dot{a}) = 0$ — условие перпендикулярности. □

Следствие 2. *Если γ параметризована натуральным параметром, то $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$.*

Утверждение 11. *Пусть $Q(t)$ и $A(t)$ — гладкие $n \times n$ функции и пусть $\dot{Q} = QA$. Тогда*

1) *если $Q(t)$ ортогональна, то $A(t)$ кососимметрично,*
2) *если A кососимметрично и существует t_0: $Q(t_0)$ ортогональна, то $Q(t)$ ортогональна для любого t*

Доказательство. Продифференцируем произведение

$$(QQ^*)^\cdot = \dot{Q}Q^* + Q\dot{Q}^* = QAQ^* + QA^*Q^* = Q(A + A^*)Q^*.$$

□

Касательная. Нормаль. Касание k–ого порядка

Определение 21. Касательная к γ в точке t — прямая, проходящая через $\gamma(t)$ в направлении $\dot{\gamma}(t)$

Замечание 3. Параметрическое уравнение касательной имеет вид

$$x = \gamma(t_0) + \tau\dot{\gamma}(t_0),$$

Замечание 4. Через каждую точку кривой проходит одна прямая перпендикулярно касательной. Она называется нормалью. Уравнение нормали имеет вид

$$(x - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = 0.$$

Вообще говоря, касательная — это прямая, которая имеет с нашей кривой касание первого порядка.

Определение 22. Кривые γ_1 и γ_2, параметризованные натуральным параметром, имеют в точке s_0 касание порядка k, если s можно выбрать так, что

$$\gamma_1 - \gamma_2 = o((s - s_0)^k).$$

Утверждение 12. *Кривые γ_1 и γ_2 имеют в точке s_0 касание порядка k $\iff$ $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$, $\dot\gamma_1(s_0) = \dot\gamma_2(s_0)$, $\ldots$, $\gamma_1^{(k)}(s_0) = \gamma_2^{(k)}(s_0)$.*

Доказательство. Разложим разность по формуле Тейлора

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(\gamma_1^{(j)}(s_0) - \gamma_2^{(j)}(s_0))(s - s_0)^j + o((s - s_0)^k)$$

□

Теорема о соприкасающейся окружности

Пусть γ — окружность радиуса R.

$$x = x_0 + R\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} = x_0 + R\begin{pmatrix}\cos s/R \\ \sin s/R\end{pmatrix}$$

$$\dot x = \begin{pmatrix}-\sin s/R \\ \cos s/R\end{pmatrix}$$

$$\ddot x = \frac{1}{R}\begin{pmatrix}-\cos s/R \\ -\sin s/R\end{pmatrix}$$

$$|\ddot x| = \frac{1}{R}.$$

Теорема 7. *Пусть $\ddot\gamma(s) \neq 0$. Тогда существует единственная окружность, имеющая с кривой γ касание второго порядка в точке s_0. Ее центр лежит на нормали кривой в направлении $\ddot\gamma$, а радиус равен $1/|\ddot\gamma|$.*

Доказательство. Рассмотрим кривую, у которой вектор ускорения в точке не равен нулю. Нужно найти окружность, у которой скорость и ускорение будут такие же, как у выбранной кривой. Ускорение кривой в натуральной параметризации перпендикулярно. У окружности ускорение перпендикулярно скорости и направлено в центр. Значит, центр должен лежать на прямой, которая содержит вектор $\ddot\gamma$. Длина вектора ускорения равна $1/R \Longrightarrow r = 1/|\ddot\gamma|$. □

Определение 23. Это окружность — соприкасающаяся окружность к γ. Ее центр — центр кривизны γ в точке s_0, ее радиус — радиус кривизны; $1/R = |\ddot\gamma|$ — кривизна; $k = |\ddot\gamma|$.

Замечание 5. Кривизна в каждой точке своя. Эта функция, вообще говоря, не гладкая, потому что на кривой могут быть точки, в которых вектор ускорения обращается в ноль. Если таких точек нет, то кривизна — гладкая функция.

Плоские формулы Френе

Определение 24. Вектор нормали к γ в точке s

$$n(s) = \frac{\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|}, \quad \ddot\gamma \neq 0,$$

векторы v, n — репер Френе.

Утверждение 13 (плоские формулы Френе)**.**

$$\begin{cases} \dot v = kn \\ \dot n = -kv \end{cases}$$

Доказательство.

$$0 = (v, n),$$

$$(\dot v, n) + (v, \dot n) = 0,$$

Так как вектор n единичный, то производная от него ортогональна самому этому вектору. Следовательно,

$$\dot n = \alpha v,$$

$$k(n, n) + \alpha(v, v) = 0.$$

□

Замечание 6. Кривизна определена во всех точках кривой, а репер Френе только в тех, в которых кривизна не обращается в ноль. Модифицируем определение репера Френе, чтобы он был определен во всех точках, а также определение кривизны, приписав ей знак.

Зафиксируем на плоскости ориентацию. Построим вектор n так, что $n \perp v$:

$$\widetilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1, \end{pmatrix}$$

а кривизну определим следующим образом

$$\widetilde{k} = \begin{cases} 0, & \ddot\gamma = 0, \\ k, & n = \widetilde{n}, \\ -k, & n = -\widetilde{n}. \end{cases}$$

Замечание 7. Новый вид формул Френе

$$\begin{cases} \dot v = \widetilde{k}\widetilde{n} \\ \dot{\widetilde{n}} = -\widetilde{k}\widetilde{v} \end{cases}$$

$$\widetilde{k} = (\dot v, \widetilde{n}).$$

Репер Френе. Многомерные формулы Френе

Пусть γ — регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$; $x = \gamma(t)$, $\dot{\gamma} \neq 0$.

Определение 25. Кривая γ — s–регулярна, если $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(s)}$ линейно независимы.

Задача 4. *Доказать, что свойство s–регулярности не зависит от параметризации.*

Пусть γ — $(n-1)$–регулярна. Рассмотрим векторы $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n-1)} \longrightarrow v_1, \ldots, v_{n-1}$ (применили процедуру Грама–Шмидта); дополняем полученные вектора до базиса $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ — ортонормированный, право ориентированный базис.

Определение 26. Набор $v_1, \ldots, v_n$ — репер Френе кривой γ.

Теорема 8 (многомерные формулы Френе)**.** *Верны следующие формулы*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = k_1 v_2, \\ \dot{v}_2 = k_2 v_3 - k_1 v_1, \\ \dot{v}_3 = k_3 v_4 - k_2 v_2, \\ \dot{v}_{n-1} = k_{n-1} v_n - k_{n-2} v_{n-2}, \\ \dot{v}_n = -k_{n-1} v_{n-1}. \end{cases}$$

$$k_p = \frac{V_{p-1} V_{p+1}}{V_p^2},$$

где V_p — объем p–мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(p)}$.

$$k_1 = \frac{1 \cdot V_2}{V_1^2}, \quad V_0 = 1$$

$$k_{n-1} = \frac{V_{n-2} \mathring{V}_n}{V_{n-1}^2},$$

где $\mathring{V}_n$ — ориентированный n–мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы

$$\dot{\gamma}, \ldots, \gamma^{(n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим ортогональную матрицу $Q = (v_1, \ldots, v_n)$, которая состоит из столбцов v_i. Продифференцируем ее:

$$\dot{Q} = QA,$$

где A — кососимметричная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \beta_1 & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -\beta_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & -\beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

По процедуре Грама-Шмидта вектор v_p является линейной комбинацией $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(p)}$. Кроме того, $\dot v_p$ — линейная комбинация $\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(p)}, \gamma^{(p+1)}$.

Рассмотрим вектор v_j, где $j \leqslant p-2$. Для него $\dot v_j$ — линейная комбинация v_i, где $i \leqslant p-1$. Тогда получаем

$$0 = (v_j, v_p).$$

Продифференцируем это равенство:

$$0 = (\dot v_j, v_p) + (v_j, \dot v_p),$$

$$(\dot v_j, v_p) = 0 = (v_j, \dot v_p).$$

Тем самым, если мы считаем вектор $\dot v_p$ и раскладываем его по базису v, то в разложение векторы с номерами $j \leqslant p-2$ входить не будут, так как вектор $\dot v_p$ ортогонален векторам с такими номерами. Это означает, что в матрице A все коэффициенты, кроме коэффициентов α равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & -\alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Осталось найти явный вид коэффициентов k_i.

Рассмотрим вектор v_p и рассмотрим его разложение по γ:

$$v_p = \frac{V_{p-1}}{V_p}\gamma^{(p)} + \ldots$$

Продифференцируем это равенство:

$$\dot v_p = \frac{V_{p-1}}{V_p}\gamma^{(p+1)} + \ldots.$$

Напомним, что

$$v_{p+1} = \frac{V_p}{V_{p+1}}\gamma^{(p+1)} + \ldots$$

Тогда

$$\gamma^{(p+1)} = \frac{V_{p+1}}{V_p}v_{p+1} + \ldots$$

Следовательно,

$$\dot v_p = k_p v_{p+1} + \ldots$$

Доказано все, кроме последней формулы для $p = n-1$.

Рассмотрим векторы

$$\dot\gamma, \ldots, \gamma^{(n-1)}, \gamma^{(n)}.$$

Возможны две ситуации:

1) вектор $\gamma^{(n)}$ линейно независим с остальными векторами — тогда весь набор векторов $v_1, \dots, v_n$ получается из набора γ посредством процедуры ортогонализации Грама–Шмидта с одной деталью: последний вектор может отличаться знаком, и тогда формула для k_{n-1} остается справедливой с точностью до знака;

2) вектор $\gamma^{(n)}$ — линейная комбинация $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(n-1)}$. Тогда рассмотрим вектор
$$v_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \alpha_{n-2}\gamma^{(n-2)} + \dots$$
Продифференцируем это равенство:
$$\dot{v}_{n-1} = \alpha_{n-1}\gamma^{(n)} + \dots = \sigma_{n-1}\gamma^{(n-1)} + \dots$$
Тогда
$$\dot{v}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} c_j v_j.$$
В этом случае $k_{n-1} = 0$.

□

Комментарий 2. 1) Числа $k_p > 0$, где $p < n-1$, k_p — кривизны кривой γ в параметризации t.

2) Пусть t — натуральный параметр. Тогда
$$k_1 = |\ddot{\gamma}| = k,$$
$$k_2 = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2^2} = \frac{V_3}{V_2^2} = \frac{V(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma})}{k^2}.$$

Коммутатор векторных полей

Пусть ξ — векторное поле,
$$f \longrightarrow \partial_\xi(f) = \xi^i(u)\frac{\partial f}{\partial u^i}$$
Тогда можно определить коммутатор векторных полей:
$$[\partial_\xi, \partial_\eta] = \partial_\xi\partial_\eta - \partial_\eta\partial_\xi.$$

Утверждение 14. $[\partial_\xi, \partial_\eta]$ — *линейный дифференциальный оператор первого порядка.*

Доказательство.
$$\partial_\xi\partial_\eta(f) = \partial_\xi(\eta^i\frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j(u)\frac{\partial}{\partial u^j}(\eta^i\frac{\partial f}{\partial u^i}) = \xi^j\eta^i\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} + \xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}$$
$$\partial_\eta\partial_\xi(f) = \xi^j\eta^i\frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} + \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i}$$
$$[\partial_\xi, \partial_\eta]f = (\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j})\frac{\partial f}{\partial u^i} = \zeta^i(u)\frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

□

Определение 27. Поле ζ — коммутатор ξ и η, $\zeta = [\xi, \eta]$.

Замечание 8. $[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}$.

$$\partial_{[\xi,\eta]} = [\partial_\xi, \partial_\eta].$$

Свойства:

1) Билинейная операция.

2) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$.

3) Верно равенство
$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0.$$

4) $[f\xi, \eta] = f[\xi, \eta] - \xi \partial_\eta(f)$,

$$\begin{aligned} \partial_{f\xi}\partial_\eta - \partial_\eta \partial_{f\xi} &= f\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta(f\partial_\xi) = \\ &= f\partial_\xi\partial_\eta - f\partial_\eta(\partial_\xi) - \partial_\eta(f) \cdot \partial_\xi = f\partial_{[\xi,\eta]} - \partial_{\partial_\eta(f)\xi} = \partial_{f[\xi,\eta]-\partial_\eta(f)\xi}. \end{aligned}$$

Лекция 7

7. Производная функции вдоль касательного векторного поля и производная векторного поля вдоль касательного векторного поля

Ковариантная производная и ее свойства

Понятие ковариантной производной позволяет определить дифференцирование тензорных полей по направлению касательного вектора какого–либо многообразия. Подобно производной по направлению, ковариантная производная в качестве аргументов принимает вектор, определённый в некой точке P, и векторное поле, определённое в окрестности P. Результатом является вектор, также определённый в P. Основное отличие от производной по направлению заключается в том, что ковариантная производная не должна зависеть от выбора системы координат.

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, ξ — гладкое векторное поле; пусть на M заданы $x = r(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\xi = \xi(u)$.

Определение 28. Ковариантная производная вектора ξ:

$$\nabla_j \xi = \prod \left(\frac{d\xi}{du_j} \right),$$

где $\eta \in T_P M$; $\dot{\gamma}(t) = \eta$, $\gamma(t)$ — кривая на M.

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(\gamma(t)), \quad \nabla_\eta \xi = \prod \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} \widehat{\xi} \right).$$

Утверждение 15. *Вектор $\nabla_\eta \xi$ — касательный вектор к M в точке P, не зависящий от γ. Если u — координаты на M и $P = (u_1^0, \dots, u_n^0)$, то*

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \nabla_j \xi.$$

Доказательство. γ: $u_i = u_i(t)$, $u_i(t_0) = u_i^0$; $M : x = r(u)$.

$$\widehat{\xi}(t) = \xi(u(t)); \quad \frac{d}{dt}\widehat{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial u_j} \dot{u}_j, \quad \dot{u}_j = \eta_j,$$

$$\nabla_\eta \xi = \prod \left(\frac{d}{dt}\widehat{\xi} \right) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod \left(\frac{d\xi}{du_j} \right).$$

□

Свойства ковариантной производной

Пусть $P \in M$, $\eta \in T_PM$,

$$\nabla_\eta \longrightarrow T_PM.$$

Утверждение 16. *1)* $\nabla_\eta(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_\eta\xi + \widetilde{c}\nabla_\eta\widetilde{\xi}$, $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) $\nabla_{c\eta+\widetilde{c}\widetilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta\xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\xi$.

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *— гладкая функция*

$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta\xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$

— производная f *вдоль* η.

4) Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ *— векторные поля на* M.

$$\partial_\eta(\xi, \widetilde{\xi}) = (\nabla_\eta\xi, \widetilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta\widetilde{\xi}).$$

Доказательство.

$$\nabla_\eta\xi = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\nabla_j\xi = \sum_{j=1}^{n} \prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right).$$

1) очевидно,

2) очевидно

3) Вычислим в явном виде

$$\nabla_\eta(f\xi) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(\xi f)\right) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}f + \xi\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) =$$

$$= f(P)\nabla_\eta\xi + \sum_{j=1}^{n} \eta_j\frac{\partial f}{\partial u_j}\xi$$

4) Вычислим в явном виде

$$\partial_\eta(\xi, \widetilde{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\frac{\partial}{\partial u_j}(\xi, \widetilde{\xi}) = (\sum_{j=1}^{n} \eta_j\frac{\partial\xi}{\partial u_j}, \widetilde{\xi}) + (\xi, \sum_{j=1}^{n} \eta_j\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial u_j}) = \star.$$

Так как

$$\frac{\partial\xi}{\partial u_j} = \prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right) + w_j, \quad w_j \perp T_PM,$$

то

$$\star = (\sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_j}\right), \widetilde{\xi}) + (\xi, \sum_{j=1}^{n} \eta_j \prod\left(\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial u_j}\right))$$

$\square$

Рассмотрим поверхность M и отображение $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим точку $P \in M$, вектор $\eta \in T_P M$; пусть γ — гладкая кривая на M такая, что $\dot{\gamma}(t_0) = \eta$.

Задача 5. *Доказать, что*

$$\partial_\eta f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Вычисление ковариантных производных

Рассмотрим поверхность M с координатами u и параметризацией $x = r(u)$. Тогда вектор ξ будет иметь вид

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(u) r_j(u); \quad r_j = \frac{\partial r}{\partial u_j}.$$

Найдем ковариантную производную этого вектора:

$$\nabla_j \xi = \prod \left(\frac{\partial \xi}{\partial u_j} \right) = \prod \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \sum_{i=1}^{n} \xi_i r_i \right) =$$

$$= \prod \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \xi_i \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_j + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \prod \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j} \right).$$

То есть зная производные

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j} = r_{ij},$$

мы можем находить ковариантные производные. Тогда

$$\Pi(r_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k r_k.$$

Определение 29. Γ_{ij}^k — *символы Кристоффеля* (2–го рода) — коэффициенты связности Леви–Чивиты.

$$(\Pi(r_{ij}), r_m) = (r_{ij}, r_m) = \Gamma_{ij,m}$$

— символы Кристоффеля 1–го рода.

Теорема 9. *Для риманова многообразия верно равенство*

$$\Gamma_{ij,m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right), \quad g_{ij}(u) = (r_i, r_j).$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right),$$

где g^{km} — обратная матрица.

Доказательство. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = (r_{im}, r_j) + (r_i, r_{jm}) = \Gamma_{im,j} + \Gamma_{jm,i},$$

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} = \Gamma_{ji,m} + \Gamma_{mi,j},$$

$$\frac{\partial g_{mi}}{\partial u_j} = \Gamma_{mj,i} + \Gamma_{ij,m}.$$

Так как $g_{ij} = g_{ji}$, то $\Gamma_{ij,m} = \Gamma_{ji,m}$.

В таком случае имеем

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} = 2\Gamma_{ij,m}.$$

Вторая формула доказывается аналогично. Либо с помощью первой части доказательства.

Рассмотрим два вектора

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \vdots \\ \Gamma^n_{ij} \end{pmatrix}, \quad Z_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{ij,n} \end{pmatrix}$$

По формуле для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma_{ij,m} = \sum_{k=1}^{n} g_{km} \Gamma^k_{ij}.$$

Тогда

$$z_{ij} = G w_{ij}, \quad w_{ij} = G^{-1} z_{ij},$$

где

$$G = (g_{km}).$$

□

Еще раз запишем формулы ковариантной производной:

$$\nabla_j \xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Pi(r_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} r_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} r_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma^i_{jk} \xi_k \right) r_i.$$

Формула ковариантного дифференцирования вдоль вектора:

$$\nabla_\eta \xi = \sum_{i=1}^{n} \eta_j \nabla_j \xi = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma^i_{jk} \xi_k \right) r_i.$$

Если задано векторное поле $\xi_1(u), \ldots, \xi_n(u)$, то имеет место формула

$$(\nabla_j \xi)_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma^i_{jk}\xi_k.$$

Если заданы локальные координаты x^i, то можем определить канонический базис $\partial/\partial x^i$. Тогда можно найти ковариантную производную по базисному вектору

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 30. $\Gamma^i_{jk}(x)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля.

Пусть

$$\nabla_\eta \xi = (\nabla_\eta \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \nabla_\eta \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_\eta(\xi^i)\frac{\partial}{\partial x^i} =$$
$$= \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \eta^j\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\Gamma^i_{jk}\xi^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Преобразование символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорами!
Пусть есть две системы координат: x^i и $x^{i'}$. Тогда имеют место

$$\Gamma^i_{jk}(x), \quad \Gamma^{i'}_{j'k'}(x')$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Итак,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В итоге получаем

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Лекция 8

8. Символы Кристоффеля

Рассмотрим многообразие M^n с римановой метрикой и аффинной связностью.

Определение 31. Будем говорить, что на многообразии M задана аффинная связность, если для любой точки P и вектора $\eta \in T_P M$ определено отображение

$$\nabla_\eta : v \longrightarrow T_P M,$$

причем выполнены свойства 1–3.

Напомним свойства ковариантного дифференцирования:

1) Верно равенство
$$\nabla_\eta(c\xi + \widetilde{c}\widetilde{\xi}) = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_\eta \widetilde{\xi},$$
где $c, \widetilde{c} \in \mathbb{R}$.

2) Верно равенство
$$\nabla_{c\eta + \widetilde{c}\widetilde{\eta}}\xi = c\nabla_\eta \xi + \widetilde{c}\nabla_{\widetilde{\eta}}\xi.$$

3) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция
$$\nabla_\eta(f\xi) = f(P)\nabla_\eta \xi + \partial_\eta f \cdot \xi(P),$$
где
$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$
— производная f вдоль η.

Если заданы локальные координаты x^i, то можем определить канонический базис $\partial/\partial x^i$. Тогда можно найти ковариантную производную по базисному вектору

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Определение 32. $\Gamma^i_{jk}(x)$ — коэффициенты связности или символы Кристоффеля.

Пусть

$$\nabla_\eta \xi = (\nabla_\eta \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \nabla_\eta \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_\eta(\xi^i)\frac{\partial}{\partial x^i} =$$
$$= \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \eta^j\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\Gamma^i_{jk}\xi^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Преобразование символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорами!
Пусть есть две системы координат: x^i и $x^{i'}$. Тогда имеют место

$$\Gamma^i_{jk}(x), \quad \Gamma^{i'}_{j'k'}(x')$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} =$$
$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Итак,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{j'}}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

В итоге получаем

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Операции, определяемые с помощью аффинной связности

С помощью аффинной связности можно производить следующие операции:

1) Ковариантные производные векторных полей.

2) Параллельный перенос касательных векторов вдоль кривых.

   Определение 33. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t.

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) r_i(u(t))$$

   Определение 34. Семейство $\xi(t)$ — параллельно вдоль γ, если $\nabla_{\dot\gamma}\xi = 0$.

   Уравнение параллельного переноса:

$$\dot\xi_i + \Gamma^i_{jk}\xi_k \dot x^j = 0.$$

3) Геодезические

Определение 35. Кривая γ называется геодезической, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

$$\begin{cases} \ddot x^i + \Gamma^i_{jk}(x(t))\dot x^j \dot x^k = 0 \\ x^i(t_0) = x^i_0 \\ \dot x^i(t_0) = \xi^i_0 \end{cases}$$

4) Ковариантные производные произвольных тензорных полей. Пусть на многообразии задана аффинная связность.

Пусть α — $(0,1)$–тензорное поле (1–форма); ξ — векторное поле; $\alpha(\xi)$ — гладкая функция

$$\alpha(\xi) = \alpha_j(x)\xi^j(x).$$

Пусть $\eta \in T_P M$. Как определить

$$\nabla_\eta \alpha = ?$$

Определение 36. Ковариантная производная от 1–формы α вдоль η — 1–форма $\nabla_\eta\alpha$, такая что для любого векторного поля ξ

$$(\nabla_\eta\alpha)(\xi) = \partial_\eta \alpha(\xi) - \alpha(\nabla_\eta \xi).$$

а) Верно равенство

$$\nabla_\eta(c\alpha + \widetilde c\widetilde\alpha) = c\nabla_\eta\alpha + \widetilde c\nabla_\eta\widetilde\alpha,$$

где $c, \widetilde c \in \mathbb{R}$.

б) Верно равенство

$$\nabla_{c\eta+\widetilde c\widetilde\eta}\alpha = c\nabla_\eta\alpha + \widetilde c\nabla_{\widetilde\eta}\alpha.$$

в) Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция

$$\nabla_\eta(f\alpha) = f(P)\nabla_\eta\alpha + \partial_\eta f \cdot \alpha(P),$$

где

$$\partial_\eta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}\eta_j$$

— производная f вдоль η.

$$(\nabla_\eta\alpha)_i = (\nabla_\eta\alpha)(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \partial_\eta\alpha_i(x) - \alpha\left(\nabla_\eta\frac{\partial}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \eta^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j\alpha\left(\nabla_{\partial/\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \eta^j\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \eta^j\alpha\left(\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \eta^j\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\alpha_k\right).$$

Итак,

$$\nabla_\eta\alpha = \eta^j\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji}\alpha_k\right)dx^i.$$

Теперь можно определить ковариантную производную тензора:

Определение 37. Ковариантная производная (p,q)–тензорного поля T вдоль η — (p,q)–тензорное поле $\nabla_\eta T$, такое что для любого набора векторных полей $\xi_1,\ldots,\xi_q$ и 1–формы выполнено следующее:

$$\partial_\eta(T(\alpha,\xi)) = (\nabla_\eta T)(\alpha,\xi) + \sum_{s=1}^{p} T(\alpha^1,\ldots,\nabla_\eta\alpha^s,\ldots,\alpha^p,\xi) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{q} T(\alpha,\xi_1,\ldots,\nabla_\eta\xi_s,\ldots,\xi_q).$$

Свойства связности

Определение 38. Связность симметрична (связность без кручения), если для всякой локальной системы координат

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^i_{kj}(x).$$

Вторая квадратичная форма, оператор Вейнгартена

Обозначим через Q риманово объемлющее многообразие. Пусть $\dim Q = N$. Для него метрика и связность соответственно g^Q и ∇^Q. Пусть ∇^Q — риманова связность на Q.

Обозначим через M — n–мерное многообразие ($n < N$), вложение $f : M \longrightarrow Q$.

Есть три векторных расслоения:

1) $TM = (P,X)$, $P \in M$, $X \in T_PM$.

2) Нормальное расслоение NM, (P,ξ), $P \in M$, $\xi \in N_PM$

$$m = \dim N_PM = N - n.$$

3) Q–расслоение, (P,ξ), $P \in M$, $\xi \in T_PQ$

$$T_PQ = T_PM \oplus N_PM.$$

Пусть ∇^Q — риманова связность на Q. Пусть Y — касательное векторное поле на M. Пусть $X \in T_PM$.

$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X,Y),$$

где Π — ортогональная проекция на T_PM. Пусть ξ — сечение NM.

$$\nabla^Q_X \xi = \Pi^N(\nabla^Q_X \xi) - B(X,\xi),$$

где Π^N — ортогональная проекция на NM. Отметим, что $b(X,Y) \in N_PM$, $B(X,\xi) \in T_PM$.

Утверждение 17. *Отображение b и B билинейны и $\mathcal{F}$–линейны. Кроме того,*

$$(b(X,Y),\xi) = (B(X,\xi),Y).$$

Доказательство. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Рассмотрим равенство

$$\nabla^Q_X(fY) = \nabla^M_X(fY) + b(X, fY),$$

$$f\nabla^Q_X Y + \partial_X(f)Y = f\nabla^M_X Y + \partial_X(f)Y + fb(X,Y),$$

$$f\nabla^Q_X Y = f\nabla^M_X Y + fb(X,Y)$$

$$b(X, fY) - fb(X,Y) = 0.$$

Далее,

$$(\nabla^Q_X Y, \xi) + (\nabla^Q_X \xi, Y) = (\nabla^M_X Y, \xi) + (b(X,Y), \xi) - (\nabla^N_X \xi, Y) - (B(X,Y), Y),$$

$$(\nabla^Q_X Y, \xi) + (\nabla^Q_X \xi, Y) = (b(X,Y), \xi) - (B(X,Y), Y).$$

Посмотрим на левую часть

$$\partial_W(u,v) = (\nabla^Q_W u, v) + (u, \nabla^Q_W v),$$

$$\partial_x(U, \xi) = (\nabla^Q_X Y, \xi) + (Y, \nabla^Q_X \xi) = 0.$$

Следовательно,

$$(b(X,Y), \xi) - (B(X,Y), Y) = 0.$$

□

Определение 39. Отображение $b(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма M. Оператор $B(X,Y)$ — оператор Вейнгартена. Формулы

$$\nabla^Q_X Y = \Pi(\nabla^Q_X Y) + b(X,Y),$$

$$\nabla^Q_X \xi = \Pi^N(\nabla^Q_X \xi) - B(X, \xi)$$

называются деривационными формулами Гаусса—Вейнгартена.

В координатах эти два оператора примут вид

$$b(X,Y) = b^p_{ij}(x)e_p(x)X^iY^j,$$

$$B(X,\xi) = B^j_{ip}\xi^pX^i\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Лекция 9

9. Тензор кривизны Римана

Симметрии тензора Римана

Напомним определение тензора Римана:

$$R(\xi,\eta)\zeta = (\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]})\zeta$$

$$R(\xi,\eta)\zeta = R^q_{ij,k}\xi^i\eta^j\zeta^k\frac{\partial}{\partial u^q}.$$

Теорема 10 (симметрия тензора Римана)**.** *1)* $R(\xi,\eta) = -R(\eta,\xi)$.

2) $R(\xi,\eta)\zeta + R(\eta,\zeta)\xi + R(\zeta,\xi)\eta = 0$ *(тождество Бьянки).*

Доказательство. Пусть

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u^i};\quad \eta = \frac{\partial}{\partial u^j};\quad \zeta = \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Преобразуем выражение

$$\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta + \nabla_\eta\nabla_\zeta\xi - \nabla_\zeta\nabla_\eta\xi + \nabla_\zeta\nabla_\xi\eta - \nabla_\xi\nabla_\zeta\eta =$$
$$= \nabla_\xi(\nabla_\eta\zeta - \nabla_\zeta\eta) + \nabla_\eta(\nabla_\zeta\xi - \nabla_\xi\zeta) + \nabla_\zeta(\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi).$$

Представление в координатах имеет вид:

$$\nabla_\eta\zeta = \nabla_j\frac{\partial}{\partial u^k} = \Gamma^s_{jk}\frac{\partial}{\partial u^s};\quad \nabla_\zeta\eta = \Gamma^s_{kj}\frac{\partial}{\partial u^s}$$

□

3) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = -(\zeta, R(\xi,\eta)\omega)$.

Доказательство. По определению имеем

$$(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = ((\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^s})$$

$$\partial_\xi(\zeta,\omega) = (\nabla_\xi\zeta,\omega) + (\zeta,\nabla_\xi\omega)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}(\zeta,\omega) = (\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta,\omega) + (\nabla_\xi\zeta,\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\eta\zeta,\nabla_\xi\omega) + (\zeta,\nabla_\eta\nabla_\xi\omega).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}(\zeta,\omega) = \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta,\omega) + (\zeta,\nabla_\xi\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\xi\zeta,\nabla_\eta\omega) + (\nabla_\eta\zeta,\nabla_\xi\omega).$$

$$0 = (R(\xi,\eta)\zeta,\omega) + (\zeta,R(\xi,\eta)\omega).$$

□

4) $(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) = (R(\zeta,\omega)\xi,\eta)$.

Доказательство.

$$(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) + (R(\eta,\zeta)\xi,\omega) + (R(\zeta,\xi)\eta,\omega) = 0,$$

$$(R(\eta,\zeta)\omega,\xi) + (R(\zeta,\omega)\eta,\xi) + (R(\omega,\eta)\zeta,\xi) = 0,$$
$$(R(\zeta,\omega)\xi,\eta) + (R(\omega,\xi)\zeta,\eta) + (R(\xi,\zeta)\omega,\eta) = 0,$$
$$(R(\omega,\xi)\eta,\zeta) + (R(\xi,\eta)\omega,\zeta) + (R(\eta,\omega)\xi,\zeta) = 0.$$

Складывая первые две строчки и вычитая из нее две вторые, получаем

$$2(R(\xi,\eta)\zeta,\omega) - 2(R(\zeta,\omega)\xi,\eta) = 0.$$

□

Симметрии тензора Римана в координатах

1) $R^q_{ij,k} = -R^q_{ji,k}$.
2) $R^q_{ij,k} + R^q_{jk,i} + R^q_{ki,j} = 0$.
3) $R_{ij,kq} = R^m_{ij,k} g_{mq}$.
4) $R_{ij,kq} = -R_{ij,kq}$.
5) $R_{ij,kq} = R_{kq,ij}$.

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} =$$
$$= \frac{n(n-1)(\cancel{6} + 6n - \cancel{1}2 + n^2 - 5n + \cancel{6})}{12} = \frac{n^2(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Итак, число независимых компонент равно

$$\boxed{\frac{n^2(n^2-1)}{12}.}$$

Зависимость плоскости поверхности от тензора Римана

Рассмотрим риманову метрику и преобразование ее компонент

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}$$

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0$$

в количестве $\frac{n^2(n-1)}{2}$.

Утверждение 18. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in T_P M$, $u = \xi t$. Тогда

$$\ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk}(u(t))\dot{u}^j\dot{u}^j k = 0$$

$$\Gamma^i_{jk}(\xi t)\xi^j\xi^k = 0 \Longrightarrow \Gamma^i_{jk}(0)\xi^j\xi^k = 0 \Longrightarrow \Gamma^i_{jk}(0) = 0.$$

□

Рассмотрим тензор $T_{i_1 i_2 i_3}$ и вычислим количество его компонент

$$T_{i_1 i_2 i_3} \quad C^3_{n+2},$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^2(n+1)(3n+3-2n-4)}{12} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Задача 6. *Доказать, что в нормальных координатах*

$$g_{ij}(u) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ik,lj}u^k u^l + o(|u|^2).$$

Уравнения Петерсона—Майнарди—Кодацци

Пусть

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Имеем:

$$\nabla^N_X(b(Y,Z)) = \nabla_{\partial/\partial x^i} b^p_{jk} e_p = \frac{b^p_{jk}}{\partial x^i} e_p + \overset{N}{\Gamma}{}^q{}_{ip} e_p b^p_{jk}.$$

Так как

$$\nabla^M_X Y = \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^s},$$

$$b(\nabla^M_X Y, Z) = \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij} b^p_{sk} e_p,$$

тогда имеет место равенство.

$$\overset{Q}{R}{}^l{}_{ij,k} \frac{\partial}{\partial y^l} = (\frac{\partial b^p_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b^p_{ik}}{\partial x^j} + \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{iq} b^q_{jk} - \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{jq} b^q_{ik} -$$
$$- \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ij} b^p_{sk} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ji} b^p_{sk} - \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ik} b^p_{js} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{jk} b^p_{is}) e_p =$$
$$= \left(\frac{\partial b^p_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b^p_{ik}}{\partial x^j} + \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{iq} b^q_{jk} - \overset{N}{\Gamma}{}^p{}_{jq} b^q_{ik} - \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{ik} b^p_{js} + \overset{M}{\Gamma}{}^s{}_{jk} b^p_{is} \right) e_p.$$

Лекция 10

10. Параллельный перенос и геодезические

Параллельный перенос касательных векторов

Пусть γ — гладкая кривая на M. Пусть имеется набр координат $u : u_j = u_j(t)$.

Определение 40. Гладкое семейство касательных векторов к M вдоль кривой γ — соответствие, сопоставление каждой точке t касательный вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$, гладко зависит от t.

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) r_i(u(t))$$

Определение 41. Ковариантная производная гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ есть

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \Pi(\dot\xi).$$

Замечание 9. Верно следующее

$$\nabla_{\eta}\xi = \Pi\left(\frac{d}{dt}\xi(\gamma(t))\right),$$

где $\xi(t)$ — семейство вдоль γ, $\widetilde{\xi}$ — векторное поле на M такое, что $\widetilde{\xi}(\gamma(t)) = \xi$ и

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \nabla_{\dot\gamma}\widetilde{\xi}.$$

Определение 42. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi(t) = 0.$$

Теорема 11. *Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_PM$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что*

1) $\xi(t)$ параллельно вдоль γ;

2) $\xi(0) = \xi^0$.

Теорема 12. *Пусть заданы координаты $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и кривая γ, параметризованная следующим образом $\gamma : u_j = u_j(t)$. Тогда гладкое семейство $\xi(t)$ представляется следующим образом:*

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) r_i(u(t)).$$

Рассмотрим ковариантную производную гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ:

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} \dot\xi_i r_i + \xi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial u_j}\dot u_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \dot\xi_i r_i + \sum_{i,j=1}^{n} \dot u_j \xi_i \prod(r_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\dot\xi_i + \sum_{k,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u(t))\dot u_j \xi_k) r_i.$$

Имеют место следующие два утверждения:

1) Верно соотношение

$$\dot{\xi}_i + \sum_{k,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u(t))\dot{u}_j \xi_k = 0$$

2) $\xi_i(0) = \xi_i^0$.

Определение 43. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль кривой γ.

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой

Определение 44. Семейство $\xi(t)$ параллельно вдоль γ, если $\nabla_{\dot{\gamma}}\xi(t) = 0$.

Теорема 13. *Пусть γ — гладкая кривая, $\gamma(0) = P$; $\gamma(T) = Q$ и пусть $\xi^0 \in T_P M$. Тогда существует единственное гладкое семейство $\xi(t)$ вдоль γ такое, что*

1) $\xi(t)$ параллельно вдоль γ;

2) $\xi(0) = \xi^0$.

Определение 45. Семейство $\xi(t)$ — результат параллельного переноса ξ^0 вдоль кривой γ; $\gamma(T)$ — результат параллельного переноса ξ^0 из точки P в точку Q вдоль γ.

Свойства параллельного переноса вектора вдоль кривой:

1) $\nabla_{\dot{\gamma}}\xi = 0$, а именно

$$\dot{\xi}_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^{i} \xi_k \dot{u}_j = 0$$

2) $\xi(0) = \xi^0$;

$$\xi_i\Big|_{t=0} = \xi_i^0.$$

Пусть p_γ — линейное отображение

$$p_\gamma : T_P M \longrightarrow T_Q M$$

0) Параллельный перенос зависит от γ.

1) $\xi(t)$; $\xi(T)$ линейно зависят от ξ^0.

2) p_γ сохраняет скалярное произведение

Доказательство.

$$(\xi^0, \widetilde{\xi}^0) = (p_\gamma(\xi^0), p_\gamma(\widetilde{\xi}^0)) = (\xi(t), \widetilde{\xi}(t)).$$

$$\frac{d}{dt}(\xi(t), \widetilde{\xi}(t)) = (\dot{\xi}, \widetilde{\xi}) = (\xi, \dot{\widetilde{\xi}}) = (\Pi(\dot{\xi}), \widetilde{\xi}) + (\xi, \Pi(\dot{\widetilde{\xi}})) =$$
$$= (\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\xi}_{=0}, \widetilde{\xi}) + (\xi, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\widetilde{\xi}}_{=0})$$

□

- $|\xi(t)| = |\xi(T)| = |\xi^0|$, то есть при параллельном переносе сохраняется длина.
  Рассмотрим кривую (петлю) $\gamma(T) = \gamma(0)$,
  $$p_\gamma : T_P M \longrightarrow T_P M$$
  — оператор голономии, соответствующий петле γ. Все такие операторы образуют группу операторов голономии в точке P.
- Пусть M, N — поверхности, касающиеся вдоль кривой γ, $T_{\gamma(t)}M = T_{\gamma(t)}N$, $p_\gamma^M = p_\gamma^N$.
- Параллельный перенос сохраняется при изометриях.

Геодезические на поверхностях

Кривая геодезическая, если

$$\Pi(\ddot{\gamma}) = 0 = \nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma).$$

Это означает, что вектор ускорения ортогонален $T_\gamma M$. Семейство $\dot\gamma$ параллельно вдоль γ.

$(u_1, \ldots, u_n)$, $\gamma : u_i = u_i(t)$; $\xi_i \longrightarrow \dot{u}_i$.

Уравнения геодезических:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \quad \ddot{u}_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^n_{jk}(u)\dot{u}_k\dot{u}_j = 0.$$

Свойства геодезических

Пусть имеем $2n$ функций: $u_1, \ldots, u_n; \xi_1, \ldots, \xi_n$.

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \xi_i \\ \dot{\xi}_i = \sum_{j,k=1}^n \Gamma^n_{jk}\xi_j\xi_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i(0) = u_i^0 \\ \xi_i(0) = \xi_i^0 \end{cases}$$

1) Для всякой точки $P \in M$ и для любого вектора $\xi \in T_P M$ существует единственная геодезическая $\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, проходящая при $t = 0$ через точку P: $\dot{\gamma}(0) = \xi^0$.

2) Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Тогда $|\dot{\gamma}| = \mathrm{const}$.

3) При параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется угол *между геодезической* и переносимым вектором.

4) При изометриях геодезические переходят в геодезические.

5) Если M и N касаются вдоль γ, то γ геодезическая на $M \iff \gamma$ геодезическая на N.

Лекция 11

11. Вариационный подход к геодезическим

Экспоненциальное отображение

Рассмотрим точку P на многообразии M. Пусть $\xi \in T_P M$, $\gamma_\xi(t)$:

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \\ \gamma(0) = P, \\ \dot\gamma(0) = \xi. \end{cases}$$

Лемма 3. *Для всякого* $\lambda > 0$

$$\gamma_\xi(\lambda t) = \gamma_{\lambda\xi}(t).$$

Доказательство.

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_\xi(\lambda t) = \dot\gamma_\xi(0) \cdot \lambda = \lambda\xi$$

□

Вообще говоря, верно следующее

$$\gamma_\xi(\varepsilon) = \gamma_{\varepsilon\xi}(1).$$

$$\xi : \quad |\xi| < \varepsilon, \quad \gamma_\xi(t)$$

Определение 46. Экспоненциальное отображение — отображение $\exp : U \longrightarrow M$, U — окрестность 0 в $T_P M$ и $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Замечание 10.

$$\exp(0) = P.$$

Утверждение 19. *Отображение* $\exp$ *— локальный диффеоморфизм, т.е. оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности нуля в* $T_P M$ *на свой образ.*

Доказательство. 1) $\exp(\xi)$ — гладкое, $\gamma(0) = P$, $\dot\gamma(0) = \xi$.

2) $d_0 \exp = \mathrm{id}$ — тождественный оператор.

Если имеем $f : M \longrightarrow N$, то $d_Q f : T_Q M \longrightarrow T_{f(Q)} N$. Тогда

$$d_0 \exp : T_P M \longrightarrow T_P M,$$

$\delta(t)$ — кривая в $T_P M$ такая, что $\dot\delta(0) = \eta$.

$$d_0 \exp(\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(\delta(t)).$$

$$d_0 \exp(\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(\eta t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_{\eta,t}(1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_\eta(t) = \eta.$$

□

Замечание 11. 1) Прямые, проходящие через O, при экспоненциальном отображении переходят в геодезические, выходящие из точки P.

2) Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ — координаты в T_PM в ортогональном базисе; Q — точка на M из окрестности точки P, $Q \longrightarrow u(\exp^{-1}(Q))$.

Определение 47. Такие координаты — нормальные координаты в окрестности точки P.

Пусть $M \ni P$, $\xi(s) \subset T_PM$ — такая кривая, что $|\xi(s)| = a = \mathrm{const}$,

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad f : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [s_1, s_2] \longrightarrow M,$$

где f гладкое отображение, f_t, f_s — касательные векторы к M в точке $f(t,s)$.

Утверждение 20. $(f_t, f_s) = 0$.

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t, f_s) = (f_{tt}, f_s) + (f_t, f_{st}) = (f_t, f_{ts}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(f_t, f_t) = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|f_t|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}|\xi(s)|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}a^2 = 0.$$

$$(f_t, f_s)(t,s) = (f_t, f_s)(0,s)$$

$$f(0,s) = \exp(0 \cdot \xi(s)) = \exp(0) = P \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial s}(0,s) = 0 \Longrightarrow$$

$$(f_t, f_s)(t,s) = (f_t, f_s)(0,s) = 0.$$

□

Лемма Гаусса

Пусть M — n–мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, $P \in M$,

$$\exp : U \longrightarrow V,$$

где U — окрестность 0 в T_PM, V — окрестность P на M, вектор $\xi \in T_PM$; $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$.

Рассмотрим $\xi(s) \in T_PM$, $|\xi(s)| = a$,

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad (f_t, f_s) = 0,$$

$$\sum_a \subset U : \{\xi; |\xi| = a\}.$$

Определение 48. Геодезическая сфера с центром P радиуса a — образ $\sum_a$, т.е.

$$S_a = \exp(\sum_a).$$

Геодезический шар — образ $\{\xi; |\xi| \leqslant a\}$.

Пусть $\sigma(s)$ — гладкая кривая, лежащая на S_a; s_0 — точка на σ и $\dot\sigma(s_0)$ — вектор скорости к σ.

Пусть γ — геодезическая, соединяющая P с $\sigma(s_0)$ и $\dot\gamma$ — ее вектор скорости.

Лемма 4 (Гаусс)**.** $\dot\gamma(s_0) \perp \dot\gamma$.

Доказательство.

$$f(t,s) = \exp(t\xi(s)), \quad \xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)), \quad \sigma(s) = \exp(\xi(s))$$

$$|\xi(s)| = a.$$

$$f_t(t_0,s_0) = \dot\gamma, \quad f_s(t_0,s_0) = \dot\sigma.$$

□

Геодезические как локально кратчайшие

Утверждение 21. *Пусть $\sigma(s)$ — кривая на M, лежащая в окрестности U точки P, в которой $\exp$ — диффеоморфизм, причем $\sigma(s)$ не проходит через точку P. Тогда длина*

$$l(\sigma) \geqslant ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||,$$

где $\xi(s_2) = \exp^{-1}\sigma(s_2)$, $\xi(s_1) = \exp^{-1}\sigma(s_1)$ и $s \in [s_1,s_2]$, причем равенство достигается $\iff$ $\sigma(s)$ монотонно параметризует отрезок радиальной геодезической, выходящей из точки P.

Доказательство.

$$\xi(s) = \exp^{-1}(\sigma(s)) \neq s \in [s_1,s_2];$$

$$\omega(s) = \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}; \quad r(s) = |\xi(s)|; \quad |\omega(s)| = 1.$$

$$\sigma(s) = \exp(r(s)\omega(s)) = f(r(s),s), \quad \dot\sigma = f_t\frac{dr}{ds} + f_s,$$

$$l(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} |\dot\sigma| ds$$

$$|\dot\sigma| = \sqrt{|f_t|^2(\frac{dr}{ds})^2 + |f_s|^2} \geq |f_t| \cdot |\frac{dr}{ds}|.$$

$$l(\sigma) \geq \int_{s_1}^{s_2} |f_t| \cdot |\frac{dr}{ds}| ds = \int_{s_1}^{s_2} |\frac{dr}{ds}| ds \geqslant |\int_{s_1}^{s_2} \frac{dr}{ds} ds| =$$
$$= |r(s_2) - r(s_1)| = ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)||.$$

□

Теорема 14. *Для любой точки $P \in M$ существует такая окрестность U, что $\forall Q \in U$ существует единственная геодезическая γ, соединяющая P и Q и лежащая в U, причем $l(\gamma) \leqslant l(\sigma)$, где σ — любая кривая, соединяющая P и Q.*

Доказательство. Рассмотрим точку P и ее окрестность U; $V \subset T_PM$, $\exp : V \longrightarrow U$ — диффеоморфизм, где V — открытый шар в T_PM.

Рассмотрим точку $Q \in U$; пусть S_δ — такая геодезическая сфера радиуса δ, что Q — вне геодезического шара радиуса δ.

Пусть σ соединяет P и Q.

1) σ целиком лежит в U; s_1 — последний момент выхода σ из геодезической сферы S_δ радиуса δ.
$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq ||\xi(s_2)| - |\xi(s_1)|| \geq d - \delta,$$
так как $|\xi(s_1)| = \delta$, $d = |\exp^{-1}(Q)|$.

2) σ выходит из U
$$|\sigma| \geq |\sigma_1| \geq d - \delta.$$

□

Утверждение 22 (без доказательства)**.** *Для любой точки $P \in M$ существует окрестность U точки P и $\varepsilon > 0$ такие, что $\forall Q \in U$ шар радиуса ε в T_QM под действием* exp *диффеоморфно отображает на некоторую окрестность U_Q точки Q, содержащую U.*

Задача 7. *1) Доказать, что для всякой точки $P \in M$ существует такая окрестность U точки P, что для любых точек $Q_1, Q_2 \in U$ существует единственная геодезическая γ, соединяющая Q_1 и Q_2 и лежащая в U, причем для любой кривой σ, соединяющей Q_1 и Q_2 верно неравенство $|\sigma| \geqslant |\gamma|$.*

2) Доказать, что любая геодезическая на M локально кратчайшая, т.е. $\forall t_0 \in (t_1, t_2)$ существует $\varepsilon > 0$ такое что γ — кратчайшая среди всех кривых, соединяющих $\gamma(t_0)$ с $\gamma(t)$ при $|t - t_0| < \varepsilon$.

3) Пусть $P, Q \in M$ и γ — кратчайшая кривая, соединяющая P и Q. Доказать, что γ — геодезическая.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ