МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ТОПОЛОГИЮ

МИЩЕНКО
АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ
АЛАНИЯ
ЛЕВАН АНЗОРОВИЧ

—

МЕХМАТ МГУ

—

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА СТУДЕНТА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
РОДИОНОВА ДАНИЛА ОЛЕГОВИЧА

Лекция 1.

Пункт 1. Элементы теории множеств.

Пусть X – некоторое множество. Тогда $a \in X$ – его элементы. Будем определять некоторое множество X следующим образом: пусть заведомо существует некоторое множество Y, тогда $X = \{a \in Y$: а удовлетворяет некоторому свойству$\}$.

Примеры множеств:

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Определение 1.

Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда X является подмножеством в Y $(X \subset Y) \Leftrightarrow \forall a \in X \Rightarrow a \in Y.$

Определение 2.

Пусть A и B – некоторые подмножества множества X. Тогда

1) пересечением A и B называется множество $X \supset A \cap B = \{a: a \in A$ и $a \in B\}$.
2) объединением A и B называется множество $X \supset A \cup B = \{a: a \in A$ или $a \in B\}$.

Определение 3.

Разностью множеств A и X, $A \subset X$ называется множество $X \backslash A = \{a: a \in X, a \notin A\}$. Из этого определения следует очевидное равенство: $X \backslash A = X \backslash (X \cap A)$

Утверждение 1. (Законы де Моргана)

Если X – некоторое множество, $\bigcup_\alpha A_\alpha$ – объединение множеств A_α по индексу α. Тогда $X \backslash \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \backslash A_\alpha)$, где $\bigcap_\alpha$ – пересечение множеств по индексу α.

Пусть A и B – некоторые подмножества множества X. Тогда определим отображение между множествами A и B как некоторую диаграмму $f: A \longrightarrow B$. Иногда эти отображения могут быть заданы явными формулами на элементы множества A, например $f(a) = a^2$.

Определение 4.

Если A, B, C – некоторые множества (подмножества некоторого большого множества X), и заданы отображения $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$, то композицией этих отображений называется отображение $g \circ f: A \longrightarrow C$.

Определение 5.

Рассмотрим множество всех отображений $f: A \longrightarrow A$. Тогда мы можем выделить некоторое отображение $f(a) = a$, которое называется **тождественным** и обозначается как id_A. Из этого определения можно вывести следующее простое свойство:

Если $f: A \longrightarrow A, g: A \longrightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$, то $\forall a, b \in A, a \neq b$ следует, что $f(a) \neq f(b)$.

Доказательство:

Пусть $f(a) = f(b)$. Подействуем на эти элементы отображением $g: A \longrightarrow A$. Получим: $g \circ f(\text{a}) = a = g \circ f(b) = b \Rightarrow a = b$. Противоречие.

Таким образом, разные элементы множества A переходят в разные множества B. Такое отображение называется **сюръекцией.** Если же для каждого образа ∃! прообраз, то такое отображение называется **инъекцией.** Если же отображение является инъекцией и сюръекцией одновременно, то такое отображение называется **биекцией.**

Определение 6.

Пусть $f: A \longrightarrow B$ – биекция. Тогда отображение $f^{-1}: B \longrightarrow A, f^{-1}(b) = \{a \in A, f(a) = b\}$ называется **обратным** отображением.

Данное выше определение биекции позволяет вывести важное определение, связывающее некоторые множества A и B. Итак,

Определение 7.

Множества A и B называются равномощными, если ∃ биекции $f: A \longrightarrow B$ и $f^{-1}: B \longrightarrow A$.

Определение 8.

Порядком множества A называется класс множеств, равномощных множеству A. Обозначение: $cord(A)$

Пункт 2. Построение равномощных множеств.

Введем несколько наглядных конструкций равномощных множеств.

1) Декартово произведение множеств.

Определение 9.

Декартовым произведением множеств A и B, $(A \subset X, B \subset X)$ называется множество $\text{A} \times \text{B} = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$. A и B называются компонентами декартова произведения.

Данное выше определение позволяет корректно задать формулировку графика отображения множеств.

Определение 10.

Графиком отображения $f: A \longrightarrow B$ называется подмножество их декартова произведения $\Gamma_f \subset A \times B$, такое, что $\Gamma_f = \{(a, b) \in \text{A} \times \text{B} : b = f(a)\}$.

Однако данное выше определение обладает некоторым свойством, которое мы можем сформулировать в виде утверждения: $\Gamma \subset \text{A} \times \text{B}$ является графиком некоторого отображения $f: A \longrightarrow B \Leftrightarrow$ отображение $p: \Gamma \longrightarrow \text{A}, p(a, b) \mapsto a$ – биекция. Действительно, если Г – график, то $\Gamma = \{a, f(a)\}$ и тогда p – биекция. Интуитивному представлению этого понятия соответствует рис.1.1

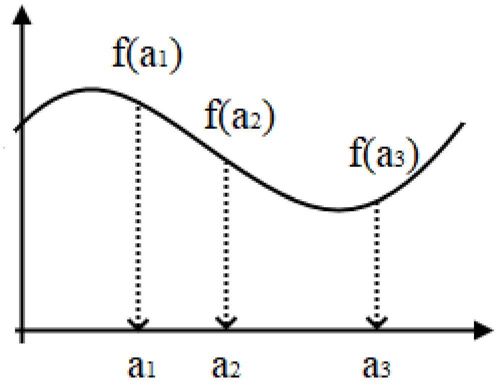

Рис. 1.1 График

Рассмотрим обобщение декартова произведения на случай количества компонент > 2. Пусть задано некоторое семейство множеств A_α , где α пробегает некоторое множество. Тогда $\sqcap\alpha = \{\{a_\alpha\}: a_\alpha \in A_\alpha\}$. Такое произведение также называют тихоновским произведением множеств.

2) В качестве следующей конструкции рассмотрим операцию на множества, называемую несвязным объединением.

Определение 11.

Несвязным объединением множеств A и B, $(A \subset X, B \subset X)$ называется множество

$$\mathrm{A} \sqcup \mathrm{B} = \{x: x \in A \text{ или } \mathrm{x} \in \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset\}.$$

Введенное нами определение позволяет ввести определение образа и прообраза отображения f.

Определение 12.

Пусть $f: A \longrightarrow B$. Тогда определим $f(A) \subset \mathrm{B}, f(a) = \{b \in B: \exists\, a \in A, b = f(a)\}$ – образ f.

Для $f: A \longrightarrow B \supset C$ определим $f^{-1}(\mathrm{C}) = \{a \in A: f(a) \in C\}$ – прообраз f.

Несколько ранее мы определили биективный вид отображения между множествами. Сформулированное выше определение образа и прообраза отображения разрешают вопрос о критерии его биективности. Итак,

Утверждение 2.

Если $f: A \longrightarrow B$, то f – биекция $\Leftrightarrow f^{-1}(x_0)$ состоит из единственного элемента $\forall x_0$.

3) Фактор-отображение.

Определение 13.

Пусть заданы множества A и B, $A \subset$ B. Тогда фактор-отображением называется отображение $B/A = \begin{cases} b \in A \\ A \end{cases}$

То есть мы "стянули" множество A в одну точку. Или же, что то же самое, задали отображение $p: B \longrightarrow B/A,\ p(b) = \begin{cases} b, \text{если } b \notin A \\ A, \text{если } b \in A \end{cases}$

Пункт 3. Равномощные множества и теорема Кантора.
Если $\exists\, [1, \dots, n]$, то $cord([1, \dots, n]) = n$ при конечном n. Но может быть и так, что количество элементов в этом "массиве" бесконечно. Такие множества называются бесконечными.

Пример бесконечного множества: $\mathbb{N}$**.** Действительно, $\nexists\, f: [1, \dots, n] \longrightarrow \mathbb{N}$ при конечном n.

Определение 14.

Множество A называется счётным, если $\exists$ биекция $f: A \longrightarrow \mathbb{N}. (A \sim \mathbb{N})$

Определение 15.

Множество A называется не более чем счетным, если оно либо конечно, либо счётно.

Определение 16.

Если $A_0 \sim A$ и $A_0 \subset B \subset A$, то говорят, что $cord(A_0) \leq cord(B)\ ) \leq cord(A)$ (по теореме Кантора-Бернштейна).

Будем говорить, что $cord(A) < cord(B)$, если $cord(A)\ ) \leq cord(B)$ и $cord(A) \neq cord(B)$

Теорема 1. (Теорема Кантора)

Для $\forall$ множества A $cord(A) < cord(2^A)$, где $2^A = \{B: B \subset A\}$. Определение множества 2^A эквивалентно определению множества всех отображений $f_B: A \longrightarrow [1, 2]$:

$$f_B(a) = \begin{cases} 1, a \in B \\ 2, a \notin B \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено в следующей лекции.

Лекция 2.

Пункт 1. Теорема Кантора-Бернштейна.

Напомним, что $cord(X)$ – мощность множества X. Если А $\subset$ В, то $cord(A) \leq cord(B)$. Если же $cord(A) \leq cord(B)$ и $cord(B) \leq cord(A)$, то $cord(A) = cord(B)$. Таким образом мы можем сказать, что для произвольных множеств выполнено одно из указанных выше соотношений.

Определение 1.

Пусть задано некоторое множество X. Скажем, что на нём задано отношение частичного порядка ($\leq$), если для некоторых пар элементов $x, y \in X$ выполнено условие $x \leq y$ со свойством $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$. Обозначение: $(X, \leq)$.

Примеры упорядоченных множеств:

1) Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$
2) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$

Определение 2.

Пусть X – некоторое множество с заданным отношением частичного порядка $(X, \leq)$. Будем говорить, что на X задан линейный порядок, если

$$\forall\, x, y \in X \;\; x \leq y \text{ или } y \leq x.$$

В качестве примера множества с линейным порядком рассмотрим декартову плоскость $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Тогда $(x, y) \leq (a, b)$ если $x \leq a$ и $y \leq b$.

Выше мы сформулировали два важных свойства отношений между мощностями множеств. На самом деле первое утверждение равносильно теореме Кантора-Бернштейна, а второе – теореме Цермело. Переформулируем их еще раз и докажем. Итак,

Теорема 1. (Теорема Кантора-Бернштейна)

Если $cord(A) \leq cord(B)$ и $cord(B) \leq cord(A)$, то $cord(A) = cord(B)$.

Доказательство.

Построим цепочку вложенных множеств A_i и B_i:

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \supset \cdots$ со следующими свойствами:

$A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset A_3 \supset B_3 \supset \cdots$. По условию теоремы $A_2 \sim A_1$, $B_2 \sim B_1, A_3 \sim A_2$ .... Тогда все эти множества можно переписать в единую последовательность вложений. Во избежание путаницы переобозначим их всех за A_i. Теперь мы получили последовательность $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \cdots$. Так как по предположению $A \sim B_1$, $B \sim A_1 \implies \exists$ отображение φ: A $\longrightarrow B_1$ и отображение $\psi: B_1 \longrightarrow A$.

Осталось лишь выразить A_1 и A_2 из последней полученной последовательности. $A_2 = (A_2 \backslash A_3) \sqcup (A_3 \backslash A_4) \sqcup (A_4 \backslash A_5) \sqcup \ldots$ Таким же образом получим

$A_1 = (A_1 \backslash A_2) \sqcup (A_2 \backslash A_3) \sqcup (A_3 \backslash A_4) \sqcup (A_4 \backslash A_5) \sqcup \ \ldots$. Теперь с помощью отображения φ мы можем получить искомую биекцию между множествами $A_1 =$ A и $A_2 =$ B. Запишем биективное соответствие через диаграммы:

$\varphi: (A_1 \backslash A_2) \longrightarrow (A_3 \backslash A_4)$, $\varphi: (A_2 \backslash A_3) \longrightarrow (A_2 \backslash A_3)$, $\varphi: (A_3 \backslash A_4) \longrightarrow (A_5 \backslash A_6)$, $\varphi: (A_4 \backslash A_5) \longrightarrow (A_4 \backslash A_5)$ и т.д. Таким образом, мы получили требуемое соответствие $\Longrightarrow$ теорема доказана.

Вернемся к утверждению (2): для произвольных множеств выполнено одно из указанных выше соотношений. Это высказывание эквивалентно теореме Цермело, которую мы сформулируем ниже, но сначала введем важное определение:

Определение 3.

Множество А с заданной на нём структурой порядка (А, $\leq$) называется вполне упорядоченным (а порядок - полным), если $\forall B \subset A \ \exists \ min(B) \ \in \ B$ (если для каждого его подмножества существует минимальный элемент из него).

Пример вполне упорядоченного множества:

Множество натуральных чисел ℕ.

Теорема 2. (Теорема Цермело).

Каждое множество может быть вполне упорядоченным.

Доказательство:

Для доказательства этой теоремы воспользуемся аксиомой выбора: если $\{X_\alpha \ \neq \ \emptyset \ , \alpha \in I\}$, $\forall \ \alpha \quad X_\alpha \subset X$– некоторое семейство множеств, то $\forall \ \alpha \ \exists \ x_\alpha \in X_\alpha$. Это утверждение равносильно утверждению о существовании отображения $\varphi: I \longrightarrow X, \varphi(\alpha) \in X_\alpha$. Неформально это можно объяснить так: у каждого множества из данного семейства можно выбрать по точке.

Доказательство этой теоремы эквивалентно задаче поиска порядка “ $\leq$ ”, такого, что $\forall x, y \ \in \ X \ x \ \leq \ y$ или $y \ \leq \ x$. Если X конечно или счётно, то с помощью биекции в ℕ мы можем задать такой порядок явно и доказывать нечего.

Предположим, что X – несчётно. Тогда рассмотрим множество всех подмножеств X, не содержащих само X – $2^X \backslash \{X\}$. Построим отображение φ следующим образом: $\varphi: 2^X \backslash \{X\} \ \longrightarrow \ X$, такое, что $\varphi(A) \notin A$ для некоторого А. Если какое-то А $\subset X$ уже упорядочено, то возьмем элемент $\varphi(A) \notin A$. Построим множество В $= A \cup \{\varphi(A)\}$. Это множество будет “наследовать” порядок из А, т.е. $a \leq \varphi(a) \ \forall a \in A$. Последнее предложение можно переформулировать так: будем говорить, что на А задан порядок, согласованный с φ, если $\varphi([1_A, \beta)) \ = \ \beta$, где 1_A – минимальный элемент А (существует по определению).

Теперь рассмотрим два множества, на которых задана структура порядка: (A, $\leq_A$) и (B, $\leq_B$). Тогда на их пересечении заданы два порядка. Теперь нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1.

Если заданы (A, $\leq_A$) и (B, $\leq_B$) – вполне упорядоченные множества, то либо A является начальным отрезком B, либо B является начальным отрезком A.

Для доказательства этой леммы достаточно построить изоморфизм $\varphi: A \longrightarrow B$ со следующим свойством: или φ – биекция, или $\varphi(A) = [1_B, \beta) \subset B$.

Построить его можно с помощью трансфинитной индукции: $\varphi(1_A) = 1_B$; $\varphi(min(A\backslash\{1_A\}) = 2_A) = 2_B$ и т.д. То есть, для каждого $min\{A\backslash[1_A, \alpha)\} = \alpha$, $\varphi(\alpha) = min\{B\backslash\ \varphi([1_A, \alpha)\}$. Осталось показать, что если заданы (A, $\leq_A$) и (B, $\leq_B$), то, как мы только что доказали, либо A ⊂ A ∩ B, либо B ⊂ A ∩ B, откуда немедленно следует, что A ∪ B имеет согласованный с φ порядок.

Завершим доказательство теоремы Цермело следующим фактом: если рассмотреть ∪{(A, $\leq_A$), согласованный с φ} ⊂ X, то это объединение совпадает с X (иначе просто продолжаем процедуру построения максимального семейства множеств с согласованным с φ порядком путем указанного выше алгоритма) ⟹ мы получили исходное множество с полным порядком. Доказано.

Важность этой теоремы состоит в том, что теперь мы знаем, что множество мощностей всех множеств может иметь полный порядок, поэтому с этого момента мы вправе определять отношения мощностей множеств. Таким образом мы можем определить мощность конечного множества (n), мощность множества натуральных чисел ℕ ($\aleph_0$), мощность несчётного множества ($\aleph_1$) (доказательство существования последнего см. доказательство теоремы Кантора или доказательство несчетности ℝ из курса математического анализа).

Абстрактные множества обладают единственным свойством – мощностью, поэтому в дальнейшем нам придется конструировать некоторые новые структуры – топологию или метрику на множестве – для более детального изучения. Для этого сформулируем важное определение.

Пункт 2. Метрические пространства.

Определение 4.

Метрикой на множестве X называется отображение $\rho: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\rho(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in X$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
4) $\forall x, y, z \in X\ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$. Это свойство также носит название “неравенство треугольника” .

Множество с заданной на нём метрикой называется метрическим пространством. Его элементы будем называть точками.

Примеры метрических пространств:

1) Вещественная ось или некоторое её подмножество: $(\mathbb{R}, \rho), \rho(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2) Произвольное n-мерное арифметическое пространство: $(\mathbb{R}^n, \rho)$, $\mathbb{R}^n = (x^1, \dots, x^n): x^i \in \mathbb{R}, \quad \rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$
3) Множество всех непрерывных функций на $[0, 1]$: $(C[0,1], \rho)$, $\rho(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$

Теперь сконструируем структуру топологии на произвольном множестве X.

Определение 5.

Топологией на множестве X называется такое семейство открытых множеств

$\mathfrak{J} = \{U: U \subset X\}$ со следующими свойствами:

1) $X, \emptyset \in \mathfrak{J}$
2) $U \in \mathfrak{J}, V \in \mathfrak{J} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{J}$
3) $U_\alpha \in \mathfrak{J} \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathfrak{J}$

Множество X со структурой топологии на нём $(\mathrm{X}, \mathfrak{J})$ называется топологическим пространством. Элементы топологического пространства называются точками, а множества $U \in \mathfrak{J}$ - открытыми множествами. Примеры топологий будут приведены в следующей лекции.

Лекция 3.

Пункт 1. Топология на множестве.

В прошлой лекции мы дали два важных определения, которые напрямую связаны с множествами – метрики и топологии на множестве, а также привели примеры метрических пространств и метрик на них. Теперь приведем примеры топологий. Если на множестве X заданы две топологии $(X,\mathfrak{I}_1)$ и $(X,\mathfrak{I}_2)$, то будем говорить, что топология $\mathfrak{I}_1$ слабее топологии $\mathfrak{I}_2$, если $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2$.

Примеры топологий на множестве:

1) Минимальная топология на X: $\mathfrak{I}_{min}=\{X, \emptyset\} \subset \mathfrak{I}$ $(\forall \mathfrak{I})$
2) Максимальная топология на X: $\mathfrak{I}_{max}=2^X$. $\forall \mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_{max}$

Определение 1.

Если $A \in \mathfrak{I}$ (то есть открытое множество), то множество $X\backslash A$ называется замкнутым подмножеством.

Замечание к определению 1: при замене топологии замкнутость множества может изменяться.

Определение 2.

Если $U \in \mathfrak{I}$ - некоторое множество, $x \in U$, то U называется открытой окрестностью точки x.

Замечание к определению 2: определение открытой окрестности зависит от выбора топологии.

Определение 3.

$\mathcal{B} \subset \mathfrak{I}$ называется базой топологии $\mathfrak{I}$, если выполнено условие: $\forall\, U \in \mathfrak{I} \quad \exists\, V_\alpha \in \mathcal{B}$, такие, что $\bigcup_\alpha V_\alpha = U$.

Напомним, что элементы топологического пространства (множества, снабженного топологической структурой) называются его точками. Теперь нужно понять, какими они бывают, то есть классифицировать их.

Пункт 2. Классификация точек.

Пусть X – некоторое “большое” множество, $A \subset X$.

Определение 4.

Точка $x \in A$ называется внутренней точкой множества A, если $\exists\, U$, такое, что $x \in U, U \subset A$. Обозначим множество внутренних точек как $Int(A)$.

Введенное нами определение позволяет сформулировать технически важную теорему.

Теорема 1.

Множество внутренних точек множества A является открытым множеством.

Доказательство.

Если $x \in Int(A)$, то $\exists$ U = U(x) $\subset$ A $\Longrightarrow$ $\cup_x$ U_x = Int(A), где $\bigcup_x$ - объединение по всем точкам множества A. Доказано.

Таким образом, $Int(A)$ является максимальным множеством $U \subset A$.

Определение 5.

Назовём замыкание множества A множество $\bar{A} = X \backslash Int(X \backslash A)$. Для более ясного определения этого понятия введём

Определение 6.

Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения к множеству A (или точкой прикосновения множества A), если $\forall\, U(x)$, где $U(x)$ – открытая окрестность точки x, $U(x) \cap A \neq \emptyset$.

Рассмотрим одну важную конструкцию для вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ – базу окрестностей: $O_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Тогда некоторое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ открыто, если $\exists\, O_\varepsilon(x)$, где x – точка прикосновения.

Вернёмся к определению 6 и сформулируем еще одно определение замыкания множества A.

Определение 7.

Множество всех точек прикосновения $\bar{A}$ множества A называется замыканием множества A. Нетрудно заметить, что множество $\bar{A}$ – замкнуто.

Утверждение 1.

Определения замыкания множества A 5 и 7 эквивалентны.

Доказательство:

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $\bar{A}$ действительно совпадает с множеством $Int(X \backslash A)$, что и утверждалось.

Теперь введём важное определение точки прикосновения по Гейне.

Определение 8.

Точка x является точкой прикосновения множества A $\Leftrightarrow$ $\exists$ последовательность $\{x_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Однако в определении напрямую используется множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то есть частный случай. Поэтому необходимо ввести ряд новых определений, чтобы перейти к общему. Итак, пусть $(X, \mathfrak{I})$ – топологическое пространство. Тогда

Определение 9.

Базой точки x называется множество $O_{\mathfrak{J}}(x) = \{U \subset \mathfrak{J}:\ x\ \in\ U\}$.

Множество $O_{\mathfrak{J}}(x)$ частично упорядочено. Частичный порядок задаётся так: если $U_1(x)$ и $U_2(x) \in O_{\mathfrak{J}}(x)$, то будем обозначать $U_1(x) \prec U_2(x)$, если $U_2(x) \subset U_1(x)$. Этот порядок удовлетворяет следующему свойству: $U_1(x)$ и $U_2(x) \in O_{\mathfrak{J}}(x)$ $\exists\, U_3(x)$, такой, что $U_3(x) \succ U_1(x)$, $U_3(x) \succ U_2(x)$. В таком случае говорят, что задано направляющее множество. В конкретном примере можем считать, что направляющее множество – это множество.

Теперь мы можем ввести корректное определение предела последовательности.

Определение 10.

Пусть I – направленное семейство индексов, то есть задано множество $\{x_\alpha,\ \alpha \in I\}$, $(X, \mathfrak{J})$ – топологическое пространство. В этом случае

$x_0 = \lim\limits_{\alpha \in I}(x_\alpha) \Leftrightarrow\ \forall U, x_0 \in U,\ \exists\, \alpha = \alpha(U)$, такое, что если $\beta \succ \alpha(U)$, то $x_\beta\ \in\ U$.

Теорема 2.

Пусть $A \subset (X, \mathfrak{J})$, $x_0 \in$ X. Тогда $x_0 \in \bar{A}\ \Leftrightarrow\ \exists$ последовательность $\{x_\alpha, \alpha \in I\}$, такая, что $\lim\limits_{\alpha \in I}(x_\alpha) = x_0$.

Доказательство.

Действительно, если $x_0 \in \bar{A}$, то $\forall U(x)\ U(x) \cap A \neq \emptyset$, откуда напрямую следует, что $\exists\, x_\alpha \in$ A, такое, что последовательность $\{x_\alpha\}$ имеет предел $\lim\limits_{\alpha \in I}(x_\alpha) = x_0$, что и нужно было доказать.

Пункт 3. Отображения.
Пусть даны два топологических пространства $(X, \mathfrak{J}_X)$ и $(Y, \mathfrak{J}_Y)$ и отображение (1) $f: (X, \mathfrak{J}_X) \longrightarrow (Y, \mathfrak{J}_Y)$. Введем важные понятия, касающиеся непрерывности отображений топологических пространств. Итак, во всех определениях будем подразумевать отображение (1).

Определение 11.

Отображение f называется непрерывным, если $\forall\ V \in \mathfrak{J}_Y$, $f^{-1}(V) = U \in \mathfrak{J}_X$.

Определение 12.

Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X, y = f(x)$, $\forall V = V(y) \in \mathfrak{J}_Y\ \exists\ U = U(x) \in \mathfrak{J}_X$, то $\forall x' \in U(x)\ \Longrightarrow\ f(x') \in V(y)$.

Утверждение 2.

Определения 11 и 12 эквивалентны.

Доказательство предлагается проделать самостоятельно.

Определение 13.

Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ $F \subset Y, F$ – замкнуто и $f^{-1}(F)$ – замкнутое множество.

Все данные выше определения принято понимать определениями по Коши. Однако для дальнейшего повествования стоит ввести определения непрерывности по Гейне.

Определение 14. (Определение непрерывности по Гейне)

Отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ $\exists$ последовательность точек множества X $\{x_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для $\forall x \in$ X.

Утверждение 3.

Определения 13 и 14 эквивалентны.

Доказательство:

Если F – замкнуто, то $f^{-1}(F) \subset X$. Если же $f^{-1}(F)$ не замкнуто, то $\exists\, x_0 \notin f^{-1}(F)$ и $y_0 = f(x_0)$. Тогда $\exists$ последовательность $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0 \Longrightarrow$ $x_0 = f^{-1}(y_0) \in f^{-1}(F)$. Но по предположению $x_0 \notin f^{-1}(F)$, противоречие.

Теперь докажем, что из определения по Коши следует определение по Гейне. $\forall\, V(y_0)\ \exists\, U(x_0)$, такая, что $f(U(x_0)) \subset V(x_0)$. Таким образом нужно доказать, что $x_n \longrightarrow x_0 \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Возьмем $V(y_0)$, такую, что $\exists\, U(x_0)$ и выберем некоторое n, такое, что при $n' > n$ $x_{n'} \in U(x_0)$ и $f(x_{n'}) \in V(y_0)$. Тогда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, что и требовалось доказать. Доказано.

Заметим, что при доказательстве мы использовали для большей доступности нумерацию через множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, поэтому для соблюдения строгости изложения нужно заменить нумерацию через $\mathbb{N}$ на нумерацию через некоторое направляющее семейство.

Из утверждений 2 и 3 следуют несколько важных свойств непрерывных отображений топологических пространств, которые мы сформулируем в качестве утверждения 4.

Утверждение 4.

1) Если $f: X \longrightarrow Y$ – непрерывно, то $\forall\, V \in \mathfrak{J}_Y$ $f^{-1}(V) \in \mathfrak{J}_X$.
2) Композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Доказательство.

1) Немедленно следует из определения непрерывного отображения
2) Если мы рассмотрим композицию отображений $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$, $g \circ f : X \longrightarrow Z$, то достаточно применить сначала отображение g^{-1}, затем f^{-1} и воспользоваться свойством 1. Доказано.

Пункт 4. Гомеоморфизмы.
Пусть X и Y – топологические пространства.

Определение 15.

Если заданы отображения $f: X \longrightarrow Y$ и $g: Y \longrightarrow X$, такие, что $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$, то будем говорить, что f и g являются гомеоморфизмами пространств X и Y, если f и g являются непрерывными. Соответственно пространства X и Y в этом случае называются гомеоморфными.

Определение 16.

Назовём топологическое пространство $(X, \mathfrak{I})$ связным, если $X = X_1 \sqcup X_2$, то есть $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$ и X_1, X_2 замкнуты.

Примеры гомеоморфных пространств:

1) Отрезок $[0,1]$ и интервал $(0,1)$ не гомеоморфны. В самом деле, если построить отображение $f: ([0,1]\backslash\{1\}) \longrightarrow ((0,1)\backslash\{f(x)\})$, то множество $([0,1]\backslash\{1\})$ обладает свойством свзяности, а множество $((0,1)\backslash\{f(x)\})$ – нет. Из этого примера следует важное свойство – связность является инвариантом гомеоморфизма.
2) Отрезки $X = [0,1]$ и $Y = [1,2]$ гомеоморфны. Рассмотрим отображения $f: X \longrightarrow Y, f(t) = t + 1, t \in X$ и $g: Y \longrightarrow X, g(\tau) = \tau - 1, \tau \in Y$.
Гомеоморфизм построен. Из этого примера вытекает ряд полезных наблюдений: $\forall$ отрезок $[a,b]$ гомеоморфен $\forall$ отрезку $[c,d]$; $\forall$ интервал (a,b) гомеоморфен $\forall$ интервалу (c,d); $\forall$ полуинтревал $[a,b)$ гомеоморфен $\forall$ полуинтервалу $[c,d)$.
3) $(0,1)$ и $(-\infty, +\infty)$ также гомеоморфны (проверьте!).

Определение 17.

Пусть $(X, \mathfrak{I})$ – некоторое топологическое пространство, $A \subset X$. Тогда $\mathfrak{I}_A = \{A \cap G, G \in \mathfrak{I}\}$. В этом случае говорят, что A - подпространство в X.

Теперь мы можем сформулировать важную теорему о непрерывном отображении.

Теорема 3. (Теорема о непрерывности).

Пусть $(X, \mathfrak{I}_X)$ – некоторое топологическое пространство, $X = F_1 \cup F_2$, F_1 и F_2 – замкнутые множества. Отображение $f: X \longrightarrow Y$, отображение $f|_{F_1}: F_1 \longrightarrow Y$ – ограничение f на F_1, отображение $f|_{F_2}: F_2 \longrightarrow Y$ - ограничение f на F_2. Тогда отображение f непрерывно $\Leftrightarrow$ непрерывны его ограничения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$.

Замкнутость множеств F_1 и F_2 играет очень большую роль. Проиллюстрируем это примером. Пусть $X = \mathbb{R}$, в качестве одного подмножества возьмём множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, в качестве другого – его дополнение $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Если $f: X \longrightarrow Y$, то его ограничения $f|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \longrightarrow Y$ и $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}: \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \longrightarrow Y$ – непрерывны, но само отображение f не непрерывно. Для этого положим $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 1$, $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \equiv 0$. Тогда действительно ограничения f непрерывны, но общее отображение f – разрывно.

Лекция 4.

Пункт 1. Произведение топологических пространств.

В предыдущей лекции мы детально рассмотрели топологические пространства. Теперь мы введём очень важную конструкцию – декартово произведение топологических пространств.

Определение 1.

Пусть $(\mathrm{X}, \Im_{\mathrm{X}})$ и $(Y, \Im_Y)$ – топологические пространства. Определение декартова произведения множеств было введено нами ранее (см. лекцию 1). Определим топологию декартова произведения $\Im_{\mathrm{X}\times Y} = \{U \times V: U \subset X, V \subset Y,\ U \in \Im_{\mathrm{X}},\ V \in \Im_Y\}$.

Определение 2.

Множество $W\ \subset X\ \times Y$ называется открытым, если $\exists U_{\alpha},\ V_{\alpha},\ \alpha \epsilon I,$ такие, что

$$\bigcup_{\alpha}(U_\alpha \times V_\alpha) = W$$

Теперь определим некоторое отображение $pr_X: X\ \times Y \to X$, $pr_Y:\ \ X\ \times Y \to Y.$

Теорема 1.

Отображения pr_X и pr_Y непрерывны.

Доказательство.

Достаточно заметить, что $(pr_X)^{-1}(U) =\ U \times Y$, то есть прообраз этого отображения открыт, а следовательно – оно непрерывно. Аналогично для pr_Y. Доказано.

Теперь сформулируем еще одно утверждение в виде теоремы:

Теорема 2.

$z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in X \times Y.\ \exists \lim_{\alpha\epsilon I} z_\alpha \Leftrightarrow \exists \lim_{\alpha\epsilon I} \mathrm{x}_\alpha = \mathrm{x}_0$ и $\exists \lim_{\alpha\epsilon I} y_\alpha = y_0.$

Доказательство: достаточно тривиально, в этом мы убедимся немного позднее.

Также в первой лекции мы дали определения графика отображения. Теперь сформулируем

Теорема 3.

Пусть $f: X\ \to Y$. Тогда график функции Γ_f – замкнутое множество.

Доказательство:

Достаточно заметить, что при $x_\alpha\ \to x_0$ верно и $f(x_\alpha) \to f(x_0)$. В свою очередь, если $x_0\ \in \Gamma_f$, то и $f(x_0) \in \Gamma_f$. Следовательно, каждая предельная точка принадлежит множеству $\Longrightarrow$ множество замкнуто. Доказано.

Определение 3.

Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если $\forall x, y\ \in\ X$

$$\exists\ G(x) \text{ и } G(y) (\text{окрестности точек}) \in \Im_{\mathrm{X}}, G(x) \cap G(y) = \emptyset.$$

Замечание.

Как мы сможем убедиться позже – не каждое топологическое пространство является хаусдорфовым.

Теорема 4. (о хаусдорфовости метрического пространства)

Всякое метрическое пространство является хаусдорфовым.
Доказательство.
Пусть $x, y \in X$ – метрическое пространство. $x \neq y \Longrightarrow \rho(x,y) > 0$.
Тогда $\exists\, \varepsilon = \frac{\rho(x,y)}{2} \Longrightarrow \exists\, O_\varepsilon(x), O_\varepsilon(y),$ такие что $O_\varepsilon(x) \cap O_\varepsilon(y) = \emptyset$.
Это верно, т. к. $\nexists z \in O_\varepsilon(x) \cap O_\varepsilon(y)$. Если бы такое z существовало, то из неравенства треугольника $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{\rho(x,y)}{2} + \frac{\rho(x,y)}{2} = \rho(x,y)$. Противоречие.
Доказано.
Во всех формулах выше мы использовали определение предела, однако может ли быть так, что предел не единственен? Ответ на этот вопрос нам даёт теорема 5.

Теорема 5.
Пусть X – хаусдорфово пространство, $x_\alpha \in X,\ \alpha \in I$ -направленность. Тогда если $\exists \lim\limits_{\alpha\epsilon I} x_\alpha = \mathrm{x}_0$ и $\exists \lim\limits_{\alpha\epsilon I} y_\alpha = y_0$, то $\mathrm{x}_0 = y_0$.
Доказательство.
Так как пространство хаусдорфово $\Longrightarrow \exists\, G(x_0),\ G(y_0)$: $G(\mathrm{x}_0) \cap G(\mathrm{y}_0) = \emptyset$. То есть, $\exists\, G(x_0),$ такая, что $\exists\, \alpha_0 \in I,$ что $\forall \alpha, \alpha_0 < \alpha \quad x_\alpha \in G(x_0)$.
Но $\exists\, G(y_0),$ такая, что $\exists\, \alpha_1 \in I,$ что $\forall \alpha, \alpha_1 < \alpha\ x_\alpha \in G(y_0)$.
Тогда выберем из α_1 и α_0 наибольшее(можем это сделать)и обозначим как α_2. Но тогда для некоторого x_α, $\alpha > \alpha_2$, $x_\alpha \in G(\mathrm{x}_0) \cap G(\mathrm{y}_0) = \emptyset$. Противоречие. Доказано.

Для того, чтобы упорядочить все полученные нами свойства топологических пространств, введём ряд обозначений. Будем говорить, что топологическое пространство удовлетворяет условию (аксиоме или свойству отделимости):
T_0 (аксиома Колмогорова) – любые две различные точки пространства X отделяются окрестностью.
T_1 – если $\forall x, y \in X\ \exists G(x)$, такая, что $y \notin G(x)$.
T_2 - если пространство хаусдорфово.
T_3 – если $\forall x \in X,\ \forall F$ – замкнутого множества, такого, что $\mathrm{x} \notin F$, то $\exists\, G(x), \exists G_F = G(F)$, $G(x) \cap G_F = \emptyset$.
T_4 – если F_1 и F_2 – непересекающиеся замкнутые множества, то $\exists\, G_1$ и G_2 такие, что $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
Очевидно, что верна импликация $T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$.

Определение 4.
Топологическое пространство со свойствами T_0 и T_3, выполняющимися одновременно, называется регулярным топологическим пространством.
Упражнение.
Проверьте, что верна следующая импликация: $T_0 + T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1$.

Определение 5.
Топологическое пространство со свойствами T_1 и T_4, выполняющимися одновременно, называется нормальным топологическим пространством.

Теорема 6. (о нормальности метрического пространства)
Если X – метрическое пространство, то X нормально.
Доказательство:
Фактически надо построить отображение $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, такое, что если F_1 и F_2 его замкнутые непересекающиеся подмножества, то ограничения f на них соответственно тождественно равны 0 и 1. Для этого воспользуемся теоремой Урысона:
Теорема 7. (Теорема Урысона)
Если X – нормальное пространство, F_1 и F_2 его замкнутые непересекающиеся подмножества, то $\exists\, f: X \longrightarrow [0,1]$, f – непрерывна на X и $f|_{F_1} \equiv 0$ и $f|_{F_2} \equiv 1$.
Доказательство этой теоремы приведем несколько позже.
Вернемся к доказательству теоремы 6. В качестве такой функции f мы можем взять метрику пространства X. Определим расстояние $\rho(x,F)$ от точки x до подмножества F, как $\inf\limits_{y\in F} \rho(x,y)$. Осталось доказать, что метрика есть непрерывная функция переменной x. Поэтому
Теорема 8.
Функция $\rho(x,F)$ непрерывна по переменной x.
Доказательство теоремы 8:
Нужно лишь доказать неравенство $|\rho(x,F) - \rho(y,F)| \leq \rho(x,y)$. Для этого рассмотрим два справедливых неравенства:

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y);\ \rho(y,z) \leq \rho(z,x) + \rho(x,y).$$

Так как x и y “равноправны”, то переходя сначала к $\rho(y,F) = \inf\limits_{z\in F}(\rho(z,x) + \rho(x,y))$, а затем аналогично к $\rho(x,F)$ получаем требуемый результат: $\rho(x,F)$ непрерывна. Доказано.
Для завершения доказательства теоремы 6 осталось лишь явно построить функцию
$f = \frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$. Очевидно, что она непрерывна и при этом если $x \in F_1$, то
$f \equiv 0$, а при $x \in F_2$ $f \equiv 1$. Доказано.

Мы не будем приводить полное доказательство теоремы 7 (теоремы Урысона), а докажем её схематично: достаточно лишь разбить отрезок [0,1] на открытые множества $\Longrightarrow$ прообразы также будут открытыми. Индуктивно продолжая подобное построение мы получим два таких множества F_1 и F_2, а следовательно, наше предположение верно. Более строгое рассуждение читатель может проделать самостоятельно.

Теперь приведём важный пример хаусдорфова, но не регулярного пространства: $X = [0,1]$, некоторая топология $\mathfrak{I}$. Рассмотрим множество $Z = \left\{\frac{1}{n}, \text{где } n > 0\right\}$.
Тогда "новая" топология будет содержать все множества "старой" и множество $X \backslash Z$. Это пространство будет заведомо хаусдорфовым, но регулярность будет нарушаться в точке 0: $\{0\} \cap Z = \emptyset$, но в любой окрестности точки 0 присутствуют элементы Z.

Теперь рассмотрим пример регулярного, но не нормального пространства.
Это пространство называется плоскостью Немыцкого:

$$L \subset \mathbb{R}^2 = \{(x,y), y \geq 0\}.\ L_0 = \{(x,y), y = 0\}$$

Пространство, полученное благодаря L_0 заведомо хаусдорфово, регулярно, но ненормально.

Лекция 5.

Пункт 1. Лемма Урысона.

В предыдущей лекции нами не было дано четкого доказательства теоремы Урысона (или леммы Урысона, как её часто обозначают в литературе) по причине использования её в доказательстве другой важной теоремы. Поэтому сформулируем и докажем её автономно еще раз. Обозначим $[0,1] = I$.

Теорема 1.(Лемма Урысона).

Если X – нормальное пространство, U и V его замкнутые непересекающиеся подмножества, то $\exists\, f: X \longrightarrow [0,1], f$ – непрерывна на X и $f|_U \equiv 0$ и $f|_V \equiv 1$.

Доказательство:

Условие нормальности эквивалентно следующему: $U \subset X, U$ – замкнуто и $\forall\, O_U \Longrightarrow \exists O'_U$, такая, что $O'_U \subset O_U$. В данном случае O_U – открытая окрестность U.

Теперь построим семейство множеств F_r $(r = \frac{m}{2^m}, m = 2k+1, r < 1)$ так, что $F_r \subset F_{r'}$, при $r < r'$ и $\overline{F_r}$ лежит в $\overline{F_{r'}}$.

Определим F_0 как некоторую окрестность $U, F_1 = X\setminus V$. Тогда $F_{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет следующим свойствам: $\overline{F_0} \subset F_{\frac{1}{2}}$, $\overline{F_{\frac{1}{2}}} \subset F_1$. Далее можем построить $F_{\frac{1}{4}}$ и $F_{\frac{3}{4}}$ и т.д. индуктивно. Теперь мы имеем дело с непрерывно "расширяющимся" семейством множеств.

Построим функцию f следующим образом: $f(x) = \begin{cases} \inf\{\mathrm{r}:\ \mathrm{x} \in \mathrm{F_r}\}, \text{при } \mathrm{x} \notin \mathrm{V} \\ 1, \mathrm{x} \in \mathrm{V} \end{cases}$

Докажем непрерывность f на I. Пусть $0 < a < 1$ и рассмотрим окрестности типа $[0,a)$ $(a,1]$.

$(*)\ \forall\, (a,b) = [0,b) \cap (a,1]$ (то есть, окрестности из предыдущего предложения являются двупараметрическими).

Прообраз $f^{-1}([0,a)) = \{\bigcup F_r, r < a\}$ – суть открытое множество. В свою очередь $f^{-1}((a,1]) = \{\bigcup X\setminus\overline{F_r}, r > a\}$ – также открытое множество. Так как мы показали (см (*)), что $\forall$ подмножество I представимо таким образом и прообразы f на каждой части окрестности открыты $\Longrightarrow$ f непрерывна. Доказано.

Упражнение-вопрос.

В каком месте использовалась нормальность?

Теперь сформулируем одну важную теорему, которая еще неоднократно будет фигурировать в наших дальнейших рассуждениях и не только.

Теорема 2.(О разбиении единицы)

Пусть X – нормальное пространство, $u = (U_1, \ldots, U_n)$ – конечное открытое покрытие $(\bigcup_i U_i = X)$, каждое U_i– открытое. Тогда $\exists$ набор $\varphi_i(x)$: $X \to [0,1]$, такой, что

$\forall\, i = 1, \dots, n \quad \varphi_i$ непрерывна, $supp(\varphi_i) \subset U_i, \sum_i \varphi_i = 1$.
(Напоминание: $supp(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$)
Доказательство теоремы будет опираться на следующую лемму.

Лемма 1.
Если $u = (U_1, \dots, U_n)$ – открытое покрытие X (нормальное пространство), то
$\exists\, v = (V_1, \dots, V_n)$, такое, что $(\overline{V_i}) \subset U_i$.

Доказательство леммы:
Построим v пошагово. Пусть $\mathrm{F}_1 = X \backslash (\bigcup_{i=2} U_i) \implies \exists$ окрестность $\mathrm{F}_1 \subset V_1 \subset U_1 \implies$ $(V_1, U_2, \dots, U_n)$ – открытое покрытие X.
Предположим, что для некоторого k наше предположение уже верно, то есть построено семейство $(V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_n)$. Тогда $\mathrm{F}_{\mathrm{k}+1} = X \backslash (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+1} \cup \dots \cup U_n)$. Применяя для $\mathrm{F}_{\mathrm{k}+1}$ рассуждения, аналогичные рассуждениям об F_1, можем сказать, что лемма верна $\forall\, n$. Доказано.

Вернемся к доказательству теоремы:
По лемме 1 можем считать, что уже построено вышеуказанное покрытие $v = (V_1, \dots, V_n)$, $\overline{V_i} \subset U_i$. Тогда для $\forall\, i = 1, \dots, n$ рассмотрим множество отображений $\psi_i: X \to \mathbb{R}$ и их ограничений на дополнения к V_i и на $X \backslash U_i$, таких, что $\psi_i|_{\overline{V_i}} \equiv 1$, $\psi_i|_{X \backslash U_i} \equiv 0$. Существование таких функций гарантируется теоремой Урысона. Тогда
$\varphi_i = \frac{\psi_i(x)}{\sum \psi_i(\mathrm{x})}$. Очевидно, что эта функция непрерывна. Достаточно легко также проверить, что $\sum_i \varphi_i(x) = 1$. Теорема доказана.

Замечание-задача.
При каких условиях вышеизложенное доказательство справедливо для случая бесконечного покрытия?

Далее мы приведем теорему, доказательство которой, возможно, будет реализовано нами позже. Итак,

Теорема 3. (Титце-Урысона)
Пусть $F \subset X$, F – замкнуто, X – нормальное пространство. Если $f: F \to \mathbb{R}$, $\exists\, \underset{x \in F}{supp} |f(x)| = \|f\|$ (норма функции) $\implies \exists\, H: X \to \mathbb{R}$, H непрерывна,
$H|_F = f, \|H\| = \|f\|$.

Пункт 2. Компактные пространства. Компактность.

Определение 1.
Некоторое множество X называется компактным, если из любого открытого покрытия $u = (U_\alpha)$ можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 2.

Некоторое множество X называется компактным, если $\forall$ покрытии U можно “вписать” конечное подпокрытие. В данном случае u вписано в v (два покрытия), означает, что для $\forall\, U \in u \;\; \exists\, V \in v,$ такое, что $U \subset V$.

Предложение 1.
Определения 1 и 2 эквивалентны.

Определение 3.
X локально компактно $\Leftrightarrow\;\; \forall\, x \in X, O(x) \;\subset\; X \quad \exists\, O'_x$ такая, что $\overline{O'_x} \subset\; O(x)$.
Пример локально компактного множества: $\mathbb{R}$.

Определение 4.
Пусть u – семейство подмножеств пространства X. U локально конечно, если $\forall\, x \,\in\, X,\; \exists\, O(x)$, такая, что пересечение этой окрестности с возможно конечным подсемейством U не пусто.

Определение 5.
X – паракомпактно, если в любом открытом покрытии u можно вписать локально конечное покрытие.
Пример паракомпактного пространства: $\forall$ евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Лекция 6.
В прошлой лекции мы ввели важные определения компактности, локальной компактности и паракомпактности. Теперь посмотрим, какими свойствами эти определения обладают. Итак,

Теорема 1.
Пусть $F \subset$ X, F – замкнуто. Если X компактно (локально компактно, паракомпактно) $\Longrightarrow$ F также компактно (локально компактно, паракомпактно).
Доказательство.
Проведем доказательство для случая компактности, так как в остальных случаях рассуждения те же.
Если U_α – покрытие X, то достаточно лишь "присовокупить" к этому покрытию множество $X\backslash F$, которое является открытым. Тогда семейство $(U_1, \dots, U_N, X\backslash F)$ является открытым покрытием F. Аналогично для двух оставшихся случаев. Доказано.

Теперь обобщим введенные нами термины с помощью теоремы 2:

Теорема 2.
Если X – хаусдорфово и паракомпактно, то оно нормально.
Доказательство:
Для доказательства сначала докажем регулярность множества X. Для доказательства нормальности потребуются те же рассуждения.
Из условия X – хаусдорфово. Пусть $F \subset X$. Тогда из условия имеем:
$\forall\, x \in X, \forall\, y \in F,\ \ \exists\, O(x), O(y),$ такие, что $O(x) \cap O(y) = \emptyset$.
Рассмотрим $\cup O(y) = O_F$. Это множество открыто. Напомним один теоретико-множественный факт – операция объединения конечного числа множеств перестановочна с операцией взятия замыкания к этому объединению (верно лишь для объединения *конечного* числа множеств!). То есть $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
Вернемся к рассмотрению окрестностей $O(y)$. Из вышесказанного $\Longrightarrow$
$\overline{\cup\, O(y)}\ = \cup\,(\overline{O(y)}) = O_F \Longrightarrow\ X$ регулярно.
Для доказательства нормальности нужно лишь от пары (F, x) перейти к паре (F, G), где и $F,$ и G замкнуты. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям при доказательстве регулярности. Доказано.

Предложение 1. (обратное к теореме о компактности подмножества)
Если F – компакт, X – хаусдорфово пространство, $F \subset X\ \Longrightarrow\ F$ – замкнуто.
Доказательство:
Рассмотрим некоторую точку $x \in X\backslash F$. Если u_v – открытое покрытие F, то из компактности F следует, что из u_v можно выделить конечное. Переходя к объединению замыканий получаем требуемое – F замкнуто. Доказано.

Следствия из предложения 1.

1) Если $X \subset \mathbb{R}^n$, X – компакт $\Longrightarrow$ X замкнуто и ограничено.
2) $\forall\, n$ $\mathbb{R}^n$ – хаусдорфово.

Предложение 2.
Пусть $f: X \to Y$, X -компактно, f – непрерывно $\Longrightarrow$ $f(X)$ – компактно.
Доказательство.
Пусть U_α – открытое покрытие $f(X)$. Тогда $f^{-1}(U_\alpha)$ – открытое покрытие X. Из непрерывности f мы можем выделить конечное подпокрытие $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_N) \Longrightarrow \cup_I f^{-1}(U_i)=X$, откуда следует, что $f(x) \subset \cup^N{}_i(U_i)$, что и требовалось доказать. Предложение доказано.

Ранее нами было введено понятие гомеоморфизма. Заметим, что если f взаимооднозначно и непрерывно, то из этого вообще говоря не следует, что f – гомеоморфизм.

Теорема 3.
Пусть X – компактно, Y – хаусдорфово. Тогда если $f: X \to Y$ непрерывно и взаимнооднозначно, то f – гомеоморфизм.
Доказательство:
Докажем, что f – замкнутое отображение(f(F) замкнуто, если $\forall$ F $\subset$ X, F -замкнуто).
Действительно, так как X компактно, то f является замкнутым отображением. Но тогда если $U \subset Y$, $f^{-1}(Y \setminus U)$- замкнуто, что, в свою очередь, говорит об открытости $f^{-1}(U)$. Из вышенаписанного и из предположения, что f непрерывно и взаимооднозначно напрямую следует, что f – гомеоморфизм, что и необходимо было доказать. Доказано.

Пункт 2. Метризуемые пространства.
Некоторое время назад одновременно с введением топологии на множестве мы ввели также такое понятие, как метрика. Ряд сформулированных фактов позволяет нам задаться вопросов о решении ряда задач, касаемых метризуемых пространств, то есть пространств, на которых можно ввести метрику. Сформулируем это определение строго.
Определение 1.
Топологическое пространство X называется метризуемым $\Longleftrightarrow$ если $\exists\, \rho : X \times X \to \mathbb{R}$, где ρ – функция метрики. Тогда топологическое пространство X_ρ гомеоморфно топологическому пространству X.

Далее мы сформулируем и докажем важную теорему о метризуемости пространств доказательство которой будет опираться на следующую лемму, а также на введенные нами ранее определения декартова произведения топологических пространств(см. пред. лекции.).
Лемма 1.
Счётное произведение метризуемых пространств метризуемо.

Перед доказательством леммы сделаем важное замечание: если (X, ρ) – метрическое пространство, то $\exists\ \rho'$, такое, что X_ρ и $X_{\rho'}$ гомеоморфны.

Доказательство:

Введём метрику $\rho: X_1\ \times\ X_2\ \times\ \dots \times\ X_N\ \times\ \dots\ \to\ \mathbb{R}$.

Под точками пространства $X = X_1\ \times\ X_2\ \times\ \dots\ \times\ X_N\ \times\ \dots$ можем понимать привычный нам результат декартова произведения: $X=\ (X_1,\ \dots, X_{N,} \dots)$, $y\ = < \cdots >$.

Тогда $\rho(x, y) = \frac{\sqrt{\sum \rho_i^2(x_i, y_i)}}{2^i}$, где суммирование ведётся по индексу i. С помощью введённой метрики мы можем ввести топологию на этом пространстве. Однако на этом пространстве еще может быть введена топология Тихонова с помощью окрестностей вида $O(x)=(x_1 \pm \varepsilon_1, \dots, x_N \pm \varepsilon_N, \dots)$. Нужно заметить, что топология, построенная нами и топология Тихонова совпадают (упражнение - проверить).

Теперь сформулируем теорему:

Теорема 4.

Если X нормальное пространство со счётной базой, то X метризуемо.

Полноценно сформулируем и докажем эту теорему в следующей лекции.

Лекция 7.

Пункт 1. Теорема Урысона о метризуемости.

В прошлой лекции мы определили несколько важных фактов и утверждений, связанных с метризуемостью пространств и их декартовых произведений, а также утвердили, что топология Тихонова и построенная нами напрямую топология с метрикой $\rho(x,y) = \frac{\sqrt{\sum \rho_i^2(x_i,y_i)}}{2^i}$ эквивалентны. Теперь со всей строгостью сформулируем и докажем теорему о метризуемости, которая завершала нашу предыдущую лекцию (теорема 4).

Теорема 1. (Теорема Урысона о метризуемости)

Если топологическое пространство X обладает свойством нормальности и содержит счётную базу, то X метризуемо.

Доказательство:

Если X обладает свойством нормальности и содержит счётную базу, то ∃ f: X → I^N, где I = [0, 1] (гильбертов куб), такое, что f является гомеоморфизмом с образом f(X). Докажем это утверждение:

Заметим, что I – метризуемо ⟹ по лемме из предыдущей лекции I^N также метризуемо. Пусть $\mathscr{B}$ - база топологии в X. Рассмотрим множество (*) {(U, V): U, V ⊂ $\mathscr{B}$, V ⊂ U, $\bar{V}$ ⊂ U}. Так как $\mathscr{B}$ счётно ⟹ $\mathscr{B}^2$ счётно. Тогда занумеруем пары (U, V) как (U_n, V_n). Теперь по лемме Урысона построим следующее семейство отображений:

$\varphi_i: X \to [0,1]. \varphi_i(x) = \begin{cases} 1, x \in V_n \\ 0, x \in X \setminus U_n \end{cases}$

Теперь также по лемме Урысона построим функцию f = $\varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots$. Её можно интерпретировать как f(x)=(φ_1(x), φ_2(x), …). После введенной нами конструкции уместно сделать следующие замечания:

1) f – непрерывна. Читателю рекомендуется самостоятельно воспроизвести доказательство этого очевидного факта.

2) f является инъективной функцией. Действительно, пусть x,y ∈ X – различные элементы. Тогда из построенного выше множества (*) можем определить окрестности точек как $O_x = U_x$, $O_y = X \setminus \overline{U_x}$. Но тогда ⟹ ∃ i, такой, что множество ($X \setminus U_y$, U_x) “эквивалентно” множеству (U_i, V_i) (фактически это просто наглядное построение такого множества).

В таком случае $\varphi_i(x) = 1$

$\varphi_i(y) = 0$ ⟹ f(x) ≠ f(y), так как они отличаются минимум в одном “месте” (то есть отличаются как минимум i-ой координатой) ⟹ f – действительно инъекция.

3) f^{-1} – гомеоморфизм. Читателю рекомендуется самостоятельно воспроизвести доказательство этого очевидного факта (доказательство аналогично п. 1).

Таким образом мы пришли к нашему исходному утверждению: X – метризуемое пространство, что и необходимо было доказать.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим еще одну важную теорему этого курса, доказательство которой зачастую вызывает некоторые сложности, связанные с её теоретико-числовыми свойствами.

Теорема 2. (Теорема Тихонова о компактности)
Пусть X_α, $\alpha \in A$, - компактные пространства. Тогда любое их декартово произведение является компактным пространством, или на языке кванторов: если X_α компактное пространство, то $\forall \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ является компактным пространством.

Доказательство:
Доказательство этой теоремы опирается на две леммы:
Лемма 1. (Куратовского-Цорна)
Если $(X, \leq)$ множество с отношением порядка, тогда $\forall\ Y \subset X$ – линейно упорядоченного подмножества, содержащего максимальный элемент X - максимальный элемент.
Эту лемму мы приводим без доказательства.
Лемма 2. (Александера)
Пусть $\exists$ предбаза $\mathscr{B}$, такая, что $\forall$ покрытия $X = \cup_\alpha U_\alpha$, $U_\alpha \in \mathscr{B}$ можно выделить конечное подпокрытие $\Longrightarrow$ X является компактным.
Мы приведем лишь набросок доказательства этой леммы, предоставив читателю завершить его со всей подобающей строгостью:
Пусть X – не компактно. Тогда пусть u_0 – открытое покрытие, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Рассмотрим множество покрытий U={u, $u_0 \subset u$, u не содержит конечного подпокрытия}. Справедливо следующее замечание:
Множество U является упорядоченным, для него выполняется лемма Куратовского-Цорна $\Longrightarrow \exists$ максимальный элемент max U = b. Дальнейшие рассуждения проделайте самостоятельно.
Теперь вернемся непосредственно к доказательству теоремы Тихонова:
(**) Пусть P_α^{-1} (U) - предбаза, $U_\alpha \subset X_\alpha$. Докажем теперь, что $\exists\ \beta \in A$ – индекс, такой, что P_α^{-1} (β) $\subset$ некоторый элемент покрытия, $x \in X_\beta$.
Предположим противное – пусть $\nexists$ такого индекса β. Это эквивалентно тому, что $\forall$ индекса $\alpha \in A$, $\exists\ x_\alpha \in X_\alpha$, такой, что P_α^{-1} (x_α) $\notin$ элементу покрытия, откуда напрямую следует, что произведение таких множеств не является покрытием, то есть покрытие не является покрытием. Явное противоречие.
Теперь по лемме Александера и из проделанных нами выше рассуждений (см. (**)) теорема Тихонова доказана.
Доказано.

Пункт 2. Связность. Связные множества.

Рассмотрим множества X $= [0,1]$ и $Y = [0,1] \cup [2,3]$. Существует ли гомеоморфизм между этими множествами?
Ответ на этот вопрос можно получить с помощью введения понятия связности.

Определение 1.
Множество X связно, если его нельзя представить в виде следующего объединения множеств: $U \cup V = X,\ U \cap V = \emptyset,$ где U и V являются открытыми множествами.

Замечание: введенное нами определение эквивалентно следующему объединению связного множества:

Определение 2.
Множество X связно, если никакое его подмножество не является одновременно открытым и замкнутым.

Определение 3.
Множество U называется компонентой связности X, если U открыто, замкнуто и связно.

Утверждение 1.
При непрерывном отображении f количество компонент связности множества не изменяется.

Рассмотрим один важный пример: гомеоморфны ли отрезок I и окружность O?

Чтобы дать ответ на этот вопрос выберем произвольную точку x данного отрезка и “выкинем” её, то есть перейдем ко множеству $I\setminus\{x\}$. Аналогично для окружности, но из неё мы будем “выбрасывать” точку $f(x)$, то есть, перейдем ко множеству $O\setminus f(x)$. У множества $I\setminus\{x\}$ две компоненты связности, у множества $O\setminus f(x)$ – одна. Далее см. утверждение 1.

Лекция 8.

Пункт 1. Гомотопии.

В предыдущей лекции мы ввели понятие линейной связности и её компонент. Теперь мы будем подразумевать под топологическими пространствами связные пространства, только если не оговорено обратное. Рассмотрим важную структуру на пространстве – путь и определим гомотопность (эквивалентность) путей. Напомним обозначение: [0,1] = I. Итак,

Определение 1.

Пусть $f, g: I \to X$. Будем говорить, что пути f и g гомотопны $(f \sim g)$, если выполняются следующие свойства:

1) $f(0) = g(0) = x,\ f(1) = g(1) = y$

2) ∃ отображение $H: I \times I \to X$, такое, что

$$H(t,0) = f(t), H(t,1) = g(t), H(0,s) = x, H(1,s) = y$$

Это условие также даёт регулярную гомотопность (“гомотопия с закрепленными концами”).

Наглядно это утверждение можно изобразить, как (см. рис. 8.1):

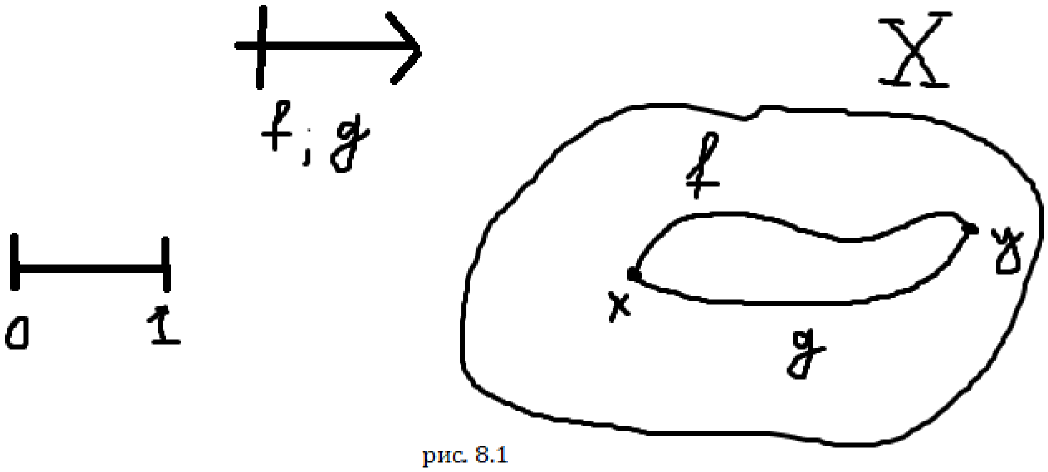

рис. 8.1

Рис. 8.1

Теперь введем важное определение двух путей f и g.

Пусть $x_0 \in X$ – произвольно. Тогда

Определение 2.

Определим произведение путей f и g следующим образом: введем отношение эквивалентности $\pi_1(X, x_0) = \{[f] \mid f: I \to X, f(0)=f(1)=x_1\}$ (можно понимать это множество как некоторое множество петель). Тогда под произведением путей будем понимать следующее отображение:

$$[f]\cdot[g] = \begin{cases} f(2\text{t}), \text{если t} \leq ½ \\ g(2\text{t}) - 1, \text{если t} \geq ½ \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что это отображение является непрерывным. В связи с этим читателю предлагается следующее

Упражнение 1.

Пусть $\text{X} = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 – замкнуты. $f_1: U_1 \to Y$, $f_2: U_2 \to Y$, f_1, f_2 – непрерывны. Доказать, что если $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$, то отображение

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in U_1 \\ f_2(x), & x \in U_2 \end{cases}$$

является непрерывным.

Лемма 1.

Пусть f, f', g, g' – некоторые пути. Тогда если $f \sim f', g \sim g' \Rightarrow f \cdot g \sim f' \cdot g'$. (У всех путей гомотопии разные соответственно).

Доказательство:

Доказательство этой леммы сводится к рассмотрению разбиений квадрата $I \times I$. Построим отображение $H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), \text{если } t \leq ½ \\ G(2t-1,s), \text{если } t \geq ½ \end{cases}$

Это отображение можно проиллюстрировать следующим образом (рис 8.2):

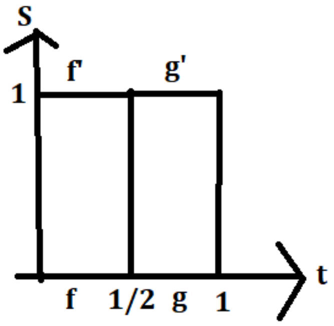

рис. 8.2

Доказательство опирается на следующий факт: π_1 (см. определение 2) с операцией H образует группу. Нам нужно лишь проверить аксиомы ассоциативности, наличия нейтрального и обратного элементов:

1) ассоциативность. Если $f, g, h: I \to X,$ то $(f \cdot g) \cdot h \sim f \cdot (g \cdot h).$ Для доказательства достаточно явно предъявить отображения, которые стоят в левой и правой частях: отображение

$$(f \cdot g) \cdot h = \begin{cases} f(4t), \text{если } t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1), \text{если} \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1), \text{если } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

отображение

$$f \cdot (g \cdot h) = \begin{cases} f(2t), \text{если } t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2\,), \text{если} \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3), \text{если } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Это свойство также можно наглядно изобразить в виде разбиения изображенного на рис. 8.2 квадрата.

2) наличие нейтрального элемента: действительно, рассмотрим $\exists\ e(t) = x_0.$ Тогда f · e ~ e · f ~ f (требует проверки, например можно также изобразить в виде разбиения квадрата).

3) наличие обратного элемента: $\exists\ f^{-1},$ такой, что $f \cdot f^{-1} \sim f^{-1} \cdot f \sim e.$ Такой элемент можно предъявить явно: $f^{-1} = f(1-t).$ Действительно, в таком случае произведение кривых(петель) f и f^{-1} даёт единичную прямую(также можно убедиться наглядно).

Таким образом с помощью утверждения о том, что $\pi_1(X, x_0)$ с операцией H образуют группу получаем, что утверждение леммы верно. (Такие группы называются фундаментальными группами)

Доказано.

Теперь сформулируем и докажем важное утверждение, касающееся изоморфности фундаментальных групп. Итак,

Утверждение 1.

Пусть X – линейно связно, $x_0, y_0 \in X \Longrightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0)$ (эти группы изоморфны).

Доказательство:

Рассмотрим множество кривых с началом в точке x и концом в точке y: $\Omega(X, x, y) = \{f: I \to X, f(0) = x, f(1) = y\}$. Введем операцию умножения таких кривых следующим образом:

$f \times g = \Omega(X,x,y) \times \Omega(X,y,z) = \Omega(X,x,z) = \begin{cases} f(2t), \text{если } t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), \text{если } t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

Интерпретация этой операции очевидна – это кривая с началом в точке x и концом в точке y. Заметим, что для таких кривых выполняется свойство леммы 1: если $f \sim f', g \sim g' \Rightarrow f \cdot g \sim f' \cdot g'$.

Построим гомоморфизм между группами следующим образом: введем отображение $\gamma: I \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$. Тогда изоморфизм γ_* определим так: $\gamma_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0), \gamma_*(f) = \begin{cases} \gamma(-3t+1), \text{если } t \le \frac{1}{3} \\ \gamma(3t-1), \text{если } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ \gamma(3t-2\ ), \text{если } t \ge \frac{2}{3} \end{cases}$

Осталось лишь убедиться в том, что γ_* - гомоморфизм. По определению имеем: $\gamma_*(f) = \gamma^{-1} \cdot f \cdot \gamma$, где $\cdot$ $-$операция в $\Omega(X,x,y)$. Тогда $\gamma_*(f \cdot g) = \gamma^{-1} \cdot f \cdot g \cdot \gamma$

Но в то же время из определения γ_* мы знаем, что $\gamma_*(f) \cdot \gamma_*(g) = \gamma^{-1} \cdot f \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot g \cdot \gamma$ $= \gamma^{-1} \cdot f \cdot g \cdot \gamma = \gamma_*(f \cdot g) \Longrightarrow \gamma_* -$ гомоморфизм. Осталось лишь доказать, что $\gamma_*(f \cdot g)$ – изоморфизм. Для этого достаточно рассмотреть обратное отображение $\gamma_*^{-1}(g) = \gamma \cdot g \cdot \gamma^{-1}$ – которое является изоморфизмом(требует проверки), а следовательно исходное отображение γ_* также является изоморфизмом, что и требовалось доказать.

Утверждение доказано.

Пункт 2. Лемма о гомоморфизмах.
Лемма 2.

Пусть дано непрерывное отображение $f: X \to Y$, базисные(фиксированные) точки x_0, y_0, такие, что $f(x_0) = y_0$. Определим отображение $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$ так, что $f(\gamma) = f \circ \gamma: I \to Y$.

Тогда верны следующие два утверждения:

1) f_* определено корректно, т.е. если $\gamma \sim \gamma' \Longrightarrow f_*(\gamma) \sim f_*(\gamma')$.

2) $f_* -$ гомоморфизм

Доказательство этой леммы мы приведем в следующей лекции.

Лекция 9.

Пункт 1. Функториальные свойства.

В конце прошлой лекции мы ввели лемму о гомоморфизме групп с фиксированными точками. На самом же деле эта лемма является одним из свойств, называемых функториальными свойствами. Сформулируем их ниже, однако доказательство предлагается читателю в виде упражнения.

Функториальные свойства(продолжение леммы 2 из лекции 8):

1) если γ и γ' гомотопны$(\gamma \sim \gamma') \Longrightarrow f \circ \gamma \sim f \circ \gamma'$

2) $f_*([\gamma] \cdot [\delta]) = f_*([\gamma]) \cdot f_*([\delta])$, где $\gamma, \delta \in \pi_1(X, x_0)$(по свойству гомоморфизма)

3) если заданы отображения $f: (X, x_0) \to (Y, y_0), g: (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, тогда $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), g_*: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ и говорят, что f ∘ g индуцирует гомоморфизм $f_* \circ g_*$.

Утверждение: если заданы такие $f, g,$ что

$f \sim g,$ и $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x), H(x_0, t) = x_0, \Longrightarrow f_* = g_*.$

4) Отображение $id: (X, x_0) \to (X, x_0)$ индуцирует тождественный гомоморфизм $(id)_* = id.$

Пункт 2. Накрывающие пространства.

В дальнейшем все рассматриваемые пространства будут считаться линейно связными и линейно локально связными, если не оговорено обратное.

Определение 1.

Пространство X линейно локально связно, если ∀ x ∈ X, U_x – окрестности x ∃ элемент базы V_x, такой, что $V_x \subset U_x$ и V_x линейно связно.

Определение 2.

Накрывающим пространством пространства X называется тройка $(\tilde{X}, X, P)$, где $P: \tilde{X} \to\to X$, такое, что ∀ x ∈ X ∃ U_x, такая, что $P^{-1}(U_x) = \cup_\alpha V_\alpha$ − несвязное объединение и $P|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U_x$ − гомеоморфизм. ($\alpha \in$ A − множество индексов). Накрывающее пространство также называют накрытием.

Примеры накрывающих пространств.

1) а) $P: \mathbb{R} \to S^1$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ и $p(t) = e^{2\pi i t}$

Б) $P: S^1 \to S^1, p(z) = z^k, k \in \mathbb{Z}$

2) (отображение плоскости на двумерный тор) $P: \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$

$p(t, s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$. Для иллюстрации достаточно изобразить двумерную плоскость и вложить в неё клеточное пространство(множество прямых y=const, x=const). Тогда из “склейки маленьких квадратов” получаются “слои” накрытия тора.

Так как накрытие есть суть представления некоторого расслоения, то возникает резонный вопрос о том, как можно оперировать конструкциями самого пространства в накрывающем пространстве.

Пункт 3. Леммы о поднятии.
Лемма 1.(О поднятии пути)

Пусть задано накрытие некоторого пространства X, $f: I \to X, f -$ непрерывно и $\forall\ \widetilde{x_0} \in P^{-1}(f(0)) \Longrightarrow \exists!\ \tilde{f}: I \to\ \tilde{X}$, такое, что $p \circ\ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(0) = \widetilde{x_0}$

Доказательство:

Так как отрезок I является компактом $\Longrightarrow$ из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то есть систему окрестностей. Так как подпокрытие конечно, можем считать, что отрезок I разбит на N частей, а наши “подотрезки” подпокрытия отрезка имеют вид $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$, где $k \geq 0, k \leq N$.

Тогда из условия леммы $\tilde{f}|_{[0,\frac{1}{N}]} = p^{-1} \circ f.$ Далее определяем $\tilde{f}$ на других отрезках по такому же принципу(можем это сделать, так как число отрезков конечно)

В итоге из такого построения мы и получим искомую кривую $\tilde{f}$, то есть существование $\tilde{f}$будет прямым следствием из нашего построения.

Доказано.

Лемма 2. (О поднятии гомотопии)

Если задано накрытие пространства X, отображение $f: I \times I \to X,$ такое, что $f(0, s) = f(0{,}0),\ f(1, s) = f(1{,}0)$, точка $\forall\ \widetilde{x_0} \in P^{-1}(f(0{,}0) = x_0)$.Тогда $\exists!\ \tilde{f}: I \times I \to\ \tilde{X},$ такое, что $\tilde{f}(0{,}0) = \widetilde{x_0}\ \tilde{f}(0, s) = \widetilde{x_0}, \tilde{f}(1, s) = \widetilde{x_1}$

Доказательство:

Доказательство этой леммы в общих чертах имеет сходство с сходство с доказательством предыдущей леммы, однако мы восстановим его с точностью до условия данной леммы.

Аналогично мы можем разбить квадрат I × I не на отрезки, но на прямоугольники. Тогда повторяя предыдущие рассуждения мы можем поднять путь, а как следствие – гомотопию, что и требуется в условии леммы.

Доказано.

Стоит сказать, что леммы 1 и 2 являются частными случаями теоремы о сохранении структур при накрытии, которую мы сформулируем и докажем несколько позже.

Теорема 1(теорема о мономорфизме).

Пусть дано накрытие пространства X, $P: \tilde{X} \to X, P_*: \pi_1(\widetilde{X_0}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X_0, x_0)$. Тогда P_* является мономорфизмом(мономорфность означает, что никакой ненулевой элемент не переходит в ноль или, что тоже самое, если $P_*(\gamma) = 1 \Longrightarrow \gamma = 1$).

Доказательство этой теоремы строится на двух предыдущих леммах, и будет представлено нами в следующей лекции.

Лекция 10.

Пункт 1. Теорема о поднятии гомотопии.

В предыдущей лекции мы сформулировали две важных леммы о поднятии пути и гомотопии, однако при доказательстве мы без строгости отнеслись к факту единственности. Следующая лемма важна является связующим звеном, так как из неё следует единственность конструкций в предшествующих леммах. Итак,

Лемма 1.

Положим X – пространство и ∃ его накрытие. Y – линейно связное и линейно локально связное пространство, $f_0, f_1: Y \to \tilde{X},\ pf_0 = pf_1$. Тогда множество $\{y \in Y, f_0(y) = f_1(y)\}$ является открытым и замкнутым одновременно.

Доказательство:

Докажем открытость этого множества, а доказательство замкнутости оставим читателю в качестве упражнения, так как оно требует тех же рассуждений.

Итак, пусть $y \in Y, f_0(y) = f_1(y)$. Докажем, что ∃ W – окрестность, $y \in W, y' \in W \implies f_0(y) = f_1(y')$. Воспользуемся определением накрытия, то есть найдем такую окрестность W по определению. Это возможно(дабы предотвратить тавтологию: такое множество существует по сути накрывающего пространства и по предположению леммы).

Но тогда $f_0(W) \subset V, f_1(W) \subset V$, где V – связная компонента накрывающего пространства. То есть $f_0(W), f_1(W)$ лежат в одной компоненте накрытия, а значит – условие леммы выполнено.

Доказано.

Теперь сформулируем важную теорему и важные следствия из неё, которые являются своеобразным обобщением последних трех лемм:

Теорема 1.(О поднятии гомотопии)

Пусть дано накрытие пространства X, $f_0, f_1: I \to \tilde{X}, f_0(0) = f_1(0), pf_0 \sim pf_1 -$ гомотопные пути. Тогда $f_0, \sim f_1$.

Доказательство:

Доказательство этой леммы сводится к вопросу о том, что при поднятии гомотопии $P\widetilde{H} = H$, где $\widetilde{H}, H$ соответственно гомотопии. Нетрудно понять, что это утверждение верно и доказательство синонимично доказательству леммы 2 из предыдущей лекции, а следовательно – утверждение теоремы верно.

Доказано.

Следствия из теоремы 1:

А) $f_0(1) = f_1(1)$

Б) Пусть дано накрытие $(X, \tilde{X}, P)$ пространства X, индуцированный гомоморфизм $P_*: \pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ и $p(\widetilde{x_0}) = x_0$. Тогда P_* - мономорфизм.

Доказательство:

А) Напрямую следует из теоремы. Доказано

Б) Заметим, что если [γ] не является тривиальным элементом, то и его образ при отображении P_* не перейдет в нейтральный, что напрямую подтверждает, что P_* - мономорфизм.

Доказано.

Рассмотрим следующие группы $P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$, $P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{y_0})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$, $P(\widetilde{y_0}) = x_0$. По отношению к этим группам справедливо следующее замечание

Замечание 1.

Группы $P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$, $P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{y_0})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$, являются сопряженными.

Доказательство:

Выберем некоторую $\gamma: I \to \tilde{X}$, такую, что $\gamma(0) = \widetilde{x_0}, \gamma(1) = \widetilde{y_0}$ и $p\gamma(0) = p\gamma(0) = x_0$.

Рассмотрим элемент $[f] \in \left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})\right)$ Тогда $[\gamma^{-1} f \gamma] \in \left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{y_0})\right)$. Тогда из построенных структур немедленно вытекает следующее свойство:

$P_*[\gamma^{-1} f \gamma] = [p\gamma^{-1}] \cdot P_*[f] \cdot [p\gamma]$, то есть элементы сопряжены $\Longrightarrow$ группы также сопряжены, что и требовалось доказать.

Доказано.

Верно также и “обратное” **замечание(2)**:

$P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$. Пусть $G \subset \pi_1(X, x_0)$, такая, что $g^{-1} G g = P_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})\right)$.

Тогда $\exists\, \widetilde{y_0} \in P_*^{-1}(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}))$.

Доказательство:

Положим $g: I \to X, g(0) = g(1) = x_0$

Пусть $\tilde{g} -$ поднятие g, то есть $p\tilde{g} = g, \tilde{g}(0) = \widetilde{x_0}, \widetilde{y_0} = \tilde{g}(1) \in P^{-1}(x_0)$.

Дальнейшие рассуждения предлагаются читателю в качестве упражнения (нужно лишь написать аналогичную к замечанию 1 формулу).

Пункт 2. Теорема о связи отображения, накрытия и поднятия.
Теорема 2. (О связи отображения, накрытия и поднятия)

Напомним, что все пространства подразумеваются связными и локально связными.

Пусть даны (Y, y_0), (X, x_0), $(\tilde{X}, \widetilde{x_0})$ и соответственно отображения $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$

$P\colon (\tilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0), f(y_0) = x_0$.

Тогда $\exists\, \tilde{f}\ :\ (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \widetilde{x_0}) \Leftrightarrow\ f_*\pi_1(Y, y_0) \subset\subset P_*\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})$.

Доказательство:

Необходимость практически очевидна: $P_*\left(\tilde{f}_*(a)\right) \in \subset P_*\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0})$.

Пусть $f(y_0) = \widetilde{x_0}$. Рассмотрим некоторую точку $y \in Y$ и построим кривую γ, которая их соединяет. Теперь нужно рассмотреть $f\gamma$:

$f\gamma\colon I \to X, f\gamma(0) = x_0, f\gamma(1) = f(y),$ откуда можно сделать вывод о единственности поднятия кривой($\exists!$ Поднятие кривой). Теперь введем следующее определение для $\tilde{f}$: $\tilde{f}(y) = (\widetilde{f\gamma})(1)$.

Нужно проверить корректность такого определения (зависит ли от кривой γ). Независимость от кривой следует напрямую из условия.

Дальнейшие рассуждения о том, что это определение корректно в том плане, что не зависит от выбора точки y, предлагается проделать самостоятельно (подсказка: для равенства $(\widetilde{f\gamma})(1) = (\widetilde{f\gamma'})(1)$ нужно рассмотреть петлю $\gamma\gamma'^{-1}$).

Таким образом теорема доказана с точностью до последнего рассуждения.

Доказано.

Пример.

Пусть $P\colon \mathbb{R} \to S^1, P(x) = e^{2\pi i x}, Y = S^1$.

Замечание 3.

Если $P\colon \tilde{X} \to X, x, y \in X$. Тогда $P^{-1}(x)$ и $P^{-1}(y)$ равномощны. Мощность этих множеств называется количеством листов накрытия.

Доказательство:

Так как X линейно связно, то $\exists$ путь γ между x и y и $\exists\ \gamma^{-1}=\gamma(1-t)$ – обратный путь. Тогда по пути γ мы можем построить отображение $P^{-1}(x) \to\ P^{-1}(y)$, а по пути $\gamma^{-1}=\gamma(1-t)$ отображение $P^{-1}(y) \to\ P^{-1}(x)$.

Доказано.

Лекция 11.

Пункт 1. Морфизмы.

В предыдущих лекциях мы обсуждали накрывающие пространства(или накрытия) и их свойства. Теперь нашей задачей будет являться классификация этих накрывающих пространств или определение категории накрывающих пространств. Напомним, что все пространства линейно связны и локально линейно связны.

Определение 1.

Пусть X – пространство с накрытием $P_\alpha\colon \widetilde{X_\alpha} \to X, f\colon \widetilde{X_1} \to \ \widetilde{X_2}$ со свойством $p_2 f = p_1$.

Тогда f называется гомоморфизмом(или просто морфизмом) накрывающих пространств.

К этому определению справедливы следующие замечания:

Замечание 1.

Если заданы два морфизма $f\colon \widetilde{X_1} \to \ \widetilde{X_2}, g\colon \widetilde{X_2} \to \ \widetilde{X_3},$ то $g \circ f$ также морфизм.

Проверьте самостоятельно.

Замечание 2.

Если f – морфизм накрытий $\Longrightarrow f$ также накрытие.

Доказательство:

Пусть дано накрытие и f – морфизм. Если мы выберем точку $x \in X$ и $y \in \tilde{X}_1$ то по теореме о поднятии пути $\exists!$ поднятие пути, такое, что $f(\tilde{y}) = y$, что доказывает сюръективность морфизма f.

Осталось лишь убедиться, что $\forall x \in X\, \exists$ окрестность, любая точка которой удовлетворяет условиям морфизма. Это вытекает напрямую из определения(см. определение 1).

Доказано.

Определение 2.

Пусть X – пространство с накрытием $P_\alpha\colon \widetilde{X_\alpha} \to X,\ f\colon \widetilde{X_1} \to \ \widetilde{X_2}$. Тогда f называется изоморфизмом, если $\exists\ g\colon \widetilde{X_2} \to \ \widetilde{X_1}$ со свойством $gf = fg = id$.

Теперь сформулируем важную теорему о существовании изоморфизма двух сопряженных подгрупп.

Теорема 1. (о существовании изоморфизма двух сопряженных подгрупп).

Пусть $\widetilde{x_1} \in \tilde{X}_1,\ \widetilde{x_2} \in \tilde{X}_2, p_1(\widetilde{x_1}) = p_2(\widetilde{x_2}) = x_0,\ P_{1*}\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \widetilde{x_1})\right) \subset \pi_1(X, x_0),$

, $P_{2*}\left(\pi_2(\tilde{X}_2, \widetilde{x_2})\right) \subset \pi_1(X, x_0)$. Тогда $\exists$ изоморфизм $f\colon \widetilde{X_1} \to \ \widetilde{X_2}$, если эти группы сопряжены в $\pi_1(X, x_0)$.

Доказательство:

Пусть $\widetilde{X_1}$, $\widetilde{X_2}$ – накрытия. Тогда для доказательство сводится к вопросу о существовании $f\colon \widetilde{X_1} \to \widetilde{X_2}$. Пусть $\widetilde{x_1} \in \tilde{X}_1, \widetilde{x_2} \in \tilde{X}_2, p_1(\widetilde{x_1}) = p_2(\widetilde{x_2}) = x_0$, где отображения определены как $P_1\colon \widetilde{X_1} \to X, P_2\colon \widetilde{X_2} \to X$.

Тогда $f\colon \widetilde{X_1} \to \widetilde{X_2}$ - есть поднятие проекции P_1. По теореме поднятие существует тогда и только тогда $P_{1*}\left(\pi_2\left(\tilde{X}_1, x_1\right)\right) \subset P_{2*}\left(\pi_2\left(\tilde{X}_2, x_2\right)\right)$.

Поменяем местами $\widetilde{x_1}$ и $\widetilde{x_2}$. Получим включение $P_{1*}\left(\pi_2\left(\tilde{X}_2, \widetilde{x_2}\right)\right) \subset P_{2*}\left(\pi_2\left(\tilde{X}_1, \widetilde{x_1}\right)\right)$ и условие теоремы выполнено.

Доказано.

Пункт 2. Алгебраический сюжет о фундаментальной группе.

Рассмотрим следующий алгебраический сюжет.

Пусть задано накрытие пространства X, $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$. Рассмотрим группу автоморфизмов $f \in Aut(\tilde{X}), pf = p$. Заметим, что $P^{-1}(x_0), x_0 \in X$. Обладает важным свойством.

Замечание 3.

$P^{-1}(x_0), x_0 \in X$ является $\pi_1(X, x_0)$ – пространством.

Доказательство.

Достаточно заметить, что если $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, то $\tilde{x}(\gamma\gamma') = \widetilde{(x\gamma)}\gamma'$

Доказано.

Замечание 4.

Действие транзитивно.

Доказательство:

Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in P^{-1}(x_0)$. Тогда $\tilde{\gamma}\colon I \to \tilde{X}, \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}, \tilde{\gamma}(1) = \tilde{y}$.

Заметим, что $\gamma = p\tilde{\gamma} \Longrightarrow \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \Longrightarrow [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ по лемме о единственности существования пути. Тогда $\tilde{x}[\gamma] = \tilde{y}$, что и утверждалось в условии замечания.

Доказано.

Утверждение 1. (из курса алгебры)

1) Напомним, что стабилизатор точки есть $St(x) = \{g \in \pi_1(X, x_0), gx = x\}$.

Тогда $St(x) = St(y)$.

Перед вторым пунктом утверждения рассмотрим следующий случай. Пусть $P^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}, \gamma \in \pi_1(X, x_0)$ и пусть $f \in Aut(\tilde{X})$ и $f|_{P^{-1}(x)}: P^{-1}(x) \to P^{-1}(x)$.

Проверьте, что $f(\tilde{x})\gamma = f(\tilde{x}\gamma)$.

Определение 3.

Отображение $f: \tilde{X} \to \tilde{X}$ также часто называют движением, скольжением или монодромией.

2) (к утверждению 1) Введенные выше ограничения также образуют группу, которая $\cong NSt(x)/St(x)$. (нормализатор стабилизатора x по стабилизатору x).

Важные следствия из этого утверждения:

Следствия из утверждения 1.

1) $Aut(\tilde{X}) \cong N\, P_*(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}))\ /\ P_*(\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}))$

2) Если $\pi_1(\tilde{X}, \widetilde{x_0}) = 0$, то$Aut(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Пункт 3. Группа автоморфизмов над окружностью
Пример группы автоморфизмов над окружностью.

Пусть дана окружность $S^1, P: \mathbb{R} \to S^1$, где $p(x) = e^{2\pi i x}, \pi_1(\mathbb{R}) = 0$. Построим

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, pT = p$, или, что то же самое, $e^{i\pi T(x)} = e^{i\pi x} \Longrightarrow T(x) = x + k, k \in \mathbb{Z}$.

В таком случае $Aut(\mathbb{R}, P) = \mathbb{Z} \Longrightarrow \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Если $H \subset \mathbb{Z} -$ подгруппа, то H имеет вид $H = k\mathbb{Z}, k = 0,1,2, \ldots$

Тогда структура накрытия выглядит так: $P_k: S_k^1 \to S^1, P_k(z) = z^k$, где $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.

Для неё выполняются следующие ниже условия:

$\pi_1(S_k^1) = \mathbb{Z}, P_{k*}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,то есть P_{k*} есть суть умножение на целое ненулевое число $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$.

Напомним, что по теореме при вложении образа $\exists\, f: S_k^1 \to S_{k'}^1$.

Упражнение 1.

Сколько существует таких отображений $f: S_k^1 \to S_{k'}^1$?

Теперь введем важное определение универсального накрытия.

Определение 4.

Накрытие $\tilde{X}$ называется универсальным если $\pi(\tilde{X}) = 0$.

Следствие из определения 4.

Для любых универсальных накрытий $\tilde{X}$ и $\tilde{X}_1$ $\exists$ морфизм $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}_1$.

Лекция 12.

Пункт 1. Теорема о существовании накрытия.

В предыдущей лекции мы сформулировали и доказали некоторое алгебраическое утверждение. Теперь обобщим его следующим образом: пусть X – некоторое множество, G – группа, действующая на нём и действие этой группы транзитивно. $\varphi \in Aut_G(X)$ и стабилизаторы St(x) всех точек сопряжены. $\varphi: X \to X, \varphi(xg) = \varphi(x)g$.

Нетрудно заметить, что в $P^{-1}(x_0)$ действует $\pi_1(X)$. Тогда верно следующее утверждение:

Утверждение 1.

$Aut_G(X) \cong NSt(x)/\, St(x)$

Доказательство:

1) Пусть $x, y \in X$. Заметим, что если $\varphi(x) = y \Longrightarrow St(x) = St(y)$.

2) Если $St(x) = St(y) \Longrightarrow \exists\ \varphi: X \to X$, такое, что $\varphi(x) = y$

Пусть $z \in X, \varphi(z) = yg$ и тогда $z = xg$. Проверьте единственность такого z и то, что φ не зависит от выбора g.

Теперь пусть $x \in X, S_x = \{y \in X, St(x) = St(y)\}$. Важно заметить следующий факт: на S_x группа $Aut_G(X)$ действует транзитивно и без неподвижных точек.

Вычислим группу напрямую : пусть $g \in G, xg \in\ S_x$. Пусть $St(x) = H$. Тогда верно следующее выражение: $xgh = xg \Longrightarrow ghg^{-1} \in St(x) = H$. Но это условие эквивалентно тому, что $Aut_G(X)\ \cong NH\ /\ H$, что и является условием изоморфности.

Доказано.

Теперь сформулируем и докажем важную теорему о существовании универсального накрытия. Для начала определим понятие полулокального односвязного пространства.

Определение 1.

Пространство X полулокально односвязно, если ∀ x ∈ X существует база окрестностей, такая, что $\pi_1(U) \to\ \pi_1(X)$ – нулевой гомоморфизм.

Теорема 1.(о существовании накрытия)

Пусть X – линейно связно, локально связно и полулокально односвязно. Тогда существует универсальное накрытие P: $\tilde{X} \to X$, т.е. $\pi_1(\tilde{X})$=0.

Доказательство:

Положим $x_0 \in X$. Введем $\tilde{X}$ как $\tilde{X} = \{\gamma: I \to X, \gamma(0) = x_0\}$. Напомним значение гомотопности путей:

$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \exists\ f: I \times I \to X, f(t,0) = \gamma(t), f(t,1) = \gamma'(t), f(0,s), f(1,s) = const$

Теперь построим отображение $P: \tilde{X} \to X$ и введем топологию на $\tilde{X}$ следующим образом: $\alpha \in \tilde{X}, U -$ локально односвязная окрестность конца кривой. Тогда (α, U) образуют топологию в $\tilde{X}$.

Докажем, что отображение P непрерывно и P – накрытие. Действительно:

$\forall x \in X, U_x\ P^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ – дизъюнктивное объединение.

Теперь покажем, что $\tilde{X}$ линейно связно:

Пусть $\gamma_0: I \to X, \gamma_0(t) = x_0, \forall\ t$ и $\gamma: I \to X, \gamma(0) = x_0$. Тогда для того, чтобы доказать, что $\tilde{X}$ линейно связно нужно доказать непрерывность функции $f(t,s) = \begin{cases} \gamma_0, s = 0 \\ \gamma, s = 1 \end{cases}$

Доказательство непрерывности этой функции предоставляется в виде упражнения читателю.

Осталось лишь проверить универсальность $\tilde{X}$, то есть, что $\pi_1(\tilde{X})$=0.

В самом деле, если рассмотреть $P_*\pi_1(\tilde{X}) \subset \pi_1(X)$, то по свойству мономорфизма получим, что $P_*\pi_1(\tilde{X})$ тривиально действует на $P^{-1}(x_0)$, что в свою очередь свидетельствует об универсальности $\tilde{X}$.

Доказано.

Пункт 2. Способ построения накрытия по подгруппе фундаментальной группы.
Теперь обозначим концепцию построения накрытия по подгруппе фундаментальной группы.

Рассмотрим накрытие $P: \tilde{X} \to X, \pi_1(\tilde{X}) = 0.$

Введем отображение $P_1: \tilde{Y}: X,\ P_1\pi_1\left(\tilde{Y}, \widetilde{y_0}\right) = H,$ и $P_1(\widetilde{y_0}) = x_0.$ Тогда верно следующее предложение:

Предложение 1.

$\pi_1(X, x_0)$ действует на $\tilde{X}$

Для доказательства этого факта достаточно построить его геометрическую интерпретацию.

Стоит заметить, что если $H \subset \pi_1(X, x_0)$, то $\tilde{X}$ / H также является накрытием.

Лекция 13.

Пункт 1. Теорема Борсука-Улама.

Теорема 1. (Борсука-Улама)

Не существует непрерывного отображения $f: S^n \to S^{n-1}$, такого, что $f(-x) = -f(x)$.

Вообще говоря, n=2.

Доказательство:

Как мы знаем, на S^2 действует группа $\mathbb{Z}_2$ и $x \mapsto -x$. На S^2 также действует группа $\mathbb{Z}_2$ и $y \mapsto -y$. Пусть $y = f(x)$. Заметим, что действие группы $\mathbb{Z}_2$ и f перестановочны.

Рассмотрим теперь следующие гомеоморфизмы: $P_1: S^2 \to \mathbb{R}P^2$ и $P_2: S^1 \to \mathbb{R}P^1$ (проективные плоскости соответствующих размерностей, которые можно интерпретировать как пространство прямых на плоскости, пересекающих начало координат). Гомеоморфизм P_2 можно проиллюстрировать следующим образом(см рис.13.1).

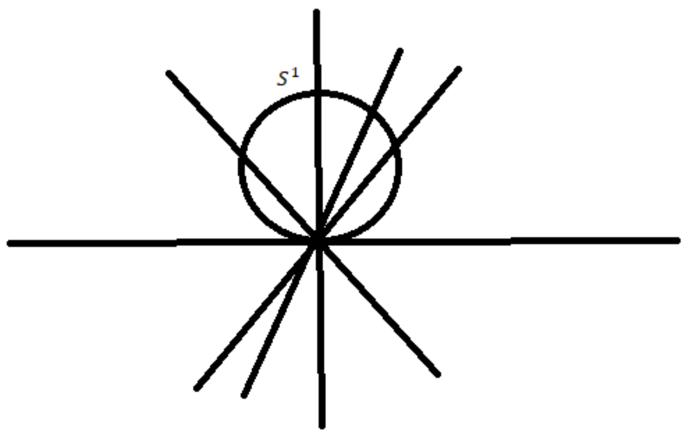

рис 13.1

Теперь пусть $\tilde{f}$: $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^1$, а γ соединяет точки x и $-x$ на сфере. Заметим, что

$[P_1(\gamma)] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$. $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфна S^1, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Тогда $P^2 f(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}$ и $\tilde{f}_*(1) = 1$.

Осталось заметить, что из $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ существует только нулевой гомоморфизм, что и утверждалось в условии теоремы.

Доказано.

Формулировка этой теоремы также имеет следующий вид:

Пусть $f: S^2 \to \mathbb{R}^2, f(-x) = f(x) \Longrightarrow \exists\, x_0 \in S^2$, такое, что $f(x_0) = 0$.

Доказательство:

Положим $\tilde{f}: S^2 \to S^1, f(x) \neq 0, \tilde{f}(x) \in S^1$.

Тогда $\tilde{f}(-x) = -\widetilde{f(x)}$, но далее обратимся к условию теоремы 1. Условие выполнено.

Доказано.

Пункт 2. Графы.
Теперь введем класс топологических пространств, которые называются графами. Итак,

Определение 1.

Пусть X – топологическое пространство, X – хаусдорфово. Пусть $X^0 \subset X$ – множество вершин, то есть X^0 – дискретно. В качестве множества рёбер рассмотрим множество $X \backslash X^0$, которое гомеоморфно $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$, где e_λ гомеоморфно (0, 1).

Теперь введем топологию следующим образом: будем говорить, что $U \subset X$ открыто, если $U \cap \overline{e_\lambda}$ открыто $\forall$ λ. Заметим, что $\overline{e_\lambda} \backslash e_\lambda$ состоит из одной или двух точек(то есть это петля или отрезок). Будем говорить, что граф является конечным, если конечно множество его вершин или множество его ребер, или конечны оба множества. В противном случае будем говорить, что граф является бесконечным. Будем говорить, что граф является локально конечным, если в каждую его вершину входит конечное множество рёбер.

Упражнение 1.

Рассмотрим граф в полярной системе координат, такой, что множество его вершин состоит из полюса и точек, радиус-вектор которых отклонен от оси на угол $\varphi_n = \frac{1}{n}, n \in \in \mathbb{N}$; множество его рёбер состоит, соответственно, из радиус-векторов к этим точкам. Проверьте, что топология любого подмножества плоскости не совпадает с топологией такого графа(последняя называется слабой топологией).

В дальнейшем будем считать, что все графы являются связными.

Теорема 2. (о фундаментальной группе графа)

Пусть X – граф. Тогда $\pi_1(X)$ свободна.

Перед доказательством сформулируем важное алгебраическое следствие:

Следствие из теоремы 2:

Любая подгруппа фундаментальной группы свободна.

Доказательство теоремы 2:

Пусть G_1 и G_2 группы.

Определение 2.

Свободным произведением групп G_1 и G_2 называется группа $G = G_1 * G_2$, обладающая следующим свойством: если $H \subset G$ и существуют гомоморфизмы $i_1: G_1 \to G$, $i_2: G_2 \to G$ и $G_1 \to H$, $G_2 \to H$, то тогда существует гомоморфизм $G \to H$, такой, что общая диаграмма коммутативна, и такой гомоморфизм единственен с точностью до автоморфизма

Доказательство (существования):

Рассмотрим множество “слов” $\Gamma = \{U_1U_2 \dots U_k | U_i \in\ G_1 \text{ или } G_2 \text{ и } U_i, U_{i+1} \notin\ G_k|, \emptyset\}$. На множестве Г действуют группы G_1 и G_2, и их действие определяется так:

$$g(U_1U_2 \dots U_k) = \begin{cases} (gU_1, U_2, \dots U_k), \text{если } g \text{ и } U_1 \in\ G_1 \text{ или } G_2 \\ (gU_1, U_1, U_2 \dots, U_k), \text{если } g \text{ и } U_1 \notin\ G_1 \text{ или } G_2 \end{cases}$$

Замечание 1.

Определены гомоморфизмы $G_1 \to$ группу перестановок Г.

Теперь пусть $G_1 * G_2 \subset$ {группа перестановок Г}.

Пусть $g_1g_2 \dots g_k, g_i \in\ G_k,; g_ig_{i+1} \notin\ G_k$. Таким образом мы построили группу в явном виде, то есть доказали существование свободного произведения.

Упражнение 2.

Докажите, что i_1, i_2 – мономорфизмы.

Таким образом гомоморфизмы $i_1: G_1 \to\ G_1 * G_2$ и $i_2: G_2 \to\ G_1 * G_2$ переводят элемент g в некоторое “слово” {g}.

Определение 3.

G и отображение $i: S \to G$ называется свободной группой на произвольном множестве S, если выполнено следующее универсальное свойство: $\forall H, \forall\, j: S \to H\ \exists!$ гомоморфизм $\pi: G \to H$ и общая диаграмма отображений коммутативна.

Замечание 2.

Из универсальности свойства следует единственность.

Пусть $s \in S$. Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_s$. Тогда справедливо следующее предложение:

Предложение 1.

$G = \prod_{s \in S} \mathbb{Z}_s$ с отображением $i: S \to\ \prod_{s \in S} \mathbb{Z}_s$, $i(s) = 1 \in \mathbb{Z}_s$.

Доказательство:

Пусть $G = \{s_1^{m_1} s_2^{m_2} \dots s_k^{m_k}\}$, $m_i \in \mathbb{Z}, m_i \neq 0$. Произведением таких “слов” определим как формальную запись первого слова и приписанного к нему справа второго. Если показатели “степеней” соседних “букв” в сумме дают ноль, то эти “буквы” можно опустить.

Действие определим аналогично действию из определения 2. Доказано.

Определение 4.

Граф называется деревом, если он не содержит циклов.

Примечание: в данном случае имеются ввиду редуцированные циклы.

Лекция 14.

Пункт 1. Теорема Зейферта-ван-Кампена

В этой лекции мы сформулируем и докажем важную теорему, которая является своего рода еще одним способом вычисления фундаментальной группы – теорему Зейферта-ван-Кампена.

Рассмотрим пространство $X, X = U \cup V$, где U, V – открытые множества и их пересечение связно. Если мы фиксируем точку в их пересечении, то по теореме Зейферта-ван-Кампена мы можем построить важный гомоморфизм, который мы в явном виде зададим в формулировке самой теоремы. В частности, мы можем обобщить это на случай пересечения большого числа множеств ("букета" множеств), однако концепция будет синонимична случаю двух множеств. Итак,

Теорема 1.(Теорема Зейферта-ван-Кампена)

Пусть X – пространство, $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, где $\forall\, U_\alpha$ связно и удовлетворяет следующим свойствам:

1) $U_\alpha \cap\ U_\beta = U_\gamma$ (иногда будем обозначать как $U_{\alpha\beta}$)

2) Каждый элемент связен.

Пусть $x_0 \in\ U_\alpha\ \forall \alpha, U_\alpha \subset\ U_\beta$ и существуют гомоморфизмы следующих групп:

$\pi_1(U_\alpha) \to\ \pi_1(X), ; \pi_1(U_\beta) \to\ \pi_1(X);\ \pi_1(U_\alpha) \to\ \pi_1(U_\beta);\ \rho_\alpha: \pi_1(U_\alpha) \to\ \pi_1(H)$, $\rho_\beta: \pi_1(U_\alpha) \to H$. Тогда существует и единственен гомоморфизм $j: \pi_1(X) \to H.$ (Вся диаграмма является коммутативной).

Перед доказательством теоремы наглядно продемонстрируем ее действие на случае двумерной сферы S^2:

$\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0, \pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$. Действительно, тогда диаграмма выглядит так: $\mathbb{Z} \to \pi_1(U) = 0, \mathbb{Z} \to\ \pi_1(V) = 0$, аналогично построенные гомоморфизмы в $\pi_1(S^2)$ и H. Тогда мы непосредственно можем построить гомоморфизм $\pi_1(S^2) \to H$.

Доказательство теоремы 1:

1) Пусть $\psi|_\alpha: \pi_1(U_\alpha) \to\ \pi_1(X)$. Рассмотрим замкнутую кривую $\beta: I \to X, \beta(0) = \beta(1) = x_0$. Можем разбить β на много "маленьких" кривых $\beta_i, i = 1, \dots k$. Тогда, как нам известно, $\beta \sim \psi|_{\alpha_1}(\beta_1) \cdot \psi|_{\alpha_2}(\beta_2) \cdot \dots \cdot \psi|_{\alpha_k}(\beta_k)$.

Теперь представим I следующим образом: $I = \bigcup_\alpha \beta^{-1}(U_\alpha)$. Пусть ε – символ Лебега для I, то есть существует такой отрезок в I, что его длина меньше ε. "Разобьем" I на N частей с условием, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Тогда, как мы знаем, любую кривую можно "разбить" на произведение "маленьких"(замкнутых!) кривых.

Теперь $J(\beta) = \rho\left(\psi_{\alpha_1}(\beta_1)\right) \cdot \rho\left(\psi_{\alpha_2}(\beta_2)\right) \cdot \dots \rho(\psi_{\alpha_k}(\beta_k))$.

В доказательстве теоремы осталась одна тонкость: мы допустили произвольное разбиение отрезка и произвольную кривую, поэтому нам нужно доказать единственность полученного нами результата(то есть, что при другом разбиении получится тот же элемент).

Пусть $\forall[\gamma] \in \pi_1(U_\alpha), [\gamma] \in \pi_1(U_\beta)$. Из коммутативности диаграммы можем сделать следующий вывод: $\rho(\psi_\alpha[\gamma]) = \rho(\psi_\beta[\gamma])$.

Пусть $\psi_{\alpha_1}[\beta_1] \cdot \psi_{\alpha_2}[\beta_2] \cdot \ldots \cdot \psi_{\alpha_k}[\beta_k] = 1$, откуда незамедлительно следует, что верно и следующее равенство: $\rho[\beta_1] \cdot \rho[\beta_2] \cdot \ldots \rho[\beta_k] =1$. Это можно проверить напрямую, используя “квадрат” гомотопии.

Доказано.

Пункт 2. Теорема о стягиваемости дерева.
Графы также называют одномерными CW-комплексами.

Теорема 2(о свободности группы графа).

Если X – связный граф, то $\pi_1(X)$ – свободная группа.

Доказательство:

Доказательство этой теоремы использует следующие предложения:

Предложение 1. (теорема о стягиваемости дерева)

Если X – связное дерево, то $X \sim$ точке.(То есть X можно стянуть в точку)

Доказательство предложения 1:

Пусть $x_0 \in X$ – фиксировано. Тогда $\forall x \in X$ $\exists$ нередуцированный путь из рёбер между x и x_0. Иными словами, $\exists\, \gamma: I \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$. В предыдущей лекции мы говорили о топологии графа: $\rho(x_0, x) = \#\text{рёбер} + q, q \leq 1$ – эта функция задаёт метрику на графе. Однако, как мы помним, эта метрика не определяет слабую топологию на графе. Таким образом, $H(x,t) = \gamma(t)$ $\forall$ x $\in$ X. Предложение 1 доказано.

Упражнение 1.

Проверьте, что $H(x,t)$ – непрерывная функция.

Предложение 2.

В любом связном графе $X \,\exists\, \tilde{X} \subset X$, где $\tilde{X}$ – максимальное дерево.

Доказательство:

Пусть $x_0 \in X, \tilde{X}$ - максимальное дерево. Нужно лишь доказать, что $\pi_1(X)$ – свободная группа на $X \backslash \tilde{X}$. Однако из предыдущего предложения любое дерево можно стянуть в точку $\Longrightarrow$ условие выполнено. Предложение доказано.

Теорема следует напрямую из предложений.

Доказано.

Пункт 3. Свойство подгруппы свободной группы.
Следствие из теоремы 2.

Любая подгруппа свободной группы свободна.

Доказательство:

Пусть A – некоторое произвольное множество. Рассмотрим граф X, представленный в виде “букета” окружностей: $\mathrm{X} = V_{\alpha \in A} S^1$. Обозначим фундаментальную группу X $\pi_1(X) = F_A$.

Рассмотрим $F' \subset F_A$. Тогда существует накрытие графа X: $\exists\, P\colon \tilde{X} \to X$, которое, в свою очередь, также является графом. Но тогда $P_*\left(\pi_1(\tilde{X})\right) = F'$ - также свободная группа. По определению $F' \subset F_A$, по теореме 2 F_A - свободна $\Longrightarrow$ подгруппа свободной группы свободна, что и необходимо было доказать.

Доказано.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ