

Наумов Дмитрий Вадимович

Конспект лекций

ВВЕДЕНИЕ В СТАНДАРТНУЮ МОДЕЛЬ

Конспект выполнен студенткой физфака МГУ

Андреевой Анной Сергеевной

Оглавление

Лекция 1. Вывод матричного элемента для процесса рассеяния электрона на электроне за счет обмена скалярной частицей	7
Теория Юкавы (продолжение)	7
Вычисление матричного элемента.....	8
Вывод матричного элемента для процесса рассеяния электрона на электроне за счет обмена скалярной частицей.....	10
Лекция 2. Процесс рассеяния электрона на электроне	13
Правила Фейнмана для теории Юкавы	13
S-матричный элемент.....	15
Лекция 3. Потенциальная энергия в квантовой теории поля.....	19
Нерелятивистская квантовая механика	19
Потенциальная энергия.....	22
Лекция 4. Притяжение и отталкивание в рамках квантовой электродинамики ...	25
Рассеяние электрона на μ^-	25
S-матричный элемент во втором порядке.....	28
Правила Фейнмана I	28
Потенциальная энергия	30
Рассеяние электрона на положительном мюоне μ^+	31
Правила Фейнмана II	32
Потенциальная энергия	33
Качественное объяснение притяжения и отталкивания	35
Размерность пространства и взаимодействия.....	37
Лекция 5. Сечение рассеяния Резерфорда (Мотта)	39
Вычисление матричного элемента.....	41
Формула сечения рассеяния Мотта	44
Отличие сечения рассеяния Мотта от сечения Резерфорда	45
Лекция 6. Сечение рассеяния пары электронов и позитронов	47
Переменные Манделштама.....	47
Вычисление квадрата матричного элемента.....	49
Вычисление сечения рассеяния.....	50
Заряды кварков	53
Лекция 7. Эффект Комптона.....	56

Кинематические переменные	56
Диаграмма Фейнмана	57
Матричный элемент и эрмитово сопряжение	58
Выражение для усредненного квадрата матричного элемента	60
Вычисление следа I	61
Лекция 8. Эффект Комптона (продолжение)	63
Вычисление усредненного квадрата матричного элемента	63
Дифференциальное сечение рассеяния	64
Полное сечение	67
Лекция 9. Рассеяние Баба	68
Рассеяние Баба	68
Квадрат матричного элемента	69
Выражение через переменные Манделштама и сечение рассеяния	71
Лекция 10. Калибровочная симметрия	72
Калибровочная симметрия	72
Связь фермионного и электромагнитного поля	75
Скалярная электродинамика	77
Неабелева калибровочная симметрия	78
Преобразование полей A	81
Определение калибровочного инварианта	81
Доказательство калибровочной инвариантности	82
Теория Янга-Миллса	84
Лекция 11. Спонтанное нарушение симметрии. Или откуда у частицы масса?	86
Масса	86
Природа массы	86
Калибровочная теория для кварков	87
Безмассовое скалярное вещественное поле	88
Спонтанное нарушение $U(1)$ симметрии	91
Спонтанное нарушение локальной $U(1)$ симметрии	93
Физика механизма Хиггса	95
Лекция 12. Масса фермиона	99
Физика механизма Хиггса для генерации фермионных масс	99
Уравнение для массового слагаемого	101
Система уравнений в $(1+1)$ -мерном пространстве	103
При $m=0$	103
При $m \neq 0$	103

Спонтанное нарушение неабелевой калибровочной теории.....	105
Лекция 13. Стандартная модель	109
Стандартная модель	109
Лагранжиан Стандартной модели с одним поколением лептонов	112
Массы векторных бозонов.....	114
Лекция 14. Взаимодействие в Стандартной модели	116
Взаимодействие в Стандартной модели.....	116
Взаимодействие с $W^\pm$	116
Взаимодействие с Z и γ	117
Три поколения лептонов в Стандартной модели	118
Взаимодействие с $W^\pm$	120
Взаимодействие с Z и γ	121
Лекция 15. Распад мюона	122
Самодействие векторных бозонов в Стандартной модели.....	122
Распад мюона	123
Ширина распада мюона	127
Время жизни мюона	130
Процесс распада мюона	131
Лекция 16. Распад π-мезона	133
Распад заряженных π -мезонов.....	133
Ширина распада π -мезонов.....	136
Лекция 17. Распад нейтрона.....	139
Распад нейтрона.....	139
Ширина распада нейтрона	141
Лекция 18. Распады τ-лептонов, W-бозонов и Z-бозонов	144
Распад τ -лептона.....	144
Ширина распада τ -лептона.....	146
Распады W -бозонов	147
Полная ширина распада W -бозонов	149
Распады Z -бозонов	150
Ширина распадов Z -бозонов	152
Лекция 19. Распады бозона Хиггса. Взаимодействие нейтрино с электроном	153
Распады бозона Хиггса	153

Ширина распада бозона Хиггса	154
Взаимодействие нейтрино с электроном.....	154
Лекция 20. Рассеяние лептонов на элементарных заряженных частицах.....	159
Рассеяние лептонов на элементарных заряженных частицах	159
Выражение для сечения	161
Лекция 21. Нейтральный ток в рассеянии нейтрино на электроном.....	165
Нейтральный ток в рассеянии нейтрино на электроном	165
Вычисление следа.....	167
Процесс с участием электронного нейтрино	169
Лекция 22. Упругое рассеяние электрона на нуклоне	171
Упругое рассеяние электрона на нуклоне.....	171
Формула Розенблюта	174
Лекция 23. Глубоко-неупругое рассеяние	178
Кинематика глубоко-неупругого рассеяния	178
Формула для сечения рассеяния электронов на протонах в глубоко-неупругом режиме	180
Глубоко-неупругое рассеяние нейтрино на протоне	184
Результаты и итоги	186

Лекция 1. Вывод матричного элемента для процесса рассеяния электрона на электроне за счет обмена скалярной частицей

Теория Юкавы (продолжение)

На прошлой лекции было показано, что

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 | T \exp(+i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)) | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle = \\
 = \left\langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 \left| 1 + (-ig) \int d^4x : \bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \phi_I(x) : + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y T (: \bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \phi_I(x) :: \bar{\psi}_I(y) \psi_I(y) \phi_I(y) :) + \dots \right| \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Ненулевое значение будет иметь третья компонента.

Вспомним, что при получении теоремы Вика была получена связь Т-упорядочение от произведения квантовых операторов с нормальным упорядочением этих операторов и свертков. Изменим теорему, поскольку теперь под знаком Т-упорядочения стоят нормально упорядоченные операторы. Разница в том, что теперь не будут возникать свертки внутри нормального упорядочения. Применим вторую теорему Вика к полученному выражению, введя переобозначение:

$$\psi_I = \psi \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 T (: \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) :: \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) :) = \\
 =: \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) : +: \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) : + \\
 +: \bar{\psi}(x) \overbrace{\psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y)} \psi(y) \phi(y) : +: \bar{\psi}(x) \psi(x) \overbrace{\phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y)} \phi(y) : + \\
 +: \bar{\psi}(x) \psi(x) \overbrace{\phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y)} \phi(y) : +: \bar{\psi}(x) \psi(x) \overbrace{\phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y)} : + \\
 +: \bar{\psi}(x) \overbrace{\psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y)} \psi(y) \phi(y) : +: \bar{\psi}(x) \overbrace{\psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y)} \psi(y) \phi(y) :
 \end{aligned}$$

В зависимости от того, какие начальные и конечные состояния рассматриваются, какие-то слагаемые останутся, а какие-то исчезнут.

При вычислении амплитуды первое слагаемое занулится, поскольку ни в начальном, ни в конечном состоянии нет скалярных частиц. Во втором слагаемом свернута пара фермионных полей, при этом также присутствуют поля $\phi(x)$ и $\phi(y)$, которые содержат операторы рождения и уничтожения. Так, второе слагаемое также не дает вклада в амплитуду. Аналогично не дают вклада в амплитуду третье и седьмое слагаемые.

В восьмом слагаемом все поля свернуты, значит нет ни одного оператора рождения или уничтожения. Тогда все это слагаемое является числом, и если конечное

состояние отличается от начального, то эти состояния ортогональны друг другу, так последнее слагаемое занулится.

Остаются три слагаемых, на которые стоит обратить внимание. В слагаемом $:\bar{\psi}(x)\psi(x)\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(y)}:$ фермионные поля остались несвернутыми, в двух других присутствует по одной дополнительной свертке фермионных полей. Если пара фермионных полей свернута, то их операторы рождения и уничтожения исчезают из этого слагаемого, тогда остается две суммы операторов рождения и уничтожения, дающие 4 нормально упорядоченных слагаемых. В каждом таком слагаемом будет по паре операторов:

$$\begin{aligned} \langle e'_1; e'_2 | : \psi(x)\bar{\psi}(y) : | e_1; e_2 \rangle &\sim \langle e'_1; e'_2 | : (a + b^+)(a^+ + b) : | e_1; e_2 \rangle \sim \\ &\sim \langle e'_1; e'_2 | -a^+a + b^+a^+ + ab + b^+b | e_1; e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Слагаемые с b^+ и b дают нули, поскольку ни в начальном, ни в конечном состояниях нет позитронов.

$$\langle e'_1; e'_2 | -a^+a + b^+a^+ + ab + b^+b | e_1; e_2 \rangle \sim - \langle 0 | a_{p'_1} a_{p'_2} a_k^+ a_q a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle,$$

$$a_q a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle = [\{a_q, a_{p_1}^+\} - a_{p_1}^+ a_q] a_{p_2}^+ | 0 \rangle = \{a_q, a_{p_1}^+\} a_{p_2}^+ | 0 \rangle - a_{p_1}^+ (\{a_q, a_{p_2}^+\} - a_{p_2}^+ a_q) | 0 \rangle.$$

Когда оператор a_q дойдет до правого вакуума, такое слагаемое занулится, останутся две структуры с антикоммутаторами:

$$a_q a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle = \{a_q, a_{p_1}^+\} a_{p_2}^+ | 0 \rangle - a_{p_1}^+ \{a_q, a_{p_2}^+\} | 0 \rangle.$$

Аналогичная ситуация произойдет при движении a_k^+ налево:

$$\langle 0 | a_{p'_1} a_{p'_2} a_k^+ = \langle 0 | a_{p'_1} \{a_{p'_2}, a_k^+\} - \langle 0 | a_{p'_1} a_k^+ a_{p'_2} = \langle 0 | a_{p'_1} \{a_{p'_2}, a_k^+\} - \langle 0 | \{a_{p'_1}, a_k^+\} a_{p'_2}.$$

Покажем на одном из слагаемых, что все такие слагаемые знуляются:

$$\langle 0 | a_{p'_1} \{a_{p'_2}, a_k^+\} \{a_q, a_{p_1}^+\} a_{p_2}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle \{a_{p'_1}, a_{p_2}^+\} \{a_{p'_2}, a_k^+\} \{a_q, a_{p_1}^+\} = 0,$$

поскольку в каждом из антикоммутаторов есть δ -функция от разности импульсов, тогда для получения ненулевого результата необходимо выполнение условий: $p'_2 = k$, $p_1 = q$ и $p'_1 = p'_2$, в то время как изначально требовалось, чтобы начальное и конечное состояния были различными. Остальные 3 слагаемых также приводят к возникновению трех антикоммутаторов, в двух из которых будут присутствовать переменные интегрирования, а третий антикоммутатор будет связывать один из импульсов начального состояния с одним из импульсов конечного состояния. Так, конструкции со свернутыми фермионными полями также приводят к нулевым амплитудам.

Единственной конструкцией, дающей ненулевой вклад в амплитуду является свертка скалярных полей $:\bar{\psi}(x)\psi(x)\overbrace{\phi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y)\phi(y)}:$.

Вычисление матричного элемента

Вычислим матричный элемент

$$\langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 | : \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y) : | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle \overbrace{\phi(x)\phi(y)},$$

где $\overline{\phi(x)\phi(y)}$ – Фейнмановский пропагатор, приводит к тому, что взаимодействие электронов друг с другом может осуществляться за счет обмена скалярной частицей. Такое взаимодействие может быть представлено в виде диаграммы Фейнмана (рис. 1.1). Обмен скалярной частицей соединяет точки x и y .

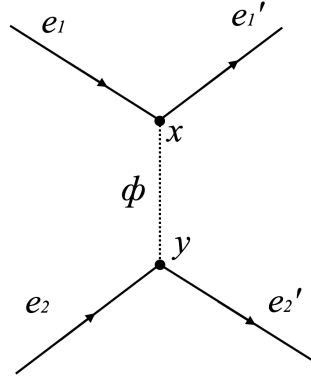


Рис. 1.1. Диаграмма Фейнмана рассеяния электрона на электроном.

Распишем поля в виде операторов рождения и уничтожения:

$$\bar{\psi} = a^+ + b, \quad \psi = a + b^+.$$

При перемножении всех полей получим 16 слагаемых. Однако, ни в начальном, ни в конечном состоянии нет позитронов, поэтому слагаемые, содержащие b и b^+ дадут нули. Поэтому останется одно слагаемое, содержащее только a^+ и a , записанное в нормально упорядоченном виде. Распишем теперь произведения полей в виде интегралов:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 | : \bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y) : | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle \overline{\phi(x)\phi(y)} &= \\
 &= \left\langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 \right| \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^{12} \sqrt{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{k_3} 2E_{k_4}}} : a_{k_1 r_1}^+ a_{k_2 r_2}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_4 r_4}^+ : \times \\
 &\quad \times \bar{u}_{k_1 r_1} u_{k_2 r_2} \bar{u}_{k_3 r_3} u_{k_4 r_4} e^{+ik_1 \cdot x - ik_2 \cdot x + ik_3 \cdot y - ik_4 \cdot y} | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle \overline{\phi(x)\phi(y)} = \\
 &= \left\langle \vec{p}'_1, s'_1; \vec{p}'_2, s'_2 \right| \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4}{(2\pi)^{12} \sqrt{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{k_3} 2E_{k_4}}} (-1) a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} \times \\
 &\quad \times \bar{u}_{k_1 r_1} u_{k_2 r_2} \bar{u}_{k_3 r_3} u_{k_4 r_4} e^{+ik_1 \cdot x - ik_2 \cdot x + ik_3 \cdot y - ik_4 \cdot y} | \vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2 \rangle \overline{\phi(x)\phi(y)}.
 \end{aligned}$$

Проведем вычисление элемента:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{p'_1 s'_1} a_{p'_2 s'_2} a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle &\rightarrow \\
 a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle &= \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle - a_{p_1 s_1}^+ a_{k_4 r_4} a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle = \\
 &= \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle - a_{p_1 s_1}^+ \{a_{k_4 r_4}, a_{p_2 s_2}^+\} | 0 \rangle \rightarrow \\
 a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle &= \{a_{k_2 r_2}, a_{p_2 s_2}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} | 0 \rangle - \{a_{k_2 r_2}, a_{p_1 s_1}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_2 s_2}^+\} | 0 \rangle; \\
 \langle 0 | a_{p'_1 s'_1} a_{p'_2 s'_2} a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ &= \langle 0 | \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_1 r_1}^+\} - \langle 0 | \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_3 r_3}^+\}.
 \end{aligned}$$

Перемножив обе части, получим:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{p'_1 s'_1} a_{p'_2 s'_2} a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle = \\
 = \langle 0 | (\{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_1 r_1}^+\} - \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_3 r_3}^+\}) \times \\
 \times (\{a_{k_2 r_2}, a_{p_2 s_2}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} - \{a_{k_2 r_2}, a_{p_1 s_1}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_2 s_2}^+\}) | 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Если приглядеться, то можно заметить, что внешние импульсы всегда спарены с импульсами интегрирования, поэтому слагаемые дают ненулевой:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{p'_1 s'_1} a_{p'_2 s'_2} a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle = \\
 = \langle 0 | \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{k_2 r_2}, a_{p_2 s_2}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} + \\
 + \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{k_2 r_2}, a_{p_1 s_1}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_2 s_2}^+\} - \\
 - \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{k_2 r_2}, a_{p_1 s_1}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_2 s_2}^+\} - \\
 - \{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{k_2 r_2}, a_{p_2 s_2}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\} | 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Вывод матричного элемента для процесса рассеяния электрона на электроне за счет обмена скалярной частицей

Вычислим итоговый матричный элемент для процесса рассеяния электрона на электроне с обменом скалярной частицей:

$$\begin{aligned}
 \langle e'_1; e'_2 | T \exp(+i \int d^4 x \mathcal{L}_{int}(x)) | e_1; e_2 \rangle = \\
 = \left\langle e'_1; e'_2 \left| \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4 x d^4 y T (\bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \phi_I(x) :: \bar{\psi}_I(y) \psi_I(y) \phi_I(y) : \right| e_1; e_2 \right\rangle = \\
 = \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4 x d^4 y \langle e'_1; e'_2 | \bar{\psi}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) : | e_1; e_2 \rangle \overline{\phi(x) \phi(y)} = \\
 = \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4 x d^4 y \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4}{(2\pi)^{12} \sqrt{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{k_3} 2E_{k_4}}} \bar{u}_{k_1 r_1} u_{k_2 r_2} \bar{u}_{k_3 r_3} u_{k_4 r_4} \times \\
 \times e^{+ik_1 \cdot x - ik_2 \cdot x + ik_3 \cdot y - ik_4 \cdot y} (-1) \sqrt{2E_{p_1} 2E_{p_2} 2E_{p'_1} 2E_{p'_2}} \times \\
 \times \langle 0 | a_{p'_1 s'_1} a_{p'_2 s'_2} a_{k_1 r_1}^+ a_{k_3 r_3}^+ a_{k_2 r_2} a_{k_4 r_4} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ | 0 \rangle \overline{\phi(x) \phi(y)}.
 \end{aligned}$$

Интегралы по x и y снимаются элементарно, все интегралы по импульсам снимаются при помощи δ -функций, присутствующих в антикоммутаторах. Тогда необходимо аккуратно расставить индексы матричных элементов.

Для свертки скалярных полей можно записать:

$$\overline{\phi(x) \phi(y)} = D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_\phi^2} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

Вычислим интегралы по x и y :

$$\int d^4 x e^{+ix \cdot (k_1 - k_2 - p)} = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - p),$$

$$\int d^4y e^{+iy \cdot (k_3 - k_4 + p)} = (2\pi)^4 \delta^4(k_3 - k_4 + p).$$

Произведение двух таких четырехмерных δ -функций приводит к следующему:

$$\begin{cases} k_1 - k_2 - p = 0 \\ k_3 - k_4 + p = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = k_1 - k_2 \\ p = k_4 - k_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$k_1 - k_2 = k_4 - k_3 \text{ или } k_1 + k_3 = k_4 + k_2.$$

Одна из δ -функций может быть потрачена на снятие интеграла по импульсу в пропагаторе скалярного поля.

Продолжим запись. В качестве примера рассмотрим слагаемое

$$\{a_{p'_1 s'_1}, a_{k_3 r_3}^+\} \{a_{p'_2 s'_2}, a_{k_1 r_1}^+\} \{a_{k_2 r_2}, a_{p_2 s_2}^+\} \{a_{k_4 r_4}, a_{p_1 s_1}^+\}.$$

Заметим:

$$\begin{aligned} k_1 = p'_2 &\rightarrow E_{k_1} = E_{p'_2}, \\ k_2 = p_2 &\rightarrow E_{k_2} = E_{p_2}, \\ k_3 = p'_1 &\rightarrow E_{k_3} = E_{p'_1}, \\ k_4 = p_1 &\rightarrow E_{k_4} = E_{p_1}. \end{aligned}$$

Другие слагаемые дают другие комбинации, но абсолютно такое же общее произведение энергий, так, что

$$\sqrt{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{k_3} 2E_{k_4}} = \sqrt{2E_{p_1} 2E_{p_2} 2E_{p'_1} 2E_{p'_2}}.$$

В каждом из антикоммутаторов присутствует $(2\pi)^3$, тогда $(2\pi)^{12}$ сокращается.

Перепишем выражение в более кратком виде и снимем интегралы с помощью δ -функций антикоммутаторов:

$$\begin{aligned} &\langle e'_1; e'_2 | T \exp(+i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)) | e_1; e_2 \rangle = \\ &= \frac{(-ig)^2}{2!} (-1) \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4 \frac{i}{(k_1 - k_2)^2 - m_\phi^2} \bar{u}_{k_1 r_1} u_{k_2 r_2} \bar{u}_{k_3 r_3} u_{k_4 r_4} \langle 0 | \dots | 0 \rangle \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_3 - k_2 - k_4) = \\ &= -\frac{(-ig)^2}{2!} i \left[(2\pi)^4 \delta^4(p'_2 + p'_1 - p_2 - p_1) \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1}}{(p'_2 - p_2)^2 - m_\phi^2} + \right. \\ &\quad + (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \\ &\quad - (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 + p'_1 - p_1 - p_2) \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p'_2 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \\ &\quad \left. - (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_2 - p_1) \frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1}}{(p'_1 - p_2)^2 - m_\phi^2} \right]. \end{aligned}$$

Из δ -функций видно

$$p'_2 - p_2 = -p'_1 + p_1 \rightarrow (p'_1 - p_1)^2 = (p'_2 - p_2)^2,$$

$$p'_2 - p_1 = -p'_1 + p_2 \rightarrow (p'_2 - p_1)^2 = (p'_1 - p_2)^2.$$

Таким образом, полностью выведен матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle e'_1; e'_2 | T \exp(+i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)) | e_1; e_2 \rangle = \\ = -\frac{(-ig)^2}{2!} i \left[2(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \right. \\ \left. - 2(2\pi)^4 \delta^4(p'_2 + p'_1 - p_1 - p_2) \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p'_2 - p_1)^2 - m_\phi^2} \right]. \end{aligned}$$

Лекция 2. Процесс рассеяния электрона на электроне

В прошлой лекции был получен матричный элемент второго порядка $S_{fi}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= \langle e'_1; e'_2 | S | e_1; e_2 \rangle = \\
 &= -(-ig)^2 i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \left[\frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p'_2 - p_1)^2 - m_\phi^2} \right].
 \end{aligned}$$

В предыдущих вычислениях неявным образом было сделано допущение при записи состояния $|e_1, e_2\rangle$:

$$|e_1, e_2\rangle = \sqrt{2E_{p_1} 2E_{p_2}} a_{p_1 s_1}^+ a_{p_2 s_2}^+ |0\rangle.$$

При выборе записи состояния пропадает свобода в определении состояния $\langle e_1, e_2|$:

$$\langle e_1, e_2| = |e_1, e_2\rangle^+ = \sqrt{2E_{p_1} 2E_{p_2}} \langle 0| a_{p_2 s_2} a_{p_1 s_1} \rightarrow$$

$$\langle e'_1, e'_2| = \sqrt{2E_{p'_1} 2E_{p'_2}} \langle 0| a_{p'_2 s'_2} a_{p'_1 s'_1}.$$

Так, в предыдущих записях была допущена ошибка. Это приводит к возникновению дополнительного знака «-», то есть матричный элемент $S_{fi}^{(2)}$ должен быть записан без множителя (-1) :

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= \langle e'_1; e'_2 | S | e_1; e_2 \rangle = \\
 &= (-ig)^2 i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \left[\frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2} - \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p'_2 - p_1)^2 - m_\phi^2} \right].
 \end{aligned}$$

Правила Фейнмана для теории Юкавы

К каждому из алгебраических выражений в скобках можно нарисовать соответствующие изображения и придать им математический смысл. В теории Юкавы электрону, входящему в точку и обладающему импульсом p и проекцией спина s , в соответствие ставится спинор u_{ps} (рис. 2.1 (а)). Электрону, выходящему из точки и обладающему импульсом p и проекцией спина s , в соответствие ставится спинор $\bar{u}_{ps}$ (рис. 2.1 (б)). Точке на диаграмме Фейнмана соответствует выражение $-ig$ (рис. 2.1 (в)).

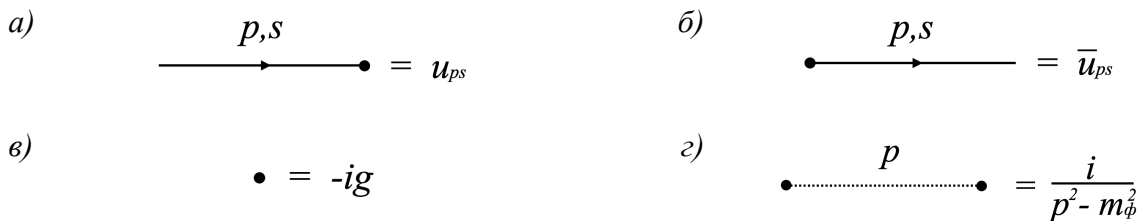


Рис. 2.1. Соответствие элементов диаграмм Фейнмана для теории Юкавы алгебраическим выражениям: электрон с импульсом p и проекцией спина s а) входящий

в точку, б) выходящий из точки; в) точка взаимодействия; г) распространение между двумя точками скалярной частицы.

Проинтерпретируем первое алгебраическое выражение в скобках (рис.2.2 (а)):

$$\frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2}.$$

Пусть есть некоторая точка, в которой электрон испытал взаимодействие. Электрон входит в эту точку с импульсом p_1 и проекцией спина s_1 . После взаимодействия электрон выходит из точки с импульсом p'_1 и проекцией спина s'_1 . Такой переход описывается произведением спиноров $\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1}$. Во вторую точку входит другой электрон с импульсом p_2 и проекцией спина s_2 . После взаимодействия электрон выходит из точки с измененными импульсом p'_2 и проекцией спина s'_2 . Часть $\frac{i}{(p'_1 - p_1)^2 - m_\phi^2}$ алгебраического выражения произошла из свертки скалярных полей. Свертка означает, что ни в начальном, ни в конечном состояниях нет скалярных состояний. То есть скалярное поле появляется только в виртуальном состоянии. Распространение между двумя точками скалярной частицы на диаграммах Фейнмана будем изображать в виде пунктирной линии (рис. 2.1 (г)). Если скалярная частица обладает импульсом p , то ей в соответствие будем ставить выражение $\frac{i}{p^2 - m_\phi^2}$. Тогда для рассматриваемого случая рассеяния электрона на электроне импульс скалярной частицы $q = p_1 - p'_1$, значит для конечного импульса второго электрона можно записать

$$p'_2 = p_2 + q = p_2 + p_1 - p'_1.$$

Если теперь обратить внимание на закон сохранения импульса, то увидим то же самое:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \rightarrow p'_2 = p_1 + p_2 - p'_1.$$

Так, закон сохранения энергии-импульса выполняется.

Проинтерпретируем второе слагаемое в скобках (рис. 2.2 (б)):

$$\frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p'_2 - p_1)^2 - m_\phi^2}.$$

В первую точку входит электрон с импульсом p_1 и проекцией спина s_1 . После взаимодействия электрон выходит из точки с импульсом p'_2 и проекцией спина s'_2 . Во вторую точку входит другой электрон с импульсом p_2 и проекцией спина s_2 . После взаимодействия электрон выходит из точки с измененными импульсом p'_1 и проекцией спина s'_1 . Между этими двумя точками пролетает скалярная частица, передающая энергию и импульс с импульсом $q = p_1 - p'_2$. Тогда для конечного импульса второго электрона

$$p'_1 = p_2 + q = p_2 + p_1 - p'_2,$$

что согласуется с законом сохранения энергии-импульса.

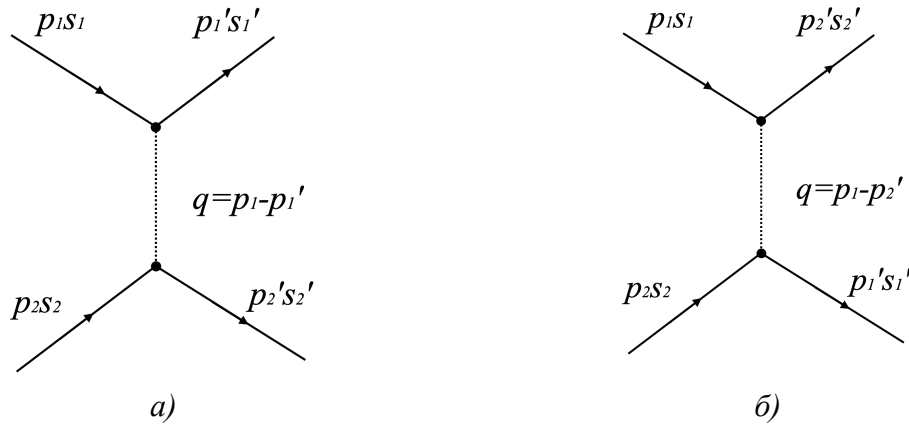


Рис. 2.2. Диаграммы Фейнмана для алгебраических выражений:

$$a) (-ig)^2 \frac{i}{(p_1' - p_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}_{p_1' s_1'} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p_2' s_2'} u_{p_2 s_2}, \quad б) (-ig)^2 \frac{i}{(p_2' - p_1)^2 - m_\phi^2} \bar{u}_{p_2' s_2'} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p_1' s_1'} u_{p_2 s_2}.$$

Диаграммы отличаются тем, что поменяны местами конечные состояния электронов. При такой замене диаграммы вычитаются одна из другой за счет принципа Паули.

Введенные правила относятся к первой части правил Фейнмана для теории Юкавы, в которой электроны взаимодействуют с некоторым скалярным полем. Такое графическое изображение алгебраических выражений полезно, поскольку при рассмотрении других процессов, например, взаимодействия электрона и позитрона или электрона с мюоном, после всех выкладок всегда будет получено что-то очень похожее, всегда строящееся в виде диаграмм Фейнмана.

Например, рассмотрим рассеяние электрона на электроне с обменом скалярной частицей:

$$e_1 + e_2 \rightarrow e_1' + e_2'.$$

Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -g\bar{\psi}\psi\phi,$$

то есть все поля сходятся в одной точке. Такому случаю соответствует диаграмма Фейнмана, представленная на рисунке. По правилам Фейнмана такую диаграмму легко переписать в виде алгебраических выражений.

S-матричный элемент

Вернемся к исследованию притяжения и отталкивания в рамках квантовой теории поля.

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) i\mathcal{M}_{fi},$$

В нерелятивистской квантовой механике получено следующее:

$$S_{fi} = -i2\pi\delta(E_{p'} - E_p) \tilde{V}(\vec{q}).$$

В случае квантовой теории поля при рассмотрении рассеяния без классических потенциалов возникает четырехмерная δ -функция. Однако рецепт остается тем же самым. Будем считать, что $(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$ аналог $i2\pi\delta(E_{p'} - E_p)$, тогда чтобы получить Фурье-образ потенциала в рамках квантовой теории поля запишем

$$\tilde{V}(\vec{q}) = - \frac{\mathcal{M}_{fi}}{\prod_i \sqrt{2E_{p_i}} \prod_f \sqrt{2E_{p_f}}} = - \frac{\mathcal{M}_{fi}}{(2m)^2},$$

поскольку потенциал в рамках квантовой теории поля имеет смысл только в нерелятивистском приближении, где энергии примерно равны массе.

Кроме того, поскольку в рамках квантовой теории поля электроны – тождественные частицы, то возникает разность диаграмм (алгебраических выражений). Однако для вычисления потенциала и сравнения его с ожиданием нужно рассмотреть только одну из диаграмм. Пройгнорируем второе слагаемое, чтобы избавиться от эффекта, связанного с квантовой тождественностью частиц. Тогда

$$i\mathcal{M}_{fi} = (-ig)^2 i \frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p_1 - p'_1)^2 - m_\phi^2},$$

$$\tilde{V}(\vec{q}) \approx - \frac{\mathcal{M}_{fi}}{(2m)^2} = +g^2 \frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p_1 - p'_1)^2 - m_\phi^2} \frac{1}{(2m)^2}.$$

Для 4-импульса в нерелятивистском приближении можно записать следующее:

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i) \approx (m, \vec{p}_i) \rightarrow$$

$$(p_1 - p'_1)^2 = (E_{p_1} - E_{p'_1})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 \approx -(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = -\vec{q}^2,$$

для спиноров:

$$u_{p_1 s_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{p_1} + m} \chi_{p_1 s_1} \\ \sqrt{E_{p_1} - m} s_1 \chi_{p_1 s_1} \end{pmatrix} \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{p_1 s_1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}_{p'_1 s'_1} \approx \sqrt{2m} (\chi_{p'_1 s'_1}^+, 0) \gamma^0,$$

$$\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \approx 2m (\chi_{p'_1 s'_1}^+, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{p_1 s_1} \\ 0 \end{pmatrix} = 2m (\chi_{p'_1 s'_1}^+, 0) \begin{pmatrix} \chi_{p_1 s_1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2m \chi_{p'_1 s'_1}^+ \chi_{p_1 s_1} = 2m \delta_{s_1 s'_1}.$$

Тогда в нерелятивистском приближении квантовой теории поля потенциал имеет вид:

$$\tilde{V}(\vec{q}) \approx g^2 \frac{(2m) \delta_{s_1 s'_1} 2m \delta_{s_2 s'_2}}{(2m)^2 (-\vec{q}^2 - m_\phi^2)} = -g^2 \frac{\delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2}}{\vec{q}^2 + m_\phi^2}.$$

Так, в скалярном поле в нерелятивистском приближении за счет обмена квантом скалярного поля спин электрона не переворачивается: $s_1 = s'_1, s_2 = s'_2$.

Запишем теперь выражение для потенциальной энергии:

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{V}(\vec{q}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{\vec{q}^2 + m_\phi^2}$$

Перейдем в сферическую систему координат и вычислим интеграл. В качестве оси z выберем вектор $\vec{x}$, тогда скалярное произведение будет пропорционально косинусу угла между векторами $\vec{q}$ и $\vec{x}$, а от угла φ ничего не зависит.

$$V(\vec{x}) = -\frac{(2\pi)g^2}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{+iqx\cos\theta}}{q^2 + m_\phi^2} = -\frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{+iqx} - e^{-iqx}}{iqx(q^2 + m_\phi^2)}$$

С помощью замены переменных $q \rightarrow -q$ во втором слагаемом сведем выражение к виду:

$$V(\vec{x}) = -\frac{g^2}{4\pi^2 ix} \int_{-\infty}^\infty dq q \frac{e^{+iqx}}{q^2 + m_\phi^2}.$$

Перейдем в комплексную плоскость и воспользуемся теоремой о вычетах. q – комплексная величина, x – положительная величина, тогда

$$e^{+iqx} = e^{+i(\text{Re } q + i \text{Im } q)x} = e^{i \text{Re } q \cdot x} e^{-\text{Im } q \cdot x}.$$

Для того чтобы $e^{-\text{Im } q \cdot x}$ на нужной дуге превращалась в ноль, необходимо чтобы $\text{Im } q$ была положительной. В таком случае контур интегрирования необходимо замыкать сверху. Контур интегрирования изображен на рисунке 2.3. Определим полюса:

$$q^2 + m_\phi^2 = (q + im_\phi)(q - im_\phi).$$

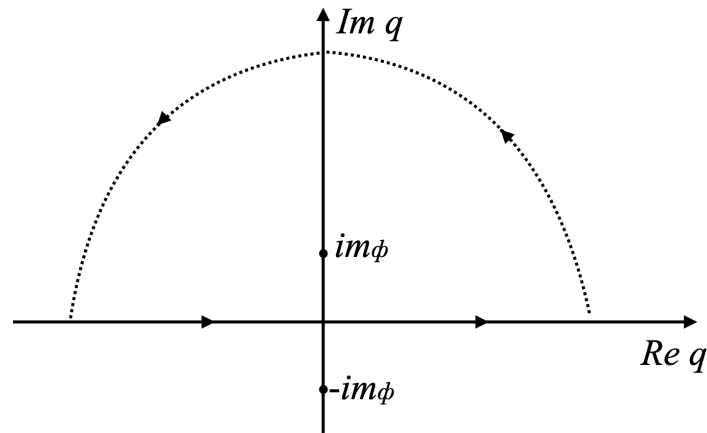


Рис. 2.3. Контур интегрирования.

Внутри контура попадает полюс $\text{Im } q = im_\phi$. Тогда весь интеграл можно записать следующим образом:

$$V(\vec{x}) = -\frac{g^2}{4\pi^2 ix} 2\pi i \frac{e^{i(im_\phi)x}}{2im_\phi} im_\phi = -\frac{g^2}{4\pi x} e^{-m_\phi x}.$$

Так, получен **притягивающий потенциал Юкавы**:

$$V(\vec{x}) = -\frac{g^2}{4\pi x} e^{-m_\phi x}.$$

Обмен скалярной частицей между двумя электронами приводит к тому, что эти электроны притягиваются. Если бы масса скалярной частицы была нулевой, то полученный потенциал описывал бы кулоновское взаимодействие. При ненулевой массе потенциал экспоненциально затухает.

Лекция 3. Потенциальная энергия в квантовой теории поля

В прошлой лекции была получена потенциальная энергия взаимодействия двух электронов за счет обмена виртуальным квантом скалярного поля. Вернемся теперь к вопросу, касающегося множителя $(2\pi)^3 \delta^3(p_f - p_i)$, который не был учтен при расчете матричного элемента. Покажем, что такой подход является верным.

Нерелятивистская квантовая механика

Вспомним нерелятивистскую квантовую механику. Для дифференциального сечения в единичный телесный угол справедливо следующее:

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{НКМ}} = \frac{|\tilde{V}(\vec{q})|^2}{4\pi^2} \mu^2,$$

где μ – приведенная масса. В случае рассеяния частицы на потенциале приведенная масса равна массе частицы ($\mu = m$), при рассеянии частицы на частице $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, где m_1 и m_2 массы взаимодействующих частиц.

Вычислим теперь величину $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ в квантовой теории поля и сравним $|\tilde{V}(\vec{q})|^2$ с квадратом матричного элемента, полученного ранее. Запишем сечение взаимодействия $p_1 + p_2 \rightarrow k_1 + k_2$:

$$d^6\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |i\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}}.$$

Динамика такого взаимодействия скрыта в матричном элементе, $|i\mathcal{M}|^2$. Снимем 4 интеграла из 6. Сначала проинтегрируем выражение по одному из импульсов, воспользовавшись трехмерной δ -функцией:

$$d^3\sigma = \int \frac{d^6\sigma}{d^3k_2} d^3k_2 = \frac{1}{64\pi^2} \frac{\delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_{k_1} - E_{k_2}) |i\mathcal{M}|^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d^3k_1}{E_{k_1} E_{k_2}} \Big|_{\vec{k}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1}$$

Перейдем в систему центра масс сталкивающихся частиц. В системе центра масс импульсы начальных частиц одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны, поэтому $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ (переобозначения вводиться не будут), тогда $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$. Также введем **Мандельштамовские переменные**:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_{p_1} + E_{p_2})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2.$$

Записанное в таком виде выражение справедливо в лабораторной системе отсчета. Поскольку квадрат 4-вектора – это релятивистски инвариантная величина, то s не зависит от системы отсчета, значение будет таким же и в системе центра масс. При переходе в систему центра масс $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$ зануляется, а $E_{p_1} + E_{p_2}$ становится полной энергией. Так, s имеет смысл квадрата полной энергии в системе центра масс. При этом справедлива и другая запись:

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \rightarrow$$

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 &= \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4} = \\ &= \frac{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 + m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4} = \\ &= \frac{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4}. \end{aligned}$$

В свою очередь, $d^3 k_1$ в системе центра масс можно представить в виде:

$$d^3 k_1 = dk_1 k_1^2 d\Omega_{k_1},$$

где $d\Omega_{k_1}$ – телесный угол вдоль направления k_1 . Воспользуемся соотношением

$$E^2 = \vec{k}^2 + m^2 \rightarrow E dE = \vec{k} d\vec{k} = k dk$$

и упростим выражение для $d^3 k_1$:

$$d^3 k_1 = dk_1 k_1^2 d\Omega_{k_1} = E_{k_1} dE_{k_1} k_1 d\Omega_{k_1}.$$

Тогда с помощью $\delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_{k_1} - E_{k_2})$ можно снять интеграл по энергии, тогда останется только величина телесного угла:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_{k_1}} &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \frac{dE_{k_1} E_{k_1} k_1}{E_{k_1} E_{k_2}} \delta\left(\sqrt{s} - E_{k_1} - \sqrt{m_2^2 + k_1^2}\right) = \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \frac{dk_1 k_1^2}{E_{k_1} E_{k_2}} \delta\left(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + k_1^2} - \sqrt{m_2^2 + k_1^2}\right). \end{aligned}$$

По определению δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(g(x)) f(x) = [y = g(x), dy = g'(x) dx] = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{dy}{g'(x)} \delta(y) f(x) = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}.$$

Тогда вычислим интеграл:

$$g(k_1) = \sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + k_1^2} - \sqrt{m_2^2 + k_1^2},$$

$$|g'(k_1)| = \frac{k_1}{E_{k_1}} + \frac{k_1}{E_{k_2}} = k_1 \left(\frac{1}{E_{k_1}} + \frac{1}{E_{k_2}} \right) = k_1 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} = k_1 \frac{\sqrt{s}}{E_{k_1} E_{k_2}} \rightarrow$$

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_{k_1}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{k_1^2}{E_{k_1} E_{k_2}} \frac{E_{k_1} E_{k_2}}{k_1 \sqrt{s}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2 k_1}{\sqrt{s} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}.$$

Теперь определим k_1 , являющееся решением уравнения

$$\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + k_1^2} - \sqrt{m_2^2 + k_1^2} = 0.$$

Воспользуемся скалярными произведениями четырехмерных векторов.

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(k_1 \cdot k_2) \rightarrow$$

$$(k_1 \cdot k_2) = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2},$$

в то же время

$$(k_1 + k_2) \cdot k_1 = m_1^2 + (k_1 \cdot k_2),$$

причем такое скалярное произведение может быть раскрыто в системе центра масс покомпонентно:

$$(k_1 + k_2) \cdot k_1 = (E_{k_1} + E_{k_2}) \cdot E_{k_1} - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{k}_1.$$

В системе центра масс $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$, тогда

$$(k_1 + k_2) \cdot k_1 = (E_{k_1} + E_{k_2}) \cdot E_{k_1} = \sqrt{s} \cdot E_{k_1} \rightarrow$$

$$\sqrt{s} \cdot E_{k_1} = m_1^2 + \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2} \rightarrow$$

$$E_{k_1} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}.$$

Зная энергию E_{k_1} , можно определить k_1 :

$$k_1^2 = E_{k_1}^2 - m_1^2 = \frac{(s + m_1^2 - m_2^2)^2}{4s} - \frac{4sm_1^2}{4s} =$$

$$= \frac{1}{4s} (s^2 + 2s(m_1^2 - m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 4sm_1^2) =$$

$$= \frac{1}{4s} (s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2).$$

Ранее было получено

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = \frac{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4} \rightarrow$$

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = k_1^2 s.$$

Подставим все полученные результаты в выражение для $\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_{k_1}}$:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_{k_1}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}}{2\sqrt{s}} \times$$

$$\times \frac{2}{\sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}} \rightarrow$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{k_1}} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|i\mathcal{M}|^2}{s}.$$

Потенциальная энергия

Сравним полученную формулу с формулой для нерелятивистской квантовой механики.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{НКМ}} &= \frac{|\tilde{V}(\vec{q})|^2}{4\pi^2} \mu^2, \\ \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{КТП}} &= \frac{|i\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s}. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{НКМ}} &= \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{КТП}} \rightarrow \frac{|\tilde{V}(\vec{q})|^2}{4\pi^2} \mu^2 = \frac{|i\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \rightarrow \\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2 &= \frac{|i\mathcal{M}|^2}{16s\mu^2} \rightarrow |\tilde{V}(\vec{q})| = \frac{|i\mathcal{M}|}{4\sqrt{s}\mu}. \end{aligned}$$

Распишем множители в нерелятивистском приближении:

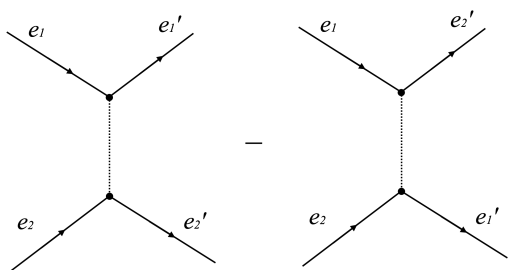
$$\begin{aligned} s &= (E_1 + E_2)^2 \approx (m_1 + m_2)^2, \\ \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Подставим полученные результаты в выражение для $|\tilde{V}(\vec{q})|$:

$$|\tilde{V}(\vec{q})| = \frac{|i\mathcal{M}|(m_1 + m_2)}{4(m_1 + m_2)m_1 m_2} = \frac{|i\mathcal{M}|}{4m_1 m_2} = \frac{i\mathcal{M}}{(2m_1)(2m_2)}.$$

Полученные результаты будут использоваться и в дальнейших вычислениях.

Вспомним теперь другое допущение. При рассмотрении задачи о рассеянии электрона на электроне появлялись 2 диаграммы (рис. 2.2). Однако для вычисления потенциала взаимодействия была использована только одна из них. Теперь можем вычислить потенциальную энергию, не пренебрегая вторым слагаемым. Распишем разность диаграмм:



$$= i\mathcal{M} = (-ig)^2 i \left[\frac{\bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_2 s_2}}{(p_1 - p'_1)^2 - m_\phi^2} - \frac{\bar{u}_{p'_2 s'_2} u_{p_1 s_1} \bar{u}_{p'_1 s'_1} u_{p_2 s_2}}{(p_1 - p'_2)^2 - m_\phi^2} \right].$$

$$\begin{aligned}
 (p_1 - p'_1)^2 &= (E_{p_1} - E_{p'_1})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = -\vec{q}^2, \\
 (p_1 - p'_2)^2 &= (E_{p_1} - E_{p'_2})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_2)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}'_2)^2, \\
 \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}'_1 = \vec{q} = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}'_2 = \vec{q} + \vec{p}_2 \rightarrow \\
 (p_1 - p'_2)^2 &= -(\vec{p}_1 - \vec{p}'_2)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{q})^2.
 \end{aligned}$$

Введем обозначение $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \Delta\vec{p}$, тогда

$$(p_1 - p'_2)^2 = -(\vec{q} - \Delta\vec{p})^2.$$

Закончим теперь вычисление разности диаграмм:

$$i\mathcal{M} = ig^2 \left[\frac{\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'}}{\vec{q}^2 + m_\phi^2} - \frac{\delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'}}{(\vec{q} - \Delta\vec{p})^2 + m_\phi^2} \right]$$

Фурье-образ первого слагаемого приводит к потенциалу Юкавы. Рассмотрим теперь оба слагаемых:

$$V(\vec{x}) = -g^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left[\frac{\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'}}{\vec{q}^2 + m_\phi^2} - \frac{\delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'}}{(\vec{q} - \Delta\vec{p})^2 + m_\phi^2} \right]$$

Для интегрирования второго слагаемого введем замену переменных $\vec{q}' = \vec{q} - \Delta\vec{p}$:

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{q}\cdot\vec{x}} \frac{\delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'}}{(\vec{q} - \Delta\vec{p})^2 + m_\phi^2} = \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} e^{+i\Delta\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{+i\vec{q}'\cdot\vec{x}} \frac{\delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'}}{\vec{q}'^2 + m_\phi^2}.$$

Тогда:

$$V(\vec{x}) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_\phi x}}{|x|} [\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - e^{+i\Delta\vec{p}\cdot\vec{x}} \delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'}].$$

Полученная потенциальная энергия не вещественная из-за присутствия экспоненты. Если мыслить в терминах потенциалов и потенциальных энергий, то стоит рассмотреть случай $\Delta\vec{p} = 0$, когда экспонента обращается в 1. Тогда импульсы сталкивающихся электронов одинаковы. Если в начальном состоянии импульсы фермионов одинаковы, то может возникнуть ситуация, в которой такая пара фермионов не может существовать – если проекции спинов начальных фермионов также одинаковы.

Рассмотрим ситуацию, когда импульсы и спины электронов одинаковы:

$$\Delta\vec{p} = 0, \quad s_1 = s_2 \rightarrow$$

$$\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - e^{+i\Delta\vec{p}\cdot\vec{x}} \delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'} = \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - \delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'} = \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_1 s_2'} - \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_1 s_1'} = 0.$$

Так, в квантовой теории поля в силу принципа Паули потенциальная энергия между электронами с одинаковыми импульсами и одинаковыми проекциями спина равна нулю.

Во втором случае $\Delta\vec{p} = 0$, $s_1 \neq s_2$, и пусть $s_1 = 1$, $s_2 = -1$:

$$\delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'} - e^{+i\Delta\vec{p}\cdot\vec{x}} \delta_{s_1 s_2'} \delta_{s_2 s_1'} = \delta_{1 s_1'} \delta_{-1 s_2'} - \delta_{1 s_2'} \delta_{-1 s_1'}.$$

Если $s'_1 = 1$, $s'_2 = -1$, то

$$\delta_{1 s_1'} \delta_{-1 s_2'} - \delta_{1 s_2'} \delta_{-1 s_1'} = \delta_{11} \delta_{-1-1} - \delta_{1-1} \delta_{-11} = \delta_{11} \delta_{-1-1} = +1.$$

То есть в таком случае получаем притягивающий потенциал. Если $s'_1 = -1$, $s'_2 = 1$, то

$$\delta_{1s_1}\delta_{-1s_2'} - \delta_{1s_2'}\delta_{-1s_1'} = \delta_{1-1}\delta_{-11} - \delta_{11}\delta_{-1-1} = -\delta_{11}\delta_{-1-1} = -1.$$

В таком случае получаем отталкивающий потенциал.

Так, потенциал Юкавы является только притягивающим в том случае, когда пренебрегают второй обменной диаграммой. В случае учета квантовой статистики возникает или притяжение, или отталкивание в зависимости от того, куда направлены спины электронов.

Лекция 4. Притяжение и отталкивание в рамках квантовой электродинамики

Рассеяние электрона на μ^-

Выпишем Лагранжиан взаимодействия в рамках квантовой электродинамики:

$$\mathcal{L}_{int} = e: \bar{\psi}(x) \gamma^\alpha \psi(x) A_\alpha(x):.$$

Определим частицы, взаимодействие которых хотели бы изучить. В прошлых лекциях было рассмотрено рассеяние электронов друг на друге за счет обмена скалярной частицей. Вычисление было достаточно длинным из-за того, что электроны – тождественные частицы и надо учитывать большее число слагаемых. Ожидается, что одноименные заряды отталкиваются, выясним, воспроизводит ли квантовая электродинамика эти ожидания. Рассмотрим разные частицы, но с одноименными зарядами. Пусть в начальном состоянии есть электрон и мюон:

$$|i\rangle = |e^-(p_1), \mu^-(p_2)\rangle.$$

В конечном состоянии получаем те же частицы, но с другими импульсами:

$$|f\rangle = |e^-(p'_1), \mu^-(p'_2)\rangle.$$

Матричный элемент, в общем виде может быть записан в виде:

$$S_{fi} = \langle f | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)} | i \rangle.$$

В рассматриваемом случае будут интересовать второй порядок. При этом появляется деталь, которую необходимо учесть: во взаимодействии участвуют частицы двух видов, а записанный Лагранжиан содержит только некоторое фермионное поле. Пусть $\psi_e(x)$ – электронное поле, $\psi_\mu(x)$ – мюонное поле. Лагранжиан взаимодействия может быть записан в виде суммы:

$$\mathcal{L}_{int} = e: \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x): + e: \bar{\psi}_\mu(x) \gamma^\alpha \psi_\mu(x) A_\alpha(x):.$$

Рассмотрим матричный элемент во втором порядке:

$$S_{fi}^{(2)} = \left\langle \mu', e' \left| T \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) \right| \mu, e \right\rangle.$$

Зададим начальное состояние:

$$|\mu, e\rangle = \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} a_e^+(\vec{p}_1, s_1) a_\mu^+(\vec{p}_2, s_2) |0\rangle,$$

тогда состояние $\langle \mu, e |$ однозначно определено – эрмитово сопряжение к оператору $|\mu, e\rangle$:

$$\langle \mu', e' | = \sqrt{2E_{p'_1}} \sqrt{2E_{p'_2}} \langle 0 | a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2) a_e(\vec{p}'_1, s'_1).$$

Определим теперь, что стоит в обкладках матричного элемента. Рассмотрим произведение Лагранжианов, каждый из которых представляет собой сумму двух слагаемых. Мысленно проведем некоторые вычисления. Произведение двух Лагранжианов даст 4 слагаемых. Появятся произведение электронных операторов,

зависящих от x и электронных операторов, зависящих от y , а также аналогичное произведение мюонных операторов. Еще два слагаемых – перекрестные. Если все операторы слагаемого только электронные, то мюонные начальные и конечные состояния занулят такое слагаемое. Если все операторы слагаемого только мюонные, то электронные начальные и конечные состояния занулят это слагаемое. Остается рассмотреть только перекрестные члены:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2!} \langle \mu', e' | \int d^4x d^4y T [: \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x) :: \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y) : + \\ + : \bar{\psi}_\mu(x) \gamma^\mu \psi_\mu(x) A_\mu(x) :: \bar{\psi}_e(y) \gamma^\beta \psi_e(y) A_\beta(y) :] | \mu, e \rangle.$$

Переставим множители второго слагаемого и поменяем местами индексы α и β :

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2!} \langle \mu', e' | \int d^4x d^4y T [: \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x) :: \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y) : + \\ + : \bar{\psi}_e(y) \gamma^\alpha \psi_e(y) A_\alpha(y) :: \bar{\psi}_\mu(x) \gamma^\beta \psi_\mu(x) A_\beta(x) :] | \mu, e \rangle.$$

Для второго слагаемого поменяем названия переменных интегрирования. Тогда увидим, что слагаемые полностью эквивалентны. Тогда можем записать:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2!} \langle \mu', e' | \int d^4x d^4y T : \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x) :: \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y) : | \mu, e \rangle.$$

Воспользуемся теоремой Вика, вспомним, что каждый из операторов – трехмерный интеграл от суммы операторов рождения и уничтожения со своими волновыми функциями в импульсном представлении. По теореме Вика T -упорядочение можно записать в виде нормального упорядочения как сумму всевозможных сверток. Если под знаком T -упорядочения стоит нормальное упорядочение, то вторая теорема Вика формулируется также, за исключением отсутствия сверток внутри нормально упорядоченных структур. Распишем T -упорядочения через вторую теорему Вика, учтем, что свертки полей разной структуры и природы зануляются, тогда

$$T[\dots] = N [\bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x) \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y) + \\ + \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) \overline{A_\alpha(x) \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y)}].$$

Легко сообразить, что в первом слагаемом из-за присутствия неспаренных электромагнитных полей будут присутствовать их операторы рождения и уничтожения. Поскольку нет фотонов ни в начальном, ни в конечном состояниях, то в обкладках начального и конечного состояния такое слагаемое дает ноль. Тогда остается единственное слагаемое:

$$T[\dots] = N [\bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) \overline{A_\alpha(x) \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y)}].$$

Матричный элемент может быть записан в виде:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2!} \langle \mu', e' | \int d^4x d^4y : \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) \overline{A_\alpha(x) A_\beta(y)} : | \mu, e \rangle,$$

где $\overline{A_\alpha(x)A_\beta(y)}$ – фейнмановский пропагатор электромагнитного поля, может быть вынесен из-под знака матричного элемента.

Вычислим сначала матричный элемент, содержащий мюонные операторы:

$$\begin{aligned}
 \langle \mu' | : \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : | \mu \rangle &= \sqrt{2E_{p_2} 2E_{p'_2}} \langle 0 | a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2) : \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : a_\mu^\dagger(\vec{p}_2, s_2) | 0 \rangle = \\
 &= \sqrt{2E_{p_2} 2E_{p'_2}} \langle 0 | a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2) \int \frac{d^3 k_2 d^3 k'_2}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{k_2} 2E_{k'_2}}} \times \\
 &\quad \times [a_\mu^\dagger(\vec{k}'_2, r'_2) \bar{u}_{k'_2 r'_2} e^{+ik'_2 \cdot y} + b_\mu(\vec{k}'_2, r'_2) \bar{v}_{k'_2 r'_2} e^{-ik'_2 \cdot y}] \gamma^\beta \times \\
 &\quad \times [a_\mu(\vec{k}_2, r_2) u_{k_2 r_2} e^{-ik_2 \cdot y} + b_\mu^\dagger(\vec{k}_2, r_2) v_{k_2 r_2} e^{+ik_2 \cdot y}] : a_\mu^\dagger(\vec{p}_2, s_2) | 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Посмотрим на слагаемые, содержащие операторы рождения и уничтожения μ^+ : b_μ и $b_\mu^\dagger$. Ни в начальном, ни в конечном состоянии нет μ^+ , значит при любом упорядочении в результате переставлений оператор b_μ может дойти до правого вакуума, что приведет к занулению слагаемого, или $b_\mu^\dagger$ может дойти до левого вакуума, что также приведет к занулению. В таком случае остается единственное слагаемое:

$$\begin{aligned}
 \langle \mu' | : \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : | \mu \rangle &= \\
 &= \sqrt{2E_{p_2} 2E_{p'_2}} \langle 0 | a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2) \int \frac{d^3 k_2 d^3 k'_2}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{k_2} 2E_{k'_2}}} a_\mu^\dagger(\vec{k}'_2, r'_2) a_\mu(\vec{k}_2, r_2) \bar{u}_{k'_2 r'_2} \gamma^\beta u_{k_2 r_2} \\
 &\quad \times e^{+i(k'_2 - k_2) \cdot y} a_\mu^\dagger(\vec{p}_2, s_2) | 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Оператор уничтожения будем перемещать к правому вакууму, оператор рождения – к левому вакууму. Когда $a_\mu(\vec{k}_2, r_2)$ дойдет до $a_\mu^\dagger(\vec{p}_2, s_2)$, то можно будет записать:

$$a_\mu a_\mu^\dagger = -a_\mu^\dagger a_\mu + \{a_\mu, a_\mu^\dagger\},$$

но слагаемое $-a_\mu^\dagger a_\mu$ заканчивается на a_μ , уничтожающее вакуум. Так, вклад в матричный элемент дает только слагаемое с антикоммутирующим. Аналогично для $a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2)$ и $a_\mu^\dagger(\vec{k}'_2, r'_2)$. Распишем антикоммутирующие:

$$\begin{aligned}
 \{a_\mu(\vec{k}_2, r_2), a_\mu^\dagger(\vec{p}_2, s_2)\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{p}_2) \delta_{r_2 s_2}, \\
 \{a_\mu(\vec{p}'_2, s'_2), a_\mu^\dagger(\vec{k}'_2, r'_2)\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}'_2 - \vec{k}'_2) \delta_{s'_2 r'_2}.
 \end{aligned}$$

δ -функции антикоммутирующих снимают интегралы по k_2 и k'_2 , δ -символы снимают суммирование по r'_2 и r_2 , $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Тогда можем записать ответ:

$$\langle \mu' | : \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : | \mu \rangle = \bar{u}_{p'_2 s'_2} \gamma^\beta u_{p_2 s_2} e^{+i(p'_2 - p_2) \cdot y}.$$

Аналогичные вычисления можно провести для матричного элемента, содержащего электронные операторы:

$$\langle e' | : \bar{\psi}_e(x) \gamma^\beta \psi_e(x) : | e \rangle = \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\beta u_{p_1 s_1} e^{+i(p'_1 - p_1) \cdot x}.$$

S-матричный элемент во втором порядке

Теперь можно выписать S -матричный элемент во втором порядке:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= (ie)^2 \bar{u}_{p'_2 s'_2} \gamma^\beta u_{p_2 s_2} \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \int d^4 x d^4 y e^{+i(p'_2 - p_2) \cdot y} e^{+i(p'_1 - p_1) \cdot x} \overline{A_\alpha(x) A_\beta(y)} = \\ &= (ie)^2 \bar{u}_{p'_2 s'_2} \gamma^\beta u_{p_2 s_2} \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \int d^4 x d^4 y e^{+i(p'_2 - p_2) \cdot y} e^{+i(p'_1 - p_1) \cdot x} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} e^{-iq(x-y)} \end{aligned}$$

Интегрировать в первых двух интегралах необходимо только экспоненты. Вспомним

$$\begin{aligned} \int d^4 x e^{iqx} &= (2\pi)^4 \delta^4(q) \rightarrow \\ \int d^4 y e^{+i(p'_2 - p_2) \cdot y} e^{+iqy} &= (2\pi)^4 \delta^4(p'_2 - p_2 + q), \\ \int d^4 x e^{+i(p'_1 - p_1) \cdot x} e^{-iqx} &= (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_1 - q). \end{aligned}$$

Одну из δ -функций можно использовать при снятии интеграла по четырехмерному импульсу q . Тогда получаем ответ

$$S_{fi}^{(2)} = (ie)^2 \bar{u}_{p'_2 s'_2} \gamma^\beta u_{p_2 s_2} \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_2 - p'_1) \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(p_1 - p'_1)^2}.$$

Во-первых, из этого выражения можно получить потенциальную энергию взаимодействия электрона и мюона. Во-вторых, можно сформулировать большую порцию правил Фейнмана.

Правила Фейнмана I

В выражении для S -матричного элемента появляются фермионные токи, которые содержат:

- спиноры, относящиеся к входящим частицам ($u_{p_2 s_2}, u_{p_1 s_1}$),
- спиноры, относящиеся к выходящим частицам ($\bar{u}_{p'_2 s'_2}, \bar{u}_{p'_1 s'_1}$),
- константы взаимодействия,
- пропагатор электромагнитного поля $\left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{(p_1 - p'_1)^2} \right)$.

Распишем эту конструкцию в виде правил Фейнмана.

Пусть есть фермион с импульсом p и проекцией спина s , входящий в некоторую точку взаимодействия. Такой конструкции соответствует спинор u_{ps} (рис. 4.1 (а)). Если фермион выходит из точки с импульсом p и проекцией спина s , то ему соответствует спинор $\bar{u}_{ps}$ (рис. 4.1 (б)). Точка взаимодействия, в которой связаны фермионные и электромагнитные поля в квантовой электродинамике, соответствует $ie\gamma^\alpha$ (рис. 4.1 (в)). Между двумя точками со своими индексами проходит виртуальный квант

электромагнитного поля, который несет некоторый 4-импульс q . Ему соответствует конструкция $\frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2}$ (рис. 4.1 (г)).

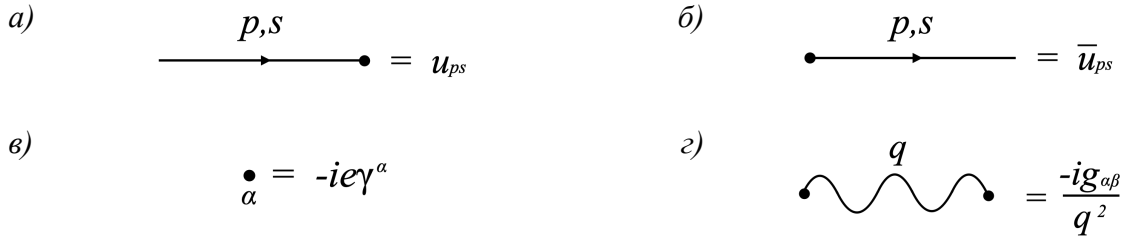


Рис. 4.1. Соответствие элементов диаграмм Фейнмана для квантовой электродинамики алгебраическим выражениям: фермион с импульсом p и проекцией спина s а) входящий в точку, б) выходящий из точки; в) точка взаимодействия; г) распространение между двумя точками виртуального кванта электромагнитного поля.

Пусть

$$S_{fi}^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) i\mathcal{M}_{fi},$$

Тогда для матричного элемента $i\mathcal{M}_{fi}$ в рассматриваемом случае взаимодействия электрона и мюона можно изобразить диаграмму, представленную на рисунке 4.2. Время на изображенной диаграмме течет вдоль оси, направленной слева направо.

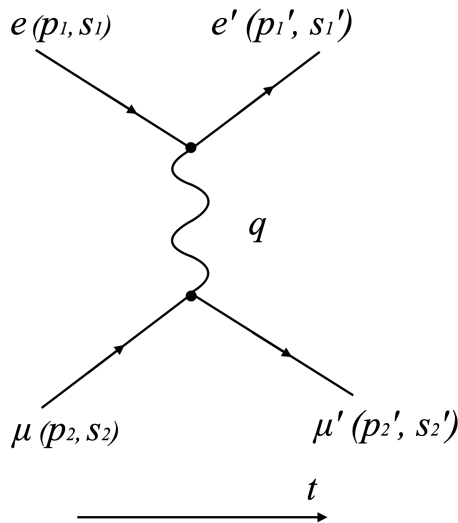


Рис. 4.2. Диаграмма Фейнмана взаимодействия электрона и мюона в квантовой электродинамике.

С помощью правил Фейнмана преобразуем изображение в алгебраическое выражение. Будем двигаться против движения тока, начнем с электрон, для него можно записать следующее выражение: $\bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1}$. Распространение между двумя точками виртуального электромагнитного кванта может быть записано как $\frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2}$. Осталось записать выражение для мюонного тока, также будем двигаться справа налево, тогда

получим $\bar{u}_{p'_2s'_2} ie\gamma^\beta u_{p_2s_2}$. Итоговое выражение для матричного элемента $i\mathcal{M}_{fi}$ имеет следующий вид:

$$i\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}_{p'_1s'_1} ie\gamma^\alpha u_{p_1s_1} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} \bar{u}_{p'_2s'_2} ie\gamma^\beta u_{p_2s_2}.$$

Так, представление взаимодействия в виде диаграммы Фейнмана и использование правил Фейнмана значительно упрощает вычисление матричного элемента. Для этого необходимо записать соответствующий Лагранжиан взаимодействия в теории, определить, какие правила Фейнмана соответствуют данному Лагранжиану, построить диаграмму, соответствующую процессу, и выписать матричный по правилам Фейнмана.

Потенциальная энергия

Вернемся к вопросу о том, какому знаку потенциальной энергии соответствует рассматриваемое электро-мюонное взаимодействие. Вычислим потенциальную энергию, распишем матричный элемент:

$$i\mathcal{M}_{fi} = (ie)^2 \bar{u}_{p'_2s'_2} \gamma^\beta u_{p_2s_2} \bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1s_1} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{u}_{p'_2s'_2} \gamma^\alpha u_{p_2s_2} \bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_\alpha u_{p_1s_1}.$$

Вспомним правило:

$$\tilde{V}(\vec{q}) = -\frac{\mathcal{M}}{2m_e 2m_\mu},$$

где m_e – масса электрона, m_μ – масса мюона. Тогда

$$\tilde{V}(\vec{q}) = -\frac{e^2}{q^2} \frac{\bar{u}_{p'_2s'_2} \gamma^\alpha u_{p_2s_2} \bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_\alpha u_{p_1s_1}}{2m_e 2m_\mu}.$$

Для этого выражения можно посчитать обратный Фурье-интеграл и получить потенциальную энергию. Воспользуемся результатами предыдущего вычисления.

Сначала перейдем к нерелятивистскому пределу. Тогда нулевая компонента четырехмерного вектора имеет вид:

$$\bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_0 u_{p_1s_1},$$

пространственная компонента:

$$\bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_i u_{p_1s_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В общем релятивистском случае оба тока могли бы быть одного порядка. В нерелятивистском пределе $\bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_i u_{p_1s_1}$ пропорционально скорости электронов $v_e \ll 1$. Тогда это слагаемое в нерелятивистском пределе мало. При этом

$$\bar{u}_{p'_1s'_1} \gamma_0 u_{p_1s_1} = u_{p'_1s'_1}^+ \gamma_0 u_{p_1s_1} = u_{p'_1s'_1}^+ u_{p_1s_1}.$$

Решение для фермионного поля в импульсном представлении имеет вид:

$$u_{ps} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \chi_s \\ \sqrt{E_p - m} s \chi_s \end{pmatrix}.$$

В нерелятивистском пределе $E_p \sim m$, тогда

$$u_{ps} \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит

$$u_{p'_1 s'_1}^+ u_{p_1 s_1} \approx \sqrt{2m_e} \sqrt{2m_e} \chi_{s'_1}^+ \chi_{s_1} = 2m_e \delta_{s_1 s'_1}.$$

Аналогично для мюонного тока.

Для q^2 можно записать:

$$q^2 = (p_1 - p'_1)^2 = (E_{p_1} - E_{p'_1})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2.$$

В нерелятивистском пределе:

$$q^2 \approx -(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = -\vec{q}^2.$$

Подставим полученные результаты в начальную формулу:

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{e^2}{\vec{q}^2} \frac{2m_e \delta_{s_1 s'_1} 2m_\mu \delta_{s_2 s'_2}}{2m_e 2m_\mu} = \frac{e^2}{\vec{q}^2} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2}.$$

Так, при взаимодействии электрона и мюона спины частиц не переворачиваются в нерелятивистском пределе. Тогда получаем предельно простое выражение для Фурье-образа потенциальной энергии. Откуда, сравнив с вычислением, проделанным для случая рассеяния электрона на электроны за счет обмена скалярной частицей, получаем:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{V}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}} = \frac{e^2}{4\pi r}.$$

Полученный потенциал для случая взаимодействия одноименно заряженных фермионов положителен, соответственно отвечает отталкиванию частиц друг от друга.

Рассеяние электрона на положительном мюоне μ^+

Рассмотрим теперь рассеяние электрона на положительном мюоне:

$$e^- + \mu^+ \rightarrow e^{-'} + \mu^{+'}.$$

Выясним, предсказывает ли квантовая электродинамика притяжение между этими частицами. Проведем вычисление из первых принципов и получим вторую часть правил Фейнмана для античастиц.

Запишем S-матричный элемент во втором порядке:

$$S_{fi}^{(2)} = \langle e^{-'}, \mu^{+'} | \frac{(i)^2}{2!} \int d^4 x d^4 y T[\mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y)] | e^-, \mu^+ \rangle.$$

Из произведения Лагранжианов останется только одно удвоенное перекрестное слагаемое, содержащее электронные и мюонные члены:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \\ &= \langle e^{-'}, \mu^{+'} | (i)^2 \int d^4 x d^4 y T [e: \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) A_\alpha(x): e: \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) A_\beta(y):] | e^-, \mu^+ \rangle. \end{aligned}$$

При преобразовании Т-упорядочения к нормальному упорядочению по теореме Вика единственным ненулевым слагаемым остается свертка электромагнитного поля:

$$S_{fi}^{(2)} = \langle e^{-}, \mu^{+} | (ie)^2 \int d^4x d^4y : \bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : \overline{A_\alpha(x) A_\beta(y)} | e^{-}, \mu^{+} \rangle.$$

В отличие от предыдущего случая в нормальном упорядочении полей теперь выживают слагаемые, содержащие операторы рождения или уничтожения μ^{+} . Рассмотрим мюонный ток:

$$\begin{aligned} : \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : &= \\ &= \int \frac{d^3k_2 d^3k'_2}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{k_2} 2E_{k'_2}}} : [b_\mu(k'_2, r'_2) \bar{v}_{k'_2 r'_2} e^{-ik'_2 y} + \dots] \gamma^\beta [\dots \\ &+ b_\mu^+(k_2, r_2) v_{k_2 r_2} e^{+ik_2 y}] :. \end{aligned}$$

При рассмотрении задачи рассеяния электрона на электроне было показано, что античастиц в таком взаимодействии нет, операторы изначально нормально упорядочены. Теперь операторы $b_\mu(k'_2, r'_2)$ и $b_\mu^+(k_2, r_2)$ не стоят нормально упорядоченным образом. Тогда при нормальном упорядочении фермионных операторов появится дополнительный знак «-». Этот знак приведет к изменению знака потенциальной энергии:

$$: \bar{\psi}_\mu(y) \gamma^\beta \psi_\mu(y) : = (-1) \int \frac{d^3k_2 d^3k'_2}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{k_2} 2E_{k'_2}}} b_\mu^+(k_2, r_2) b_\mu(k'_2, r'_2) \bar{v}_{k'_2 r'_2} \gamma^\beta v_{k_2 r_2} e^{+i(k_2 - k'_2)y}.$$

Теперь вспомним, что под знаком нормального упорядочения должны быть упорядочены все операторы, включая электронные:

$$\bar{\psi}_e(x) \gamma^\alpha \psi_e(x) \sim a_e^+(k'_1, r'_1) a_e(k_1, r_1).$$

Перемножим электронную и мюонную части, после чего проведем нормальное упорядочение:

$$: a_e^+(k'_1, r'_1) a_e(k_1, r_1) b_\mu^+(k_2, r_2) b_\mu(k'_2, r'_2) : = a_e^+(k'_1, r'_1) b_\mu^+(k_2, r_2) b_\mu(k'_2, r'_2) a_e(k_1, r_1).$$

Основываясь на предыдущих выкладках, запишем ответ:

$$S_{fi}^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) i\mathcal{M}_{fi},$$

$$i\mathcal{M}_{fi} = -(ie)^2 \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \cdot \bar{v}_{p_2 s_2} \gamma^\beta v_{p'_2 s'_2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} = -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}_{p'_1 s'_1} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \cdot \bar{v}_{p_2 s_2} \gamma_\alpha v_{p'_2 s'_2}.$$

Для мюонного тока как будто поменялись местами начальное и конечное состояния.

Правила Фейнмана II

Сначала представим алгебраическое выражение $i\mathcal{M}_{fi}$ в виде изображения. Линия электрона аналогична линии электрона для взаимодействия электрона и отрицательного мюона. Также сохраняется квант электромагнитного поля. Выясним, что соответствует

выражению $\bar{v}_{p_2 s_2} \gamma_\alpha v_{p'_2 s'_2}$. Входящее состояние $v_{p'_2 s'_2}$ обладает импульсами и спинами конечного состояния. Так, античастица движется против времени (рис. 4.3).

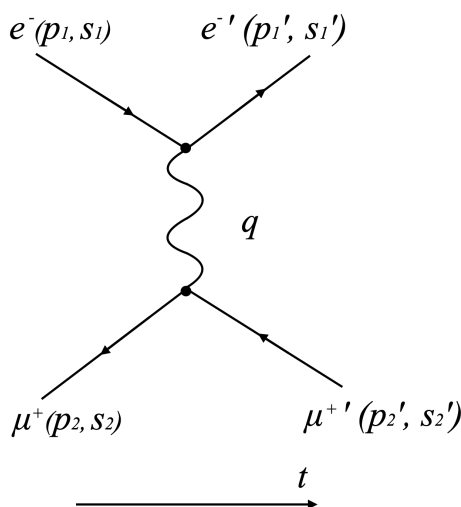


Рис. 4.3. Диаграмма Фейнмана взаимодействия электрона и положительного мюона в квантовой электродинамике.

Сформулируем правила Фейнмана для античастиц, добавим их к первой порции правил. Если античастица выходит из точки, то ей в соответствие ставится $\bar{v}$ (рис. 4.4 (а)), если входит в точку, то v (рис. 4.4 (б)).



Рис. 4.4. Соответствие элементов диаграмм Фейнмана для квантовой электродинамики алгебраическим выражениям: античастица с импульсом p и проекцией спина s а) входящая в точку, б) выходящая из точки.

Ранее встречалась аналогичная интерпретация: античастица – частица, движущаяся в обратном направлении по времени.

Правила Фейнмана для точки взаимодействия останутся неизменным. Потому что если учесть минус, возникающий для античастиц, то возникла бы трудность. В некоторых диаграммах Фейнмана в точке встречаются частицы и античастицы, такие диаграммы приводи ли бы к неоднозначности. Знак будет учитываться как общий множитель линии античастицы.

Потенциальная энергия

Вернемся к определению знака потенциала. Вычисления будут похожи на сделанные ранее. Будем рассматривать нерелятивистский предел. В этом пределе выживает только индекс $\alpha = 0$, вклад остальных компонент пренебрежимо мал, $q^2 \approx -\vec{q}^2$. Рассмотрим отдельно выражение для мюонного тока:

$$\bar{v}_{p_2 s_2} \gamma_0 v_{p'_2 s'_2} = v_{p_2 s_2}^+ \gamma_0 \gamma_0 v_{p'_2 s'_2} = v_{p_2 s_2}^+ v_{p'_2 s'_2} = 2m_\mu \chi_{s_2}^+ \chi_{s'_2} = 2m_\mu \delta_{s_2 s'_2}.$$

Для Фурье-образа потенциальной энергии можем записать:

$$\tilde{V}(\vec{q}) = -\frac{\mathcal{M}}{2m_e 2m_\mu} = -\frac{e^2}{\vec{q}^2} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} \rightarrow V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi r}.$$

Такой потенциальной энергии соответствует притяжение.

Итак, квантовая электродинамика правильно описывает отталкивание одноименных зарядов, притяжение разноименных зарядов. Кроме того, были получены две порции правил Фейнмана, которые описывают частицы и античастицы, входящие и выходящие из вершин, сами вершины и пропагатор электромагнитного поля. Этот набор правил достаточен, чтобы вычислить некоторое сечение.

Подведем итоги и качественно обсудим полученные результаты. Итак, в рамках квантовой электродинамики рассмотрено рассеяние электрона на μ^- и получен отрицательный знак потенциальной энергии. Для рассеяния электрона на μ^+ получен притягивающий знак потенциальной энергии. Также были сформулированы правила Фейнмана, позволяющие ставить в соответствие процессам диаграммы, способствующие вычислению матричных элементов.

Пусть электрон из начального состояния переходит в конечное состояние в результате обмена виртуальным фотоном с мюонной линией μ^- . Такая диаграмма приводит к отталкиванию, как и ожидается. Обсудим сам факт обмена виртуальной частицей, это достаточно важная концепция в квантовой теории поля.

Каждой из частиц во вселенной соответствует некоторое квантовое поле, которое постоянно колеблется. Если придать полю энергию, большую соответствующего возбуждения (больше массы частицы), то по поверхности «матраца» пойдет возбуждения. Это возбуждение воспринимается как точечная частица, например, электрон. То же самое относится к мюону. Поля не чувствуют друг друга. Если электронное возбуждение встретится с мюонным, то поля пройдут друг сквозь друга без изменений. При этом электромагнитное поле связано и с электронным, и с мюонным, и с другими полями. Оно может получить часть возбуждения от электронного поля, возбудиться само и передать это возбуждение другому полю, например, мюонному. Таким образом, взаимодействие между электронами и мюонами в рамках квантовой теории поля всегда возникает в результате обмена возбуждением через поле посредник. Если кванта поля посредника нет ни в начальном, ни в конечном состоянии, то поле посредник выступает в роли **виртуальной частицы**. Как было показано, потенциальная энергия, отвечающая таким взаимодействиям, связана с переносчиком взаимодействия и интенсивностью взаимодействия. Для Фурье-образа потенциальной энергии можно записать:

$$\tilde{V}(\vec{q}) \sim g^2 \frac{1}{q^2 - m_A^2},$$

где g – константа взаимодействия, m_A – масса виртуальной частицы A . Тогда потенциальная энергия имеет вид:

$$V(\vec{r}) \sim \pm \frac{g^2}{4\pi r} e^{-m_A r},$$

при этом знак зависит еще и от спина частицы, переносящей взаимодействие. При обмене скалярной частицей получаем притяжение. Для векторной частицы в зависимости от того, участвуют во взаимодействии частицы или частицы и античастицы, получаем отталкивание или притяжение.

Хотя для квантовой гравитации последовательной общепринятой теории не существует, можно догадаться, как выглядит потенциальная энергия для гравитона, являющегося переносчиком гравитации. Так, в случае гравитации гравитон – частица со спином 2, то есть обладает двумя индексами. Пропагатор такой частицы несет на себе 4 индекса. При этом гравитон считается безмассовым. Так, для матричного элемента

$$i\mathcal{M} \sim G_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{i}{q^2} (g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}).$$

В нерелятивистском пределе сохраняются только компоненты с нулевыми индексами:

$$G_{0000} = \frac{i}{q^2} (+2),$$

что приводит к универсальному притяжению.

Качественное объяснение притяжения и отталкивания

Квантовая теория поля в рамках квантовой электродинамики и некоторых других, рассмотренных в ходе лекций, примерах правильно описывает притяжение и отталкивание. Можно ли как-то еще, кроме как математически, описать механизм притяжения и отталкивания? Этот вопрос с качественной точки зрения практически не обсуждается в литературе. В научно-популярной литературе встречается следующее объяснение на примере двух лодок. Пусть есть 2 лодки, покоящиеся на поверхности озера. В одной лодке (слева) сидит девушка, в другой (справа) молодой человек. Девушка кидает мяч молодому человеку, в этот момент лодка девушки отталкивается влево. Молодой человек получает мяч и соответствующий импульс, его лодка отталкивается вправо. Эта аналогия объясняет взаимодействие электронов на качественном уровне – электроны обмениваются квантом электромагнитного поля (мячом), этот обмен приводит к отталкиванию электронов друг от друга. Возникает вопрос: как с помощью лодок с мячиками объяснить притяжение? Ученые придумали другую аналогию – пассажиры лодок теперь обмениваются бумерангом: встают друг к другу спинами и один кидает бумеранг за голову. Соответственно при броске и получении бумеранга начинается движение навстречу друг другу – притяжение. Такая аналогия работает только при броске бумеранга в воздухе (в вакууме не работает).

Такие аналогии не имеют к реальности никакого отношения. Бумерангов или особенностей движения кванта электромагнитного поля между двумя частицами или

частицей и античастицей нет. Введем объяснение на качественном уровне в рамках квантовой теории поля. Ключевой идеей является следующее: результатом взаимодействия частиц является как минимум две диаграммы. Первая аналогична тем, что были изображены в лекциях ранее – с обменом квантом, переносчиком взаимодействия. Вторая диаграмма без взаимодействия – частицы не обмениваются квантом, остаются в исходном состоянии.

Рассмотрим простой случай – пусть одна частица рассеивается на второй, статичной частице. Для наблюдения за одной подвижной частицей необходимо рассматривать не плоскую волну, заполняющую все пространство-время, а некоторый волновой пакет. Рассмотрим распределение по скоростям в одномерном случае. Ожидается гауссово распределение с максимумом в нуле, количество волн со скоростями больше нуля и количество волн со скоростями меньше нуля одинаковы (рис. 4.5 (а)). Таким образом, средняя скорость волнового пакета нулевая:

$$\langle v \rangle = 0.$$

В конфигурационном пространстве при движении пакета с некоторой скоростью увидим смещение центра волнового пакета по координате (рис. 4.5 (б)). При $\langle v \rangle = 0$ пакет неподвижен, расплывется со временем.

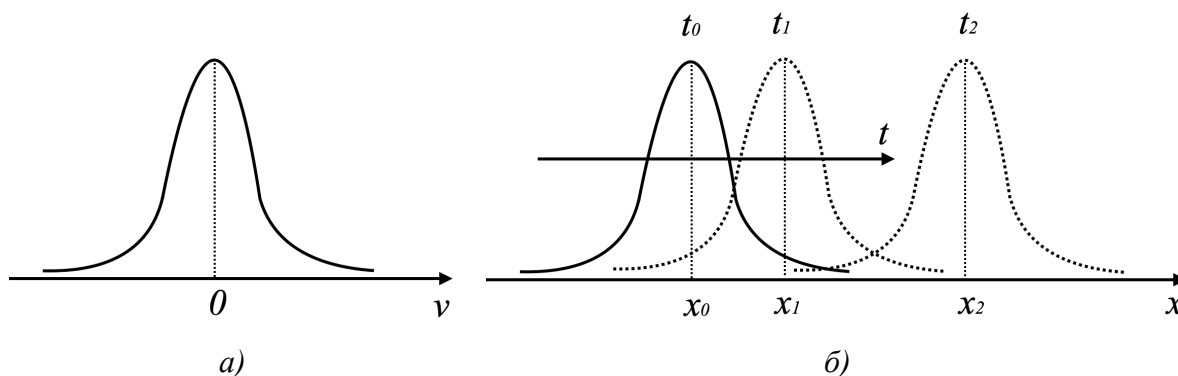


Рис. 4.5. а) Рассмотрим распределение по скоростям в одномерном случае, б) движение волнового пакета в конфигурационном пространстве.

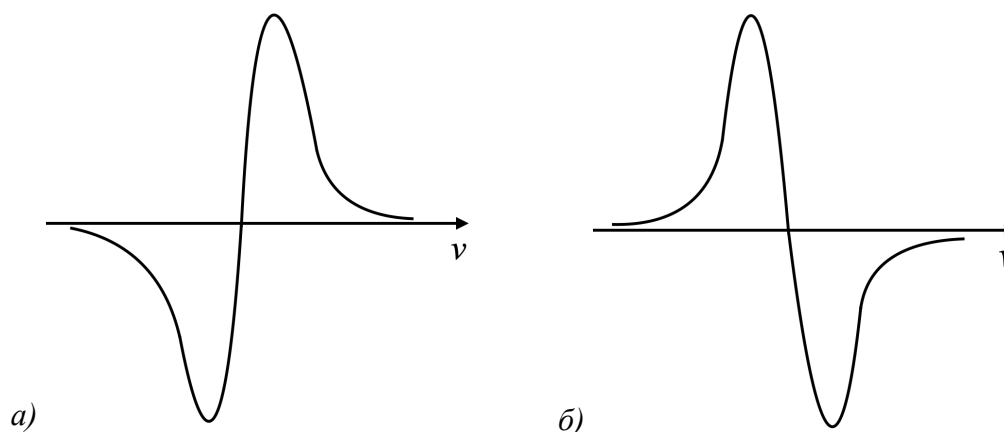
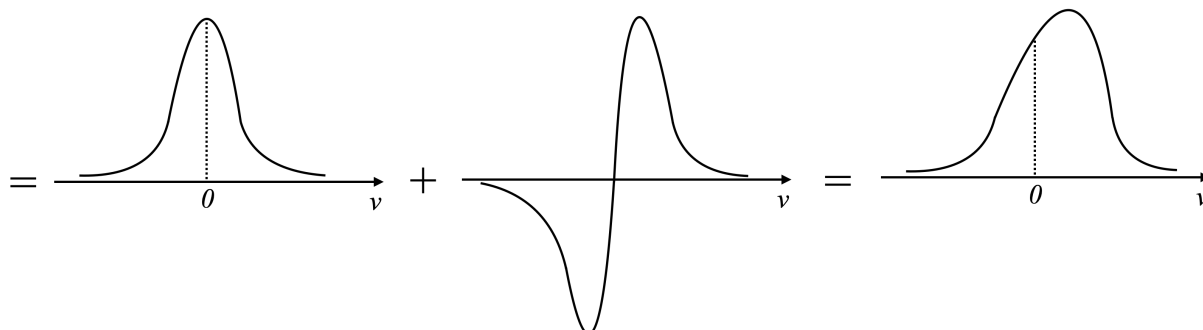


Рис. 4.6. Волновой пакет поле взаимодействия с потенциалом.

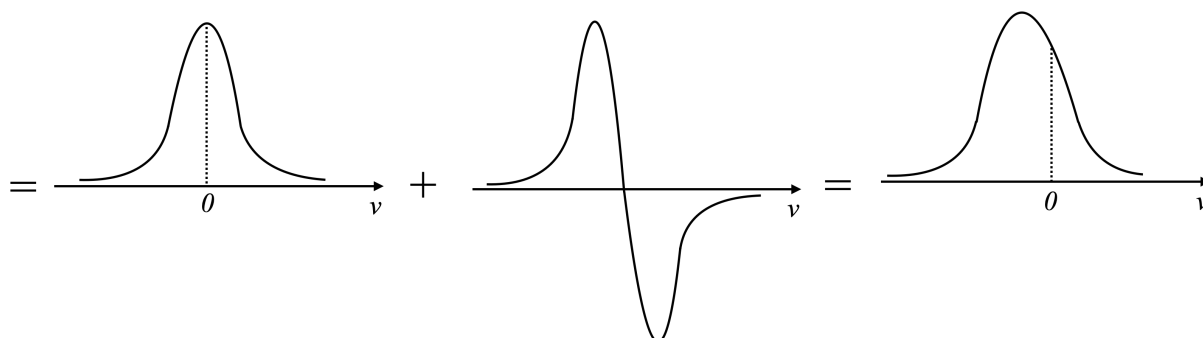
После взаимодействия с потенциалом волновой пакет переламывается пополам, одна из половин гауссова распределения опускается вниз (рис. 4.6 (а, б)). Учет интерференцию начального волнового пакета и пакета рис. 4.6 (а), возникнет асимметричная картина:

без взаимодействия + взаимодействие =



Средняя скорость итогового волнового пакета больше нуля, волновой пакет притягивается вправо. При интерференции исходного волнового пакета с пакетом рис. 4.6 (б), итоговый пакет движется влево, средняя скорость меньше нуля:

без взаимодействия + взаимодействие =



Так, эффект взаимодействия приводит к тому, что волна переламывается в зависимости от типа взаимодействия. Сложение исходного волнового пакета с результатом взаимодействия приводит к движению итогового волнового пакета – притяжению или отталкиванию. Таким образом, притяжение и отталкивание – результат *квантовой интерференции*.

Размерность пространства и взаимодействия

На качественном уровне выясним, как будет выглядеть сила взаимодействия между частицами в зависимости от размерности пространства. Для того, чтобы вычислить потенциальную энергию, необходимо знать пропагатор и уметь вычислять его Фурье-образ. Фурье-образ явным образом зависит от размерности пространства.

Опустим константы, рассмотрим случай безмассового переносчика взаимодействия и запишем потенциальную энергию:

$$V \sim \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{1}{q^2} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{x}}.$$

Произведение векторов $\vec{q} \cdot \vec{x}$ рассматривается в n -мерном пространстве, причем

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q} \cdot \vec{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_n^2.$$

В качестве примера рассмотрим $n = 1, 2, 3$. Оценим интеграл из размерных соображений.

1) Пусть $n = 3$, тогда

$$V \sim \frac{1}{|\vec{x}|},$$

что соответствует стандартному кулоновскому потенциалу.

Сила в таком случае

$$F = -\text{grad } V \sim \frac{1}{|\vec{x}|^2}$$

2) Пусть $n = 2$, тогда

$$V \sim \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{x}},$$

Что приводит к безразмерной величине. Потенциальная энергия в таком случае безразмерна:

$$V \sim \text{const} + \ln \frac{|\vec{x}|}{\mu},$$

где μ – приведенная масса. Тогда для силы можно записать:

$$F = -\text{grad } V \sim \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

Так, в зависимости от размерности пространства одно и то же взаимодействие приводит к разной силе взаимодействия.

3) Пусть $n = 1$, тогда

$$V \sim \int \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{q^2} e^{+i\vec{q} \cdot \vec{x}} \sim |\vec{x}| \rightarrow$$

$$F \sim \text{const}.$$

Так, в одномерном случае обмен квантом электромагнитного поля приводит к тому, что сила не зависит от расстояния между частицами.

Таким образом, из качественных соображений становится очевидно, что сила взаимодействия между частицами зависит от размерности пространства.

Лекция 5. Сечение рассеяния Резерфорда (Мотта)

Полученные результаты позволяют вычислять различные процессы. Начнем с простого, но очень полезного процесса, как с исторической точки зрения, так и с точки зрения использования некоторых приемов. Вычислим сечение рассеяния Резерфорда – сечение рассеяния заряженной частицы на классическом потенциале. Определим сечение в рамках квантовой теории поля, то есть квантовой электродинамики. Это сечение будет отличаться от *сечения рассеяния Резерфорда*, полученного для рассеяния α -частиц на атомных ядрах в рамках классической физики. В случае решения задачи в квантовой электродинамике сечение называется *сечением Мотта*.

Пусть есть классический потенциал, который задается следующим образом:

$$A_\mu(x) = \left(\frac{Ze}{4\pi r}, \vec{0} \right)$$

где $e > 0$ – величина элементарного заряда, а $r = |\vec{x}|$. Рассмотрим рассеяние электрона на таком потенциале:

$$e^- + \text{потенциал} \rightarrow e^- + \text{потенциал}.$$

Это означает, что в центре координат может быть расположено, например, атомное ядро с бесконечно большой массой. Тогда это ядро создает вокруг себя электростатический потенциал, при этом не приобретает энергии отдачи за счет рассеяния электрона на нем. При этом электрон будет описан как квантовая частица в рамках квантовой электродинамики.

Запишем лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = e: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): A_\mu(x).$$

Для S-матрицы можно записать следующее:

$$S = T \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) \right).$$

Начальное и конечное состояния имеют вид:

$$|i\rangle = |e(\vec{p}, s)\rangle, \quad |f\rangle = |e(\vec{p}', s')\rangle.$$

В связи с тем, что случай несколько необычный – рассматриваем не только квантовые, но и классические поля, не получится сразу изобразить диаграмму Фейнмана, необходимо провести вычисления из первых принципов. Вычислим матричный элемент, рассмотрим первый порядок:

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \rightarrow S_{fi}^{(1)} = \langle e' | T(i) \int d^4x e: \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x): A_\mu(x) | e \rangle.$$

В поле $\psi(x)$ присутствует оператор уничтожения электрона и оператор рождения позитрона, в поле $\bar{\psi}(x)$ присутствует оператор уничтожения позитрона и оператор рождения электрона. Операторы, относящиеся к позитрону, не могут дать ненулевой вклад, поскольку начальное и конечное состояния не содержат операторов позитрона. Так, от произведения останется только слагаемое, содержащее операторы рождения и

уничтожения электрона, которые свернутся с соответствующими операторами рождения и уничтожения начального и конечного состояний. Останется только спинорная структура полей. Сразу можно выписать ответ:

$$S_{fi}^{(1)} = ie \int d^4x \bar{u}_{p's'} \gamma^\alpha u_{ps} e^{i(p'-p)x} A_\alpha(x).$$

Заметим, что ток, записанный через спиноры, является величиной, независимой от координаты x и может быть вынесена из-под интеграла. Так, останется Фурье-образ электромагнитного поля. Продолжим вычисления, заметив, что у четырехмерного потенциала только нулевая компонента отлична от нуля. Поэтому при суммировании выживает единственное слагаемое:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= ie \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int d^3x e^{+i(E'-E)x_0 - i(\vec{p}' - \vec{p})\vec{x}} \frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|} \\ &= i2\pi\delta(E' - E) \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \frac{Ze^2}{4\pi} \int d^3x \frac{e^{+i\vec{q}\vec{x}}}{|\vec{x}|}, \end{aligned}$$

где $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$. Легко сообразить, что интеграл сводится к пропагатору фотона:

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3x \frac{e^{+i\vec{q}\vec{x}}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\vec{q}^2}.$$

Тогда

$$S_{fi}^{(1)} = i2\pi\delta(E' - E) \frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps}.$$

Вспомним, что в общем случае S-матричный элемент – размерная величина за счет размерностей начального и конечного состояний. Безразмерная амплитуда может быть записана в виде:

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{S_{fi}}{\sqrt{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle}}.$$

В квантовой теории поля нормировка состояния сингулярна:

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{S_{fi}}{\sqrt{2EV2E'V}},$$

где V – бесконечный объем.

Квадрат модуля амплитуды домножим на фазовый объем конечных частиц:

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 \frac{d^3p'V}{(2\pi)^3} = dP,$$

dP – микроскопическая вероятность. Введем скорость реакции – количество взаимодействий в единицу времени:

$$dR = \frac{dP}{dT}.$$

Отсюда получим сечение:

$$d\sigma = \frac{dR}{j} = \frac{dR}{v/V},$$

где j – поток частиц, в рассматриваемом случае – поток электронов, падающих на электростатический потенциал, v – скорость.

Распишем компоненты, подставим в формулу для сечения и получим итоговое выражение.

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{|S_{fi}|^2}{2EV2E'V}, \quad S_{fi}^{(1)} = 2\pi\delta(E' - E)i\mathcal{M}_{fi}.$$

Воспользуемся соотношением:

$$2\pi\delta(E' - E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{+i(E' - E)t},$$

$2\pi\delta(E' - E)$ отлично от нуля только если $E' - E = 0$, запишем одну из δ -функций в виде

$$2\pi\delta(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \rightarrow$$

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{2\pi\delta(E' - E)T|i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2EV2E'V}.$$

Тогда для сечения получим следующее:

$$d\sigma = \frac{dR}{v/V} = \frac{d}{dT} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{2\pi\delta(E' - E)T|i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E2E'V^2} \frac{d^3p' V}{(2\pi)^3 v},$$

где бесконечные объемы сокращаются, производная по бесконечному времени также сокращается, обращаясь в единицу:

$$d\sigma = \frac{2\pi\delta(E' - E)|i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2Ev} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'},$$

где $(2\pi)^3 2E'$ – фазовый объем частицы в конечном состоянии.

Вычисление матричного элемента

Воспользуемся выведенной формулой сечения для вычисления сечения рассеяния электрона на классическом потенциале. Технически необходимо научиться вычислять квадрат матричного элемента. Обратим внимание, что в формуле сечения присутствует δ -функция, зависящая от разности энергий, то есть энергия электрона сохраняется при рассеянии на классическом потенциале. Такое рассеяние без изменения энергии называется *упругим рассеянием*.

Распишем квадрат матричного элемента:

$$i\mathcal{M}_{fi} = i \frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} = i \frac{Ze^2}{\vec{q}^2} u_{p's'}^+ \gamma^0 \gamma^0 u_{ps} = \frac{Ze^2}{\vec{q}^2} u_{p's'}^+ u_{ps}.$$

При вычислении потенциальных энергий было использовано нерелятивистское приближение. Однако необходимо уметь получать результаты, справедливые при произвольных энергиях. Можно воспользоваться явным видом спиноров, однако существует более простой путь. Поскольку нас интересует квадрат модуля матричного элемента, вычислим эрмитово сопряжение, равное комплексному сопряжению в данном случае:

$$(i\mathcal{M}_{fi})^+ = (i\mathcal{M}_{fi})^* = -i \frac{Ze^2}{\vec{q}^2} u_{ps}^+ u_{p's'} \rightarrow$$

$$|i\mathcal{M}_{fi}|^2 = (i\mathcal{M}_{fi})(i\mathcal{M}_{fi})^+ = \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 u_{p's'}^+ u_{ps} u_{ps}^+ u_{p's'}.$$

Выражение $u_{p's'}^+ u_{ps} u_{ps}^+ u_{p's'}$ является числом, произведением двух чисел:

$$u_{p's'}^+ u_{ps} u_{ps}^+ u_{p's'} = (\dots) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} (\dots) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Число почти всегда можно представить в виде следа от некоторой матрицы. Начнем с более простого случая, пусть есть выражение:

$$\bar{a}Ob = (\dots) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \equiv (\bar{a})_i O_{ij} b_j \equiv b_j (\bar{a})_i O_{ij},$$

$$b_j (\bar{a})_i = (b\bar{a})_{ji},$$

где $(b\bar{a})_{ji}$ – элемент матрицы, $(b\bar{a})$ – матрица, тогда

$$\bar{a}Ob = (b\bar{a})_{ji} O_{ij}.$$

Вспомним, что для произведения матриц справедливо:

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{ik} B_{kj} \rightarrow$$

$$(b\bar{a})_{ji} O_{ij} = (b\bar{a}O)_{jj} = \text{Tr}(b\bar{a}O).$$

Так, в выражении $u_{p's'}^+ u_{ps} u_{ps}^+ u_{p's'}$ перенесем последний спинор вперед и получим:

$$|i\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 \text{Tr} [u_{p's'}^+ u_{p's'} u_{ps} u_{ps}^+].$$

Воспользуемся формулой, которая была выведена ранее при изучении уравнения Дирака:

$$\sum_s u_{ps} \bar{u}_{ps} = \hat{p} + m,$$

где $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$ является сверткой импульса с матрицами Дирака, и опущено домножение массы m на единичную матрицу.

$$|i\mathcal{M}_{fi}|^2 = \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 \text{Tr} [u_{p's'} u_{p's'}^+ u_{ps} u_{ps}^+] = \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 \text{Tr} [u_{p's'} \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \bar{u}_{ps} \gamma^0].$$

При вычислении следа $\text{Tr} [u_{p's'} \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \bar{u}_{ps} \gamma^0]$ можно получить алгебраическое выражение, однако можно упростить задачу, переформулировав ее. Предположим, что электроны, которые рассеиваются на классическом потенциале, не поляризованы. Это означает, что половина электронов обладает спином, направленным вправо, а вторая половина спином, направленным влево. Это можно учесть, просуммировав сечение по спину электрона для начальных состояний и добавим множитель $1/2$:

$$\frac{1}{2} \sum_s d\sigma.$$

Предположим также, что в эксперименте не измеряется проекция спина электрона после рассеяния. Тогда для конечных состояний необходимо просуммировать сечение по всем проекциям:

$$\sum_{s'} d\sigma.$$

В итоге получим формулу для неполяризованных электронов, проекция спина которых не измеряется после рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} |i\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 \text{Tr} [u_{p's'} \bar{u}_{p's'} \gamma^0 u_{ps} \bar{u}_{ps} \gamma^0] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2}\right)^2 \text{Tr} [(\hat{p}' + m) \gamma^0 (\hat{p} + m) \gamma^0]. \end{aligned}$$

Проведем несложное вычисление:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [(\hat{p}' + m) \gamma^0 (\hat{p} + m) \gamma^0] &= \\ &= \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \hat{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\gamma^0 \hat{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \gamma^0] + m^2 \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^0] = \\ &= \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \hat{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\gamma^0 \hat{p} \gamma^0] + m \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \gamma^0] + m^2 \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^0] \end{aligned}$$

В слагаемых, пропорциональных m под знаком следа стоит произведение трех γ -матриц. Следы с нечетным числом γ -матриц аннулируются:

$$\begin{aligned} m \text{Tr} [\gamma^0 \hat{p} \gamma^0] &= m p_\beta \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0] = 0, \\ m \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \gamma^0] &= m p'_\alpha \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^0] = 0. \end{aligned}$$

В последнем слагаемом под знаком следа стоит единичная матрица 4×4 , так

$$m^2 \text{Tr} [\gamma^0 \gamma^0] = 4m^2.$$

Для того, чтобы вычислить след из первого слагаемого, запишем явный вид:

$$\text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \hat{p} \gamma^0] = p'_\alpha p_\beta \text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0] = p'_\alpha p_\beta 4(g^{\alpha 0} g^{\beta 0} + g^{\alpha 0} g^{\beta 0} - g^{\alpha \beta} g^{00}).$$

Подробное вычисление было приведено в предыдущих лекциях. Снимем суммирование по α и β :

$$\text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \hat{p} \gamma^0] = 8E'E - 4(p \cdot p').$$

Распишем скалярное произведение:

$$(p \cdot p') = EE' - (\vec{p} \cdot \vec{p}') \rightarrow \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^0 \hat{p} \gamma^0] = 4E'E + 4(\vec{p} \cdot \vec{p}').$$

Запишем ответ для квадрата модуля матричного элемента, усредненного по спину начальных состояний и просуммированному по проекциям спинов конечных состояний:

$$\frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} |i\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \right)^2 4(E'E + (\vec{p} \cdot \vec{p}') + m^2).$$

Формула сечения рассеяния Мотта

Получим теперь итоговую формулу для сечения рассеяния электрона на классическом потенциале. Записанная формула

$$d\sigma = \frac{2\pi\delta(E' - E) |i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2Ev} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'}$$

справедлива для произвольной ориентации спинов начальной и конечной частиц. Квадрата модуля матричного элемента был рассмотрен в виде усреднения по спину начальных состояний и суммирования по проекциям спинов конечных состояний. Так, для усредненного сечения следует записать

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma} &= \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} d\sigma = \frac{2\pi\delta(E' - E) \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} |i\mathcal{M}_{fi}|^2}{2Ev} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} = \\ &= \frac{\delta(E' - E) d^3p'}{(2\pi)^2 4EvE'} 2 \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \right)^2 (E'E + (\vec{p} \cdot \vec{p}') + m^2). \end{aligned}$$

Запишем элемент трехмерного импульса электрона в конечном состоянии в сферической системе координат:

$$d^3p' = dp' p'^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – единица телесного угла. Из релятивистского соотношения энергии и импульсов:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \rightarrow E dE = \vec{p} d\vec{p} = p dp,$$

поскольку $\vec{p}$ и $d\vec{p}$ параллельны друг другу. Тогда

$$d^3p' = dp' p'^2 d\Omega = dE' E' p' d\Omega.$$

Теперь в формуле для усредненного сечения можно снять интеграл по E' , воспользовавшись δ -функцией. Тогда запишем выражение более строго:

$$\frac{d^2\bar{\sigma}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{d^3\sigma}{d\Omega} = \frac{Ep}{8\pi^2 EvE} \left(\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \right)^2 (E^2 + p^2 \cos \theta + m^2).$$

Вспомним, что

$$\vec{q}^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2 = \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}',$$

когда $p = p'$

$$\vec{q}^2 = 2p^2 - 2p^2 \cos \theta = 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Приведем $p^2 \cos \theta$ к выражению с $\frac{\theta}{2}$:

$$p^2 \cos \theta = -p^2(1 - \cos \theta) + p^2 = -2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + p^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E^2 + p^2 \cos \theta + m^2 &= E^2 + p^2 + m^2 - 2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2E^2 - 2p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\ &= 2E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

где $v = \frac{p}{E}$ – скорость.

Приведем полученное выражение для сечения к удобному виду:

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{p}{8\pi^2 E v} \frac{(Ze^2)^2}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Перейдем к электромагнитной константе $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, тогда $\alpha^2 = \frac{e^4}{16\pi^2}$:

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \frac{(Z\alpha)^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

Полученная формула – **сечение рассеяния Мотта**. Эта формула является обобщением **сечения рассеяния Резерфорда**:

$$\frac{d^2 \bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Квантовая теория поля уточняет классическое сечение, полученное Резерфордом.

Отличие сечения рассеяния Мотта от сечения Резерфорда

Обсудим качественно отличия формулы сечения рассеяния Мотта от формулы Резерфорда. Множитель $1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ в формуле Мотта подавляет рассеяние на некоторые углы. При развороте электрона, $\theta = \pi$, возникает фактор подавления $1 - v^2$. Если $v \rightarrow 1$, то такое сечение обращается в ноль. Так, для релятивистского электрона рассеяние назад на электростатическом потенциале невозможно.

Причина заключается в невозможности переворота спина за счет электростатического потенциала. Рассмотрим неподвижное атомное ядро бесконечно большой массы. Электрон облетает это атомное ядро и рассеивается в обратную сторону. Если проекция спина электрона в начальном состоянии направлена вправо, то в конечном состоянии спин электрона также сонаправлен импульсу. Как было показано в

предыдущих лекциях, электрон не может изменить проекцию спина. Если рассмотреть ту же картину с точки зрения закона сохранения спина, то в начальном состоянии спин имел проекцию на горизонтальную ось $+\frac{1}{2}$, а в конечном состоянии $-\frac{1}{2}$ (рис. 5.1). Такого не может быть. Поэтому сечение рассеяния Мотта предсказывает подавление рассеяния на большие углы. Резерфорд рассматривал классическую теорию, в которой спина не было вообще.

Так, в релятивистской теории спин играет важную роль. Если частицы движутся со скоростями, близкими к скорости света, то спин определяет динамику взаимодействия наравне с другими факторами.

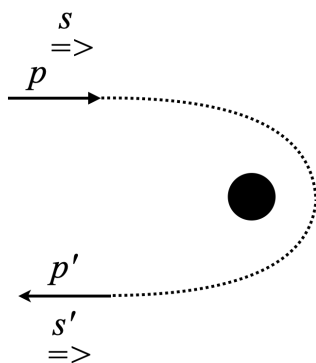


Рис. 5.1. Рассеяние в обратном направлении электрона на электростатическом потенциале.

Лекция 6. Сечение рассеяния пары электронов и позитронов

Вычислим сечение рассеяния пары электрон-позитрон в пару мюонов:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-.$$

Это очень важный процесс, сечение этого процесса важно как с точки зрения квантовой электродинамики, так и для измерения зарядов кварков. Уже полученных правил Фейнмана достаточно для того, чтобы понять, как выглядит процесс.

В курсе лекций на диаграммах Фейнмана время течет слева направо. Изобразим электрон с импульсом p_1 и проекцией спина s_1 , движущийся слева направо и позитрон с импульсом p_2 и проекцией спина s_2 , как частицу, движущуюся вспять по времени. Аналогично изобразим μ^- с импульсом k_1 и проекцией спина r_1 , движущийся в будущее и μ^+ с импульсом k_2 и проекцией спина r_2 как античастицу. Взаимодействие осуществляется за счет виртуального фотона с 4-импульсом q между электронной и мюонной линиями (рис. 6.1).

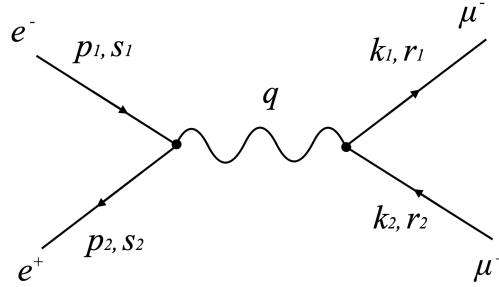


Рис. 6.1. Диаграмма Фейнмана процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Поставим в соответствие диаграмме Фейнмана алгебраические выражения, распишем матричный элемент. Будем двигаться против направления тока, начнем с позитрона и электрона:

$$i\mathcal{M} = \bar{v}_{p_2 s_2} i e \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \frac{-i g_{\alpha\beta}}{q^2} \bar{u}_{k_1 r_1} i e \gamma^\beta v_{k_2 r_2} = \frac{ie^2}{q^2} \bar{v}_{p_2 s_2} \gamma^\alpha u_{p_1 s_1} \bar{u}_{k_1 r_1} \gamma_\alpha v_{k_2 r_2}.$$

Переменные Мандельштама

Когда есть 2 начальные и 2 конечные частицы, полезно ввести релятивистски инвариантные переменные Мандельштама.

Запишем закон сохранения энергии-импульса:

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2.$$

Возведем в квадрат левую и правую части равенства:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2,$$

s – первая из переменных Мандельштама, позволяет вычислить некоторые скалярные произведения.

$$(p_1 + p_2)^2 = m_e^2 + m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2), \quad (k_1 + k_2)^2 = m_\mu^2 + m_\mu^2 + 2(k_1 \cdot k_2) \rightarrow$$

$$\begin{cases} s = 2m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \\ s = 2m_\mu^2 + 2(k_1 \cdot k_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (p_1 \cdot p_2) = \frac{s - 2m_e^2}{2} \\ (k_1 \cdot k_2) = \frac{s - 2m_\mu^2}{2} \end{cases}.$$

Перепишем закон сохранения в следующем виде:

$$p_1 - k_1 = k_2 - p_2.$$

Возведем в квадрат левую и правую части равенства:

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (k_2 - p_2)^2,$$

t – вторая переменная Мандельштама. Тогда верно следующее:

$$(p_1 - k_1)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1 \cdot k_1), \quad (k_2 - p_2)^2 = m_\mu^2 + m_e^2 - 2(k_2 \cdot p_2) \rightarrow$$

$$(p_1 \cdot k_1) = (k_2 \cdot p_2) = \frac{t - m_e^2 - m_\mu^2}{2}.$$

Если теперь в закон сохранения энергии перенести в левую часть не k_1 , а k_2 , при этом перенести в правую часть p_2 , то получим следующее:

$$p_1 - k_2 = k_1 - p_2 \rightarrow$$

$$u = (p_1 - k_2)^2 = (k_1 - p_2)^2,$$

u – третья переменная Мандельштама. Тогда

$$u = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1 \cdot k_2) = m_\mu^2 + m_e^2 - 2(k_1 \cdot p_2) \rightarrow$$

$$(p_1 \cdot k_2) = (k_1 \cdot p_2) = \frac{u - m_e^2 - m_\mu^2}{2}$$

Переменные Мандельштама не являются независимыми:

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - k_1)^2 + (p_1 - k_2)^2 \\ &= 2m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 + 2m_\mu^2 - 2(p_2 \cdot k_2) - 2(p_2 \cdot k_1) = \\ &= 4m_e^2 + 2m_\mu^2 + 2p_2 \cdot (p_1 - k_2 - k_1) = 4m_e^2 + 2m_\mu^2 - 2m_e^2 = 2m_e^2 + 2m_\mu^2. \end{aligned}$$

Упростим задачу, рассмотрим ультрарелятивистский случай, когда частицы движутся со скоростями, близкими к скорости света. Это означает, что можно пренебречь массами частиц. Тогда

$$(p_1 \cdot p_2) = (k_1 \cdot k_2) = \frac{s}{2},$$

$$(p_1 \cdot k_1) = (p_2 \cdot k_2) = \frac{t}{2},$$

$$(p_1 \cdot k_2) = (k_1 \cdot p_2) = \frac{u}{2}.$$

В ультрарелятивистском случае $s + t + u = 0$, соответственно

$$(p_1 \cdot k_2) = (k_1 \cdot p_2) = \frac{u}{2} = -\frac{s + t}{2}.$$

Воспользуемся этими соотношениями для вычисления матричного элемента.

Определим теперь 4-импульс q виртуального фотона:

$$q = p_1 + p_2 \rightarrow q^2 = (p_1 + p_2)^2 = s.$$

Вычисление квадрата матричного элемента

Вычислим эрмитово сопряжение матричного элемента. Рассмотрим один из токов, опустим индексы:

$$\begin{aligned} (\bar{v}\gamma^\alpha u)^+ &= u^+(\gamma^\alpha)^+(\bar{v})^+, \\ (\bar{v})^+ &= (v^+\gamma^0)^+ = (\gamma^0)^+v = \gamma^0v \rightarrow \\ (\bar{v}\gamma^\alpha u)^+ &= u^+\gamma^0\gamma^0(\gamma^\alpha)^+\gamma^0v = \bar{u}\gamma^\alpha v. \end{aligned}$$

Запишем эрмитово сопряжение к матричному элементу:

$$(i\mathcal{M})^+ = -\frac{ie^2}{s} \bar{u}_{p_1s_1}\gamma^\beta v_{p_2s_2} \bar{v}_{k_2r_2}\gamma_\beta u_{k_1r_1}.$$

Квадрат матричного элемента имеет вид:

$$|i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \bar{v}_{p_2s_2}\gamma^\alpha u_{p_1s_1} \cdot \bar{u}_{k_1r_1}\gamma_\alpha v_{k_2r_2} \cdot \bar{u}_{p_1s_1}\gamma^\beta v_{p_2s_2} \cdot \bar{v}_{k_2r_2}\gamma_\beta u_{k_1r_1}.$$

Переставим выражения так, чтобы спиноры с одинаковыми импульсами и проекциями спина оказались рядом. Поменяем местами конструкции $\bar{u}_{k_1r_1}\gamma_\alpha v_{k_2r_2}$ и $\bar{u}_{p_1s_1}\gamma^\beta v_{p_2s_2}$, являющиеся числами:

$$\begin{aligned} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{s^2} \bar{v}_{p_2s_2}\gamma^\alpha u_{p_1s_1} \cdot \bar{u}_{p_1s_1}\gamma^\beta v_{p_2s_2} \cdot \bar{u}_{k_1r_1}\gamma_\alpha v_{k_2r_2} \cdot \bar{v}_{k_2r_2}\gamma_\beta u_{k_1r_1} = \\ &= \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} [v_{p_2s_2} \bar{v}_{p_2s_2} \gamma^\alpha u_{p_1s_1} \bar{u}_{p_1s_1} \gamma^\beta] \cdot \text{Tr} [u_{k_1r_1} \bar{u}_{k_1r_1} \gamma_\alpha v_{k_2r_2} \bar{v}_{k_2r_2} \gamma_\beta]. \end{aligned}$$

Переходя к неполяризованному случаю, необходимо рассмотреть усреднение:

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2} \sum_{r_1} \sum_{r_2} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2$$

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \sum_s u_{ps} \bar{u}_{ps} &= \hat{p} + m, \\ \sum_s v_{ps} \bar{v}_{ps} &= \hat{p} - m \rightarrow \\ \frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} [\hat{p}_2 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta] \text{Tr} [\hat{k}_1 \gamma_\alpha \hat{k}_2 \gamma_\beta]. \end{aligned}$$

При этом ранее в лекциях было получено, что

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} p_{2\mu} p_{1\nu} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] k_1^{\mu'} k_2^{\nu'} \text{Tr}[\gamma_{\mu'} \gamma_\alpha \gamma_{\nu'} \gamma_\beta].$$

Распишем в качестве примера одну из компонент:

$$p_{2\mu} p_{1\nu} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = 4(p_2^\alpha p_1^\beta + p_2^\beta p_1^\alpha - (p_1 p_2) g^{\alpha\beta}) \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} 4(p_2^\alpha p_1^\beta + p_2^\beta p_1^\alpha - (p_1 \cdot p_2) g^{\alpha\beta}) 4(k_{1\alpha} k_{2\beta} + k_{1\beta} k_{2\alpha} - (k_1 \cdot k_2) g_{\alpha\beta}).$$

При перемножении возникают слагаемые, многие из которых сокращаются:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{s^2} \left(\underbrace{(p_2 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} + \underbrace{(p_2 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1)} - \underbrace{(k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(p_2 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1)} + \underbrace{(p_2 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} - \underbrace{(k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2)} - \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{2(p_1 \cdot p_2)(k_1 \cdot k_2)} + \underbrace{4(p_1 \cdot p_2)(k_1 \cdot k_2)} \right) = \\ &= \frac{8e^4}{s^2} ((p_2 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2) + (p_2 \cdot k_2)(p_1 \cdot k_1)). \end{aligned}$$

Итоговый ответ, записанный через скалярные произведения, может быть переписан через переменные Мандельштама:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спин}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} [(s+t)^2 + t^2] = \overline{|i\mathcal{M}|^2}$$

Вычисление сечения рассеяния

Распишем теперь сечение рассеяния по общей формуле:

$$\begin{aligned} d^6\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \overline{|i\mathcal{M}|^2}}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4}} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} = \\ &= \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2\pi)^2 \cdot 4 \cdot 4(p_1 \cdot p_2)} \overline{|i\mathcal{M}|^2} \frac{d^3k_1 d^3k_2}{E_{k_1} E_{k_2}}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем формулу, воспользовавшись четырехмерной δ -функцией:

$$d^3\sigma = \int d^3k_2 \frac{d^6\sigma}{d^3k_2} = \frac{\delta(E_{p_1} + E_{p_2} - E_{k_1} - E_{k_2})}{64\pi^2(p_1 \cdot p_2)} \overline{|i\mathcal{M}|^2} \frac{d^3k_1}{E_{k_1} E_{k_2}} \bigg|_{\vec{k}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}_1}$$

Далее в таких задачах, где 2 начальных частицы превращаются в 2 конечных частицы, удобно перейти в систему центра масс или центра инерции. Тогда импульсы электрона и позитрона $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ одинаковы по модулю и противоположны (рис. 6.2). В этой системе отсчета импульс мюона μ^- направлен под углом θ к начальному импульсу электрона $\vec{p}_1$. Импульс μ^+ противоположен импульсу μ^- и равен ему по модулю: в этой системе центра масс $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, тогда $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$.

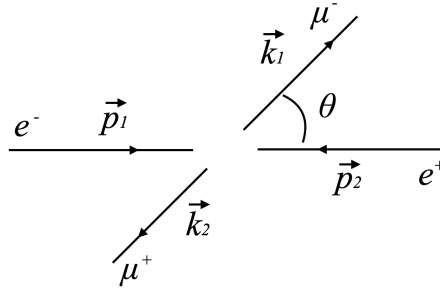


Рис. 6.2. Импульсы в системе центра масс.

Распишем d^3k_1 :

$$d^3k_1 = dE_{k_1} E_{k_1}^2 d\varphi d\cos\theta,$$

где $d\varphi d\cos\theta$ – элемент телесного угла. Проинтегрируем выражение для $d^3\sigma$ по $d\varphi$ и перейдем в систему центра масс:

$$d^2\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d^3\sigma}{d\varphi}.$$

Введем запись через переменные Мандельштама:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_{p_1} + E_{p_2})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_{p_1}^* + E_{p_2}^*)^2,$$

в системе центра масс:

$$s = (E_{p_1}^* + E_{p_2}^*)^2.$$

Тогда

$$d^2\sigma = \frac{\delta(\sqrt{s} - E_{k_1} - E_{k_2})}{32\pi \frac{s}{2}} \frac{dE_{k_1} E_{k_1}^2 d\cos\theta}{|\mathcal{M}|^2 E_{k_1} E_{k_2}},$$

учтем, что $E_{k_2} = \sqrt{\vec{k}_2^2 + m_\mu^2} = E_{k_1}$, значит

$$d^2\sigma = \frac{\delta(\sqrt{s} - 2E_{k_1})}{32\pi \frac{s}{2}} \frac{dE_{k_1} E_{k_1}^2 d\cos\theta}{|\mathcal{M}|^2 E_{k_1}^2}.$$

Проинтегрируем по энергии вылетающих мюонов в системе центра масс, воспользуемся оставшейся δ -функцией:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} dE_{k_1} \frac{d^2\sigma}{dE_{k_1} d\cos\theta} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi s}.$$

Подставим в выражение для сечения $|\mathcal{M}|^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\frac{2e^4}{s^2} [(s+t)^2 + t^2]}{32\pi s} = \frac{e^4}{16\pi s^3} (s^2 + 2st + 2t^2).$$

Для того, чтобы выражение приобрело прозрачный физический смысл, определим связь переменной t с углом θ :

$$t = (p_1 - k_1)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2(p_1 \cdot k_1) \approx -2(p_1 \cdot k_1).$$

Раскроем это скалярное произведение в системе центра масс:

$$-2(p_1 \cdot k_1) = -2(E_{p_1}^* \cdot E_{k_1}^* - \vec{p}_1^* \vec{k}_1^*) = -2\left(\frac{s}{4} - \frac{s}{4} \cos \theta\right) = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + 2t^2 &= s^2 + 2s\left(-\frac{s}{2}\right)(1 - \cos \theta) + \frac{2s^2}{4}(1 - \cos \theta)^2 = \\ &= s^2 \left(1 - (1 + \cos \theta) + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)^2\right) = \\ &= s^2 \left(\cos \theta + \frac{1}{2} - \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2}\right) = \frac{s^2}{2}(1 + \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Сечение может быть переписано в виде:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{e^4}{32\pi s} (1 + \cos^2 \theta).$$

Так как $\cos^2 \theta = 1$ при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, значит сечение увеличивается если мюоны рассеиваются в тот же угол или на угол π относительно начального направления движения электрона и позитрона. Рассеяние минимально при $\theta = \frac{\pi}{2}$, но не обращается в ноль. График зависимости сечения рассеяния от косинуса угла θ представлен на рисунке 6.3.

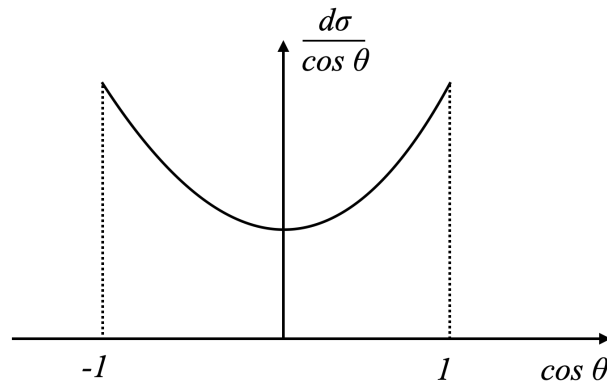


Рис. 6.3. График зависимости сечения рассеяния от косинуса угла θ .

Чтобы получить полное сечение, необходимо проинтегрировать по всем углам:

$$\sigma = \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{e^4}{32\pi s} \int_{-1}^1 d \cos \theta (1 + \cos^2 \theta) = \frac{e^4}{32\pi s} \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{e^4}{12\pi s}.$$

Формулу для сечения можно также записать через электромагнитную константу:

$$\sigma = \frac{4\pi \alpha^2}{3 s}.$$

Итак, получена формула сечения взаимодействия $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в ультрарелятивистском случае.

Заряды кварков

Рассмотренный процесс может быть использован для определения зарядов кварков. Зададимся вопросом, чему равно сечение рассеяния для процесса превращения пары электрон-позитрон в пару кварк-антикварк:

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}.$$

Диаграмма Фейнмана такого взаимодействия представлена на рисунке 6.4.

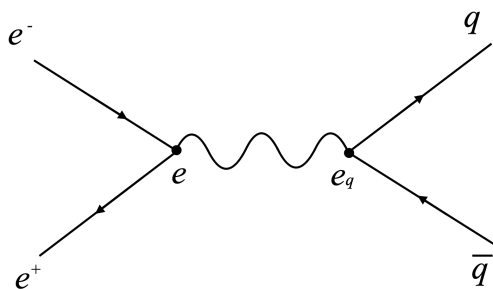


Рис. 6.4. Диаграмма Фейнмана процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

Такой диаграммы достаточно, чтобы понять, чему равно соответствующее сечение. В левой вершине электрический заряд определяется зарядом электрона, в правой – зарядом кварка. Тогда если для процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ верно

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s},$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, то для сечения процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ справедлива та же формула, но домноженная на $\left(\frac{e_q}{e}\right)^2$. Получаемая формула хороша, за исключением того, что у кварка есть цвет, который экспериментально измерять не умеем. Тогда необходимо домножить сечение на количество цветов. Массы учтем, используя θ -функцию:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3 \left(\frac{e_q}{e}\right)^2 \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \theta(\sqrt{s} - 2m_q).$$

Таким образом, определено сечение рождения пары кварк-антикварк. Такое сечение полезно, поскольку если рождается пара кварк-антикварк, то в конечном состоянии эти частицы образуют адроны. За адронами возможно наблюдать экспериментально. Поэтому удобно определить отношение сечений, учтем все возможные кварки:

$$R = \sum_q \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q \left(\frac{e_q}{e}\right)^2 \theta(\sqrt{s} - 2m_q).$$

Вычислим теперь R при разных значениях $\sqrt{s}$. Будем варьировать $\sqrt{s}$ с минимально возможного до $2m_q$.

$$R(2m_u) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3},$$

$$R(2m_d) = R(2m_u) + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$R(2m_s) = R(2m_d) + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2,$$

$$R(2m_c) = R(2m_s) + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}.$$

Результаты можно представить в виде графика (рис. 6.5).

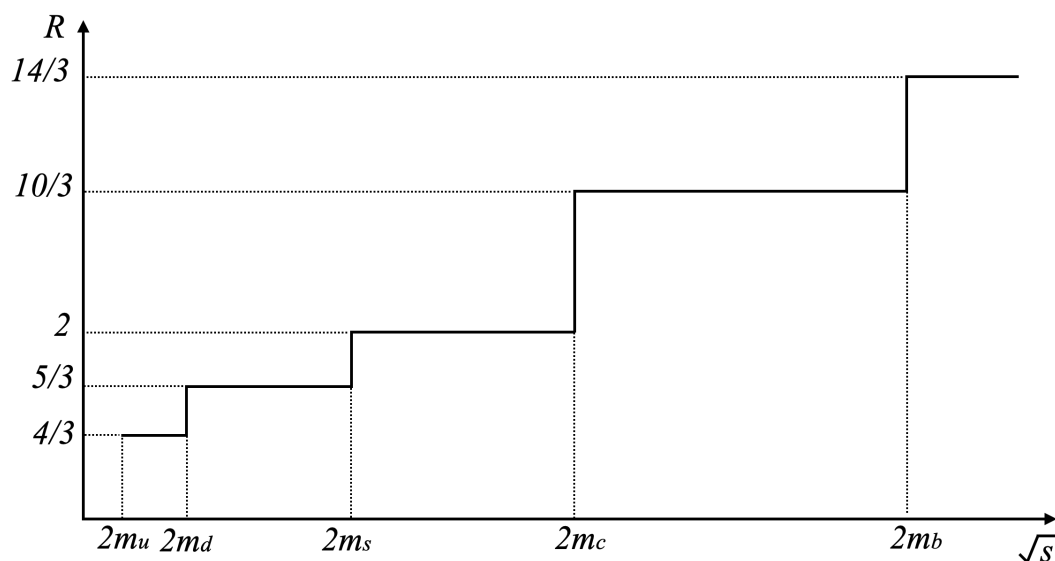


Рис. 6.5. График зависимости отношения сечений R от корня из первой переменной Мандельштама.

В 1977 году коллаборация CFS, сталкивая протоны с энергией 400 ГэВ с покоящейся бериллиевой мишенью, следила за рожденными парами $\mu^+\mu^-$ при наличии других рождавшихся компонент:

$$p + Be \rightarrow \mu^+\mu^- X.$$

X менялся от события к событию. Для мюонов экспериментаторы построили инвариантную массу:

$$(m_{inv})^2 = (p_{\mu^+} + p_{\mu^-})^2.$$

Тогда можно построить график зависимости количества пар мюонов от инвариантной массы. На фоне гладкого биномиального распределения в одной области наблюдался пик (рис. 6.6) при определенной массе, равной примерно 10 ГэВ. Ясно, что такая частица, из которой получилась пара мюонов, состоит из новых кварков $Y(b\bar{b})$.

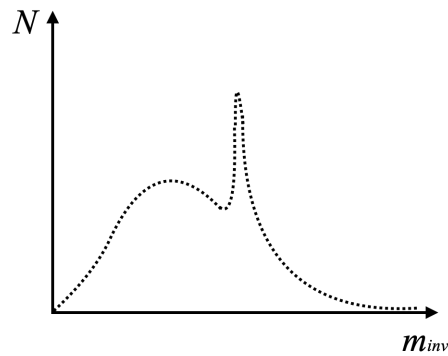


Рис. 6.6. Пик на графике зависимости инвариантной количества пар мюонов от инвариантной массы.

В вышеописанном эксперименте заряд кварка b определить было невозможно. Однако в 1979 году в эксперименте PETRA удалось определить $R(2m_b)$. Были возможны 2 варианта:

$$R(2m_b) = \begin{cases} \frac{10}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3}, & e_q = e_b = -\frac{1}{3}, \\ \frac{10}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{14}{3}, & e_q = e_b = +\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Эксперимент PETRA показал $R(2m_b) = \frac{14}{3}$.

Лекция 7. Эффект Комптона

В 1923 году А.Комптон экспериментально обнаружил рассеяние света на электроны:

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e.$$

Теорию этого процесса разработали Клейн и Нишиджима в 1929 году. В этой лекции рассмотрим получение соответствующей формулы. Несмотря на длительность вычислений, процесс концептуально прост.

Определим кинематические переменные. Для импульса начального электрона запишем:

$$p = (E, \vec{p}),$$

где E – начальная энергия электрона, $\vec{p}$ – его трехмерный импульс. Аналогично распишем импульс фотона:

$$k = (\omega, \vec{k}),$$

где ω – начальная энергия фотона, $\vec{k}$ – его трехмерный импульс. Величины для конечных состояний будут обозначены штрихованными переменными.

Кинематические переменные

В подобных реакциях, где есть по 2 частицы в начальном и конечном состояниях, удобно ввести переменные Мандельштама – кинематические переменные, релятивистские скаляры, в которых удобно записать сечение рассеяния. Для реакции выполняется закон сохранения энергии-импульса:

$$p + k = p' + k'.$$

Тогда можно записать переменные Мандельштама:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = m^2 + 2(p \cdot k) = m^2 + 2(p' \cdot k') \rightarrow \\ &\rightarrow (p \cdot k) = (p' \cdot k') = \frac{s - m^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= (p - p')^2 = (k' - k)^2 = 2m^2 - 2(p \cdot p') = -2(k \cdot k') \rightarrow \\ &\rightarrow (p \cdot p') = \frac{2m^2 - t}{2}, \quad (k \cdot k') = -\frac{t}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= (p - k')^2 = (p' - k)^2 = m^2 - 2(p \cdot k') = m^2 - 2(k \cdot p') \rightarrow \\ &\rightarrow (p \cdot k') = (k \cdot p') = \frac{m^2 - u}{2}. \end{aligned}$$

где m – масса электрона. Переменные s, t, u не являются независимыми, они связаны линейно. Покажем это, распишем сумму этих переменных, используя определение:

$$s + t + u = 4m^2 + 2p(k - p' - k').$$

По закону сохранения энергии-импульса

$$-p = k - p' - k' \rightarrow$$

$$s + t + u = 4m^2 + 2p(-p) = 2m^2.$$

Это соотношения не является самым общим, а справедливо для конкретных частиц, одна из которых безмассовая. В общем случае сумма переменных Мандельштама равна сумме квадратов масс всех 4 частиц, участвующих в процессе. Полученное соотношение для суммы переменных Мандельштама поможет избавиться от одной из этих переменных в зависимости от того, что удобнее в данном случае.

Диаграмма Фейнмана

Перейдем к рассмотрению диаграмм Фейнмана. На рисунке 7.1(а) представлена диаграмма, отвечающая этому процессу. В начальном состоянии есть электрон и фотон, движущиеся из прошлого в будущее с импульсами p и k соответственно. После взаимодействия наблюдаем электрон и фотон с импульсами p' и k' соответственно, уходящие в будущее. До сих пор в курсе лекций были известны только правила Фейнмана для электрона, входящего в точку, и для электрона, выходящего из точки. Теперь появляется линия электрона между двумя точками, это означает, что такой электрон находится в виртуальном состоянии. Квадрат его импульса не обязательно равен квадрату массы. Примем правила Фейнмана для такого элемента в качестве гипотезы, позднее оно будет выведен.

Кроме того, следует задаться вопросом, является ли такая диаграмма единственно возможной. На самом деле есть еще одна диаграмма, похожая на первую, на перевернутая на 90 градусов (рис. 7.1(б)). Электрон в некоторый момент времени испускает фотон, превращаясь в виртуальный электрон. Затем во вторую точку входит фотон, а электрон уходит в будущее.

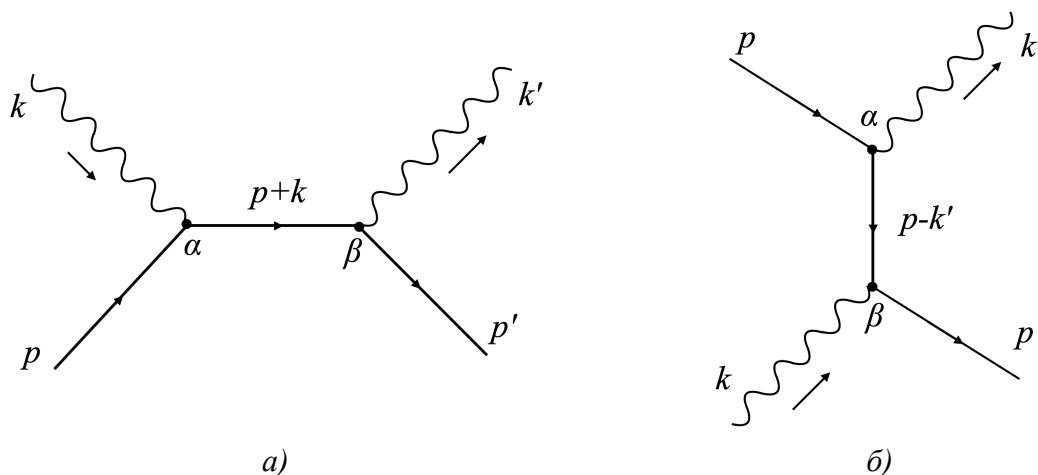


Рис. 7.1. Диаграммы Фейнмана комптоновского рассеяния.

Для того, чтобы выяснить, являются ли диаграммы эквивалентными, необходимо расставить импульсы. В начальном состоянии есть электрон и фотон с импульсами p и k соответственно, в конечном состоянии – электрон и фотон с импульсами p' и k'

соответственно. Однако в одной точке встречаются не электрон и фотон с импульсами p и k , а электрон с импульсом p и фотон с импульсами k' . Аналогично для второй точки. Так, диаграммы топологически различны, обе такие диаграммы необходимо учитывать в расчетах. Поскольку фермионы не меняются местами, то необходимо сложить обе диаграммы. Итак, на уровне диаграммного анализа получены 2 диаграммы, которые описывают рассеяние фотона на электроне. Поставим в соответствие диаграммам алгебраические выражения.

Сформулируем правило Фейнмана для электрона между двумя точками. Если между двумя точками проходит фермион с импульсом p , то ему ставится в соответствие величина $iS(p)$, где

$$S(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad \hat{p} = \gamma_\mu p^\mu.$$

Распишем теперь первую диаграмму, начнем движение вдоль фермионной линии против направления стрелок:

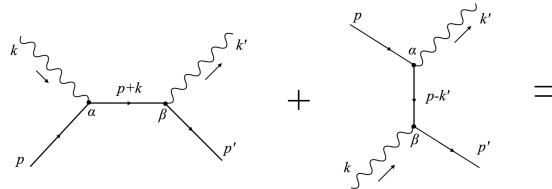
$$\bar{u}_{p's'} i e \gamma^\beta i \frac{\hat{p} + \hat{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} i e \gamma^\alpha u_{ps} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) \varepsilon_\beta^*(k', \lambda'),$$

где $\varepsilon_\alpha(k, \lambda)$ – вектор поляризации, λ – поляризация входящего фотона, $\varepsilon_\beta^*(k', \lambda')$ – вектор поляризации выходящего фотона. Распишем вторую диаграмму, также будем двигаться против направления фермионной линии:

$$\bar{u}_{p's'} i e \gamma^\beta i \frac{\hat{p} - \hat{k}' + m}{(p-k')^2 - m^2} i e \gamma^\alpha u_{ps} \varepsilon_\beta(k, \lambda) \varepsilon_\alpha^*(k', \lambda').$$

Матричный элемент и эрмитово сопряжение

Теперь необходимо вычислить матричный элемент:



$$\begin{aligned}
 = i\mathcal{M} = & \bar{u}_{p's'} i e \gamma^\beta i \frac{\hat{p} + \hat{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} i e \gamma^\alpha u_{ps} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) \varepsilon_\beta^*(k', \lambda') + \\
 & + \bar{u}_{p's'} i e \gamma^\beta i \frac{\hat{p} - \hat{k}' + m}{(p-k')^2 - m^2} i e \gamma^\alpha u_{ps} \varepsilon_\beta(k, \lambda) \varepsilon_\alpha^*(k', \lambda').
 \end{aligned}$$

Затем вычислим квадрат матричного элемента и, пользуясь формулой, получить сечение.

Рассматриваемый процесс требует длительных вычислений, поскольку виртуальный электрон добавляет много алгебраических выражений, которые необходимо вычислить. Перед началом вычислений следует определить, возможно ли упростить выражение. По индексам α и β происходит суммирование, переименуем индексы во втором выражении, тогда можно будет вынести общий множитель в виде

произведения векторов поляризации входящего и выходящего электронов. Также стоит вынести константы в качестве второго упрощения. Кроме того, могут быть вынесены спиноры. Также при записи этих выражений воспользуемся переменными Мандельштама:

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}_{p's'} \left[\gamma^\beta \frac{\hat{p} + \hat{k} + m}{s - m^2} \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \frac{\hat{p} - \hat{k}' + m}{u - m^2} \gamma^\beta \right] u_{ps} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) \varepsilon_\beta^*(k', \lambda').$$

И для упрощения внутренней структуры выражений для виртуальных фермионов следует воспользоваться уравнением Дирака, согласно которому

$$(\hat{p} + m)u_{ps} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{p}\gamma^\alpha u_{ps} &= p_\mu \gamma^\mu \gamma^\alpha u_{ps} = p_\mu (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) u_{ps} = 2p^\alpha u_{ps} - \gamma^\alpha \hat{p} u_{ps} = (2p^\alpha - m\gamma^\alpha) u_{ps} \rightarrow \\ &\rightarrow (\hat{p} + m)\gamma^\alpha u_{ps} = (2p^\alpha - m\gamma^\alpha + m\gamma^\alpha) u_{ps} = 2p^\alpha u_{ps}. \end{aligned}$$

Запишем теперь упрощенное выражение для матричного элемента:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -ie^2 \bar{u}_{p's'} \left[\gamma^\beta \frac{2p^\alpha + \hat{k}\gamma^\alpha}{s - m^2} + \gamma^\alpha \frac{2p^\beta - \hat{k}'\gamma^\beta}{u - m^2} \right] u_{ps} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) \varepsilon_\beta^*(k', \lambda') = \\ &= -ie^2 \bar{u}_{p's'} \left[\frac{2p^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \hat{k}\gamma^\alpha}{s - m^2} + \frac{2p^\beta \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \hat{k}'\gamma^\beta}{u - m^2} \right] u_{ps} \varepsilon_\alpha(k, \lambda) \varepsilon_\beta^*(k', \lambda'). \end{aligned}$$

Вычислим теперь эрмитово сопряженное к полученному выражению. После перемножения исходного выражения и эрмитово сопряженного получим квадрат матричного элемента, содержащий большое количество следов. Квадрат матричного элемента описывает полную вероятность процесса и входит в формулу полного сечения. Достаточно компактная итоговая формула будет в некоторой описывать экспериментальные данные. Однако при более высоких энергиях нужно будет учитывать дополнительные процессы.

Вспомним преобразование структур при эрмитовом сопряжении:

$$\begin{aligned} (\bar{u}' \gamma^\alpha u)^+ &= u^+ (\gamma^\alpha)^+ (\bar{u}')^+ = u^+ \gamma_0 \gamma_0 (\gamma^\alpha)^+ ((u')^+ \gamma_0)^+ = u^+ \gamma_0 \gamma_0 (\gamma^\alpha)^+ \gamma_0^+ u'^+ \\ &= \bar{u} \gamma_0 (\gamma^\alpha)^+ \gamma_0' = \bar{u} \gamma^\alpha u'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{u}' \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu u)^+ &= u^+ (\gamma^\mu)^+ (\gamma^\beta)^+ (\gamma^\alpha)^+ \gamma_0 u' = \bar{u} \gamma_0 (\gamma^\mu)^+ \gamma_0 \gamma_0 (\gamma^\beta)^+ \gamma_0 \gamma_0 (\gamma^\alpha)^+ \gamma_0 u' = \\ &= \bar{u} \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha u'; \end{aligned}$$

Итак, для эрмитова сопряжения справедливо:

$$(i\mathcal{M})^+ = +ie^2 \bar{u}_{ps} \left[\frac{2p^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\alpha \hat{k}\gamma^\beta}{s - m^2} + \frac{2p^\beta \gamma^\alpha - \gamma^\beta \hat{k}'\gamma^\alpha}{u - m^2} \right] u_{p's'} \varepsilon_\alpha^*(k, \lambda) \varepsilon_\beta(k', \lambda').$$

Заменим индексы в формуле для эрмитова сопряжения, чтобы при перемножении индексы не встречались чаще двух раз:

$$(i\mathcal{M})^+ = +ie^2 \bar{u}_{ps} \left[\frac{2p^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \hat{k}\gamma^\nu}{s - m^2} + \frac{2p^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \hat{k}'\gamma^\mu}{u - m^2} \right] u_{p's'} \varepsilon_\mu^*(k, \lambda) \varepsilon_\nu(k', \lambda').$$

Выражение для усредненного квадрата матричного элемента

Вычислим квадрат модуля матричного элемента. При этом пусть начальный фотон не поляризован – у него нет выделенного направления λ . Тогда необходимо усреднение по начальной поляризации:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (i\mathcal{M})(i\mathcal{M})^+.$$

Пусть теперь детектор конечного состояния не измеряет поляризацию конечного состояния. В таком случае необходимо суммирование по поляризации конечного состояния:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (i\mathcal{M})(i\mathcal{M})^+.$$

Рассмотрим с математической точки зрения произведение векторов поляризации, к которым применим суммирование:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \varepsilon_{\alpha}(k, \lambda) \varepsilon_{\mu}^*(k, \lambda) \varepsilon_{\nu}(k', \lambda') \varepsilon_{\beta}^*(k', \lambda').$$

Вспомним, что для суммирования спиноров справедливо:

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \hat{p} + m.$$

Для векторов поляризации есть аналогичная формула:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\alpha}(k, \lambda) \varepsilon_{\beta}^*(k, \lambda) = -g_{\alpha\beta},$$

где $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор. Тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \varepsilon_{\alpha}(k, \lambda) \varepsilon_{\mu}^*(k, \lambda) \varepsilon_{\nu}(k', \lambda') \varepsilon_{\beta}^*(k', \lambda') = \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}.$$

Для квадрата модуля матричного элемента в таком случае справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2} \bar{u}_{p's'} \left[\frac{2p^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\hat{k}\gamma^{\alpha}}{s - m^2} + \frac{2p^{\beta}\gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha}\hat{k}'\gamma^{\beta}}{u - m^2} \right] u_{ps} \times \\ &\times \bar{u}_{ps} \left[\frac{2p^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\mu}\hat{k}\gamma^{\nu}}{s - m^2} + \frac{2p^{\nu}\gamma^{\mu} - \gamma^{\nu}\hat{k}'\gamma^{\mu}}{u - m^2} \right] u_{p's'} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} = \\ &= \frac{e^4}{2} \bar{u}_{p's'} \left[\frac{2p^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\hat{k}\gamma^{\alpha}}{s - m^2} + \frac{2p^{\beta}\gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha}\hat{k}'\gamma^{\beta}}{u - m^2} \right] u_{ps} \times \\ &\times \bar{u}_{ps} \left[\frac{2p_{\alpha}\gamma_{\beta} + \gamma_{\alpha}\hat{k}\gamma_{\beta}}{s - m^2} + \frac{2p_{\beta}\gamma_{\alpha} - \gamma_{\beta}\hat{k}'\gamma_{\alpha}}{u - m^2} \right] u_{p's'}. \end{aligned}$$

Перенесем последний спинор $u_{p's'}$ в начало и превратим то, что остается, в след:

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2} \text{Tr}\{u_{p's'} \bar{u}_{p's'} [\dots] u_{ps} \bar{u}_{ps} [\dots]\}.$$

Здесь можно задаться вопросом: есть ли возможность измерить поляризации электронов в эксперименте? Если да, тогда есть смысл провести вычисление, сохраняя поляризации. Если нет, то следует провести процедуру усреднения. Пусть электрон в начальном состоянии не поляризован (спин вверх или спин вниз), в конечном состоянии поляризация не измеряется. Тогда необходимо усреднение по поляризации начального и просуммировать по поляризациям конечного состояний:

$$\frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \text{Tr}\{(\hat{p}' + m) [\dots] (\hat{p} + m) [\dots]\}.$$

Идея вычисления следов заключается в группировании по определенной структуре.

Перепишем выражение в виде четырех структур:

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{I}{(s - m^2)^2} + \frac{II}{(s - m^2)(u - m^2)} + \frac{III}{(s - m^2)(u - m)^2} + \frac{IV}{(u - m^2)^2} \right],$$

$$\begin{aligned} I &= \text{Tr}[(\hat{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu)(\hat{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu)], \\ II &= \text{Tr}[(\hat{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu)(\hat{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu - \gamma_\nu \hat{k} \gamma_\mu)], \\ III &= \text{Tr}[(\hat{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \hat{k} \gamma^\nu)(\hat{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu)], \\ IV &= \text{Tr}[(\hat{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \hat{k} \gamma^\nu)(\hat{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu - \gamma_\nu \hat{k} \gamma_\mu)]. \end{aligned}$$

Следы достаточно простые, но громоздкие. Проведем вычисление для первого из следов. Для остальных ответы запишем по аналогии: если в первом следе заменить k на $-k'$, то получим выражение, похожее на четвертый след, но отличающееся индексами. Индексы также могут быть переименованы: $\mu \leftrightarrow \nu$. Тогда первый след превращается в четвертый. Второй след превращается в третий след, если также заменить k на $-k'$ и поменять индексы $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$I(k \rightarrow k') \rightarrow IV;$$

$$II(k \rightarrow k') \rightarrow III;$$

Так, необходимо вычислить только первый и второй следы. Вспомним переменные Мандельштама:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2, \\ u &= (p - k')^2 = (p' - k)^2. \end{aligned}$$

При замене в формуле для s k на $-k'$ получим u , а при замене в u k на $-k'$ получим s . Тогда вместо замены k на $-k'$ можно провести замену $u \leftrightarrow s$.

Вычисление следа I

Начнем вычислять первый след. При раскрытии скобок получим 16 слагаемых. Половина слагаемых будет содержать четное число γ -матриц, другая половина –

нечетное, а, как известно, след от нечетного числа γ -матриц нулевой. Тогда остается 8 следов, которые необходимо вычислить.

Распишем произведение первых двух скобок следа I:

$$(\hat{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu) = 2p^\mu \hat{p}' \gamma^\nu + \hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu + 2mp^\mu \gamma^\nu + m\gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu.$$

Произведение двух последних скобок:

$$(\hat{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu) = 2p_\mu \hat{p} \gamma_\nu + \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu + 2mp_\mu \gamma_\nu + m\gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (\hat{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu)(\hat{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu) = \\ & = (2p^\mu \hat{p}' \gamma^\nu + \hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu + 2mp^\mu \gamma^\nu + m\gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu)(2p_\mu \hat{p} \gamma_\nu + \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu + 2mp_\mu \gamma_\nu + m\gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu) \\ & = 4p^\mu p_\mu \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \gamma_\nu + 2\hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \hat{k} \gamma_\nu + \underline{4mp^\mu p_\mu \hat{p}' \gamma^\nu \gamma_\nu} + \underline{2mp^\mu \hat{p}' \gamma^\nu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu} + \\ & \quad + 2\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \hat{p} \gamma_\nu + \hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu + \underline{2m\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \gamma_\nu} + \underline{m\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu} + \\ & \quad + \underline{4mp^\mu \gamma^\nu p_\mu \hat{p} \gamma_\nu} + \underline{2mp^\mu \gamma^\nu \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu} + 4m^2 p^\mu \gamma^\nu p_\mu \gamma_\nu + 2m^2 p^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu + \\ & \quad + \underline{2m\gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \hat{p} \gamma_\nu} + \underline{m\gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu} + 4m^2 \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \gamma_\nu + m^2 \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu, \end{aligned}$$

где подчеркнутые слагаемые зануляются, поскольку содержат нечетное число γ -матриц. Вычислим каждый из оставшихся 8 следов:

$$Tr[4p^\mu p_\mu \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \gamma_\nu] = Tr[4m^2 \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \gamma_\nu] = -8m^2 Tr[\hat{p}' \hat{p}] = -32m^2(p \cdot p');$$

$$Tr[2\hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \hat{k} \gamma_\nu] = Tr[2\hat{p}' \gamma^\nu m^2 \hat{k} \gamma_\nu] = -4m^2 Tr[\hat{p}' \hat{k}] = -16m^2(p' \cdot k);$$

$$Tr[2\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \hat{p} \gamma_\nu] = 2m^2 Tr[\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma_\nu] = -16m^2(p' \cdot k);$$

$$\begin{aligned} & Tr[\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \hat{p} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = -2Tr[\hat{p}' \gamma^\nu \hat{k} \hat{p} \hat{k} \gamma_\nu] = -2Tr[\hat{p}'(-2\hat{k} \hat{p} \hat{k})] = 4Tr[\hat{p}' \hat{k} \hat{p} \hat{k}] = \\ & = 4p'_\mu k_\nu p_\alpha k_\beta Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 16p'_\mu k_\nu p_\alpha k_\beta (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\nu\alpha} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) = \\ & = 16((p' \cdot k)(p \cdot k) + (p' \cdot k)(k \cdot p) - (p \cdot p')(k \cdot k)) = 32(p' \cdot k)(p \cdot k); \end{aligned}$$

$$Tr[4m^2 p^\mu \gamma^\nu p_\mu \gamma_\nu] = 4m^4 Tr[\gamma^\nu \gamma_\nu] = 64m^4;$$

$$Tr[2m^2 p^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = 2m^2 Tr[p^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = 2m^2 Tr[\gamma^\nu \hat{p} \hat{k} \gamma_\nu] = 32m^2(p \cdot k);$$

$$Tr[4m^2 \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu p_\mu \gamma_\nu] = 2m^2 Tr[\gamma^\nu \hat{k} \hat{p} \gamma_\nu] = 32m^2(p \cdot k);$$

$$Tr[m^2 \gamma^\nu \hat{k} \gamma^\mu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = 4m^2 Tr[\gamma^\nu \hat{k} \hat{k} \gamma_\nu] = 4m^2 4k^2 = \{k = m_\gamma = 0\} = 0.$$

Так, первый след вычислен. Для второго следа вычисления аналогичны. Чтобы вычислить третий и четвертый следы необходимо сделать замену.

Лекция 8. Эффект Комптона (продолжение)

Вычисление усредненного квадрата матричного элемента

Итак, на прошлой лекции были нарисованы 2 диаграммы Фейнмана, каждой из которых в соответствие поставлено алгебраическое выражение, записан матричный элемент. Далее был получен квадрат модуля матричного элемента. Предположение о том, что начальные и конечные фотон и электрон не поляризованы, привело к появлению коэффициента $\frac{1}{4}$ и суммированию по начальному и конечному спинам электрона, а также суммированию по начальной и конечной поляризации фотона. В результате такого суммирования исчезли все вектора поляризации фотонов, а $\bar{u}$ и u преобразовались в матрицы $(\hat{p}' + m)$ и $(\hat{p} + m)$. Итоговый матричный элемент, усредненный по начальным состояниям и просуммированный по конечным состояниям представляет собой сумму четырех слагаемых, которые сгруппированы по виду знаменателя. Записав выражения для каждого из следов в числителях слагаемых матричного элемента, можно заметить, что первый след переходит в четвертый, а второй в третий при замене $k \rightarrow k'$ или $u \rightarrow s$. Первый след был вычислен подробно, второй вычисляется аналогично.

Выпишем теперь все следы I-IV через переменные Мандельштама:

$$\begin{aligned} I &= 16(4m^4 - 2m^2(p \cdot p') + 4m^2(p \cdot k) - 2m^2(p' \cdot k) + 2(p' \cdot k)(p \cdot k)) = \\ &= 8(4m^4 + 2m^2(s - m^2) - (s - m^2)(u - m^2)); \end{aligned}$$

$$IV = 8(4m^2 + 2m^2(u - m^2) - (s - m^2)(u - m^2));$$

$$\begin{aligned} II &= 8(2m^2(p \cdot p') + 4(p \cdot p')(p \cdot k') - 2m^2(p' \cdot k') - 4(p \cdot p')(p \cdot k) + 2m^2(p' \cdot k) + \\ &+ 4(k \cdot k')(p \cdot p') + 2m^4 + 4m^2(p \cdot k) - 4m^2(p \cdot k') - 2m^2(k \cdot k')) = \\ &= 8(4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)) = III. \end{aligned}$$

Тогда для матричного элемента можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} \left[\frac{I}{(s - m^2)^2} + \frac{II}{(s - m^2)(u - m^2)} + \frac{III}{(s - m^2)(u - m^2)} + \frac{IV}{(u - m^2)^2} \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{4m^4 + 2m^2(s - m^2) - (s - m^2)(u - m^2)}{(s - m^2)^2} + \right. \\ &\quad + 2 \frac{4m^4 + m^2(s - m^2) + m^2(u - m^2)}{(s - m^2)(u - m^2)} + \\ &\quad \left. + \frac{4m^2 + 2m^2(u - m^2) - (s - m^2)(u - m^2)}{(u - m^2)^2} \right] = \\ &= 2e^4 \left[\frac{4m^4}{(s - m^2)^2} + \frac{2m^2}{s - m^2} - \frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{8m^4}{(s - m^2)(u - m^2)} + \frac{2m^2}{u - m^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m^2}{s - m^2} + \frac{4m^4}{(u - m^2)^2} + \frac{2m^2}{u - m^2} - \frac{s - m^2}{u - m^2} \right]. \end{aligned}$$

Подчеркиванием выделены слагаемые, образующие полный квадрат, кроме того, можно заметить наличие одинаковых слагаемых в выражении:

$$\frac{1}{4} \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} |i\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[4m^4 \left(\frac{1}{s-m^2} + \frac{1}{u-m^2} \right)^2 + \frac{4m^2}{s-m^2} + \frac{4m^2}{u-m^2} - \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} + \frac{s-m^2}{u-m^2} \right) \right].$$

Дифференциальное сечение рассеяния

Запишем теперь общее выражение для сечения:

$$\begin{aligned} d^6\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \frac{1}{4} \sum_{s,s',\lambda,\lambda'} |i\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p \cdot k)^2 - m^2 m_\gamma^2}} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'} = \\ &= \frac{\delta^4(p+k-p'-k')}{(2\pi)^2 16(p \cdot k)} \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p'}{E'} \frac{d^3k'}{\omega'} \end{aligned}$$

Снимем интеграл по трехмерному импульсу d^3p' :

$$d^3\sigma = \int \frac{d^6\sigma}{d^3p'} d^3p' = \frac{\delta(E+\omega-E'-\omega')}{64\pi^2(p \cdot k)} \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{d^3k'}{E'\omega'} \Big|_{\vec{p}' = \vec{p} + \vec{k} - \vec{k}'}$$

Перейдем в систему центра масс начальных фотона и электрона. Тогда $\vec{p}' = -\vec{k}'$. В такой системе определим все углы (рис. 8.1) и распишем d^3k' в сферической системе координат:

$$d^3k' = d\omega' \omega'^2 d\phi \sin\theta d\theta.$$

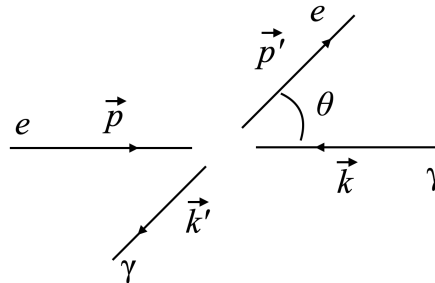


Рис. 8.1. Импульсы в системе центра масс.

Проинтегрируем $d^3\sigma$ по азимутальному углу $d\phi$, а также по $d\omega'$, воспользовавшись δ -функцией. Сначала распишем компоненты:

1. $s = (p+k)^2 = (E+\omega)^2 + (\vec{p} + \vec{k})^2 = (E+\omega)^2 \rightarrow E+\omega = \sqrt{s}$;
2. $E' + \omega' = \sqrt{\vec{p}'^2 + m^2} + \omega' = \sqrt{\vec{k}'^2 + m^2} + \omega' = \sqrt{\omega'^2 + m^2} + \omega'$;
3. $\delta(E+\omega-E'-\omega') = \delta(\sqrt{s} - \omega' - \sqrt{\omega'^2 + m^2}) \rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\omega') \delta(g(\omega')) = \frac{f(\omega'_0)}{|g'(\omega'_0)|}$$

$$g'(\omega) = -1 - \frac{\omega'}{\sqrt{\omega'^2 + m^2}} = -\left(\frac{E' + \omega'}{E'}\right) = -\frac{\sqrt{s}}{E'} \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\omega') \delta(g(\omega')) = \frac{f(\omega'_0) E'}{\sqrt{s}}.$$

Тогда для дифференциального сечения $d\sigma$ можем записать:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{1}{32\pi(p \cdot k)} \frac{\omega'_0{}^2}{E' \omega'_0} \frac{E'}{\sqrt{s}} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{\omega'_0}{\sqrt{s}} \frac{1}{32\pi(s - m^2)} \sin \theta \, d\theta.$$

В полученном выражении остается перевыразить θ через u , а также определить ω'_0 . После интегрирования получим итоговый ответ.

Определим ω'_0 :

$$\sqrt{s} - \omega' - \sqrt{\omega'^2 + m^2} = 0, \quad (\sqrt{s} - \omega')^2 = \omega'^2 + m^2 = s - 2\sqrt{s}\omega' + \omega'^2 \rightarrow$$

$$\omega'_0 = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \rightarrow$$

$$\frac{\omega'_0}{\sqrt{s}} \frac{2}{(s - m^2)} = \frac{(s - m^2)}{2s} \frac{2}{(s - m^2)} = \frac{1}{s}.$$

После такого упрощения для дифференциального сечения получаем:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{1}{32\pi s} \sin \theta \, d\theta.$$

Перевыразим $\sin \theta \, d\theta$ через u :

$$u = (p - k')^2 = m^2 - 2(p \cdot k') = m^2 - 2(E\omega' - \vec{p} \cdot \vec{k}') = m^2 - 2(E\omega' - |\vec{p}| |\vec{k}'| \cos \theta).$$

При этом в системе центра масс:

$$|\vec{p}'| = \omega'_0 = \frac{s - m^2}{2\sqrt{E}},$$

$$E' = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \sqrt{\frac{(s - m^2)^2}{4s} + \frac{4sm^2}{4s}} = \sqrt{\frac{s^2 - 2sm^2 + 4sm^2 + m^4}{4s}} = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}}.$$

Тогда для u и du справедливо:

$$u = m^2 - 2\omega'(E + \omega \cos \theta), \quad du = -2\omega' \omega \, d \cos \theta.$$

Пределы интегрирования в таком случае следующие:

$$u(\theta = 0) = m^2 - 2\omega'(E + \omega) = m^2 - 2 \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \sqrt{s} = 2m^2 - s;$$

$$u(\theta = \pi) = m^2 - 2\omega'(E - \omega) = m^2 - 2 \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \frac{m^2}{\sqrt{s}} = \frac{m^4}{s},$$

так как

$$E - \omega = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}} - \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m^2}{\sqrt{s}}.$$

Теперь возможно расписать $\sin \theta d\theta$:

$$\sin \theta d\theta = -\cos \theta = \frac{du}{2\omega\omega'} = \frac{du}{2\omega^2} = \frac{du}{2(s - m^2)^2}.$$

Запишем итоговое выражение для дифференциального сечения:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{2s}{32\pi s} \frac{du}{(s - m^2)^2} = \frac{1}{4} \sum |i\mathcal{M}|^2 \frac{1}{16\pi} \frac{du}{(s - m^2)^2}.$$

Теперь в выражении для дифференциального сечения можно записать явное выражение для квадрата матричного элемента:

$$d\sigma = \frac{2e^4}{16\pi} \left[4m^4 \left(\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right)^2 + \frac{4m^2}{s - m^2} + \frac{4m^2}{u - m^2} - \left(\frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{s - m^2}{u - m^2} \right) \right] \times \frac{du}{(s - m^2)^2}.$$

Упростим выражение с помощью хорошо известной константы электромагнитного взаимодействия:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \rightarrow e^2 = 4\pi\alpha \rightarrow e^4 = 16\pi^2\alpha^2.$$

Тогда:

$$d\sigma = 8\pi\alpha^2 \left[\left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{u - m^2}{s - m^2} + \frac{s - m^2}{u - m^2} \right) \right] \times \frac{du}{(s - m^2)^2}.$$

Введем безразмерные переменные:

$$a \equiv \frac{s - m^2}{m^2}; \quad b \equiv \frac{m^2 - u}{m^2}, \quad db = -\frac{du}{m^2};$$

тогда пределы интегрирования по b следующие:

$$b(u = 2m^2 - s) = \frac{m^2 - 2m^2 + s}{m^2} = \frac{s - m^2}{m^2} = a;$$

$$b\left(u = \frac{m^4}{s}\right) = \frac{m^2 - \frac{m^4}{s}}{m^2} = \frac{s - m^2}{s} = 1 - \frac{m^2}{s} = 1 - \frac{1}{1 + a} = \frac{a}{1 + a}.$$

При этом последний множитель в формуле дифференциального сечения примет вид:

$$\frac{du}{(s - m^2)^2} = -\frac{m^2 db}{(s - m^2)^2} = -\frac{1}{a^2 m^2} db.$$

Полное сечение

Запишем теперь выражение для полного сечения рассеяния фотона на электроне:

$$\begin{aligned}\sigma(e + \gamma \rightarrow e + \gamma) &= \frac{8\pi\alpha^2}{m^2 a^2} \int_{\frac{1}{1+a}}^a db \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right] = \\ &= \frac{2\pi r_e^2}{a} \left[\left(1 - \frac{4}{a} - \frac{8}{a^2} \right) \ln(1+a) + \frac{1}{2} + \frac{8}{a} - \frac{1}{2(1+a)^2} \right],\end{aligned}$$

где $r_e = \frac{\alpha}{m}$ – классический радиус электрона, показывает каким должен быть размер электрона, чтобы его масса происходила исключительно из его кулоновского поля.

Рассмотрим 2 случая:

- 1) энергии нерелятивистские, то есть $s \approx m^2$, $a \ll 1$:

$$\sigma \cong \frac{8\pi r_e^2}{3} (1 - a),$$

такое сечение близко к некоторой константе, большой по величине;

- 2) в ультрарелятивистском случае $s \gg m^2$, $a \gg 1$:

$$\sigma \cong \frac{2\pi r_e^2}{a} \left(\ln a + \frac{1}{2} \right),$$

где логарифмический рост подавляется параметром a в знаменателе.

Так, при больших энергиях сечение комптоновского рассеяния уменьшается. Полученные формулы могут быть использованы при анализе экспериментальных данных.

Экспериментально комптоновское рассеяние используется, например, при калибровке сцинтилляторов и кристаллов. На ускорителях в свою очередь есть эффект обратного комптоновского рассеяния при лобовом столкновении ускоренных электронов и фотонов от лазерного пучка, отскакивающие в таком случае фотоны приобретают большую энергию и отскакивают практически в обратную сторону относительно своего исходного направления движения. Так можно получить быстрые γ -кванты. Комптоновский процесс также важен в космологии и других областях, в том числе в обыденной жизни (например, поляризационные очки). При этом комптоновский процесс впервые доказал, что фотон существует в виде кванта электромагнитного поля.

Лекция 9. Рассеяние Баба

Рассеяние Баба

Рассмотрим рассеяние Баба:

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-.$$

При столкновении позитрон и электрон не обязательно аннигилируют, части могут рассеяться друг на друге и разлететься. Процесс рассеяния позитрона на электроне имеет достаточно большое сечение и используется в прагматичных целях на ускорителях для измерения светимости ускорителя L :

$$L = \frac{N(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}{\varepsilon \sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}$$

$N(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ - число взаимодействий, $\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ - сечение рассеяния, ε – эффективность установки, может быть получено методами моделирования.

Изобразим диаграммы, соответствующие этому процессу. Первый вариант – аннигиляция (рис. 9.1 (а)). Из прошлого приходят позитрон и электрон, при этом позитрон обозначается как электрон, движущийся в обратную сторону по времени. Электрон и позитрон сталкиваются в некоторой точке, образуя виртуальный фотон с импульсом, равным сумме импульсов начальных электрона и позитрона. Однако электрон и позитрон не могут аннигилировать в один фотон, поскольку это противоречит закону сохранения энергии-импульса. Поэтому спустя короткое время фотон превратится в пару электрон-позитрон. Такой процесс называется *s*-канальным, в том числе и потому, что диаграмма пропорциональна $1/s$ из-за пропагатора фотона. Другой вид диаграммы представлен на рисунке 9.1 (б). Начальный электрон может сразу превратиться в конечный электрон, испустив виртуальный фотон. Внизу расположена фермионная линия позитрона, направленная в обратную сторону по времени. Импульс виртуального фотона равен разнице между импульсами начального и конечного электронов $p - p' = t$. Такой процесс называется *t*-канальным.

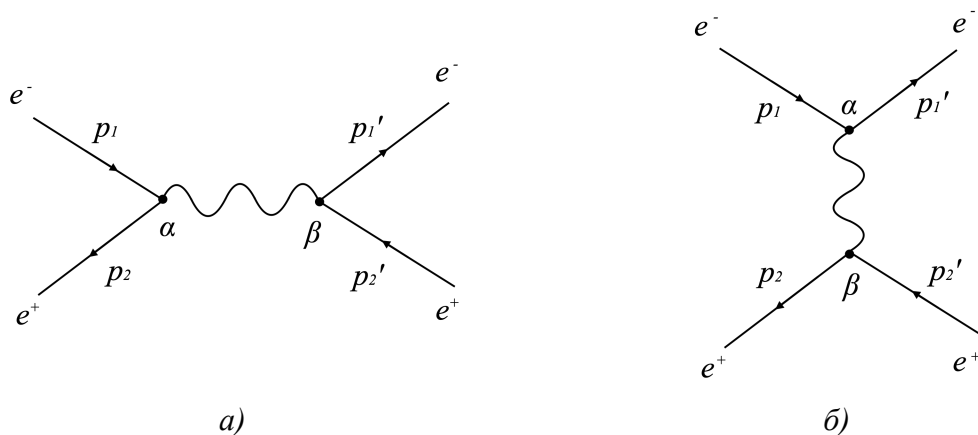
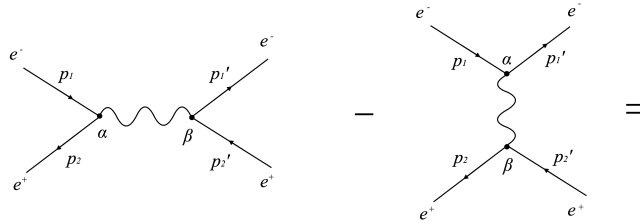


Рис. 9.1. Диаграммы Фейнмана рассеяния Баба для а) *s*-канального процесса и б) *t*-канального процесса.

Теперь необходимо решить, с каким знаком или фазой складываются эти две диаграммы. Перевернем мысленно диаграмму 9.1 (б) на 90 градусов и сравним концы диаграмм 9.1 (б) и 9.1 (а). Для того, чтобы все концы совпадали, необходимо поменять местами позитрон и электрон, что отвечает одной перестановке фермионов. При перестановке фермионов меняется знак, при вычислении матричного элемента диаграммы входят с разными знаками.

Теперь выпишем матричный элемент. Начнем с первой диаграммы, будем двигаться против направления тока:



$$i\mathcal{M} = \bar{v}_{p_2} ie\gamma_\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1'} ie\gamma_\beta v_{p_2'} \frac{(-ig^{\alpha\beta})}{(p_1 + p_2)^2} - \bar{u}_{p_1'} ie\gamma_\alpha u_{p_1} \bar{v}_{p_2} ie\gamma_\beta v_{p_2'} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(p_1 - p_1')^2}.$$

Вспомним кинематические переменные, которые будут интересны в данном случае:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_1')^2.$$

Упростим выражение для матричного элемента:

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left[\frac{\bar{v}_{p_2} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1'} \gamma_\alpha v_{p_2'}}{s} - \frac{\bar{u}_{p_1'} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{v}_{p_2} \gamma_\alpha v_{p_2'}}{t} \right].$$

Вычислим комплексное сопряженное к матричному элементу:

$$(i\mathcal{M})^+ = -ie^2 \left[\frac{1}{s} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta v_{p_2} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta u_{p_1'} - \frac{1}{t} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta u_{p_1'} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta v_{p_2} \right].$$

Квадрат матричного элемента

Найдем теперь квадрат матричного элемента, усредненный по начальным состояниям и просуммированный по конечным состояниям. При этом при перемножении расставим спиноры в удобные места – поставим рядом спиноры с одинаковыми индексами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |i\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4} \sum_{\text{спины}} \left[\frac{1}{s^2} \text{Tr}(v_{p_2} \bar{v}_{p_2} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta) \cdot \text{Tr}(u_{p_1'} \bar{u}_{p_1'} \gamma_\alpha v_{p_2'} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta) - \right. \\ &\quad - \frac{1}{st} \text{Tr}(v_{p_2} \bar{v}_{p_2} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta u_{p_1'} \bar{u}_{p_1'} \gamma_\alpha v_{p_2'} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta) - \\ &\quad - \frac{1}{st} \text{Tr}(u_{p_1'} \bar{u}_{p_1'} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta v_{p_2} \bar{v}_{p_2} \gamma_\alpha v_{p_2'} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{t^2} \text{Tr}(u_{p_1'} \bar{u}_{p_1'} \gamma^\alpha u_{p_1} \bar{u}_{p_1} \gamma^\beta) \cdot \text{Tr}(v_{p_2} \bar{v}_{p_2} \gamma_\alpha v_{p_2'} \bar{v}_{p_2'} \gamma_\beta) \right]. \end{aligned}$$

Будем считать электроны и позитроны безмассовыми, это приведет к тому, что в ультрарелятивистском случае справедливо:

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \hat{p} + m \rightarrow \hat{p},$$

$$\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \hat{p} + m \rightarrow \hat{p}.$$

Тогда можно преобразовать выражение для квадрата матричного элемента следующим образом:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{1}{s^2} \text{Tr}(\hat{p}_2 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta) \cdot \text{Tr}(\hat{p}'_1 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta) - \frac{1}{st} \text{Tr}(\hat{p}_2 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta \hat{p}'_1 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{st} \text{Tr}(\hat{p}'_1 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta \hat{p}_2 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta) + \frac{1}{t^2} \text{Tr}(\hat{p}'_1 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta) \cdot \text{Tr}(\hat{p}_2 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta) \right] =$$

Следовательно

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{16}{s^2} \{p_2^\alpha p_1^\beta + p_2^\beta p_1^\alpha - (p_1 \cdot p_2) g^{\alpha\beta}\} \{p'_{1\alpha} p'_{2\beta} + p'_{1\beta} p'_{2\alpha} - (p'_1 \cdot p'_2) g_{\alpha\beta}\} - \right. \\ \left. - \frac{1}{st} 32(p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{16}{t^2} \{p_1'^\alpha p_1'^\beta + p_1'^\beta p_1'^\alpha - (p'_1 \cdot p_1) g^{\alpha\beta}\} \{p_{2\alpha} p'_{2\beta} + p_{2\beta} p'_{2\alpha} - (p_2 \cdot p'_2) g_{\alpha\beta}\} \right],$$

поскольку

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{p}'_1 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta \hat{p}_2 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta) &= -2 \text{Tr}(\hat{p}'_1 \hat{p}_2 \gamma^\beta \hat{p}_1 \hat{p}'_2 \gamma_\beta) = -8(p_1 \cdot p'_2) \text{Tr}(\hat{p}'_1 \hat{p}_2) \\ &= -32(p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) = \text{Tr}(\hat{p}_2 \gamma^\alpha \hat{p}_1 \gamma^\beta \hat{p}'_1 \gamma_\alpha \hat{p}'_2 \gamma_\beta). \end{aligned}$$

Остается перемножить фигурные скобки и записать ответ.

$$\begin{aligned} \{p_2^\alpha p_1^\beta + p_2^\beta p_1^\alpha - (p_1 \cdot p_2) g^{\alpha\beta}\} \{p'_{1\alpha} p'_{2\beta} + p'_{1\beta} p'_{2\alpha} - (p'_1 \cdot p'_2) g_{\alpha\beta}\} &= \\ &= \frac{(p_2 \cdot p'_1)(p_1 \cdot p'_2) + (p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1) - (p'_1 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p_2) +}{+ (p_2 \cdot p'_1)(p_1 \cdot p'_2) + (p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1) - (p'_1 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p_2) -} \\ &\quad - (p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) - (p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) + 4(p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) = \\ &= 2((p_2 \cdot p'_1)(p'_2 \cdot p_1) + (p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_1'^\alpha p_1'^\beta + p_1'^\beta p_1'^\alpha - (p'_1 \cdot p_1) g^{\alpha\beta}\} \{p_{2\alpha} p'_{2\beta} + p_{2\beta} p'_{2\alpha} - (p_2 \cdot p'_2) g_{\alpha\beta}\} &= \\ &= 2((p'_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p'_2) + (p'_1 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p_2)). \end{aligned}$$

Для усредненного по начальным состояниям и просуммированного по конечным состояниям матричного элемента тогда можно записать итоговое выражение:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{32}{s^2} ((p_2 \cdot p'_1)(p'_2 \cdot p_1) + (p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1)) - \frac{64}{st} (p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) + \right. \\ \left. + \frac{32}{t^2} ((p'_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p'_2) + (p'_1 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p_2)) \right].$$

Выражение через переменные Мандельштама и сечение рассеяния

Вспомним переменные Мандельштама:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(p_1 \cdot p_2) = 2(p'_1 \cdot p'_2); \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = -2(p_1 \cdot p'_1) = -2(p_2 \cdot p'_2); \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = -2(p_1 \cdot p'_2) = -2(p'_1 \cdot p_2). \end{aligned}$$

Тогда в переменных Мандельштама можно переписать выражение для квадрата матричного элемента:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{спины}} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{8}{s^2} (u^2 + t^2) - \frac{16}{st} u^2 + \frac{8}{t^2} (u^2 + s^2) \right] = 2e^4 \left[\frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{2u}{st} \right].$$

Это выражение можно подставить в формулу для сечения рассеяния, полученную для комптоновского рассеяния, и получить следующее:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{\pi \alpha^2}{s} \left[\left(\frac{u}{s} + \frac{u}{t} \right)^2 \left(\frac{t}{s} \right)^2 + \left(\frac{s}{t} \right)^2 \right].$$

Так, получено сечение для рассеяния электрона на позитроне.

Лекция 10. Калибровочная симметрия

Калибровочная симметрия

В предыдущих лекциях была подробно изучена квантовая электродинамика. Теперь необходимо построить теории следующих взаимодействий, а именно слабых взаимодействий. Здесь возникает концептуальный вопрос о том, как их строить. Вспомним, как была построена квантовая электродинамика:

- 1) Максвелл создал теорию электромагнетизма.
- 2) Было выяснено, что в теории Максвелла есть константа – скорость света, которая строится из постоянных вакуума. Эйнштейн и другие пришли к мысли о том, что квантовая электродинамика должна быть совместима с новым принципом – принципом относительности, что привело к созданию *специальной теории относительности*, согласованной с квантовой электродинамикой;
- 3) Когда был построен специальный формализм в специальной теории относительности, оказалось легко построить действие. Из действия легко выводится функция Лагранжа для электродинамики. Тогда, при рассмотрении теории, в которой есть заряженная частица с импульсом p^μ , для перехода к теории, где та же частица помещена в электромагнитное поле, необходимо заменить 4-импульс на сдвинутый 4-импульс:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu,$$

где A^μ – векторный потенциал, в котором находится заряженная частица.

После этих шагов рецепт построения теории, описывающей взаимодействие заряженной частицы с электромагнитным полем готов. Лагранжиан свободной теории после замены, соответствующей пункту 3, преобразуется в Лагранжиан теории, где заряженные частицы взаимодействуют с электрическим полем:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi \xrightarrow{i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu} \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

где γ^μ и A_μ – квантовые операторы, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ – тензор электромагнитного поля. Далее была построена S-матрица, оператор, который связывает состояние в бесконечно далеком прошлом с состоянием в бесконечно далеком будущем. После было рассмотрено вычисление матричных элементов, связанных с наблюдаемыми величинами – ширинами распадов и сечениями рассеяния. Остальные вопросы – технические.

Для слабых взаимодействий подобной теории нет. В этой лекции будет рассмотрен принцип, положенный в основу строительства теорий для слабых взаимодействий. Как и любой принцип, этот принцип невозможно доказать, он действует до тех пор, пока не появится противоречие. Этот принцип – калибровочная симметрия.

Симметрия – плодотворная идея. Если Лагранжиан обладает симметрией, то можно изменить волновую функцию на другую, домножив на фазовый множитель в степени $i\alpha$. Если этот множитель не зависит от координаты, то Лагранжиан останется инвариантным. Когда Лагранжиан остается инвариантным относительно некоторых изменений полей, входящих в него, то всегда по теореме Нётер с этим связана некоторая сохраняющаяся величина. Например, с инвариантностью Лагранжиана при перефазировке волновых функций связано сохранение электрического тока. Если при сдвиге на произвольный 4-вектор Лагранжиан сохраняется так, что действие и соответственно уравнения движения остаются инвариантными, тогда сохраняется энергия-импульс. При симметрии относительно вращения сохраняется полный орбитальный момент. Так, симметрии являются источниками законов сохранения.

Здесь логично задать вопрос: возможно существуют симметрии, которые являются источником самого вида взаимодействий? Действительно, такая симметрия существует – калибровочная симметрия. Первыми, кто положил эту мысль в виде принципа, были Салам и Ворд в 1961 году. Исходя из такого принципа возможно воспроизвести Лагранжиан квантовой электродинамики, не пользуясь историческими подсказками. После того, как мы убедимся, что принцип действительно работает, попробуем построить другие теории на основе этого принципа в надежде, что одна из них приведет к теории слабого взаимодействия. Так в конце концов и окажется. И следуя за классиками в ходе лекций будет построена стандартная модель, в которой появятся объединения слабого и электромагнитного взаимодействий.

Сформулируем теперь принцип калибровочной симметрии. Представим мысленный эксперимент. Представим, что на Земле некоторая команда ученых, состоящая из теоретика и двух экспериментаторов, решает измерить фермионное поле в далеких точках x и y . В эти точки отправляются 2 экспериментатора, предупрежденные о том, что фаза поля может быть произвольной константой – от этой фазы не зависят никакие наблюдаемые величины. Однако каждый из экспериментаторов записал свое значение фазы $\alpha(x)$ и $\alpha(y)$. После чего были проведены независимые измерения в каждой точке и отправлены теоретику. Теоретик решил сравнить эти значения между собой, начиная сравнивать, он вычел из одного поля второе, после чего вспомнил о фазах.

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & - & \psi(y) \\ e^{i\alpha(x)}\psi(x) & - & e^{i\alpha(y)}\psi(y) \end{array} \quad ?$$

Поскольку фазы были произвольными, разница становится неопределенной. Ситуация осложняется и тем, что в свободном Лагранжиане Дирака, приводящем к уравнению Дирака, присутствует частная производная фермионного поля по координате ∂_μ , другими словами – сравнение функций в двух соседних точках. Если функции могут быть изменены на произвольные множители, тогда $\partial_\mu\psi$ – плохо определенная величина. Тогда теоретик приходит к следующей мысли – *необходимо построить такую теорию, чтобы она не зависела от фазы.*

Проверим, является ли свободный Лагранжиан такой теорией. Рассмотрим свободный Лагранжиан и проведем фазовое преобразование.

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)e^{i\alpha(x)}\psi(x).$$

Очевидно, что такое преобразование не является инвариантным, поскольку $\alpha(x)$ зависит от координаты, значит при дифференцировании появится дополнительное слагаемое:

$$\mathcal{L}_0(x) \rightarrow \mathcal{L}_0(x) - \partial_\mu \alpha(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x).$$

Дополнительное слагаемое имеет вид произведения фермионного тока на некоторую величину, зависящую от индекса μ .

Построим тогда Лагранжиан, в котором есть такая инвариантность. Добавим в начальный Лагранжиан структуру, имеющую вид произведения поля на фермионный ток:

$$\mathcal{L}'(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - qA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x).$$

Сделаем два преобразования – **калибровочные преобразования**:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) = A'_\mu.\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(x) &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - qA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathcal{L}_0(x) - \partial_\mu \alpha(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) - qA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) + \partial_\mu \alpha(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = \mathcal{L}'(x).\end{aligned}$$

Так, лагранжиан $\mathcal{L}'(x)$ действительно является инвариантным относительно калибровочных преобразований. Теперь теоретик может сравнивать фермионные поля, не беспокоясь о том, что у каждого может быть своя фаза. Если в таком Лагранжиане есть и физический смысл, то необходимо сказать, что поле $A_\mu(x)$ – физическое. Значит у него должно быть соответствующее слагаемое в Лагранжиане, описывающее эволюцию. Заменим Лагранжиан $\mathcal{L}'(x)$ на $\mathcal{L}(x)$, в котором будут соответствующие слагаемые, делающие поле $A_\mu(x)$ физическим:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - qA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m_A^2}{2}A_\mu A^\mu.$$

Являются ли последние 2 слагаемых инвариантными относительно тех же калибровочных преобразований? Проверим:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\partial_\nu\alpha(x) + \frac{1}{q}\partial_\nu\partial_\mu\alpha(x) = F_{\mu\nu},$$

$$A_\mu A^\mu \rightarrow A'_\mu A'^\mu = A_\mu A^\mu - \frac{1}{q}(A_\mu\partial^\mu\alpha + A^\mu\partial_\mu\alpha) + \frac{1}{q^2}\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha.$$

Так, последнее слагаемое явно нарушает калибровочную инвариантность. Единственный выход – потребовать равенство нулю массы калибровочного векторного бозона:

$$m_A = 0.$$

В таком случае принцип калибровочной инвариантности выполняется.

Таким образом, Лагранжиан квантовой электродинамики может быть записан на основании нового принципа – **принципе калибровочной инвариантности**, который заключается в том, что фермионное поле может быть переопределено с произвольной фазой в любой точке пространства-времени. Этот принцип требует существования векторного поля, связанного с фермионным полем. Теория с фермионными полями без векторного поля – плохо определенная. Выясним теперь, что можно получить из нового принципа.

Связь фермионного и электромагнитного поля

Построим качественную аналогию, чтобы увидеть на интуитивном уровне существование связи между фермионным и электромагнитным полем. Вспомним школьную физику на уровне, включающем специальную теорию относительности. Пусть есть электрон, если он покоится, то силовые линии имеют вид сферически симметричных радиально расходящихся линий. Если электрон движется со скоростью, близкой к скорости света, то силовые линии будут поджаты к оси, перпендикулярной направлению движения, и вытянуты (поле усилится), при этом линии вдоль оси, параллельной направлению движения, останутся неизменными. Так происходит потому, что чем быстрее движется электрон, тем больше он похож на свет. А у света, как известно есть направление движения и расположенные перпендикулярно к нему напряженности электрического и магнитного полей. Поскольку электрон обладает массой, то силовые линии не в точности перпендикулярны направлению движения.

Проведем мысленный эксперимент. Пусть в начальный момент времени электрон покоился (рис. 10.1(а)). Затем электрон мгновенно ускоряется до скорости, близкой к скорости света $v \sim 1$ (рис. 10.1(б)), и будем рассматривать его через секунду от начального состояния. За 1 секунду электрон пройдет расстояние $v \cdot 1$ с. Кроме того, изменятся его силовые линии, причем эти линии должны быть соединены непрерывным образом с линиями покоящегося электрона (рис. 10.1(в)). Еще через 1 секунду силовые линии будут проходить по еще большему радиусу. Так, фронт, состоящий из концентрических кругов со временем распространяется. Это и есть электромагнитная волна, которая перестраивает электрическое поле по ходу распространения электрона.

Так, принцип калибровочной инвариантности – очень желательная вещь. Этот же принцип требует, чтобы фермионное поле было связано с векторным полем, и чтобы векторное поле существовало само по себе. Важнейшая вещь спи это следующая: принцип калибровочной инвариантности требует, чтобы масса электромагнитного поля равнялась нулю. В отличие от того, как квантовая электродинамика была построена раньше, где нулевая масса была продиктована экспериментальным фактом, сейчас нулевая масса продиктована тем, что иначе Лагранжиан не будет обладать калибровочной инвариантностью.

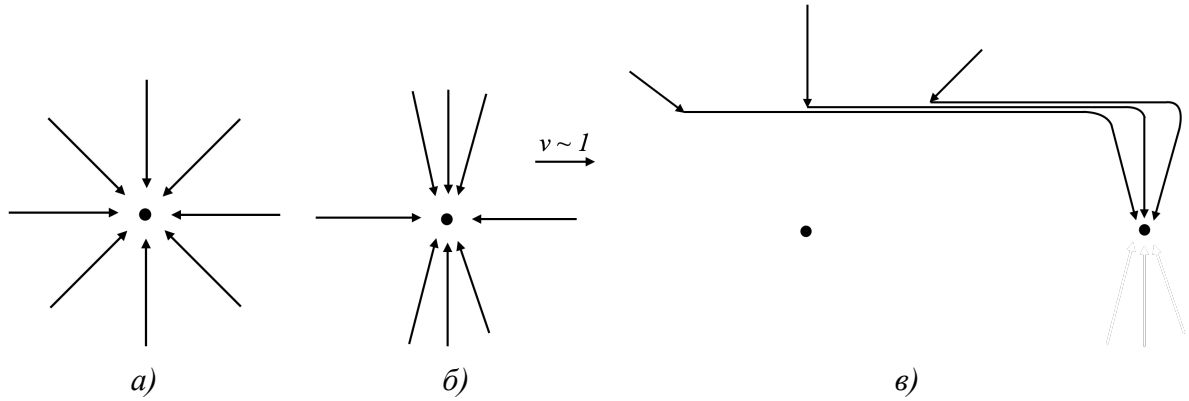


Рис. 10.1. а) покоящийся электрон и его силовые линии; б) электрон, мгновенно ускоренный до скорости, близкой к скорости света; в) электрон через одну секунду от момента ускорения.

Попробуем развить идею дальше. Полезным является для начала ввести обозначение **ковариантной производной**:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu.$$

Тогда рецепт построения калибровочно-инвариантной теории следующий: необходимо заменить в исходном Лагранжиане $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ и добавить кинетические слагаемые для векторного поля. После этого получаем калибровочно-инвариантную теорию. Проверим это. Рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}_0(x)$:

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x).$$

Согласно рецепту:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

У ковариантной производной есть глубокий смысл, который будет раскрыт позднее. Тем не менее, есть польза и от обозначения. Рассмотрим коммутатор двух ковариантных производных с разными индексами:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + iqA_\mu, \partial_\nu + iqA_\nu] = [\partial_\mu, iqA_\nu] + [iqA_\mu, \partial_\nu] = iq([\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu]),$$

$$[\partial_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu - A_\nu \partial_\mu = (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu \partial_\mu - A_\nu \partial_\mu = (\partial_\mu A_\nu) \rightarrow$$

$$[D_\mu, D_\nu] = iq((\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu)) = iqF_{\mu\nu}.$$

Так, тензор электромагнитного поля может быть определен как

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu].$$

Скалярная электродинамика

Применим полученный рецепт для теории, отличающейся от квантовой электродинамики. Построим скалярную электродинамику. Рассмотрим вместо фермионного поля ψ комплексное скалярное поле ϕ , то есть будем рассматривать такие электроны, у которых нет спина. Необходимо воспользоваться принципом калибровочной инвариантности.

Лагранжиан комплексного скалярного поля без взаимодействия имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^*.$$

Для того, чтобы преобразовать этот Лагранжиан в теорию с калибровочной инвариантностью заменим все частные производные на ковариантные производные и добавим кинетическое слагаемое:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Рассмотрим теперь как скалярные электроны, описываемые комплексным полем ϕ , взаимодействуют с векторным полем A . Для этого необходимо расписать лагранжиан с калибровочной инвариантностью, подставив определение ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi][(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi]^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \\ &\quad + iqA_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \phi \cdot (-iq)A^\mu \phi^* + q^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^*. \end{aligned}$$

Полученная конструкция нетривиальна и демонстрирует мощь принципа калибровочной инвариантности: принцип действительно предсказывает вид взаимодействия.

Приведенные рассуждения – рассуждения на уровне классической теории поля, перейдем к квантовой теории поля – поля ϕ и A становятся квантовыми операторами, тогда интеграл взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{int} = iqA_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \phi \cdot (-iq)A^\mu \phi^* + q^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^* = -V,$$

где V – потенциальная энергия взаимодействия. Этот потенциал взаимодействия входит в определение S-матрицы, порождающей правила Фейнмана.

Для скалярной электродинамики возможно изобразить соответствующие картины (рис. 10.2). Первым двум слагаемым отвечает диаграмма на рисунке 10.2 (а). Скалярные поля изображены пунктирными линиями. В отличие от электродинамики, где входили свободные поля, в скалярной электродинамике одно из полей свободное, а другое поле входит под знаком производной. Производная приводит к тому, что в правилах Фейнмана появляются импульсы, втекающие в точку или вытекающие из нее. Для слагаемого $q^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^*$ получаем еще более интересную картину (рис. 10.2 (б)) – скалярная частица входит в точку и выходит из нее, а одна линия электромагнитного

поля входит в точку, вторая выходит из нее. Так, появляются взаимодействия, где 4 поля сталкиваются в одной точке.

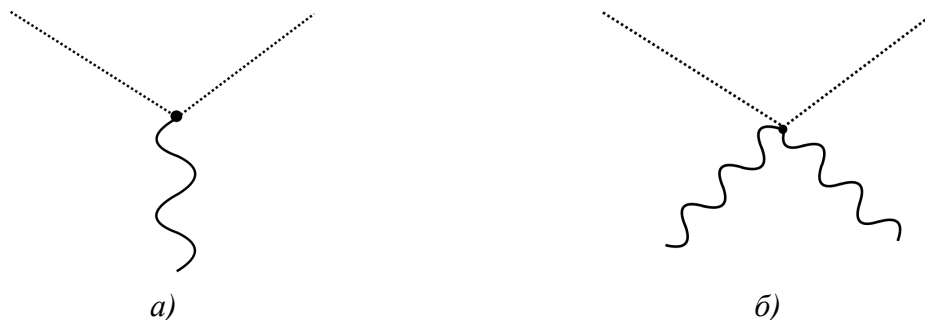


Рис.10.2. Диаграммы Фейнмана для слагаемых а) $iqA_\mu\phi \cdot \partial^\mu\phi^*$ и $\partial_\mu\phi \cdot (-iq)A^\mu\phi^*$;
 б) $q^2A_\mu A^\mu\phi\phi^*$.

Неабелева калибровочная симметрия

Так, была рассмотрена **абелева калибровочная симметрия**, где

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x),$$

где преобразование обозначим в виде $S = e^{i\alpha(x)}$. В абелевом случае два таких объекта коммутируют друг с другом:

$$S(x)S(y) = S(y)S(x).$$

Если преобразования S не коммутируют, то такие **преобразования неабелевы**:

$$[S(x), S(y)] \neq 0.$$

Рассмотрим пример неабелевой симметрии. Определим дираковские спиноры, объединив их в дублет:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \psi_{1,2} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Так, ψ – столбец из 8 элементов. Построим теорию для такого изотопического спинора, которая обладала бы калибровочной симметрией.

Запишем свободный Лагранжиан в виде суммы Лагранжианов, отвечающих полям $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}_1(x)(i\hat{\partial} - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(x)(i\hat{\partial} - m_2)\psi_2(x).$$

Проведем преобразование согласно рецепту, полученному ранее. При этом удобно было бы воспользоваться симметрией, которую подсказывает постановка задачи. Спиноры $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ располагаются внутри одного дублета, и хотелось бы получить симметрию, позволяющую вращение поля внутри дублета. Поэтому перепишем свободный Лагранжиан в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0(x) &= \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} i\hat{\partial} - m_1 & 0 \\ 0 & i\hat{\partial} - m_2 \end{pmatrix} \psi(x) = \\
 &= (\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x)) \begin{pmatrix} i\hat{\partial} - m_1 & 0 \\ 0 & i\hat{\partial} - m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \\
 &= \bar{\psi}_1(x)(i\hat{\partial} - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(x)(i\hat{\partial} - m_2)\psi_2(x).
 \end{aligned}$$

В более компактном виде свободный Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} \begin{pmatrix} i\hat{\partial} - m_1 & 0 \\ 0 & i\hat{\partial} - m_2 \end{pmatrix} \psi.$$

На диагонали матрицы $\begin{pmatrix} i\hat{\partial} - m_1 & 0 \\ 0 & i\hat{\partial} - m_2 \end{pmatrix}$ стоят одинаковые объекты $i\hat{\partial}$, выделим их явно:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\hat{\partial})\psi - \bar{\psi} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \psi = \bar{\psi}(i\hat{\partial})\psi - \bar{\psi} m \psi,$$

где $m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ – массовая матрица, $(i\hat{\partial}) = \begin{pmatrix} i\hat{\partial} & 0 \\ 0 & i\hat{\partial} \end{pmatrix}$ – матрица 2×2 . Так, свободный Лагранжиан для дублета может быть переписан в виде, аналогичном свободному Лагранжиану для обычного спинора:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi,$$

где $(i\hat{\partial} - m)$ – матрица 2×2 , на диагоналях которой стоят матрицы 4×4 .

Проведем преобразование по рецепту. Однако рецепт необходимо будет уточнить, потому что ранее рассматривалось только одно поле, соответственно в ковариантной производной также присутствовало только одно поле.

В случае дублета преобразование имеет вид:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(x)\psi(x),$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда $S(x)$ – матрица 2×2 . Самое простое преобразование, поворачивающее поля внутри дублета:

$$S(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\vec{T}},$$

где $\vec{T} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – генератор группы, вектор из матриц Паули. Самое общее преобразование, поворачивающее спиноры $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в одном изотопическом дублете, подчиняется некоторой группе $SU(2)$. В группе $SU(2)$ существуют три генератора, которые могут выполнять самое общее преобразование $\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2, \frac{1}{2}\sigma_3$. Соответственно существуют три произвольных преобразования, каждое из которых имеет собственную фазу $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$. Так, вектор $\vec{\alpha}(x)$ состоит из трех независимых объектов:

$$\vec{\alpha}(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)).$$

Так, преобразование $S(x)$ крутит поля $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ внутри дублета (переставляет местами $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ с разными коэффициентами).

Теперь необходимо построить Лагранжиан, инвариантный относительно преобразования $S(x)$. Поскольку есть три независимых фазы, входящих в общее преобразование $SU(2)$, то необходимы три компенсирующих векторных поля, независимо компенсирующие фазы:

$$A_1^\mu(x), \quad A_2^\mu(x), \quad A_3^\mu(x).$$

Формулу для ковариантной производной необходимо уточнить, чтобы учесть наличие трех полей. Это можно сделать, переопределив ковариантную производную

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu \rightarrow \partial_\mu I + ig \vec{A}_\mu \vec{T},$$

где g – константа связи, $\vec{A}_\mu \vec{T}$ – скалярное произведение. $g \vec{A}_\mu \vec{T}$ – матрица 2×2 , тогда I – единичная матрица размерности 2×2 . В таком случае преобразование Лагранжиана имеет вид:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi + \text{кин.}$$

Нельзя сразу сказать, что такой Лагранжиан является калибровочно-инвариантным. В случае абелева преобразования сразу было определено, как будет преобразовываться A_μ при переходе в A'_μ . Для неабелева преобразования также надо определить переход к полям $\vec{A}'_\mu$, чтобы гарантировать калибровочную инвариантность. Но сначала распишем кинетические слагаемые, относящиеся к трем полям:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu},$$

где обозначение $G_{\mu\nu}^i$ введено для разграничения теорий. Пока нам не известно, будут ли $G_{\mu\nu}^i$ иметь такую же простую структуру как в электромагнетизме. Так, остается неизвестным преобразование полей в $A_{1,2,3}^{\mu'}$ и вид $G_{\mu\nu}^i$. Общий рецепт будем рассматривать как анзац, для которого необходимо доопределить неизвестные для того, чтобы преобразованный Лагранжиан действительно был калибровочно-инвариантным.

Подведем предварительные итоги. Мы рассматриваем Лагранжиан, который имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\hat{d} - m)\psi,$$

где $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$ – дираковский спинор. Этот Лагранжиан преобразуем в Лагранжиан, обладающий калибровочной инвариантностью:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu}.$$

Однако, не известно, является ли такой Лагранжиан действительно калибровочно-инвариантным, потому как рассматриваемый случай более сложный – операторы преобразований не коммутируют друг с другом:

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi, \quad S(x) = e^{i\vec{\alpha}'(x)\vec{T}} \rightarrow$$

$$[S(x), S(y)] = [e^{i\vec{\alpha}'(x)\vec{T}}, e^{i\vec{\alpha}'(y)\vec{T}}] \neq 0.$$

Первое предположение заключается в том, что ковариантная производная имеет вид:

$$D_\mu = \partial_\mu I + ig\vec{A}_\mu\vec{T},$$

где $\vec{T} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Остаются открытыми вопросы преобразования полей $\vec{A}'_\mu$ и вид $G_{\mu\nu}^i$.

Без ответов на эти вопросы нельзя утверждать, что преобразованный Лагранжиан является калибровочно-инвариантным.

Преобразование полей A

Сначала рассмотрим преобразование полей $\vec{A}'_\mu$. Обратим внимание на объекты $\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$. После калибровочного преобразования конструкция принимает вид:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}'\gamma^\mu D'_\mu\psi' = \bar{\psi}S^+\gamma^\mu D'_\mu S\psi.$$

Для того, чтобы полученная конструкция была калибровочно-инвариантной, необходимо выполнение равенства

$$S^+\gamma^\mu D'_\mu S = \gamma^\mu D_\mu \rightarrow D_\mu = S^+D'_\mu S \rightarrow D'_\mu = SD_\mu S^+.$$

Распишем D_μ и D'_μ по определению:

$$\partial_\mu + igA'_\mu = S(\partial_\mu + igA_\mu)S^+,$$

где $A'_\mu = \vec{A}'_\mu\vec{T}$, $A_\mu = \vec{A}_\mu\vec{T}$. Раскроем скобки:

$$S(\partial_\mu + igA_\mu)S^+ = S(\partial_\mu S^+) + igSA_\mu S^+ + SS^+\partial_\mu = S(\partial_\mu S^+) + igSA_\mu S^+ + \partial_\mu \rightarrow$$

так как $\partial_\mu + igA'_\mu = S(\partial_\mu S^+) + igSA_\mu S^+ + \partial_\mu$, то

$$A'_\mu = SA_\mu S^+ + \frac{1}{ig}S(\partial_\mu S^+).$$

Так из требования калибровочной инвариантности получено правило преобразования полей $A_\mu \rightarrow A'_\mu$.

Определение калибровочного инварианта

Теперь ответим на вопрос, что такое $G_{\mu\nu}^i$. Ранее было замечено, что коммутатор ковариантных производных D_μ и D_ν оказывается пропорционален тензору $F_{\mu\nu}$. Примем это за определение такого тензора:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu].$$

Проверим догадку. У такого определения есть глубокое математическое обоснование, которое, однако, потребует погружения в теорию гравитации. Распишем коммутатор:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{ig} [\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu] = \\ &= \frac{1}{ig} (ig[\partial_\mu, A_\nu] + ig[A_\mu, \partial_\nu] + (ig)^2[A_\mu, A_\nu]) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \end{aligned}$$

При этом

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^i T^i = \partial_\mu A_\nu^i T^i - \partial_\nu A_\mu^i T^i + ig[A_\mu^i T^i, A_\nu^j T^j].$$

Вспомним правило перемножения матриц Паули:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k.$$

Тогда

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \rightarrow [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k.$$

Для $G_{\mu\nu}$ можно записать следующее:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu^i T^i - \partial_\nu A_\mu^i T^i + igA_\mu^i A_\nu^j i\varepsilon_{ijk} T^k &= T^k (\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - gA_\mu^i A_\nu^j \varepsilon_{ijk}) = G_{\mu\nu}^k T^k \rightarrow \\ \vec{G}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu. \end{aligned}$$

Так, тензор напряженности кроме линейных слагаемых содержит квадратичное слагаемое. Теория, в которой калибровочная симметрия будет в группе SU(2), требует существования трех полей и нелинейности тензора напряженности этих полей (возникает самодействие векторных полей) в отличие от электродинамики. В электродинамике электромагнитные поля независимы друг от друга, справедлив принцип суперпозиции.

Доказательство калибровочной инвариантности

Докажем теперь, что построенная конструкция обладает калибровочной инвариантностью. Итак, преобразование Лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\hat{d} - m)\psi \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu},$$

где

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \varepsilon_{ijk},$$

а при калибровочном преобразовании поле A_μ имеет следующий вид:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = SA_\mu S^+ + \frac{1}{ig} S(\partial_\mu S^+).$$

Для доказательства калибровочной инвариантности такого преобразования есть два пути.

1) прямолинейный и длинный, где необходимо провести преобразование

$$\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} \rightarrow \vec{G}'_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu};$$

2) простой и короткий, состоящий из нескольких шагов:

- (i) необходимо заметить, что конструкцию $\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu}$ можно переписать другим способом:

$$G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu} = 2\text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}],$$

поскольку

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}^i T^i, \\ \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] &= \text{Tr}[G_{\mu\nu}^i T^i G^{\mu\nu,j} T^j] = G_{\mu\nu}^i G^{j,\mu\nu} \text{Tr}[T^i T^j] = \\ &= G_{\mu\nu}^i G^{j,\mu\nu} \text{Tr}\left[\frac{1}{2}\sigma^i \frac{1}{2}\sigma^j\right] = G_{\mu\nu}^i G^{j,\mu\nu} \frac{1}{4} \text{Tr}[\sigma^i \sigma^j] = \\ &= 2G_{\mu\nu}^i G^{j,\mu\nu} \frac{\delta_{ij}}{4} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu}, \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}];$$

- (ii) обратим внимание на определение $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu],$$

рассмотрим, как этот тензор трансформируется при калибровочном преобразовании:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] &\rightarrow G'_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D'_\mu, D'_\nu] = \frac{1}{ig} [SD_\mu S^+, SD_\nu S^+], \\ G'_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig} (SD_\mu S^+ SD_\nu S^+ - SD_\nu S^+ SD_\mu S^+) = \frac{1}{ig} S(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) S^+ = SG_{\mu\nu} S^+; \end{aligned}$$

- (iii) определим теперь, как трансформируется $\frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}]$ при калибровочном преобразовании:

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] \rightarrow \frac{1}{2} \text{Tr}[G'_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \text{Tr}[SG_{\mu\nu} S^+ SG^{\mu\nu} S^+] = \frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}].$$

Таким образом, коротким путем доказано, что слагаемое $\frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu}$ является калибровочно-инвариантным, как и слагаемое с ковариантными производными.

Можно ли теперь сказать, что вся теория является калибровочно-инвариантной? До сих пор ничего не было сказано про слагаемое, содержащее массы. Стоит иметь ввиду, что m – матрица, при калибровочном преобразовании конструкция принимает вид

$$\bar{\psi} m \psi = \bar{\psi} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \psi \rightarrow \bar{\psi} S^+ \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} S \psi.$$

В общем случае такая конструкция не сводится к диагональной матрице. Единственная возможность сделать итоговую матрицу диагональной, а значит и калибровочно-инвариантной всю конструкцию, - потребовать, чтобы матрица $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ была диагональной единичной матрицей. То есть $m_1 = m_2$. Тогда предложенное преобразование будет калибровочно-инвариантным в группе SU(2).

Также обратим внимание на то, что при записи кинетического слагаемого были опущены слагаемые, связанные с массами:

$$\frac{m_{A_1}^2}{2} A_\mu^1 A^{1,\mu} + \frac{m_{A_2}^2}{2} A_\mu^2 A^{2,\mu} + \frac{m_{A_3}^2}{2} A_\mu^3 A^{3,\mu}.$$

Если вспомнить сложные преобразования полей, то становится очевидно, что такие слагаемые, содержащие массы бозонов, должны зануляться:

$$m_{A_i} = 0.$$

Теория Янга-Миллса

Подведем итог рассмотрению. Мы начали с того, что решили построить теорию, которая обладала бы калибровочной инвариантностью. Сначала был рассмотрен случай с одним фермионным полем. Для того, чтобы сделать такую теорию калибровочно-инвариантной, потребовалось одно векторное поле – в начале лекции был воспроизведен Лагранжиан квантовой электродинамики. При этом было предсказано, что масса электромагнитного поля нулевая. Затем был рассмотрен более сложный случай, включающий два поля, объединенных в дублет, внутри которого была потребована симметрия относительно самого общего вращения полей. Тогда потребовалось три векторных поля для компенсации таких вращений. Эти векторные поля обладают своей напряженностью $G_{\mu\nu}$, которая в свою очередь оказалась нелинейной функцией полей в отличие от электродинамики. Так, векторные поля в этом случае взаимодействуют друг с другом. Кроме того, принцип калибровочной инвариантности потребовал, чтобы фермионы, объединенные в дублеты, обладали одинаковыми массами, а векторные поля должны обладать нулевыми массами. **Построенная теория носит имя Янга-Миллса** по имени физиков, которые ее вывели.

Эта теория красива и богата на предсказания. Однако в момент своего появления теория не была популярна. Не ясно было о каких фермионах с одинаковыми массами идет речь. Если предполагать, что теория Янга-Миллса имеет отношение к слабым взаимодействиям, то можно подумать об электро- и электронном нейтрине. Но теория предсказывает одинаковые массы фермионов, что для электрона и нейтрино противоречит экспериментальным данным. Кроме того, если считать, что теория имеет отношение к слабым взаимодействиям, то такие взаимодействия можно считать короткодействующими и слабыми. При этом природа взаимодействий в целом связана обменом некоторыми частицами. Если у обменной частицы есть масса, то сила, вызываемая обменом, будет короткодействующей. То есть короткодействие

определяется обратной массой. Тогда бозоны, переносящие слабое взаимодействие, должны обладать массами, в сотню раз превышающими массу протона. Теория Янга-Миллса предсказывает бозоны нулевой массы. Так, кажется, что теория не имеет никакого отношения к слабым взаимодействиям.

Теория имеет отношение к сильным взаимодействиям. Хотя явное преобразование было выполнено только для дублета фермионных полей, большая часть выкладок достаточно общая. Поэтому если мысленно обобщить дублет на триплет и рассмотреть три фермиона, то такие фермионы можно идентифицировать с кварками с одной массой и тремя разными цветами. *Тогда теория идеально ложится под теорию сильных взаимодействий.* В случае такого кваркового триплета матрица преобразования принимает вид матрицы 3×3 . А самая общая матрица, реализующая SU(3) симметрию, будет выражаться через 8 матриц Гелл-Манна. Соответственно появится 8 калибровочных полей, все они будут взаимодействовать и обладать нулевой массой. Эти 8 бозонов являются *глюонами* – переносчиками сильного взаимодействия.

Так, теория Янга-Миллса хорошо описывает сильное взаимодействие. При этом кажется, что к слабому взаимодействию эта теория не имеет отношения. Однако в следующей лекции будет рассмотрен еще один хитрый механизм, который придумали П. Хиггс, Ф. Энглер и другие – *спонтанное нарушение симметрии*. Этот механизм позволяет получить из рассмотренного анзаца массивные векторные частицы и разные массы фермионных полей.

Лекция 11. Спонтанное нарушение симметрии. Или откуда у частицы масса?

Масса

В физике существует несколько определений понятия масса:

- 1) Инерционная масса – коэффициент между силой F и ускорением a в законе Ньютона:

$$F = ma.$$

- 2) Пассивная гравитационная масса – коэффициент пропорциональности между силой притяжения F в гравитационном поле и ускорением свободного падения g :

$$F = mg.$$

- 3) Активная гравитационная масса M создает гравитационное поле:

$$g = G \frac{M}{r^2}.$$

- 4) Масса, равная энергии покоя:

$$E = mc^2.$$

- 5) Масса как источник кривизны пространства-времени в общей теории относительности (уравнение Эйнштейна ОТО).

- 6) Квантовая масса – масса, определяющая комптоновскую длину волны частицы:

$$\lambda_c = \frac{1}{m}.$$

Это совершенно разные массы, и на первый взгляд нет никакой причины называть все эти коэффициенты одним и тем же словом. Но как показывает опыт, все эти массы одинаковы с точностью до некоторых коэффициентов.

Природа массы

Самостоятельно предлагается ответить на вопрос: откуда возникает масса частицы?

Ответ «просто есть» никак не объясняет природу массы, потому что возникает следующий вопрос о том, почему она именно такая. Ответ, который дает современная теория, основанная на квантовой теории поля следующий: масса всех элементарных частиц возникла спустя ничтожную долю секунды после рождения Вселенной, когда Вселенная перешла в особое фазовое состояние, оказавшись заполненной скалярным полем с ненулевым вакуумным средним, что аналогично возникновению конденсата. Так, природа массы – конденсат скалярного поля.

Введем метафорическую картину, которая будет подтверждена и развита в течение ближайших лекций. Такой конденсат скалярного поля ведет себя как сверхпроводник. Массы всех фундаментальных объектов, а также виды взаимодействия, известные сегодня, определяются тем, что мы живем внутри своеобразного сверхпроводника. И этот сверхпроводник устроен из скалярного поля, выпавшего в

некоторый конденсат. Ключевым элементом для понимания этой теории является *спонтанное нарушение симметрии*.

Явление называется *спонтанным нарушением симметрии*, если Лагранжиан или действие обладает некоторой симметрией, а решение, которое следует из уравнения движения для данного Лагранжиана или действия, не обладает данной симметрией. Это явление распространенное, в том числе в повседневной жизни.

Простейший пример – деревянная указка, один конец которой закруглен, а другой острый. Если поставить такую указку на абсолютно ровную поверхность стола, и задаться вопросом о Лагранжиане указки в гравитационном поле Земли на поверхности стола, то можно сказать, в частности, что этот Лагранжиан обладает азимутальной симметрией. Однако если не удерживать указку в вертикальном положении, то она упадет в некотором направлении. Уравнение движения, которое реализовало падение в этом направлении, нарушает исходную симметрию относительно поворота на произвольный угол в азимутальной плоскости.

Другой пример – спонтанное намагничивание ферромагнетика. Ферромагнетик состоит из атомов железа, которые обладают магнитными моментами в силу того, что электроны обладают магнитными моментами и вращаются в атомах. Если рассмотреть совокупность атомов железа при достаточно высоких температурах (несколько тысяч градусов), то в среднем магнитные моменты направлены в разные стороны, кусок ферромагнетика будет оставаться ненамагниченным. При понижении температуры до температуры Кюри некоторые атомы выстраивают свои магнитные моменты в одном направлении, образуя доменные структуры. Магнитные моменты доменов направлены в разные стороны, ферромагнетик остается ненамагниченным. Постепенно область доменных структур, в которых направление магнитного момента одинаково, растет. Ферромагнетик приобретает намагниченность, его магнитный момент становится направленным в определенном направлении. Итоговое направление намагниченности случайно. При этом физика, описывающая атомы, обладает азимутальной, более того сферической, симметрией, где нет выделенного направления. Практически любые фазовые переходы (жидкость – твердое тело, жидкость – пар, например) сопровождаются спонтанным нарушением симметрии.

При спонтанном нарушении симметрии и возникают различные процессы, в частности, некоторые частицы, которые в одной из фаз массой не обладали, приобретают массу в другой «замороженной» фазе.

Калибровочная теория для кварков

Применяя знания калибровочной теории, полученные на прошлой лекции, построим калибровочную теорию для кварков. Из всех существующих кварков рассмотрим u и d кварки, построим Лагранжиан для этих кварков:

$$\mathcal{L} = \bar{u}(x)(i\hat{D})u(x) + \bar{d}(x)(i\hat{D})d(x) - \frac{1}{2}Tr [G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}].$$

Слагаемые $\bar{u}(x)(i\hat{D})u(x)$ и $+\bar{d}(x)(i\hat{D})d(x)$ записаны для безмассовых кварков, слагаемое $-\frac{1}{2}\text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]$ является общим кинетическим слагаемым для всех векторных бозонов, компенсирующих калибровочные преобразования. Такие векторные бозоны будем называть *калибровочными бозонами*. Построенный Лагранжиан относится к квантовой хромодинамике, дописать оставшиеся 4 кварка не представляет затруднений. Заметим, что записанный Лагранжиан инвариантен относительно замены $u \leftrightarrow d$.

Введем массы u и d кварков, перепишем Лагранжиан в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \bar{u}(x)(i\hat{D} - m_u)u(x) + \bar{d}(x)(i\hat{D} - m_d)d(x) - \frac{1}{2}\text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}].$$

Очевидно, что такой Лагранжиан не обладает симметрией относительно замены $u \leftrightarrow d$. Такое нарушение симметрии является **явным нарушением симметрии**. Явные нарушения симметрии в квантовой теории поля как правило приводят к тому, что с теория оказывается плохой, непригодной для вычислений. Такая *теория становится ненормируемой*. Так, следует рассматривать теорию с симметрией и вводить в нее спонтанное нарушение симметрии. Спонтанное нарушение симметрии не нарушает главного свойства – сохраняется перенормируемость.

Безмассовое скалярное вещественное поле

Рассмотрим первый пример спонтанного нарушения симметрии. Запишем Лагранжиан, в котором есть скалярное вещественное поле, и будем считать, что это поле обладает нулевой массой и некоторым взаимодействием:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi),$$

где

$$V(\phi) = -\frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda^2}{4}\phi^4.$$

Масса m не является массой скалярного поля, потому что если подставить выражение для $V(\phi)$ в Лагранжиан, то будет получен знак "+" перед членом, содержащим m^2 . В то время как Лагранжиан для свободного скалярного, например, вещественного поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2.$$

Если применить уравнение движения Эйлера-Лагранжа к такому Лагранжиану, то получим уравнение Клейна-Фока-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0.$$

Так, знак перед массовым слагаемым для скалярного поля должен быть "-". Для векторного поля массовое слагаемое должно иметь знак "+".

Определим, какой симметрией обладает Лагранжиан $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$. Такой Лагранжиан обладает симметрией относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$, поскольку является функцией четных степеней поля ϕ . Если применить этот Лагранжиан к квантовой теории, возникает такое важное понятие как вакуум – состояние с наименьшей энергией. Ранее состояние с наименьшей энергией отвечало нулевому полю, от которого затем отсчитывались возбуждения – частицы. Определим теперь, при какой величине поля ϕ возникает минимум потенциальной энергии, вычислим производную:

$$V'_\phi = -m^2\phi + \lambda^2\phi^3 = \phi(-m^2 + \lambda^2\phi^2) = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ \phi^2 = \frac{m^2}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Для того, чтобы узнать, какой из решений отвечает минимуму, вычислим вторую производную:

$$V''_\phi = -m^2 + 3\lambda^2\phi^2 = \begin{cases} -m^2, & \phi = 0 \\ 2m^2, & \phi^2 = \frac{m^2}{\lambda^2}. \end{cases}$$

При $\phi = 0$ вторая производная отрицательна, значит из этой точки потенциальная энергия начинает убывать, точка соответствует максимуму. В точке $\phi^2 = \frac{m^2}{\lambda^2}$ вторая производная от потенциальной энергии положительна, точка соответствует минимуму. На рисунке 11.1 представлен график зависимости $V(\phi)$. Потенциал имеет максимум при нулевом поле и минимумы при ненулевом, это и есть потенциал Хиггса.

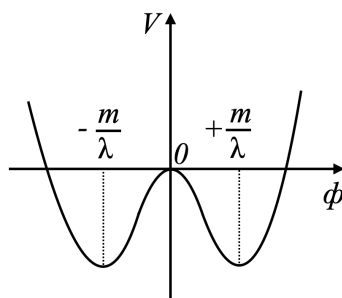


Рис. 11.1. График зависимости $V(\phi)$.

Рассмотрим поле, отвечающее возбуждению относительно одного из минимумов. Введем обозначение величины поля, отвечающую минимуму потенциальной энергии:

$$v = \frac{m}{\lambda}.$$

В англоязычной литературе можно увидеть обозначение vev – *vacuum expectation value* (величина вакуумного среднего). Поле построим следующим образом:

$$\phi(x) = v + \chi(x),$$

где $\chi(x)$ – возбуждение относительно вакуумного среднего.

Подставим поле $\phi(x)$ в выражение для Лагранжиана:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu (v + \chi) \right)^2 + \frac{m^2}{2} (v + \chi)^2 - \frac{\lambda^2}{4} (v + \chi)^4 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{m^2 v^2}{2} + m^2 v \chi + \frac{m^2 \chi^2}{2} - \dots\end{aligned}$$

Обратим внимание, что изначально массовое слагаемое было с неправильным знаком. Интерпретация такого слагаемого как массового приводила бы к возникновению тахионов, частиц, движущихся со скоростями, превышающими скорость света. Даже при выборе правильного вакуума слагаемые, содержащее m^2 , все еще обладает неправильным знаком. Продолжим раскрывать скобки:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{m^2 v^2}{2} + m^2 v \chi + \frac{m^2 \chi^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4} (v^4 + \chi^4 + 4v^3 \chi + 4v \chi^3 + 4v^2 \chi^2).$$

Выделим слагаемые, соответствующие первой и второй степени χ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{m^2 v^2}{2} + \chi (m^2 v - \lambda^2 v^3) + \chi^2 \left(\frac{m^2}{2} - \lambda^2 v^2 \right) - \frac{\lambda^2 v^4}{4} - \frac{\lambda^2 \chi^4}{4} - \lambda^2 v \chi^3, \\ v(m^2 - \lambda^2 v^2) &= 0, \\ \frac{m^2}{2} - \lambda^2 v^2 &= m^2 - \lambda^2 v^2 - \frac{m^2}{2} = -\frac{m^2}{2}.\end{aligned}$$

Так, поле χ не обладает тахионной степенью свободы, а имеет нормальную массу. При рассмотрении Лагранжиана, отвечающего безмассовому скалярному вещественному полю, с потенциалом самодействия $V(\phi)$ было обнаружено, что потенциальная энергия такого Лагранжиана обладает минимумом при ненулевом значении поля (ранее были рассмотрены ситуации, где минимум отвечал нулевому полю). Изначально Лагранжиан обладал симметрией относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$, однако, если разложить поле вокруг минимума, добавив возмущение $\chi(x)$, то становится очевидно, что для поля $\chi(x)$ полученный Лагранжиан аналогичной симметрией не обладает в связи с присутствием слагаемого $\lambda^2 v \chi^3$. Тогда решение, следующее из Лагранжиана также не обладает симметрией $\chi \rightarrow -\chi$. Приведенный пример является примером спонтанного нарушения симметрии. Однако в полученном решении кинетическое слагаемое входит с правильным знаком.

Изначальная внутренняя симметрия Лагранжиана после переписывания в других терминах не пропала, а осталась, только стала незаметна в виде исходной симметрии. Введем преобразование:

$$\chi \rightarrow -2v - \chi,$$

то исходный Лагранжиан перейдет сам в себя. Это общий метод для теорий со спонтанным нарушением симметрии. Так, для безмассовой хорошо перенормируемой теории при спонтанном нарушении симметрии возникает масса поля, кроме того, теория сохраняет внутреннюю симметрию.

Спонтанное нарушение $U(1)$ симметрии

В рассмотренном Лагранжиане

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda^2}{4}\phi^4$$

минимуму потенциальной энергии отвечало поле

$$\phi = \pm v, \quad v = \frac{m}{\lambda}.$$

В минимуме потенциальная энергия отрицательна. В квантовой теории поля удобно сдвинуть минимум так, чтобы он отвечал нулевой энергии. При рассмотрении общей теории гравитации такой сдвиг невозможен, поскольку энергия напрямую влияет на кривизну пространство-времени. В рамках квантовой теории поля постоянный сдвиг не повлияет на наблюдаемые. Так, преобразуем потенциал как показано на рисунке 11.2.

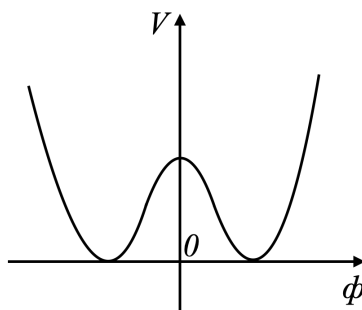


Рис. 11.2. Потенциал самодействия $V(\phi)$ с постоянным сдвигом.

Рассмотрим теперь комплексное скалярное поле. Соответственно Лагранжиан для этого поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2.$$

Минимуму Лагранжиана отвечает

$$|\phi|^2 = \frac{v^2}{2}, \quad \phi = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\theta},$$

где $\theta = const$, связывает вещественную и мнимую части поля. Данный Лагранжиан обладает симметрией относительно преобразования:

$$\begin{cases} \phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi \\ \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^* \end{cases}$$

где $\alpha = const$.

Выберем конкретное значение вакуума, точнее параметра θ , например $\theta = 0$. Когда такой выбор сделан, происходит спонтанное нарушение симметрии. Распишем тогда поле ϕ в виде разложения около вакуумного среднего:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x) + i\eta(x)).$$

В исходном Лагранжиане поле ϕ было безмассовым, определим, что произойдет с полями $\chi(x)$ и $\eta(x)$ около одного из минимумов. Перепишем Лагранжиан в терминах полей χ и η :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} |\partial_\mu (v + \chi + i\eta)|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{2} |(v + \chi + i\eta)|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{2} (v + \chi)^2 + \frac{\eta^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2, \\ (v + \chi)^2 + \eta^2 - v^2 &= 2v\chi + \chi^2 + \eta^2 \rightarrow \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{\lambda^2}{8} (2v\chi + \chi^2 + \eta^2)^2.\end{aligned}$$

Определим массы полей χ и η , выделим слагаемые, пропорциональные их квадратам. Возникает только множитель χ^2 с коэффициентом $-\frac{\lambda^2 v^2}{2}$, слагаемых, содержащих только η^2 не возникает:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{\lambda^2 v^2}{2} \chi^2 - \dots$$

Так, при разложении поля ϕ вокруг одного из минимумов, которое состоит из вещественной и мнимой частей, можно заметить, что для вещественной части поля возникает массовое слагаемое с правильным знаком, предсказывающее массу поля χ :

$$m_\chi = \lambda v.$$

При этом массового слагаемого для поля η не возникает, значит оно обладает нулевой массой:

$$m_\eta = 0.$$

В теории с непрерывной симметрией после спонтанного нарушения симметрии кроме состояния с ненулевой массой появляется состояние с нулевой массой. Такое состояние с нулевой массой называется **Голдстоуновским бозоном**. А само утверждение о возникновении безмассового бозона в теории со спонтанным нарушением симметрии называется **теоремой Голдстоуна**. Все остальные слагаемые Лагранжиана дадут взаимодействие полей χ и η после квантования и соответствующие диаграммы.

Качественно явление можно описать, рассмотрев один из срезов трехмерного потенциала V . В середине горизонтальной вещественной оси поля ϕ будет находиться вакуумное среднее, отвечающее минимуму потенциала. Потенциал около этой точки имеет параболический вид. При разложении поля ϕ в виде возмущений относительно минимума, то увеличение или уменьшение поля относительно вакуумного среднего будет приводить к возрастанию потенциальной энергии (рис. 11.3). Поэтому движение, отвечающее полю χ (вещественная ось) будет сопровождаться возникновением ненулевой массы, поскольку для возбуждения поля необходимо затратить энергию. Если теперь локально изобразить перпендикулярную ось, отвечающую мнимой части η

комплексного скалярного поля, то при движении вдоль этой оси можно заметить, что потенциальная энергия не изменяется. Если вообразить мексиканскую шляпу или дно пивной бутылки, то поле χ будет передвигаться по выпуклой траектории, а поле η будет двигаться по внутреннему желобу. Для возбуждения колебаний по желобу не требуется дополнительной энергии кроме энергии самого колебания. Вышеизложенное справедливо для относительно небольшого поля η . Для получения более строгой картины стоит изменить разложение комплексного скалярного поля на следующее:

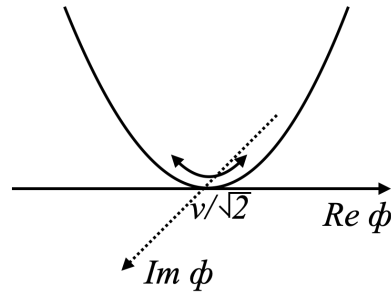
$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x)e^{i\eta(x)}).$$


Рис. 11.3. Срез трехмерного потенциала V , желоб.

Спонтанное нарушение локальной U(1) симметрии

Перейдем к рассмотрению случая, где возникает спонтанное нарушение U(1) симметрии, но не глобальной, а калибровочной или локальной, когда параметр θ будет зависеть от x . Калибровочная симметрия – мощный принцип построения и предсказания теорий взаимодействий, поэтому рассмотрим Лагранжиан с локальной U(1) симметрией:

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

В этом случае теорема Голдстоуна нарушается – не возникает безмассового Голдстоуновского бозона. Калибровочная симметрия в данном случае означает, что справедлива замена:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha. \end{aligned}$$

Распишем поле $\phi(x)$:

$$\phi(x) = |\phi(x)| e^{i\theta(x)},$$

воспользуемся калибровочной симметрией:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) = e^{i\alpha(x)} |\phi(x)| e^{i\theta(x)},$$

где $\alpha(x) = -\theta(x)$. Тогда поле становится чисто вещественным:

$$\phi(x) = |\phi(x)|.$$

После такого преобразования, приводящего к спонтанному нарушению симметрии, поскольку выбрана конкретная фаза, разложим поле вблизи вакуумного среднего:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x)).$$

При этом вторая степень свободы, связанная с мнимым полем, не пропала, а перешла в другое место.

Распишем ковариантную производную:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu,$$

тогда

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu + iqA_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi) = \frac{\partial_\mu \chi}{\sqrt{2}} + \frac{iqA_\mu}{\sqrt{2}}(v + \chi), \\ |D_\mu \phi|^2 &= \frac{(\partial_\mu \chi)^2}{2} + \frac{q^2 A_\mu A^\mu (v + \chi)^2}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, Лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{(\partial_\mu \chi)^2}{2} + \frac{q^2 A_\mu A^\mu (v + \chi)^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{(v + \chi)^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{(\partial_\mu \chi)^2}{2} + \frac{q^2 A_\mu A^\mu (v + \chi)^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \left(v\chi + \frac{\chi^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Выделим слагаемые, пропорциональные квадратам полей:

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_\mu \chi)^2}{2} - \frac{\lambda^2 v^2}{2} \chi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \dots$$

Так, получаем массовое слагаемое с правильным знаком для скалярного вещественного поля χ :

$$m_\chi = \lambda v.$$

Кроме того, появляется квадрат масса векторного калибровочного бозона после спонтанного нарушения симметрии, причем масса также пропорциональна вакуумному среднему:

$$m_A = qv.$$

Так, безмассовое векторное поле приобрело массу.

Чтобы ответить на вопрос, куда пропала вторая степень свободы, проведем вычисление. До нарушения симметрии было комплексное скалярное поле, содержащее два поля и две степени свободы соответственно. Также Лагранжиан содержит D_μ , включающую безмассовое векторное поле, обладающее двумя возможными поляризации и двумя соответствующими степенями свободы. Так, до нарушения симметрии было 4 степени свободы. После нарушения симметрии поле χ вещественное, обладает одной степенью свободы, в то же время появляется векторное поле A с массой,

у которого возможны три поляризации и есть три соответствующие степени свободы. Поэтому суммарное число степеней свободы в теории не изменилось, но они перераспределились.

Итак, если спонтанно нарушается глобальная симметрия, то возникает безмассовый Голдстоуновский бозон. Если спонтанно нарушается локальная или калибровочная $U(1)$ симметрия, то векторное поле приобретает массу. Рассмотрим физику этого явления.

Физика механизма Хиггса

Так, если рассмотреть теорию с комплексным скалярным полем и таким потенциалом самодействия поля, что минимуму потенциальной энергии отвечает ненулевое значение поля, то в результате спонтанного нарушения симметрии такой теории векторное поле, являющееся обязательным атрибутом такой теории, приобретает массу.

Наиболее близкой аналогией является теория сверхпроводимости, а именно эффект Мейснера: если поместить сверхпроводник в магнитное поле, то сверхпроводник выталкивает это поле. Ярким проявлением эффекта Мейснера является левитация сверхпроводника над магнитом. В высокоскоростных поездах на магнитных подушках используется именно это явление. Рассмотрим подробнее эффект Мейснера и проведем аналогию со спонтанным нарушением симметрии.

Причины протекания тока в сверхпроводнике без сопротивления следующие:

- 1) при низких температурах в металле могут возникать корреляции между парами электронов, электроны могут образовывать связанные состояния – **Куперовские пары**. Электрон, продвигаясь по кристаллической структуре металла локально меняет плотность электрического заряда, положительные ионы притягиваются к области, где находится электрон, возникает область с дополнительным положительным зарядом. Другой электрон, находящийся вдалеке, чувствует притяжение к этой положительно заряженной области, не успевшей стать нейтральной после ухода первого электрона, второй электрон следует за первым. Так может происходить между всеми электронными парами. Энергия взаимодействия между парами электронов за счет обмена через кристаллическую решетку очень мала, по порядку величины

$$V \sim 10^{-3} \text{ эВ.}$$

Если рассматривать некоторый металл или газ при комнатных температурах, то можно оценить среднюю кинетическую энергию, используя переводную шкалу:

$$1 \text{ К} \sim 10^{-4} \text{ эВ.}$$

Соответственно при комнатной температуре

$$300 \text{ К} \sim 10^{-2} \text{ эВ,}$$

что много больше энергии притяжения, возникающей за счет деформации кристаллической решетки. Поэтому несмотря на то, что притяжение электронов за

счет взаимодействия через кристаллическую решетку есть и при комнатной температуре, энергия такого взаимодействия настолько мала, что обычное термальное окружение быстро разрушает любые корреляции между электронами. Однако, ниже определенной критической температуры энергия взаимодействия становится больше температуры окружающей среды, тогда Куперовские пары становятся устойчивыми.

- 2) Сами по себе электроны являются фермионами, фермионы не могут занимать одно квантовое состояние. Но пара электронов, особенно если их спины направлены в противоположные стороны, ведет себя как бозон. В квантовой механике существует явление образования *Бозе-конденсата*, когда бозоны занимают одно квантовое состояние. Так, при понижении температуры все Куперовские пары могут занимать одно состояние с наименьшей энергией:

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \rightarrow \phi(\vec{x}).$$

где N – число порядка числа Авагадро, то есть все Куперовские пары описываются одним полем ϕ , зависящим от координаты. Это поле можно параметризовать:

$$\phi(\vec{x}) = \sqrt{n_e(\vec{x})} e^{i\theta(\vec{x})},$$

где $n_e(\vec{x})$ – плотность числа пар в точке $(\vec{x})$.

- 3) Определим, что произойдет, если Куперовские пары поместить во внешнее электромагнитное поле. Для этого можно воспользоваться теорией Гинзбурга-Ландау, однако в лекции основные явления будут описаны в максимально простом виде для определения сути механизма. Запишем уравнение Шредингера:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2}{2m} \phi,$$

где $q = 2e$ – заряд Куперовской пары, $\vec{A}$ – векторный потенциал, $m = 2m_e$ – масса Куперовской пары. В этой задаче существует симметрия относительно замены

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha} \phi, \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A} - \frac{1}{q} \vec{\nabla} \alpha. \end{aligned}$$

Такая теория является калибровочно-инвариантной, среди прочего будет сохраняться ток:

$$\vec{j} = \frac{qn_e}{m} (\vec{\nabla} \theta - \vec{A}).$$

- 4) В этой картине также возникает спонтанное нарушение симметрии. При выборе определенной фазы поля $\theta(\vec{x}) = \theta_0$

$$\vec{\nabla} \theta = 0.$$

Тогда

$$\vec{j} = -\frac{qn_e}{m} \vec{A},$$

то есть в сверхпроводнике возникает ток, пропорциональный векторному полю, описывающему входящее поле, при этом знак противоположный. При проникновении электромагнитного поля в сверхпроводник возникает ток, имеющей направление, противоположное направлению магнитного поля, *экранирующий* это магнитное поле. В обычном металле возникают аналогичные эффекты, но поскольку обычный металл обладает сопротивлением, экранирующий ток будет быстро разрушаться за счет столкновения Куперовских пар или электронов с кристаллической решеткой.

- 5) Вычислим векторный потенциал внутри сверхпроводника, воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{qn_e}{m} \vec{A}.$$

Покажем, что электромагнитное поле внутри сверхпроводника будет обладать ненулевой массой:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}),$$

воспользуемся калибровкой $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0$, тогда запишем **уравнение Лонднов**:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{qn_e}{m}\right) \vec{A} = 0.$$

Не сложно получить решение такого уравнения:

$$A(\vec{r}) = A(0)e^{-\lambda r}, \quad \nabla^2 e^{-\lambda r} = \pm \lambda^2 e^{-\lambda r} \rightarrow \lambda^2 = \frac{qn_e}{m} \equiv m_A^2,$$

где m_A^2 – квадрат массы электромагнитного поля, так

$$A(\vec{r}) = A(0)e^{-m_A r}.$$

Поле, попадая в сверхпроводник, вызывает ток, который компенсирует его, поэтому итоговое электромагнитное поле внутри сверхпроводника затухает по экспоненте. Механизм появления массы электромагнитного поля внутри сверхпроводника такой же, как в квантовой теории поля.

В сверхпроводнике масса пропорциональна электрическому заряду и плотности числа Куперовских пар. Плотность числа Куперовских пар в единице объема – аналог вакуумного среднего скалярного поля в квантовой теории поля. Если считать, что комплексное скалярное поле описывает бесконечное число связанных осцилляторов, то количество таких осцилляторов оказывается аналогом вакуумного среднего.

Прделаем теперь выкладки, аналогичные выкладкам теории сверхпроводимости, в квантовой теории поля. Запишем Лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2.$$

Теория сверхпроводимости хорошо описывается теорией Гинзбурга-Ландау и имеет такой же Лагранжиан. Основываясь на этом Лагранжиане, Питер Хиггс и его коллеги построили Лагранжиан для квантовой теории поля, так Хиггс воспользовался аналогией

с физикой твердого тела, где подобное явление было открыто до него. В теории Хиггса также возникает экранирующий ток:

$$j^\mu = -q \operatorname{Im}(\phi^* D_\mu \phi).$$

При переходе $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi)$ ток принимает вид

$$j^\mu = -q (v + \chi)^2 q A^\mu,$$

в пределе $\chi \rightarrow 0$

$$j^\mu = -q^2 v^2 A^\mu.$$

Так, четырехмерный ток в случае теоретико-полевого модели со спонтанным нарушением симметрии также имеет обратный знак и пропорционален внешнему электромагнитному полю A^μ , как и для сверхпроводников. Подставим полученные результаты в уравнение Максвелла:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu = -q^2 v^2 A^\mu \rightarrow$$

$$(\partial^2 + q^2 v^2) A^\mu = 0.$$

Полученное уравнение – **уравнение Прока** для векторного поля с массой $m_A = qv$. Таким образом, при помещении скалярного поля с конденсатом во внешнее поле A^μ , в конденсате начинают течь токи, компенсирующие внешнее поле. Поэтому поле приобретает массу.

Лекция 12. Масса фермиона

Физика механизма Хиггса для генерации фермионных масс

Фундаментальные частицы, из которых мы состоим, обладают массой, потому что через секунду после своего рождения Вселенная перешла в особое состояние с ненулевым вакуумным средним скалярного поля. В прошлой лекции был рассмотрен механизм появления массы векторных частиц, перейдем теперь к вопросу генерации масс фермионов.

В механизме генерации масс фермионов также скалярное поле приобретает ненулевое вакуумное среднее. Если в теории рассматриваются фермионы без массы, но постулируются взаимодействия фермионов со скалярным полем вида $g\bar{\psi}\psi\phi$:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D})\psi - \sqrt{2}g\bar{\psi}\psi\phi + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Взаимодействие фермионов со скалярным полем называется Юкавским взаимодействием. Это взаимодействие и соответствующий Лагранжиан имеют правильную размерность:

$$[\psi] = m^{\frac{3}{2}}, \quad [\phi] = m \rightarrow \\ [g\bar{\psi}\psi\phi] = m^4.$$

Также выражение $g\bar{\psi}\psi\phi$ является релятивистским инвариантом.

После того, как ϕ приобретает ненулевое вакуумное среднее в результате спонтанного нарушения симметрии и выбора определенного вакуума

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi),$$

у фермионов появляется масса. Для Юкавского слагаемого справедливо

$$\sqrt{2}g\bar{\psi}\psi\phi = \sqrt{2}g\bar{\psi}\psi\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi) = gv\bar{\psi}\psi + g\bar{\psi}\psi\chi.$$

Первое слагаемое вместе со своим знаком напоминает массовое слагаемое для фермионного поля. Перепишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{D} - gv)\psi - g\bar{\psi}\psi\chi + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Возникает желание отождествить gv с массой фермионного поля, но этот член возник в результате взаимодействия безмассового фермионного поля со скалярным полем, после того как это скалярное поле выпало в конденсат. Однако это и есть традиционный способ введения в теорию масс фермионов. Перейдем теперь к рассмотрению динамической картины.

Рассмотрим, как появляется масса у фермиона, например, электрона при взаимодействии с Хиггсовским скалярным полем. Вычислим полную амплитуду перехода электрона из точки x в точку y :

$$\mathcal{A}(x-y) = \langle 0 | \psi(x) S \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \psi(x) T [e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z)}] \bar{\psi}(y) | 0 \rangle,$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{ps} u_{ps} e^{-ip \cdot x} + \dots],$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} [a_{ps}^+ \bar{u}_{ps} e^{+ip \cdot x} + \dots].$$

Подставим в формулу амплитуды Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{A}(x-y) = \langle 0 | \psi(x) T [e^{-i \int d^4 z m : \bar{\psi}(z) \psi(z) :}] \bar{\psi}(y) | 0 \rangle,$$

где $m = gv$. Разложим экспоненту в ряд:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x-y) &= \langle 0 | \psi(x) \left[1 - im \int d^4 z : \bar{\psi}(z) \psi(z) : + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-im)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 : \bar{\psi}(z_1) \psi(z_1) :: \bar{\psi}(z_2) \psi(z_2) : + \dots \right] \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left[\frac{i\hat{p}}{p^2} + \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} + \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} (-im) \frac{i\hat{p}}{p^2} + \dots \right] = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \left[\frac{\hat{p}}{p^2} + \frac{m}{p^2} + \frac{\hat{p}}{p^2} \frac{m^2}{p^2} + \frac{m}{p^2} \frac{m^2}{p^2} + \frac{\hat{p}}{p^2} \frac{m^4}{p^4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \left[\frac{\hat{p}}{p^2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^3 \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{p^2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} + \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^3 \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Так, полученный ряд является геометрической прогрессией, вспомним, что

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots = \frac{1}{1 - \lambda},$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \left[\frac{\hat{p}}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}} + \frac{m}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}} \right] = \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \end{aligned}$$

$i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}$ является пропагатором массивного фермиона. Так, несмотря на то что каждое слагаемое в амплитуде перехода фермиона из точки x в точку y отвечает безмассовому фермиону, появляется единый пропагатор, в котором безмассовое поле в знаменателе заменяется на поле массивного фермиона. Однако, механизм появления массы у фермиона все еще остается не ясным.

Перед тем, как перейти к следующему шагу в рассмотрении механизма возникновения масс у фермионов, обратим внимание на важнейший элемент этого механизма, который легко проверяется экспериментально. Было постулировано взаимодействие не с вакуумным средним, а со всем полем ϕ , что предсказывает два явления: 1) возникновение ненулевой массы фермионов, 2) эффективное взаимодействие фермионов ненулевой массы с возбуждением скалярного поля, называемым **бозоном Хиггса**. Интенсивность такого взаимодействия определяется константой g :

$$g\bar{\psi}\psi\chi = \frac{m}{v}\bar{\psi}\psi\chi,$$

где m – масса фермиона, v – вакуумное среднее. Так, чем тяжелее фермион, тем интенсивнее взаимодействие. Как известно, на Большом адронном коллайдере были обнаружены бозоны Хиггса и их взаимодействия с разными частицами, в том числе с фермионами. Можно ожидать, что интенсивность взаимодействия фермионов с бозоном Хиггса будет пропорциональна квадрату матричного элемента, тогда $\log(\text{интенс. взаимодей.}) \sim m$ (рис. 12.1). Для ряда фермионов предсказания были проверены, оказалось, что экспериментальные точки четко лежат на ожидаемой прямой. Так, экспериментально подтверждено существование взаимодействия фермионов с вакуумным конденсатом хиггсовского поля и возбуждениями этого поля – бозонами Хиггса.

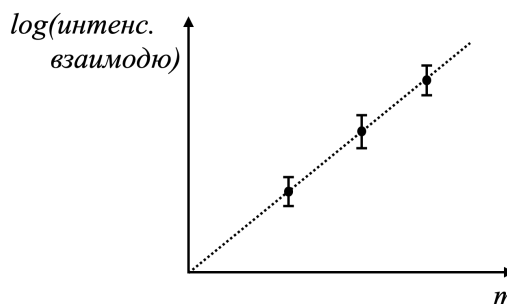


Рис. 12.1. Интенсивность взаимодействия фермионов с бозоном Хиггса.

Уравнение для массового слагаемого

Для более глубокого рассмотрения механизма генерации масс фермионов ключевым наблюдением является то, что массовое слагаемое имеет интересную форму:

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L),$$

где ψ_L – левокиральное поле, ψ_R – правокиральное поле.

Используя γ_5 -матрицы, можно определить 2 матрицы:

$$p_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad p_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}.$$

Поддействуем матрицей p_L на произвольное фермионное поле, для p_R аналогично:

$$p_L \psi \equiv \psi_L, \quad p_R \psi \equiv \psi_R$$

Лево- и правокиральные поля интересны тем, что являются собственными состояниями матрицы γ_5 :

$$\begin{aligned} \gamma_5 \psi_L &= \gamma_5 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \frac{\gamma_5 - 1}{2} \psi = -\frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = -\psi_L, \\ \gamma_5 \psi_R &= \gamma_5 \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = +\psi_R. \end{aligned}$$

Как будет показано позднее, γ_5 – киральная матрица, поэтому ее собственные состояния называются *киральными состояниями*. Так, ψ_L – левокиральное состояние, ψ_R – правокиральное состояние.

Определим теперь $\bar{\psi}_L$ и:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L &= \overline{(p_L \psi)} = (p_L \psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger p_L^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger p_L \gamma_0 = \psi^\dagger \gamma_0 p_R = \bar{\psi} p_R, \\ \bar{\psi}_R &= \bar{\psi} p_L. \end{aligned}$$

Тогда поскольку

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (p_L + p_R) \psi,$$

и так как

$$\begin{aligned} p_L^2 &= \frac{1}{4} (1 - \gamma_5)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\gamma_5 + \gamma_5^2) = \frac{1 - \gamma_5}{2} = p_L, \\ p_R^2 &= \frac{1}{4} (1 + \gamma_5)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\gamma_5 + \gamma_5^2) = \frac{1 + \gamma_5}{2} = p_R, \end{aligned}$$

То можно переписать выражение в следующем виде:

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (p_L + p_R) \psi = \bar{\psi} (p_L p_L + p_R p_R) \psi = \bar{\psi} p_L p_L \psi + \bar{\psi} p_R p_R \psi = \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L.$$

Выведем, каким уравнения подчиняются поля ψ_L и ψ_R в случае свободной теории. Вспомним, что уравнение Дирака имеет вид:

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0.$$

Домножим уравнение на p_L и p_R :

$$\begin{cases} p_L(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 \\ p_R(i\hat{\partial} - m)\psi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i\hat{\partial} p_R \psi - m p_L \psi = 0 \\ i\hat{\partial} p_L \psi - m p_R \psi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i\hat{\partial} \psi_R = m \psi_L \\ i\hat{\partial} \psi_L = m \psi_R \end{cases},$$

так как

$$p_L \gamma^\mu = \gamma^\mu p_R, \quad p_R \gamma^\mu = \gamma^\mu p_L.$$

Если бы масса была нулевой, то правая часть уравнений системы занулилась бы:

$$\begin{cases} i\hat{\partial} \psi_R = 0 \\ i\hat{\partial} \psi_L = 0 \end{cases}$$

то есть ψ_R и ψ_L были бы независимыми. Так, наличие массы приводит к тому, что уравнения усложняются.

Система уравнений в (1+1)-мерном пространстве

Чтобы понять, к чему сводится система уравнений, удобно перейти в пространство с одним пространственным измерением и временем (1+1). В таком пространстве матрицы Дирака будут иметь размерность 2×2 , при этом по-прежнему должно выполняться основное соотношение:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_{2 \times 2}.$$

Логично обратиться к матрицам Паули:

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2.$$

γ^5 должна антикоммутировать с γ^0 и γ^1 , поэтому $\gamma^5 = \sigma_3$.

В пространстве с одним пространственным измерением и временем

$$\hat{d} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x.$$

При $m=0$

Перепишем систему уравнений:

$$\begin{cases} i(\partial_t + \partial_x)\psi_R = m\psi_L \\ i(\partial_t - \partial_x)\psi_L = m\psi_R \end{cases}$$

найдем решение при $m = 0$:

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x)\psi_R = 0 \\ (\partial_t - \partial_x)\psi_L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \psi_R = e^{-ip(t-x)} \\ \psi_L = e^{+ip(t+x)} \end{cases}.$$

Так, правокиральная волна – волна, движущаяся слева направо, левокиральная волна движется справа налево. Одно фермионное поле без массы на самом деле состоит из двух волн, движущихся навстречу друг другу в пространстве с одним пространственным измерением и временем (в трехмерном случае картина похожа, но более сложная). Оба решения обладают одним и тем же импульсом в фазе, поскольку в безмассовом случае энергия и импульс совпадают.

Для спинов в таком пространстве можно представить картину, где спин обладает внутренним вращением (представление неправильное, но имеет отдаленное отношение к действительности). В одномерном случае вектор спина не может вращаться, так, в одномерном случае спин – это движение направо или налево. Это легко увидеть, поскольку киральный оператор γ^5 совпадает с σ_3 , решение с определенным спином является решением с определенной киральностью.

При $m \neq 0$

Вернемся к системе уравнений с массой: если у частицы есть взаимодействие, связывающее левую и правую киральные волны в одной точке, то левые киральные волны

оказываются источниками правых киральных волн и наоборот. Чисто математически левые и правые киральные волны являются тем механизмом, который приводит к возникновению массы.

Перепишем систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} i(\partial_t + \partial_x)\psi_R = m\psi_L \\ i(\partial_t - \partial_x)\psi_L = m\psi_R \end{cases} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\partial_x & m \\ m & +i\partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -i\partial_x & m \\ m & +i\partial_x \end{pmatrix} = \hat{H}$ является гамильтонианом полученного уравнения.

Распишем $\begin{pmatrix} \psi_R(t, x) \\ \psi_L(t, x) \end{pmatrix}$ в виде ряда Фурье:

$$\psi(t, x) = \begin{pmatrix} \psi_R(t, x) \\ \psi_L(t, x) \end{pmatrix} = \int \frac{dp}{2\pi} \tilde{\psi}(t, p) e^{-ipx},$$

подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) &= \int \frac{dp}{2\pi} i \frac{\partial \tilde{\psi}(t, p)}{\partial t} e^{-ipx} \\ -i\partial_x \psi(t, x) &= \int \frac{dp}{2\pi} i\tilde{\psi}(t, p)(-p) e^{-ipx} \end{aligned} \rightarrow$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx} \left[i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -p & m \\ m & p \end{pmatrix} \tilde{\psi} \right] \rightarrow i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -p & m \\ m & p \end{pmatrix} \tilde{\psi}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -p & m \\ m & p \end{pmatrix} = H(p)$ является гамильтонианом в импульсном представлении, она недиагональна. Такая матрица обладает собственными векторами и собственными значениями.

$$\begin{aligned} H(p)f &= E(p)f \rightarrow (H(p) - E)f = 0 \rightarrow \det(H(p) - E) = 0, \\ \left| \begin{pmatrix} -p - E & m \\ m & -E + p \end{pmatrix} \right| &= -(-E + p)(E + p) - m^2 = 0 \rightarrow E^2 = p^2 + m^2, \end{aligned}$$

тогда собственные значения $E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$. Собственные вектора также вычисляются с помощью стандартной процедуры.

Подобное уравнение встречалось в механике, в задаче о маятниках, связанных пружиной (рис. 12.2). Пусть есть два маятника с одинаковыми длинами l и массами m_1 и m_2 , связанных пружиной с жесткостью k . Определим отклонения первого и второго маятника через малые углы как θ_1 и θ_2 соответственно и получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

У каждого маятника, если бы он был свободным, была бы собственная частота $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$. Собственные значения, с которыми будут колебаться два связанных маятника

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Так, собственные частоты связанных маятников отличаются от собственных частот свободных маятников. Физическое объяснение следующее: собственные колебания, присущие этой системе или синфазные колебания, или движения маятников друг к другу и друг от друга, эти две моды колебаний имеют разные частоты, а самое общее движение описывается суперпозицией двух мод.

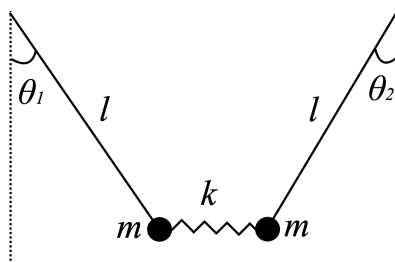


Рис.12.2. Связанные маятники.

Эта задача со связанными маятниками математически очень похожа на задачу, полученную при рассмотрении двух киральных волн, связанных через конденсат Хиггса. Поэтому, когда связываются левая и правая киральные волны, движущиеся навстречу друг другу через хиггсовское поле, хиггсовский конденсат выступает в роли пружины, связывающей две киральные волны в единую систему. В результате собственными колебаниями оказываются колебания с собственными частотами, зависящими от этой связи, появляется ненулевая масса. Так, так же, как и в случае векторных частиц, главным условием появления ненулевой массы фермионов является наличие ненулевого вакуумного среднего, приводящего к тому, что в хиггсовском конденсате теперь как пружинкой связываются две волны разной киральности. К правокиральной волне подмешивается часть амплитуды левокиральной волны, движущейся навстречу правой. Волна, движущаяся направо передает часть своей амплитуды левокиральной волне. Так волны расщепляются, прямое движение друг на встречу другу разрушается. Но в этой системе возникает две волны, движущиеся с определенными скоростями – суперпозиции исходных волн, движущиеся со скоростью, меньшей скорости света, потому что возникает эффект, связанный с массой.

Спонтанное нарушение неабелевой калибровочной теории

Рассмотрев физику генерации массы векторных частиц и фермионов, сделаем еще один шаг перед формулировкой стандартной модели – рассмотрим теперь спонтанное нарушение неабелевой калибровочной теории.

Введем дублет скалярных полей:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad \phi^* = \begin{pmatrix} \phi_- \\ \phi_0^* \end{pmatrix}.$$

Запишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}],$$

где $G_{\mu\nu} = \vec{G}_{\mu\nu} \vec{T}$, $\vec{T} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Будем реализовывать следующее преобразование:

$$\phi' \equiv S\phi = e^{i\vec{a}(x) \cdot \vec{T}} \phi.$$

До сих пор было рассмотрено только скалярное комплексное поле, теперь выясним, к чему приведет спонтанное нарушение неабелевой калибровочной теории для дублета полей. Минимум потенциала будет соответствовать

$$|\phi|^2 = \frac{v^2}{2} = (\phi_+^\dagger, \phi_0^\dagger) \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} = |\phi_+|^2 + |\phi_0|^2,$$

Решением этого уравнения является семейство, которое можно записать следующим образом:

$$|\phi_+|^2 = \frac{v^2}{2} \cos^2 \alpha, \quad |\phi_0|^2 = \frac{v^2}{2} \sin^2 \alpha.$$

Итак, так же, как и в случае абелевой U(1) симметрии, возможно полностью устранить фазу за счет калибровочного преобразования. Можно найти такие $\vec{a}(x)$, которые устраняют фазу у всех компонент, тогда поле ϕ можно записать, выбрав угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, например:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование приводит к спонтанному нарушению симметрии.

Выясним, к чему приведет спонтанное нарушение симметрии с SU(2) симметрией относительно масс векторных частиц, при рассмотрении симметрии U(1) было одно поле, которое приобрело массу. Распишем ковариантную производную:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig A_\mu \\ A_\mu &= \vec{A} \cdot \vec{T} \end{aligned} \rightarrow$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ig \vec{A}_\mu \cdot \vec{T}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial_\mu \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + ig \vec{A}_\mu \cdot \vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

После спонтанного нарушения симметрии Лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{g^2}{8} \left| \vec{\sigma} \cdot \vec{A}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix} \right|^2 - \frac{\lambda^2 v^2 \chi^2}{2} (2v + \chi)^2 - \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}^{\mu\nu}.$$

Массовое слагаемое $\frac{\lambda^2 v^2 \chi^2}{2} (2v + \chi)^2$ входит в Лагранжиан с правильным знаком.

Распишем второе слагаемое:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A}_\mu = \sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2 + \sigma_3 A_\mu^3.$$

Перепишем два первых слагаемых в другом виде:

$$\begin{aligned}
 A_\mu^1 \sigma_1 + A_\mu^2 \sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) \frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \frac{(\sigma_1 + i\sigma_2)}{\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{1}{2} (A_\mu^1 \sigma_1 + A_\mu^2 \sigma_2) 2 + \frac{1}{2} (-A_\mu^1 \sigma_2 + iA_\mu^2 \sigma_1 + iA_\mu^1 \sigma_2 - iA_\mu^2 \sigma_1) = \\
 &= A_\mu^1 \sigma_1 + A_\mu^2 \sigma_2.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 \frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{\sqrt{2}} &= \sigma_-, & \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) &= A_\mu^-, \\
 \frac{(\sigma_1 + i\sigma_2)}{\sqrt{2}} &= \sigma_+, & \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) &= A_\mu^+,
 \end{aligned}$$

так,

$$A_\mu^1 \sigma_1 + A_\mu^2 \sigma_2 = A_\mu^+ \sigma_- + A_\mu^- \sigma_+.$$

Определим действие матриц σ_- и σ_+ на двухкомпонентные спиноры:

$$\begin{aligned}
 \sigma_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i\sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - i\sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \sigma_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

так, матрица σ_+ прокручивает вверх компоненты дублета и является *повышающим оператором*,

$$\sigma_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

матрица σ_- - *понижающий оператор*, прокручивает компоненты дублета вниз.

Перепишем теперь второе слагаемое Лагранжиана, используя введенные обозначения:

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma} \cdot \vec{A}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix} &= (\sigma_- A_\mu^+ + \sigma_+ A_\mu^- + \sigma_3 A_\mu^3) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix} = \sigma_3 A_\mu^3 \begin{pmatrix} \sqrt{2}(v + \chi) A_\mu^- \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}(v + \chi) A_\mu^- \\ -(v + \chi) A_\mu^3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

тогда

$$\left| \vec{\sigma} \cdot \vec{A}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix} \right|^2 = 2(v + \chi)^2 A_\mu^- A_\mu^+ + (v + \chi)^2 A_\mu^3 A_\mu^3.$$

Перепишем теперь слагаемые Лагранжиана, относящиеся к векторным полям:

$$\mathcal{L} = \dots + \frac{g^2}{8} (v + \chi)^2 A_\mu^- A_\mu^+ + \frac{g^2}{8} (v + \chi)^2 A_\mu^+ A_\mu^- + \frac{g^2}{8} (v + \chi)^2 A_\mu^3 A_\mu^3 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}.$$

Обратим внимание, что здесь появляются массовые слагаемые для векторных полей, три первых слагаемых соответствуют массовым слагаемым трех полей $A_\mu^-, A_\mu^+, A_\mu^3$:

$$\frac{g^2 v^2}{8} = \frac{m_A^2}{2} \rightarrow m_{A^+} = m_{A^-} = m_{A^3}.$$

Так, в результате спонтанного нарушения $SU(2)$ симметрии, для существования которой были введены три векторных поля $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$, поле A_μ^3 и две комбинации $\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) = A_\mu^-$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) = A_\mu^+$ приобрели абсолютно одинаковые массы, пропорциональные вакуумному среднему скалярного поля и константе взаимодействия. Эта теория носит имя Янга-Миллса, двух теоретиков, и показывает, что изначально безмассовые векторные частицы могут приобрести массу. Однако, долго было не ясно, к каким взаимодействиям применима эта теория. Применение теории к слабым взаимодействиям приводило к противоречию с экспериментальными данными: если считать, что A_μ^- и A_μ^+ являются W^- и W^+ бозонами соответственно, а поле A_μ^3 электромагнитное, то становится очевидным противоречие – электромагнитное поле обладает нулевой массой. Если полагать, что поле A_μ^3 является полем Z -бозона, про который в то время еще не было известно, было бы странно, что такое поле обладает массой, равной массе W^- и W^+ бозонов, поскольку Z -бозон тяжелее. Если предположить, что теория описывает сильные взаимодействия, то массивные переносчики взаимодействия также противоречили бы экспериментальным данным (существует 8 безмассовых глюонов).

Сформулируем теперь симметрию, с особым нарушением, описывающую весь наблюдаемый мир – *Стандартную модель*.

Лекция 13. Стандартная модель

Стандартная модель

В конце предыдущей лекции был получен следующий результат: при рассмотрении теории Янга-Миллса с локальной $SU(2)$ симметрией было получено, что в результате спонтанного нарушения симметрии у векторных бозонов появляются одинаковые массы. Определим, какую симметрию следует взять и как ее нарушить, чтобы получилось 4 бозона $W^\pm$, Z , γ , такие, что первые три обладали бы не нулевой массой, в то время как масса фотона оставалась бы равной нулю. В рамках $SU(N)$ симметрий существует простая формула для вычисления числа генераторов $N^2 - 1$, поэтому при $N = 2$ возникает 3 генератора, при $N = 3$ возникает 8 генераторов. Поэтому необходимо взять другую симметрию, например прямое произведение $SU(2) \times U(1)$.

Необходимо описать теорию для заряженных лептонов и кварков, сначала ограничимся заряженными лептонами. Для симметрии $SU(2)$ соответствующее преобразование будет действовать на дублеты, аналогично задаче, рассмотренной в прошлой лекции. Введем дублет лептонов, рассмотрим одно поколение:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}.$$

Также теория должна основываться на принципах, сформулированных в предыдущих лекциях: должно существовать некоторое скалярное поле, которое в результате спонтанного нарушения симметрии приобретает вакуумное среднее отличное от нуля. Дублет скалярных полей запишем в виде

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $U(1)$ может действовать как на синглетные компоненты, так и на дублеты и любые мультиплеты, поэтому введенные компоненты подходят под такие преобразование.

Обратимся к физике, известно, что в слабых взаимодействиях, теорию для которых строим, нарушается пространственная четность.

- 1) Знаменитый эксперимент Ву, в котором ядро кобальта в своем распаде испускало электрон и превращалось в другое ядро, показал, что электрон может вылетать в любом направлении, но если спин ядра ориентирован вдоль определенного направления, то электроны предпочтительно вылетают в противоположную сторону. При мысленном отражении в зеркале эксперимента вместо антикорреляции спина и направления импульса получим корреляцию – пространственная четность нарушается. Математически это означает, что поля будут взаимодействовать не только с обычными токами, но и с аксиальными:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi.$$

Из этого следует, что массы лептонных полей должны быть нулевыми

$$m_\nu = m_e = 0,$$

поскольку взаимодействие $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ не перенормируемо.

- 2) Эксперимент Голдхабера показал, что нейтрино имеет отрицательную спиральность, так, если нейтрино движется вправо, то ее спин направлен влево.
- 3) Эти два эксперимента говорят о том, что нейтрино должно быть левокиральным полем, потому что в случае безмассового состояния киральность и спиральность являются одним и тем же:

$$v_L = P_L v \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)v.$$

По той же причине электрон становится левокиральным. Тогда в дублет L перепишем с указанием киральности:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L.$$

На основании на физике слабых взаимодействий было выведено, что в Лагранжиане должны участвовать только левокиральные лептоны. При этом теория должна включать также взаимодействие с обычными γ -квантами, которое включает в себя взаимодействие с правокиральным полем. Так, правокиральные поля должны присутствовать в теории, но присутствовать так, чтобы не взаимодействовать с $W^\pm$ -бозонами, о чем говорят экспериментальные данные. Введем правокиральные поля в виде синглетов e_R и ν_R .

Вернемся к скалярному дублету, поля ϕ_+ и ϕ_0 комплексные, построим зарядовосопряженный дублет:

$$\phi_c = i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_-^* \\ -\phi_0^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в теории присутствуют 4 комплексных поля.

Введем нарушение симметрии. Если симметрия будет нарушена полностью, то фотон приобретет массу, хотя для согласования с экспериментальными данными фотон должен оставаться безмассовой частицей. Тогда симметрия должна быть нарушена частично.

Если предполагать, что группа $U(1)$ связана только с электрическим зарядом, то возникает проблема с компонентами построения теории – лептоны и скалярные поля обладают разным электрическим зарядом. Так, $U(1)$ отвечает не за электрический заряд, а за *гиперзаряд* $U(1)_Y$, а $SU(2)_L$ будет вращать пространство левокиральных полей.

Введем оператор заряда:

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Оператор Q должен быть эрмитовым, то есть $Q = Q^\dagger$, откуда следует, что $b = c$. В результате спонтанного нарушения симметрии

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

где только нейтральная компонента приобретает вакуумное среднее. Тогда

$$Q \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b(v + \chi)}{\sqrt{2}} \\ \frac{d(v + \chi)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0,$$

поскольку после спонтанного нарушения симметрии поле ϕ должно обладать нулевым зарядом, иначе Вселенная, заполненная скалярным полем, должна была бы быть заряженной. В таком случае

$$b = d = 0 \text{ и } c = 0,$$

матрица Q принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

При действии такой матрицы на ненарушенное скалярное поле ϕ должно получиться следующее:

$$Q \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \cdot \phi_+ \\ 0 \cdot \phi_0 \end{pmatrix} \rightarrow a = 1.$$

Так, оператор заряда при действии на дублет полей $\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$ имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перепишем эту матрицу в виде линейной комбинации одного из генераторов группы $SU(2)$ и некоторой константы, общей для дублета:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2},$$

если положим для скалярных полей $Y = 1$, то справедлива **формула Гелл-Манна-Нишиджимы**:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, введены дублеты лептонов и скалярных полей, показано, что симметрия $SU(2) \times U(1)$ должна нарушаться только частично, при этом некоторая подгруппа $U(1)_Y$ группы $U(1)$ должна сохраняться. Определена зарядовая матрица Q для скалярного дублета, которую можно переписать в виде суммы T_3 (компоненты изоспина) и единичной матрицы, домноженной на $\frac{Y}{2}$, где Y – гиперзаряд, при $Y = 1$ получаем тождество. Постулируем, что формула Гелл-Манна-Нишиджимы справедлива для всех остальных компонентов теории и построим таблицу для гиперзарядов лептонного дублета и правокиральных полей. Для этого упростим формулу для Q , вычислив среднее значение по мультиплету

$$2\langle Q \rangle = Y,$$

тогда

	$\langle Q \rangle$	Y
ϕ	$\frac{1}{2}$	1
L	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R	-1	-2
ν_R	0	0

Отсюда видно, что правое нейтрино не взаимодействует ни с электромагнитным полем, ни с бозонами $W^\pm, Z$, поэтому нейтрино ν_R часто называют **стерильным**. Однако правое нейтрино может взаимодействовать со скалярным полем, а значит будет влиять на наблюдаемые величины.

Лагранжиан Стандартной модели с одним поколением лептонов

Построим Лагранжиан Стандартной модели с одним поколением лептонов. Запишем безмассовые слагаемые для левого лептонного дублета и правых лептонных полей:

$$\mathcal{L} = \bar{L}i\hat{D}L + \bar{e}_R i\hat{D}e_R + \bar{\nu}_R i\hat{D}\nu_R + \dots$$

Отметим, что слагаемые вида $m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ невозможны, поскольку левые и правые поля вращаются по-разному, в силу того что левые поля входят в левые дублеты, которые преобразуются с помощью $SU(2)$, а правые поля синглетны. Такие слагаемые нарушают калибровочную инвариантность, вращения полей не компенсируют друг друга.

Калибровочным бозонам в $SU(2)$ пространстве будут соответствовать три поля A_μ^i , $i = 1, 2, 3$, а в пространстве $U(1)$ поле B_μ , для каждого из полей присутствует слагаемое в Лагранжиане. Выражения для тензоров $\frac{1}{2}Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]$ и $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ хорошо известны. Строка

$$\mathcal{L} = \bar{L}i\hat{D}L + \bar{e}_R i\hat{D}e_R + \bar{\nu}_R i\hat{D}\nu_R - \frac{1}{2}Tr[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \dots$$

описывает кинетические слагаемые для лептонов и векторных полей. В таком виде теория является калибровочно-инвариантной, однако все поля остаются безмассовыми, не имеющими отношения к действительности. В теорию необходимо ввести скалярные поля с самодействием, которые в результате спонтанного нарушения симметрии приобретут вакуумное среднее:

$$\mathcal{L} = \dots + |D_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 + \dots$$

Также постулируем взаимодействия, которые дадут массы лептонам, взаимодействие Юкавы:

$$\mathcal{L} = \dots + (-\lambda_e \sqrt{2})(\bar{L}e_R \phi + \text{эрмитово сопр.}) + (-\lambda_{\nu_e} \sqrt{2})(\bar{L}\nu_R \phi_c + \text{эрмитово сопр.}) \dots$$

Взаимодействие является Лоренц-инвариантным. Гиперзаряд определен таким образом, что весь Лагранжиан должен обладать нулевым гиперзарядом, что выполняется для записанной части Лагранжиана. Также отметим, что константы взаимодействия λ_e и λ_{ν_e} должны быть безразмерными величинами:

$$[\mathcal{L}] = m^4, \quad [\phi] = m, \quad [\psi] = m^{\frac{3}{2}}, \quad [\bar{L}e_R \phi] = m^3 m = m^4 \rightarrow [\lambda] = m^0.$$

После спонтанного нарушения симметрии слагаемые, описывающие взаимодействие Юкавы, дадут массы лептонам, как заряженным, так и нейтральным. Рассмотрим подробнее первое слагаемое, после спонтанного нарушения симметрии он примет вид

$$-\sqrt{2}\lambda_e(\bar{L}e_R \phi + \text{эрмитово сопр.}) \rightarrow -\sqrt{2}\lambda_e(\bar{\nu}_L \bar{e}_L)e_R \left(\frac{v + \chi}{\sqrt{2}} \right) = -\lambda_e(v + \chi)\bar{e}_L e_R,$$

поэтому все юкавское взаимодействие преобразуется в

$$-\lambda_e(v + \chi)(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = -\lambda_e(v + \chi)\bar{e}e = -\lambda_e v \bar{e}e - \lambda_e \chi \bar{e}e,$$

где слагаемое $-\lambda_e v \bar{e}e$ напоминает массовое слагаемое. Так, в изначально безмассовой теории после спонтанного нарушения симметрии фермионы приобретают массу. Кроме того, можно сразу получить важнейшее предсказание теории, переписав λ_e в виде

$$\lambda_e = \frac{m_e}{v},$$

то есть *лептон будет взаимодействовать с возбуждением скалярного поля χ тем сильнее, чем больше масса лептона*. Эксперименты на большом адронном коллайдере подтвердили эти предсказания.

Выпишем Лагранжиан полностью:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{L}i\hat{D}L + \bar{e}_R i\hat{D}e_R + \bar{\nu}_R i\hat{D}\nu_R - \frac{1}{2}\text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\ & + |D_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 + \\ & + (-\lambda_e)(\bar{L}e_R \phi + \text{эрмитово сопр.}) + (-\lambda_{\nu_e} \sqrt{2})(\bar{L}\nu_R \phi_c + \text{эрмитово сопр.}), \end{aligned}$$

он содержит 9 слагаемых, которые описывают весь наблюдаемый мир. Такой Лагранжиан может быть обобщен на случай всех поколений лептонов.

Закончим описание обозначений, введенных при записи Лагранжиана. Ковариантная производная имеет вид:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \vec{T} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu,$$

где второе слагаемое обеспечивает калибровочную инвариантность в группе SU(2), третье слагаемое обеспечивает калибровочную инвариантность в группе U(1). Записанная формула является самой общей, в каждом слагаемом стоит немного отличное

выражение, потому что, например, для лептонного дублета одно значение гиперзаряда Y , для дублета скалярных полей – другое, для правого синглета из электронов – третье значение гиперзаряда, при этом второе слагаемое в ковариантой производной отсутствует, поскольку генератор $\vec{T} = 0$, то же самое относится и к правым нейтрино. Распишем компоненты, содержащие ковариантную производную:

$$\begin{aligned}\bar{L}i\hat{D}L &= \bar{L}i\gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig \vec{T} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{B_\mu}{2} \right] L, \\ \bar{e}_R i\hat{D}e_R &= \bar{e}_R i\gamma^\mu [\partial_\mu + ig' B_\mu] e_R, \\ \bar{\nu}_R i\hat{D}\nu_R &= \bar{\nu}_R i\gamma^\mu [\partial_\mu] \nu_R, \\ D_\mu \phi &= \left[\partial_\mu - ig \vec{T} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right] \phi.\end{aligned}$$

Массы векторных бозонов

Определим массы векторных частиц после спонтанного нарушения симметрии. Для этого стоит обратить внимание на слагаемое Лагранжиана $|D_\mu \phi|^2$, описывающее взаимодействие векторных полей со скалярными полями.

$$\begin{aligned}D_\mu \phi &= \left[\partial_\mu - ig \frac{1}{2} (\sigma_+ A_\mu^- + \sigma_- A_\mu^+ + \sigma_3 A_\mu^3) - \frac{ig'}{2} B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} (v + \chi) A_\mu^- \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -(v + \chi) A_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \chi) B_\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Объединим слагаемые:

$$\begin{aligned}D_\mu \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g(v + \chi) A_\mu^- \\ -g \frac{(v + \chi)}{\sqrt{2}} A_\mu^3 + g' \frac{(v + \chi)}{\sqrt{2}} B_\mu \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} - \frac{i(v + \chi)}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g A_\mu^- \\ -g A_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Обратим внимание, что во втором слагаемом в нижней части дублета получилась конструкция, представляющая собой линейную комбинацию третьей компоненты полей A и поля B . Эта комбинация, как будет показано, является Z -бозоном. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\sqrt{g^2 + g'^2} &= \bar{g} \quad \rightarrow \quad \frac{g}{\bar{g}} = \cos \theta_W, \quad \frac{g'}{\bar{g}} = \sin \theta_W, \\ \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Продолжим запись:

$$D_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix} - \frac{i(v + \chi)}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} g A_\mu^- \\ -\bar{g} Z_\mu \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь квадрат модуля ковариантной производной скалярного поля:

$$|D_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{(v + \chi)^2}{8} [2g^2 A_\mu^- A_\mu^+ + \bar{g}^2 Z_\mu Z^\mu].$$

Из формулы видно, что возникают 3 векторных бозона, с разными массами, поскольку массовые слагаемые имеют вид:

$$\frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^- A_\mu^+ + \frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^+ A_\mu^- + \frac{\bar{g}^2 v^2}{8} Z_\mu Z^\mu.$$

Первые 2 слагаемых аналогичны полученным в теории SU(2), тогда

$$m_{A^\pm} = \frac{gv}{2}.$$

Также теория предсказывает результат, отличный от предыдущего:

$$m_Z = \frac{\bar{g}v}{2} = \frac{m_{A^\pm}}{\cos \theta_W},$$

поскольку $\cos \theta_W \leq 1$, то $m_Z \geq m_{A^\pm}$. При этом масса поля A нулевая:

$$m_A = 0,$$

это электромагнитное поле.

Лекция 14. Взаимодействие в Стандартной модели

Взаимодействие в Стандартной модели

Взаимодействие с $W^\pm$

Для того, чтобы определить взаимодействия с калибровочными бозонами в Стандартной модели, необходимо рассмотреть первую строчку Лагранжиана. Сначала рассмотрим взаимодействие с $W^\pm$ бозонами

$$A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1 \pm iA^2) = W^\pm.$$

Для этого необходимо рассмотреть часть Лагранжиана стандартной модели

$$\begin{aligned}\bar{L}i\hat{D}L &= \bar{L}i\gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig \vec{T} \cdot \vec{A}_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right] L = \\ &= \bar{L}i\gamma^\mu \left[\partial_\mu - \frac{ig}{2} [\sigma_+ A_\mu^- + \sigma_- A_\mu^+ + \sigma_3 A_\mu^3] - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right] L.\end{aligned}$$

Из всей этой строки выделим два слагаемых, описывающих взаимодействие левокирального дублета с $W^\pm$ бозонами

$$\begin{aligned}\bar{L}i\gamma^\mu \left[-\frac{ig}{2} [\sigma_+ W_\mu^- + \sigma_- W_\mu^+] \right] L &= -\frac{ig}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) i\gamma^\mu (\sigma_+ W_\mu^- + \sigma_- W_\mu^+) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{g}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} \sqrt{2}e_L \\ 0 \end{pmatrix} W_\mu^- - \frac{g}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}e_L \end{pmatrix} W_\mu^+ = \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^- - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^+.\end{aligned}$$

Эти два слагаемых показывают, как взаимодействуют левокиральное нейтрино и левокиральный электрон с $W^\pm$ бозонами. Перепишем полученные выражения:

$$\begin{aligned}\begin{cases} e_L = p_L e = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e \\ \bar{\nu}_L = \bar{\nu} p_R = \bar{\nu} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \end{cases} \rightarrow \\ \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L = \bar{\nu} p_R \gamma^\mu p_L e = \bar{\nu} \gamma^\mu p_L p_L e = \bar{\nu} \gamma^\mu p_L e = \frac{\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, полученные слагаемые могут быть переписаны через поля электрона и нейтрино без указания их киральности, киральность переносится в структуру γ -матриц:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^- - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^+ = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^- - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu W_\mu^+.$$

Аналогично случаю квантовой электродинамики теперь можно изобразить диаграммы Фейнмана, соответствующие таким слагаемым Лагранжиана. Так, электрон входит в точку, нейтрино и W^- бозон выходят из этой точки (рис. 14.1(a)). Обратим внимание, что отрицательно заряженный электрон порождает отрицательно заряженный

$\sin \theta_W W^-$ бозон и нейтральное нейтрино. Так, в точке взаимодействия появляется новая структура по сравнению с квантовой электродинамикой, при этом сами электроны и нейтрино описываются теми же правилами Фейнмана, как и в квантовой электродинамике. Точка взаимодействия будет соответствовать выражению $-\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)$. В диаграмме, соответствующей второму взаимодействию (рис. 14.1(б)), точка будет описываться точно так же.

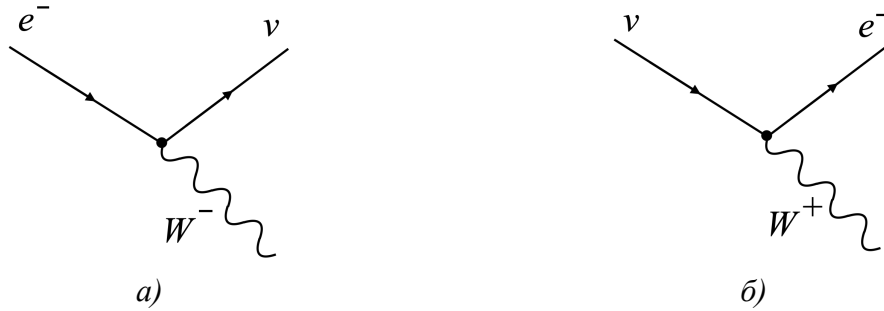


Рис. 14.1. Диаграммы Фейнмана для взаимодействий в квантовой теории поля.

Взаимодействие с Z и γ

Рассмотрим взаимодействие с Z -бозоном и полем A , для этого следует обратить внимание на слагаемые

$$gT_3 A^3 + g' \frac{Y}{2} B.$$

Распишем A и Z :

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix},$$

где $\cos \theta_W = \frac{g}{\bar{g}}$, $\sin \theta_W = \frac{g'}{\bar{g}}$, $\bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}$. Воспользуемся формулой Гелл-Манна-Нишиджимы:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} gT_3 A^3 + g' \frac{Y}{2} B &= gT_3 (\sin \theta_W A + \cos \theta_W Z) + g'(Q - T_3)(\cos \theta_W A - \sin \theta_W Z) = \\ &= A[gT_3 \sin \theta_W + g'(Q - T_3) \cos \theta_W] + \\ &\quad + Z[gT_3 \cos \theta_W - g'(Q - T_3) \sin \theta_W] = \\ &= A[\bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W T_3 + \bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W (Q - T_3)] + \\ &\quad + Z[\bar{g} \cos^2 \theta_W T_3 + \bar{g} \sin^2 \theta_W (Q - T_3)] = \\ &= A[\bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W Q] + Z[\bar{g} T_3 + \bar{g} \sin^2 \theta_W Q]. \end{aligned}$$

Так, из математики видно, что полем A взаимодействие для любых полей (при расчетах не было подставлено конкретное значение Y) пропорционально матрице электрического заряда, то есть

$$\bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W \equiv e,$$

где e – заряд электрона. В результате получено стандартное взаимодействие с электрическим полем. Второе слагаемое определяет взаимодействие с Z -бозоном, оно зависит от третьей компоненты изоспина и от заряда поля, которое участвует во взаимодействии.

Последним шагом определим теперь константы g и g' через заряд электрона и угол θ_W :

$$e = \bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W = g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W \rightarrow$$

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W}.$$

Угол θ_W появился в теории, записанной Стивеном Вайнбергом (Weinberg), поэтому этот угол часто называют углом Вайнберга. Также есть и другое определение – угол называют слабым (weak).

Три поколения лептонов в Стандартной модели

Рассмотрим теперь как можно включить в введенную теорию для одного поколения лептонов все три поколения. Введем три левокиральных дублета

$$L_i = \begin{pmatrix} \nu_{l_i} \\ e_i \end{pmatrix}, \quad l = e, \mu, \tau \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix},$$

а также синглеты

$$l_R = e_R, \mu_R, \tau_R, \quad \nu_R = \nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}.$$

Запишем Лагранжиан в общем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{L}_i i \hat{D} L_i + \bar{l}_{Ri} i \hat{D} l_{Ri} + \bar{\nu}_{Ri} i \hat{D} \nu_{Ri} - \frac{1}{2} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \phi|^2 - \\ & - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \lambda_{ji}^l \sqrt{2} [\bar{L}_j \phi l_{Ri} + \text{эрмит. сопр.}] - \\ & - \lambda_{ji}^\nu \sqrt{2} [\bar{L}_j \phi_c \nu_{Ri} + \text{эрмит. сопр.}] \end{aligned}$$

где по повторяющимся индексам введено суммирование. По сравнению с Лагранжианом для одного поколения лептонов, рассмотренного ранее, усложнение заключается в предположении, что для Юкавского взаимодействия каждое правое поле может взаимодействовать с каждым левый дублетом с некоторой константой. Если окажется, что возможно взаимодействие только внутри одного поколения, то $\lambda_{ji} \sim \delta_{ji}$.

Выполним математические преобразования, приведем слагаемые к более компактному виду. Распишем предпоследнее слагаемое после спонтанного нарушения симметрии:

$$\lambda_{ji}^l \bar{L}_j l_{Ri} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \lambda_{ji}^l (\bar{\nu}_{Lj}, \bar{l}_{Lj}) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} l_{Ri} = v \lambda_{ji}^l \bar{l}_{Lj} l_{Ri},$$

в выражении фигурирует левое поле из любого поколения дублетов и правое поле также любого поколения синглетов. Тогда для всего слагаемого после спонтанного нарушения симметрии верно

$$\lambda_{ji}^l \sqrt{2} [\bar{L}_j \phi l_{Ri} + \text{эрмит. сопр.}] \rightarrow v \lambda_{ji}^l \bar{l}_{Lj} l_{Ri} + v \lambda_{ji}^{l*} \bar{l}_{Rj} l_{Li}.$$

Введем триплеты

$$l_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad l_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix},$$

Необходимые для более компактных обозначений и не имеющие отношения к калибровочной симметрии. Тогда

$$v \lambda_{ji}^l \bar{l}_{Lj} l_{Ri} + v \lambda_{ji}^{l*} \bar{l}_{Rj} l_{Li} = \bar{l}_R \Lambda^l l_L + \bar{l}_L (\Lambda^l)^+ l_R,$$

где $v \lambda_{ji}^l = \Lambda^l$. Диагонализуем полученную формулу,

$$l_L = U_L^l \tilde{l}_L, \quad l_R = U_R^l \tilde{l}_R \rightarrow \bar{l}_R \Lambda^l l_L = \bar{\tilde{l}}_R (U_R^l)^+ \Lambda^l U_L^l \tilde{l}_L,$$

если матрица $(U_R^l)^+ \Lambda^l U_L^l$ диагональна

$$(U_R^l)^+ \Lambda^l U_L^l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix},$$

то поля $\tilde{l}_L$ и $\tilde{l}_R$ будут базисом, в котором массовая матрица диагональна, а значит будут полями, которые будем считать электроном, мюоном и τ . Для второго слагаемого получим аналогичные выражения.

Рассмотрим теперь выражение для массовых слагаемых нейтрино, введем триплеты левых и правых нейтрино:

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\lambda_{ji}^\nu \sqrt{2} [\bar{L}_j \phi_c \nu_{Ri}] = \bar{\tilde{\nu}}_R (U_R^\nu)^+ \Lambda^\nu U_L^\nu \tilde{\nu}_L,$$

$$(U_R^\nu)^+ \Lambda^\nu U_L^\nu = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом можно получить массовые состояния нейтрино в Стандартной модели. Обратим внимание на то, что m_1 не является массой электронного нейтрино, как и другие две массы не являются массами мюона и τ .

Взаимодействие с $W^\pm$

Вернемся к Лагранжиану, изначально он строился для безмассового случая, поэтому и остальные слагаемые необходимо переписать через массовые состояния. В Лагранжиане присутствуют 2 вида выражений: в одном L_i взаимодействуют с $W^\pm$ бозонами, в другом взаимодействуют с Z и γ . Сначала рассмотрим взаимодействие с бозонами $W^\pm$:

$$\begin{aligned}\bar{L}_i i \hat{D} L_i &= \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{Le} \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_{L\mu} \gamma^\mu \mu_L + \bar{\nu}_{L\tau} \gamma^\mu \tau_L) W_\mu^+ + \dots = \\ &= \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^+ + \dots = \dots - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L (U_L^\nu)^\dagger \gamma^\mu U_L^l \tilde{l}_L W_\mu^+ + \dots\end{aligned}$$

Поскольку матрицы U_L^ν и U_L^l не связаны друг с другом, нельзя предполагать, что $(U_L^\nu)^\dagger U_L^l$ является единичной матрицей, тогда

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L (U_L^\nu)^\dagger \gamma^\mu U_L^l \tilde{l}_L W_\mu^+ = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L (U_L^\nu)^\dagger U_L^l \gamma^\mu \tilde{l}_L W_\mu^+,$$

$$(U_L^\nu)^\dagger U_L^l \equiv V \rightarrow$$

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L (U_L^\nu)^\dagger U_L^l \gamma^\mu \tilde{l}_L W_\mu^+ = -\frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij} \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu \tilde{l}_{Lj} W_\mu^+.$$

Изначально при записи Лагранжиана в базисе, где все лептоны были безмассовыми, дублеты были связаны только друг с другом (электронный с электронным и т.д.). Однако была разрешена недиагональность Юкавского взаимодействия, что привело к тому, что слагаемые этих взаимодействий также становятся недиагональными, что запрещает интерпретировать их как массовые. Поэтому был выбран новый базис полей с $\sim$, для которых конструкция $(U_R^l)^\dagger \Lambda^l U_L^l$ диагональна, такие поля обладают определенными массами. Операция диагонализации была выполнена как для заряженных лептонов, так и для нейтрино. $W^\pm$ бозоны – единственные частицы в Лагранжиане Стандартной модели, переводящие поле заряженного лептона в поле нейтрино и наоборот, и в новом базисе полей с массами происходит перемешивание поколений (электрон может перейти в любое нейтрино). Множителем, определяющим переход является матрица V , причем эта матрица построена в виде произведений матриц, относящихся к заряженным лептонам U_L^l и нейтральным нейтрино U_L^ν . Матрица $V = V^{PMNS}$ в литературе носит название **матрицы Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакамы**, по именам физиков, внесших вклад в понимание смешивания в лептонном секторе. Часто эту матрицу ошибочно называют матрицей смешивания нейтрино, поскольку в действительности это матрица смешивания лептонов.

Взаимодействие с Z и γ

Взаимодействия с Z и γ не меняют типа частиц, распишем слагаемые Лагранжиана, соответствующие этому взаимодействию, достаточно рассмотреть одну из вершин:

$$\bar{\nu}_L O^\mu \nu_L Z_\mu,$$

где O^μ матрица взаимодействия. Перейдем к массивным полям:

$$\bar{\nu}_L O^\mu \nu_L Z_\mu = \bar{\tilde{\nu}}_L (U_L^\nu)^\dagger O^\mu U_L^\nu \tilde{\nu}_L Z_\mu = \bar{\tilde{\nu}}_L (U_L^\nu)^\dagger U_L^\nu O^\mu \tilde{\nu}_L Z_\mu.$$

С помощью матрицы $(U_L^\nu)^\dagger U_L^\nu$ можно диагонализировать билинейную форму, такие матрицы унитарны:

$$\bar{\nu}_L O^\mu \nu_L Z_\mu = \bar{\tilde{\nu}}_L (U_L^\nu)^\dagger U_L^\nu O^\mu \tilde{\nu}_L Z_\mu = \bar{\tilde{\nu}}_L O^\mu \tilde{\nu}_L Z_\mu.$$

Такая же структура будет получена при замене нейтрино на лептон или Z -бозона на фотон. Так, во взаимодействиях, не изменяющих тип частицы, изменений в виде взаимодействия массивные частицы не дают.

Всю конструкцию для трех поколений лептонов и нейтрино можно обобщить на кварки, введя дублеты кварков:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

С точностью до таких переопределений теория для кварков повторяет всю вышеописанную математику, кварки приобретают массу и недиагональное взаимодействие с $W^\pm$ бозонами. Единственное отличие заключается в переименовании матрицы $V = V^{CKM}$ – **матрица Кабиббо-Кобаяши-Маскавы**.

Лекция 15. Распад мюона

Самодействие векторных бозонов в Стандартной модели

Если рассмотреть теорию Янга-Миллса и некоторую неабелеву симметрию, где операторы преобразования не коммутируют друг с другом, то тензор напряженности становится более сложным по сравнению с абелевым случаем:

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu.$$

Произведение $g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu$ делает тензор напряженности свободных векторных полей самодействующим, такие бозоны могут взаимодействовать друг с другом. В Стандартной модели в Лагранжиане есть 2 слагаемых:

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}.$$

Если переписать их через физически наблюдаемые векторные бозоны с определенными массами, то появятся как слагаемые, описывающие свободное распространение без взаимодействия, так и слагаемые, описывающие самодействие. При этом для первого знакомства со Стандартной моделью нет необходимости выписывать все возникающие слагаемые, в лекции на качественном уровне будет показано, почему такие взаимодействия необходимы в слабой теории.

Рассмотрим типичную диаграмму Фейнмана в квантовой электродинамике (рис. 15.1(а)). Электрон излучает фотон, и остается новый электрон, обладающий тем же электрическим зарядом, что и старый, при этом способен излучать фотоны. Диаграмма может быть сколь угодно сложной (рис. 15.1(б)).

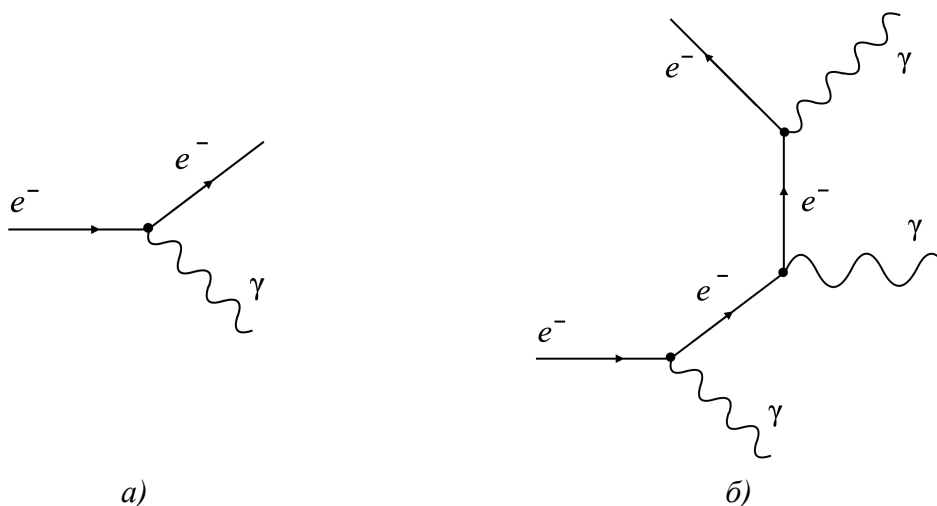


Рис. 15.1. Диаграммы испускания фотона электроном в квантовой электродинамике.

В теории слабого взаимодействия картина отличается – электрон может превратиться в нейтрино, испустив W^- бозон (рис. 15.2(а)). Рассмотрим диаграмму с точки зрения слабого взаимодействия, можно предположить, что переносчиком заряда

является нейтрино. Однако нейтрино не может испустить электрон и W^- бозон (рис. 15.2(б)), такая диаграмма запрещена, поскольку нарушается закон сохранения электрического заряда. При преобразовании нейтрино в позитрон и W^- бозон (рис. 15.2(в)) электрический заряд сохраняется, но такая диаграмма нарушает закон сохранения лептонного заряда. Теперь предположим, что слабый заряд есть у электрона и W^- бозона, в диаграмме на рис. 15.2(а) наблюдается сохранение этого слабого заряда. Так как у нейтрино нет слабого заряда, значит возможно диаграмма рис. 15.2(г), где нейтрино превращается в электрон и W^+ бозон, при этом сохраняется лептонное число, а также слабый заряд, поскольку W^+ бозон и электрон обладают противоположными значениями слабого заряда.

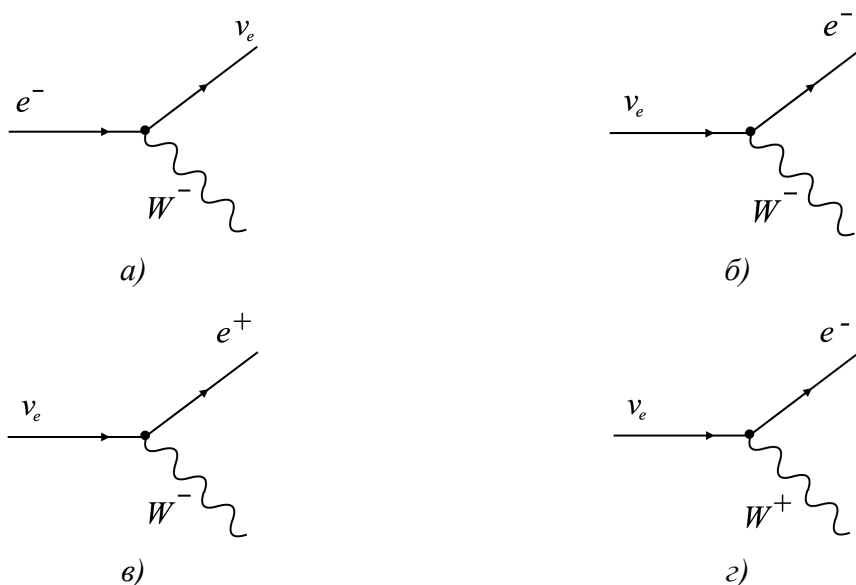


Рис. 15.2. Диаграммы Фейнмана в теории слабого взаимодействия: а) преобразование электрона в нейтрино с испусканием W^- бозона; б) процесс, запрещенный законом сохранения электрического заряда; в) процесс, запрещенный законом сохранения лептонного заряда; г) преобразование нейтрино в электрон с испусканием W^+ бозона.

Рассмотрим диаграммы в W -бозонами (рис. 15.3(а)). Слабый заряд перешел от начального W -бозона к конечному, слабый заряд Z -бозона равен нулю. Можно изобразить вариацию такой диаграммы: W^+ и W^- бозоны сталкиваются, образуя Z -бозон (рис. 15.3(б)) или фотон (рис. 15.3(в)). Такие диаграммы являются отображением самодействия, связанного с перетеканием слабых зарядов.

Распад мюона

Рассмотрим процесс распад мюона, используя Стандартную модель:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e,$$

лептонные заряды частиц следующие:

$$\begin{aligned} L_\mu &= 1 = 0 + 1 + 0, \\ L_e &= 0 = 1 + 0 + (-1), \end{aligned}$$

электрический заряд, очевидно, сохраняется.

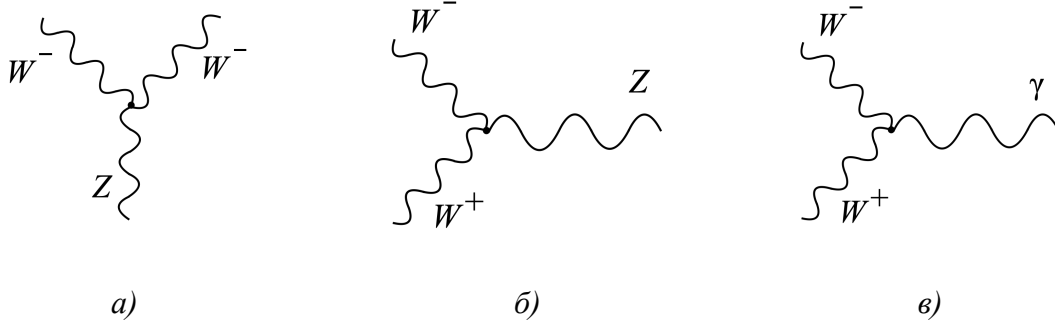


Рис. 15.3. Диаграммы Фейнмана, отображающие самодействие бозонов в теории слабого взаимодействия.

На прошлой лекции был построен Лагранжиан Стандартной модели и изучено взаимодействие с W -бозонами различных лептонов. Базовым элементом такой диаграммы является следующий: лептон переходит в нейтрино того же типа и испускает W -бозон (рис. 15.4(a)). Для распада мюона будем использовать диаграмму, представленную на рисунке 15.4(б).

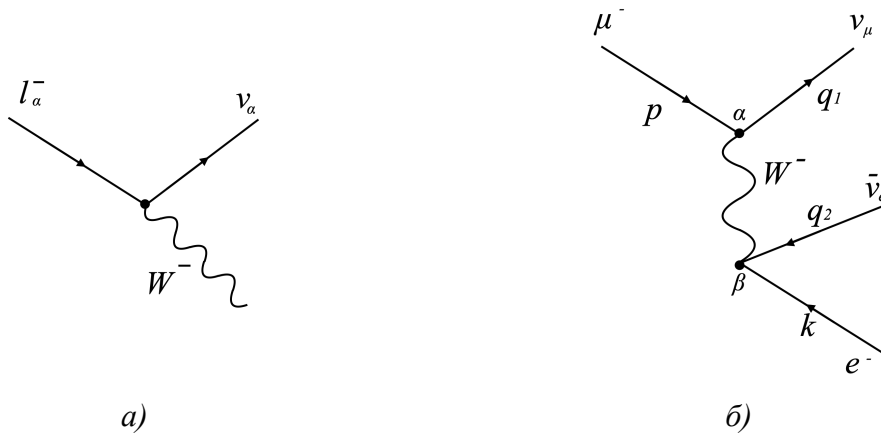


Рис. 15.4. Переход лептона в нейтрино того же типа с испусканием W -бозона.

По правилам Фейнмана запишем для такой диаграммы алгебраическое выражение:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_{q_1} \left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p \times \left(-i \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} \right) \times \bar{u}_k \left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\beta (1 - \gamma_5) v_{q_2},$$

проведем вычисления полностью, определим время жизни мюона.

Упростим выражение, заметим, что численно $q^2 \ll m_W^2$. Для q^2 справедливо выражение

$$q^2 = (p - q_1)^2 = m_\mu^2 - 2(p \cdot q_1),$$

пусть мюон находится в покое, тогда

$$p = (m_\mu, \vec{0}),$$

для нейтрино запишем

$$q_i = (\omega_i, \vec{q}_i),$$

тогда

$$q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu\omega_1.$$

q^2 максимально при минимальном ω_1 , что соответствует случаю, когда электрон полетел налево, электронное нейтрино направо, а мюонное нейтрино вылетело с нулевым импульсом. Так, минимально возможная энергия $\omega_1 = 0$, тогда

$$q_{max}^2 = m_\mu^2 = (0.105 \text{ ГэВ})^2 = 10^{-2} \text{ ГэВ}^2.$$

Поскольку

$$m_W^2 = (80 \text{ ГэВ})^2 = (0.8)^2 \cdot 10^4 \text{ ГэВ}^2,$$

То действительно

$$q_{max}^2 = 10^{-2} \text{ ГэВ}^2 \ll (0.8)^2 \cdot 10^4 \text{ ГэВ}^2 = m_W^2.$$

Значит можно пренебречь q^2 и $\frac{q_\alpha q_\beta}{m_W^2}$. Тогда перепишем выражение для матричного элемента:

$$i\mathcal{M} = -i \left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 \bar{u}_{q_1} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_p \cdot \bar{u}_k \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) v_{q_2},$$

константа $\left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ имеет историческое название, G_F – **константа Ферми**, поскольку Ферми впервые сформулировал теорию слабых взаимодействий, постулировав взаимодействие в виде произведения токов на некоторую константу.

Введем еще одно переобозначение, воспользуемся левокиральными матрицами:

$$i\mathcal{M} = -i2\sqrt{2}G_F \bar{u}_{q_1} \gamma^\alpha p_L u_p \cdot \bar{u}_k \gamma_\alpha p_L v_{q_2}.$$

Рассмотрим ток в общем виде $\bar{a} \gamma_\alpha p_L b$, определим комплексное сопряжение:

$$[\bar{a} \gamma_\alpha p_L b]^+ = b^+ p_L^+ (\gamma_\alpha)^+ (\bar{a})^+.$$

В дираковском базисе

$$p_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

матрица p_L эрмитова. Для $(\bar{a})^+$ можно записать следующее:

$$(\bar{a})^+ = (a^+ \gamma^0)^+ = (\gamma^0)^+ a = \gamma^0 a.$$

Тогда

$$[\bar{a}\gamma_\alpha p_L b]^+ = b^+ \gamma^0 \gamma^0 p_L \gamma^0 a = \bar{b} p_R \gamma^0 (\gamma^\alpha)^+ \gamma^0 a = \bar{b} p_R \gamma^\alpha a = \bar{b} \gamma^\alpha p_L a.$$

Эрмитово сопряженное для матричного элемента принимает вид:

$$(i\mathcal{M})^+ = +i2\sqrt{2}G_F \bar{u}_p \gamma^\beta p_L u_{q_1} \cdot \bar{v}_{q_2} \gamma_\beta p_L u_k.$$

Вычислим квадрат матричного элемента быстрым способом, воспользуемся преобразованиями Фирца:

$$\bar{a} O b \cdot \bar{c} O d = \sum c_i \bar{a} \Gamma^{(i)} d \cdot \bar{c} \Gamma^{(i)} b,$$

где $\Gamma^{(i)}$ – полный набор базисных матриц 4×4 для матриц Дирака. В случае слабого взаимодействия формулы упрощаются:

$$\bar{a} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b \cdot \bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d = -\bar{a} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d \cdot \bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b.$$

Реализуем преобразование Фирца для сопряженного матричного элемента:

$$(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = -i2\sqrt{2}G_F \bar{u}_p \gamma^\beta p_L u_k \cdot \bar{v}_{q_2} \gamma_\beta p_L u_{q_1} \rightarrow$$

$$|i\mathcal{M}|^2 = (i\mathcal{M})(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = -8G_F^2 \text{Tr}[u_{q_1} \bar{u}_{q_1} \gamma^\alpha p_L u_p \bar{u}_p \gamma^\beta p_L u_k \bar{u}_k \gamma_\alpha p_L v_{q_2} \bar{v}_{q_2} \gamma_\beta p_L].$$

Рассмотрим случай неполяризованного мюона, тогда все частицы, на которые он распадается, регистрируются без учета поляризации. Таким образом, необходимо суммирование по всем спинам конечных частиц. Вспомним, что

$$\sum_s u_{ps} \bar{u}_{ps} = \hat{p} + m, \quad \sum_s v_{ps} \bar{v}_{ps} = \hat{p} - m, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma^\mu,$$

тогда

$$\frac{1}{2} \sum_s \sum_{\substack{\text{спины} \\ \text{конечных частиц}}} |i\mathcal{M}|^2 = -4G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1 \gamma^\alpha p_L (\hat{p} + m_\mu) \gamma^\beta p_L (\hat{k} + m_e) \gamma_\alpha p_L \hat{q}_2 \gamma_\beta p_L].$$

Рассмотрим структуру $p_L (\hat{k} + m_e) \gamma_\alpha p_L$, где присутствуют импульс электрона $\hat{k}$ и масса электрона m_e :

$$p_L (\hat{k} + m_e) \gamma_\alpha p_L = p_L (\hat{k} + m_e) p_R \gamma_\alpha = p_L \hat{k} p_R \gamma_\alpha,$$

для мюонного множителя аналогично:

$$p_L (\hat{p} + m_\mu) \gamma^\beta p_L = p_L (\hat{p} + m_\mu) p_R \gamma^\beta = p_L \hat{p} p_R \gamma^\beta.$$

Для квадрата матричного элемента можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{\substack{\text{спины} \\ \text{конечных частиц}}} |i\mathcal{M}|^2 &= -4G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1 \gamma^\alpha p_L \hat{p} \gamma^\beta p_L \hat{k} \gamma_\alpha p_L \hat{q}_2 \gamma_\beta p_L] \\ &= -4G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1 \gamma^\alpha \hat{p} \gamma^\beta \hat{k} \gamma_\alpha \hat{q}_2 \gamma_\beta p_L]. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой:

$$\gamma^\alpha \hat{A} \hat{B} \hat{C} \gamma_\alpha = -2 \hat{C} \hat{B} \hat{A} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \sum_{\text{спины конечных частиц}} |i\mathcal{M}|^2 = -4G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1(-2\hat{k}\gamma^\beta\hat{p})\hat{q}_2\gamma_\beta p_L] = 8G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1\hat{k}\gamma^\beta\hat{p}\hat{q}_2\gamma_\beta p_L].$$

Поскольку

$$\gamma^\alpha \hat{A} \hat{B} \gamma_\alpha = 4(AB) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{\text{спины конечных частиц}} |i\mathcal{M}|^2 &= 8G_F^2 \text{Tr}[\hat{q}_1\hat{k}4(p \cdot q_2)p_L] \\ &= 32G_F^2(p \cdot q_2) \text{Tr}\left[\hat{q}_1\hat{k}\frac{(1-\gamma_5)}{2}\right] = 64G_F^2(p \cdot q_2)(k \cdot q_1). \end{aligned}$$

Ширина распада мюона

Следующим шагом вычислим ширину распада по стандартной формуле:

$$\begin{aligned} d^9\Gamma &= \frac{(2\pi)^4 8^4 (p-k-q_1-q_2)}{2m_\mu} 2^6 G_F^2 (p \cdot q_2)(k \cdot q_1) \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} = \\ &= \frac{2^2 \delta^4(p-k-q_1-q_2) G_F^2 (p \cdot q_2)(k \cdot q_1) d^3k d^3q_1 d^3q_2}{(2\pi)^5 m_\mu E \omega_1 \omega_2} = \\ &= \frac{G_F^2}{2^3 \pi^5} \frac{(p \cdot q_2)(k \cdot q_1)}{m_\mu} \frac{d^3k d^3q_1 d^3q_2}{E \omega_1 \omega_2} \delta^4(p-k-q_1-q_2). \end{aligned}$$

Остается взять девятимерный интеграл. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (p \cdot q_2) &= p^\alpha q_{2\alpha}, \quad (k \cdot q_1) = k^\beta q_{1\beta}, \quad p-k=q \rightarrow \\ \Gamma &= \int \frac{G_F^2 p^\alpha k^\beta}{2^3 \pi^5 m_\mu} \frac{d^3k}{E} \int \frac{d^3q_1 d^3q_2}{\omega_1 \omega_2} q_{2\alpha} q_{1\beta} \delta^4(q-q_1-q_2) = \int \frac{G_F^2 p^\alpha k^\beta}{2^3 \pi^5 m_\mu} \frac{d^3k}{E} I_{\alpha\beta}(q). \end{aligned}$$

Сначала вычислим $I_{\alpha\beta}(q)$, размерность интеграла

$$[I_{\alpha\beta}(q)] = m^2,$$

при этом интеграл зависит от индексов α и β , а также импульса q . Общий вид такого интеграла может быть следующим:

$$I_{\alpha\beta}(q) = a \cdot g_{\alpha\beta} \cdot q^2 + b \cdot q_\alpha q_\beta + c \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} q_\mu q_\nu,$$

где a, b, c – безразмерные константы, конструкция $c \cdot \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} q_\mu q_\nu$ не дает вклада. Сумму первых двух слагаемых можно переписать в более удобном виде:

$$a \cdot g_{\alpha\beta} \cdot q^2 + b \cdot q_\alpha q_\beta = A(g_{\alpha\beta} q^2 - 2q_\alpha q_\beta) + B(g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta),$$

где A, B – также безразмерные константы. Записанные конструкции взаимно ортогональны:

$$(g_{\alpha\beta}q^2 - 2q_\alpha q_\beta)(g^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta) = 4q^4 - 4q^4 - 2q^2 \cdot q^2 + 2q^4 = 0.$$

По ортогональным функциям удобно разложить выражение в ряд.

Вычислим некоторые конструкции:

$$(g_{\alpha\beta}q^2 - 2q_\alpha q_\beta)(g^{\alpha\beta}q^2 - 2q^\alpha q^\beta) = 4q^4 + 4q^4 - 2q^4 - 2q^4 = 4q^4,$$

$$(g_{\alpha\beta}q^2 + 2q_\alpha q_\beta)(g^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta) = 4q^4 + 4q^4 + 2q^4 + 2q^4 = 12q^4.$$

Запишем интеграл $I_{\alpha\beta}(q)$, домноженный на $(g^{\alpha\beta}q^2 - 2q^\alpha q^\beta)$ и на $(g^{\alpha\beta}q^2 + 2q^\alpha q^\beta)$:

$$\int \frac{d^3q_1 d^3q_2}{\omega_1 \omega_2} q_{2\alpha} q_{1\beta} \delta^4(q - q_1 - q_2) (g_{\alpha\beta}q^2 - 2q_\alpha q_\beta) = A \cdot 4q^4,$$

$$\int \frac{d^3q_1 d^3q_2}{\omega_1 \omega_2} q_{2\alpha} q_{1\beta} \delta^4(q - q_1 - q_2) (g_{\alpha\beta}q^2 + 2q_\alpha q_\beta) = B \cdot 12q^4.$$

Распишем некоторые подынтегральные конструкции:

$$q_{2\alpha} q_{1\beta} (g_{\alpha\beta}q^2 - 2q_\alpha q_\beta) = (q_1 \cdot q_2)q^2 - 2(q \cdot q_2)(q \cdot q_1),$$

$$\begin{cases} q = q_1 + q_2 \rightarrow q^2 = 2(q_1 \cdot q_2) \\ (q_1 \cdot q) = (q_1 \cdot q_2) = \frac{q^2}{2} \\ (q_2 \cdot q) = (q_1 \cdot q_2) = \frac{q^2}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$q_{2\alpha} q_{1\beta} (g_{\alpha\beta}q^2 - 2q_\alpha q_\beta) = \frac{q^4}{2} - 2 \frac{q^4}{4} = 0,$$

тогда очевидно, что $A = 0$. Для конструкции во втором интеграле справедливо

$$q_{2\alpha} q_{1\beta} q_{2\alpha} q_{1\beta} (g_{\alpha\beta}q^2 + 2q_\alpha q_\beta) = \frac{q^4}{2} - 2 \frac{q^4}{4} = q^4 \rightarrow$$

$$B = \frac{1}{12} \int \frac{d^3q_1 d^3q_2}{\omega_1 \omega_2} \delta^4(q - q_1 - q_2).$$

B – константа, релятивистки инвариантна, и левая часть выражения релятивистки инвариантна, поскольку $\delta^4(q - q_1 - q_2)$ – Лоренц-инвариант, $\frac{d^3q_1}{\omega_1}$ и $\frac{d^3q_2}{\omega_2}$ также Лоренц-инварианты. Поскольку все подынтегральное выражение Лоренц-инвариантно, то можно вычислить его в системе центра масс нейтрино, где импульсы нейтрино одинаковы по модулю и противоположны по направлению.

Снимем трехмерной δ -функцией один из интегралов:

$$B = \frac{1}{12} \int \frac{d^3q_1}{\omega_1 \omega_2} \delta(q_0 - \omega_1 - \omega_2) \Big|_{\vec{q}_2 = \vec{q} \cdot \vec{q}_1}$$

Теперь перейдем в систему центра масс, где $\vec{q} = 0$, тогда $\vec{q}_2 = -\vec{q}_1$ и $\omega_1 = \omega_2$:

$$B = \frac{1}{12} \int \frac{d^3q_1}{\omega_1^2} \delta(q_0 - 2\omega_1).$$

Поскольку

$$d^3 q_1 = d\Omega_{q_1} \omega_1^2 d\omega_1,$$

где $d\Omega_{q_1}$ – телесный угол, а интеграл от углов не зависит, то получим

$$B = \frac{\pi}{3} \int \frac{d\omega_1 \omega_1^2}{\omega_1^2} \delta(q_0 - 2\omega_1) = \frac{\pi}{3} \int d\omega_1 \delta(q_0 - 2\omega_1).$$

Интеграл по $d\omega_1$ снимается с помощью δ -функции:

$$B = \frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, для всего шестимерного интеграла $I_{\alpha\beta}(q)$ можем записать следующее:

$$I_{\alpha\beta}(q) = \frac{\pi}{6} (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta),$$

тогда выражение для ширины распада принимает вид:

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{2^3 \pi^5 m_\mu} \frac{\pi}{6} \int \frac{d^3 k}{E} p^\alpha k^\beta (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta).$$

Вычислим компоненты:

$$\begin{aligned} p^\alpha k^\beta (g_{\alpha\beta} q^2 + 2q_\alpha q_\beta) &= (p \cdot k)(p - k)^2 + 2(p \cdot q)(k \cdot q) = \\ &= (p \cdot k)(m_\mu^2 - 2(p \cdot k) + m_e^2) + 2(m_\mu^2 - (p \cdot k))((p \cdot k) - m_e^2), \end{aligned}$$

квадратами масс электрона пренебрежем. В системе покоя мюона

$$p \cdot k = m_\mu E.$$

Продолжим вычисление ширины распада мюона:

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{48\pi^4 m_\mu} 4\pi \int \frac{dE E^2}{E} [m_\mu E(m_\mu^2 - 2m_\mu E) + 2(m_\mu^2 - m_\mu E)m_\mu E].$$

Поскольку массу электрона считаем пренебрежимо малой, его минимальной энергии отвечает ситуация, когда вся энергия уносится нейтрино и антинейтрино: $E_{min} = 0$. Максимальная энергия электрона соответствует случаю, когда нейтрино и антинейтрино вылетают в сторону, противоположную направлению вылета электрона: $E_{max} = \frac{m_\mu}{2}$.

Введем безразмерную переменную:

$$\varepsilon = \frac{E}{m_\mu/2},$$

тогда

$$E = \frac{m_\mu}{2} \varepsilon, \quad dE = \frac{m_\mu}{2} d\varepsilon.$$

Ширина распада при такой замене приобретает вид:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} m_\mu^5 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{4} \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{2} (1 - \varepsilon) + 2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\varepsilon}{2} \right] = \\
 &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} m_\mu^5 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{4} \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \right] = \frac{G_F^2}{12\pi^3} m_\mu^5 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{4} \varepsilon \left[\frac{3\varepsilon}{2} - \varepsilon^2 \right] = \\
 &= \frac{G_F^2 m_\mu^5}{48\pi^3} \int_0^1 d\varepsilon \varepsilon \left[\frac{3\varepsilon}{2} - \varepsilon^2 \right] = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{48\pi^3} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}.
 \end{aligned}$$

Так, ширина распада мюона

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}.$$

Время жизни мюона

Используя формулу для ширины распада, вычислим время жизни мюона, учитывая, что расчеты ведутся в естественной системе единиц:

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5},$$

$$\hbar c = 1 = 197 \text{ МэВ} \cdot \text{фм} = 197 \cdot 10^6 \text{ эВ} \cdot 10^{-13} \text{ см} = 1.97 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{см},$$

$$\hbar = 1 = 197 \text{ МэВ} \cdot \frac{\text{фм}}{\text{с}} = 1.97 \cdot 10^8 \text{ эВ} \cdot \frac{10^{-13} \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} = \frac{1.97}{3} \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с},$$

$$\frac{1}{\text{эВ}} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-15} \text{ с},$$

$$G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}.$$

Итак, время жизни мюона:

$$\tau_\mu \approx 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Рассчитанное значение хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Рассмотрим распад мюона на качественном уровне. Процесс пропорционален G_F , значит квадрат матричного элемента пропорционален G_F^2 . Размерность ширины распада – энергия:

$$[G_F] = \frac{1}{m^2} \rightarrow \Gamma \sim G_F^2 m_\mu^5,$$

где $m_\mu \approx 105 \text{ МэВ}$ – практически та энергия, которая выделяется при распаде.

Продолжим развивать интуицию, рассмотрим распад нейтрона:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Процесс кажется сложным, потому что в нем участвуют сильно взаимодействующие кварки нейтрона и протона. На рисунке 15.5 изображена диаграмма такого процесса, похожая на диаграмму распада мюона. Тогда можно предположить, что

$$\mathcal{M} \sim G_F \rightarrow \Gamma \sim G_F^2 (m_n - m_p)^5,$$

где $m_n - m_p \approx 1.3$ МэВ. В таком случае следует ожидать разницы в ширинах распада мюона и нейтрона в 10^{10} раз, а время жизни нейтрона будет в 10^{10} раз больше времени жизни мюона:

$$\tau_\mu \sim 10^4 \text{ с.}$$

Такая оценка отличается от экспериментальных данных примерно в 10 раз. Отдельного рассмотрения требует случай поляризованного нейтрона.

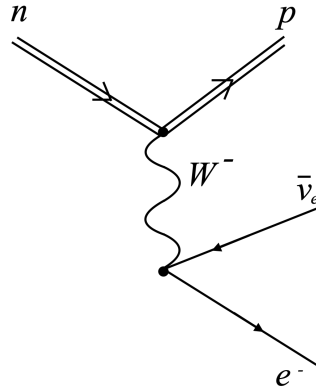


Рис. 15.5. Распад нейтрона.

Процесс распада мюона

Рассмотрим прием, который позволяет, используя уже полученные результаты, изучать тонкие процессы, связанные с направлением спина мюона. Запишем матричный элемент:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= -i \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_{q_1} \gamma^\alpha p_L u_p \cdot \bar{u}_k \gamma_\alpha p_L v_{q_2}, \\
 (i\mathcal{M})^+ &= +i \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \gamma^\alpha p_L u_{q_1} \cdot \bar{v}_{q_2} \gamma_\alpha p_L u_k, \\
 (i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ &= -i \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \gamma^\beta p_L u_k \cdot \bar{v}_{q_2} \gamma_\beta p_L u_{q_1}.
 \end{aligned}$$

Перемножим $i\mathcal{M}$ и $(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+$:

$$\begin{aligned}
 |i\mathcal{M}|^2 &= -8G_F^2 \text{Tr} [u_{q_1} \bar{u}_{q_1} \gamma^\alpha p_L u_p \bar{u}_p \gamma^\beta p_L u_k \bar{u}_k \gamma_\alpha p_L v_{q_2} \bar{v}_{q_2} \gamma_\beta p_L] = \\
 &= -8G_F^2 \text{Tr} \left[\hat{q}_1 \gamma^\alpha p_L (\hat{p} + m_\mu) \frac{(1 + \gamma_5 \hat{S}_\mu)}{2} \gamma^\beta p_L (\hat{k} + m_e) \frac{(1 + \gamma_5 \hat{S}_e)}{2} \gamma_\alpha p_L \hat{q}_2 \gamma_\beta p_L \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим структуру $p_L (\hat{p} + m_\mu) (1 + \gamma_5 \hat{S}_\mu) \gamma^\beta p_L$:

$$p_L (\hat{p} + m_\mu) (1 + \gamma_5 \hat{S}_\mu) p_R = p_L [\hat{p} + m_\mu + \hat{p} \gamma_5 \hat{S}_\mu + m_\mu \gamma_5 \hat{S}_\mu] p_R,$$

$$\begin{aligned}
 p_L \hat{p} \gamma_5 \hat{S}_\mu p_R &= \hat{p} p_R \gamma_5 \hat{S}_\mu p_R = \hat{p} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \gamma_5 \hat{S}_\mu p_R = \hat{p} \frac{1}{2} (\gamma_5 + 1) \hat{S}_\mu p_R = \hat{p} p_R \hat{S}_\mu p_R = \\
 &= \hat{p} \hat{S}_\mu p_L p_R = 0, \\
 p_L \gamma_5 \hat{S}_\mu p_R &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \gamma_5 \hat{S}_\mu p_R = \frac{1}{2} (\gamma_5 - 1) \hat{S}_\mu p_R = -p_L \hat{S}_\mu p_R = -\hat{S}_\mu p_R,
 \end{aligned}$$

тогда

$$p_L (\hat{p} + m_\mu) (1 + \gamma_5 \hat{S}_\mu) p_R = p_L [\hat{p} - m_\mu \hat{S}_\mu] p_R.$$

В результате для поляризованного мюона получен смещенный импульс. Для электрона получается аналогичная конструкция. Тогда для получения матричного элемента распада поляризованного мюона необходимо сделать замены в выражении для матричного элемента распада неполяризованного мюона:

$$64 G_F^2 (p \cdot q_2) (k \cdot q_1) \rightarrow 64 G_F^2 (p - m_\mu S_\mu, q_2) (k - m_e S_e, q_1).$$

Таким образом можно изучать спиновые корреляции в распадах.

Лекция 16. Распад π -мезона

Распад заряженных π -мезонов

Рассмотрим распад π^+ -мезона рамках Стандартной модели, теории электрослабых взаимодействий:

$$\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l.$$

В начальном состоянии частица состоит из фундаментальных объектов, кварков, и является их связанным состоянием. На сегодняшний день все еще существует трудность в описании связанных состояний кварков, поскольку методы, основанные на теории возмущений и пертурбативные методы в таких задачах практически не работают из-за большого значения константы сильного взаимодействия. Несмотря на то, что существуют методы решетки, когда задачи с сильным взаимодействием решаются численными методами, начальное состояние для реакции распада π^+ -мезона остается сложным и не вычисляемым из первых принципов без применения компьютера. Однако в ходе лекции будут вычислены ширина такого распада и время жизни π^+ -мезона.

Время жизни π^+ -мезона составляет $\tau_\pi \sim 2 \cdot 10^{-8}$ с, эта частица оставляет в экспериментальных установках заметные следы. Возможно определение энергии и импульса таких частиц при их попадании в калориметр.

Основные кварки, из которых построен π^+ -мезон:

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle.$$

Электрический заряд u -кварка $2/3$, $\bar{d}$ -кварка $1/3$, общий электрический заряд π^+ -мезона $+1$. Записанный кварковый состав π^+ -мезона является минимальным, в действительности такая частица представляет собой смесь кварков, антикварков и глюонов, поверх которой всегда присутствует пара $u\bar{d}$, определяющая заряд. На рисунке 16.1 представлена диаграмма, отображающая превращение пары $u\bar{d}$ в лептон и нейтрино. Преобразование происходит в результате слабого взаимодействия, на что указывает присутствие лептона и антинейтрино, а также достаточно большое время жизни. В некоторый момент линии кварков u и d объединяются, преобразуются в W^+ -бозон, который может превратиться в пару лептонов. Правая часть диаграммы достаточно простая и может быть легко вычислена, левая часть – сложная.

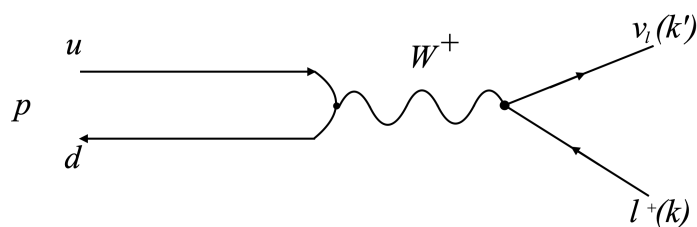


Рис. 16.1. Диаграмма Фейнмана распада пиона π^+ .

Запишем матричный элемент, соответствующий диаграмме на рисунке 16.1, в четырехфермионном приближении

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_{k's'} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{ks} \langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(0) | \pi^+ \rangle V_{ud}^{CKM}.$$

Матричный элемент $\langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(0) | \pi^+ \rangle$ зависит от индекса μ , импульса пиона в начальном состоянии и обладает размерностью m^2 , следовательно

$$\langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi(0) | \pi^+ \rangle = f_\pi p_\mu,$$

Где f_π – скалярная функция, зависящая от квадрата импульса, константа, определяемая из эксперимента. Преобразуем матричный элемент, воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\bar{u}_{k's'} \hat{p} (1 - \gamma_5) v_{ks} = \bar{u}_{k's'} (\hat{k} + \hat{k}') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{ks},$$

в общем случае по уравнению Дирака

$$\hat{k} u_{ks} = m u_{ks}, \quad \bar{u}_{ks} \hat{k} = m \bar{u}_{ks},$$

тогда, поскольку масса нейтрино нулевая, то

$$\bar{u}_{k's'} \hat{p} (1 - \gamma_5) v_{ks} = \bar{u}_{k's'} \hat{k} (1 - \gamma_5) v_{ks} = \bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) \hat{k} v_{ks},$$

по уравнению Дирака

$$\hat{k} v_{ks} = -m v_{ks},$$

тогда

$$\bar{u}_{k's'} \hat{p} (1 - \gamma_5) v_{ks} = -m_l \bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) v_{ks},$$

где m_l – масса лептона. Перепишем теперь матричный элемент:

$$i\mathcal{M} = V_{ud}^{CKM} i \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_l f_\pi \bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) v_{ks}.$$

Построим эрмитово сопряженное к матричному элементу:

$$(\bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) v_{ks})^+ = v_{ks}^+ (1 + \gamma_5) \gamma_0 u_{k's'} = \bar{v}_{ks} (1 - \gamma_5) u_{k's'} \rightarrow$$

$$(i\mathcal{M})^+ = -i V_{ud}^{CKM} \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_l f_\pi \bar{v}_{ks} (1 - \gamma_5) u_{k's'}.$$

Вычислим теперь квадрат модуля матричного элемента и просуммируем по спинам частиц в конечном состоянии. Усреднение по спинам начальных состояний не требуется, поскольку π^+ -мезон обладает нулевым спином.

$$\sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = |V_{ud}|^2 \frac{G_F^2}{2} m_l^2 f_\pi^2 \text{Tr} \left[\sum_{s'} u_{k's'} \bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) \sum_s v_{ks} \bar{v}_{ks} (1 - \gamma_5) \right],$$

вычислим след:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\sum_{s'} u_{k's'} \bar{u}_{k's'} (1 + \gamma_5) \sum_s v_{ks} \bar{v}_{ks} (1 - \gamma_5) \right] &= \text{Tr} [\hat{k}' (1 + \gamma_5) (\hat{k} - m_e) (1 - \gamma_5)] = \\ &= \text{Tr} [\hat{k}' \hat{k} (1 - \gamma_5)^2] = 2 \cdot 4 (k \cdot k') \rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = 4|V_{ud}|^2 G_F^2 m_l^2 f_\pi^2 (k \cdot k'),$$

учтем законы сохранения:

$$p^2 = (k + k')^2 = m_l^2 + 2(k \cdot k') = m_\pi^2 \rightarrow$$

$$\sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = 2|V_{ud}|^2 G_F^2 m_l^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_l^2).$$

Последний шаг – вычисление ширины распада:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p - k - k')}{2m_\pi} \sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 2E 2E'} = \\ &= \frac{2|V_{ud}|^2 G_F^2 m_l^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_l^2)}{(2\pi)^2 2^3 m_\pi} \int \delta^4(p - k - k') \frac{d^3 k d^3 k'}{E E'}. \end{aligned}$$

Сначала выгодно брать интеграл по импульсу той частицы, которая обладает ненулевой массой:

$$\begin{aligned} \int \delta^4(p - k - k') \frac{d^3 k d^3 k'}{E E'} &= \int \delta(m_\pi - E - E') \frac{d^3 k'}{E E'} \Big|_{E = \sqrt{m_l^2 + k'^2}} = \\ &= 4\pi \int \delta\left(m_\pi - E' - \sqrt{m_l^2 + (E')^2}\right) \frac{d^3 E' (E')^2}{E E'} = \\ &= 4\pi \frac{1}{1 + \frac{E'}{E}} \frac{E}{E'} = 4\pi \frac{E'}{m_\pi}. \end{aligned}$$

Энергия нейтрино E' – та величина, при которой аргумент δ -функции $(m_\pi - E - \sqrt{m_l^2 + (E')^2})$ обращается в ноль:

$$\begin{aligned} m_\pi - E' &= \sqrt{m_l^2 + (E')^2} \rightarrow (m_\pi - E')^2 = \sqrt{m_l^2 + (E')^2}^2 \rightarrow \\ m_\pi^2 - 2m_\pi E' + (E')^2 &= m_l^2 + (E')^2 \rightarrow E' = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл можно переписать в виде:

$$\int \delta^4(p - k - k') \frac{d^3 k d^3 k'}{E E'} = 2\pi \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2}.$$

Запишем ответ для ширины распада:

$$\Gamma = \frac{|V_{ud}|^2 G_F^2 m_l^2 f_\pi^2 (m_\pi^2 - m_l^2)^2}{8\pi m_\pi^3}.$$

При сравнении с экспериментальным значением можно определить константу f_π :

$$f_\pi = 93 \text{ МэВ}.$$

Ширина распада π -мезонов

Если π^+ распадается по двум возможным каналам:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e,$$

интуитивно кажется, что с большей вероятностью распад пойдет по второму каналу, поскольку масса позитрона меньше массы мюона, фазовый объем пары по позитрон и электронное нейтрино больше, а значит ширина распада больше. В формуле для ширины распада фигурирует разность квадратов масс пиона и лептона, так, чем ближе масса лептона к массе пиона, тем меньше ширина распада. Такое рассуждение было бы верно для других частиц, но не для пиона, поскольку в ширине распада присутствует также множитель квадрат массы лептона, приводящий к тому, что пион распадается в 40000 раз более вероятно на мюон и нейтрино.

Оценим соотношение ширин распада пиона по позитронному и мюонному каналам:

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} \sim \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_l^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2},$$

множитель

$$\frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 5.5$$

имеет природу фазового объема, при этом

$$\frac{m_e^2}{m_\mu^2} = \frac{1}{40000}.$$

Полученное соотношение хорошо сходится с экспериментальными данными относительной вероятности распада пиона на мюон и позитрон.

При получении неожиданных результатов в слабых взаимодействиях следует обратить внимание на направление спинов частиц. Рассмотрим случай покоящегося π^+ -мезона, пусть вправо вылетает нейтрино, влево лептон (рис. 16.2). Слабое взаимодействие, связанное с обменом W -бозоном, делает все поля, участвующие в этом взаимодействии, левокиральными. Если частица безмассовая, то левая киральность совпадает с левой спиральностью. Это означает, что нейтрино будет вылетать со спином, противоположенным его импульсу, а если бы лептон с положительным зарядом, обладал нулевой массой, то он стал бы правоспиральной античастицей, спин был бы сонаправлен с импульсом. Если это так, то возникает проблема: изначально пион обладал спином, равным нулю, а итоговая пара частиц обладает спином 1. Однако спин, как часть орбитального момента не может нарушаться – нельзя создать из бесспинового состояния состояние со спином, которое не компенсировалось бы орбитальным

движением. Поэтому при нулевой массе лептона такой процесс был бы невозможен, пион оставался бы стабильным.

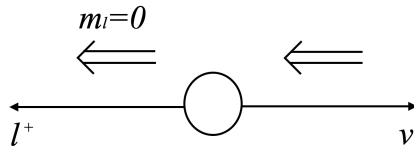


Рис. 16.2. Направление импульсов и спинов при распаде пиона на нейтрино и безмассовый лептон.

В реальности масса лептонов отлична от нуля, процесс пропорционален квадрату этой массы. Рассмотрим действие оператора киральности на спинор:

$$\frac{1 - \gamma_5}{2} u = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

в представлении Дирака

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1 - \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\frac{1 - \gamma_5}{2} u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ -(\varphi - \chi) \end{pmatrix}.$$

Компоненты спинора связаны следующим образом:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi,$$

Эту же связь можно переписать, рассмотрев φ и χ как собственные состояния оператора спиральности:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{n}_p \varphi_s = s \varphi_s,$$

где $\vec{\sigma}$ – вектор из матриц Паули, $\hat{n}_p$ – единичный вектор вдоль импульса частицы, φ_s – собственное состояние, s – собственное значение. Также распишем $\vec{p}$:

$$\vec{p} = |\vec{p}| \hat{n}_p = \sqrt{E^2 - m^2} \hat{n}_p.$$

Тогда связь компонент спинора можно переписать в виде:

$$\chi = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}_p \varphi = \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} s \varphi_s.$$

Таким образом,

$$\frac{1 - \gamma_5}{2}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} s\right) \varphi_s \\ - \left(1 - \sqrt{\frac{E - m}{E + m}} s\right) \varphi_s \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два предельных случая.

1) Пусть частица ультрарелятивистская, $E \gg m$, тогда

$$\frac{1 - \gamma_5}{2}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - s) \varphi_s \\ -(1 - s) \varphi_s \end{pmatrix}.$$

В зависимости от s спинор принимает совершенно разные значения:

- $s = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - s) \varphi_s \\ -(1 - s) \varphi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
- $s = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - s) \varphi_s \\ -(1 - s) \varphi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_s \\ -\varphi_s \end{pmatrix}$

Так, если лептон или ультрарелятивистский, или безмассовый, то оператор $\frac{1 - \gamma_5}{2}$ оставляет только компоненты с проекцией спина $s = -1$, где спин и импульс противонаправлены.

2) Пусть частица рождается покоящейся, $E = m$, тогда

$$\frac{1 - \gamma_5}{2}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ -\varphi_s \end{pmatrix},$$

спинор не зависит от проекции спины.

Таким образом, когда пион распадается на позитрон и нейтрино, из-за того, что масса позитрона мала по сравнению с его энергией порядка $\frac{m_\pi}{2}$, то случай похож на случай с безмассовым лептоном – позитрон вылетает правоспиральным с вероятностью, пропорциональной квадрату массы лептона. При распаде пиона по мюонному каналу энергия мюона сравнима с его массой, соответственно образуется одинаковое число частиц со спином, направленным по импульсу, и спином, направленным против импульса. Поэтому мюонные распады более вероятны.

Лекция 17. Распад нейтрона

Распад нейтрона

Нейтрон – частица с массой $m_n \approx 939$ МэВ, нейтральная, сильно взаимодействующая часть атомных ядер вместе с протоном. Внутри атомных ядер нейтроны в основном стабильны, однако в свободном состоянии время жизни нейтрона невелико, $\tau_n \approx 900$ с.

Реакция распада нейтрона похожа на распад заряженного пиона тем, что здесь начальное состояние также является связанным состоянием кварков. Распад нейтрона отличается наличием связанного кваркового состояния в конечном состоянии:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{или} \quad |udd\rangle \rightarrow |uud\rangle + e^- + \bar{\nu}_e,$$

d -кварк превращается в u -кварк, излучая W^- -бозон, который распадается на электрон и электронное антинейтрино (рис. 17.1).

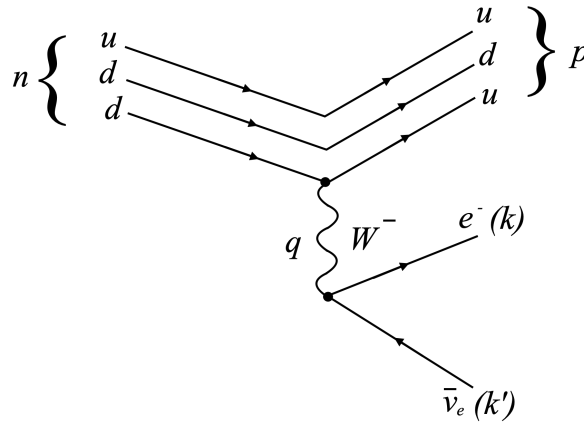


Рис. 17.1. Распад нейтрона.

Поставим в соответствие такой диаграмме Фейнмана матричный элемент. Импульс W^- -бозона имеет вид

$$q^2 = (p_n - p_p)^2 = m_n^2 + m_p^2 - 2(p_n \cdot p_p).$$

Вычислим скалярное произведение $(p_n \cdot p_p)$ в системе покоя нейтрона:

$$(p_n \cdot p_p) = m_n E_p \approx m_n m_p \rightarrow$$

$$q^2 = (m_n - m_p)^2 \approx (1.3 \text{ МэВ})^2 \ll m_n^2.$$

Тогда можно записать матричный элемент в следующем виде:

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_k \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{k'} \langle p | \bar{\psi}_u(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_d(0) | n \rangle V_{ud}^{CKM}.$$

Величину $\langle p | \bar{\psi}_u(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_d(0) | n \rangle$ нельзя вычислить из первых принципов. Параметризуем эту конструкцию так, как будто протон и нейтрон являются точечными частицами и описываются уравнениями Дирака и соответственно спинорами Дирака:

$$\langle p | \bar{\psi}_u(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_d(0) | n \rangle = \bar{u}_{p_p} [g_v(q^2) \gamma^\mu - g_a(q^2) \gamma^\mu \gamma^5] u_{p_n},$$

где γ^μ и γ^5 – матрицы Дирака, $g_v(q^2)$ и $g_a(q^2)$ – формфакторы, зависят от квадрата переданного импульса, такие же функции встречаются в случае преобразования реакции распада нейтрона в реакцию взаимодействия нейтрона и нейтрино:

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^-.$$

При измерении сечения такой реакции можно экспериментально определить функции $g_v(q^2)$ и $g_a(q^2)$, $g_v(q^2)$ – векторный формфактор, $g_a(q^2)$ – аксиальный формфактор. В рассматриваемом случае q^2 очень мало по сравнению с величиной формфакторов, в распаде нейтрона можно положить $q^2 = 0$, тогда будем использовать две константы

$$g_v(0) = 1 \quad \text{и} \quad g_a(0) = \lambda.$$

Упростим вычисление матричного элемента, адронный так запишем в следующем виде

$$\bar{u}_{p_p} [g_v(q^2) \gamma^\mu - g_a(q^2) \gamma^\mu \gamma^5] u_{p_n} = \bar{p} [\gamma^\mu (1 - \lambda \gamma^5)] n,$$

выражение можно переписать в виде левых и правых токов:

$$1 - \lambda \gamma^5 = a \cdot (1 - \gamma_5) + b \cdot (1 + \gamma_5),$$

где a и b – константы:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = \lambda \end{cases} \rightarrow a = \frac{1 + \lambda}{2}, b = \frac{1 - \lambda}{2}.$$

Запишем теперь весь матричный элемент:

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \cdot \bar{p} [\gamma^\mu (1 - \gamma_5) a + \gamma^\mu (1 + \gamma_5) b] n \cdot V_{ud}^{CKM}.$$

Вычислим комплексно-сопряженное:

$$(i\mathcal{M})^+ = +i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud}^* \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \cdot \bar{n} [\gamma^\mu (1 - \gamma_5) a + \gamma^\mu (1 + \gamma_5) b] p.$$

Проведем преобразование Фирца:

$$\begin{aligned} \bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b \cdot \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d &= -\bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d \cdot \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b, \\ \bar{a} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b \cdot \bar{c} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d &= +2\bar{a} (1 + \gamma_5) d \cdot \bar{c} (1 - \gamma_5) b, \end{aligned}$$

a, b, c, d – спиноры, тогда

$$(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = +i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud}^* [-a \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) p \cdot \bar{n} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + 2b \bar{\nu} (1 - \gamma_5) p \cdot \bar{n} (1 + \gamma_5) e].$$

Перемножим матричные элементы

$$(i\mathcal{M})(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = i \frac{G_F^2}{2} |V_{ud}|^2 \times [...],$$

распишем некоторые компоненты

$$\begin{aligned} [a \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu \cdot \bar{p} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) n] \times [-a \bar{\nu} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) p \cdot \bar{n} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) e] = \\ = -a^2 \text{Tr} [e \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) p \bar{p} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) n \bar{n} \gamma^\beta (1 - \gamma_5)], \end{aligned}$$

усредним по спины начальных частиц, просуммируем по спинам конечных частиц:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{spin} \{ -a^2 Tr [e \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu \bar{\nu} \gamma_\beta (1 - \gamma_5) p \bar{p} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) n \bar{n} \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] \} = \\
 & = -a^2 Tr [(\hat{k} + m_e) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \hat{k}' \gamma_\beta (1 - \gamma_5) (\hat{p}_p + m_p) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (\hat{p}_n + m_n) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] = \\
 & = -2^2 a^2 Tr [\hat{k} \gamma_\alpha \hat{k}' \gamma_\beta \hat{p}_p \gamma^\alpha \hat{p}_n \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] = 2^3 a^2 Tr [\hat{k} \hat{p}_p \gamma_\beta \hat{k}' \hat{p}_n \gamma^\beta (1 - \gamma_5)] = \\
 & = 2^5 a^2 (k' \cdot p_n) Tr [\hat{k} \hat{p}_p (1 - \gamma_5)] = 2^7 a^2 (k' \cdot p_n) (k \cdot p_p).
 \end{aligned}$$

Опустим вычисления для оставшихся следов, запишем формулу для квадрата матричного элемента:

$$|i\mathcal{M}|^2 = 2^7 G_F^2 |V_{ud}|^2 [a^2 (p' \cdot k)(p \cdot k') - ab m_n m_p (k \cdot k') + b^2 (p \cdot k)(k' \cdot p')],$$

где $p' = p_p$, $p = p_n$, для импульсов лептона и нейтрино обозначения остались неизменными.

Ширина распада нейтрона

Заметим, что рождающийся протон можно считать покоящимся, поскольку полная энергия, которая выделяется

$$\Delta = m_n - m_p$$

делится пополам между протоном и парой электрон-нейтрино

$$\frac{\Delta}{2} = 0.65 \text{ МэВ} \ll m_p,$$

что является малой величиной, тогда

$$E' = m_p.$$

Вычислим все скалярные произведения, фигурирующие в формуле квадрата матричного элемента:

$$p = (m_n, 0), \quad p' = (E'_p, \vec{p}') \approx (m_p, 0), \quad k = (E, \vec{k}), \quad k' = (E', \vec{k}') \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 p' \cdot k &= m_p E, \\
 p \cdot k' &= m_n E', \\
 k \cdot k' &= EE' - \vec{k} \vec{k}' = EE'(1 - v_e \cos \theta), \\
 p \cdot k &= m_n E, \\
 k' \cdot p' &= m_p E',
 \end{aligned}$$

где v_e – скорость электрона, θ – угол между единичными векторами электрона и нейтрино, тогда

$$\begin{aligned}
 & [a^2 (p' \cdot k)(p \cdot k') - ab m_n m_p (k \cdot k') + b^2 (p \cdot k)(k' \cdot p')] = \\
 & = a^2 m_n m_p EE' - ab m_n m_p EE'(1 - v_e \cos \theta) + b^2 m_n m_p EE' = \\
 & = m_n m_p EE' (a^2 - ab(1 - v_e \cos \theta) + b^2).
 \end{aligned}$$

Запишем выражение для ширины распада нейтрона:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k - k')}{2m_n} m_n m_p E E' (a^2 - ab(1 - v_e \cos \theta) + b^2) \times \\
 &\quad \times \frac{d^3 p' d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^9 2^3 E' E m_p} 2^7 G_F^2 |V_{ud}|^2 = \\
 &= \frac{2^3 G_F^2 |V_{ud}|^2}{(2\pi)^5} \int \delta^4(p - p' - k - k') (a^2 - ab(1 - v_e \cos \theta) + b^2) d^3 p' d^3 k d^3 k' = \\
 &= \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2}{2^2 \pi^5} \int \delta(m_n - m_p - E - E') (a^2 - ab(1 - v_e \cos \theta) + b^2) d^3 k d^3 k'.
 \end{aligned}$$

Снимем оставшиеся интегралы. Для этого распишем косинус в виде

$$\cos \theta = \hat{n}_k \cdot \hat{n}_{k'},$$

и $d^3 k, d^3 k'$ через телесные углы

$$d^3 k' = d\Omega_{k'} E'^2 dE',$$

$$d^3 k = d\Omega_k k E dE,$$

поскольку

$$d^3 k = d\Omega_k k^2 dk, \quad E^2 = k^2 + m^2, \quad E dE = k dk.$$

Интегралы по углам взять достаточно легко, так как есть слагаемые, которые не зависят от этих углов, для них

$$\int d\Omega_k d\Omega_{k'} = (4\pi)^2,$$

а слагаемое, содержащее косинус, может быть представлено через скалярное произведение:

$$\int d\Omega_k d\Omega_{k'} \hat{n}_k \cdot \hat{n}_{k'} = 0.$$

Тогда для ширины распада справедливо

$$\Gamma = \frac{(4\pi)^2 G_F^2 |V_{ud}|^2}{4\pi^5} \int \delta(\Delta - E - E') k E dE (E')^2 dE'.$$

Снимем интеграл по энергии электрона, используя δ -функцию:

$$\begin{aligned}
 \int \delta(\Delta - E - E') k E dE (E')^2 dE' &= \int \sqrt{(\Delta - E')^2 + m_e^2} (\Delta - E') (E')^2 dE' \rightarrow \\
 \Gamma &= \frac{4 G_F^2 |V_{ud}|^2}{\pi^3} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} dE' \sqrt{(\Delta - E')^2 + m_e^2} (\Delta - E') (E')^2.
 \end{aligned}$$

Введем безразмерную переменную ε :

$$E' = \frac{\Delta}{2} \varepsilon, \quad \Delta - E' = \frac{\Delta}{2} (2 - \varepsilon), \quad (E')^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \varepsilon^2 \rightarrow$$

$$\Gamma = \frac{4G_F^2 |V_{ud}|^2}{\pi^3} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^5 \int_0^{\frac{\Delta}{2}} d\varepsilon \sqrt{(2 - \varepsilon)^2 + \frac{4m_e^2}{\Delta^2} (2 - \varepsilon)\varepsilon^2} = \frac{G_F^2 \Delta^5 |V_{ud}|^2 (1 + 3\lambda^2)}{60\pi^3} \cdot 0.47.$$

Оценка для интеграла получена численно.

Зная ширину распада, можно рассчитать время жизни нейтрона:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}.$$

Время жизни, рассчитанное по приведенной оценке, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Лекция 18. Распады τ -лептонов, W -бозонов и Z -бозонов

Распад τ -лептона

τ -лептон распадается и на лептоны, как мюон, и на адроны. Рассмотрим некоторые из распадов.

$$\begin{aligned}\tau^- &\rightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ \tau^- &\rightarrow \text{кварки } (d\bar{u}, s\bar{u}, b\bar{u}, d\bar{c}, s\bar{c}, b\bar{c}, d\bar{t}, \dots),\end{aligned}$$

распады на все пары кварков кроме $d\bar{u}, s\bar{u}$ невозможны, поскольку масса таких пар превышает массу начального τ^- -лептона. Этой информации достаточно для вычисления времени жизни τ^- -лептона.

Рассмотрим первый вариант распада, вычисления ширины для похожей реакции распада мюона уже были проведены в курсе лекций. Диаграмма распада τ^- -лептона приведена на $\nu_\tau, e^-, \bar{\nu}_e$ рисунке 18.1.

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \rightarrow \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} \equiv \Gamma_0.$$

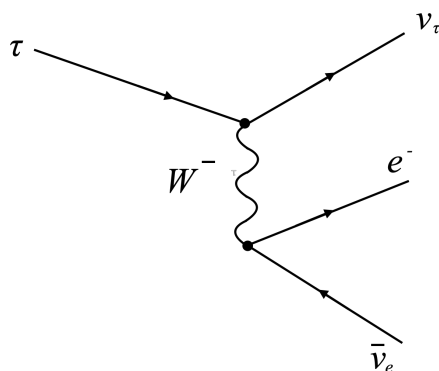


Рис. 18.1. Распад τ^- -лептона на $\nu_\tau, e^-, \bar{\nu}_e$.

Распад τ^- -лептона на мюон и мюонное антинейтрино также похож на предыдущий, однако возникает вопрос, можно ли пренебрегать массами частиц в конечном состоянии. Мюон в 200 раз тяжелее электрона, но по сравнению с τ^- -лептоном мюон все равно легкий. Так, ширина распада τ^- -лептона по мюонному каналу также Γ_0 .

Оценим теперь ширину распада τ^- -лептона на пару кварков $d\bar{u}$, которые в последствии адронизуются. Кварки d и $\bar{u}$ легкие, их массами можно пренебречь, ширина такого распада также пропорциональна Γ_0 . Однако кварки обладают дополнительным кварковым числом, цветом, поэтому ширину распада необходимо домножить на 3. Кроме того в результате распада смешиваются верхние и нижние кварки, значит ширина распада должна быть домножена на $|V_{ud}|^2$. Тогда ширина распада τ^- -лептона на пару кварков $d\bar{u}$

$$3|V_{ud}|^2\Gamma_0.$$

Для канала распада на $s\bar{u}$ аналогичная ситуация:

$$3|V_{us}|^2\Gamma_0.$$

Тогда ширина распада τ^- -лептона на пары кварков следующая:

$$\Gamma = 3|V_{ud}|^2\Gamma_0 + 3|V_{us}|^2\Gamma_0 = 3\Gamma_0,$$

в силу унитарности V_{ud} и V_{us} .

Так, полная ширина, складывающаяся из двух распадов на лептоны и распада на пары кварков

$$\Gamma_{tot} = 2\Gamma_0 + 3\Gamma_0 = 5\Gamma_0.$$

Время жизни τ^- -лептона можно оценить как

$$\tau_\tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}} = \frac{1}{5} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^5 \tau_\mu \sim 10^{-13} \text{ с.}$$

Оценка полного времени жизни хорошо совпадает с экспериментальными данными.

Рассмотрим процесс, в котором фигурируют адроны:

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \pi^-.$$

Ранее был рассмотрен распад заряженного π -мезона, в нем фигурировала константа f_π , определенная экспериментально. В случае распада τ^- -лептона также используется эта константа. На рисунке 18.2 изображена диаграмма Фейнмана распада τ^- -лептона на пион и нейтрино. τ^- -лептон превращается в нейтрино, испуская W^- -бозон, который испускает пару кварков $d\bar{u}$. Эта пара кварков за счет сильного взаимодействия образует связанное состояние π^- .

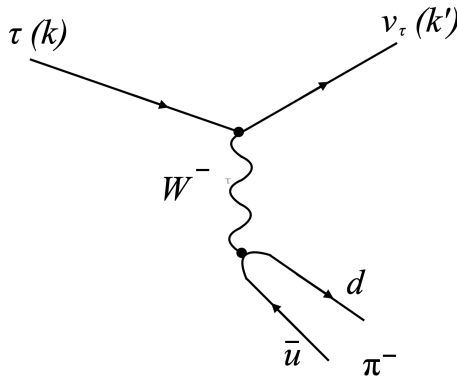


Рис. 18.2. Распад τ^- -лептона на пион и нейтрино.

Распишем матричный элемент такой диаграммы:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \tau \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) \langle \pi^- | \bar{\psi}_u \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d | 0 \rangle V_{ud} = \\
 &= \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \tau \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) f_\pi p_\alpha V_{ud} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} f_\pi \bar{\nu}_\tau \hat{p} (1 - \gamma_5) \tau.
 \end{aligned}$$

p – импульс пиона, k – импульс τ -лептона, k' – импульс нейтрино,

$$\hat{p} = \hat{k} - \hat{k}'.$$

По уравнению Дирака

$$\bar{\nu}_\tau \hat{k}' = m_{\nu_\tau} \bar{\nu}_\tau = 0,$$

тогда

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{ud} f_\pi m_\tau \bar{\nu}_\tau (1 + \gamma_5) \tau.$$

Квадрат матричного элемента, усредненный по спинам начального состояния и просуммированный по спинам конечного состояния, принимает вид

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 = f_\pi^2 \frac{G_F^2}{2 \cdot 2} |V_{ud}|^2 m_\tau^2 \sum_{spin} Tr[\nu_\tau \bar{\nu}_\tau (1 + \gamma_5) \tau \bar{\tau} (1 - \gamma_5)],$$

обозначим $\nu_\tau \bar{\nu}_\tau = \hat{k}'$, $\tau \bar{\tau} = \hat{k} + m_\tau \tau$, тогда

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 = f_\pi^2 \frac{4G_F^2}{2} |V_{ud}|^2 m_\tau^2 (k \cdot k').$$

Воспользуемся законом сохранения:

$$k = p + k' \rightarrow (k - k')^2 = p^2 = m_\pi^2 = m_\tau^2 - 2(k \cdot k') \rightarrow k \cdot k' = \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2},$$

следовательно

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 = f_\pi^2 G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^2 (m_\tau^2 - m_\pi^2).$$

Ширина распада τ -лептона

Вычислим ширину распада τ^- -лептона в пион и нейтрино:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \pi^-) &= f_\pi^2 \int \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k - k' - p)}{2m_\tau} G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^2 (m_\tau^2 - m_\pi^2) \frac{d^3 k' d^3 p}{(2\pi)^6 2E' 2E} = \\ &= \frac{f_\pi^2 G_F^2 |V_{ud}|^2 m_\tau^2 (m_\tau^2 - m_\pi^2)}{(2\pi)^2 2^3 m_\tau} \int \delta^4(k - k' - p) \frac{d^3 k' d^3 p}{E' E}. \end{aligned}$$

Снимем интегралы:

$$\begin{aligned} \int \delta^4(k - k' - p) \frac{d^3 k' d^3 p}{E' E} &= \\ &= \int \delta(m_\tau - E' - \sqrt{m_\pi^2 + (E')^2}) \frac{d\Omega_{k'} (E')^2 dE'}{E' E} \Big|_{E = \sqrt{m_\pi^2 + (E')^2}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{E'}{E}} 4\pi \frac{E'}{E} = \frac{4\pi E'}{m_\tau} = \frac{4\pi}{m_\tau} \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau} = 2\pi \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{m_\tau^2}. \end{aligned}$$

Тогда запишем итоговое выражение для ширины распада:

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \pi^-) = \frac{G_F^2 |V_{ud}|^2 (m_\tau^2 - m_\pi^2)^2 f_\pi^2}{16\pi m_\tau}.$$

При подстановке чисел обнаруживается согласие с экспериментальными данными.

Абсолютно аналогично можно рассмотреть распад τ^- -лептона

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + K^-,$$

$$\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + K^-) = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 (m_\tau^2 - m_K^2)^2 f_K^2}{16\pi m_\tau}.$$

В действительности τ^- -лептон обладает более богатой картиной распадов, другие процессы дают меньший вклад в вероятность распада, при этом теоретические вычисления требуют более продвинутых методов.

Распады W-бозонов

Во всех ранее рассмотренных распадах промежуточной частицей участвовал W-бозон, который не является стабильной частицей. Экспериментально известно, что масса $m_W \sim 80$ ГэВ, ширина распада $\Gamma \sim 2$ ГэВ. Вычислим ширину распада W-бозона из первых принципов.

На рисунке 18.3 представлена диаграмма распада W-бозона на фермионы f и f' , например

$$f = l^-, f' = \bar{\nu}_l: W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, e^- \bar{\nu}_e, \dots$$

$$f = d_i, f' = \bar{u}_j: W^- \rightarrow d\bar{u}, s\bar{c}, b\bar{u}, \dots$$

Пусть фермион f обладает импульсом k , а фермион f' импульсом k' .

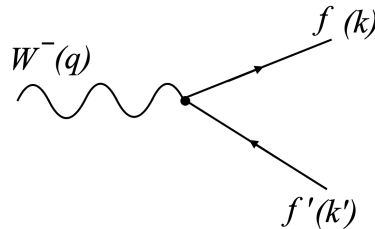


Рис. 18.3. Распад W-бозона.

Запишем матричный элемент для распада W^- -бозона на заряженный лептон и соответствующее нейтрино:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_k \left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{k'} \varepsilon_{\mu,\lambda}(q),$$

где $\varepsilon_{\mu,\lambda}(q)$ – вектор поляризации W^- -бозона с импульсом q , λ – поляризация. Комплексно-сопряженное:

$$(i\mathcal{M})^+ = \frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{v}_{k'} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_k \varepsilon_{\nu,\lambda}^*(q),$$

тогда квадрат матричного элемента имеет вид:

$$|i\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 \text{Tr}[u_k \bar{u}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_{k'} \bar{v}_{k'} \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \varepsilon_{\mu,\lambda}(q) \varepsilon_{\nu,\lambda}^*(q).$$

Пусть W^- -бозон находится на массовой поверхности, то есть является реальной частицей. Его спин равен 1, значит возможны 3 проекции. Усредним по спину начального W^- -бозона и просуммируем по спинам всех конечных частиц:

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda} \sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{24} \text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{k}' \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu,\lambda}(q) \varepsilon_{\nu,\lambda}^*(q),$$

где

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu,\lambda}(q) \varepsilon_{\nu,\lambda}^*(q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}\right).$$

Вычислим следы:

1)

$$\begin{aligned} -\text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{k}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5)] &= -2\text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu \hat{k}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5)] = \\ &= -2\text{Tr}[\hat{k} (-2\hat{k}') (1 - \gamma_5)] = 4 \cdot 4(k \cdot k'), \end{aligned}$$

воспользуемся законами сохранения

$$q^2 = (k + k')^2 = m_f^2 + 2(k \cdot k') = m_W^2 \rightarrow$$

$$k \cdot k' = \frac{m_W^2 - m_f^2}{2} \rightarrow$$

$$-\text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \hat{k}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5)] = 8(m_W^2 - m_f^2) = 8m_W^2 \left(1 - \frac{m_f^2}{m_W^2}\right).$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_W^2} \text{Tr}[\hat{k} \hat{q} (1 - \gamma_5) \hat{k}' \hat{q} (1 - \gamma_5)] &= \frac{2}{m_W^2} \text{Tr}[\hat{k} \hat{q} \hat{k}' \hat{q} (1 - \gamma_5)] = \\ &= \frac{2}{m_W^2} \{4((k \cdot q)(k' \cdot q') + (k \cdot q)(k' \cdot q) - \\ &\quad - (k \cdot k')q^2) - 4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu q_\nu k'_\alpha q_\beta\}, \end{aligned}$$

распишем скалярные произведения

$$k \cdot q = k \cdot (k + k') = m_f^2 + \frac{m_W^2 - m_f^2}{2} = \frac{m_W^2 + m_f^2}{2} \rightarrow$$

$$k' \cdot q = k' \cdot (k + k') = \frac{m_W^2 - m_f^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_W^2} \text{Tr}[\hat{k} \hat{q} (1 - \gamma_5) \hat{k}' \hat{q} (1 - \gamma_5)] &= \\ &= \frac{8}{m_W^2} \left(2 \left(\frac{m_W^2 + m_f^2}{2}\right) \left(\frac{m_W^2 - m_f^2}{2}\right) - \left(\frac{m_W^2 - m_f^2}{2}\right) m_W^2\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4(m_W^2 - m_f^2)}{m_W^2} (m_W^2 + m_f^2 - m_W^2) = \frac{4m_f^2}{m_W^2} (m_W^2 - m_f^2) = 4m_f^2 \left(1 - \frac{m_f^2}{m_W^2}\right).$$

Так, первый след пропорционален m_W^2 , а второй след m_f^2 , поскольку $m_f^2 \ll m_W^2$, второй след дает малый вклад по сравнению с первым следом. Для дальнейших вычислений пренебрежем массой фермиона, тогда можно записать

$$-Tr[(\hat{k} + m_f)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\hat{k}'\gamma^\nu(1 - \gamma_5)] \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2}\right) = 8m_W^2.$$

Таким образом, для усредненного квадрата матричного элемента можно записать

$$\frac{1}{3} \sum |i\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{3} m_W^2.$$

Для вычисления ширины распада необходимо вычислить фазовый объем двух частиц, что было сделано неоднократно. Выпишем ответ для ширины распада W^- -бозона на пару заряженный лептон и нейтрино:

$$\Gamma_{l\bar{\nu}} = \frac{g^2 m_W}{48\pi^3}.$$

Полная ширина распада W -бозонов

Рассчитаем полную ширину распада W^- -бозона, для этого необходимо учесть распады на лептоны и распады на кварки. Возможны три варианта распада по лептонным каналам:

$$\begin{aligned} W^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e, \\ W^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ W^- &\rightarrow \tau^- + \bar{\nu}_\tau, \end{aligned}$$

так, ширина распадов на лептоны составляет $\frac{g^2 m_W}{16\pi^3}$.

Оценим ширину распада W^- -бозона на кварки. Невозможен только распад на t -кварк, поскольку он тяжелее бозона. Все остальные варианты возможны. Для парциальной ширины распада на кварки можно записать следующее

$$\Gamma(W^- \rightarrow \text{кварки}) = 3\Gamma_{l\bar{\nu}} \sum_{i,j} |V_{ij}|^2,$$

множитель 3 появляется за счет существования трех цветов. В силу унитарности матрицы смешивания

$$\Gamma(W^- \rightarrow \text{кварки}) = 3\Gamma_{l\bar{\nu}} \sum_{j=\bar{u},\bar{c}} \sum_i |V_{ij}|^2 = 3\Gamma_{e\bar{\nu}} \sum_{j=\bar{u},\bar{c}} 1 = 6\Gamma_{l\bar{\nu}}.$$

Так, полная ширина распада W^- -бозона имеет вид

$$\Gamma_{tot} = 9\Gamma_{l\bar{\nu}} \approx 2 \text{ ГэВ}.$$

Численная оценка хорошо согласуется с экспериментом.

Распады Z-бозонов

Z-бозон по своим свойствам занимает промежуточное положение между фотоном и W^- -бозоном. Фотон одинаково интенсивно взаимодействует с лево- и правокиральными частями полей, W^- -бозон взаимодействует только с левокиральными компонентами, а Z-бозон взаимодействует и с лево-, и с правокиральными компонентами полей, но с разной интенсивностью.

Рассмотрим часть Лагранжиана Стандартной модели, связанную с Z-бозоном:

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) \psi_f Z_\mu.$$

где ψ_f – фермионное поле. Такому Лагранжиану соответствует диаграмма Фейнмана, представленная на рисунке 18.4, где Z-бозон распадается на фермион и антифермион.

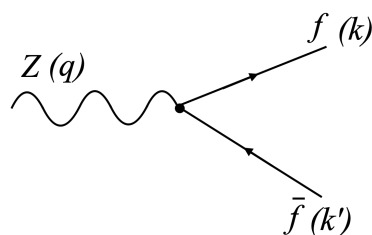


Рис. 18.4. Распад Z-бозона.

В Стандартной модели константы определяются следующим образом:

$$g_v^f = t_s^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W$$

где t_s^f – третья компонента изоспина для данного фермиона, Q_f – электрический заряд фермиона,

$$g_a^f = t_s^f.$$

Рассмотрим некоторые примеры:

1) В случае нейтрино

$$g_v^\nu = \frac{1}{2} = g_a^\nu,$$

это единственная частица, которая взаимодействует левокиральным образом как с W^- -бозоном, так и с Z-бозоном.

2) В случае электрона

$$g_v^e = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_a^e = -\frac{1}{2},$$

константы не одинаковы, взаимодействия с правыми и левыми токами отличаются. Но численное значение $\sin^2 \theta_W$ близко к $1/4$, тогда

$$g_v^e \approx 0,$$

поэтому электрон взаимодействует с правыми и левыми токами практически одинаково.

3) Для u -кварка

$$g_v^u = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_a^u = \frac{1}{2}.$$

Согласно диаграмме на рисунке 18.4 выпишем матричный элемент:

$$i\mathcal{M} = -\frac{ig}{2 \cos \theta_W} \bar{u}_k \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) v_{k'} \varepsilon_{\mu, \lambda}(q),$$

где $\varepsilon_{\mu, \lambda}(q)$ – вектор поляризации Z -бозона. Запишем эрмитово сопряженное для матричного элемента:

$$(i\mathcal{M})^+ = \frac{ig}{2 \cos \theta_W} \bar{v}_{k'} \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) u_k \varepsilon_{\mu, \lambda}^*(q).$$

Усредним по спину начального Z -бозона и просуммируем по спинам конечных частиц:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum |i\mathcal{M}|^2 &= \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \text{Tr} \left[\sum_{spin} u_k \bar{u}_k \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) v_{k'} \bar{v}_{k'} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) \right] \times \\ &\times (-1) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right), \end{aligned}$$

слагаемое с $\frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}$ мало, пренебрежем им и вычислим оставшийся след:

$$\begin{aligned} -\text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5) (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu (g_v^f - g_a^f \gamma_5)] &= \\ = -(g_v^f)^2 \text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu] - (g_a^f)^2 \text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu \gamma_5 (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu \gamma_5] + \\ + g_v^f g_a^f \text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu \gamma_5] + g_a^f g_v^f \text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu \gamma_5 (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu], \end{aligned}$$

- 1) $\text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu] = \text{Tr}[(\hat{k} + m_f)(-2\hat{k}' - 4m_f)] = -8(k \cdot k') - 16m_f^2,$
- 2) $\text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu \gamma_5 (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu \gamma_5] = \text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu \hat{k}' \gamma_\mu] - m_f^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5] = -8(k \cdot k') + 16m_f^2,$
- 3) $\text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu \gamma_5] = \text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu \hat{k}' \gamma_\mu \gamma_5] + m_f^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_5] = 0,$
- 4) $\text{Tr}[(\hat{k} + m_f) \gamma^\mu \gamma_5 (\hat{k}' - m_f) \gamma_\mu] = 0,$

таким образом, остается вклад только от первых двух следов. Поскольку

$$q^2 = (k + k')^2 = m_f^2 + m_f^2 + 2(k \cdot k') = m_Z^2 \rightarrow$$

$$(k \cdot k') = \frac{m_Z^2 - 2m_f^2}{2},$$

то по сравнению с массой Z -бозона слагаемые $16m_f^2$ пренебрежимо малы, тогда

$$\frac{1}{3} \sum |i\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 4m_Z^2 \left((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2 \right).$$

Ширина распадов Z-бозонов

Зная $\frac{1}{3} \sum |i\mathcal{M}|^2$ и фазовый объем конечных частиц, можно записать парциальную ширину распада:

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{g^2}{48\pi \cos^2 \theta_W} \left((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2 \right) m_Z^2.$$

Для распада на нейтрино $Z \rightarrow \nu + \bar{\nu}$

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu}) = 498 \text{ МэВ},$$

экспериментальное значение $(499 \pm 1.5) \text{ МэВ}$, такое хорошее согласование подтверждает, что число поколений нейтрино равно 3, так как три поколения нейтрино дают вклад в ширину распада $\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu})$.

Для распада в пару лептон-антилептон

$$\Gamma(Z \rightarrow l^- l^+) = 83.48 \text{ МэВ},$$

экспериментальное значение $(83.89 \pm 0.09) \text{ МэВ}$.

Для распада в кварки, которые впоследствии образуют адроны,

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{адроны}) = 1676 \text{ МэВ},$$

экспериментальное значение $(1744 \pm 3) \text{ МэВ}$. В этом случае согласие теоретических расчетов с экспериментом хуже, поскольку вычисления проделаны *на древесном уровне, когда учитываются только электрослабые процессы*. Сильные взаимодействия приводят к домножению ширины распада в адроны на коэффициент

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{адроны}) \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right),$$

где α_s – сильная константа взаимодействия. С дополнительным множителем получим хорошее согласие эксперимента с *теорией ренормировки*, в которой то, что ранее считалось константами, окажется функциями, зависящими от переданных энергий или расстояний между частицами.

Лекция 19. Распады бозона Хиггса. Взаимодействие нейтрино с электроном

Распады бозона Хиггса

Бозон Хиггса может распадаться на большое количество разных конечных состояний, большая часть из которых требует длительных расчетов. Рассмотрим распад бозона Хиггса на фермион и антифермион, этот процесс уже достаточно хорошо измерен на Большом адронном коллайдере:

$$H \rightarrow f + \bar{f}.$$

Бозон Хиггса играет центральную роль в Стандартной модели. Во-первых, его самодействие дает массы векторным бозонам $W^\pm$ и Z , а также его юкавское взаимодействие с лево- и правокиральными фермионными полями дает массы фермионам. Юкавское взаимодействие может наблюдаться при возбуждении скалярного поля, вызываемого бозонами Хиггса. Соответствующий Лагранжиан можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2}\lambda\bar{\psi}\psi\frac{(v+\chi)}{\sqrt{2}} = -m_f\bar{\psi}\psi - \frac{m_f}{v}\bar{\psi}\psi\chi,$$

$m_f = \lambda v$ – масса фермиона, слагаемое $\frac{m_f}{v}\bar{\psi}\psi\chi$ приводит к тому, что бозон Хиггса, который на диаграммах Фейнмана обозначается пунктирной линией, может распасться на фермион и антифермион (рис. 19.1).

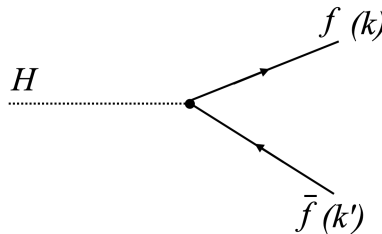


Рис. 19.1. Распад бозона Хиггса.

Матричный элемент, соответствующий диаграмме на рисунке 19.1

$$i\mathcal{M} = -\frac{im_f}{v}\bar{u}_k v_{k'},$$

сопряженное к нему

$$(i\mathcal{M})^+ = \frac{im_f}{v}\bar{v}_{k'} u_k.$$

Квадрат матричного элемента принимает вид

$$|i\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr}[u_k \bar{u}_k v_{k'} \bar{v}_{k'}],$$

при суммировании по поляризациям конечных частиц выражение упростится:

$$\sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{m_f}{v}\right)^2 \text{Tr}[(\hat{k} + m_f)(\hat{k}' - m_f)] = 4\left(\frac{m_f}{v}\right)^2 ((k \cdot k') - m_f^2).$$

Воспользуемся законом сохранения:

$$q^2 = (k + k')^2 = m_H^2 = 2m_f^2 + 2(k \cdot k') \rightarrow$$

$$2(k \cdot k') - 2m_f^2 = m_H^2 - 4m_f^2,$$

тогда

$$\sum_{s,s'} |i\mathcal{M}|^2 = 2\left(\frac{m_f}{v}\right)^2 (m_H^2 - 4m_f^2).$$

Ширина распада бозона Хиггса

Фазовый объем для двух частиц был вычислен ранее, запишем парциальную ширину распада бозона Хиггса:

$$\Gamma(H \rightarrow f + \bar{f}) = \frac{G_F}{4\sqrt{2}\pi} m_H m_f^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}.$$

Предсказание о том, что вероятность распада пропорциональна квадрату массы фермиона проверяется экспериментально. На рисунке 19.2 представлен график зависимости вероятности распада от квадрата массы фермиона, экспериментальные точки лежат на прямой. Так, предсказания Стандартной модели о существовании бозона Хиггса и его взаимодействии с фермионами подтверждаются экспериментально. Бозон Хиггса распадается и на другие моды, однако в данном курсе они не будут рассмотрены.

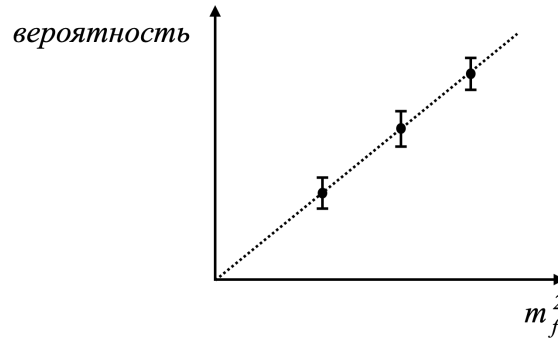


Рис. 19.2. График зависимости вероятности распада бозона Хиггса от квадрата массы фермиона.

Взаимодействие нейтрино с электроном

Рассмотрим взаимодействие нейтрино с электроном, вычислим сечение. Процесс взаимодействия нейтрино с электроном важен, поскольку практически вся нейтринная физика основана на таких процессах. Рассмотрим процесс преобразования мюонного нейтрино и электрона в мюон и электронное нейтрино:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu + \nu_e.$$

В этой реакции выполняется закон сохранения лептонного числа:

$$\begin{aligned} L_e: & 0 + 1 = 0 + 1; \\ L_\mu: & 1 + 0 = 1 + 0. \end{aligned}$$

На рисунке 19.3 представлена диаграмма Фейнмана, соответствующая рассматриваемому процессу, взаимодействие происходит за счет обмена W^+ -бозоном.

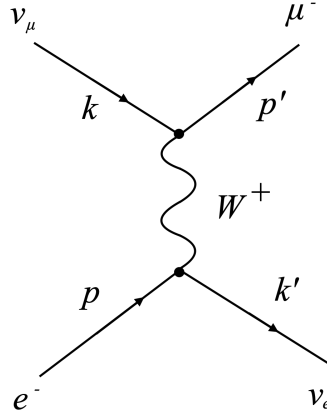


Рис. 19.3. Диаграмма Фейнмана взаимодействия нейтрино с электроном.

Запишем матричный элемент, соответствующие диаграмме:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_{p'} \left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_k \cdot (-i) \frac{\left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{m_W^2} \right)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}_{k'} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \left(-\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) u_p.$$

Энергия W -бозона может быть сколь угодно большой, в этом случае пренебречь q^2 по сравнению с квадратом массы m_W^2 можно не всегда. Однако на практике для всех процессов, происходящих на земле, в том числе в атомных реакторах, $q^2 \ll m_W^2$. Только для астрофизических нейтрино колоссальных энергий необходимо учитывать q^2 . Так, для матричного элемента можно записать

$$i\mathcal{M} \approx -i \left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 \bar{u}_{p'} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_{k'} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_p,$$

где $\left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$. Эрмитово сопряженное к матричному элементу

$$(i\mathcal{M})^+ = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_k \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_{p'} \cdot \bar{u}_p \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_{k'},$$

после преобразования Фирца

$$(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_k \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_{k'} \cdot \bar{u}_p \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_{p'}.$$

Тогда для квадрата матричного элемента, усредненного по начальным состояниям и просуммированного по спинам конечных состояний, возникает множитель $\frac{1}{2}$. Несмотря на то, что в конечном состоянии присутствуют также 2 частицы, дополнительного

множителя $\frac{1}{2}$ не возникает, поскольку в таких слабых взаимодействиях всегда рождаются левокиральные нейтрино.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \\
 &= -\frac{G_F^2}{4} \text{Tr}[u_{p'} \bar{u}_{p'} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_k \bar{u}_k \gamma^\beta (1 - \gamma_5) u_{k'} \bar{u}_{k'} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_p \bar{u}_p \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = \\
 &= -\frac{G_F^2}{4} \text{Tr}[(\hat{p}' + m_\mu) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \hat{k} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) \hat{k}' \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\hat{p} + m_e) \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = \\
 &= -2G_F^2 \text{Tr}[\hat{p}' \gamma^\alpha \hat{k} \gamma^\beta \hat{k}' \gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta (1 - \gamma_5)].
 \end{aligned}$$

Поскольку $\gamma^\alpha \hat{k} \gamma^\beta \hat{k}' \gamma_\alpha = -2\hat{k}' \gamma^\beta \hat{k}$, тогда

$$\frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 = 4G_F^2 \text{Tr}[\hat{p}' \hat{k}' \gamma^\beta \hat{k} \hat{p} \gamma_\beta (1 - \gamma_5)].$$

Так как $\gamma^\beta \hat{k} \hat{p} \gamma_\beta = 4(k \cdot p)$, то

$$\frac{1}{2} \sum |\mathcal{M}|^2 = 4G_F^2 \cdot 4(k \cdot p) \text{Tr}[\hat{p}' \hat{k}' (1 - \gamma_5)] = 64G_F^2 (k \cdot p) (k' \cdot p').$$

Запишем теперь дифференциальное сечение взаимодействия нейтрино и электрона по общей формуле:

$$\begin{aligned}
 d^6\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p')}{4\sqrt{(k \cdot p)^2 - m_e^2 m_\nu^2}} 64G_F^2 (k \cdot p) (k' \cdot p') \frac{d^3k' d^3p'}{(2\pi)^6 2^2 \omega' E'} = \\
 &= \frac{4G_F^2}{(2\pi)^2} \frac{(k \cdot p) (k' \cdot p')}{(k \cdot p)} \delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3k' d^3p'}{\omega' E'}.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся трехмерной δ -функцией, снимем интеграл по d^3p' :

$$d^3\sigma = \frac{G_F^2}{\pi^2} (k' \cdot p') \delta(\omega + E - \omega' - E') \frac{d^3k'}{\omega' E'} \Big|_{\vec{p}' = \vec{k} + \vec{p} - \vec{k}'}$$

В процессах, где в начальном состоянии есть 2 частицы, и в конечном состоянии 2 частицы, удобно перейти в систему центра масс начальных и конечных частиц. В этой системе центра масс начальные мюонное нейтрино и электрон имеют одинаковые импульсы, направленные в противоположные стороны, электронное нейтрино вылетает под углом θ к направлению движения нейтрино в начальном состоянии, угол между направлениями движения электрона и мюона также θ (рис. 19.4).

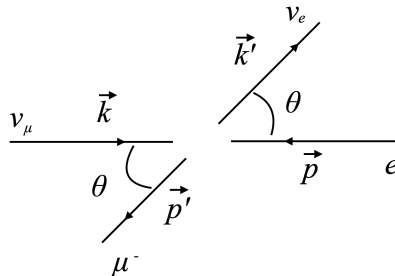


Рис. 19.4. Импульсы частиц в системе центра масс.

В такой системе центра масс

$$\vec{k} + \vec{p} = 0, \quad \vec{p}' = -\vec{k}'.$$

d^3k' можно расписать в виде

$$d^3k' = d\varphi d \cos \theta \omega'^2 d\omega'.$$

Матричный элемент не зависит от азимутального угла φ , значит можно записать выражение для

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} &= \frac{2G_F^2}{\pi} \int d\omega' (k' \cdot p') \frac{\omega'}{E'} \delta\left(\sqrt{s} - \omega' - \sqrt{m_\mu^2 + (\omega')^2}\right) = \\ &= \frac{2G_F^2}{\pi} (k' \cdot p') \frac{\omega'}{E'} \frac{1}{1 + \frac{\omega'}{E'}} = \frac{2G_F^2}{\pi} (k' \cdot p') \frac{\omega'}{\sqrt{s}}, \end{aligned}$$

$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 = m_\mu^2 + 2(p' \cdot k')$ – переменная Мандельштама или полная энергия в системе центра масс. Так, сечение взаимодействия нейтрино и электрона в системе центра масс абсолютно изотропно. Запишем формулу в итоговом виде:

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{2s} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{s},$$

поскольку

$$(p' \cdot k') = \frac{s - m_\mu^2}{2}, \quad \omega' = \frac{s - m_\mu^2}{2\sqrt{s}}.$$

Снимем последний интеграл:

$$\sigma = \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta = \frac{2G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{s},$$

в пределе $s \gg m_\mu^2$

$$\sigma = \frac{2G_F^2}{\pi} s.$$

Оценим сечение по порядку величины и выясним, какое количество материала нужно поставить на пути нейтрино с определенной энергией, чтобы его остановить. Реакции взаимодействия нейтрино с электроном идут при достаточно больших энергиях, когда $s \gg m_\mu^2$, пороговое значение

$$s = m_\mu^2 = (p + k)^2 = m_e^2 + 2(p \cdot k) = m_e^2 + 2\omega \cdot m_e \rightarrow$$

$$\omega = \frac{m_\mu^2}{2m_e} = \frac{m_\mu}{2m_e} m_\mu \approx 11 \text{ ГэВ}.$$

Если рассмотреть взаимодействие с электроном в конечном состоянии, хотя такой процесс потребует учета дополнительных диаграмм, будем считать сечение такого процесса

$$\sigma = \frac{2G_F^2}{\pi} s \approx 10^{-44} \text{ см}^2 \frac{\omega}{\text{МэВ}}.$$

Характерный масштаб сильных взаимодействий мили барны (10^{-29} см^2), так слабые взаимодействия очень слабые по сравнению с сильными.

Предположим, что электронное нейтрино родилось внутри Солнца, выясним, сколько солнечного материала должно пройти нейтрино до первого взаимодействия. Вычислим длину свободного пробега

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_e},$$

где n_e - концентрация числа электронов. Средняя плотность внутри Солнца

$$\bar{\rho} = 1.4 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Солнце состоит из водорода и гелия, для оценки будем считать, что оно состоит исключительно из водорода. Один атом водорода содержит один электрон, в одно грамме содержится число Авогадро таких электронов, тогда

$$\lambda = \frac{1}{10^{-44} \text{ см}^2 \cdot 1.4 \cdot \frac{N_A}{\text{см}^3}} = \frac{\text{см}}{10^{-44} \cdot 1.4 \cdot 6 \cdot 10^{23}} \approx 10^{20} \text{ см}.$$

Радиус Солнца имеет значение

$$R_{\text{Солнце}} = 700000 \text{ км} \approx 10^{11} \text{ см},$$

тогда

$$\lambda \sim 10^3 R_{\text{Солнце}}.$$

Такие огромные объемы вещества определяют особенность работы с нейтрино.

Лекция 20. Рассеяние лептонов на элементарных заряженных частицах

Рассеяние лептонов на элементарных заряженных частицах

На прошлой лекции было рассмотрено рассеяние мюонного нейтрино на электроны, получено сечение

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - m_\mu^2)^2}{(s - m_e^2)},$$

где s – переменная Мандельштама, равная полной энергии в системе центра масс сталкивающихся частиц, и если q и p , k – импульсы W -бозона и начальных электрона и мюонного нейтрино, то

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}.$$

В лабораторной системе отсчета y – это доля энергии нейтрино, которая была потеряна при взаимодействии или перешла в энергию мюона и электронного нейтрино

$$y = \frac{\omega - \omega'}{\omega}.$$

В системе центра масс

$$y = \sin^2 \frac{\theta^*}{2},$$

где θ^* – угол между направлениями движения мюонного нейтрино и мюона. При нулевом угле рассеяния в лабораторной системе центра масс передается нулевая энергия, начальная частица продолжает свое движение не потеряв энергии, при угле рассеяния π передается максимальная энергия.

В пределе $s \gg m_\mu^2$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} s.$$

При выводе этой формулы было использовано приближение, в котором от пропагатора W -бозона остается только константа $\frac{1}{m_W^2}$. Поэтому такое сечение бесконечно растет с ростом энергии, чего физически быть не может. При определенной энергии необходимо учитывать пропагатор, приводящий к уменьшению энергии. На сегодняшний день во всех возможных экспериментах пропагатором можно пренебречь.

В полученной формуле нет зависимости от y , тогда формулу для сечения можно переписать в виде

$$\sigma = \int_0^1 dy \frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi} s.$$

Рассмотрим процесс, в котором появляется зависимость от угла рассеяния или от переменной y . Разберем рассеяние электронного антинейтрино на электроны, в результате которого рождается мюон μ^- и мюонное антинейтрино. Диаграмма Фейнмана представлена на рисунке 20.1.

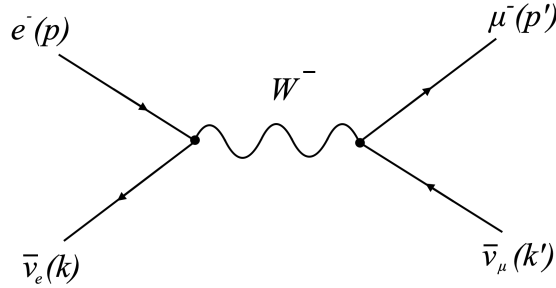


Рис. 20.1. Диаграмма Фейнмана взаимодействия $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$.

Построим матричный элемент, соответствующий диаграмме 46.1, пренебрежем q^2 в пропагаторе W -бозона:

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_p \cdot \bar{u}_{p'} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{k'},$$

эрмитово сопряженное

$$(i\mathcal{M})^+ = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_k \cdot \bar{v}_{k'} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_{p'},$$

после преобразования Фирца

$$(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_{p'} \cdot \bar{v}_{k'} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v_k.$$

Обозначим $\frac{(1-\gamma_5)}{2} = p_L$, p_L – оператор проекции на левокиральное состояние. Запишем квадрат матричного элемента:

$$|i\mathcal{M}|^2 = (i\mathcal{M})(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ = -\frac{G_F^2 \cdot 2^4}{2} \text{Tr}[v_k \bar{\nu}_k \gamma^\mu p_L u_p \cdot \bar{u}_p \gamma^\nu p_L u_{p'} \cdot \bar{u}_{p'} \gamma_\mu p_L v_{k'} \cdot \bar{v}_{k'} \gamma_\nu p_L].$$

Вычислим сечение, усредненное по спину начальных состояний и просуммированное по спинам конечных состояний. В начальном состоянии есть две частицы, одна из которых антинейтрино, которое, как и нейтрино, находится только в одном спиральном состоянии, поэтому общий множитель $1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |i\mathcal{M}|^2 &= -\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \frac{G_F^2 \cdot 2^4}{2} \text{Tr}[v_k \bar{\nu}_k \gamma^\mu p_L u_p \cdot \bar{u}_p \gamma^\nu p_L u_{p'} \cdot \bar{u}_{p'} \gamma_\mu p_L v_{k'} \cdot \bar{v}_{k'} \gamma_\nu p_L] = \\ &= -2^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu p_L (\hat{p} + m_e) \gamma^\nu p_L (\hat{p}' + m_\mu) \gamma_\mu p_L \hat{k}' \gamma_\nu p_L] = \\ &= -2^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k} \gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu \hat{p}' \gamma_\mu \hat{k}' \gamma_\nu p_L], \end{aligned}$$

поскольку $\gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu \hat{p}' \gamma_\mu = -2\hat{p}' \gamma^\nu \hat{p}$, то

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 = 2^3 G_F^2 Tr [\hat{k} \hat{p}' \gamma^\nu \hat{p} \hat{k}' \gamma_\nu p_L],$$

так как $\gamma^\nu \hat{p} \hat{k}' \gamma_\nu = 4(p \cdot k')$, то

$$\frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 = 2^5 G_F^2 (p \cdot k') Tr [\hat{k} \hat{p}' p_L] = 2^6 G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p').$$

Выражение для сечения

Запишем выражение для сечения

$$\begin{aligned} d^6\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p')}{4(k \cdot p)} \frac{1}{2} \sum_{spin} |i\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p' d^3k'}{(2\pi)^6 2E' 2\omega'} = \\ &= \frac{2^6 G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p')}{(2\pi)^2 2^4 (k \cdot p)} \delta^4(k + p - k' - p') \frac{d^3p' d^3k'}{E' \omega'}, \end{aligned}$$

где ω' - энергия нейтрино в конечном состоянии, E' - энергия мюона. Проинтегрируем по d^3p' , воспользовавшись δ^3 :

$$d^3\sigma = \frac{G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p')}{\pi^2 (k \cdot p)} \delta(\omega + E - \omega' - E') \frac{d^3k'}{E' \omega'} \Big|_{\vec{p}' = \vec{k} + \vec{p} - \vec{k}'}$$

где ω – энергия начального нейтрино, E – энергия электрона. Перейдем в систему центра масс начальных нейтрино и электрона (рис. 20.2), вычислим оставшиеся интегралы:

$$\begin{aligned} d^3k' &= d\varphi^* d \cos \theta_{\nu\nu}^* \omega'^2 d\omega' \rightarrow \\ d^2\sigma &= \frac{2G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p')}{\pi (k \cdot p)} \frac{\omega'}{E'} \delta\left(\sqrt{s} - \omega' - \sqrt{m_\mu^2 + \omega'^2}\right) d\omega' d \cos \theta_{\nu\nu}^*. \end{aligned}$$

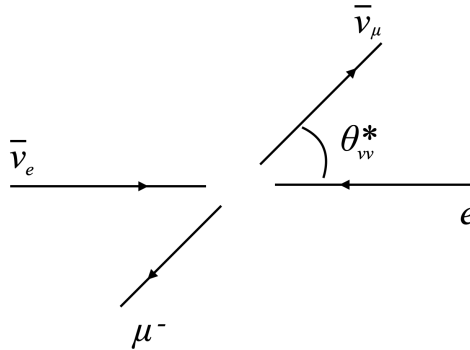


Рис. 20.2. Импульсы частиц в системе центра масс.

Тогда после интегрирования по $d\omega'$ получим следующее

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta_{\nu\nu}^*} = \frac{2G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p')}{\pi} \frac{\omega'}{(k \cdot p)} \frac{1}{E' \sqrt{1 + \frac{\omega'^2}{E'^2}}} = \frac{2G_F^2 (p \cdot k') (k \cdot p')}{\pi} \frac{\omega'}{(k \cdot p) \sqrt{s}}$$

Введем переменную y

$$(k - k')^2 = -2(k \cdot k') = -2\omega\omega'(1 - \cos\theta_{\nu\nu}^*),$$

$$y = \frac{p \cdot (k - k')}{p \cdot k} = \frac{E(\omega - \omega') - \vec{p}(\vec{k} - \vec{k}')}{E\omega - \vec{p} \cdot \vec{k}}.$$

Используем приближение $s \gg m_e$, где s – переменная Манделъштама

$$s = (k + p)^2 = m_e^2 + 2(k \cdot p),$$

также будем считать $s \gg m_\mu$. Тогда энергия и импульс электрона будут совпадать по модулю:

$$y = \frac{E(\omega - \omega') + E\omega + E\omega' \cos\theta_{\nu\nu}^*}{E\omega + E\omega} = \frac{2E\omega - E\omega'(1 - \cos\theta_{\nu\nu}^*)}{2E\omega} = 1 - \frac{\omega'}{\omega} \frac{1 - \cos\theta_{\nu\nu}^*}{2}.$$

В силу упругости реакции $\omega' = \omega$:

$$y = 1 - \frac{1 - \cos\theta_{\nu\nu}^*}{2} = \cos^2 \frac{\theta_{\nu\nu}^*}{2}.$$

Здесь $\theta_{\nu\nu}^*$ – угол между электронным антинейтрино и мюонным антинейтрино. Определим θ^* как угол между электронным антинейтрино и мюоном (рис. 20.3), тогда

$$\begin{aligned} \theta^* &= \pi - \theta_{\nu\nu}^* \rightarrow \\ y &= \sin^2 \frac{\theta^*}{2} = 1 - \cos\theta^*, \\ dy &= -\frac{1}{2} d\cos\theta^*. \end{aligned}$$

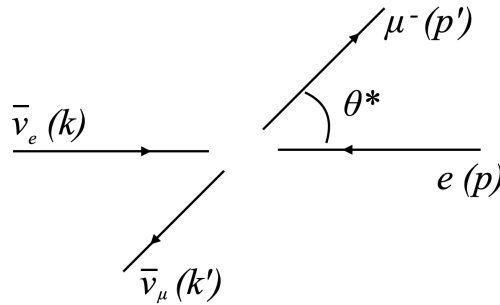


Рис. 20.3. Угол θ^* в системе центра масс.

С учетом введенных обозначений перепишем выражение для сечения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} \right|_{\cos\theta^* \in (-1, 1)} &= -\left. \frac{d\sigma}{2dy} \right|_{y \in (1, 0)} \rightarrow \\ \left. \frac{d\sigma}{dy} \right|_{y \in (0, 1)} &= \frac{4G_F^2}{\pi} \frac{(p \cdot k')(k \cdot p')}{(k \cdot p)} \frac{\omega'}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

Вычислим скалярные произведения в системе центра масс, пренебрегая массами частиц:

$$(p \cdot k') = E\omega'(1 + \cos^*\theta) = \frac{s}{4} 2(1 - y) = \frac{s(1 - y)}{2},$$

поскольку $\cos\theta^* = 1 - 2y \rightarrow 1 + \cos\theta^* = 2(1 - y)$,

$$\begin{aligned}(k \cdot p') &= \frac{s(1-y)}{2}, \\ (k \cdot p) &= \frac{s}{2}.\end{aligned}$$

При этом $\omega' = \frac{\sqrt{s}}{2}$, тогда

$$\left. \frac{d\sigma}{dy} \right|_{y \in (0,1)} = \frac{4G_F^2 s^2 (1-y)^2}{\pi} \frac{2}{4} \frac{\sqrt{s}}{s} \frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{G_F^2 s (1-y)^2}{\pi}.$$

Проинтегрируем по y :

$$\sigma = \int_0^1 dy \frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2 s}{3\pi}.$$

При изучении рассеяния нейтрино на электроне сечение было в три раза больше. Подавление сечения рассеяния антинейтрино на электроне по сравнению с сечением рассеяния нейтрино на электроне математически связано с возникновением зависимости от y . С точки зрения физики необходимо обратить внимание на направления спинов.

Вернемся к реакции, рассмотренной на прошлой лекции:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e.$$

На рисунке 20.4(а) изображены направления спинов в системе центра масс. Мюонное нейтрино и электрон левоспиральные – спин противоположен импульсу, в таком случае полный спин в системе центра масс равен нулю. Разлетающиеся мюон и электронное нейтрино также левоспиральные, спин конечного состояния также равен нулю. В связи с этим пара конечных частиц в системе центра масс может равномерно вращаться в плоскости с углом от 0 до π .

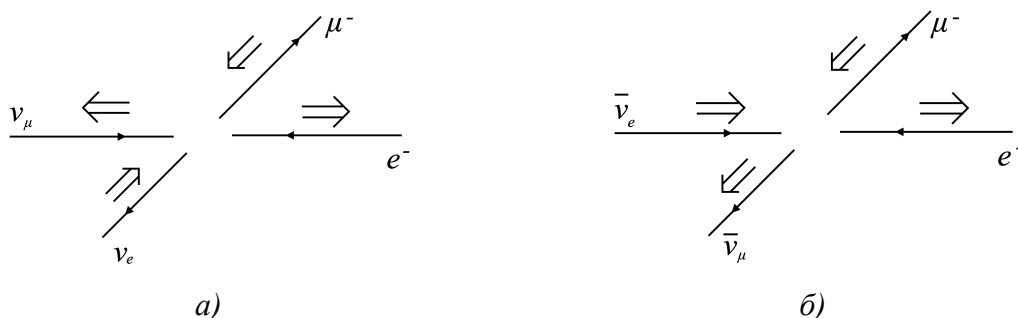


Рис. 20.4. Направления спинов частиц в системе центра масс для взаимодействий:

$$a) \nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e; \quad б) \bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

В случае рассеяния электронного антинейтрино на электроне (рис. 20.4(б)) электрон является левой частицей, но электронное антинейтрино за счет левокирального оператора становится правоспиральной частицей, спин электронного антинейтрино сонаправлен с его импульсом. Тогда в начальном состоянии проекция спина вдоль оси столкновения в системе центра масс равна 1. В конечном состоянии мюон является

левоспиральной частицей, антинейтрино – правоспиральной. Конечное состояние обладает полным спином равным 1, спин направлен вдоль оси рассеяния. Из всех возможных конфигураций только одна, совпадающая с направлением столкновения, будет сохранять проекцию исходного спина, что объясняет итоговый множитель $1/3$ для сечения рассеяния. В общем случае это приводит к возникновению зависимости от угла сечения.

Разобравшись в механизме подавления, связанном со спином системы, равным 1, возможно распространить это знание и на случаи рассеяния других частиц. Пусть, например, нейтрино рассеивается на позитроне, такая ситуация будет аналогична рассеянию антинейтрино на электроны. В случае рассеяния антинейтрино на позитроне полный спин будет равен нулю, как и в случае рассеяния нейтрино на электроны.

Лекция 21. Нейтральный ток в рассеянии нейтрино на электроне

Нейтральный ток в рассеянии нейтрино на электроне

Рассмотрим рассеяние мюонного нейтрино на электроне:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-.$$

Диаграмма такого взаимодействия представлена на рисунке 21.1, реакция идет за счет обмена Z -бозоном.

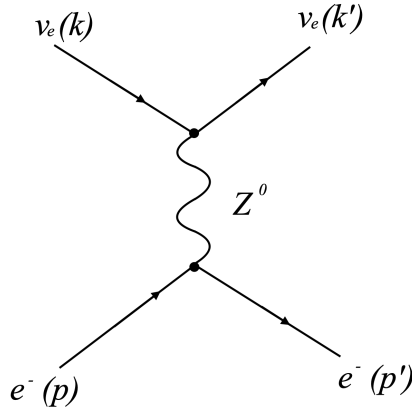


Рис. 21.1. Взаимодействие $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$.

Запишем матричный элемент для такой диаграммы. Точке такой диаграммы по правилам Фейнмана соответствует выражение

$$\frac{-ig}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu [g_v^f - g_a^f \gamma_5],$$

где g_v^f и g_a^f – константы, зависящие от типа фермиона.

$$g_v^f = t_3^f - Q_f \sin^2 \theta_W,$$

где t_3^f – третья компонента изоспина, Q_f – электрический заряд фермиона,

$$g_a^f = t_3^f.$$

Также в Стандартной модели фермионы располагаются в дублете следующим образом: сверху нейтрино, заряженный лептон снизу. Для электронного нейтрино $t_3^\nu = \frac{1}{2}$, для электрона $t_3^e = -\frac{1}{2}$, при этом электрический заряд нейтрино $Q_\nu = 0$, электрона $Q_e = -1$. Тогда для матричного элемента, соответствующего рассматриваемой диаграмме, запишем следующее выражение:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}_k' \gamma^\mu [g_v^\nu - g_a^\nu \gamma_5] u_k \cdot \frac{(-i) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2} \right)}{q^2 - m_Z^2} \cdot \bar{u}_p' \gamma^\nu [g_v^e - g_a^e \gamma_5] u_p \left(-\frac{ig}{2 \cos \theta_W} \right)^2.$$

Упростим полученное выражение, вычислив конструкции:

$$g_v^v = \frac{1}{2}, \quad g_a^v = \frac{1}{2};$$

$$g_v^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_a^e = -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$[g_v^v - g_a^v \gamma_5] = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = p_L,$$

поэтому и входящее и выходящее нейтрино – левокиральные частицы. При взаимодействии с W -бозоном электрон также был левокиральной частицей, теперь, поскольку константы g_v^e и g_a^e отличаются друг от друга, электрон будет смесью левокиральных и правокиральных состояний, поэтому будет взаимодействовать как правой спиральностью, так и левой.

Для пропагатора бозона, не зависимо от того, какой переносчик взаимодействия, при энергиях, доступных на Земле, $q^2 \ll m_Z^2$:

$$\frac{1}{q^2 - m_Z^2} \left(-\frac{ig}{2 \cos \theta_W} \right)^2 \xrightarrow{q^2 \ll m_Z^2} \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W m_Z} \right)^2 = \left(\frac{g}{2m_W^2} \right)^2,$$

Несмотря на то, что во взаимодействии не участвует W -бозон, его масса фигурирует в выражении для матричного элемента. Вспомним, что

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}m_W} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{g}{2m_W^2} \right)^2 = \sqrt{2}G_F.$$

Таким образом, матричный элемент приобретает вид:

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot \bar{u}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_p \gamma_\mu [g_v^e - g_a^e \gamma_5] u_p.$$

Единственное отличие полученного матричного элемента от матричного элемента взаимодействия с участием W -бозона – ток электрона. Упростим выражение, переписав его через левокиральные и правокиральные операторы:

$$[g_v^e - g_a^e \gamma_5] = g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5),$$

$$g_v^e = g_L^e + g_R^e, \quad g_a^e = g_L^e - g_R^e \rightarrow$$

$$g_L^e = \frac{1}{2}(g_v^e + g_a^e), \quad g_R^e = \frac{1}{2}(g_v^e - g_a^e) \rightarrow$$

$$i\mathcal{M} = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot \bar{u}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_p \gamma_\mu [g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)] u_p.$$

Вычислим эрмитово сопряжение к полученному матричному элементу:

$$(i\mathcal{M})^+ = +i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot \bar{u}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_p \gamma_\mu [g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)] u_p.$$

Проведем преобразование Фирца, здесь в оном слагаемо встречаются 2 множителя $(1 - \gamma_5)$, во втором $(1 - \gamma_5)$ и $(1 + \gamma_5)$:

$$\begin{aligned}\bar{a}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \cdot \bar{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d &= -\bar{a}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d \cdot \bar{c}\gamma_\mu(1-\gamma_5)b \rightarrow \\ \bar{a}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \cdot \bar{c}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d &= +2\bar{a}(1+\gamma_5)d \cdot \bar{c}(1-\gamma_5)b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(i\mathcal{M})_{\text{Фирц}}^+ &= i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot \bar{u}_k\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{p'} \cdot \bar{u}_p\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_{k'}(-g_L^e) = \\ &+ i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_k(1+\gamma_5)u_{p'} \cdot \bar{u}_p(1-\gamma_5)u_{k'}(2g_R^e).\end{aligned}$$

Вычисление следа

Для квадрата матричного элемента вычислим один из следов, усреднив по спинам начальных частиц и просуммировав по спинам конечных:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} -(g_L^e)^2 \frac{G_F^2}{2} \text{Tr}[u_{k'}\bar{u}_k\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_k\bar{u}_k\gamma^\nu(1-\gamma_5)u_{p'}\bar{u}_{p'}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_p\bar{u}_p\gamma_\nu(1-\gamma_5)] = \\ = -2^2(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu p_L \hat{k}\gamma^\nu p_L (\hat{p}' + m_e)\gamma_\mu p_L (\hat{p} + m_e)\gamma_\nu p_L] = \\ = -2^2(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu \hat{k}\gamma^\nu \hat{p}'\gamma_\mu \hat{p}\gamma_\nu p_L],\end{aligned}$$

так как $\gamma^\mu \hat{k}\gamma^\nu \hat{p}'\gamma_\mu = -2\hat{p}'\gamma^\nu \hat{k}$, то

$$-2^2(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu \hat{k}\gamma^\nu \hat{p}'\gamma_\mu \hat{p}\gamma_\nu p_L] = 2^3(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\hat{p}'\gamma^\nu \hat{k}\hat{p}\gamma_\nu p_L],$$

и поскольку $\gamma^\nu \hat{k}\hat{p}\gamma_\nu = 4(k \cdot p)$, то

$$2^3(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\hat{p}'\gamma^\nu \hat{k}\hat{p}\gamma_\nu p_L] = 2^5(k \cdot p)(g_L^e)^2 G_F^2 \text{Tr}[\hat{k}'\hat{p}'p_L] = 2^5(g_L^e)^2 G_F^2(k \cdot p)(k' \cdot p').$$

Вычислим еще один след, который ранее не встречался, где появляются две разных киральности:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} 2g_L^e g_R^e \frac{G_F^2}{2} \text{Tr}[u_{k'}\bar{u}_k\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_k\bar{u}_k(1+\gamma_5)u_{p'}\bar{u}_{p'}\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_p\bar{u}_p(1-\gamma_5)] = \\ = 2^3 G_F^2 g_L^e g_R^e \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu p_L \hat{k}p_R (\hat{p}' + m_e)\gamma_\mu p_L (\hat{p} + m_e)p_L] = \\ = 2^3 G_F^2 g_L^e g_R^e m_e^2 \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu \hat{k}\gamma_\mu p_L],\end{aligned}$$

так как $\gamma^\mu \hat{k}\gamma_\mu = -\hat{k}$, то

$$2^3 G_F^2 g_L^e g_R^e m_e^2 \text{Tr}[\hat{k}'\gamma^\mu \hat{k}\gamma_\mu p_L] = -2^3 G_F^2 g_L^e g_R^e m_e^2 \text{Tr}[\hat{k}'\hat{k}p_L] = -2^3 G_F^2 g_L^e g_R^e m_e^2 2(k \cdot k').$$

Остальные следы предлагается вычислить самостоятельно. Запишем итоговую формулу для квадрата матричного элемента, усредненного по спинам начальных частиц и просуммированного по спинам конечных:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |i\mathcal{M}|^2 = 64G_F^2 [(g_L^e)^2(k \cdot p)(k' \cdot p') + (g_R^e)^2(k \cdot p')(k' \cdot p) - g_L^e g_R^e m_e^2(k \cdot k')].$$

Первое слагаемое пропорционально $(g_L^e)^2$ и скалярным произведениям начальных и конечных импульсов, вторая структура напоминает рассеяние антинейтрино на электроны, третье слагаемое является интерференционным, где встречаются левые и правые киральности. Можно заметить, что в первом слагаемом, где встречаются 2 частицы с одинаковой киральностью, не содержится подавления по углу вылета конечных частиц, полный спин начальных и конечных частиц равен нулю (рис. 21.2(а)). Во втором слагаемом левое нейтрино встречается с правым электроном (рис. 21.2(б)), спин равен 1, возникает подавление, связанное с углом вылета конечных частиц.

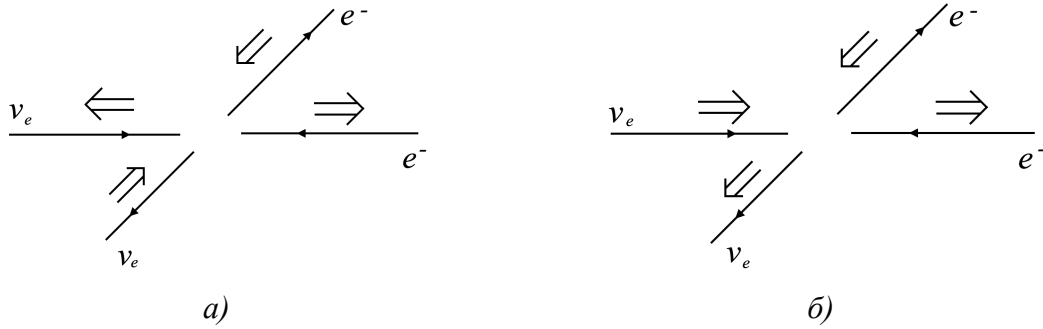


Рис. 21.2. Направления спинов частиц: а) $S=0$, б) $S=1$.

Опустим вычисления, запишем формулу для сечения в пределе $s \gg m_e$:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left[(g_L^e)^2 + (g_R^e)^2 (1-y)^2 - \frac{g_L^e g_R^e 2m_e^2 y}{s - m_e^2} \right].$$

Полученная формула рассеяния нейтрино на электроны за счет нейтрального тока является линейной комбинацией двух формул – рассеяния нейтрино на электроны за счет W -бозона и рассеяния антинейтрино на электроны за счет W -бозона, константы определяются динамикой Стандартной модели. При этом третье слагаемое дает интерференцию между лево- и правокиральными состояниями электрона.

Развив интуицию в подобных вычислениях, можно записать формулу для рассеяния антинейтрино на электроны за счет нейтрального тока:

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \quad (Z - \text{бозон}).$$

Антинейтрино – правоспиральная частица, правоспиральное антинейтрино с левоспиральным электроном будет давать результирующий спин, равный 1. Тогда следует ожидать подавления в слагаемом, пропорциональном $(g_L^e)^2$. Сечение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left[(g_L^e)^2 (1-y) + (g_R^e)^2 - \frac{g_L^e g_R^e 2m_e^2 y}{s - m_e^2} \right].$$

Процесс с участием электронного нейтрино

Рассмотрим еще один процесс, рассеяние электронного нейтрино на электроне

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-.$$

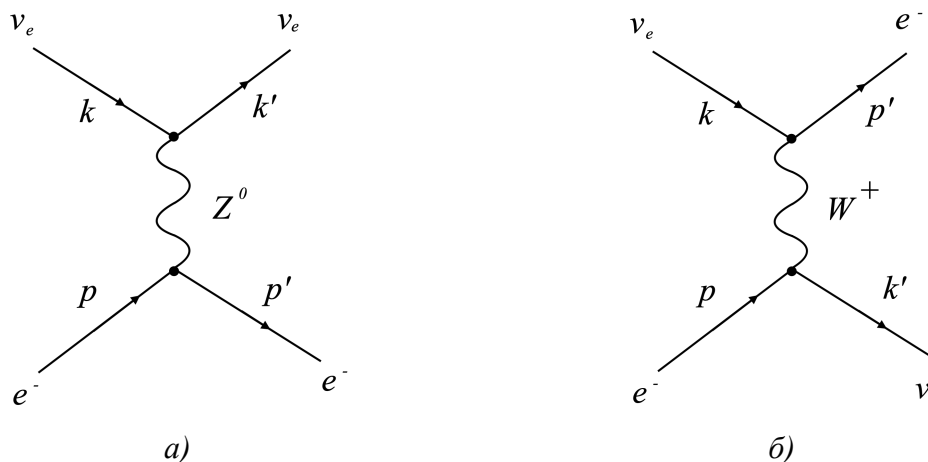


Рис. 21.3. Диаграммы Фейнмана реакции $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$.

На рисунке 21.3(а) представлена диаграмма Фейнмана такой реакции. Однако электронное нейтрино может испустить W^+ -бозон и превратиться в электрон, а W^+ -бозон может быть поглощен электроном, в результате чего электрон превратиться в электронное нейтрино (рис. 21.3(б)). Реакция, изображенная на рисунке 21.3(б) невозможно для рассеяния мюонного нейтрино на электроне, поскольку в вершинах взаимодействия должен выполняться закон сохранения лептонного числа. Вторая диаграмма отличается от первой одной перестановкой фермионов. Перестановка фермионов приводит к появлению знака «-» между диаграммами. Если вычислять разность диаграмм прямолинейно, то время вычисления значительно увеличивается, вычисления можно упростить. Запишем матричный элемент

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (a)} - \text{Diagram (b)} = \\
 & = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_k' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_p' \gamma_\mu [g_L^e (1 - \gamma_5) + g_R^e (1 + \gamma_5)] u_p - \\
 & \quad - \bar{u}_p' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_k' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_p],
 \end{aligned}$$

первое слагаемое соответствует обмену Z -бозоном, второе – обмену W -бозоном. Применим ко второму слагаемому преобразование Фирца, тогда во втором слагаемом возникает чисто нейтринный ток, лептонный ток второго слагаемого также похож на лептонный ток в первом слагаемом. Тогда можно объединить выражения:

$$i\mathcal{M} = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_k' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_k \cdot \bar{u}_p' \gamma_\mu [(1 - \gamma_5)(g_L^e + 1) + g_R^e(1 + \gamma_5)] u_p.$$

Полученное выражение соответствует выражению для нейтрального тока, где переопределена константа - g_L^e заменено на $(g_L^e + 1)$. Выражение для сечения рассеяния электронного нейтрино на электроне примет вид:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left[(g_L^e + 1)^2 (1 - y) + (g_R^e)^2 - \frac{(g_L^e + 1)g_R^e 2m_e^2 y}{s - m_e^2} \right].$$

Обратим внимание на численные значения. Константы, отвечающие нейтральному току, имеют вид

$$g_L^e = \frac{1}{2}(g_v^e + g_a^e), \quad g_R^e = \frac{1}{2}(g_v^e - g_a^e),$$

при этом

$$g_v^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_a^e = -\frac{1}{2}.$$

Значение $\sin^2 \theta_W \sim 0.23$, тогда $g_v^e \sim -\frac{1}{4}$. Вычислим интенсивности лево- и правокиральных компонент электрона:

$$g_L^e = \frac{1}{2}(g_v^e + g_a^e) \approx \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{8},$$

$$g_R^e = \frac{1}{2}(g_v^e - g_a^e) \approx \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}.$$

Так, электрон при взаимодействии с Z -бозоном в 9 раз более вероятно взаимодействует с его левой компонентой по сравнению с правой.

Для взаимодействия нейтрино и электрона с участием Z -бозона и W -бозона

$$g_L^e + 1 \approx -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}.$$

Тогда в $25/9$ раз за счет обмена W -бозоном нейтрино будет интенсивнее взаимодействовать с электроном, чем только за счет обмена Z -бозоном.

Лекция 22. Упругое рассеяние электрона на нуклоне

Упругое рассеяние электрона на нуклоне

Эрнест Резерфордом рассмотрел рассеяние классического электрона на точечном классическом потенциале, получив формулу Резерфорда:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Резерфорд}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

так, рассеяние в основном будет происходить при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

В одной из предыдущих лекций в рамках квантовой теории поля был рассмотрен процесс рассеяния квантового электрона на классическом электростатическом потенциале:

$$A^\mu(x) = \left(\frac{e}{4\pi r}, \vec{0}\right).$$

Была получена формула для сечения рассеяния такого процесса, в ультрарелятивистском случае при скорости электрона $v \rightarrow 1$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Появление множителя $\cos^2 \theta$ или более общего, учитывающего скорость, связано с сохранением проекции спина электрона, рассеяние на угол $\theta = \pi$ подавляется.

При рассмотрении в рамках квантовой теории поля электрона на точечном бесструктурном протоне, обладающем конечной массой, была получена формула:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{E - E'}{m_p} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

где E' - конечная энергия электрона, E - начальная энергия. Формула учитывает конечную массу протона, взаимодействие электрических зарядов и магнитных моментов электрона и протона. Множитель $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ связан с электростатическим взаимодействием, множитель, пропорциональный $\sin^2 \frac{\theta}{2}$, связан с магнитным взаимодействием частиц за счет спинов.

Во всех этих формулах протон рассматривался как фундаментальная бесструктурная частица. В действительности протон имеет внутреннюю структуру. Ее можно учесть, введем распределение заряда $\rho(\vec{x})$:

$$\int \rho(\vec{x}) d^3x = 1.$$

Тогда

$$A^\mu(x) \rightarrow \int d^3x' \left(\frac{e\rho(\vec{x}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}, \vec{0} \right),$$

в импульсном представлении

$$\tilde{A}^\mu(\vec{q}) = \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} A^\mu(x).$$

Если применить такое преобразование к формуле Мотта, то формула изменится следующим образом:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Мотт}} \rightarrow \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} |F(\vec{q})|^2,$$

$F(\vec{q})$ – Фурье-образ от плотности распределения заряда:

$$F(\vec{q}) = \int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x}).$$

В общем случае такое изменение будет приводить к уменьшению сечения по абсолютной величине, поскольку

$$F(\vec{q}) \leq 1.$$

Предположим, что протон – шар с некоторым распределением плотности заряда. Рассмотрим две плоских волны электронов, рассеивающихся на двух разных участках протона (рис. 22.1). Пусть угол рассеяния в обоих случаях θ . Между рассеянными волнами появляется разность фаз $\Delta\varphi$. Когда эти две волны будут складываться в итоговую волну, то в большинстве случаев разность фаз будет приводить к тому, что одна волна будет частично вычитаться из другой, суммарная волна будет меньше. В синфазном случае подавления не будет.

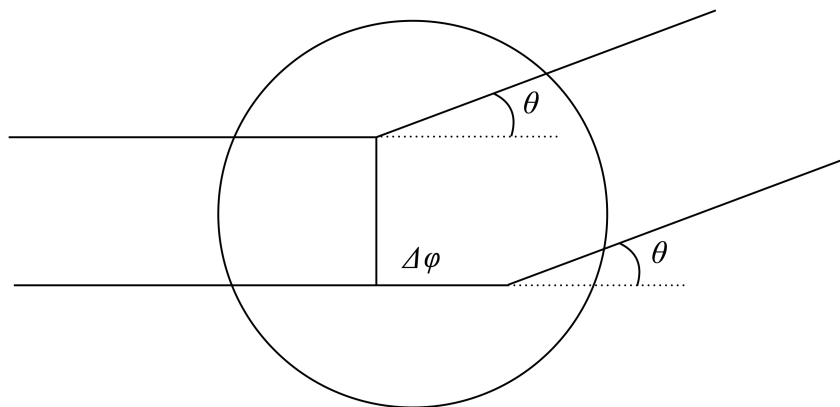


Рис. 22.1. Рассеяние двух электронов на разных областях протона.

В общем случае можно ожидать зависимость $|F|$ от $|\vec{q}|$, представленную на рисунке 22.2. Поведение $|F|$ будет зависеть от вида функции плотности распределения заряда, в таблице 22.1 приведены примеры.

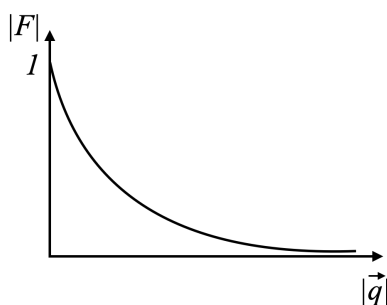


Рис. 22.2. зависимость модуля формфактора от модуля трехмерного импульса.

Таблица 22.1. Изменение вида $|F|$ в зависимости от ρ .

ρ	$\delta(\vec{r})$	e^{-r/r_0}	$e^{-r^2/2\sigma^2}$
$ F $	1	$\frac{1}{\left(\vec{q} ^2 + \frac{1}{r_0^2}\right)^2}$ диполь	$e^{-\vec{q}^2\vec{\sigma}^2}$

Определим, как будет меняться формула, полученная в квантовой теории поля для рассеяния электрона на протоне, при учете плотности распределения электрического заряда внутри протона. Следует ожидать домножения формулы на формфактор. В формуле фигурируют 2 слагаемых, описывающих разную физику: первое описывает рассеяние на электростатическом потенциале, второе – магнитное взаимодействие. Вероятно, формфакторы также будут двух видов: один будет описывать распределение электрического заряда, второй – распределение магнитного заряда:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[F_E(\vec{q}^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + F_M(\vec{q}^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{E - E'}{m_p} \right],$$

где $F_E(\vec{q}^2)$ – электрический формфактор, $F_M(\vec{q}^2)$ – магнитный формфактор:

$$F_E(\vec{q}^2) = \int d^3x \rho_E(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}},$$

$$F_M(\vec{q}^2) = \int d^3x \rho_M(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}},$$

где $\rho_E(\vec{x})$ – плотность распределения электрического заряда, $\rho_M(\vec{x})$ – плотность распределения магнитного заряда внутри протона. Нормировки следующие:

$$F_E(0) = 1, \quad F_M(0) = 2.79,$$

$F_M(0) = 2.79$ – **аномальный магнитный момент протона**, эта величина была измерена экспериментально.

С помощью полученной формулы можно проанализировать экспериментальные данные. Пусть есть протон в качестве мишени, электрон с некоторой фиксированной энергией E , в эксперименте измеряется энергия рассеянного электрона E' и угол

рассеяния этого электрона. Этой информации достаточно, чтобы восстановить переданный $\vec{q}^2$, измерения при разных углах рассеяния и энергиях рассеянных электронов позволяют измерить функции $F_E(\vec{q}^2)$ и $F_M(\vec{q}^2)$. На рисунке 22.3(а) представлены полученные экспериментальные зависимости. При делении одной функции на другую оказалось, что отношение F_M/F_E практически константа (рис. 22.3(б)). Так, то, что является переносчиком электрического заряда внутри протона, обладает магнитным моментом. Можно предположить, что эта субстанция является фермионом, поскольку получено аналогичное соотношение электрического заряда к магнитному моменту. Гипотеза подтвердилась в последующих экспериментах и теоретических рассмотрениях. Так, записанная формула для сечения рассеяния хорошо описывает экспериментальные данные, при этом рассеяние на протоне остается упругим.

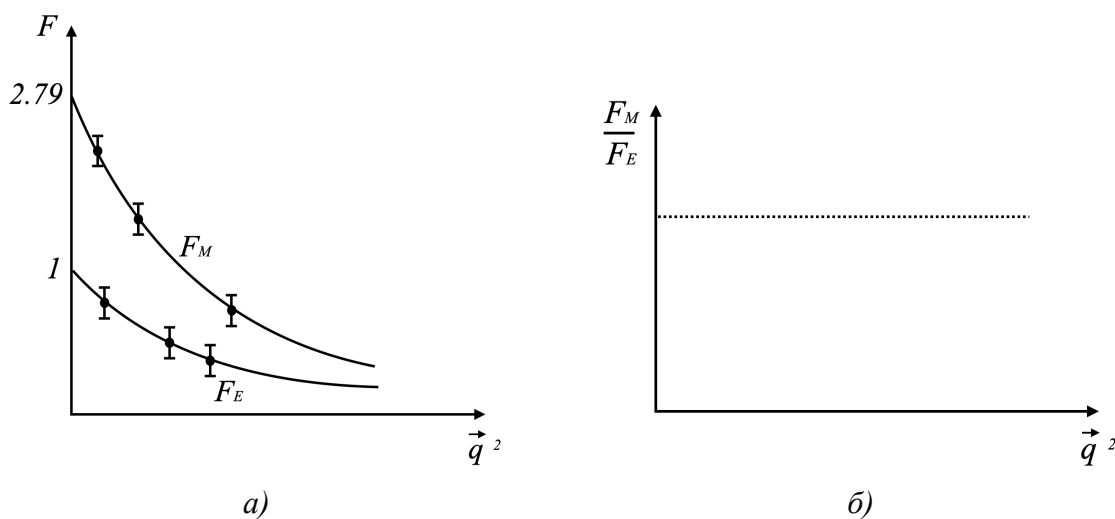


Рис. 22.3. а) экспериментальные зависимости формфакторов F_E и F_M от квадрата трехмерного импульса; б) зависимость отношения формфакторов $\frac{F_M}{F_E}$ от квадрата трехмерного импульса.

Формула Розенблюта

В реальности формула сечения упругого рассеяния электрона на нуклоне является более сложной, и называется **формулой Розенблюта**. Чтобы строго вывести формулу сечения такого процесса необходимо определить структуру взаимодействия фермиона с электромагнитным полем, создаваемым другой частицей. В случае бесструктурной частицы ток

$$\bar{u}_p \gamma^\mu u_p$$

описывает взаимодействие с электромагнитным полем. Величина интенсивности этого взаимодействия определяется электрическим зарядом, а γ^μ определяет вид взаимодействия. Так можно воспроизвести притяжение, отталкивание, закон Кулона – всю хорошо известную физику. Однако в этой формуле начальная и конечная частицы

считаются точечными. Наиболее общая структура, которую теоретически можно предположить для протонного тока имеет вид

$$\bar{u}_{p'} \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_p} \right] u_p.$$

Выражение в квадратных скобках является наиболее общей структурой, которая не противоречит калибровочной инвариантности, Лоренц-симметриям, и другим симметриям, накладываемым на квантовую электродинамику. F_1 – формфактор, $q \equiv p' - p$, тогда $q^2 = (p' - p)^2$ – Лоренц-инвариантная величина, F_2 – второй формфактор. F_1 описывает распределение электрического заряда внутри протона, F_2 описывает распределение магнитного момента. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ – дираковский спинор, если вычислить коммутатор, то его пространственные компоненты сведутся к матрицам Паули, тогда второе слагаемое в скобках будет иметь вид взаимодействия магнитного момента с магнитным полем.

Когда определен вид вершины взаимодействия, вычисление сечения рассеяния становится делом техники. Запишем выражением для сечения Розенблюта:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Розенблют}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

где $\tau \equiv -\frac{q^2}{4m_p^2}$, $G_E(q^2)$ и $G_M(q^2)$ – функции квадрата четырехмерного импульса. Если переданная энергия мала, $q^2 \approx -\vec{q}^2$, тогда

$$G_E(\vec{q}^2) = \int d^3x e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \rho_E(\vec{x}),$$

$$G_M(\vec{q}^2) = \int d^3x e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \rho_M(\vec{x}),$$

при этом нормировки

$$G_E(0) = 1, \quad G_M(0) = 2.79.$$

Так, множитель при $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ описывает электромагнитную структуру, множитель при $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ описывает магнитный формфактор, при малых импульсах формула трансформируется в ранее полученную.

Использование формулу Розенблюта и анализ экспериментальных данных, показали, что протон состоит из непрерывного распределения электрического заряда и магнитного момента. Оказалось, что распределения электрического заряда и магнитного момента описываются практически одной и той же функцией:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/r_0},$$

где $r_0 \approx 0.24$ фм, при этом

$$\sqrt{r^2 - \bar{r}^2} = 0.84 \text{ фм.}$$

Так, протон – структура порядка фм, в центре он более плотный, к краям плотность спадает.

Все исследования проводились при энергиях электронов порядка нескольких сотен МэВ. Если увеличить энергию электронов до величины порядка 10 ГэВ, что стало возможным благодаря использованию новых ускорителей, то картина значительно изменится. На рисунке 22.4 представлена зависимость от квадрата четырехмерного импульса логарифма измеренного сечения, пунктирная линия – логарифм сечения Розенблюта. Измеренное сечение при больших q на несколько порядков больше сечения, рассчитанного по формуле Розенблюта и практически не зависит от q^2 .

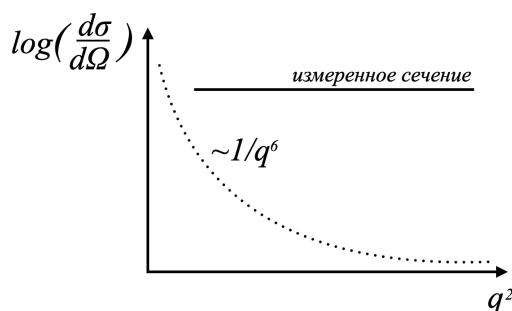


Рис. 22.4. Зависимость от квадрата четырехмерного импульса логарифма измеренного сечения, пунктирная линия – логарифм сечения Розенблюта.

Экспериментаторы долго не могли поверить в полученный результат. Этот результат объясняется тем, что протон не является субстанцией, представляющей собой непрерывное распределение заряда, то есть протон состоит из некоторых точечных бесструктурных объектов. Если электрон рассеивается на протоне при небольших энергиях, то длина волны электрона воспринимает точечные бесструктурные объекты внутри электрона как непрерывное распределение. При малой длине волны электрон рассеивается уже на точечных структурах, сечение не зависит от формфакторов.

История напоминает открытие атомного ядра. Когда физики задумались о том, как описать атом, содержащий положительно заряженную субстанцию и электроны, предполагали планетарную модель – малое положительно заряженное ядро и электроны, вращающиеся по орбитам. Эта картина входила в противоречие с тем, что электрон, будучи заряженной частицей, двигаясь по круговым орбитам должен был излучать, в результате чего атом не может быть стабильным. Тогда английский физик Томсон предложил модель «пудинг с изюмом» - электроны, равномерно распределены по положительно заряженной субстанции. Однако Резерфорд с учениками, рассеивая α -частицы на ядрах золота, показали, что часть частиц рассеивается в обратном направлении, что невозможно в модели Томсона, что привело к следующей картине: внутри атома находится положительно заряженное плотное ядро, вокруг которого вращаются электроны. Эта картина простимулировала рождение квантовой механики.

Заглянув внутри протона, сначала предположили, что протон – равномерно заполненная электрическим и магнитным зарядом сфера. В следующих экспериментах обнаружилось, что протон состоит из точечных объектов, распределенных по его объему. Плотность распределения этих точечных объектов в среднем подчиняется экспоненциальному распределению, однако из результатов экспериментов очевидно существование точечных объектов внутри протона. Опишем эти результаты с точки зрения теории.

Лекция 23. Глубоко-неупругое рассеяние

Если говорить о квадратах переданного импульса от электрона нуклону $q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$, то один из точечных объектов, из которых состоит протон, получает импульс порядка 10 ГэВ. Никакие силы внутри протона не способны удержать такой точечный объект внутри, но если точечный объект вырвется, то протон перестанет существовать, развалится на множество других адронов. Такое взаимодействие называется *глубоко-неупругим*.

Кинематика глубоко-неупругого рассеяния

Начнем описание явления глубоко-неупругого рассеяния с кинематики. На рисунке 23.1 изображена диаграмма такого рассеяния электрона на протоне. Протон обозначен двойной стрелкой как структура из составных элементов. В результате взаимодействия протона с фотом, испущенным при рассеянии электрона, образуется адроны, которые совокупно обозначены как X .

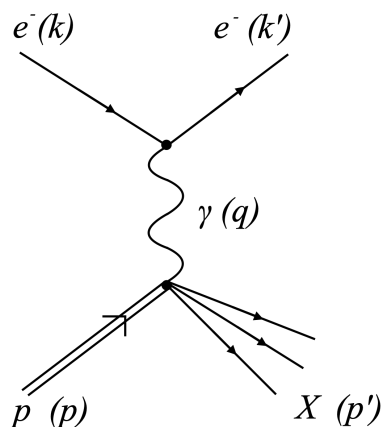


Рис. 23.1. Диаграмма Фейнмана глубоко-неупругого рассеяния электрона на протоне.

Распишем импульсы частиц, участвующих во взаимодействии:

импульс протона: $p = (m_p, \vec{0})$,

импульс совокупности адронов в конечном состоянии: $p = (E', \vec{p}')$,

4-импульс начального электрона: $k = (\omega, \vec{k})$,

4-импульс рассеянного электрона: $k' = (\omega, \vec{k}')$,

Определим кинематические переменные:

$$q^2 = (k - k')^2 = 2m_e^2 - 2(k \cdot k') \approx -2(k \cdot k'),$$

если пренебрегать массой электрона, то $q^2 < 0$. Часто экспериментаторы вводят положительную величину Q^2 :

$$q^2 = -Q^2,$$

$$Q^2 = 2k \cdot k' = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = 4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где θ – угол вылета рассеянного электрона по отношению к направлению движения начального электрона в лабораторной системе отсчета. Еще одна переменная – **переменная Бьёркена**

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{p \cdot k - k'}{p \cdot k} = 1 - \frac{\omega'}{\omega},$$

$$y \in (0, 1),$$

физический смысл этой величины – доля потерянной энергии электрона. Удобно ввести еще одну переменную – **бьёркеновский x** :

$$x = \frac{Q^2}{2(p \cdot q)}.$$

Введем еще одну величину, **квадрат инвариантной массы**

$$W^2 = (p')^2 = (p + q)^2 = m_p^2 + 2(p \cdot q) + q^2,$$

если бы в конечном состоянии был единственный адрон, то квадрат его четырехмерного импульса был бы квадратом его массы. Если реконструировать все рождающиеся адроны, восстановить их четырехмерные импульсы, сложить, возвести в квадрат, то присутствие нескольких частиц с одинаковой массой будут проявляться в спектре инвариантной массы как резонансы. Рассмотрим W^2 с другой стороны, это квадрат массы всех адронов, рождающихся в результате рассматриваемого взаимодействия, поскольку барионное число сохраняется, то в этой совокупности адронов должен присутствовать хотя бы один барион, тогда

$$W^2 \geq m_p^2,$$

значит

$$2(p \cdot q) + q^2 \geq 0 \rightarrow 2(p \cdot q) - Q^2 \geq 0 \rightarrow$$

$$2(p \cdot q) \geq Q^2 \rightarrow x \leq 1.$$

Минимально возможное значение $Q^2 = 0$, так

$$x \in (0, 1).$$

Введем последнюю кинематическую переменную – квадрат полной энергии в системе центра масс:

$$s = (p + k)^2 = m_p^2 + 2(p \cdot k).$$

Не все введенные кинематические переменные являются независимыми:

$$W^2 = m_p^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right).$$

В качестве трех независимых переменных часто используются x , y и Q^2 .

Определим физический смысл переменной Бьёркена x . Для этого введем гипотезу о том, на каких бесструктурных точечных объектах рассеивается электрон. Ричард

Фейнман еще до открытия того факта, что при больших энергиях сечение перестает зависеть от q^2 , ввел **партоны**. Сегодня известно, что эти точечные структуры называются **кварками** и **глюонами**. При рассеянии электронов на протонах глюоны играют малую роль, в основном рассеяние электронов происходит на кварках и антикварках. На рисунке 23.2 изображена часть исходной диаграммы. Виртуальный фотон рассеивается на кварке, рядом изображены линии кварков, не испытавшие взаимодействие с бозоном. Провзаимодействовавший кварк изменил направление движения, между кварками начался обмен глюонами, в результате кварки превратились в некоторый набор адронов, захватив и другие кварки, летевшие параллельно исходному протону.

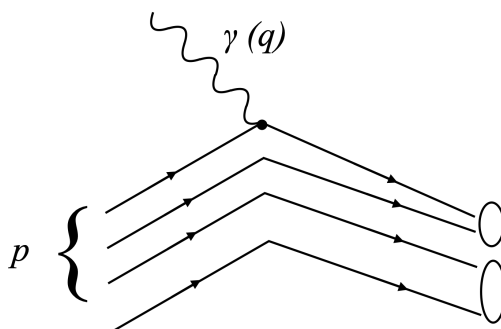


Рис. 23.2. Рассеяние фотона на кварке.

Пусть импульс кварка, взаимодействующего с фотоном, $p_q = q$, тогда

$$(p_q + q)^2 = m_q^2.$$

Предположим, что этот кварк нес определенную долю импульса протона:

$$p_q = \zeta \cdot p,$$

то есть пренебрежем массой кварка. Тогда

$$(\zeta \cdot p + q)^2 = \zeta^2 m_q^2 + 2\zeta(p \cdot q) - Q^2 \approx 0,$$

слагаемое $\zeta^2 m_q^2$ мало по сравнению с Q^2 , значит

$$\zeta = \frac{Q^2}{2(p \cdot q)} \equiv x.$$

Так, бьёркеновский x – доля 4-импульса протона, которую переносит кварк внутри протона. Если измерить Q^2 и $(p \cdot q)$, то можно восстановить X , получить тем самым информацию о внутренности протона. Сформулируем теперь кварк-протонную модель и выпишем сечение рассеяния электронов на кварках.

Формула для сечения рассеяния электронов на протонах в глубоко-неупругом режиме

Получим формулу сечения рассеяния электронов на протонах в глубоко-неупругом режиме, предполагая, что рассеяние происходит на кварке. Похожая задача

была решена при рассмотрении рассеяния электрона на мюоне. Если в общей формуле пренебречь массами электронов и мюонов, то она примет следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1 - y)^2],$$

формула отвечает приближению $q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$. Если можно пренебречь массами мюонов, значит можно пренебречь и массами легких кварков, таких как u и d . Отличие между рассеянием электрона на мюоне и рассеянием электрона на кварке протона заключается в разных электрических зарядах частиц – заряд кварка не равен заряду мюона или электрона, а равен $\frac{2}{3}e$ или $-\frac{1}{3}e$. Поскольку заряд электрона входит в одну вершину, а заряд кварка в другую, то можно записать формулу для рассеяния электрона на кварке в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} e_q^2 [1 + (1 - y)^2],$$

где e_q – заряд кварка. Формулу можно переписать

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} e_q^2 \left[1 - y - \frac{y^2}{2} \right].$$

Представим протон, внутри которого существует море кварков, рождающихся из глюонов и три основных кварка (рис. 23.3(а)). Один из его основных кварков получает от высокоэнергетичного фотона импульс, значительно превышающий ГэВ, то есть превышающий энергию связи внутри протона. Кварк начинает вырываться из протона и через короткое время протон разрывается на части. При этом вылетевший кварк активно обменивается глюонами с оставшимися кварками (рис. 23.3(б)). Между остатком протона и кварком натягивается «струна», заполненная глюонами, то есть полем, несущим энергию. Сосредоточенная в «струне» энергия растет по мере удаления кварка от остатка протона, часть энергии кварка расходуется на образование энергии глюонного поля, при этом остаток протона вытягивается в эллипс. Через некоторое время, когда энергия в струне становится достаточной для рождения пары кварк-антикварк, происходит разрыв глюонных линий, на концах которых появляются кварк и антикварк, рожденные глюонным полем (рис. 23.3(в)). Ситуация повторяется до тех пор, пока вся энергия вылетевшего кварка не будет потрачена на рождение кварк-антикварковых пар. Так, через некоторое время пространство порядка 15-20 фм будет заполнено морем пар кварк-антикварк, которые за счет глюонов объединятся в адроны.

Таким образом из упругого рассеяния электрона на кварке, из-за того, что кварк порождает множество глюонов, рождается множество пар кварк-антикварк и, соответственно, адронов, при этом исходный протон исчезает – произошло глубоко-неупругое рассеяние.

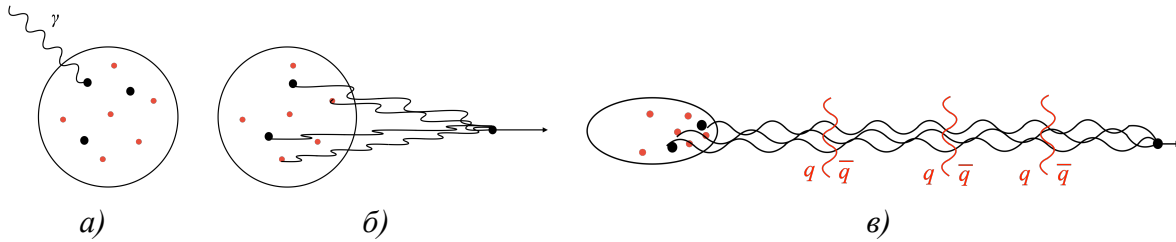


Рис. 23.3. Механизм глубоко-неупругого рассеяния.

Запишем формулу для дифференциального сечения рассеяния электрона на протоне:

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow eX)}{dQ^2} = \sum_q \frac{d\sigma(eq \rightarrow eq)}{dQ^2} \cdot f_q^p(x) dx.$$

$f_q^p(x)$ – феноменологическая функция, плотность вероятности того, что в протоне будет обнаружен кварк q с заданной долей импульса, dx – интервал доли импульса. $f_q(x)$ нельзя вычислить, эта функция определяется экспериментально. Разделим левую и правую часть полученной формулы на dx :

$$\frac{d^2\sigma(ep \rightarrow eX)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \sum_q e_q^2 \cdot f_q^p(x).$$

Введем переобозначения:

$$\begin{aligned} f_u^p(x) &\equiv u(x), & f_d^p(x) &\equiv d(x), & f_s^p(x) &\equiv s(x); \\ f_{\bar{u}}^p(x) &\equiv \bar{u}(x), & f_{\bar{d}}^p(x) &\equiv \bar{d}(x), & f_{\bar{s}}^p(x) &\equiv \bar{s}(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma(ep \rightarrow eX)}{dx dQ^2} &= \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \left[\frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) + \dots \right], \end{aligned}$$

при этом кварковые распределения не известны до проведения измерений. Возникает вопрос, как определить такое количество распределений из одного типа измерений. Кроме протонов существуют нейтроны, при рассеянии электронов на нейтронах формально можно записать аналогичную формулу для сечения:

$$\frac{d\sigma(en \rightarrow eX)}{dQ^2} = \sum_q \frac{d\sigma(eq \rightarrow eq)}{dQ^2} \cdot f_q^n(x) dx.$$

Здесь можно воспользоваться **изотопической симметрией**: сильные взаимодействия остаются инвариантными при замене $d \leftrightarrow u$ или $p \leftrightarrow n$. Если предположить, что изотопическая симметрия имеет место, то можно предположить следующее:

$$f_u^p(x) = f_d^n(x), \quad f_d^p(x) = f_u^n(x).$$

Используя изотопическую симметрию, запишем формулу сечения рассеяния электрона на нейтроне. В этом случае рассеяние будет также происходить на u -кварке, но u -кварк нейтрона аналогичен d -кварку протона, тогда

$$\frac{d^2\sigma(en \rightarrow eX)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \left[\frac{4}{9} (d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9} (u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) + \dots \right].$$

Предположим, что в протоне и нейтроне нет странных кварков и антикварков, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma(ep \rightarrow eX)}{dx dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \left[\frac{4}{9} u(x) + \frac{1}{9} d(x) \right], \\ \frac{d^2\sigma(en \rightarrow eX)}{dx dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \left[\frac{4}{9} d(x) + \frac{1}{9} u(x) \right], \end{aligned}$$

полученные два уравнения содержат 2 неизвестные, однако информация о других кварках и антикварках потеряна. Из электромагнитных взаимодействий восстановить эту информацию почти невозможно. Можно записать более полные формулы, учитывающие массы и более тонкие эффекты, тогда появится небольшая разница, но довольно слабая. Однако все распределения хорошо измерены (рис. 23.4). Если взять интегралы от экспериментально измеренных значений, то получим следующее:

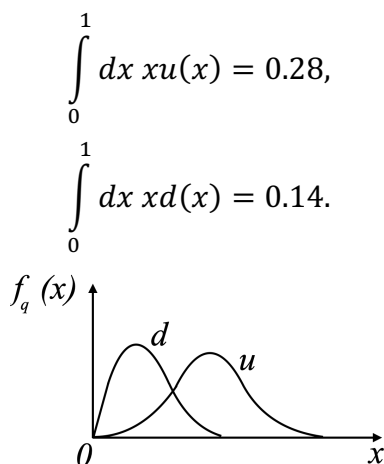


Рис. 23.4. Кварковые распределения для u - и d -кварков.

Отношение 2 указывает на то, что в протоне в 2 раза больше u -кварков, чем d -кварков. Для s -кварков

$$\int_0^1 dx xs(x) = 0.02.$$

Если сложить все кварки, которые мы рассмотрели, то получим 0.44 – эти кварки переносят примерно 44% импульса протона, остальные 56% переносят глюоны.

Провести описанные измерения невозможно без нейтрино, которые обладают особой чувствительностью к типу кварка. При помощи рассеяния нейтрино на нуклонах можно определить количество тех или иных кварков в протонах.

Глубоко-неупругое рассеяние нейтрино на протоне

Рассмотрим процесс глубоко неупругого рассеяния нейтрино на протоне:

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + X.$$

Кинематика будет аналогичной кинематике рассеяния заряженных лептонов на протоне, перейдем к вычислению сечения в кварк-протонной модели. Вспомним два сечения рассеяния, сечение рассеяния нейтрино на лептоне:

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e)}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi},$$

где s – переменная Мандельштама в системе центра масс начальных нейтрино и электрона. В этой реакции полный спин равен нулю, реакции характерна изотропия по углу вылета. Второе сечение, которое будет важно – сечение рассеяния нейтрино на позитроне:

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu + e^+ \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e)}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} (1 - y)^2.$$

В этой реакции нет изотропии по углу вылета, наблюдается подавление примерно в 3 раза. Сечение рассеяния нейтрино на кварке можно записать в виде

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu q \rightarrow \mu^- X)}{dy} = \sum_{q'} \frac{d\sigma(\nu_\mu + q \rightarrow \mu^- + q')}{dy} |V_{qq'}|^2,$$

из унитарности матрицы смешивания следует

$$\sum_{q'} |V_{qq'}|^2 = 1.$$

Аналогично рассмотренному случаю рассеяния электрона на протоне, если кварк вылетел из протона, то протон превратится в множество адронов, упругое рассеяние нейтрино на кварке будет приводить к неупругому рассеянию на протоне. Аналогично можно рассмотреть рассеяние нейтрино на антикварке:

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu \bar{q} \rightarrow \mu^- X)}{dy} = \sum_{q'} \frac{d\sigma(\nu_\mu + \bar{q} \rightarrow \mu^- + \bar{q}')}{dy} |V_{qq'}|^2.$$

Определим, на каких кварках может происходить рассеяние нейтрино. При рассеянии мюонное нейтрино может быть преобразовано в мюон μ^- с испусканием W^+ -бозона. На u -кварке рассеяние нейтрино происходить не может, поскольку по закону сохранения заряда заряд итогового кварка должен быть

$$e_{q'} = e_q + 1.$$

В случае верхнего u -кварка $e_{q'} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$, кварков с таким зарядом не существует, поэтому нейтрино не может рассеиваться на u -кварке. Следовательно нейтрино должно рассеиваться на кварке с зарядом $-\frac{1}{3}$ (d -кварк или s -кварк): $e_{q'} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$. В результате такой реакции может родиться u -кварк или c -кварк (рис. 23.5(а)). Рассеяние нейтрино также может происходить на антикварке. На нижних антикварках нейтрино не рассеивается в силу закона сохранения заряда, при рассеянии на верхнем антикварке $e_{q'} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$, так рассеяние на $\bar{u}$ -кварке приводит к рождению антикварков $\bar{d}, \bar{s} \dots$ (рис. 23.5(б)).

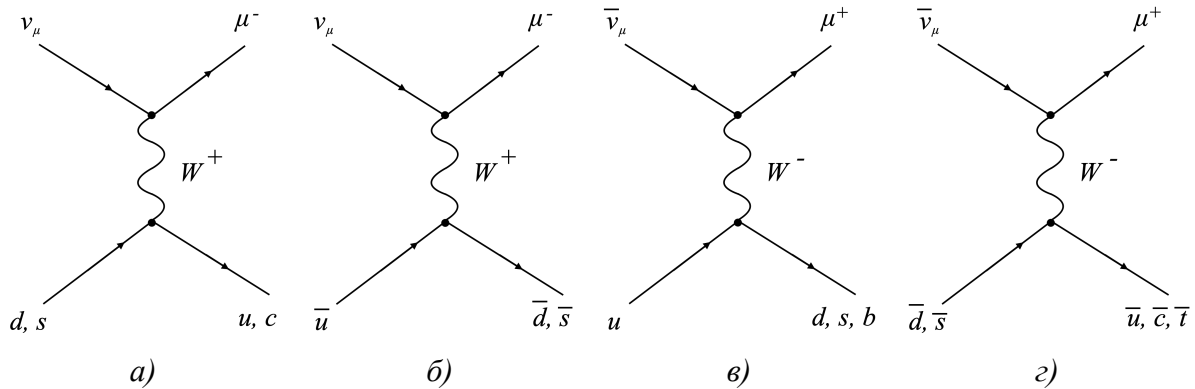


Рис. 23.5. Рассеяние нейтрино и антинейтрино на кварках и антикварках.

Запишем сечение рассеяния нейтрино на протоне:

$$\frac{d^2\sigma(\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + X)}{dydx} = \frac{G_F^2 s x}{\pi} [d(x) + s(x) + (1-y)^2 \bar{u}(x) + \dots],$$

поскольку в системе центра масс нейтрино и кварка

$$s_{qv} = (k + p)^2 = (k + xp)^2 = x \cdot 2(k \cdot p),$$

где x – бьёркеновский X , в системе центра масс нейтрино и протона

$$s = (k + p)^2 = 2(k \cdot p),$$

тогда

$$s_{qv} = xs.$$

В силу изотопической симметрии формула сечения рассеяния нейтрино на нейтроне имеет вид

$$\frac{d^2\sigma(\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + X)}{dydx} = \frac{G_F^2 s x}{\pi} [u(x) + s(x) + (1-y)^2 \bar{d}(x) + \dots].$$

Формула для сечения рассеяния нейтрино на протоне позволяет отдельно измерить $\bar{u}(x)$ и совместно $d(x) + s(x)$, формула сечения рассеяния нейтрино на нейтроне позволяет определить в эксперименте отдельно $\bar{d}(x)$ и вместе $u(x) + s(x)$.

Можно провести эксперименты по рассеянию антинейтрино на протоне. В этих случаях антинейтрино преобразуется в мюон μ^+ с испусканием W^- -бозона. В этом случае происходит рассеяние на верхних кварках (рис. 23.5(в)) или на нижних антикварках (рис. 23.5(г)). Тогда сечение рассеяния антинейтрино на протоне

$$\frac{d^2\sigma(\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + X)}{dydx} = \frac{G_F^2 sx}{\pi} [(1-y)^2 u(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x) + \dots],$$

отсюда можно отдельно определить $u(x)$ и совместно $\bar{d}(x) + \bar{s}(x)$. Поскольку теперь известны $u(x)$ и $\bar{d}(x)$, можно вычислить $s(x)$ и $\bar{s}(x)$. И если известно $s(x)$, значит можно вычислить $d(x)$. Так, теперь известны все необходимые распределения для кварков и антикварков. Тем не менее запишем формула сечения рассеяния антинейтрино на нейтроне:

$$\frac{d^2\sigma(\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + X)}{dydx} = \frac{G_F^2 sx}{\pi} [(1-y)^2 d(x) + \bar{u}(x) + \bar{s}(x) + \dots],$$

в таком эксперименте можно отдельно измерить $d(x)$ и вместе $\bar{u}(x) + \bar{s}(x)$.

Результаты и итоги

Глубоко-неупругие рассеяния заряженных лептонов, нейтрино и антинейтрино могут быть успешно описаны в рамках простейшей кварк-протонной модели. Эта модель

- 1) позволяет четко экспериментально определить кварковые распределения внутри протона;
- 2) предсказывает, что сечения не зависят от q^2 , объясняя экспериментальные данные.

Однако если шагнуть вперед по времени на десятилетие, то было обнаружено, что слабая логарифмическая зависимость сечения от q^2 все-таки есть. Этот результат может показаться удивительным, поскольку кварк-протонная модель строилась следующим образом: протон состоит из кварков, которые несут некоторую долю импульса, при этом Q^2 – внешняя переменная.

Сформированная картина требует уточнения, представим, что ведется внутренняя видеосъемка жизни протона со сколь угодно большой частотой кадров. Тогда можно было бы увидеть непрерывную смену пар кварк-антикварк, рождающихся из вакуума на время порядка 10^{-23} с. Постоянные кварки протона также будут скрыты в этом море кварков. При замедлении частоты кадров картина будет разглаживаться, колебания, связанные с рождением и уничтожением пар кварк-антикварк перестанут наблюдаться, и будет видна более статическая картина протона. Когда в протон входит бозон, переносящий импульс q , то по принципу неопределенности Гейзенберга величина $\frac{1}{\sqrt{Q^2}} \sim \tau$ будет характерным временем развертки, чем больше Q^2 , тем большее число кварков-антикварков можно увидеть. Поэтому кварковые распределения должны зависеть не только от x , но и от Q^2 , что наблюдается в эксперименте.

На графике 23.6 представлена зависимость кваркового распределения u -кварка от бьёркеновского x . Пик наблюдается при Q^2 порядка 10 ГэВ^2 , распределение близко к статической картине протона, где все быстрые колебания усреднены. Если добавить $Q^2 = 10^4 \text{ ГэВ}^2$, то кварковое распределение перестанет быть статичным, будет наблюдаться море u -кварков с малыми x , поскольку должен выполняться закон сохранения энергии. Новое распределение будет совершенно не похоже на предыдущее. Описанная качественно картина воспроизводится экспериментально. Теоретически эволюцию кварковых распределений в зависимости от Q^2 описывает система уравнений DGLAP, названная по именам 5 физиков, которые получили эти уравнения: Докшицер, Грибов, Липатов, Альтарелли и Паризи. Эта система уравнений использует квантовую хромодинамику, из которой можно вычислить вероятность того, что кварк породит глюон, а глюон породит пару кварк-антикварк. Символически система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \log Q^2} \begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix} = P \oplus \begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} q \\ g \end{pmatrix}$ – кварки и глюоны, левая часть интегральная, P – матрица (для одного кварка и одного глюона размерность матрицы 2×2). Решение такого интегро-дифференциального уравнения позволяет получить кварковое распределение. Для проверки зависимостей существует программный продукт LHAPDF, содержащий кварковые распределения на языках C++, Python, Fortran.

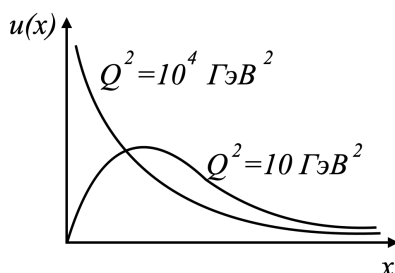


Рис. 23.6. Зависимость кваркового распределения u -кварка от бьёркеновского x для $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ и $Q^2 = 10^4 \text{ ГэВ}^2$.

В следующем курсе будут рассмотрены ренормировки и квантовые аномалии, позволяющие еще глубже погрузиться в квантовую теорию поля и обнаружить, что то, что считалось константами оказывается бегущими функциями (электрические заряды, массы и т.д.).