



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

БОРИСОВ
АНАТОЛИЙ ВИКТОРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ГОЛОВКО ПОЛИНУ ВАЛЕРЬЕВНУ



Содержание

1 Лекция 1. Элементарные частицы и фундаментальные взаимодействия	6
1.1 Введение	6
1.2 Элементарные частицы и фундаментальные взаимодействия	8
1.3 Кварковое строение адронов	12
1.4 Фейнмановские диаграммы	13
1.5 Мюонная аномалия	21
2 Лекция 2. Группа Лоренца и её генераторы	23
2.1 Преобразования Лоренца	23
2.2 Группа Лоренца	28
2.3 Генераторы группы Лоренца	31
2.4 Принцип причинности	33
2.5 Алгебра Ли группы Лоренца	35
3 Лекция 3. Метод Лагранжа и вариационный принцип в теории поля. Метод Гамильтона в теории поля	38
3.1 Алгебра Ли группы Лоренца. Продолжение	38
3.2 Метод Лагранжа и вариационный принцип в теории поля	40
3.3 Метод Гамильтона в теории поля	44
4 Лекция 4. Симметрии и интегралы движения. Теорема Нётер	48
4.1 Теорема Нётер в механике	48
4.2 Теорема Нётер в механике. Примеры.	50
4.3 Теорема Нётер в теории поля	53
4.4 Энергия, импульс и момент импульса поля	57
5 Лекция 5. Энергия, импульс и момент импульса поля. Комплексное скалярное поле. Глобальные калибровочные преобразования.	59
5.1 Комплексное скалярное поле. Глобальные калибровочные преобразования. Электрический заряд.	62
5.2 Глобальные калибровочные преобразования	65

6	Лекция 6. Калибровочная группа $SU(2)$. Изоспин. Локальные калибровочные преобразования. Электромагнитное поле как абелево калибровочное поле. Уравнения Максвелла	69
6.1	Калибровочная группа $SU(2)$. Изоспин	69
6.2	Приложение. Спин электрона в квантовой механике	72
6.3	Локальные калибровочные преобразования и калибровочный принцип введения взаимодействий полей. Электромагнитное поле как абелево калибровочное поле. Скалярная электродинамика	75
6.4	Уравнения Максвелла	78
7	Лекция 7. Неабелевы калибровочные поля. Неабелево обобщение скалярной электродинамики	82
7.1	Неабелевы калибровочные поля	82
7.2	Неабелево обобщение скалярной электродинамики	83
8	Лекция 8. Квантование полей. Частицы как кванты полей	89
8.1	Квантование полей	89
8.2	Метод Гамильтона	92
9	Лекция 9. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Механизм Браута-Энглера-Хиггса генерации масс элементарных частиц. Непрерывная абелева симметрия	99
9.1	Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Механизм Браута-Энглера-Хиггса генерации масс элементарных частиц	99
9.2	Непрерывная абелева симметрия	101
9.3	Механизм Браута-Энглера-Хиггса	103
10	Лекция 10. Группа $SL(2, C)$. 4-мерные спиноры. Инверсия спиноров	107
10.1	Группа $SL(2, C)$. Спинорное представление группы Лоренца	107
10.2	4-мерные спиноры	112
10.3	Инверсия спиноров	115
11	Лекция 11. Уравнение Дирака. Динамические переменные дираковского (спинорного) поля	119
11.1	Уравнение Дирака	119
11.2	Закон преобразования биспиноров	123

11.3	Динамические переменные дираковского (спинорного) поля	126
12	Лекция 12. Спинорная электродинамика	129
12.1	Группа Пуанкаре	130
12.2	Классификация представлений	132
13	Лекция 13. Модель Вайнберга–Салама (ВС). Общая структура лагранжиана (случай одного поколения лептонов)	138
13.1	Модель Вайнберга–Салама (ВС)	138
13.2	Механизм Браута–Энглера–Хиггса в модели Вайнберга–Салама: массы лептонов и калибровочных бозонов	143
13.3	Матрица лептонного смешивания	146
13.4	Кварковая модель адронов, сильное взаимодействие	150
14	Лекция 14. Квантовая хромодинамика — SU(3)-калибровочная теория сильного взаимодействия. Асимптотическая свобода и конфайнмент. Стандартная модель и ее обобщения	153
14.1	Квантовая хромодинамика — SU(3)-калибровочная теория сильного взаимодействия	153
14.2	Теория сильных взаимодействий	156
14.3	Асимптотическая свобода и конфайнмент	161
14.4	Стандартная модель: преимущества и открытые вопросы	165
14.5	Выводы	167

Лекция 1. Элементарные частицы и фундаментальные взаимодействия

Введение

Курс «Введение в физику фундаментальных взаимодействий» – это вводный курс для годового курса «Теория фундаментальных взаимодействий». В этом курсе будут в рамках классической теории поля обсуждаться те аспекты, которые используются при построении современной теории фундаментальных взаимодействий: электромагнитных, слабых, сильных. Данная теория носит название «Стандартная Модель». На самом деле это не модель, а полноценная квантовая теория поля, которая описывает все три основных типа взаимодействий. Гравитация в стандартной модели не учитывается, так как считается, что три типа взаимодействий развиваются на фоне пространства Минковского.

Первая лекция – обзор стандартной модели. Будет показано, какие частицы с точки зрения стандартной модели являются фундаментальными, а также обратим внимание на фундаментальные взаимодействия между ними. Далее будут обсуждаться основные симметрии, которые лежат в основе описания взаимодействий. В рамках курса считается, что теория должна описывать взаимодействия Лоренц-инвариантным образом: формулировка основных законов должна быть инвариантна относительно выбора инерциальной системы отсчета, поэтому переход от первой инерциальной системы отсчета ко второй, от второй к третьей, должен быть эквивалентен переходу от первой инерциальной системы отсчета к третьей сразу же. Отсюда видно, что такой переход должен иметь групповую структуру. Из курса общей физики известно, что для этого необходимо использовать преобразования Лоренца. Они связывают между собой время и координаты некоторого идеализированного точечного события в двух инерциальных системах отсчета. Поэтому некоторые важные фундаментальные свойства групп Лоренца тоже будут обсуждаться в рамках курса. Общая теория групп будет подробно обсуждаться в курсе «Теория групп». Затем будет обсуждаться, как обобщается метод Лагранжа на теорию поля. С точки зрения механики, теория поля – это механическая система с бесконечным числом степеней свободы. Тем не менее основные идеи теоретической механики могут быть обобщены на этот случай. Для этого в рамках курса будет сформулирован вариационный

принцип в теории поля и методом Лагранжа будет получено уравнение движения. Будет обсуждаться также метод Гамильтона, его механические основы и применение в теории поля. Этот метод необходим при переходе к квантовой теории поля. Далее будет рассматриваться, как из структуры действия, которая сопоставляется полевой системе, получить интегралы движения. Известно, что в механике существует теорема Нётер, которая связывает симметрии действия с интегралом движения. Аналогичная теорема используется и в теории поля. При построении Лагранжиана взаимодействия будут использоваться токи Нётер. Также в рамках курса будет показано, как на основе теоремы Нётер ввести понятия, известные из механики: момент, энергия, импульс. Будут рассматриваться интегралы, которые не имеют механического аналога: простейшее скалярное поле, действительное, вещественное, комплексное. Будет введена фундаментальная величина, не имеющая механического аналога - электрический заряд. Существуют более широкие немеханические интегралы движения, которые связаны с некоординатными преобразованиями, их называют внутренними симметриями полей. Будет совершен переход от Абелевых групп к неабелевым. Будет введено понятие изоспина, оно будет использовано при построении той части стандартной модели, которая используется для описания слабых взаимодействий. Калибровочные группы описываются параметрами, которые не имеют зависимости от координат. Нужно ввести понятие локальных калибровочных преобразований, их параметры зависят от координат пространства-времени Минковского. Именно эти локальные калибровочные преобразования лежат в основе построения фундаментальных взаимодействий в стандартной модели. На примере одной из важнейших калибровочных теорий, будет рассмотрена скалярная электродинамика. Будет указана связь калибровочных и материальных полей с квантовыми объектами (частицами). Систематическое изложение будет дано в курсе «Квантовая теория поля». Будет рассмотрено важнейшее свойство стандартной модели (для описания слабых взаимодействий) – спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии. Этот механизм называется механизмом Браута-Энглера-Хиггса. При таком спонтанном нарушении симметрии возникает бозон Хиггса, который используется для описания возникновения масс элементарных частиц. Будет проведен краткий обзор курса «Теория фундаментальных взаимодействий». Рассмотрим, как развивая идею локальной калибровочной теории поля, перейти к теории сильных взаимодействий – квантовая хромодинамика. Понадобится еще одна калибровочная группа – $SU(3)$. Будут описаны недостатки стандартной теории.

Список литературы:

1. Л. Б. Окунь. Физика элементарных частиц. М., Наука, 1988.
 2. Г. Кейн. Современная физика элементарных частиц. М., Мир, 1990.
 3. Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, В. Ч. Жуковский. Классические поля. М., Изд-во Моск. ун-та, 1991.
 4. А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов. Калибровочные поля. М., Изд-во Моск. ун-та, 1986. – Гл. 1.
 5. К. В. Степаньянц. Классическая теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
 6. В. А. Рубаков. Классические калибровочные поля. Бозонные теории. М., КомКнига, 2005.
 7. В. А. Рубаков. Классические калибровочные поля. Теории с фермионами. Некоммутативные теории. М., КомКнига, 2005.
 8. А. В. Смилга. Квантовая теория поля на обед. М., Изд-во МЦНМО, 2019.
- Для успешного освоения курса необходимо в течение семестра решать задачи.

Элементарные частицы и фундаментальные взаимодействия

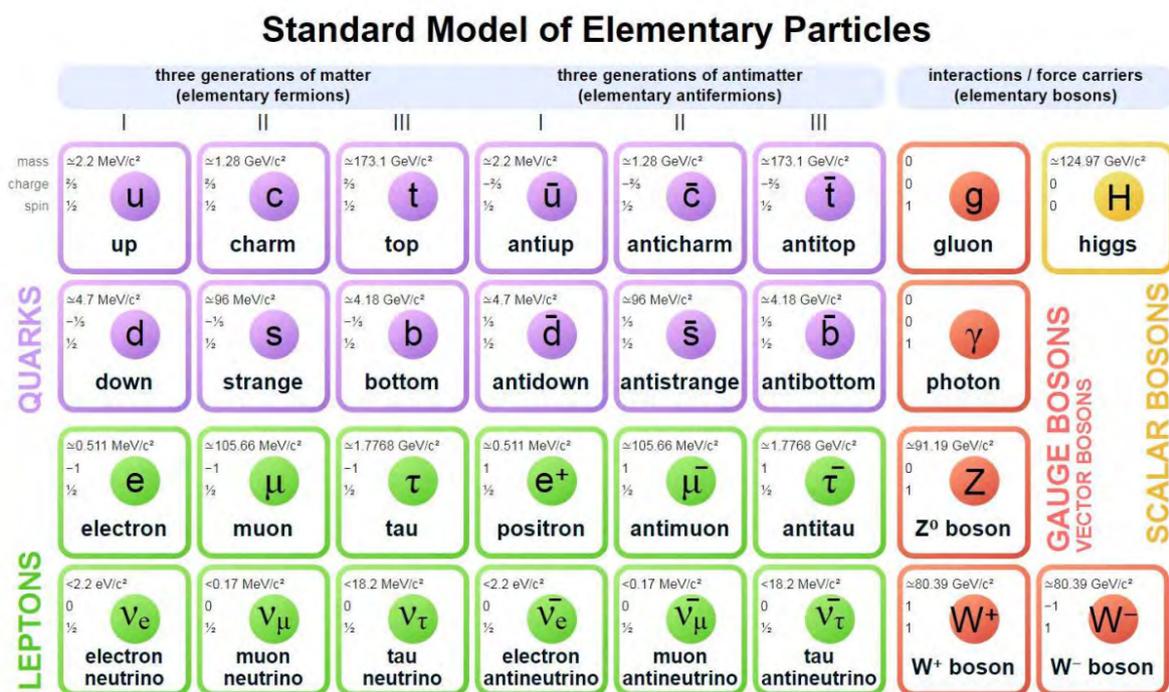


Рис. 1.1. Стандартная модель элементарных частиц

На рисунке 14.18 приведена таблица элементарных (в смысле экспериментатора)

частиц. Именно они описывают все основные структуры, все другие элементарные частицы. Протон, нейтрон с точки зрения Стандартной модели, не являются фундаментальными, они являются связанными состояниями этих частиц.

Обычно их делят на две группы. Первая группа - лептоны, частицы вещества (материи). Вторая группа - кварки. Имеется три поколения кварков и три поколения лептонов. Поколения содержат пары частиц, то есть три дублета: электронный, мюонный и тауонный. Между лептонами и кварками (которых тоже три поколения) есть симметрия. Чертой над символом обозначается античастица к определенной частице. Как показывает квантовая теория поля, каждой частице ставится в соответствие частица, несущая противоположный знак электрического заряда. Например, электрону соответствует равный по массе позитрон.

Кварки u и d , будучи элементарными частицами, образуют при объединении наблюдаемые опытным путем протон и нейтрон. Кварки c , s , t и b образуют быстро-распадающиеся вещества. То есть, стабильное вещество состоит из легких кварков. В каждой ячейке указаны характеристики элементарных частиц: масса, заряд, спин (собственный момент импульса).

В физике элементарных частиц принято измерять массы в электрон-вольтах. 1 эВ – это энергия, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов в 1 вольт. Наблюдается иерархия масс при переходе между поколениями: электрон весит 0.5 МэВ , мюон уже в 200 раз тяжелее. Теория строится таким образом, чтобы иерархия наблюдалась, однако она никак не объясняется. Для кварков наблюдается то же самое: самый легкий весит несколько МэВ , а самый тяжелый (шестой t -кварк) весит 173 ГэВ (примерно такова масса ядра золота).

Еще одна загадка, кроме общей иерархии: масса нейтрино до сих пор точно не измерена. Из экспериментов по осцилляциям нейтрино есть ограничение снизу по массе (не меньше, чем 0.05 эВ). Считается, что малая масса нейтрино – это указание на то, что есть физика за пределами Стандартной модели. Лептоны напрямую участвуют в электромагнитных и слабых взаимодействиях. Нейтрино, не имеющие электрического заряда, участвуют только в слабых взаимодействиях. Кварки участвуют во всех трех типах.

Взаимодействия между кварками, лептонами осуществляется путем переноса других частиц, частиц переносчиков взаимодействия. С точки зрения квантовой теории, различаем частицы с целым и полуцелым спином. Кварки и лептоны – это фермионы, их спин составляет половину в единицах постоянной Планка. Они подчиняются

принципу Паули, именно он объясняет стабильность вещества. В Стандартной модели идея описания взаимодействия в квантовой теории позаимствована из электродинамики. Известно, что можно описывать взаимодействия электронов путем обмена квантами электромагнитного поля (фотонами). Фотон принципиально отличается от фермионов, потому что его спин равен единице, а также он не имеет массы. Слабые взаимодействия описываются путем обмена между фермионами тремя слабыми бозонами: Z -бозон (в сто раз тяжелее протона) и W^\pm -бозоны. Эти три бозона – кванты калибровочных полей. Еще одна частица – это глюон. Дальше будет видно, что требуется 8 глюонов. Обмен между ними соответствует сильным взаимодействиям. Еще одна важная для структуры стандартной модели частица – это бозон Хиггса (предсказана в 1954 году Питером Хиггсом, открыта в 2012 году). У этой частицы нет спина и электрического заряда, ее масса близка к массе d -кварка.

Итак, фундаментальными частицами считаются лептоны (электрически заряженный электрон e , мюон μ , тауон τ и соответствующие нейтрино) и кварки (u, d, s, c, b, t) – это элементарные составляющие материи. Оценим относительные силы взаимодействия. Пусть есть электромагнитное взаимодействие. Его переносчиком, как известно, является фотон с единичным спином. Если есть обмен частицы массы m , то эффективный радиус действия – это комптоновская длина волны. Константа связи лептонов и кварков с фотоном – их электрические заряды ($-e$ – для электрона, мюона и тауона; $+2e/3$ для кварков u, c, t ; $-e/3$ – для кварков d, s, b); характерная безразмерная константа – постоянная тонкой структуры:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \simeq 7 \cdot 10^{-3} \quad (1.1)$$

Была использована Хевисайдова система единиц. Для слабого взаимодействия: переносчики – это массивные бозоны со спином 1, электрически заряженные W^\pm ($m_W = 80.4 \text{ ГэВ}$), нейтральный Z ($m_Z = 91.2 \text{ ГэВ}$). Радиус действия слабого взаимодействия:

$$r_w \simeq \frac{\hbar}{m_W c} \simeq 2 \cdot 10^{-16} \text{ см} \quad (1.2)$$

Вспомним, что размер протона 10^{-13} . Продукты распада все же зафиксировать можно. Константа связи фермионов (лептонов и кварков) с W -бозонами $g = e/\sin\theta_W$, с Z -бозонами $g = e/\cos\theta_W$; при низких энергиях ($E \ll m_W c^2$) фундаментальное слабое взаимодействие сводится к эффективному 4-фермионному (точечному) взаимодействию (переносчик как бы стягивается в точку), описываемому размерной константой

Ферми $G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2}(\hbar c)^2$ (размерность - обратный квадрат массы), которой отвечает характерная безразмерная константа:

$$\alpha_F = \frac{G_F m_p^2}{(\hbar c)^3} \simeq 10^{-5} \quad (1.3)$$

Ферми первый построил теорию слабого взаимодействия еще до фундаментальной теории. Сравним значение с постоянной тонкой структуры: величина постоянной для слабого взаимодействия получилась на несколько порядков меньше – это доказывает, что взаимодействие действительно слабое.

Существует еще один гипотетический переносчик взаимодействия – гравитон, безмассовый бозон со спином 2 (в единицах \hbar). Он переносит гравитационное взаимодействие, причем радиус бесконечен: $r_g = \infty$. Константа связи (гравитационный заряд): $\sqrt{G_N m}$, где G_N – это ньютоновская гравитационная постоянная, а m – это масса частицы. Для протона с массой $m_p = 0.938$ ГэВ имеем безразмерную постоянную (аналог постоянной тонкой структуры в электродинамике):

$$\alpha_g = \frac{G_N m_p^2}{(\hbar c)} \simeq 6 \cdot 10^{-39} \quad (1.4)$$

Величина очень мала.

Перейдем к сильному взаимодействию. Переносчиками являются глюоны. Их 8 и они не имеют массы, их спин равен единице. Взаимодействие переносится только между кварками, лептоны непосредственно в сильном взаимодействии не участвуют. Радиус действия сильного взаимодействия:

$$r_s \simeq 10^{-13} \text{ cm} \quad (1.5)$$

Константа связи кварков с глюонами – их цветной заряд g_s (кварки, в отличие от лептонов, характеризуются дополнительным квантовым числом, условно называемым цветом; каждый кварк может находиться в трех различных цветовых состояниях). Сами глюоны также несут цветовой заряд и поэтому взаимодействуют друг с другом. Самодействие глюонов приводит к принципиальному отличию характера сильного взаимодействия от электромагнитного: с уменьшением расстояния между кварками сильное взаимодействие уменьшается (это явление называется асимптотической свободой), а с увеличением расстояния возрастает так, что кварки не могут разойтись на расстояние больше, чем $r_c \sim 10^{-13} \text{ cm}$ (это явление называется конфайнментом, удержанием кварков; то же относится к глюонам). Таким образом, хотя

глюоны безмассовые (как гравитон и фотон), но их самодействие обеспечивает конечность радиуса сильного взаимодействия. Эффективная безразмерная константа связи:

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \quad (1.6)$$

Она возрастает с ростом расстояния так, что $\alpha_s \rightarrow 1$ при $r \rightarrow r_c$, а при $r \rightarrow 0$ убывает $\alpha_s \rightarrow 0$.

Кварковое строение адронов

Конфайнмент приводит к тому, что кварки (глюоны) не существуют в свободном состоянии (в обычных лабораторных условиях). При высоких плотностях и температурах кварки и глюоны находились почти в свободном состоянии. По мере эволюции, кварки и глюоны перестали наблюдаться при обычных условиях. Можно смоделировать условия ранней Вселенной и получить кварк-глюонную плазму, но только в качестве модели. Сейчас наблюдаются лишь их связанные цветонейтральные состояния – сильновзаимодействующие частицы, адроны (не элементарные частицы, а связанные состояния). Их можно разделить на два класса – мезоны (целый спин – бозоны) и барионы (полуцелый спин – фермионы). Согласно кварковой модели, мезоны состоят из кварка и антикварка ($M = q_1\bar{q}_2$), а барионы – из трех кварков ($M = q_1q_2q_3$). Рассмотрим пример. Мезоны со спином 0:

$$\pi^+ = u\bar{d}, \pi^- = d\bar{u}, \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

Знак минус в последнем выражении – это эффект интерференции.

$$K^+ = u\bar{s}$$

Барионы со спином 1/2:

$$p = uud, n = ddu, \Lambda = uds$$

Барион со спином 3/2:

$$\Delta^{++} = uuu$$

Интерпретация последнего примера потребовала введения нового квантового числа – цвета. Стоит отметить, что на расстояниях $r > r_c \cdot 10^{-13}$ см сильное взаимодействие между нуклонами (протонами и нейтронами) эффективно сводится к обмену пи-мезонами (пионами) π^-, π^+, π^0 с константой связи g_{nNN} , причем:

$$\frac{g_{nNN}^2}{4\pi\hbar c} \simeq 14 \quad (1.7)$$

Константа может быть извлечена из экспериментов. Малые параметры (как, например, постоянная тонкой структуры) не работают, нельзя работать с теорией возмущения. Радиус пион-нуклонного взаимодействия:

$$r_{nNN} \simeq \frac{\hbar}{mc} \simeq 1.5 \cdot 10^{-13} \quad (1.8)$$

Экспериментаторы умеют измерять зарядовый радиус протона, эффективный размер протона за счет распределения в нем электрического заряда.

Фейнмановские диаграммы

Рисунки 1.2 иллюстрируют технику квантовой теории поля при описании электромагнитного взаимодействия. Можно сопоставить конкретным величинам, описывающим процессы электромагнетизма, так называемые диаграммы Фейнмана. Они описывают элементарные амплитуды и наглядно показывают как устроено взаимодействие.

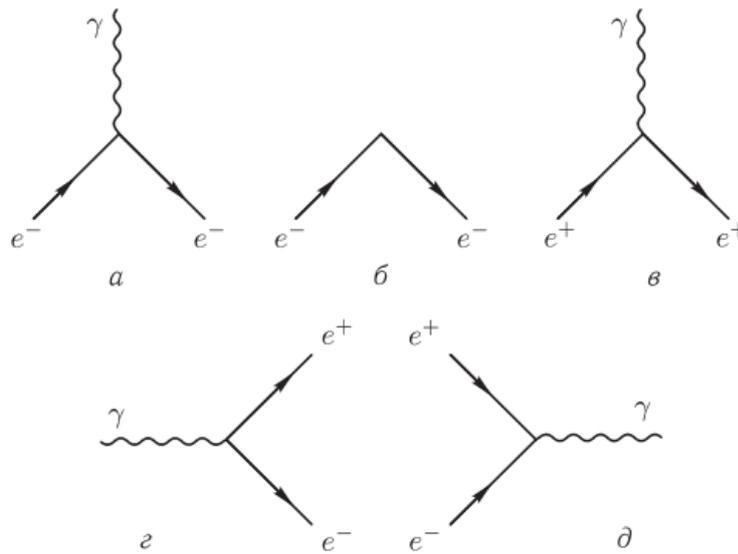


Рис. 1.2. Части фейнмановских диаграмм, описывающие испускание и поглощение фотона электроном (а), позитроном (в), рождение фотоном пары e^+e^- (г), и аннигиляцию пары e^+e^- в фотон (д). Часть рис. а, отвечающая электромагнитному току изображена на рис.б

Волнистые линии означают виртуальные частицы, в рассматриваемом случае – фотон.

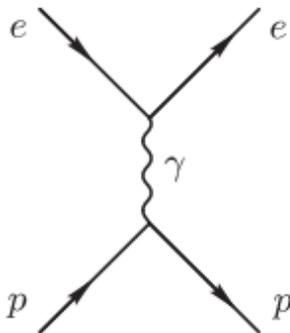


Рис. 1.3. Диаграмма Фейнмана, описывающая упругое рассеяние электрона на протоне

В пределе большой массы протона можно получить вывод известной формулы Резерфорда, а также ввести понятие сечения рассеяния. Данная величина показывает плотность потока, количество зарегистрированных в детекторе электронов.

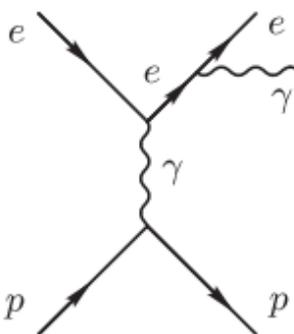


Рис. 1.4. Диаграмма Фейнмана, описывающая неупругое рассеяние электрона на протоне, при котором испускается «тормозной» фотон

Электрон может испустить виртуальный фотон (не наблюдается сам, только его эффект), отсюда появляются поправки.

На диаграмме, изображенной на 1.4 имеются две виртуальные частицы: не только виртуальный фотон, но и виртуальный электрон.

На 1.5 изображен процесс аннигиляции электрона и позитрона в пару $\mu^+\mu^-$. В этом процессе, если рассматривать его в системе центра масс сталкивающихся частиц, где сумма импульсов электрона и позитрона равна нулю, виртуальный фотон не переносит импульса, он переносит лишь энергию.

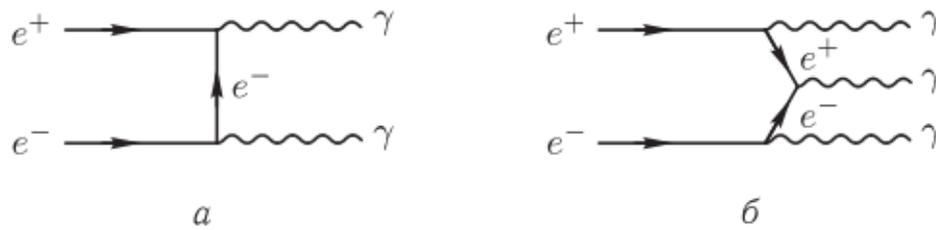


Рис. 1.5. Диаграммы Фейнмана, описывающие аннигиляцию электрона и позитрона в два (а) и три (б) фотона

По мере роста энергии, в этом взаимодействии могут участвовать другие частицы (например, тяжелый Z-бозон).

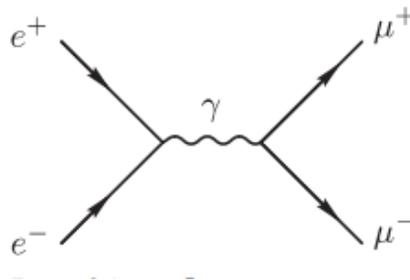


Рис. 1.6. Диаграмма Фейнмана, описывающая аннигиляцию электрона и позитрона в пару мюонов

Подведем итог. Электromагнетизм связан с тем, что заряженные частицы испускают фотон. Характерный масштаб $\alpha = \frac{1}{137}$. В нем всегда участвуют заряженные

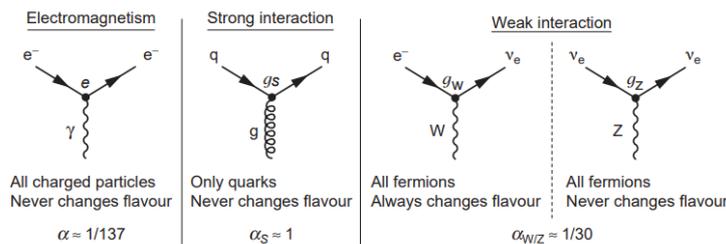


Рис. 1.7. Три типа взаимодействий стандартной модели

частицы, которые несут электрический заряд. При этом, тип частицы не меняется. В сильном же взаимодействии имеется испускание глюонов (на 1.7 изображен в виде пружины). В этом взаимодействии участвуют только кварки. В слабом взаимодействии электрон испускает W-бозон и теряет свой заряд (возникает нейтрино). То

есть меняется тип частицы. Z -бозон – тяжелый аналог фотона. Его может испускать нейтрино, возникает соответствующая константа: $\alpha_{W/Z} = \frac{1}{30}$.

Теперь рассмотрим, как качественно возникает принципиальное отличие характера взаимодействия сильного (за счет обмена глюонами G) взаимодействия. При описании будет использована неабелева калибровочная группа, принципиальное физическое отличие – сами переносчики несут так называемый цветовой заряд. На рис. 1.8 видно, что в обмене могут наблюдаться три или даже четыре взаимодействия.

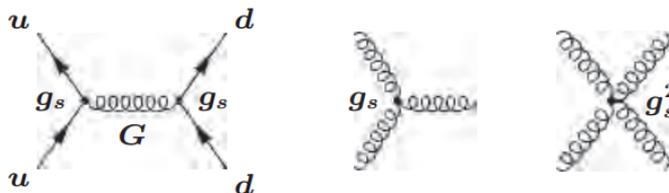


Рис. 1.8. Квантовая хромодинамика

Верхняя левая (кварк-петля) диаграмма на рис. 1.9 приводит к уменьшению эффективного $g_s(Q^2)$ при малом импульсе Q (т.е. на большом расстоянии $r \sim 1/Q$) из-за экранирования заряда, аналогично квантовой хромодинамике.

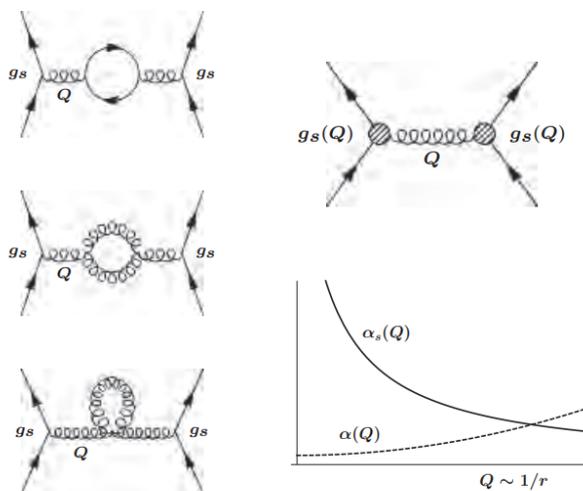


Рис. 1.9. Связи в квантовой хромодинамике. Пунктирная линия – это электродинамический аналог. Q – виртуальный перенос импульса (четырехмерного).

Можно рассматривать как аналог кулоновского взаимодействия, но с радиационными поправками: он может распадаться на кварк-антикварковую пару. Это приводит к уменьшению взаимодействия при увеличении энергии (как в электродинамике).

Нижние левые (глюонные петли) диаграммы имеют противоположное (антиэкранирование) поведение. Они не имеют аналога в квантовой хромодинамике. Справа – набросок значений $\alpha_s(Q^2) = g_s^2(Q^2)/4\pi$ и $\alpha_e(Q^2) = e^2(Q^2)/4\pi$. Связь становится малой (асимптотически свободной) для $|Q| \gg 1$ ГэВ и большой при $|Q| \lesssim 1$ ГэВ.

В теории сильных взаимодействий есть конкуренция между эффектом экранировки (как экранировка электрического заряда) и эффектом антиэкранировки за счет глюонов, несущих цветовой заряд. Рис. 1.10 иллюстрирует, как из фундаментального взаимодействия между кварками посредством обмена глюонов возникает эффективное взаимодействие (взаимодействие Юкавы). Рождается пара кварков и за счет взаимодействия между кварк-антикварком возникает связанное состояние. Далее возникает обмен π^0 . Эффективно обмен идет не глюонами, а их связанным состоянием. Это приводит к большой константе связи.

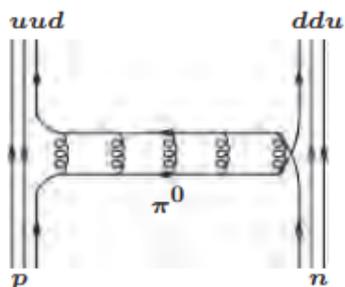


Рис. 1.10. Эффективное взаимодействие Юкавы, обусловленное обменом кварк-антикварк с парой qq^- , взаимодействующей через обмен глюонами

В реальных экспериментах 60х годов рассматривалось рассеивание электронных пучков с высокой энергией на протонах (изображен в виде трех кварков).

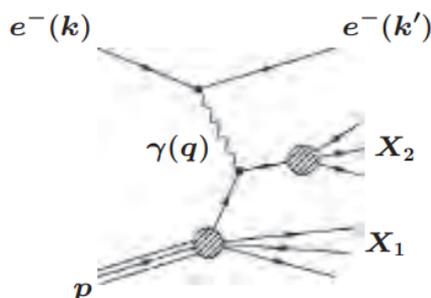


Рис. 1.11. Глубокое неупругое рассеяние

Взаимодействие между лептоном e^- и кварком может быть описано пертурбативно одним фотонным обменом. Однако, распределение кварков в протоне и адронизация оставшихся и рассеянных кварков в ненаблюдаемые адроны $X = X_1 + X_2$ являются непертурбативными. Фотон выбивает из протона большую группу адронов (X). Это называется «глубоко неупругое рассеяние» (рис.1.12). На рис.1.13 показан

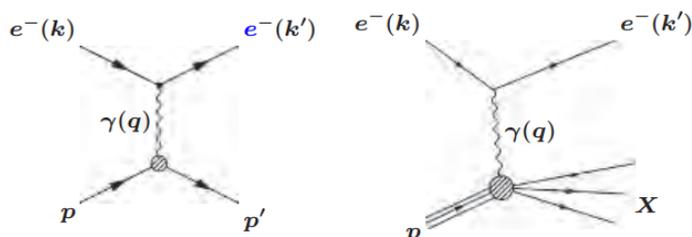


Рис. 1.12. Слева: упругое рассеяние $e^- p \rightarrow p$. Заштрихованный круг представляет эффекты сильных взаимодействий. Справа: глубокое неупругое рассеяние $e^- p \rightarrow X$ аналог рождения мюонной пары. Электрон-позитрон рождают кварк-антикварковую

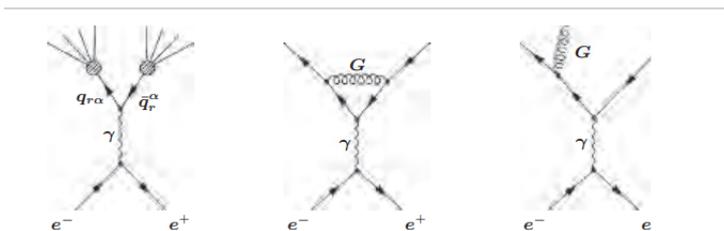


Рис. 1.13. Слева: шарики представляют адронизацию кварков. Справа: поправки квантовой хромодинамики высшего порядка.

пару, затем они рождают из вакуума кварк-антикварковые пары, на опыте в результате вылетают две адронные струи. Эти струи сохраняют информацию о породивших их частицах. На фундаментальном уровне процесс очень сложный. Этот эффект является непертурбативным. За счет того, что кварк начинает взаимодействовать на первоначальном этапе, необходимы поправки. При высоких энергиях может родиться и третья струя, источником которой будет глюон – трехструйное событие.

Реальное производство – рис. 1.14. Воспроизведено по просьбе коллаборации OPAL. Также показаны возможные диаграммы Фейнмана, соответствующие наблюдаемым событиям. В случае четырехструйного производства есть также диаграммы, где оба глюона излучаются из кварков.

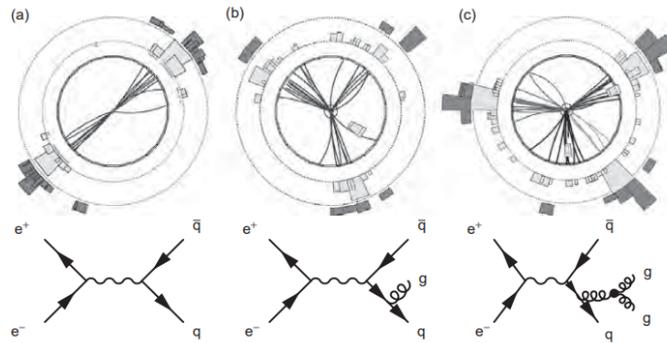


Рис. 1.14. Производство струй при аннигиляции e^+e^- . а) двухструйное событие б) трехструйное событие в) четырехструйное событие

Рассмотрим пример слабых распадов адронов рис. 13.2.

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

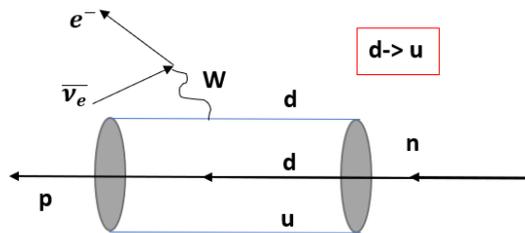


Рис. 1.15. β - распад нейтрона

$$p = uud, n = udd$$

Второй пример – рождение $u\bar{u}$ пары из воздуха. Распад странной частицы.

$$\Lambda = uds, p = uud, \pi^- = \bar{u}d$$

Наблюдаемый процесс:

$$\Lambda \longrightarrow p + \pi^-$$

Рассмотрим схему, показывающую, как была совершена проверка стандартной модели (рис.1.17).

Одна из целей создания большого адронного коллайдера – это открытие бозона Хиггса. в 2012 году был наблюдён процесс, в котором возрождён хиггсовский бозон.

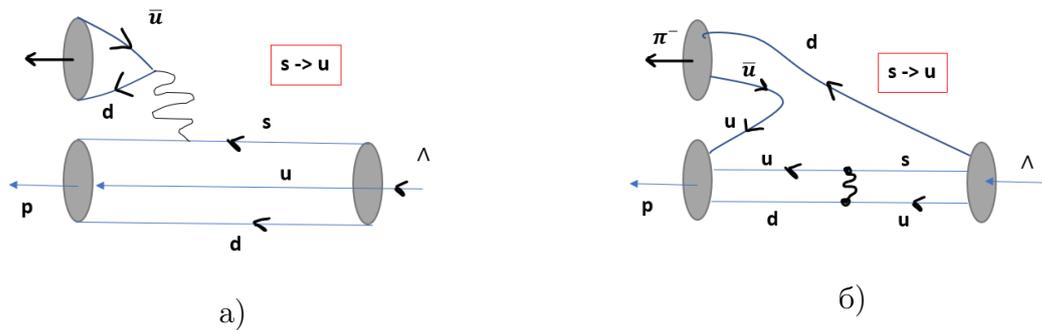


Рис. 1.16. Пример 2

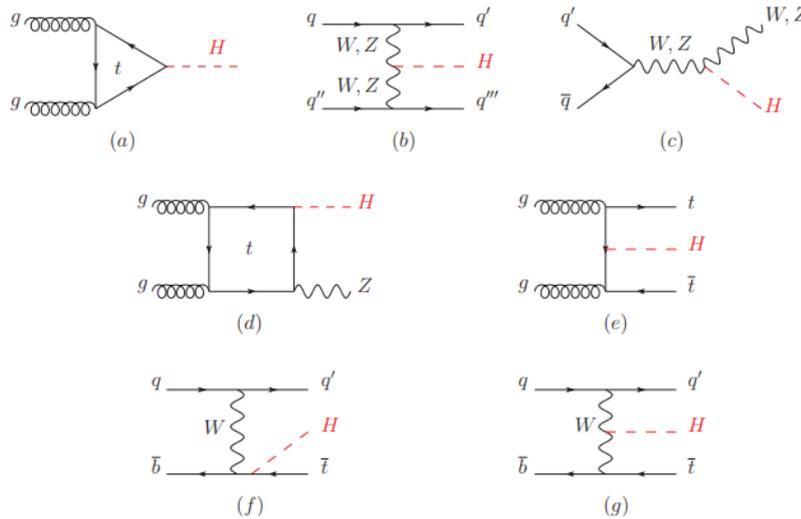


Рис. 1.17. Основные фейнмановские диаграммы высшего порядка, вносящие вклад в производство бозона Хиггса в (а) слиянии глюонов, (б) векторно-бозонном слиянии, (с) хиггс-страхлунге (или связанном производстве с калибровочным бозоном на уровне дерева от кварк-кваркового взаимодействия), (д) связанном производстве с калибровочным бозоном (на уровне петли от глюон-глюонного взаимодействия), (е) ассоциированное производство с парой топ-кварков (существует аналогичная диаграмма для ассоциированного производства с парой нижних кварков), (f-g) производство в ассоциации с одним верхним кварком

Как показывает теория, сам он распадается, но одна из мод его распада – это распад на два фотона. Как показывает теория, чем тяжелее фермион, тем сильнее взаимодействие с бозоном Хиггса. Таким образом, главный механизм рождения показан на рисунке а. На рис. 1.18 показана ведущая диаграмма Фейнмана для рождения бозона Хиггса. Рис. 1.19 показывает, насколько сильно современная стандартная мо-

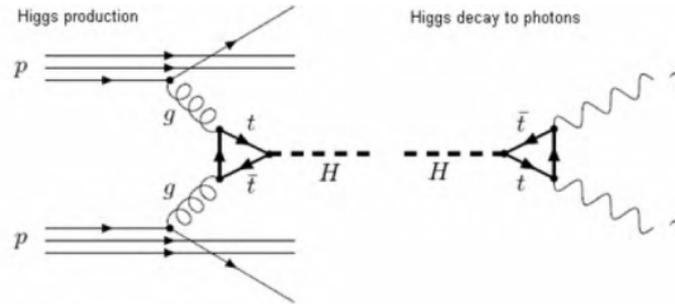


Рис. 1.18. Ведущие диаграммы Фейнмана для канала $H \rightarrow \gamma\gamma$

дель. В электромагнитном секторе она с высокой точностью предсказывает хорошо измеренные на опыте магнитные моменты.

$$\alpha_e^{\text{exp}} = 0.00119 \pm 0.00005 \quad (\text{P. Kusch and H. M. Foley, 1947})$$

$$\alpha_e^{\text{Schwinger}} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.00116\dots \quad (\text{J. Schwinger, 1948, 1949})$$

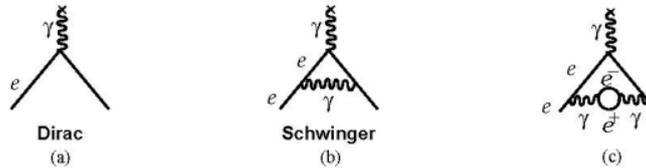


Рис. 1.19. Диаграммы Фейнмана для $g=2$ (а), поправки на излучение низшего порядка, рассчитанные впервые Шредингером (b), вклад поляризации вакуума, который является одним из пяти членов четвертого порядка α^2/π^2

Мюонная аномалия

Измерение ААМ мюона ограничивается его коротким временем жизни: $\tau_\mu = 2.197 \cdot 10^{-6}$ с. Вместо крошечной ловушки Пеннинга для измерения α_μ используется прецессия спина мюона в большом мюонном накопительном кольце. Современное экспериментальное значение (2021): $\alpha_\mu^{\text{exp}} = 1.16592061(41) \cdot 10^{-3}$. Вычисление в рамках Стандартной модели дает (2020): $\alpha_\mu^{\text{SM}} = 1.16591810(43) \cdot 10^{-3}$. Разность значений крайне

мала: $\alpha_{\mu}^{exp} - \alpha_{\mu}^{SM} = (251 \pm 59) \cdot 10^{-11}$. Расхождение между теорией и недавними экспериментами на уровне 4.2σ ! Стандартная модель завершена, однако она не полна. Причина фундаментальная – наблюдаемая в нашей Вселенной плотность энергии не может быть объяснена плотностью только известной материи (она дает вклад только 4%). 75% – это темная материя, ее природа неизвестна.



Лекция 2. Группа Лоренца и её генераторы

Преобразования Лоренца

Группы Лоренца играют фундаментальную роль в теоретической физике, поскольку все законы природы инварианты относительно выбора системы отсчета. Во всех инерциальных системах отсчета уравнение движения выглядит одинаково. По этой причине структура группы Лоренца, будучи достаточно сложной, подробно исследована математиками. Рассмотрим только те свойства, которые будут использоваться в курсе.

Преобразования Лоренца связывают две инерциальные системы отсчета. В одной инерциальной системе отсчета происходит идеализированное точечное событие в момент времени t в точке пространства, которой сопоставляется радиус-вектор \vec{r} . Рассматриваем, как связаны между собой время и координаты этого точечного события в инерциальных системах K и K' . Рассмотрим нерелятивистский случай. Уравнения Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (2.1)$$

инвариантны относительно преобразований Галилея

$$\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t \quad (2.2)$$

отвечающих переходу из одной ИСО K к другой K' (рис. 2.1). Тут мы считаем, что система K' движется с сонаправленными осями к системе K с постоянной скоростью \mathbf{V} . Расстояние между началом систем линейно возрастает со временем:

$$\vec{OO}' = \mathbf{V}t \quad (2.3)$$

Предполагаем также, что $t = t'$, то есть время абсолютно. Имеем закон сложения скоростей (следствие из преобразования Галилея):

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{V}'\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (2.4)$$

Отметим, что \mathbf{v}, \mathbf{v}' относятся к разным системам отсчета. Ускорение оказывается инвариантным относительно выбора инерциальной системы отсчета:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \quad (2.5)$$

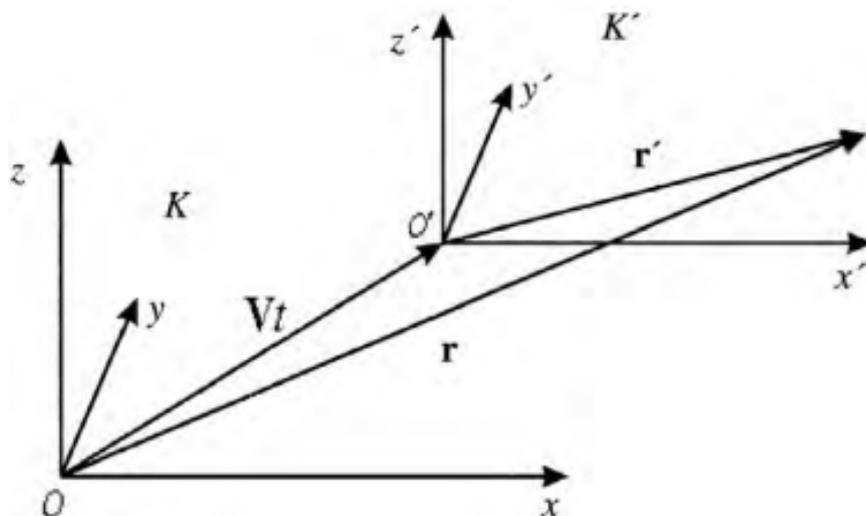


Рис. 2.1. Две инерциальные системы отсчета

Из экспериментов (при сравнительно малых скоростях движения) известно:

$$m' = m, \mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad (2.6)$$

То есть, масса – инвариант, не зависит от системы отсчета. То же относится к силам. Тогда в инерциальной системе отсчета K' получаем тот же вид уравнений, что и в инерциальной системе отсчета K :

$$m' \mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad (2.7)$$

Этим выражается механический принцип относительности Галилея (1632): все механические явления протекают одинаково (при одинаковых начальных условиях) во всех инерциальных системах отсчета. Начальные условия особенно важны в этом принципе.

Однако при развитии эксперимента оказалось, что принцип нарушается для электромагнитных явлений. А. Эйнштейн обобщил принцип относительности Галилея, выдвинув физический принцип относительности (1905), состоящий из двух постулатов:

1. Все физические явления протекают одинаково в различных ИСО при одинаковых начальных условиях;
2. Скорость света c в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от направления и координат точки наблюдения (изотропность и однородность пространства).

Замечание 1. Скорость света в вакууме (точное значение!) равна

$$c = 299792458 \frac{M}{C}$$

Почему же она считается точной? Это обусловлено принятым в 1983 году определением метра: 1 метр – это длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299792458$ секунды.

Замечание 2. 1 секунда – это интервал времени, равный 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (удобно воспроизводить) в покое при температуре 0 К при отсутствии возмущения внешними полями. Покой крайне важен, поскольку если измерять в движении, то частота будет зависеть от скорости – эффект Доплера.

Выведем преобразования Лоренца, обеспечивающие выполнение физического принципа относительности. Будем использовать декартову систему координат. Пусть (x, y, z, t) – координаты и время некоторого физического события, рассматриваемого в ИСО K . В ИСО K' это же событие характеризуется (x', y', z', t') . Найдем преобразования

$$(x, y, z, t) \longrightarrow (x', y', z', t')$$

Они должны быть линейными, что следует из однородности пространства и времени.

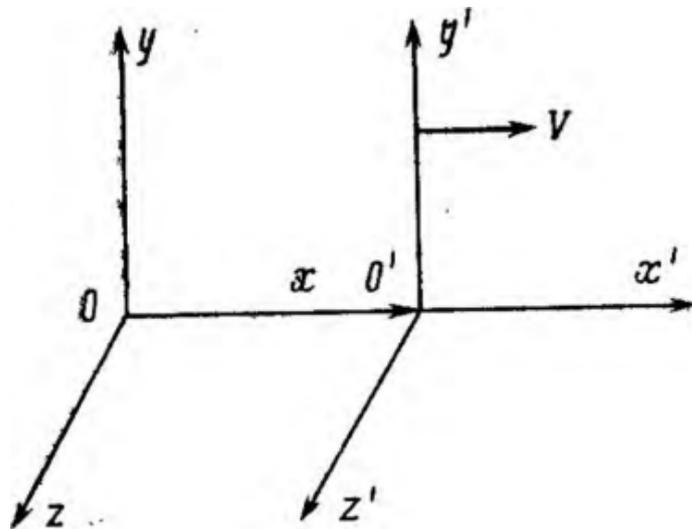


Рис. 2.2. Две системы отсчета для вывода преобразований Лоренца

При выбранной ориентации осей (рис. 2.2) систем K и K' плоскости $y' = 0$ и $z' = 0$ совпадают с плоскостями $y = 0$ и $z = 0$, соответственно. Следовательно y и y' должны

обращаться в нуль одновременно независимо от других координат времени t . Это возможно только, если

$$y = ky', k = const$$

Ввиду равноправия систем K и K' обратное преобразование должно иметь вид

$$y' = ky$$

Отсюда следует

$$k = 1, y = y'z = z'$$

Отсюда вытекают соотношения

$$x' = a_1x + b_1t, t' = a_2x + b_2t \quad (2.8)$$

Точка O' имеет координату $x' = 0$ в системе K' и $x = Vt$ в системе K . Это возможно только при выполнении соотношения

$$x' = \Gamma(x - Vt), \Gamma = const \quad (2.9)$$

Аналогично, рассмотрев точку O :

$$x' = \Gamma(x' - Vt') \quad (2.10)$$

с тем же коэффициентом Γ в силу равноправия систем K и K' . Для определения Γ используют второй постулат из ФПО: $c = const$. Пусть в момент времени $t = t' = 0$ в направлении $Ox || O'x'$ посылается световой сигнал, регистрируемый в системе K в точке x в момент времени t , а в K' — (x', t') . Тогда имеем:

$$x = ct, x' = ct' \quad (2.11)$$

Подставим это в предыдущие формулы преобразований:

$$x' = ct' = \Gamma(ct - Vt) \quad (2.12)$$

$$x = ct = \Gamma(ct' - Vt') \quad (2.13)$$

Перемножив эти соотношения получим (после деления на tt'):

$$c^2 = \Gamma^2(c^2 - V^2) \quad (2.14)$$

Откуда:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.15)$$

Итак, мы получили:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.16)$$

Формулы преобразования времени найдем, исключив из предыдущих формул x' и разрешив получившееся уравнение относительно t' :

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.17)$$

Теперь исключим x :

$$t = \frac{t' + Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.18)$$

Итак, преобразование $K \rightarrow K'$ имеет вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, y = y', z' = z, t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.19)$$

Можно заменить $\beta = \frac{V}{c}$.

Обратное преобразование $K' \rightarrow K$ получается путем перестановки штрихов и замены $V \rightarrow -V$. Это обусловлено равноправием систем и тем, что $K'(K)$ имеет скорость $\mathbf{V}(-\mathbf{V})$ относительно $K(K')$.

Полученные преобразования Лоренца можно записать в виде гиперболического поворота в плоскости (x, ct) :

$$x' = xch\psi - ctsh\psi, ct' = -xsh\psi + ctch\psi \quad (2.20)$$

Параметр ψ – быстрота (не путать со скоростью), он связан со скоростью V согласно соотношениям:

$$th\psi = \frac{V}{c} = \beta, sh\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ch\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma \quad (2.21)$$

Теперь обобщим преобразования на тот случай, когда скорость имеет произвольное направление (оси по-прежнему сонаправлены). Пусть направление скорости задается единичным вектором: $\mathbf{n} = \mathbf{V}/V$. Разложим радиус-вектор на продольную и поперечную компоненты.

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \Gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V}t), \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, ct' = \Gamma(ct - \frac{1}{c}\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.22)$$

Использовано, что

$$\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}), \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_{\perp} = 0 \quad (2.23)$$

Для полного радиус-вектора $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ находим:

$$\mathbf{r}' = \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + (\Gamma - 1)\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \quad (2.24)$$

При малых скоростях повторяем преобразования Галилея. Запишем преобразования Лоренца для произвольного направления скорости через быстроту ψ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(ch\psi - 1) - ctsh\psi]\mathbf{n}, ct' = ctch\psi - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}sh\psi, \mathbf{V} = cnth\psi \quad (2.25)$$

Группа Лоренца

Перейдем к математическому оформлению преобразований Лоренца с точки зрения теории групп. Преобразование Лоренца оставляет инвариантной величину $c^2t^2 - \mathbf{r}^2$:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} [(ct - \frac{V}{c}x)^2 - (x - Vt)^2] - y^2 - z^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.26)$$

Известная геометрическая интерпретация – 4-мерное псевдоевклидово пространство Минковского (1908):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2 \quad (2.27)$$

где метрический тензор (в декартовых координатах):

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.28)$$

Использовано эйнштейновское соглашение о суммировании по индексам $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ и обозначение контравариантных компонент 4-вектора:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}) \quad (2.29)$$

В сокращенных обозначениях запишем, что преобразование Лоренца представляет собой линейное однородное преобразование в пространстве Минковского:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu} \quad (2.30)$$

которое сохраняет скалярное произведение:

$$x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x' \cdot x' = g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = g_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha x^\mu \Lambda_\nu^\beta x^\nu \quad (2.31)$$

Хотим, чтобы не было зависимости от осей, как и в трехмерии. Из этого соотношения следует условие ждя матричных элементов ПЛ:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta = g_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Получили первое фундаментальное условие для матричных элементов преобразований Лоренца. Введем матрицы

$$g = (g_{\mu\nu}), \Lambda = \Lambda_\mu^\nu, \Lambda^T = (\Lambda_\mu^\nu) \quad (2.33)$$

и запишем условие псевдоортогональности (УПО) матриц Лоренца в виде:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.34)$$

ПЛ образуют группу, называемую группой Лоренца (ГЛ), элементы которой псевдоортогональны матрицы Λ :

$$L = \Lambda : \Lambda^T g \Lambda = g \quad (2.35)$$

Умножив УПО слева на матрицу $g^{-1} = (g^{\mu\nu})$, получим обратную матрицу ПЛ:

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g \quad (2.36)$$

Структура ГЛ такова:

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow \quad (2.37)$$

$$L_+^\uparrow = \Lambda : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 \geq +1 \quad (2.38)$$

$$L_-^\uparrow = \Lambda : \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \geq +1 \quad (2.39)$$

$$L_+^\downarrow = \Lambda : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (2.40)$$

$$L_-^\downarrow = \Lambda : \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (2.41)$$

$\det \Lambda$ – определитель матрицы.

Классификация ПЛ основана на свойствах матриц Λ , следующих из УПО:

$$\det \Lambda^T \det g \det \Lambda = \det g, (\det \Lambda)^2 = 1, \det \Lambda = \pm 1 \quad (2.42)$$

Использовано, что определитель транспонированной матрицы совпадает с определителем исходной. Распишем исходное для матричных элементов условие по компонентам:

$$g_{00}(\Lambda_0^0)^2 + \sum_{k=1}^3 g_{kk}(\Lambda_0^k)^2 = g_{00} = 1, g_{kk} = -1 \quad (2.43)$$

$$(\Lambda_0^0)^2 \geq 1, \Lambda_0^0 \geq +1, \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (2.44)$$

Из 4 классов ПЛ только L_+^\uparrow образуют группу, так как содержат единичный элемент $I = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Эта подгруппа общей L называется собственной ортохронной группой Лоренца и обозначается обычно в математике $SO(3, 1)$.

Остальные три класса (не имеют единичного элемента) представимы в виде:

$$L_+^\downarrow = \Lambda_T L_+^\uparrow L_-^\uparrow = \Lambda_P L_+^\uparrow L_-^\downarrow = \Lambda_{PT} L_+^\uparrow \quad (2.45)$$

$$\Lambda_T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \Lambda_T x = (-x^0, \mathbf{r}) \quad (2.46)$$

$$\Lambda_P = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \Lambda_P x = (x^0, -\mathbf{r}) \quad (2.47)$$

$$\Lambda_{PT} = \Lambda_P \Lambda_T = \text{diag}(-1, -1, -1, -1), \Lambda_{PT} x = (-x^0, -\mathbf{r}) = -x \quad (2.48)$$

Λ_T – обращение времени. Λ_P – переход от правой к левой системе координат. Λ_{PT} – меняет весь радиус-вектор. Эти преобразования играют фундаментальную роль в физике, показывают, существуют ли обратные процессы.

Группа L_+^\uparrow относится к классу групп Ли, элементы которых являются аналитическими функциями конечного числа параметров. Эта группа 6-параметрическая, так как ее любой элемент можно представить в виде произведения

$$\Lambda = \Lambda_R(\boldsymbol{\theta}\mathbf{n})\Lambda_B(\boldsymbol{\theta}\mathbf{V}) \quad (2.49)$$

где $\Lambda_B(\boldsymbol{\theta}\mathbf{V})$ – чистое ПЛ (без вращения), называемое бустом, $\Lambda_R(\boldsymbol{\theta}\mathbf{n})$ – чистое 3-мерное вращение координатной системы на угол $\boldsymbol{\theta}$ вокруг оси, заданной единичным вектором \mathbf{n} .

Элемент группы Ли представляется в виде экспоненты от линейной комбинации генераторов (образующих) X_a группы:

$$\Lambda(\boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\sum_{a=1}^6 \boldsymbol{\omega}^a X_a\right), X_a = \left.\frac{\partial \Lambda(\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\omega}^a}\right|_{\boldsymbol{\omega}=1} \quad (2.50)$$

Генераторы группы Лоренца

Найдем явный вид генераторов группы L_+^\uparrow , используя УПО. Воспользуемся условием ортогональности, расписанным по компонентам. Имеем (суммирование по параметрам ω^a подразумевается)

$$g_{\alpha\beta}[\delta_\mu^\alpha + \omega^a(X_a)_\mu^\alpha + O(\omega^2)][\delta_\nu^\beta + \omega^b(X_b)_\nu^\beta + O(\omega^2)] = g_{\mu\nu} \quad (2.51)$$

Отсюда получаем

$$\omega^a[(X_a)_{\nu\mu} + (X_a)_{\mu\nu}] = 0 \quad (2.52)$$

Параметризация такая, что при $\omega = 0, \Lambda = 1$. Элемент группы Ли может быть восстановлен преобразованием в окрестности тождественного. δ – символ Кронекера. Считается, что

$$(X_a)_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}(X_a)_\nu^\alpha \quad (2.53)$$

Нужно сделать свертку с помощью метрического тензора. Ввиду независимости параметров ω^a отсюда следует условие антисимметричности:

$$(X_a)_{\mu\nu} = -(X_a)_{\nu\mu} \quad (2.54)$$

Индекс a пробегает значения от единицы до шестерки, перебирая частные преобразования в плоскостях. Для удобства введем 2-индексную нумерацию параметров ($a \rightarrow \alpha\beta$) так, что

$$(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -(X_{\beta\alpha})_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

Из двух условий антисимметричности по парам индексов следует, что

$$(X_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = C(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}), C = const \quad (2.56)$$

Или можно записать:

$$X_{\alpha\beta\nu}^\mu = C(\delta_\alpha^\mu g_{\beta\nu} - \delta_\beta^\mu g_{\alpha\nu}) \quad (2.57)$$

Генераторы не зависят от конкретных параметров, а отражают геометрическую сущность, поэтому используем квадратичные комбинации.

Это должно быть выполнено для любого преобразования, рассмотрим частный случай. Численный коэффициент C определяем, рассмотрев специальное ПЛ – буст вдоль оси Ox (с него мы начинали):

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\psi & -sh\psi & 0 & 0 \\ -sh\psi & ch\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Отсюда находим соответствующий генератор:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Следовательно,

$$(X_{01})_1^0 = -1 = C\delta_0^0 g_{11}, C = 1 \quad (2.60)$$

Итак, генераторы Лоренца имеют вид:

$$X_{\alpha\beta}^\mu = \delta_\alpha^\mu g_{\beta\nu} - \delta_\beta^\mu g_{\alpha\nu} \quad (2.61)$$

Рассмотрим группу вращений $SO(3)$ 3-мерного евклидова пространства R^3 как подгруппу группы Лоренца L_+^\uparrow . Ее элементы Λ_R можно представить в виде:

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

где $R = (R_{ik})$ – ортогональная 3×3 -матрица: $R^T R = 1, \det R = 1$.

Найдем генераторы $SO(3)$ прямым расчетом в пространстве R^3 , рассмотрев поворот радиус-вектора \mathbf{r} на малый угол θ вокруг оси \mathbf{n} :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}, x^{k'} = x^k + \theta \varepsilon_{klm} n^l x^m \quad (2.63)$$

ε_{klm} – известный символ Леви-Чивита.

$$\delta x^k = \omega^l (X_l^k)_m x^m, \omega^l = \theta n^l, (X_l^k)_m = \varepsilon_{klm} = -\varepsilon_{lkm} \quad (2.64)$$

Введем снова 2-индексные обозначения:

$$X_{pq} = \varepsilon_{pql} X_l, X_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lpq} X_{pq} \quad (2.65)$$

откуда следует (с учетом известного тождества для ε -символов Леви-Чивита) выражение для матричных элементов генераторов в виде:

$$X_{pqt}^k = -\varepsilon_{pql} \varepsilon_{kml} = -\delta_{pk} \delta_{qt} + \delta_{pt} \delta_{kq} \quad (2.66)$$

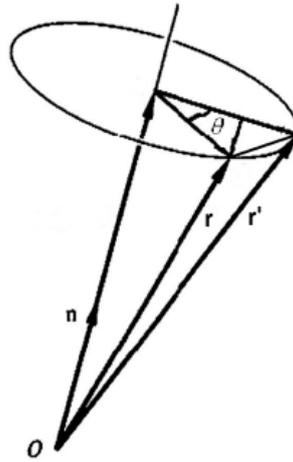


Рис. 2.3. Геометрическая иллюстрация

С учетом

$$\delta_{pk} = \delta_p^k, \delta_{qm} = -g_{qm} \quad (2.67)$$

находим генераторы группы $SO(3)$ в виде:

$$(X_{pq})_m^k = \delta_p^k g_{qm} - \delta_q^k g_{pm} \quad (2.68)$$

что совпадает по структуре с генераторами группы Лоренца, как и должно быть. Но тут использовались только пространственные координаты.

Замечание. Конечное вращение имеет вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \times \mathbf{r})(1 - \cos \theta) + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \theta \quad (2.69)$$

Это легко можно проверить из геометрических соображений (рис. 2.3).

Принцип причинности

Рассмотрим два события А и В. Квадрат интервала между ними в пространстве Минковского M^4 :

$$s_{BA}^2 = (x_B - x_A)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2 \quad (2.70)$$

так как скалярное произведение 4-векторов определено в виде:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (2.71)$$

Заметим, что для любого 4-вектора имеем:

$$a^\mu = (a^0, \mathbf{a}) = g^{\mu\nu} a_\nu, a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\mathbf{a}), a^0 = a_0, a_k = -a^k \quad (2.72)$$

$$a^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} a^{\nu}, a'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} a_{\nu}, \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda_{\beta}^{\alpha} g^{\beta\nu}, \tilde{\Lambda} = g \Lambda g^{-1} = (\Lambda^T)^{-1} \quad (2.73)$$

Здесь

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1), g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (2.74)$$

Классификация 4-интервалов:

1. $s_{BA}^2 > 0$: времениподобный (существует инерциальная система отсчета, где $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A$, то есть два события происходят в одной точке);
2. $s_{BA}^2 < 0$: пространственноподобный (существует инерциальная система отсчета, где $t_B = t_A$), то есть события происходят одновременно;
3. $s_{BA}^2 = 0$: изотропный, или светоподобный (в любой инерциальной системе отсчета $|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = c|t_B - t_A|$).

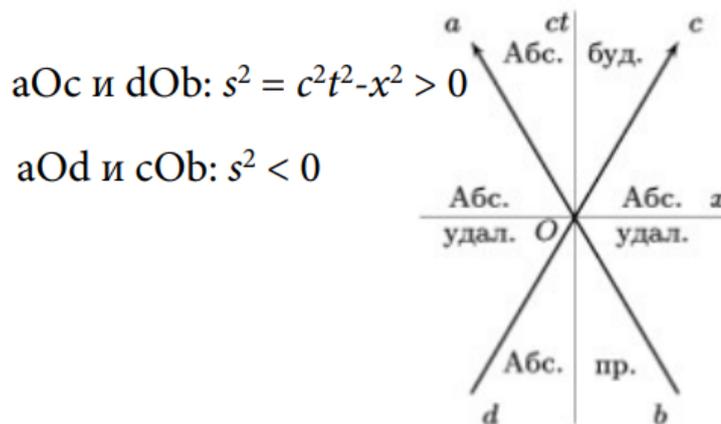


Рис. 2.4. Упрощенная демонстрация 4-интервалов

Если А и В – события, относящиеся к одной частице, движущейся со скоростью $\mathbf{v}(t)$ в заданной инерциальной системе отсчета, то

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) dt^2 > 0 \quad (2.75)$$

поскольку $|\mathbf{v}| < c$. Следовательно, для частицы 4-интервал всегда (в любой инерциальной системе отсчета) времениподобен.

Рассмотрим, как обеспечивается выполнение принципа причинности. Пусть А – причина события В. Тогда в инерциальной системе отсчета должно быть $x^0 = c(t_B - t_A) > 0$. Обозначим разность пространственных координат $x^k = x_B^k - x_A^k$, тогда имеем для причинно связанных событий времениподобный интервал (утверждаем):

$$x^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 > 0 \quad (2.76)$$

Покажем, что знак x^0 – это инвариант преобразований Лоренца (из группы L_+^{\uparrow}).

Тогда имеем:

$$x^{0'} = \Lambda_0^0 x^0 + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^0 x^k \quad (2.77)$$

Из условия псевдоортогональности матриц Лоренца следует:

$$g^{\alpha\beta} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = g^{\mu\nu} \quad (2.78)$$

Положим $\mu = \nu = 0$. Тогда

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda_k^0)^2 = 1, (\Lambda_0^0)^2 > \sum_{k=1}^3 (\Lambda_k^0)^2 \quad (2.79)$$

В силу $(x^0)^2 > \sum_{k=1}^3 (x^k)^2$ и неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_k \Lambda_k^0 x^k\right)^2 \leq \left(\sum_k (\Lambda_k^0)^2\right) \left(\sum_k (x^k)^2\right) \quad (2.80)$$

Получаем

$$|\Lambda_0^0 x^0| > \left|\sum_k \Lambda_k^0 x^k\right| \quad (2.81)$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{sgn} x^{0'} = \operatorname{sgn} x^0 \quad (2.82)$$

Это и означает выполнение принципа причинности: в любой инерциальной системе отсчета событие А происходит раньше события В (причина предшествует следствию).

Алгебра Ли группы Лоренца

Вместо исходных генераторов введем умноженные на мнимую единицу. Генераторы группы образуют базис алгебры Ли. Введем эрмитовы генераторы $L_a = iX_a$. Тогда коммутатор двух генераторов:

$$[L_a, L_b] = i f_{abc} L_c \quad (2.83)$$

где коэффициенты f_{abc} , антисимметричные по всем трем индексам, называются структурными постоянными группы (структурными постоянными алгебры Ли). Коммутатор оказывается линейной комбинацией коммутаторов – важное свойство групп Ли. Для группы Лоренца имеем

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + i g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - i g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - i g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} \quad (2.84)$$

Умножая строки на столбцы можно получить такую линейную комбинацию. Матричные элементы имеют вид:

$$(L_{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha} = i(\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\nu\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\mu\beta}) \quad (2.85)$$

Эти генераторы разделим на генераторы 3-мерных поворотов и бусты:

$$J_l = \frac{1}{2}\epsilon_{ljk}L_{jk}, K_l = L_{0l} \quad (2.86)$$

Тогда получим:

$$[J_l, J_j] = i\epsilon_{ljk}J_k \quad (2.87)$$

$$[K_l, K_j] = -i\epsilon_{ljk}J_k \quad (2.88)$$

$$[J_l, K_j] = i\epsilon_{ljk}K_k \quad (2.89)$$

Если совершить два буста вдоль разных направлений, получим в результате дополнительный разворот осей – известная задача электродинамики. Чтобы представить алгебру в виде исходной, введем неэрмитовы операторы N нелинейно связанные друг с другом:

$$N_l = \frac{1}{2}(J_l + iK_l), N_l^+ = \frac{1}{2}(J_l - iK_l) \quad (2.90)$$

Эти операторы независимо подчиняются алгебре Ли группы $SU(2)$:

$$[N_l, N_j^+] = 0 \quad (2.91)$$

$$[N_l, N_j] = i\epsilon_{ljk}N_k \quad (2.92)$$

$$[N_j^+, N_j^+] = i\epsilon_{ljk}N_k^+ \quad (2.93)$$

Замечание. Существует гомоморфизм между группами $SO(2)$ и $SO(3)$ – каждому элементу одной группы однозначно соответствует элемент второй группы. В обратную сторону – двухзначность. То есть, группа $SO(2)$ более фундаментальна, ее называют накрывающей. Из теории представлений группы (конкретное пространство, в котором действуют преобразования из групп) $SU(2)$ (в физике она используется для описания спина частиц) известно, что операторами Каземира (они коммутируют со всеми генераторами группы) являются $\mathbf{N}^2 = \sum_{l=1}^3 N_l^2$ и $\mathbf{N}^+ \cdot \mathbf{N} = \sum_{l=1}^3 N_l^+ N_l$. Физическая интерпретация: квадрат момента. Можно показать, что собственные значения могут быть либо целыми, либо полуцелыми и соответственно равны $n(n+1), m(m+1)$, где $n, m = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Они описывают частицы с определенным спином. Например,

при описании электрона со спином $1/2$ используем группу $SU(2)$ и $n = 1/2$. Неприводимое представление (в этом пространстве представления нельзя выделить инвариантных подпространств, в которых действует группа) группы Лоренца определяется парой чисел (n, m) , а в силу соотношения $J_l = N_l + N_l^+$ спин представления (описывающего спиновые состояния частицы) равен $n + m$ в единицах \hbar .

Указанные две группы $SU(2)$ на самом деле не являются независимыми, так как операция четности переводит одну группу в другую: $J_l \rightarrow J_l, K_l \rightarrow -K_l$ (аксиальный и полярный 3-векторы), и операция эрмитова сопряжения переставляет N_l и N_l^+ .

Группа $SO(2)$ является накрывающей $SO(3)$. На самом деле, скажем, что есть соответствие между преобразованиями в двумерном комплексном пространстве и преобразованием в четырехмерном пространстве Минковского. Группа $SO(2)$ – группа унитарных матриц. Теперь, убирая условия унитарности и оставляя условие единичности определителя, получаем группу, которая расширяет группу $SO(2)$ – $SL(2, \mathbb{C})$. Произвольный элемент такой матрицы можно представить как произведение унитарной матрицы на эрмитову. Таким образом, можно сопоставить преобразования из группы $SL(2, \mathbb{C})$ преобразованию Минковского. Это будем использовать для описания, например, электронов.

Лекция 3. Метод Лагранжа и вариационный принцип в теории поля. Метод Гамильтона в теории поля

Алгебра Ли группы Лоренца. Продолжение

На прошлой лекции рассмотрели группу Лоренца в пространстве Минковского:

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (3.1)$$

Поскольку группа Лоренца является группой Ли, то матрицы могут быть представлены в виде экспоненты от линейной комбинации группы, явный вид был получен. Теперь рассмотрим представление группы не в координатном пространстве, а в пространстве полевых функций, заданных на M^4 :

$$u^{a'}(x') = D_b^a(\Lambda) u^b(x), x' = \Lambda x \quad (3.2)$$

a – число компонент множества координат, геометрические свойства зависят от конкретного поля. Матрица $D_b^a(\Lambda)$ определяется исходным преобразованием, она реализует представление группы в пространстве полевых функций. Ее конкретный вид зависит от того, по какому конкретному представлению группа Лоренца преобразует полевые функции. В простейшем случае скалярного поля (однокомпонентного) имеем:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (3.3)$$

Поле после преобразования (со штрихом) как функция преобразованных координат равняется исходному полю. В этом смысле оно не преобразуется. Для наглядной интерпретации рассмотрим простой трехмерный случай. Пусть имеется сосуд с жидкостью, мы можем описывать жидкость, задавая в каждой точке давление, скорость, другие характеристики. Давление – скалярная функция. Пусть сосуд повернули или перенесли в другую часть пространства. При этом поле само по себе занимает другую область, поэтому оно обозначается штрихом. Само значение давления однако в точке осталось неизменным. Более сложный случай – векторное поле пространства Минковского. Возвращаемся к частному случаю скалярного поля. Можно выразить x через обратную матрицу:

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda x) = D(\Lambda)\phi(x) \quad (3.4)$$

Форма меняется, аргумент неизменен. В этом смысле понимается скалярность. Группа непрерывных преобразований, поэтому достаточно рассмотреть свойства инфинитезимальных преобразований:

$$\phi'(x') = \phi(x^\mu - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(X_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu) = \phi(x) - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(X_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) + O(\omega^2) \quad (3.5)$$

Обозначение для оператора дифференцирования – четырехмерное обобщение оператора набла:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Введена $1/2$, потому что считаем, что α, β неупорядоченны. Далее разложили в ряд Тейлора. С учетом явного вида генераторов в координатном представлении (вывели на лекции №2)

$$(X_{\alpha\beta})^\mu_\nu = \delta_\alpha^\mu g_{\beta\nu} - \delta_\beta^\mu g_{\alpha\nu} \quad (3.6)$$

получаем генераторы группы Лоренца в пространстве скалярных функций:

$$L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) \quad (3.7)$$

По свойству группы Ли для конечных преобразований находим явный вид оператора, преобразующего скалярное поле:

$$\phi'(x) = \exp(-\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta})\phi(x) \quad (3.8)$$

Алгебра Ли (коммутатор двух дифференциальных операторов) выглядит так же, как и первоначальная алгебра, записанная в координатном представлении. Сама алгебра Ли инвариантна относительно выбора представления, все алгебраические свойства коммутаторов одинаковы.

$L_{\alpha\beta}$ подчиняется той же алгебре Ли, что и генераторы в исходном представлении (координатном).

Для группы $SO(3)$ подгруппы группы Лоренца (чистые вращения в евклидовом пространстве) отсюда получим:

$$\phi'(\mathbf{r}) = \exp(-i\boldsymbol{\theta}\mathbf{n}\cdot\mathbf{L})\phi(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{L} = (\frac{1}{2}\epsilon_{ljk}L_{jk}) = -i\mathbf{r}\times\nabla \quad (3.10)$$

$\boldsymbol{\theta}$ – это угол поворота вокруг оси, заданной единичным вектором \mathbf{n} . Здесь использовались только пространственные индексы. Ввели двухиндексное обозначение, но для

интерпретации в трехмерном пространстве удобнее сопоставлять векторы этому дифференциальному косо-симметричному оператору. При преобразовании r -четности вектор \mathbf{L} не меняет свой знак, он ведет себя как аксиальный вектор угловой скорости. По своей сути, полученный оператор является оператором момента импульса (в единицах \hbar) частицы в квантовой механике, причем оператор $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ представляет собой оператор импульса – генератор группы трансляций:

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\right)\phi(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

так как в обычных единицах $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ Мы записали разложение Тейлора и собрали его в виде экспоненты.

Метод Лагранжа и вариационный принцип в теории поля

Была введена теория поля, которая задается набором функций, преобразующихся по представлению группы Лоренца. Это было сделано для того, чтобы законы движения полевых объектов выглядели одинаково во всех инерциальных системах отсчета. До сих пор, как показывает эксперимент, законы лоренц-инвариантны. Строго говоря, следует различать понятия «лоренц-инвариантность» и «лоренц-коинвариантность». Форма законов одинакова, но конкретные выражения зависят от выбора системы отсчета. Записи в терминах полевых функций, которые преобразуются по определенному представлению, одинаковы.

Покажем, что теория поля системы – это обобщение механической системы с конечным числом степеней свободы. Для наглядности рассмотрим частный случай, а именно механическую систему – кольцевую цепочку N материальных точек массой m , связанных пружинками жёсткости k (рис. 3.1). Длина кольца фиксирована. Рассмотрим континуальный предел и покажем, что в итоге получим колечко такого же размера (стержень свернут в кольцо).

Пусть сначала пружинки свободны, в этом состоянии можно задать координаты точек. Удобнее использовать не абсолютное положение, а отклонение каждой частицы от положения равновесия. Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = T - U = \sum_{n=1}^N \left[\frac{m}{2} \dot{u}_n^2 - \frac{k}{2} (u_{n+1} - u_n)^2 \right] \quad (3.12)$$

Потенциальная энергия – изменение длины при деформации. Из механики знаем, что в методе Лагранжа вводится действие, зафиксировав два момента времени. Вари-

ация действия $S[u] = \int_{t_1}^{t_2} dt L$ (вариационная производная) дает уравнения Лагранжа:

$$\delta S \delta u_n = \frac{\partial L}{\partial u_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_n} \right) = 0 \quad (3.13)$$

или в явном виде (определяется тем, что ограничиваемся лагранжианами, которые зависят от координат и первых производных по времени):

$$m \ddot{u}_n = k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1}) \quad (3.14)$$

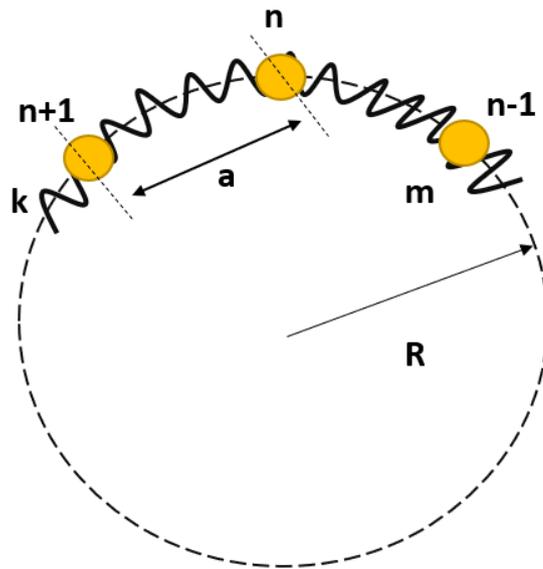


Рис. 3.1. Механическая система

Был использован закон Гука. Сделаем предельный переход к непрерывному распределению (от дискретной цепочки к сплошному кольцу):

$$m \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty \quad (3.15)$$

так, что

$$\rho = \frac{m}{a} = \text{const}, \varepsilon = ka = \text{const}$$

$$Na = 2\pi R = \text{const}$$

$N \longrightarrow \infty$, то есть бесконечное число степеней свободы.

Теперь переобозначим координаты механической системы:

$$u_n(t) = u(t, x_n) \longrightarrow u(t, x), na \longrightarrow x \quad (3.16)$$

Тогда

$$u_n - u_{n-1} \longrightarrow u(t, x) - u(t, x - a) = a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(a^3) \quad (3.17)$$

$$(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) \longrightarrow a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ddot{u}_n \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

В результате получаем волновое уравнение, описывающее распространение возмущений в сплошной среде (тонком кольце, пренебрегаем толщиной):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

или, введя скорость распространения $v = (\varepsilon/\rho)^{1/2}$ получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

ε – это модуль Юнга. Общее решение имеет вид суммы двух импульсов деформации, бегущих в противоположных направлениях:

$$u(t, x) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (3.21)$$

Перейдем к пределу в лагранжиане:

$$L = \sum_n(\dots) \longrightarrow \int dn(\dots) = \frac{1}{a} \int dx \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{k}{2} a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

Лагранжиан превращается в функционал. В пределе:

$$L = \int dx \mathcal{L}, \mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (3.23)$$

\mathcal{L} – лагранжева плотность. В действие

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L} \quad (3.24)$$

переменные t и x входят равноправно.

Видно, что волновое уравнение следует из уравнения Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} \right) = 0 \quad (3.25)$$

так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.26)$$

Сделаем обобщение на n -мерное пространство (плоское):

$$S = \int_D d^n x \mathcal{L} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, x \right), x = (x^\mu) = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1}), u = (u^a), a = \overline{1, N} \quad (3.27)$$

Рассмотрим вариацию полевых функций:

$$u^a(x) \longrightarrow u^a(x) + \delta u^a(x) \quad (3.28)$$

причем на границе области $\Gamma = \partial D$ вариации

$$\delta u^a|_{\Gamma} = 0 \quad (3.29)$$

N – чисто компонентов функции. Считаем что вариации на границе равны нулю (в механике это называлось изохронность вариации). Обозначим, как и раньше $\partial_{\mu} u^a = \frac{\partial u^a}{\partial x^{\mu}}$. Варьируем действие, производим выкладки для механики, обобщенные на непрерывность. С точки зрения механики: теория поля – система с бесконечным числом степеней свободы.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} \delta u^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \right) = \quad (3.30) \\ \delta S &= \int d^n x \left[\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \delta u^a \right) - \delta u^a \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \right) + \delta u^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} \right] \end{aligned}$$

где учтено, что для вариации формы функции ($\delta x = 0$) имеем $\delta(\partial_{\mu} u^a) = \partial_{\mu}(\delta u^a)$, причем подразумевается суммирование по a и μ . В силу $\delta u^a|_{\Gamma} = 0$ получаем

$$\int_D d^n x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \delta u^a \right) = \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \delta u^a = 0 \quad (3.31)$$

и вариация действия принимает вид:

$$\delta S = \int_D d^n x \sum_{a=1}^N \delta u^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \text{partial}_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \right) \right] \quad (3.32)$$

Потребуем, чтобы на решениях уравнений движения действие было стационарным: $\delta S = 0$. В механике аналогичный принцип называли принципом наименьшего действия, в нашем случае (в теории поля) правильнее называть принцип именно стационарным. Тогда в силу произвольности области D и независимости вариаций получаем уравнения Лагранжа в теории поля (в силу знаменитой леммы вариационного исчисления):

$$\frac{\delta S}{\delta u^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} u^a)} \right) = 0 \quad (3.33)$$

Получили обобщение простого примера с цепочкой для N компонент.

Замечание.

Уравнения движения не изменятся, если лагранжиан подвергнуть преобразованию, то есть лагранжиан определен неоднозначно:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_{\mu} f^{\mu}(u, x) \quad (3.34)$$

Действительно, \mathcal{L}' дает те же уравнения движения, что и \mathcal{L} :

$$S \longrightarrow S' = S + \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} f^{\mu} \quad (3.35)$$

$$\delta S' - \delta S = \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial u^a} \delta u^a = 0 \quad (3.36)$$

Метод Гамильтона в теории поля

Рассмотрим метод Гамильтона в теории поля. Квантование (переход от классической теории к квантовой) удобнее проводить не в лагранжевой формулировке, а в гамильтоновой. При переходе от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона в механике фактически удваивается число уравнений движения (координаты и импульсы). Вместо лагранжевых переменных u_s для каждой s -й материальной точки введем канонические переменные – координату и импульс:

$$q_s = u_s, p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad (3.37)$$

Записываем обобщенную энергию (функцию Гамильтона – гамильтониан) цепочки:

$$H(p, q) = \sum_s p_s \dot{q}_s - L \quad (3.38)$$

Для переменных получаются канонические переменные

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}; (s = \overline{1, N}) \quad (3.39)$$

Таким образом, получили уравнения Гамильтона, которые описывают движение точечных масс цепочки. Можно получить обратный переход.

По аналогии с механикой можно ввести плотность канонического импульса. Для этого перейдем к пределу непрерывного распределения массы в цепочке:

$$a, m \longrightarrow 0, N \longrightarrow \infty; \rho = m/a < \infty, \varepsilon = ka < \infty \quad (3.40)$$

Тогда для канонического импульса получаем:

$$p_s = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_s} \sum_{s'} \frac{1}{2} m \dot{u}_{s'}^2 \quad (3.41)$$

$$p_s = a \frac{\partial}{\partial \dot{u}_s} \sum_{s'} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{s'}^2 \longrightarrow dx \frac{\partial}{\partial (\partial u / \partial t)} \mathcal{L}$$

где $dx = a$, а плотность функции Лагранжа определяется:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad (3.42)$$

Вместо p_s вводим плотность канонического импульса π (в дальнейшем слово «плотность» будет иногда опускаться):

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (3.43)$$

тогда $p_s = dx\pi$ и в пределе для функции Гамильтона найдем

$$H = \sum_s p_s \dot{q}_s - L \longrightarrow \int dx \left(\pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L} \right) = \int dx \mathcal{H} \quad (3.44)$$

где $\mathcal{H} = \pi \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}$ – плотность функции Гамильтона (гамильтонова плотность). Используя явный вид для плотности функции Лагранжа, можно записать гамильтонову плотность как явную функцию канонических переменных:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{\rho} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \quad (3.45)$$

Стоит отметить, что в данном случае явная зависимость функции \mathcal{H} от u отсутствует.

Предположим, что имеется функция переменных $x, u, \partial u / \partial x$ – лагранжева плотность:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla u) \quad (3.46)$$

\mathbf{x} – радиус-вектор в трехмерном пространстве.

Совершим переход теперь от старых переменных к новым – каноническим:

$$t, \mathbf{x}, u^A, \nabla u^A, \frac{\partial u^A}{\partial t} \longrightarrow t, \mathbf{x}, u^A, \nabla u^A, \pi^A, \nabla \pi^A \quad (3.47)$$

где $\pi^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^A}$ ($A = 1, 2, \dots, f$). f – число компонент поля. По аналогии с механикой необходимо выразить скорости через импульсы. Для этого решим последнее уравнение относительно u_t^A , то есть определим функциональную зависимость старой переменной u_t^A от новых переменных:

$$\frac{\partial u^A}{\partial t} = f^A(x; u, \nabla u, \pi, \nabla \pi) \quad (3.48)$$

Такое решение можно найти, если определитель Гессе (гессиан) отличен от нуля:

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_t^A \partial u_t^B}\right) \neq 0 \quad (3.49)$$

при всех x в области определения $u^A(x)$.

Составим теперь производящую функцию преобразования – гамильтонову плотность

$$\mathcal{H} = \pi_A \frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathcal{L} = \mathcal{H}(x; u, \nabla u, \pi, \nabla \pi) \quad (3.50)$$

Далее берем интеграл от неё по объему:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\pi_A \frac{\partial u^A}{\partial t} - \mathcal{L}) \quad (3.51)$$

Он представляет собой функцию Гамильтона системы, заданную как функционал u^A и π_A . Поскольку интеграл трехмерный, то функциональные производные для него записываются в виде:

$$\frac{\delta H}{\delta \pi_A} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla \pi_A} \quad (3.52)$$

$$\frac{\delta H}{\delta u_A} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_A} - \nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla u_A} \quad (3.53)$$

Вот, что означает такая запись:

$$\nabla \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla u_A} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{,k}^A} \quad (3.54)$$

Суммирование ведется по значениям $k = 1, 2, 3$.

Получили явный вид \mathcal{H} , воспользуемся им для вычисления сначала производной по π_A :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t} + \pi_B \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial \pi_A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}^B} \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial \pi_A} \quad (3.55)$$

Вспомянув определение π_B :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t} \quad (3.56)$$

Второе слагаемое в выражении для $\delta H / \delta \pi_A$ равно нулю. Таким образом:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_A} = \frac{\partial u^A}{\partial t} \quad (3.57)$$

Мы получили первое каноническое уравнение Гамильтона для поля.

Далее варьируем H по u . Возьмем производную \mathcal{H} по u^A .

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_A} = \pi_B \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial u^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}^B} \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial u^A} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A} \quad (3.58)$$

1 и 3 слагаемые взаимно уничтожаются. В то же время честно вычисляем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nabla u^A} = \pi_B \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial \nabla u^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}^B} \frac{\partial u_{,t}^B}{\partial \nabla u^A} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u^A} \quad (3.59)$$

Собираем полученные равенства, получаем новый вид вариационных производных:

$$\frac{\delta H}{\delta u^A} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u^A} \quad (3.60)$$

L – функционал. Правая часть полученного уравнения представляет собой функциональную производную функции Лагранжа с обратным знаком, поэтому

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_A} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^A} \quad (3.61)$$

Это соотношение эквивалентно соответствующему равенству для частных производных H и L по обобщенным координатам в теории с конечным числом степеней свободы. На действительных «траекториях» в силу уравнений поля (уравнений Лагранжа) имеем:

$$\frac{\delta L}{\delta u^A} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^A_t} = \frac{\partial \pi_A}{\partial t} \quad (3.62)$$

Поэтому второе уравнение Гамильтона выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_A} = -\frac{\partial \pi_A}{\partial t} \quad (3.63)$$

Таким образом, совершив преобразование переменных

$$t, \mathbf{x}, u^A, \nabla u^A, \frac{\partial u^A}{\partial t} \longrightarrow t, \mathbf{x}, u^A, \nabla u^A, \pi^A, \nabla \pi^A$$

и введя вместо \mathcal{L} новую функцию \mathcal{H} , которая зависит от канонических переменных, в силу динамических уравнений, которым подчинялись лагранжевы переменные u^A , были получены канонические уравнения Гамильтона для канонических переменных. Очевидно, что можно совершить и обратное преобразование.

Лекция 4. Симметрии и интегралы движения.

Теорема Нётер

Теорема Нётер в механике

Рассмотрим одну из важнейших теорем, которая широко используется в теории поля, а именно теорему Нётер. Она связывает симметрии системы (характеристики, связанные со взаимодействием системы) и интегралы системы.

Сначала вспомним теорему Нётер в механике. Существует общий метод получения интегралов движения системы, основанный на ее свойствах симметрии. Он дается теоремой Э. Нётер (впервые доказана в 1918).

Пусть действие системы инвариантно относительно однопараметрического семейства преобразований.

$$q_i \longrightarrow q'_i(q, t; \omega) = q_i + \omega X_i(q, t) + O(\omega^2) \quad (4.1)$$

$$t \longrightarrow t'(q, t; \omega) = t + \omega X_t(q, t) + O(\omega^2) \quad (4.2)$$

ω – некоторый малый параметр. То есть

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \frac{dq}{dt}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(q', \frac{dq'}{dt'}, t') \quad (4.3)$$

Если это выполнено, то существует интеграл движения:

$$Q(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i X_i - H X_t, \quad (4.4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \text{ (на решениях уравнений движения)} \quad (4.5)$$

Здесь

$$p_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (4.6)$$

H – это функция Гамильтона. Можно составить комбинацию генераторов и не решать уравнения напрямую.

Доказательство.

Самое простое – рассмотреть инфинитезимальные преобразования, этого достаточно: $|\omega| \ll 1$. Обозначим полную вариацию (новое время и новая форма)

$$\delta q_i = q'_i(t') - q_i(t) = \omega X_i(q, t), \delta t = t' - t = \omega X_t(q, t) \quad (4.7)$$

Введем вариацию формы (с чертой)

$$\bar{\delta}q(t) = q'(t) - q(t) \quad (4.8)$$

Тогда выражаем полную вариацию через вариацию формы

$$\delta q = \bar{\delta} + \dot{q}\delta t, \delta \dot{q} = \bar{\delta}\dot{q} + \ddot{q}\delta t. \quad (4.9)$$

Добавка берется из разложения времени.

По условию теоремы вращения вариация действия должна быть равной нулю

$$\delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L' - \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0 \quad (4.10)$$

Выразим здесь преобразованные величины через исходные, используя стандартный переход:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(1 + \frac{d}{dt}(\delta t)\right) L(q + \bar{\delta}q + \dot{q}\delta t, \dot{q} + \bar{\delta}\dot{q} + \ddot{q}\delta t, t + \delta t) - L(q, \dot{q}, t) \right] \quad (4.11)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L \frac{d}{dt}(\delta t) + \frac{dL}{dt} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q} \bar{\delta}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}\dot{q} \right].$$

Здесь мы разложили в ряд Тейлора, учитывая только члены первого порядка. Далее преобразуем подынтегральное выражение с учетом определений импульса и вариации формы:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p, \bar{q} = \frac{d}{dt}(\bar{\delta}q)$$

выделив **полную** производную по времени:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} (L\delta t + p\bar{\delta}q) + \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \dot{p} \right) \bar{\delta}q \right]. \quad (4.12)$$

Получилось два рода слагаемых. Работаем на классе решений уравнений Лагранжа.

На решениях уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \dot{p} = 0 \quad (4.13)$$

Поэтому из условия инвариантности действия $\delta S = 0$ следует:

$$\frac{d}{dt} (L\delta + p\bar{\delta}q) = 0. \quad (4.14)$$

На решениях вариация действия превращается в интеграл от полной производной.

С учетом

$$\bar{\delta}q = \delta q - \dot{q}\delta t, L = -p\dot{q} = -H \quad (4.15)$$

получаем

$$p\delta q - H\delta t = const. \quad (4.16)$$

Подставив сюда

$$\delta q_i = \omega X_i, \delta t = \omega X_t, \quad (4.17)$$

окончательно находим:

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i X_i - H X_t = const. \quad (4.18)$$

Что и требовалось доказать.

Нетрудно сообразить, что теорема имеет очевидное обобщение на случай l -параметрических преобразований:

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^l) \\ \delta q_i &= \sum_{a=1}^l \omega^a X_i^{(a)} \\ \delta t &= \sum_{a=1}^l \omega^a X_t^{(a)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

В этом случае имеется l интегралов движения:

$$Q_a = \sum_{i=1}^n p_i X_i^{(a)} - H X_t^{(a)}, a = \overline{1, l} \quad (4.20)$$

Замечание.

Пусть действие в исходном смысле не инвариантно

$$S \longrightarrow S' = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \left[L(q', \frac{dq'}{dt'}, t') + \sum_{a=1}^l \omega^a \frac{df^{(a)}(q', t')}{dt'} \right] \quad (4.21)$$

Теорема Нётер справедлива и в таком случае, но с некоторой модификацией. Тогда нётеровские интегралы имеют вид:

$$Q_a = \sum_{i=1}^n p X_i^{(a)} - H X_t^{(a)} + f^{(a)}, a = \overline{1, l}. \quad (4.22)$$

Теорема Нётер в механике. Примеры.

1. Пусть $S = inv$ относительно преобразования

$$q'_1 = q_1 + \omega, q'_i = q_i (i \neq 1), t' = t. \quad (4.23)$$

Тогда

$$X_1, X_i = 0, X_t = 0 \quad (4.24)$$

Следовательно, интеграл движения имеет вид: $Q = p_1$, то есть это случай циклической координаты q_1 : $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$.

Общий случай трансляции N -частичной системы на постоянный вектор:

$$\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\omega} \mathbf{n}, |\mathbf{n}| = 1, s = \overline{1, N}. \quad (4.25)$$

Тогда сохраняется проекция полного импульса на это направление:

$$Q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{P} = \sum_{s=1}^N \mathbf{p}_s \quad (4.26)$$

Если направление \mathbf{n} произвольно, то сохраняется вектор \mathbf{P} .

2. Пусть $S = inv$ относительно преобразования

$$q'_i = q_i, t' = t + \boldsymbol{\omega} \quad (4.27)$$

Тогда

$$X_i = 0, X_t = 1, \quad (4.28)$$

и сохраняется обобщенная энергия

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (4.29)$$

3. Рассмотрим вращение. Пусть $S = inv$ относительно поворота вокруг оси \mathbf{n} :

$$\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{n} \times \mathbf{r}_s). \quad (4.30)$$

Тогда сохраняется соответствующая проекция полного момента импульса системы (по свойству смешанного произведения):

$$Q = \sum_{s=1}^N \mathbf{p}_s \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_s) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{L} = \sum_{s=1}^N \mathbf{r}_s \times \mathbf{p}_s. \quad (4.31)$$

Если система сферически-симметрична, то полный момент импульса сохраняется.

4. Действие не инвариантно. Рассмотрим важный частный случай. Рассмотрим движение заряженной частицы в постоянном магнитном поле:

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z, B = const. \quad (4.32)$$

Малые отклонения должны возвращать частицы на равновесные орбиты. Лагранжиан релятивистской частицы, которая движется в этом магнитном поле

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (4.33)$$

включает вектор-потенциал (определен неоднозначно), который зависит от выбора калибровки:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'. \quad (4.34)$$

То есть, допускается «калибровочное преобразование». Выберем $\mathbf{A} = Bx\mathbf{e}_y$ (линейно по x , направлено по y). Тогда имеем

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \frac{e}{c} Bx\dot{y} \quad (4.35)$$

Этот лагранжиан (а с ним и действие) инвариантен относительно сдвигов y, z, t . Им отвечают 3 интеграла движения:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \gamma m \dot{y} + \frac{e}{c} Bx = p_{y0}, \quad (4.36)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \gamma m \dot{z} = p_{z0}, \quad (4.37)$$

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \gamma mc^2; \quad (4.38)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (4.39)$$

Отсюда следует, что $\gamma = const$ (величина скорости постоянна). Движение вдоль оси Oz является равномерным:

$$\dot{z} = \frac{p_{z0}}{\gamma m} = v_{z0}, z = z_0 + v_{z0}t. \quad (4.40)$$

При выборе такой калибровке, мы не видим некоторые интегралы движения. Однако существует еще один интеграл движения («скрытый»), который находим, если учесть преобразование L при сдвиге:

$$x \longrightarrow x' = x + \omega \quad (4.41)$$

Преобразуется последнее слагаемое в лагранжиане:

$$\frac{e}{c} Bx\dot{y} = \frac{e}{c} B(x' - \omega)\dot{y}' = \frac{e}{c} Bx'\dot{y}' + \omega \frac{d}{dt} \left(-\frac{e}{c} By'\right). \quad (4.42)$$

Следовательно, по теореме Нётер существует интеграл

$$p_x - \frac{e}{c} By = \gamma m \dot{x} - \frac{e}{c} By = P_{x0}. \quad (4.43)$$

Замечание.

Этот же интеграл (без нахождения первого интеграла) сразу получается при выборе другой калибровки потенциала в лагранжиане:

$$\mathbf{A} = -\nabla\varphi. \quad (4.44)$$

Теорема Нётер в теории поля

Рассмотрим теперь теорему Нётер в теории поля. Работаем в пространстве Минковского. Множитель d^4x связан с использованием декартовых координат, поэтому Якобиана перехода нет (например, в сферических координатах появятся множители, зависящие от координат). Для краткости будем в дальнейшем опускать индексы, номерующие компоненты поля. Пусть действие полевой системы

$$S[u] = \int_D d^4x \mathcal{L}(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, x) \quad (4.45)$$

инвариантно относительно непрерывных l -параметрических преобразований координат и полевых функций (рассматриваем в окрестности тождественных преобразований):

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x^{\mu'}(x, \omega) = x^\mu + \delta x^\mu + O(\omega^2), \\ \delta x^\mu &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial \omega^i} \Big|_{\omega=0} \delta \omega^i; \\ u^a(x) &\longrightarrow u^{a'}(x', \omega) = u^a + \delta u^a(x) + O(\omega^2), \\ \delta u^a(x) &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial u^{a'}(x'(x, \omega), \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} \delta \omega^i. \end{aligned}$$

Производная по ω на самом деле полная. То есть

$$S[u] \longrightarrow S'[u'] = \int_{D'} d^4x' \mathcal{L}(u'(x'), \frac{\partial u'(x')}{\partial x'}, x') \quad (4.46)$$

Если действие инвариантно, тогда существуют токи Нётер $J_i^\mu(x)$ (четырёхмерные векторы) такие, что дивергенция таких токов равна нулю

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0. \quad (4.47)$$

Берем временную компоненту и интегрируем по трехмерному пространству, тогда получим интегралы движения (нётеровские заряды). В частных случаях это будет действительно электрическим зарядом.

$$Q_i = \int d^3x J_i^0, \frac{dQ_i}{dt} = 0, i = \overline{1, l}. \quad (4.48)$$

Докажем эту теорему (временно опуская очевидные индексы). Как и в механике, достаточно рассмотреть инфинитезимальные преобразования:

$$x' = x + \delta x, u'(x') = u(x) + \delta u(x), \delta u(x) = \bar{\delta}u(x) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, \quad (4.49)$$

где вариация формы функции $\bar{\delta}u(x) = u'(x) - u(x)$, использованная при выводе уравнений Лагранжа (когда $\delta x = 0$). Именно вариацию формы использовали при выводе уравнений Лагранжа. Преобразуем элемент 4-объема и производные функций от новых к старым переменным (равенства справедливы в линейном приближении по малым параметрам преобразования):

$$d^4x' = \left(1 + \frac{\partial(\delta x)}{\partial x}\right) d^4x \quad (4.50)$$

Последнее слагаемое – это на самом деле дивергенция, сумма четырех преобразований.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'(x')}{\partial x'} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial u'(x')}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial(\delta x)}{\partial x}\right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\delta}u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta x\right)\right] = \\ &= \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\delta}u)}{\partial x} + \delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Находим вариацию действия:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{D'} d^4x' \mathcal{L}(u'(x'), \frac{\partial u'(x')}{\partial x'}, x') - \int_D d^4x \mathcal{L}(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, x) = \\ &= \int_D d^4x \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{L} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u / \partial x)} \bar{\delta}u \right] + \bar{\delta}u \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \partial u - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u / \partial x)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Получили аналог того, что получали в механике. Также явно выскочила вариация формы. На решениях уравнений Лагранжа выражение во вторых квадратных скобках обращается в нуль (левая часть уравнения Лагранжа), а по условию теоремы $\delta S = 0$. Снова получили интеграл от дивергенции. Воспользуемся леммой вариационного исчисления. Ввиду произвольности области D получаем (восстанавливаем все индексы):

$$\sum_{i=1}^l \delta \omega^i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\bar{\delta}u^a}{\delta \omega^i} \right] = 0. \quad (4.53)$$

Определим нётеровские токи:

$$J_i^\mu = -\mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\bar{\delta}u^a}{\delta \omega^i} \quad (4.54)$$

Доказали первое утверждение, дали явное определение нётеровских токов. Тогда из линейной независимости параметров $\delta\omega^i$ следуют равенства:

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0, i = \overline{1, l}. \quad (4.55)$$

Выразив вариацию формы функции через полную вариацию согласно $\bar{\delta}u^a = \delta u^a - (\partial_\nu u^a)\delta x^\nu$, получим нётеровские токи в виде:

$$J_i^\mu = T_\nu^\mu \frac{\delta x^\nu}{\delta\omega^i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\delta u^a}{\delta\omega^i}. \quad (4.56)$$

Здесь был введен тензор второго ранга по отношению к преобразованиям Лоренца

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\delta x_\nu}{\delta\omega^i} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (4.57)$$

который называется «тензором энергии-импульса».

Покажем существование интегралов движения (нётеровских зарядов). Имеем

$$\int_D d^4x \partial_\mu J_i^\mu = \int_\sigma d\sigma_\mu J_i^\mu = 0, \quad (4.58)$$

где в качестве области D для наглядности выбран 4-мерный куб, σ – его 3-мерная гиперповерхность (рис.4.1). Ограничимся классом решений уравнений Лагранжа таких, что пространственные компоненты токов $J_i^k (k = 1, 2, 3)$ достаточно быстро убывают при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Тогда с учетом $d\sigma_0 = \pm d^3x$ (верхний(нижний) знак для верхней(нижней) «крышки» куба, что определяется направлением внешней нормали к гиперповерхности) получаем, отодвинув «боковинки» куба на бесконечность:

$$\int_{x^0=t_2} d^3x J_i^0 - \int_{x^0=t_1} d^3x J_i^0 = 0. \quad (4.59)$$

Ввиду произвольности двух моментов времени эти интегралы не зависят от времени, то есть являются интегралами движения:

$$Q_i \int d^3x J_i^0 = const, \quad (4.60)$$

что и требовалось доказать.

Заряды можно представить в инвариантной форме:

$$Q_i = \int_\Sigma d\sigma_\mu J_i^\mu, \quad (4.61)$$

где Σ – пространственноподобная гиперповерхность:

$$x, y \in \Sigma : (x - y)^2 < 0. \quad (4.62)$$

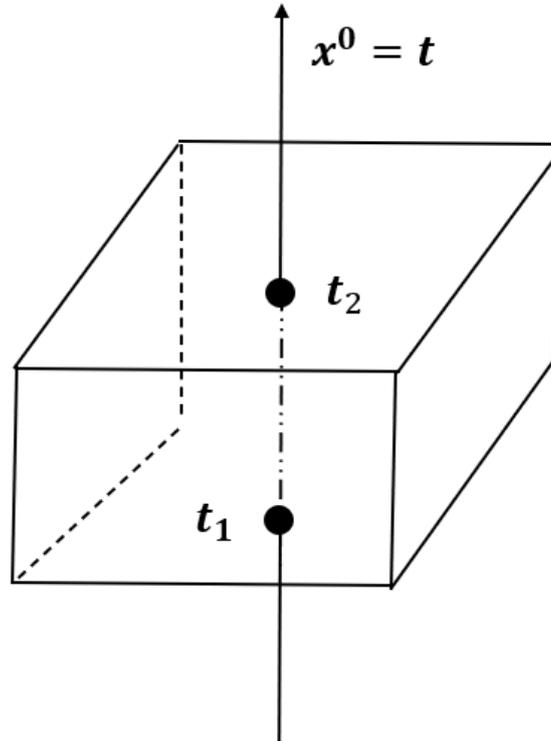


Рис. 4.1. Поясняющий рисунок: четырехмерный куб

Замечание.

Нётеровские токи (в отличие от зарядов) определены неоднозначно, а именно к нётеровскому току можно добавить дивергенцию антисимметричного тензора:

$$J_i^\mu \longrightarrow \tilde{J}_i^\mu = J_i^\mu + \partial_\nu f_i^{\mu\nu}, f_i^{\mu\nu} = -f_i^{\nu\mu}. \quad (4.63)$$

Дивергенция нового (с волной) тока будет совпадать с этой дивергенцией. Тогда

$$\partial_\mu (\tilde{J}_i^\mu - J_i^\mu) = \partial_\mu \partial_\nu f_i^{\mu\nu} \equiv 0; \quad (4.64)$$

$$\Delta Q_i = \int_V d^3x \partial_k f_i^{0k} = \int_S dS n_k f_i^{0k} \longrightarrow 0 \quad (4.65)$$

при удалении поверхности S на бесконечность в предположении, что $f_i^{0k} \longrightarrow 0$ при $|\mathbf{r}| \longrightarrow \infty$.

Энергия, импульс и момент импульса поля

Определим в теории поля те понятия, которые имеют механический аналог. Рассмотрим еще раз нётеровский ток

$$J_i^\mu = T_\lambda^\mu \frac{\delta x^\lambda}{\delta \omega^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^a)} \frac{\delta u^a}{\delta \omega^i}, \quad (4.66)$$

отвечающий инвариантности действия относительно трансляций (сдвигаем все радиус-векторы на один постоянный вектор):

$$x^{\mu'} = x^\mu + \omega^\mu, \quad \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^\nu}; \quad (4.67)$$

$$u^{a'}(x') = u^a(x), \quad \frac{\delta u^a}{\delta \omega^\nu} = 0. \quad (4.68)$$

Положив $i = \nu$, получаем ток в случае группы трансляций:

$$J_\nu^\mu = T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^a)} \partial_\nu u^a - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (4.69)$$

который называется тензором энергии-импульса. Здесь нётеровским зарядом является 4-импульс поля:

$$P^\nu = (P^0, \mathbf{P}) = \int d^3 T^{0\nu},$$

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u^a)} \partial^0 u^a - \mathcal{L} = \pi_a \dot{u}^a - \mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad (4.70)$$

$$T^{0k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u^a)} \partial_0 u^a.$$

Здесь T^{00} – это плотность энергии, $\mathbf{p} = (T^{0k})$ – это плотность импульса. Введены также канонические импульсы $\pi_a = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{u}^a$ ($\dot{u}^a = \partial u^a / \partial t$) и плотность гамильтониана \mathcal{H} (сравнить с механикой: $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i, H = p_i \dot{q}_i - L$).

Поэтому энергия поля:

$$P^0 = \int d^3 x T^{00} = \int d^3 x \mathcal{H} = H, \quad (4.71)$$

импульс поля:

$$\mathbf{P} = - \int d^3 x \pi_a \nabla u^a \quad (4.72)$$

минус возникает из-за опускания индексов.

Выясним физический смысл остальных компонент тензора энергии-импульса. По теореме Нётер имеем:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.73)$$

То есть дивергенция нётеровского тока равна нулю. Проинтегрируем это равенство по 3-объему V , границей которого является замкнутая поверхность Σ , и используем теорему Остроградского-Гаусса.

В результате из теоремы Нётер получим при $\mathbf{v} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x T^{00} = - \int_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{j} = (T^{k0}). \quad (4.74)$$

Следовательно, изменение энергии поля в объеме V называется потоком энергии через его границу Σ (\mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали в заданной точке поверхности Σ), T^{k0} – k -ая компонента плотности потока энергии \mathbf{j} .

Аналогично, положив в теореме Нётер $\mathbf{v} = k = 1, 2, 3$ (чисто пространственные величины), получим:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \mathbf{p} = - \int_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{q}, \mathbf{q} = (n^s T^{sk}). \quad (4.75)$$

Слева – скорость изменения импульса, справа – светка чисто пространственных компонент с компонентами нормали. Это значит, что изменение импульса поля в объеме V вызывается потоком импульса через границу объема V , так что T^{sk} – плотность потока k -й компоненты импульса, протекающего через элемент поверхности, перпендикулярной к оси Ox^s , или компонента тензора плотности потока импульса (в механике сплошных сред этот тензор с обратным знаком называют также тензором напряжений).

Лекция 5. Энергия, импульс и момент импульса поля. Комплексное скалярное поле. Глобальные калибровочные преобразования.

В прошлый раз рассмотрели уравнение Лагранжа в теории поля, обобщив механическое уравнение, а также метод Гамильтона (им мы пользоваться не будем). Рассмотрели также важнейшую теорему Нётер.

Пусть действие инвариантно относительно преобразований группы Лоренца L_+^\uparrow :

$$x^{\mu'} = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = x^\mu + \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (X_{\alpha\beta})_\nu^\mu + O(\omega^2),$$

$$\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha} \quad (5.1)$$

$$(X_{\alpha\beta})_{(\nu)}^\mu = \delta_\alpha^\mu g_{\beta\nu} - \delta_\beta^\mu g_{\alpha\nu} = -(X_{\beta\alpha})_\nu^\mu.$$

Условие антисимметричности накладывает, чтобы дважды не считать генераторы. Соответствующие нётеровские токи образуют тензор 3-го ранга:

$$J_{\alpha\beta}^\mu = -J_{\beta\alpha}^\mu = L_{\alpha\beta}^\mu + S_{\alpha\beta}^\mu, \quad (5.2)$$

где тензор орбитального момента

$$L_{\alpha\beta}^\mu = T_\lambda^\mu \frac{\delta x^\lambda}{\delta \omega^{\alpha\beta}} = T_\lambda^\mu (X_{\alpha\beta})_\nu^\lambda x^\nu = T_\alpha^\mu x_\beta - T_\beta^\mu x_\alpha, \quad (5.3)$$

тензор спинового момента определяется преобразованиями функций поля (поля должны преобразовываться по представлению группы Лоренца, действие в полевом пространстве)

$$S_{\alpha\beta}^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^a)} \frac{\delta u^a}{\delta \omega^{\alpha\beta}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^a)} (X_{\alpha\beta})_b^a u^b, \quad (5.4)$$

где $(X_{\alpha\beta})_b^a$ – это генераторы группы Лоренца в пространстве функций поля (поля должны преобразовываться по заданному представлению этой группы). Это разбиение аналогично механике твердого тела, тогда можно показать, что полный момент тела складывается из движения по орбите и вращения его вокруг оси.

В силу теоремы Нётер дивергенция токов Нётер должна обращаться в нуль

$$\partial_\mu J_{\alpha\beta}^\mu = \partial_\mu L_{\alpha\beta}^\mu + \partial_\mu S_{\alpha\beta}^\mu = 0. \quad (5.5)$$

В частном случае скалярного поля $\varphi(x) = \varphi'(x')$ (определение по отношению к группе Лоренца) имеем $(X_{\alpha\beta})_b^a = 0, S_{\alpha\beta}^\mu = 0$, тогда при дополнительном условии трансляционной инвариантности $\partial_\mu T_\alpha^\mu$, получаем с учетом $\partial_\mu x_\alpha = g_{\mu\alpha}$:

$$\partial_\mu L_{\alpha\beta}^\mu = T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta} = 0, \quad (5.6)$$

то есть для скалярного поля тензор энергии-импульса (ТЭИ) симметричен: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. В общем случае полевые функции u^a преобразуются по нетривиальному представлению группы L_+^\uparrow , генераторы пространства представления отличны от нуля $(X_{\alpha\beta})_b^a \neq 0$, и тогда тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, называемый каноническим тензором энергии импульса, в общем случае он несимметричен ввиду отличия от нуля спинового момента $S_{\alpha\beta}^\mu \neq 0$.

Однако, пользуясь известным произволом в определении нётеровских токов, можно ввести симметричный тензор энергии-импульса $\theta^{\mu\nu}$:

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\mu\lambda\nu} = \theta^{\nu\mu}, f^{\mu\lambda\nu} = -f^{\lambda\mu\nu} \quad (5.7)$$

Если бы перешли к криволинейным координатам от декартовых, то мера интегрирования содержала бы еще детерминант метрического тензора.

Замечание.

Симметричный тензор энергии-импульса, называемый также метрическим тензором энергии-импульса, может быть получен варьированием действия (используя произвольные криволинейные координаты в пространстве Минковского) по метрике:

$$\theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (5.8)$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, g = \det(g_{\mu\nu}).$$

Тогда тензор момента выражается через него:

$$J_{\alpha\beta}^\mu = \theta_\alpha^\mu x_\beta - \theta_\beta^\mu x_\alpha. \quad (5.9)$$

Интегралы движения в рассматриваемом случае инвариантности действия относительно преобразований Лоренца образуют антисимметричный тензор 2-го ранга (6 независимых компонент):

$$J_{\alpha\beta} = - \int d^3x J_{\alpha\beta}^0 = - \int d^3x (L_{\alpha\beta}^0 - S_{\alpha\beta}^0) = L_{\alpha\beta}^\mu + S_{\alpha\beta}^\mu. \quad (5.10)$$

Знак «-» – это просто дань традиции (так легче установить связь с механикой). Неинвариантность при преобразовании Лоренца компенсируется неинвариантностью нулевой компоненты. Независимых компонент 6 – по числу параметров группы Лоренца. Из них конструируются 2 трехмерных вектора. Пространственные компоненты составляют аксиальный 3-вектор полного момента импульса \mathbf{J} в виде суммы векторов орбитального \mathbf{L} и спинного \mathbf{S} моментов:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{J} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ikn} J_{kn} \right),$$

$$\mathbf{L} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ikn} L_{kn} \right),$$

$$\mathbf{S} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ikn} S_{kn} \right).$$

Можно показать, что орбитальный момент может быть выражен через плотность импульса. Покажем, что

$$\mathbf{L} = \int d^3x \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (5.12)$$

что является континуальным аналогом момента импульса системы частиц:

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a. \quad (5.13)$$

Имеем:

$$L_i = -\frac{1}{2} \int d^3x \varepsilon_{ikn} L_{kn}^0 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} L_{kn}^0 &= T_k^0 x_n - T_n^0 x_k = p^k x^n - p^n x^k, \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_{ikn} (p^k x^n - p^n x^k) &= \varepsilon_{ikn} x^k p^n = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})^i, \end{aligned} \quad (5.15)$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем обычно в качестве тензора энергии-импульса будем использовать $\theta^{\mu\nu}$. Мы рассмотрели орбитальный момент, который состоит из \mathbf{r} и \mathbf{p} . Рассмотрим теперь другой трехмерный вектор, используя 5.9, интерпретацию так называемого лоренцева момента (связан с генераторами буста – переход между системами отсчёта):

$$\mathbf{N} = (J_{0k}), \quad (5.16)$$

$$J_{0k} = - \int d^3x (\theta_0^0 x_k - \theta_k^0 x_0) = \int d^3x \theta^{00} x^k - t \int d^3x \theta^{0k}. \quad (5.17)$$

Обозначим $\varepsilon = \theta^{00}$ – плотность энергии поля, $\mathbf{p} = (\theta^{0k})$ – плотность импульса. Установим соответствие с механикой. Тогда

$$\mathbf{N} = \int d^3x \varepsilon \mathbf{r} - t \mathbf{P}. \quad (5.18)$$

Определим радиус-вектор центра масс поля

$$\mathbf{R} = \frac{\int d^3x \varepsilon \mathbf{r}}{\int d^3x \varepsilon}, \quad (5.19)$$

что является аналогом соответствующего вектора в нерелятивистской механике для системы частиц:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}, \quad (5.20)$$

а при переходе к релятивистской механике в этой формуле надо сделать замену $m_a \rightarrow \varepsilon_a = m_a / \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}$. Введем также скорость центра масс полевой конфигурации по аналогии с обычной механикой

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{E}, E = \int d^3x \varepsilon. \quad (5.21)$$

В результате получаем закон равномерного движения центра масс полевой системы (предполагается, что она замкнута: сохраняются энергия E и импульс \mathbf{P}):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t, \quad (5.22)$$

где $\mathbf{R}_0 = \mathbf{N}/E$. Из инвариантности действия из преобразований Лоренца получили закон сохранения движения полевой системы.

Комплексное скалярное поле. Глобальные калибровочные преобразования. Электрический заряд.

Переходим к преобразованию полевых систем, которые не связаны с координатными представлениями – внутренние преобразования. Рассмотрим на примере скалярного поля. Сперва рассмотрим действительное скалярное поле. Используем систему единиц, в которой $c = 1$. Лагранжиан вещественного скалярного поля $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad (5.23)$$

и при преобразованиях Лоренца

$$\varphi'(x') = \varphi(x), x' = \Lambda x, \varphi'(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x). \quad (5.24)$$

Уравнения Лагранжа (однокомпонентное поле)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} &= 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -m^2 \varphi, \\ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} &= \partial^\nu \varphi,\end{aligned}\tag{5.25}$$

и в итоге, вычисляя отдельные компоненты, получаем знаменитое уравнение Клейна–Гордона:

$$(\square + m^2)\varphi = 0,\tag{5.26}$$

где оператор Даламбера

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.\tag{5.27}$$

Стороим тензор энергии-импульса. Он является симметричным:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - m^2 \varphi^2) = T^{\nu\mu}.\tag{5.28}$$

Отсюда находим энергию поля (плотность энергии положительно определена)

$$E = P^0 = \int d^3x T^{00}, T^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \geq 0;\tag{5.29}$$

импульс

$$\mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{p}, \mathbf{p} = (t^{0k} = 0 \partial_0 \varphi \partial_k \varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi;\tag{5.30}$$

орбитальный момент

$$\mathbf{L} = \int d^3x \mathbf{r} \times \mathbf{p} = - \int d^3x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{r} \times \nabla \varphi;\tag{5.31}$$

спиновый момент $\mathbf{S} = 0$ для скалярного поля, так как $\delta \varphi / \delta \omega^{\alpha\beta} = 0$ (полная вариация скалярного поля равна нулю).

Перейдем от действительного поля к комплексному. Рассмотрим теперь комплексное скалярное поле –упорядоченную пару двух вещественных полей φ_1 и φ_2 :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2), \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2).\tag{5.32}$$

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi\tag{5.33}$$

дает уравнения движения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi^*)} = 0 \longrightarrow (\square + m^2) \varphi^* = 0; \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} = 0 \longrightarrow (\square + m^2) \varphi = 0. \quad (5.35)$$

По общей формуле строим тензор энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} \partial^\nu \varphi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \\ &= \partial^\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi^* - g^{\mu\nu} (\partial_\alpha \varphi^* \partial^\alpha \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) = T^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Энергия

$$E = P^0 = \int d^3x \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \right]; \quad (5.37)$$

импульс

$$\mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{p}, \mathbf{p} = - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \nabla \varphi^* \right); \quad (5.38)$$

орбитальный момент

$$\mathbf{L} = - \int d^3x \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \mathbf{r} \times \nabla \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{r} \times \nabla \varphi^* \right); \quad (5.39)$$

спиновый момент $\mathbf{S} = 0$.

Получим уравнения Гамильтона и покажем их эквивалентность уравнениям Лагранжа.

Напоминание: точка обозначает частную производную по времени. Находим канонические импульсы:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*, \boldsymbol{\pi}^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}. \quad (5.40)$$

Гамильтониан по общему правилу строится следующим образом:

$$H = \int d^3x H, H = \boldsymbol{\pi}^* \boldsymbol{\pi} + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi. \quad (5.41)$$

Уравнения Гамильтона

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial H}{\partial \pi} = \pi^*, \\ \dot{\phi}^* = \frac{\delta H}{\delta \pi^*} = \frac{\partial H}{\partial \pi^*} = \pi, \\ \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} + \nabla \cdot \frac{\partial H}{\partial(\nabla \phi)} = -m^2 \phi^* + \nabla^2 \phi^*, \\ \dot{\pi}^* = -\frac{\delta H}{\delta \phi^*} = -\frac{\partial H}{\partial \pi^*} + \nabla \cdot \frac{\partial H}{\partial(\nabla \phi^*)} = -m^2 \phi + \nabla^2 \phi. \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Продифференцируем первое уравнение по времени, получим

$$\dot{\pi}^* = \ddot{\phi} = \partial^2 / \partial t^2, \quad (5.43)$$

которое подставим в четвертое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -m^2 \phi + \nabla^2 \phi \longrightarrow (\square + m^2) \phi = 0. \quad (5.44)$$

Аналогично получим второе уравнение Лагранжа:

$$(\square + m^2) \phi^* = 0. \quad (5.45)$$

На частном примере проверили, что уравнения Гамильтона эквивалентны уравнениям Лагранжа.

Глобальные калибровочные преобразования

Калибровочные преобразования связаны с наличием дополнительной степени свободы. Координаты неизменны, изменяем только функцию. Образуется группа $U(1)$ (от слова «унитарная»). Лагранжиан и действие комплексного поля инвариантны относительно некоординатных (внутренних) преобразований, называемых калибровочными:

$$x \longrightarrow x' = x, \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\omega} \phi(x), \phi^*(x) \longrightarrow \phi^{*'}(x) = e^{-i\omega} \phi^*(x), \quad (5.46)$$

где $\omega = const$ – вещественное число.

По теореме Нётер с учетом $\delta x^\mu / \delta \omega = 0$ находим ток (вклад даёт только нетривиальное преобразование функции поля):

$$J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^a)} \frac{\delta u^a}{\delta \omega}, u^1 = \varphi, u^2 = \varphi^*, \quad (5.47)$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \omega} = i\varphi, \frac{\delta \varphi^*}{\delta \omega} = -i\varphi^*. \quad (5.48)$$

В результате

$$J^\mu = i(\varphi^* \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^*) \varphi) \equiv i\varphi^* \partial^\mu \longleftrightarrow \varphi. \quad (5.49)$$

По теореме Нётер дивергенция должна быть нулевой $\partial_\mu J^\mu = 0$. Проверим:

$$\partial_\mu J^\mu = i(\varphi^* \square \varphi - (\square \varphi^*) \varphi) = i[\varphi^* (-m^2 \varphi) - (-m^2 \varphi^*) \varphi] = 0, \quad (5.50)$$

то есть $\partial_\mu J^\mu$ обращается в нуль не тождественно, а только на решениях уравнений Лагранжа, как и должно быть. Нётеровский заряд

$$Q = i \int d^3x (\varphi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} \varphi) \quad (5.51)$$

является интегралом движения. Проверим это прямым вычислением с учетом уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= i \int d^3x (\varphi^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} \varphi) = \\ &= i \int d^3x (\varphi^* (\nabla^2 \varphi - m^2 \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\nabla^2 \varphi^* - m^2 \varphi^*) \varphi) = \\ &= i \int d^3x \nabla \cdot (\varphi^* \nabla \varphi - (\nabla \varphi^*) \varphi) = - \int d\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0, \end{aligned}$$

если $|\mathbf{J}| \rightarrow 0$, при $|\mathbf{J}| \rightarrow \infty$. Тут была использована теорема Остроградского-Гаусса.

Рассмотренные преобразования называются глобальными калибровочными преобразованиями, так как параметр ω не зависит от координат. Как уже было сказано, они образуют абелеву группу $U(1)$. Используя матричные обозначения

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} \phi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'^* \end{pmatrix} = U(\omega) \phi = \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

получим генератор группы тоже в матричном виде:

$$X = \frac{dU(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = i\sigma_3, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

Эрмитова матрица σ_3 (носит название «матрица Паули») обладает следующими свойствами:

$$\sigma_3^{2n} = I, \sigma_3^{2n+1} = \sigma_3 (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.54)$$

Поэтому элементы группы $U(1)$, относящейся к классу групп Ли, представляются в виде:

$$U(\omega) = e^{i\omega\sigma_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega\sigma_3)^n}{n!} = I \cos \omega + i\sigma_3 \sin \omega. \quad (5.55)$$

Лагранжиан также можно представить в матричном виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^+ \phi, \quad (5.56)$$

где $\phi^+ = (\phi^*, \phi)$. Соответственно для тока и заряда получаем:

$$J^\mu = i(\phi^+ \frac{\sigma_3}{2} \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^+) \frac{\sigma_3}{2} \phi), \quad (5.57)$$

$$Q = i \int d^3x (\phi^+ \frac{\sigma_3}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^+}{\partial t} \frac{\sigma_3}{2} \phi). \quad (5.58)$$

Замечание 1.

Можно использовать вещественное представление, введя 2-мерный вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 = \sum_{a=1}^2 (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a - \frac{m^2}{2} \varphi_a^2), \quad (5.59)$$

и калибровочные преобразования образуют группу вращений $SO(2)$ в плоскости (отделяем вещественную часть от мнимой):

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = R(\omega) \varphi = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Соответственно получим представление в виде скалярного произведения:

$$J^\mu = \frac{1}{2} (\varphi \cdot X \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi \cdot X \varphi) = \varphi_2 \partial^\mu \varphi_1 - (\partial^\mu \varphi_2) \varphi_1, \quad (5.61)$$

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3x (\varphi \cdot X \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot X \varphi), \quad (5.62)$$

где генератор группы $SO(2)$ (подгруппа группы $SO(3)$) имеет вид:

$$X = \frac{dR(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Очевидно, что группа $SO(2)$ изоморфна $U(1)$.

Замечание 2.

Абелева группа $SO(2)$ является подгруппой неабелевой группы 3-мерных вращений $SO(3)$. Можно рассмотреть скалярное поле (по группе L_+^1), лагранжиан и действие которого инвариантны относительно калибровочной группы $SO(3)$:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \longrightarrow \varphi'(x) = R(\omega^1, \omega^2, \omega^3)\varphi(x), \quad (5.64)$$

$$\varphi'_a = R_{ab}\varphi_b = \varphi_a + \sum_{c=1}^3 \omega^c (X_c)_{ab}\varphi_b + O(\omega^2), \quad (5.65)$$

где R – это ортогональная 3×3 -матрица: $R^T R = I$.

Явный вид генераторов этой группы нам известны: $(X_c)_{ab} = -\varepsilon_{cab}$, инфинитезимальное преобразование можно записать в векторной форме:

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi, \delta\varphi = \omega \times \varphi. \quad (5.66)$$

Лагранжиан, нётеровские ток и заряды имеют вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 = \sum_{a=1}^3 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a - \frac{m^2}{2} \varphi_a^2 \right), \quad (5.67)$$

$$\mathbf{J} = (J_a^\mu) = (\varepsilon_{abc} \partial^\mu \varphi_b \varphi_c) = \partial^\mu \varphi \times \varphi, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{Q} = (Q_a) = (\varepsilon_{abc} \int d^3x \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} \varphi_c) = \int d^3x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \varphi. \quad (5.69)$$

Эта конструкция может применяться в реальной физике. Существуют такие частицы как пионы (π -мезоны), они несут электрический заряд (кроме одного – π^0). С хорошей степенью точности их массы практически одинаковы. Можно связать свойства сильных взаимодействий с симметрией, которая называется «изоспиновая симметрия». Технически это означает, что мы работаем с компонентами трехмерного вещественного вектора и из первых двух компонент можно сделать две комплексные комбинации, которые отвечают заряженным частицам.

Лекция 6. Калибровочная группа $SU(2)$. Изоспин.

Локальные калибровочные преобразования.

Электромагнитное поле как абелево калибровочное поле. Уравнения Максвелла

Калибровочная группа $SU(2)$. Изоспин

В прошлый раз обсудили глобальные калибровочные преобразования, образующие абелеву группу, а также обобщение на неабелеву группу. На группу $SO(3)$ можно смотреть как на присоединенное представление группы $SU(2)$ – есть определенное соответствие. Фундаментальную роль эта группа играет при рассмотрении Хиггсовского поля.

Рассмотрим упорядоченную пару двух комплексных скалярных полей (двумерный комплексный вектор):

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_{(1)}^1 + i\varphi_{(2)}^1 \\ \varphi_{(1)}^2 + \varphi_{(2)}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где $\varphi_{(n)}^k$ – вещественные поля. Этот вектор в 2-мерном комплексном пространстве C^2 (двумерное комплексное пространство) подвергнем унитарному преобразованию U :

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = u\varphi, \quad (6.2)$$

$$UU^+ = I, \det U = 1. \quad (6.3)$$

Матрица U унитарна, ее определитель равен единице. 2x2-матрицы U образуют фундаментальное представление группы $SU(2)$:

$$U = \exp(i\omega^a T_a), a = 1, 2, 3; \quad (6.4)$$

ω^a – вещественные параметры (суммирование идет по a), генераторы группы по традиции записываются в виде $T_a = \frac{1}{2}\tau_a$, где матрицы Паули (W. Pauli)

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Одну из матриц можно сделать диагональной (обычно третью). Паули использовали матрицы для описания спина электрона. Мы работаем с таким понятием как

«изоспин», аналог спина, преобразование действует во внутреннем групповом пространстве. В теории обычного спина матрицы обычно определяются как σ .

Свойства матриц Паули таковы:

$$\begin{aligned}\tau_a^2 &= I, \\ \tau_a \tau_b &= I \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \tau_c; \\ \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_a \tau_b) &= \delta_{ab}, \\ \text{tr}(\tau_a) &= 0.\end{aligned}$$

δ_{ab} – символ Кронекера.

Алгебра Ли генераторов:

$$[T_a, T_b] = i \varepsilon_{abc} T_c. \quad (6.6)$$

ε_{abc} – структурные постоянные в группе $SU(2)$. Присоединенное представление действует в 3-мерном вещественном евклидовом пространстве R^3 так:

$$X = \tau \cdot \mathbf{r} \longrightarrow X' = UXU^+ = \tau \mathbf{r}', X = X^+, \det X' = \det(U^+ UX) = \det X, \quad (6.7)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – вещественный 3-вектор. Сама по себе матрица X эрмитова. Линейные комбинации эрмитовых матриц тоже эрмитовы. При таком преобразовании сохраняется определитель матрицы. Произведение детерминантов равняется единице. Свяжем преобразования в C^2 с преобразованиями в R^3 . Имеем:

$$\begin{aligned}\tau_a x'_a &= U \tau_b x_b U^+ \longrightarrow \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_c \tau_a) x'_a = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_c U \tau_b U^+) x_b, \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_c \tau_a) = \delta_{ca}, \\ x'_c &= R_{cb} x_b, R_{cb} = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_c U \tau_b U^+) - \text{3x3-матрица поворотов в } R^3, R^T R = I.\end{aligned} \quad (6.8)$$

Применили операцию взятия следа (tr). Действительно:

$$\det X = \det \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = -(x^2 + y^2 + z^2) = -\mathbf{r}^2, \det X' = -\mathbf{r}'^2, \quad (6.9)$$

то есть $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$. Но определитель, как выяснилось, не меняется, что означает, что при преобразовании квадрат модуля постоянен – чистое вращение в трехмерном пространстве. Каждому элементу группы $SU(2)$, заданному унитарными матрицами в пространстве C^2 соответствует ортогональная матрица поворота в R^3 .

Ранее было показано, что явный вид генераторов группы $SO(3)$:

$$(X_a)_{bc} = -\varepsilon_{abc}, T_a = iX_a = T_a^+. \quad (6.10)$$

Их можно рассматривать как генераторы группы $SU(2)$ в присоединенном представлении. По определению в присоединенном представлении матричные элементы матрицы генераторов совпадают со структурными постоянными группы Ли. Это как раз наш рассматриваемый случай: коммутатор не зависит от выбора представления.

Группа $SU(2)$ является накрывающей для группы $SO(3)$:

$$\pm U \in SU(2) \longrightarrow R \in SO(3). \quad (6.11)$$

Рассмотрим лагранжиан скалярного поля, преобразующегося по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ (берем комплексный столбик и строим лагранжиан, вводя эрмитово сопряженный к нему – получаем строку):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi, \quad \varphi^+ = (\varphi^{1*}, \varphi^{2*}). \quad (6.12)$$

Он инвариантен относительно преобразований $SU(2)$:

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu \varphi^{+'} \partial^\mu \varphi' - m^2 \varphi^{+'} \varphi' = \quad (6.13)$$

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu (\varphi^+ U^+) \partial^\mu (U \varphi) - m^2 \varphi^+ U^+ U \varphi = \mathcal{L},$$

так как $U^+ U = I$ и $\partial_\mu U = 0, \partial_\mu U^+ = 0$ ввиду $\partial_\mu \omega^a = 0$ (глобальные калибровочные преобразования).

Согласно теореме Нётер имеем сохраняющиеся токи (параметров три, поэтому имеется триплет токов):

$$J_a^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta \varphi}{\delta \omega^a} - \frac{\delta \varphi^+}{\delta \omega^a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^+)} = - \quad (6.14)$$

$$\partial^\mu \varphi^+ \frac{\partial}{\partial \omega^a} (I + i \omega^b T_b) \varphi - \frac{\partial}{\partial \omega^a} \varphi^+ (I - i \omega^b T_b) \partial^\mu \varphi = i (\varphi^+ T_a \partial^\mu \varphi - (\partial^\mu \varphi^+) T_a \varphi).$$

$$\frac{\partial \omega^b}{\partial \omega^a} = \delta_{ab}; \quad (6.15)$$

То есть, возникает ток через генераторы – так и должно быть.

Нётеровские заряды образуют изоспин – Звектор во внутреннем пространстве:

$$I_a = \int d^3x J_a^0 = i \int d^3x (\varphi^+ \frac{\tau_a}{2} \partial_t \varphi - \partial_t \varphi^+ \frac{\tau_a}{2} \varphi). \quad (6.16)$$

Только на решениях уравнений движения для φ и φ^+ имеем:

$$\frac{dI_a}{dt} = 0. \quad (6.17)$$

Часто используется краткая векторная запись изоспина:

$$\mathbf{I} = i \int d^3x \varphi^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \partial_t \varphi. \quad (6.18)$$

Вернемся к тому, что уже было рассмотрено, но с точки зрения группы $SU(2)$. Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ преобразуется по присоединенному представлению группы $SU(2)$.

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$$\varphi'_k = R_{kn} \varphi_n, R \in SO(3). \quad (6.20)$$

$\boldsymbol{\varphi}$ – трехмерный вещественный вектор. Тогда лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\varphi} - \frac{m^2}{2} \boldsymbol{\varphi}^2. \quad (6.21)$$

Ввиду инвариантности скалярного произведения относительно вращений этот лагранжиан также инвариантен. Соответствующие нётеровские токи (k – индекс, связанный с параметрами группы, μ – лоренцевский индекс):

$$\begin{aligned} J_k^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_n)} \frac{\delta \varphi_n}{\delta \omega^k} = -\partial^\mu \varphi_n \frac{\partial}{\partial \omega^k} [\varphi_n + \omega^m (X_m)_{ns} \varphi_s] = \\ &= -\partial^\mu \varphi_n (X_k)_{ns} \varphi_s = \varepsilon_{kns} (\partial^\mu \varphi_n) \varphi_s, \end{aligned} \quad (6.22)$$

можно записать и в 3-векторной форме:

$$\mathbf{J}^\mu = \partial^\mu \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.23)$$

Нётеровские заряды образуют 3-вектор изоспина во внутреннем пространстве:

$$\mathbf{I} = \int d^3x \mathbf{J}^0 = \int d^3x \partial_t \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.24)$$

Приложение. Спин электрона в квантовой механике

В качестве приложения рассмотрим, как описывается спин электрона в квантовой механике. Исходное уравнение Шрёдингера не учитывало спин, но эксперименты показали его наличие. Спустя год после заложения основ квантовой механики спин в аппарат механики был введен Паули. Он предложил (постулировал) для описания электрона уравнение, которое теперь называется **уравнением Паули** (W. Pauli, 1927):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_p \psi, \quad (6.25)$$

$$\hat{H}_p = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - \hat{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

Если частица с зарядом e движется во внешнем электромагнитном поле, то записываем гамильтониан с помощью векторного и скалярного потенциалов – уравнение Шрёдингера. По аналогии с классической электродинамикой, возникает дополнительная потенциальная энергия. Паулиевский гамильтониан \hat{H}_p отличается от шрёдингеровского добавлением именно слагаемого $\hat{U}_p = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{B}$, описывающего взаимодействие с магнитным полем $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (ротор) спинового магнитного момента электрона, представляемого оператором

$$\hat{\mu} = g_s \hat{\mathbf{S}} = -\mu_B \boldsymbol{\sigma}. \quad (6.26)$$

То, что такая пропорциональность существует, известно из классической электродинамики. Этот оператор введен по аналогии с оператором орбитального магнитного момента $\hat{\mathbf{M}} = g_L \hat{\mathbf{L}}$.

Как уже обсуждалось выше, волновая функция электрона Ψ в теории Паули является двухкомпонентной:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Они называются спинором и преобразуются при поворотах системы координат по двузначному представлению группы вращений. В частности, при повороте на 2π двухкомпонентная функция приобретет некоторый множитель, фаза изменится, и мы получим преобразование

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{i\pi} \Psi = -\Psi. \quad (6.28)$$

Спинор преобразуется по двузначному представлению группы вращения при повороте.

Следовательно, для спинора этот поворот не эквивалентен тождественному преобразованию, как это имеет место для скаляра и вектора.

Рассмотрим «вывод» уравнения Паули исходя из математического постулата, принадлежащий Ричарду Фейнману (R. P. Feynman). Из основного соотношения для матриц Паули,

$$\sigma_k \sigma_n = \delta_{kn} + i \epsilon_{kns} \sigma_s, \quad (6.29)$$

следует тождество

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (6.30)$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} – это произвольные векторы. Учитывая его, запишем гамильтониан электрона в электрическом поле в эквивалентном шрёдингеровскому виде:

$$\hat{H} = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2}{2m_e} + e\Phi. \quad (6.31)$$

Получили аналог для электрона, который не взаимодействует с магнитным полем. Переходим к каноническому импульсу. Введем теперь взаимодействие с магнитным полем по известному правилу (это, конечно, постулат):

$$\hat{\mathbf{p}} \longrightarrow \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (6.32)$$

Тогда получим гамильтониан

$$\hat{H}_p = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2}{2m_e} + e\Phi \quad (6.33)$$

который эквивалентен гамильтониану Паули:

$$\hat{H}_F \equiv \hat{H}_p. \quad (6.34)$$

Действительно, имеем

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2 = \hat{\mathbf{P}}^2 + i\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}}), \quad (6.35)$$

где второе слагаемое отлично от нуля ввиду некоммутативности компонент оператора кинетического импульса $\hat{\mathbf{P}}$:

$$[\hat{P}_n, \hat{P}_k] = [\hat{p}_n - \frac{e}{c} A_n, \hat{p}_k - \frac{e}{c} A_k] = i\hbar \frac{e}{c} (\partial_n A_k - \partial_k A_n). \quad (6.36)$$

Перейдем к нетривиальной части доказательства. На основе вышесказанного,

$$(\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}})_s = \varepsilon_{snk} \hat{P}_n \hat{P}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{snk} [\hat{P}_n, \hat{P}_k] = i\hbar \frac{e}{c} \varepsilon_{snk} \partial_n A_k, \quad (6.37)$$

или

$$\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}} = i\hbar \frac{e}{c} \mathbf{B}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.38)$$

В результате получаем:

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}})^2}{2m_e} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m_e} - \frac{e\hbar}{2m_e c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (6.39)$$

то есть приходим в точности к паулиевскому взаимодействию спинового магнитного момента электрона с магнитным полем. Квантовая электродинамика показывает, что к магнетону Бора $\frac{e\hbar}{2m_e c}$ есть поправка, подтвержденная экспериментами.

Локальные калибровочные преобразования и калибровочный принцип введения взаимодействий полей. Электромагнитное поле как абелево калибровочное поле. Скалярная электродинамика

До сих пор мы рассматривали конструкцию, которая используется при построении Стандартной модели. Важную роль играет понятие взаимодействующих полей. Потребуем инвариантность лагранжиана относительно локальных (теперь параметры группы зависят от координат) калибровочных преобразований, начнем с комплексного скалярного поля:

$$\varphi'(x) = e^{i\omega(x)} \varphi(x) \quad (6.40)$$

$$\varphi^{*'}(x) = e^{-i\omega(x)} \varphi^*(x).$$

В этом случае

$$\partial_\mu \varphi' = e^{i\omega} (\partial_\mu \varphi + i\partial_\mu \omega) \neq e^{i\omega} \partial_\mu \varphi. \quad (6.41)$$

Для обеспечения инвариантности лагранжиана введем ковариантную («длинную») производную $D_\mu \varphi$, обладающую нужным трансформационным свойством:

$$(D_\mu \varphi)' = D'_\mu \varphi' = e^{i\omega} D_\mu \varphi. \quad (6.42)$$

Определяем

$$D_\mu = \partial_\mu + iB_\mu(x), \quad (6.43)$$

введя новое 4-векторное поле $B_\mu(x)$ так, чтобы обеспечить нужный закон преобразования:

$$(D_\mu \varphi)' = (\partial_\mu + iB'_\mu) e^{i\omega} \varphi = e^{i\omega} (\partial_\mu \varphi + i\partial_\mu \omega + B'_\mu \varphi), \quad (6.44)$$

откуда

$$B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \omega. \quad (6.45)$$

В результате получаем лагранжиан, инвариантный относительно локальной калибровочной группы $U(1)$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^* D_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (6.46)$$

Переопределим векторное поле, введя константу связи e :

$$B_\mu = eA_\mu, \quad (6.47)$$

И ТОГДА

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x), \quad (6.48)$$

$$\varphi'(x) = e^{-ief(x)}\varphi(x), \quad (6.49)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \quad (6.50)$$

$$(D_\mu\varphi)' = e^{-ief(x)}D_\mu\varphi. \quad (6.51)$$

Добавим к лагранжиану свободного поля $A_\mu(x)$:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (6.52)$$

где тензор второго ранга $F_{\mu\nu}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований. Ограничимся зависимостью только от первых производных и поля. В результате получаем лагранжиан системы взаимодействующих полей $\varphi, \varphi^*, A_\mu$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\varphi)^*D_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (6.53)$$

Получили систему взаимодействующих полей. Взаимодействие проявляется в том, что в длинную производную входит A . Запишем систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} = 0, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0. \end{cases} \quad (6.54)$$

Получили систему связанных уравнений. Честно вычисляем соответствующие производные:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = (D_\mu \varphi)^* (ieA^\mu) - m^2 \varphi^*, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = (-ieA_\mu) D^\mu \varphi - m^2 \varphi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = (D^\mu \varphi)^*, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^*)} = D^\mu \varphi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = -F^{\nu\mu}, \end{array} \right. \quad (6.55)$$

так как $\frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu$. В результате получаем систему уравнений (первое сопряженное со вторым):

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_\mu^* D^{*\mu} + m^2) \varphi^* = 0, \\ (D_\mu D^\mu + m^2) \varphi = 0, \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, \end{array} \right. \quad (6.56)$$

где

$$j^\mu = ie[\varphi^* D^\mu \varphi - (D^\mu \varphi)^* \varphi] \quad (6.57)$$

– это нётеровский ток, отвечающий глобальной калибровочной инвариантности лагранжиана. Сам лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований.

Воспользуемся свойством антисимметричных тензоров. Определим дуальный тензор с помощью аналога тензора Леви-Чивита (должен содержать четыре разные компоненты):

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \varepsilon^{0123} = \varepsilon_{0123} = 1. \quad (6.58)$$

Дуальный тензор тождественно удовлетворяет уравнению

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0. \quad (6.59)$$

С точки зрения лагранжева подхода это тождество. Действительно,

$$\begin{aligned}\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \\ &= \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} (\partial_\nu \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\nu) A_\beta = 0.\end{aligned}\quad (6.60)$$

Уравнения Максвелла

Уравнения

$$\begin{cases} (M1) : \partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu, \\ (M2) : \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \end{cases}\quad (6.61)$$

образуют систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля (J. C. Maxwell, 1860-1865). Первое – динамическое уравнение, второе – следствие того, что поле описывается с помощью потенциала. Убедимся в том, что их можно привести к знакомой форме. Запишем из в 3-форме, введя по определению вектор напряжённости электрического поля (см. динамику релятивистской частицы во внешнем поле):

$$\mathbf{E} = (E_k = F_{0k} = F^{0k}), \quad (6.62)$$

$$\mathbf{B} = (B_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ksn} F^{sn}), F_{sn} = F^{sn} = -\varepsilon_{snk} B_k. \quad (6.63)$$

Строим вектор из компонент тензора, поэтому индексы можно писать как внизу, так и вверху. В обратной формуле исчезнет множитель 1/2. Вернемся к определению дуального тензора, можно записать соотношение, похожее на случай для электрического

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (6.64)$$

получаем:

$$\tilde{F}_{0k} = B_k, \tilde{F}_{kn} = \varepsilon_{ksn} E_s. \quad (6.65)$$

Работаем в вакууме, будем использовать хевисайдову систему единиц $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Дуальное преобразование $F_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}$ означает

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B} \longrightarrow -\mathbf{E}. \quad (6.66)$$

Уравнение (M1) распадается на два в 3-форме (скалярное и векторное):

$$\partial_k F^{k0} = j^0, \partial_0 F^{0n} + \partial_k F^{kn} = j^n. \quad (6.67)$$

Обозначим $j^0 = \rho, \mathbf{j} = (j^n)$ и учтем

$$\partial_k F^{0k} = \nabla \cdot \mathbf{E}, \partial_k F^{kn} = -\varepsilon_{kns} \partial_k B_s = (\nabla \times \mathbf{B})_n. \quad (6.68)$$

В результате получаем первую пару уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (6.69)$$

Уже знаем преобразования дуальности, поэтому можем получить вторую пару уравнений Максвелла получаем из (M2), используя те самые преобразованные дуальности:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{cases} \quad (6.70)$$

Получили те самые уравнения, которые были получены Максвеллом путем обобщения экспериментальных данных. В общем случае источником магнитного поля является ток и переменное во времени электрическое поле. У магнитного поля нет элементарных носителей (закон Кулона). А также нет элементарных носителей магнитного поля («магнитных монополей»). Во многих теориях такие монополи вводятся и считаются существующими. Для выполнения закона сохранения заряда необходимо добавить ток смещения – догадка Максвелла. Таким образом, мы пришли к системе уравнений Максвелла не путем обобщения законов, а из фундаментального общего принципа локальной калибровочной инвариантности. Общая идея принципа позволяет описывать поля не электромагнитной природы. Этот принцип извлечен из анализа электродинамики. Система СИ имеет источником «дорелятивистскую» систему, поэтому в теоретической физике она не используется. В обычной системе

единиц (хевисайдовой) имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (6.71)$$

Ранее мы положили $c = 1$. Хевисайдова система для статического поля приводит к исчезновению коэффициента 4π . Этой системой пользуются современные теоретики. Это отвечает лагранжиану $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ и $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$. В гауссовой системе единиц в этих уравнениях надо сделать замену

$$\rho \longrightarrow 4\pi\rho, \mathbf{j} \longrightarrow 4\pi\mathbf{j}, \quad (6.72)$$

что соответствует выбору $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

Предположим, что есть заданный источник. Пусть $j^\mu(x)$ – заданное 4-векторное поле (источник электромагнитного поля). Тогда уравнения Максвелла следуют из лагранжиана ($j^\mu(x)$ не варьируется!):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu. \quad (6.73)$$

Подставив в (M1) $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$, получим

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (6.74)$$

при этом (M2) удовлетворяется тождественно, но для решения этот вид неудобен. 4-потенциал A^μ можно подчинить дополнительному условию (фиксировать калибровку), так как 6.74 инвариантно относительно калибровочных преобразований: $A^\mu \longrightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu f$. Обычно используется калибровка Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (6.75)$$

Из 6.74, 6.75 получаем уравнение Даламбера для каждой компоненты:

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (6.76)$$

Выбор калибровочного условия соответствует тому, что есть остаточная калибровочная инвариантность.

Замечание.

Условие 6.75 инвариантно относительно ограниченного класса калибровочных преобразований:

$$A^{\mu'} = A^{\mu} + \partial^{\mu} f_0, \square f_0 = 0. \quad (6.77)$$

Применив к (M1) оператор ∂_{μ} , получим слева нуль ввиду $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$, но тогда справа должно быть $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, что означает сохранение электрического заряда. При этом из 6.76 следует, что скалярное поле $\varphi \equiv \partial_{\mu} A^{\mu}$ (четырёхмерная дивергенция) удовлетворяет уравнению

$$\square \varphi = 0, \quad (6.78)$$

которое имеет решение $\varphi(t, \mathbf{r}) = 0$ при специальных начальных условиях:

$$\varphi(0, \mathbf{r}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (6.79)$$

или при граничном условии $\varphi(t, \mathbf{r}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это обеспечивает эквивалентность системы уравнений 6.76 и 6.75 уравнению Максвелла 6.74.

Лекция 7. Неабелевы калибровочные поля.

Неабелево обобщение скалярной электродинамики

Неабелевы калибровочные поля

В прошлой лекции рассмотрели локальные калибровочные преобразования (преобразования, параметры которых зависят от точек пространства Минковского). Рассматриваем класс теорий поля, в которых лагранжианы зависят от полевых функций и их первых производных. Как только появляется зависимость от координат, тогда производная полевой функции уже не будет преобразовываться так, как само поле (появится производная параметра). Чтобы добиться одинакового закона преобразования, потребовалось ввести четырехмерное поле. Попутно добавили новую константу (e – электрический заряд частиц, которым отвечает комплексное поле). Ввели систему взаимодействующих полей. Показали, что уравнения для поля (калибровочные) совпадают с уравнениями Максвелла, если ток разбить на плотность заряда и плотность электрического заряда. Уравнения Максвелла – уравнения для калибровочного поля, получили их используя калибровочный принцип. Именно он (обобщенный на неабелевы преобразования) используется для построения современной теории слабых и сильных взаимодействий.

Обобщим скалярную электродинамику (источник – скалярное комплексное поле). Переходим к неабелевой калибровочной теории поля. Неабелевы калибровочные поля были введены Янгом и Миллсом (C. N. Yang, R. Mills) в 1954 году. Янг – американский физик китайского происхождения. Первоначально эти поля рассматривались как математические конструкции, не было изначально понятно, как можно их применить. Далее стало понятно, что они нужны для обобщения на неабелеву теорию, для описания слабых взаимодействий. При построении теории сильных взаимодействий оказалось, что нужно расширить калибровочную группу. В результате, калибровочная группа Стандартной модели – это произведение полупростых групп: $SO(3) \cdot SU(2) \cdot U(1)$.

Рассмотрим сначала скалярный изодублет: имеем упорядоченную пару двух комплексных полей φ_1, φ_2

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Этот изодублет преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(2)$ – постулат, который косвенно подтверждается экспериментом. Именно этот комплексный дублет будет описывать хиггсовское поле, квантами которого являются бозоны Хиггса. Изодублет преобразуется при локальных калибровочных преобразованиях поля:

$$\varphi'(x) = U(x)\varphi(x), \quad (7.2)$$

произвольный элемент

$$U(x) = \exp(i\omega_a(x)\frac{\tau_a}{2}). \quad (7.3)$$

τ_a – матрицы Паули. Если не сказано, то предполагается суммирование по a . Локализуем калибровочную группу – добавим зависимость от координаты. Начинаем процедуру обобщения. Лагранжиан свободного поля (нет новых полей)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi \quad (7.4)$$

не инвариантен относительно глобальной симметрии. Закон преобразования выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi^{+'} \partial^\mu &= [\partial_\mu (\varphi^+ U^+)] [\partial^\mu (U \varphi)] = \\ &= \partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi + (\partial_\mu \varphi^+) (U^+ \partial^\mu U) \varphi - \varphi^+ (U^+ \partial^\mu U) \partial_\mu \varphi + \varphi^+ (\partial_\mu U^+) (\partial^\mu U) \varphi, \end{aligned} \quad (7.5)$$

причем из условия

$$U^+ U = I \quad (7.6)$$

следует

$$(\partial_\mu U^+) U + U^+ \partial_\mu U = 0. \quad (7.7)$$

Неабелево обобщение скалярной электродинамики

Используем калибровочный принцип, обобщая его на неабелевую электродинамику. По аналогии с абелевой электродинамикой введем «длинную» (ковариантную относительно ЛКП) производную:

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + ig \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a(x)) \varphi, \quad (7.8)$$

где W_μ^a – триплет неабелевых калибровочных полей (иногда называют полями Янга-Миллса). Теперь появились нетривиальные генераторы группы. Коэффициенты – неабелевы калибровочные поля, автоматически они имеют два индекса. Нижний –

индекс Лоренца, верхний – внутренние преобразования. Должна выполняться ковариантность (не в смысле Лоренца). Их закон преобразования относительно ЛКП выводим из требования:

$$(D_\mu \varphi)' \equiv D'_\mu \varphi' = U(D_\mu \varphi). \quad (7.9)$$

Удобнее работать с матричным представлением. Введем матричное 2×2 поле

$$W_\mu(x) = W_\mu^a(x) \frac{\tau_a}{2}. \quad (7.10)$$

Ставим в соответствие трехмерному вектору матрицу, которая конструируется из свертки компонент этого вещественного вектора с генераторами группы. Теперь это компоненты вектора в трехмерном вещественном внутреннем пространстве. Тогда

$$(D_\mu \varphi)' = (\partial_\mu + igW'_\mu)U\varphi = U(\partial_\mu + igW_\mu)\varphi. \quad (7.11)$$

Отсюда после честного дифференцирования получаем три слагаемых

$$(\partial_\mu U)\varphi + U\partial_\mu\varphi + igW'_\mu U\varphi = U\partial_\mu\varphi + igUW_\mu\varphi, \quad (7.12)$$

$$\frac{1}{ig}U^{-1}(\partial_\mu U)\varphi + U^{-1}W'_\mu U\varphi = W_\mu\varphi. \quad (7.13)$$

Сразу видно, что некоторые члены взаимоуничтожаются.

φ – произвольный вектор, значит получили операторное равенство:

$$W_\mu = U^{-1}W'_\mu U - \frac{i}{g}U^{-1}(\partial_\mu U), \quad (7.14)$$

или же в более удобном виде получаем

$$W'_\mu = UW_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (7.15)$$

Для инфинитезимальных (бесконечно малых) преобразований (разложим по малым параметрам) ($|\omega^a| \ll 1$):

$$U \simeq I - i\omega^a T_a, T_a = \frac{\tau_a}{2}, \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} W'_\mu &\simeq (1 - i\omega_a T_a)W_\mu(I + i\omega^b T_b) + \frac{i}{g}(-i(\partial_\mu \omega^a)T_a)(I + \omega^b T_b) = \\ &= W_\mu + i[W_\mu, \Omega] + \frac{1}{g}(\partial_\mu \omega^a)T_a, \end{aligned} \quad (7.17)$$

свертка генераторов с параметрами – это Ω . Рассмотрим её подробнее.

$$\Omega = \omega^b T_b, [W_\mu, \Omega] = \omega^b W_\mu^a [T_a, T_b] = i\omega^b W_\mu^a \varepsilon_{abc} T_c = -i\varepsilon_{cba} \omega^b W_\mu^a T_c, \quad (7.18)$$

$$W_\mu^{10} T_c = W_\mu^c T_c + \epsilon_{cba} \omega^b W_\mu T_c + \frac{1}{g} (\partial_\mu \omega^c) T_c \quad (7.19)$$

Введем 3-векторы во внутреннем (групповом) пространстве:

$$\vec{W}_\mu = (W_\mu^a), \vec{\omega} = (\omega^a). \quad (7.20)$$

Ответ был очевиден заранее – закон вращения трехмерного вектора (бесконечно малый поворот) + добавка, связанная с калибровочной природой вектора. Калибровочное поле преобразуется по присоединенному представлению, так как ϵ_{cba} – матричные элементы генераторов той же группы SU(2) в присоединенном представлении. Тогда

$$\vec{W}_\mu' = \vec{W}_\mu + \vec{\omega} \times \vec{W}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\omega}, \quad (7.21)$$

где $\vec{\omega} \times \vec{W}_\mu$ – вращение. Обобщаем электродинамику. По аналогии с абелевой электродинамикой введем тензор поля:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= W_{\mu\nu}^a T_a = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu = \\ &= (\partial_\mu + igW_\mu) W_\nu - (\partial_\nu + igW_\nu) W_\mu = \\ &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu], \end{aligned} \quad (7.22)$$

где коммутатор, отличный от нуля записывается в виде

$$[W_\mu, W_\nu] = W_\mu^b W_\nu^c [T_b, T_c] = i\epsilon_{abc} T_a W_\mu^b W_\nu^c, \quad (7.23)$$

отсюда после разложения по генераторам получаем, что тензор (напряженности) поля включает квадратичную комбинацию, которая явно зависит от структурной постоянной

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (7.24)$$

или

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g[\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu]. \quad (7.25)$$

g – это константа связи. Ее знак определяется конвекцией. Мы будем использовать ее со знаком «+». Заметим, что сама алгебра Ли может быть представлена на языке коммутаторов

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \varphi &= [\partial_\mu + igW_\mu, \partial_\nu + igW_\nu] \varphi = \\ &= ig(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) \varphi - g^2 [W_\mu, W_\nu] \varphi = igW_{\mu\nu} \varphi. \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$[D_\mu, D_\nu] = igW_{\mu\nu}. \quad (7.27)$$

Это выражение получено ввиду произвольности φ . Конечно, это можно проверить и для абелевой группы. Значит, получили нетривиальное неабелево обобщение. Поскольку

$$(D_\mu \varphi)' = U D_\mu \varphi, \quad (7.28)$$

то подставляя явное выражение получаем

$$([D_\mu, D_\nu] \varphi)' = U [D_\mu, D_\nu] \varphi, \quad (7.29)$$

отсюда

$$igW'_{\mu\nu} U \varphi = U igW_{\mu\nu} \varphi \quad (7.30)$$

значит

$$W'_{\mu\nu} = U W_{\mu\nu} U^{-1}, \quad (7.31)$$

или для б.м. ЛКП получаем ЧИСТОЕ вращение:

$$\vec{W}'_{\mu\nu} = \vec{W}_{\mu\nu} + \vec{\omega} \times \vec{W}_{\mu\nu}. \quad (7.32)$$

Лагранжиан введем по аналогии с электродинамикой (добавляя неабелевый индекс a)

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}), \quad (7.33)$$

так как по свойству следа

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\tau_a \tau_b) = \delta_{ab} = 2 \text{tr}(T_a T_b), \quad (7.34)$$

тут мы учли, что под знаком следа можно делать циклическую перестановку. Обеспечили калибровочную инвариантность лагранжиана. Видим, что идет свертка напряженностей полей, но сами напряженности содержат квадратичные слагаемые в отличие от абелевой теории. Коммутатор генераторов отличен от нуля. Это приводит к тому, что расписав лагранжиан, увидим, что появляются слагаемые кубичные по полям, а также квартичные. Можно разбить на две части: свободные (квадратичные части) и слагаемые, которые обеспечивают самодействие полей (неквадратичные: кубичные и квартичные).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varphi_{abc} W_\mu^b W_\nu^c) \times \\ &\times (\partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu} - g \varepsilon_{abc} W^{d\mu} W^{c\nu}) = \mathcal{L}_W^{(free)} + \mathcal{L}_W^{(int)}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\mathcal{L}_W^{(free)} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a) (\partial^\mu W^{a\nu} - \partial^\nu W^{a\mu}), \quad (7.36)$$

$$\mathcal{L}_W^{(int)} = g\epsilon_{abc}(\partial_\mu W_\nu^a)W^{b\mu}W^{c\nu} + \frac{g^2}{4}\epsilon_{abc}\epsilon_{ade}W_\mu^b W_\nu^c W^{a\mu}W^{e\nu}, \quad (7.37)$$

причем

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} + \delta_{bc}\delta_{cd}. \quad (7.38)$$

Иначе

$$\mathcal{L}_W^{(int)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu) \cdot (\partial^\mu \vec{W}^\nu - \partial^\nu \vec{W}^\mu) + \quad (7.39)$$

В квантовой теории поля $\mathcal{L}_W^{(int)}$ отвечают диаграммы Фейнмана вида:

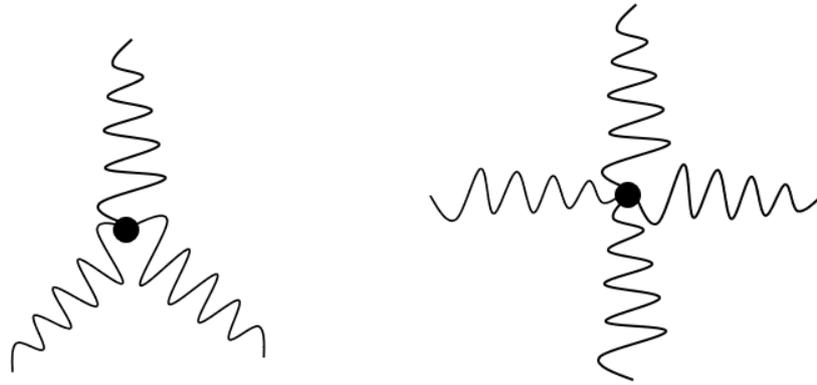


Рис. 7.1. Диаграммы Фейнмана

Они обусловлены нелинейными членами в $W_{\mu\nu}^a$, связанными с тем, что калибровочная группа $SU(2)$ неабелева:

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c. \quad (7.40)$$

Посмотрим, как выглядят уравнения движения неабелевых калибровочных полей:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial W^{a\mu}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial (\partial_\nu W^{a\mu})} = 0, \quad (7.41)$$

откуда вычисляем производные (первое слагаемое напоминает электродинамику – линейное слагаемое)

$$\partial^\nu W_{\mu\nu}^a + g\epsilon_{abc}W_{\mu\nu}^b W_a^{c\nu} = 0 \quad (7.42)$$

или

$$D_{ab}^\nu W_{\mu\nu}^b = 0, \quad (7.43)$$

где

$$D_{ab}^{\nu} = \delta_{ab}\partial^{\nu} + g\epsilon_{abc}W^{c\nu} = \delta_{ab}\partial^{\nu} + ig(t_c)_{ab}W^{c\nu}. \quad (7.44)$$

W^a преобразуется по векторному представлению. $(t_c)_{ab} = -i\epsilon_{cab}$ – генератор группы SU(2) в присоединенном представлении.

Лагранжиан неабелевого обобщения скалярной электродинамики – системы взаимодействующих полей: скалярного изодублета Ψ и триплета калибровочных полей W_{μ}^a имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_{\mu}\varphi)^{\dagger}(D^{\mu}\varphi) - m^2\varphi^{\dagger}\varphi - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} = \\ &= [\varphi^{\dagger}(\partial_{\mu} - ig\frac{\tau_a}{2}W_{\mu}^a)](\partial_{\mu} + ig\frac{\tau_b}{2}W^{b\mu})\varphi - \\ &- m\varphi^{\dagger}\varphi - \frac{1}{4}(\partial_{\mu}W_{\nu}^a - \partial_{\nu}W_{\mu}^a - g\epsilon_{abc}W_{\mu}^b W_{\nu}^c) \times (\partial^{\mu}W^{a\nu} - \partial^{\nu}W^{a\mu} - g\epsilon_{adc}W^{d\mu}W^{c\nu}), \end{aligned} \quad (7.45)$$

где $\varphi^{\dagger}\partial \equiv \partial_{\mu}\varphi^{\dagger}$. Обычная производная была заменена на ковариантную.

Взаимодействие поля φ с W_{μ}^a ($a = 1, 2, 3$) характеризуется одной и той же константой связи g . Это следствие неабелевой калибровочной группы SU(2):

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \longrightarrow [\lambda T_a, T_b] = -\epsilon_{abc}\lambda T_c, \quad (7.46)$$

откуда $\lambda^2 = \lambda$, а значит $\lambda = 1$, то есть масштаб (нормировка) генераторов одинаков. Универсальность проверяется экспериментально. Пусть есть процесс слабого взаимодействия – регулируется некий распад (обмен W -бозонами). Константа связи соответствующей присутствует во всех распадах, она будет одна и та же.

Лекция 8. Квантование полей. Частицы как кванты полей

Квантование полей

Рассмотрим, как возникают частицы как кванты поля, описанного с квантовой точки зрения.

Для простоты рассмотрим вещественное (действительное) скалярное поле $\varphi(x)$, $x = (t, \vec{r})$ – четырехмерный вектор. Лагранжиан такого поля уже хорошо известен:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (8.1)$$

Уравнение движения неоднократно выписывали

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} = 0. \quad (8.2)$$

Из него следует следующее равенство (уравнение Клейна-Гордона):

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (8.3)$$

где оператор Даламбера имеет вид:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (8.4)$$

Используем систему единиц, где $c = 1$. Если хотим, чтобы масса сходилась по размерности, то нужно добавить в знаменатель постоянную Планка в квадрате и в числитель скорость света в квадрате. Но мы работаем в другой системе единиц. Пока что рассматриваем классическую теорию поля. Покажем, что нашу систему можно представить в виде бесконечного набора осцилляторов, которые уже хорошо известны из классической и квантовой механики.

Общее решение можно найти, например, методом разделения переменных:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \int d^3k [A(\vec{k})e^{-ik \cdot x} + A^*(\vec{k})e^{ik \cdot x}], \quad (8.5)$$

скалярное произведение волнового вектора и пространственного вектора:

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad (8.6)$$

еще должна быть зависимость частоты от волнового вектора (дисперсия)

$$\omega = \omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (8.7)$$

то есть $k^2 = k_\mu k^\mu = m^2$.

Для наглядности интерпретации (особенно в статистической физике) в дальнейшем удобно рассматривать поля в конечном (макроскопически большом) объеме $V = L^3$, наложим периодические граничные условия по координатам:

$$\varphi(t, \vec{r}) = \varphi(t, \vec{r} + L\vec{n}), \quad (8.8)$$

где единичный вектор – тройка целых чисел

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3), n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда из-за условия периодичности спектр становится дискретным:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}. \quad (8.9)$$

Этот прием был известен уже в квантовой механике. Физический смысл имеют те частицы, которые имеют ограниченную норму. Квадрат модуля – плотность вероятности обнаружить в определенной точке частицу. Сами по себе плоские волны интерпретируются как описывающие состояние частицы с определенным импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Вводят иногда волновые пакеты, но Борн предложил более наглядную процедуру, описанную выше. Потом, конечно, устремим L к бесконечности.

Таким образом, уравнение может быть записано в виде трехкратной суммы. Имеем в виду, что сумма идет по всем значениям n .

$$\varphi(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} [A_{\vec{k}} e^{-ik \cdot x} + A_{\vec{k}}^* e^{ik \cdot x}], \quad (8.10)$$

где

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty}. \quad (8.11)$$

Запишем энергию поля

$$P^0 = \varepsilon = \int T^{00} d^3x, \quad (8.12)$$

где T^{00} – компонента тензора энергии-импульса, имеет смысл плотности энергии (получали при рассмотрении теоремы Нётер).

$$T^{(\mu)} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (8.13)$$

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (8.14)$$

Выразим ε через динамические переменные $A_{\vec{k}}$ и $A_{\vec{k}}^*$ (заметим, что $A_{\vec{k}}^* = A_{-\vec{k}}$ в силу вещественности поля $\varphi(t, \vec{r}) = \varphi^*(t, \vec{r})$). Имеем

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \int d^3x (-\omega \omega') (-A_{\vec{k}} e^{-ikx} + A_{\vec{k}}^* e^{ikx}) \times (-A_{\vec{k}'} e^{-ik'x} + A_{\vec{k}'}^* e^{ik'x}). \quad (8.15)$$

Используем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x e^{-i(k+k') \cdot x} &= e^{-i(\omega+\omega')t} \times \int_V d^3x e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{r}} = \\ &= V e^{-2i\omega t} \delta_{\vec{k}', -\vec{k}}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где $\delta_{\vec{k}', -\vec{k}} = \delta_{n'_1 - n_1} \times \delta_{n'_2 - n_2} \times \delta_{n'_3 - n_3}$, так как

$$\int_0^L dx \exp\left[\frac{2\pi i}{L}(n'_1 + n_1)x\right] = L \delta_{n'_1 - n_1}, \quad 2\omega \int dy = \int dz. \quad (8.17)$$

Тогда для возникнет куб

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = V \sum_{\vec{k}} (-\omega^2) [A_{\vec{k}} A_{-\vec{k}} e^{-2i\omega t} + A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}^* e^{2i\omega t} - A_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* - A_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}], \quad (8.18)$$

аналогично получим

$$\int d^3x (\nabla \varphi)^2 = V \sum_{\vec{k}} (+\vec{k}^2) [A_{\vec{k}} A_{-\vec{k}} e^{-2i\omega t} + A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}^* e^{2i\omega t} + A_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* + A_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}], \quad (8.19)$$

$$\int d^3x m^2 \varphi^2 = V \sum_{\vec{k}} m^2 [A_{\vec{k}} A_{-\vec{k}} e^{-2i\omega t} + A_{\vec{k}}^* A_{\vec{k}}^* e^{2i\omega t} + A_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* + A_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}]. \quad (8.20)$$

Видим явную зависимость от времени. С учетом

$$-\omega^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0 \quad (8.21)$$

получаем:

$$\varepsilon = V \sum_{\vec{k}} \omega^2 (A_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^* + A_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}}). \quad (8.22)$$

Из-за закона дисперсии теперь нельзя считать ω независимой. Зависимость от времени в каждом из трех слагаемых сокращает друг друга. Так и должно быть.

Метод Гамильтона

Перейдем теперь от метода Лагранжа к методу Гамильтона, используя аналогично с классической механикой. Пока работаем в пределах классической теории поля.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (8.23)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \end{cases} \quad (8.24)$$

Точка – это производная по времени.

$$H(q, p, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)|_{\dot{q}, q, p, t}, \quad (8.25)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (8.26)$$

при условии $\dot{q} = f_k(q, p, t)$

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \quad (8.27)$$

В теории поля имеем уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi}. \end{cases} \quad (8.28)$$

Теория поля – континуальный аналог механики. Справа стоят вариационные от функционала производные (не частные). Здесь функционал (гамильтониан)

$$H[\varphi, \pi] = \int \mathcal{H} d^3x, \quad (8.29)$$

φ – координата поля. Функционал строится по известному в теории поля правилу. Гамильтонова плотность:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}|_{\varphi(\varphi, \nabla \varphi, \pi)}, \quad (8.30)$$

$$\pi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (8.31)$$

Проверим, что из уравнения Лагранжа $(\square + m^2)\varphi = 0$ следует система двух уравнений Гамильтона. Имеем расписанный подробно лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2, \quad (8.32)$$

уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\varphi)} = 0 \quad (8.33)$$

причем

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = (\partial_k), k = 1, 2, 3; \quad (8.34)$$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (8.35)$$

Теперь строим гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2. \quad (8.36)$$

В итоге получаем гамильтониан

$$H[\varphi, \pi] = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right]. \quad (8.37)$$

Теперь вставляем это в уравнения Гамильтона.

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \pi \quad (8.38)$$

так как \mathcal{H} не зависит от $\vec{\nabla}\pi$.

$$\frac{\delta H}{\delta\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} - \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_k\varphi)}\right) = \left[\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_k\varphi)}\right)\right] = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\varphi)} = m^2\varphi - \vec{\nabla}^2\varphi. \quad (8.39)$$

Получаем систему уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \pi, \\ \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta\varphi} = -m^2\varphi + \vec{\nabla}^2\varphi \end{cases} \quad (8.40)$$

Поскольку $\dot{\varphi} = \pi$:

$$\ddot{\varphi} = -m^2\varphi + \vec{\nabla}^2\varphi = 0, \quad (8.41)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\varphi = 0, \quad (8.42)$$

получаем уравнение Лагранжа

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (8.43)$$

Действительно, воспроизвели уравнение Лагранжа. Делаем логический скачок. Переходим к каноническому квантованию. Используем аналогично с квантовой механикой, где канонические коммутаторные соотношения имеют вид:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{kl}\hat{I}, \quad (8.44)$$

где \hat{q}_k, \hat{p}_k – операторы координаты и импульса.

В теории поля постулируем канонические коммутаторные соотношения в теории поля ($\hat{q}_k \longrightarrow \varphi(t, \vec{r})$), ($\hat{p}_l \longrightarrow \hat{\pi}(t, \vec{r}')$), $\delta_{kl} \longrightarrow \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$:

$$CCR : [\hat{\varphi}(t, \vec{r}), \hat{\pi}(t, \vec{r}')] = i\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (8.45)$$

Данное уравнение записано в системе единиц $\hbar = c = 1$.

$$\hat{\varphi}(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} (\hat{A}_{\vec{k}}^- e^{-ik \cdot x} + \hat{A}_{\vec{k}}^+ e^{ik \cdot x}), \quad (8.46)$$

где $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^+$ – эрмитов оператор, действующий в некотором пространстве векторов состояний квантовой системы. «+» обозначает эрмитово сопряжение. Из CCR получим коммутационные соотношения для операторов $\hat{A}_{\vec{k}}, \hat{A}_{\vec{k}}^+$.

$$[\sum_{\vec{k}} (\hat{A}_{\vec{k}}^- e^{-ik \cdot x} + \hat{A}_{\vec{k}}^+ e^{ik \cdot x}), \sum_{\vec{k}'} i\omega (-\hat{A}_{\vec{k}'}^- e^{-ik' \cdot x'} + \hat{A}_{\vec{k}'}^+ e^{ik' \cdot x'})] = \quad (8.47)$$

$$\sum_{\vec{k}, \vec{k}'} i\omega' (-[\hat{A}_{\vec{k}}^-, \hat{A}_{\vec{k}'}^-] e^{-ik \cdot x - ik' \cdot x'} + [\hat{A}_{\vec{k}}^+, \hat{A}_{\vec{k}'}^+] e^{ik \cdot x + ik' \cdot x'} + [\hat{A}_{\vec{k}}^-, \hat{A}_{\vec{k}'}^+] e^{-ik \cdot x + ik' \cdot x'} + (-[\hat{A}_{\vec{k}}^+, \hat{A}_{\vec{k}'}^-]) e^{ik \cdot x - ik' \cdot x'}),$$

где $k \cdot x = -\vec{k} \cdot \vec{r}, k' \cdot x' = \omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r}'$. Мы должны получить правую часть R (CCR):

$$R = i\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (8.48)$$

которая не зависит от времени t . Это возможно только при условиях:

$$\begin{cases} [\hat{A}_{\vec{k}}, \hat{A}_{\vec{k}'}^-] = 0, \\ [\hat{A}_{\vec{k}}^+, \hat{A}_{\vec{k}'}^-]^+ = 0, \\ [\hat{A}_{\vec{k}}^-, \hat{A}_{\vec{k}'}^+] = C_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}. \end{cases} \quad (8.49)$$

Здесь $C_{\vec{k}}$ подлежит определению. Для этого используем условие полноты

$$\sum_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (8.50)$$

Сама по себе дельта-функция – ядро единичного оператора. На функциональном языке имеет место формальное представление дельта-функции.

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (8.51)$$

Плоские волны должны удовлетворять условию:

$$\int d^3x \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \varphi_{\vec{k}'}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (8.52)$$

То есть, учитывая, что волны плоские и вспоминая условие полноты:

$$\sum_{\vec{k}} e^{\pm i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} = V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'), \quad (8.53)$$

следовательно

$$i \sum_{\vec{k}} \omega C_{\vec{k}} V [e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} + e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}] = i \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'), \quad (8.54)$$

откуда получаем:

$$2\omega V C_{\vec{k}} = 1. \quad (8.55)$$

Введем для известных операторов переходный коэффициент:

$$\begin{cases} \hat{A}_{\vec{k}} = \frac{\hat{a}_{\vec{k}}}{2\omega V}, \\ \hat{A}_{\vec{k}}^+ = \frac{\hat{a}_{\vec{k}}^+}{2\omega V}. \end{cases} \quad (8.56)$$

Тогда можно записать более простые коммутационные соотношения:

$$\hat{\varphi}(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ e^{ik\cdot x}], \quad (8.57)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^+] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad (8.58)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}^+, \hat{a}_{\vec{k}'}^+] = [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = 0. \quad (8.59)$$

Это и есть каноническое квантование.

Применим его, чтобы записать более понятные нам величины в этих терминах. Напишем, как выглядит гамильтониан (оператор энергии).

$$\hat{H} = \hat{P}^0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+) = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) = \sum_{\vec{k}} \hat{H}_{\vec{k}}, \quad (8.60)$$

$$\hat{H}_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}(\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}). \quad (8.61)$$

Гамильтониан квантового поля представим в виде суммы (бесконечной) гармонических квантовых осцилляторов $H_{\vec{k}}$ с частотой $\omega_{\vec{k}}$. Спектр осциллятора эквидистантный.

Из квантовой механики известно, что собственные значения оператора $N_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} = \hat{N}_{\vec{k}}^+$ равны

$$n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots \quad (8.62)$$

Потому спектр \hat{H} таков:

$$E_{n_{\vec{k}}} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}). \quad (8.63)$$

Собственные векторы $\hat{H}_{\vec{k}}$:

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{(\hat{a}_{\vec{k}}^+)^{n_{\vec{k}}}}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} |0_{\vec{k}}\rangle, \quad (8.64)$$

где $|0_{\vec{k}}\rangle$ – это основное состояние ($n_{\vec{k}} = 0$):

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0_{\vec{k}}\rangle = 0; \quad (8.65)$$

Известные результаты из квантовой механики:

$$\begin{cases} \hat{a}_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}}} |n_{\vec{k}} - 1\rangle, \\ \hat{a}_{\vec{k}}^+ |n_{\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} |n_{\vec{k}} + 1\rangle \end{cases} \quad (8.66)$$

\hat{a} – оператор уничтожения, \hat{a}^+ – оператор рождения. В квантовой теории поля используется интерпретация в терминах частиц-квантов поля.

Состояние с минимальной энергией (вакуум) – вообще нет частиц ни с какой энергией:

$$|0\rangle = \prod_{\vec{k}} |0_{\vec{k}}\rangle, \hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0. \quad (8.67)$$

1-частичное состояние:

$$|1_{\vec{k}}\rangle = \hat{a}_{\vec{k}}^+ |0\rangle, \quad (8.68)$$

содержит одну частицу с энергией $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ и импульсом \vec{k} , 2-частичное состояние:

$$|1_{\vec{k}} 1_{\vec{k}}\rangle = \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^+ |0\rangle, \quad (8.69)$$

содержит две частицы с энергиями и импульсом $\omega_{\vec{k}}, \vec{k}$ и $\omega'_{\vec{k}}, \vec{k}'$ соответственно.

Импульс \vec{k} состояния $|1_{\vec{k}}\rangle$ следует из представления оператора 4-импульса поля:

$$\hat{P}^* = (\hat{H}, \hat{\vec{P}}) = \sum_{\vec{k}} k^\mu (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}), \quad (8.70)$$

где $k^\mu = (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$ – 4-импульс частицы; $\hat{a}_{\vec{k}}^+$ – оператор рождения частицы с 4-импульсом k^μ ; $\hat{a}_{\vec{k}}$ – оператор уничтожения такой же частицы. Это видно из квантовомеханических соотношений. Энергия определена с точностью до константы, будем считать, что энергия вакуума не является нулевой. Технически это сводится к тому, что исчезает $\frac{1}{2}$ (переопределяем начало отсчета энергии). Появляется оператор 4-импульса системы.

Волновая функция частицы – это матричный элемент оператора $\hat{\Phi}(t, \mathbf{r})$ между 1-частичным соотношением и вакуумом:

$$\langle 0 | \hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) | 1_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}V} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (8.71)$$

Используем с точки зрения квантовой теории поля.

Замечания.

1.

$$E_{\vec{p}} = \hbar\omega_{\vec{k}}, \quad (8.72)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}; \quad (8.73)$$

Уравнение Клейна-Гордона:

$$\left(\square + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\right)\varphi(t, \mathbf{r}) = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (8.74)$$

2. Аналогично можно рассмотреть комплексное скалярное поле:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (8.75)$$

Процедура квантования приводит к появлению двух типов операторов: $\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^+, \hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^+$.

Тогда

$$\begin{cases} \hat{\Phi}(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{i\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} (\hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k}}^+ e^{ikx}) \right), \\ \hat{\Phi}^+(t, \vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} (\hat{a}_{\vec{k}}^+ e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k}} e^{-ikx}) \right), \end{cases} \quad (8.76)$$

$$\begin{cases} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^+] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \\ [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}'}^+] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \\ [a, a] = [b, b] = [a^+, b] = [a, b^+] = 0. \end{cases} \quad (8.77)$$

В этом случае

$$\hat{P}^* = \sum_{\vec{k}} k^\mu (\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + \hat{b}_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}}^+ + 1). \quad (8.78)$$

Здесь $\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}}^+$ относятся к частицам, а $\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^+$ относятся к античастицам, которые отличаются от частиц знаком электрического заряда. Масса таких частиц одинакова.

Такая интерпретация следует из представления электрического заряда в виде:

$$\hat{Q} = i \int d^3x \left(\hat{\phi} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\phi}^+}{\partial t} \hat{\phi} \right) = \sum_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} - \hat{b}_{\vec{k}}^+ \hat{b}_{\vec{k}} - 1) \quad (8.79)$$

Для состояний с 1 частицей (античастицей)

$$\begin{cases} |1_{\vec{k}}^a\rangle = \hat{a}_{\vec{k}}^+ |0\rangle, \\ |1_{\vec{k}}^b\rangle = \hat{b}_{\vec{k}}^+ |0\rangle \end{cases} \quad (8.80)$$

имеем

$$\begin{cases} \hat{Q} |1_{\vec{k}}^a\rangle = |1_{\vec{k}}^a\rangle, \\ \hat{Q} |1_{\vec{k}}^b\rangle = -|1_{\vec{k}}^b\rangle \end{cases} \quad (8.81)$$

Можно ввести систему взаимодействующих полей.

Основы квантовой теории поля излагаются в спецкурсе профессора В.Ч. Жуковского.

Лекция 9. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Механизм Браута-Энглера-Хиггса генерации масс элементарных частиц. Непрерывная абелева симметрия

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Механизм Браута-Энглера-Хиггса генерации масс элементарных частиц

Обсудим важный аспект теории поля, который используется для построения Стандартной модели – спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Это используется для генерации масс элементарных частиц. Первоначально Стандартная модель использует безмассовые частицы, а масса генерируется за счет того, что частицы движутся в вакууме (заполнен хиггсовским конденсатом).

Введение в лагранжиан массового слагаемого калибровочных бозонов типа $\frac{1}{2}m_W^2 W_\mu^a W^{a\mu}$ (μ – индекс Лоренца) явно нарушает калибровочную инвариантность. Это пример явного нарушения симметрии лагранжиана, который первоначально включал в себя только безмассовые частицы.

Другой случай: лагранжиан симметричен, а физический вакуум несимметричен. Тогда говорят, что симметрия спонтанно нарушена. Симметрия вакуума не отражается на симметрии решений. С этим примером уже встречались в классической механике. Часто встречаемся в макроскопической физике.

Покажем, что если лагранжиан обладает точной непрерывной глобальной симметрией, не являющейся симметрией основного состояния (вакуума), то ее спонтанное нарушение приводит к появлению безмассовых скалярных бозонов (так называемая теорема Голдстоуна). Применим это к физике частиц. Если нарушена локальная калибровочная симметрия, то безмассовые калибровочные бозоны и безмассовые голдстоуны (по имени предсказавшего их ученого), объединяясь друг с другом, исчезают из физического сектора, образуя массивные векторные бозоны (они наблюдаемы экспериментально). Это явление называется механизмом Браута-Энглера-Хиггса (1964).

Г. Тофт (G. 't Hooft, 1971) показал, что калибровочные теории перенормируемы даже в случае спонтанного нарушения симметрии (СНС). После этого стало возможным вычислять радиационные поправки с высокой точностью.

Сначала рассмотрим случай дискретной симметрии на примере скалярного вещественного поля с самодействием:

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \varphi \partial^a \varphi - V(\varphi), \\ V(\varphi) = -\frac{1}{2} \mu \varphi^2 + \frac{1}{4} \lambda \varphi^4, \\ \lambda > 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

$V(\varphi)$ – потенциал. Включение квартичного слагаемого означает, что частицы между собой взаимодействуют. Если $\lambda < 0$, то теория не может описывать реальный мир. Лагранжиан имеет дискретную симметрию:

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = -\varphi. \quad (9.2)$$

Плотность энергии:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + V(\varphi). \quad (9.3)$$

Минимум энергии при $\mu > 0$ достигается на решениях

$$\begin{cases} \varphi = \pm v, \\ v = \frac{\mu^{1/2}}{\lambda^{1/2}}. \end{cases} \quad (9.4)$$

Замечание.

Пространства Фока, построенные на разных вакуумах, говоря на математическом языке, ортогональны друг другу. Поэтому нельзя построить теорию на основе суперпозиции двух вакуумов.

Рассмотрим возбуждения над вакуумом:

$$\varphi(x) = v + h(x). \quad (9.5)$$

Здесь v – это константа. Тогда лагранжиан (опускаем const):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha h \partial^\alpha h - \mu h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4. \quad (9.6)$$

Отсюда видно, что поле $h(x)$ описывает частицы с массой

$$m_h = \sqrt{2\mu} = \sqrt{2\lambda} v. \quad (9.7)$$

Масса частицы определяется вакуумными характеристиками и самодействием.

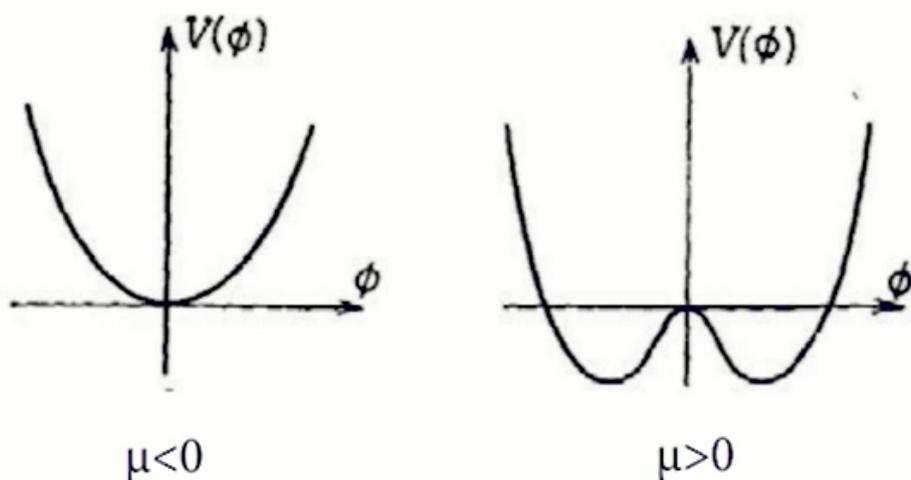


Рис. 9.1. Вид потенциала при различных значениях μ

Непрерывная абелева симметрия

Рассмотрим теперь двухкомпонентное поле.

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 - V(\varphi^2), \\ \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \\ V(\varphi^2) = -\frac{\mu}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4. \end{cases} \quad (9.8)$$

Имеем $SO(2)$ -симметрию лагранжиана:

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

При $\mu > 0$ минимум, определяемый из условий равенства нулю первых производных

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial V}{\partial\varphi_2} = 0, \quad (9.10)$$

достигается при

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2, \quad v = \sqrt{\mu/\lambda}. \quad (9.11)$$

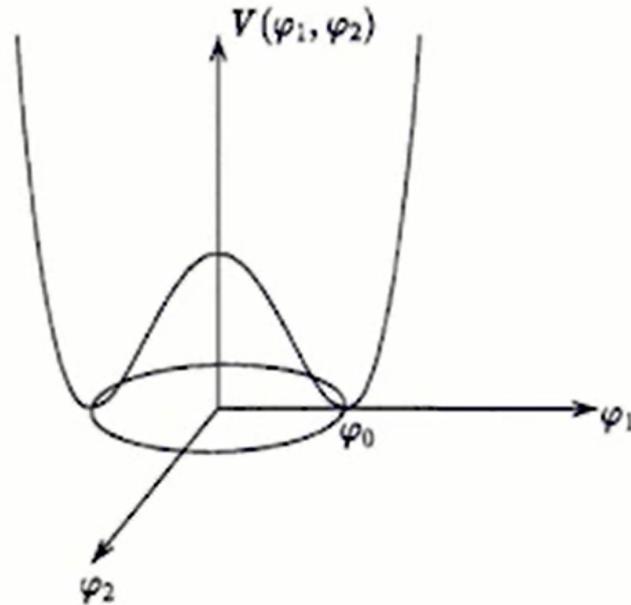


Рис. 9.2. Исследуемая поверхность

Имеется бесконечное число вырожденных вакуумов. Выберем для определенности:

$$\langle 0|\varphi_1|0 \rangle = v, \langle 0|\varphi_2|0 \rangle = 0. \quad (9.12)$$

При этом симметрия $SO(2)$ рассматриваемой поверхности нарушается.

Положим

$$\varphi_1 = v + h, \quad (9.13)$$

$$\varphi_2 = \phi. \quad (9.14)$$

Тогда лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial h)^2 + (\partial \phi)^2] - \mu h^2 - \lambda v h(h^2 + \phi^2) - \frac{1}{4}\lambda(h^2 + \phi^2)^2. \quad (9.15)$$

Следовательно, поле h отвечает частицам с массой $m_h = \sqrt{2\mu}$, поле ϕ – безмассовым голдстоуновским бозонам. Безмассовая частица – колебания с нулевой частотой.

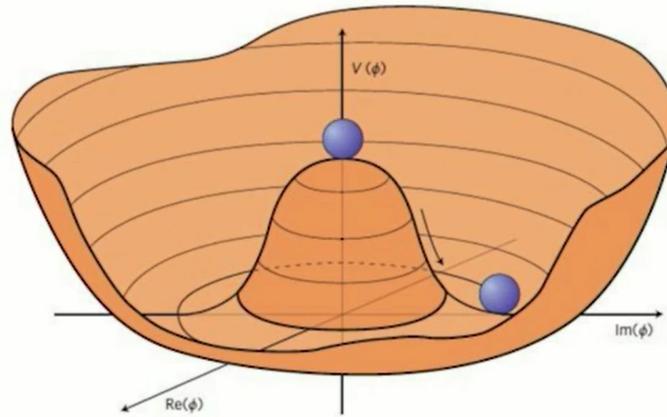


Рис. 9.3. Исследуемая поверхность – мексиканская шляпа. Шарик иллюстрирует механическую модель: он скатывается, если поверхность неустойчива

Механизм Браута-Энглера-Хиггса

Рассмотрим теперь более реалистичную ситуацию. Сперва – абелев случай.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = (D_\alpha \varphi)^* D^\alpha \varphi + \mu \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2 - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2), \\ D_\alpha \varphi = (\partial_\alpha + ieA_\alpha) \varphi, \\ F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \end{array} \right. \quad (9.16)$$

Имеем U(1)-симметрию:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = e^{ie\omega(x)} \varphi(x), \\ A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \omega(x). \end{array} \right. \quad (9.17)$$

При $\mu > 0$ минимум $V(\varphi^* \varphi)$ достигается при

$$|\varphi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}}. \quad (9.18)$$

После спонтанного нарушения симметрии представим поле в виде, удобном для интерпретации:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x)) \exp\left(\frac{i}{v} \xi\right). \quad (9.19)$$

Раз есть два декартовых поля, то можно их выразить через два других поля, между ними есть связь. Далее воспользуемся локальной калибровочной инвариантностью лагранжиана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \longrightarrow \varphi' = \exp\left(-\frac{i}{v}\xi\right)\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h), \\ A_\alpha \longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \frac{1}{ev}\partial_\alpha\xi \equiv B_\alpha, \\ D_\alpha\varphi \longrightarrow D'_\alpha\varphi' = (\partial_\alpha + ieA'_\alpha)\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\alpha h + ieB_\alpha(v+h)). \end{array} \right. \quad (9.20)$$

Вместо исходных полей ставим калибровочно преобразованные – основная идея. Лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{e^2}{2}(v+h)^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}\lambda v^2(v+h)^2 - \frac{1}{4}\lambda(v+h)^4 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1. \quad (9.21)$$

\mathcal{L}_0 – лагранжиан свободных полей, \mathcal{L}_1 – лагранжиан взаимодействия.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_B^2 B_\mu B^\mu, \\ m_h = \sqrt{2\lambda}v, \\ m_B = |e|v; \\ \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}e^2 h(2v+h)B_\mu B^\mu - \lambda v^2 h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4. \end{array} \right. \quad (9.22)$$

Итак, \mathcal{L}_0 – это лагранжиан свободных массивных частиц: скалярного бозона с массой m_h и векторного бозона с массой m_B . Массовое слагаемое находилось в кинетической энергии исходного лагранжиана. Лагранжиан \mathcal{L}_1 описывает взаимодействие этих бозонов друг с другом, а также самодействие скалярных бозонов. После голдстоуновских бозонов ξ исчезло из лагранжиана, перейдя в продольную компоненту массивного калибровочного поля B_μ . Эта модель используется для описания явления сверхпроводимости.

Теперь рассмотрим неабелев случай спонтанного нарушения симметрии. Выберем калибровочную группу $SU(2)$ и скалярный комплексный дублет $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)^T$.

Каждое из полей само по себе тоже комплексное. Лагранжиан инвариантен теперь относительно группы $SU(2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^\dagger D^\mu \varphi - V(\varphi^\dagger \varphi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}, \\ D_\mu \varphi = (\partial_\mu + ig T_a W_\mu^a) \varphi, T_a = \frac{\tau_a}{2}, \\ W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ V(\varphi^\dagger \varphi) = -\mu \varphi^\dagger \varphi + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2. \end{array} \right. \quad (9.23)$$

Потенциал модифицировали так, чтобы стало возможным спонтанное нарушение симметрии. Выбираем параметризацию дублета в виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{v} \xi^a(x) T_a\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} + H(x) \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

В экспоненте теперь три параметра, а не один как раньше. Переходим к унитарной калибровке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \longrightarrow \varphi' = U \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} + H(x) \end{pmatrix}, \\ W_\mu \longrightarrow W'_\mu = U W_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}, \\ D_\mu \varphi \longrightarrow D'_\mu \varphi' = U D_\mu \varphi, \\ U = \exp\left(-\frac{i}{v} \xi^a(x) T_a\right). \end{array} \right. \quad (9.25)$$

В итоге получаем лагранжиан в унитарной калибровке (в преобразованных полях, но штрихи опускаем!):

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi)^\dagger D^\mu \varphi + \frac{1}{2} \lambda v^2 (\mathbf{v} + H)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\mathbf{v} + H)^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}. \quad (9.26)$$

Здесь первый член (кинетический) содержит слагаемое

$$\begin{cases} \mathcal{L}_m = \varphi_0^+ (-igT_a W_\mu^a) (igT_b W^{b\mu}) \varphi_0, \\ \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (9.27)$$

С учетом свойства генераторов SU(2),

$$T_a T_b = \frac{1}{4} \tau_a \tau_b = \frac{1}{4} (\delta_{ab} I + i \varepsilon_{abc} \tau_c), \quad (9.28)$$

воспользовавшись известным свойством матриц Паули, получаем

$$\frac{g^2}{8} (0, \mathbf{v}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \delta_{ab} W_\mu^a W^{b\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{g\mathbf{v}}{2}\right)^2 W_\mu^a W^{a\mu}. \quad (9.29)$$

Под квадратом стоит масса калибровочного бозона. Эта формула в точности совпадает с той, которая используется в полномасштабной Стандартной модели. Отсюда следует, что триплет полей W_μ^a отвечает векторным калибровочным бозонам с массой

$$m_W = \frac{1}{2} g\mathbf{v}. \quad (9.30)$$

ВЫВОД: калибровочная симметрия SU(2) полностью нарушена, все 3 первоначально безмассовых калибровочных поля стали массивными, 3 голдстоуновских бозона при этом исчезли, но осталась 1 массивная частица – хиггсовский бозон.

Число степеней свободы при этом, конечно, не изменилось:

$$10 = 4(\text{скал}) + 3 \times 2(\text{вект}) = 1(\text{скал}) + 3 \times 3(\text{вект}), \quad (9.31)$$

где скал – скалярные поля, вект – векторные поля.

Замечание.

Способ спонтанного нарушения симметрии не произволен, а зависит от структуры теории, в частности от типа представления, которому принадлежит мультиплет скалярных полей.

Лекция 10. Группа $SL(2, \mathbb{C})$. 4-мерные спиноры.

Инверсия спиноров

Группа $SL(2, \mathbb{C})$. Спинорное представление группы Лоренца

Поговорим о группе $SL(2, \mathbb{C})$. Эта группа – специальное линейное преобразование в двумерном линейном пространстве. Эта группа важна для приложений в Стандартной модели. Фундаментальное представление этой группы действует в двумерном комплексном пространстве. Соответствующие объекты, которые подвергаются преобразованию этой группы, являются спинорами. Покажем, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ гомоморфна группе Лоренца, затем придем, исходя из естественных требований, к уравнению Дирака. С математической точки зрения спиноры более элементарные объекты, чем тензоры. Главная цель сегодня – ввести уравнение Дирака, чтобы описать необходимые понятия Стандартной модели. Рассмотрим группу комплексных матриц (8 упорядоченных действительных чисел):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (10.1)$$

Матрица комплексна, но не произвольна, условие унитарности накладывать не будем.

$$\det A = \alpha\delta - \gamma\beta = 1. \quad (10.2)$$

Число независимых параметров равно $4 \times 2 - 2 = 6$. Как и в группе Лоренца. Множество матриц A действительно образует группу $SL(2, \mathbb{C})$.

Задача. Покажите это.

Так как $\det A \neq 0$, то существует обратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Фундаментальное (спинорное) представление группы в 2-мерном комплексном пространстве \mathbb{C}^2 :

$$a^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha} a^{\beta}. \quad (10.4)$$

В литературе принято несколько систем обозначения. Мы будем называть спиноры латинскими буквами, чтобы не перегружать запись. К греческим буквам вернемся

позже. Важная роль принадлежит матрице $C \in SL(2, C)$:

$$C = (\epsilon^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -C^+ = -C^{-1}. \quad (10.5)$$

В Стандартной модели такая матрица используется как матрица зарядового сопряжения. Легко проверить, что матрица антиэрмитова и она совпадает со своей обратной матрицей.

Задача. В качестве упражнения, покажите, что обратная матрица может быть получена путем преобразования подобия

$$A^{-1} = C^{-1}A^T C. \quad (10.6)$$

Введем базисные матрицы (набор из четырех матриц):

$$\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma), \sigma_0 = I. \quad (10.7)$$

Разложение по базису произвольной комплексной 2×2 -матрицы:

$$B = B(\mu)\sigma_\mu = \begin{pmatrix} B(0) + B(3) & B(1) - iB(2) \\ B(1) + iB(2) & B(0) - B(3) \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

где комплексные числа

$$B(\mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu B). \quad (10.9)$$

С учетом соотношения

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad (10.10)$$

получаем

$$\det B = B^2(0) - \sum_{k=1}^3 B^2(k). \quad (10.11)$$

Для унимодулярной матрицы A имеем:

$$\det A = A^2(0) - \sum_{k=1}^3 A^2(k) = 1. \quad (10.12)$$

Установим соответствие:

$$x^\mu \longrightarrow X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (10.13)$$

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu X). \quad (10.14)$$

Свойства матрицы X :

$$\begin{cases} X^+ = X, \\ \det X = (x^0)^2 - \sum_x (x^k)^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = x_\mu x^\mu = x \cdot x. \end{cases} \quad (10.15)$$

Рассмотрим представление группы в пространстве именно матриц X (убедимся, что это представление высшей размерности), установим закон преобразования:

$$X \longrightarrow X' = AXA^+, A \in SL(2, C). \quad (10.16)$$

При этом условии унитарности сохраняется

$$\begin{cases} X^{+'} = X', \\ \det X' = \det X \end{cases} \quad (10.17)$$

ввиду

$$\det A^+ = \det A = 1. \quad (10.18)$$

Следовательно, сохраняется равенство $x' \cdot x' = x \cdot x$, и установлено соответствие между группами $SL(2, C)$ и $SO(1, 3)$:

$$X \longrightarrow X' \implies x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda_\nu^\mu x^\nu. \quad (10.19)$$

Коэффициенты выражаются через след:

$$x^{\mu'} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu X'), X' = \sigma_\nu x^{\nu'}. \quad (10.20)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^\mu(A) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+) = \Lambda_\nu^\mu(-A), \\ \pm A \in SL(2, C) &\longrightarrow \Lambda(A) \in SO(1, 3). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Определим матрицы

$$\begin{cases} \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \Lambda_\nu^\lambda \text{tr}(\tilde{\sigma}_\mu A \sigma_\nu A^+), \\ (\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma) = C^{-1} \sigma_\mu^T C. \end{cases} \quad (10.22)$$

Задача. Покажите справедливость соотношений:

$$\begin{cases} \sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu = 2g_{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu) = g_{\mu\nu}, \\ g_{\mu\nu} (\sigma_\mu)_{ij} (\tilde{\sigma}_\nu)_{kn} = 2\delta_{in} \delta_{jk}. \end{cases} \quad (10.23)$$

используя эти соотношения, нетрудно проверить, что

$$\Lambda_{\mu\nu}(A) \in L_+^\uparrow. \quad (10.24)$$

В частности,

$$\Lambda_0^0 = \frac{1}{2} \text{tr}(AA^+) \geq 1. \quad (10.25)$$

Определим матрицы

$$\tilde{X} = \tilde{\sigma}_\mu x^\mu = C^{-1} \sigma_\mu^T C x^\mu, \quad (10.26)$$

Так как в силу $\sigma_\mu^+ = \sigma_\mu$ имеем $\sigma_\mu^T = \sigma_\mu^*$, $X^* = \sigma^* x^\mu = \sigma_\mu^T x^\mu$. С учетом

$$A^{-1} = C^{-1} A^T C \quad (10.27)$$

получаем закон преобразования

$$\tilde{X}' = (A^{-1})^+ \tilde{X} A^{-1}, \quad (10.28)$$

то есть $X \longrightarrow \tilde{X}$ означает $A \longrightarrow (A^{-1})^+$.

Замечание.

В группе $SU(2) \in SL(2, C)$ имеем

$$A^+ \longrightarrow (A^{-1})^+ = A \implies \tilde{X} \sim X. \quad (10.29)$$

Далее находим:

$$(X\tilde{Y})' = A(X\tilde{Y})A^{-1}. \quad (10.30)$$

Имеем:

$$\frac{1}{2} \text{tr}(X\tilde{Y})^\mu y^\mu \cdot \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = xy. \quad (10.31)$$

Общий вид матрицы A :

$$A = UH, UU^+ = I, H = H^+. \quad (10.32)$$

Действительно,

$$A^+ A = HU^+ UH = H^2 \implies U = AH^{-1} = A(A^+ A)^{-1/2}. \quad (10.33)$$

Покажем, что $A = H$ означает буст (чистое преобразование Лоренца), $A = H$ соответствует пространственному вращению.

Пусть

$$A = H = H(\mu) \sigma_\mu, \quad (10.34)$$

$$H(\boldsymbol{\mu}) = (H(\boldsymbol{\mu}))^*.$$

Ввиду

$$\det A = \det H = 1 = H^2(0) - \sum_k H^2(k) = 1 \quad (10.35)$$

можно выбрать параметризованные коэффициенты разложения

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0) = ch \frac{\omega}{2}, \\ H(k) = n_k sh \frac{\omega}{2}, \\ \sum_k n_k^2 = 1, \\ \mathbf{n} = (n_k), \\ |\mathbf{n}| = 1. \end{array} \right. \quad (10.36)$$

$$H = \sigma_0 ch - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) sh \frac{\omega}{2} = \exp\left[-\frac{\omega}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\right]. \quad (10.37)$$

Задача. Покажите, что если сделать такой закон преобразования

$$X' = HXH^+ \implies x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (10.38)$$

то

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 ch\omega - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} sh\omega) \\ \mathbf{x} - \mathbf{n}x^0 sh\omega + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(ch\omega - 1) \end{pmatrix}. \quad (10.39)$$

Следовательно, это описывает буст со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{n}th\omega$. Если $A = U \in SU(2)$ унитарная матрица, то упражнение покажет, что

$$U = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right), \quad (10.40)$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \cos\theta + \mathbf{n} \times \mathbf{x} \sin\theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos\theta) \end{pmatrix}. \quad (10.41)$$

Буква θ – угол поворота. Общее преобразование Лоренца включает буст и вращение:

$$A = \exp\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + i\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right], \quad (10.42)$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}$ – произвольные вещественные векторы. Матрица содержит информацию для пространства Минковского.

4-мерные спиноры

Перейдем теперь к интерпретации всего обсужденного ранее на компонентном языке. Нужно ввести ковариантные и контравариантные спиноры. Сделаем это следующим образом:

$$\begin{cases} a^\alpha = A^\alpha_\beta a^\beta, \\ a_\alpha (A^{-1T})^\beta_\alpha a_\beta, \\ A^{-1T} = C^{-1}AC. \end{cases} \quad (10.43)$$

Эти спиноры преобразуются по унитарно эквивалентным представлениям, так как соответствующие матрицы связаны преобразованиями подобия. Связь между ними такова:

$$\begin{cases} a_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} a^\beta, \\ a^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} a_\beta. \end{cases} \quad (10.44)$$

Инвариант преобразований (следствие условия $\det A = 1$):

$$a_\alpha b^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = \text{inv}. \quad (10.45)$$

Роль метрического тензора в этом случае играет $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Рассмотрим преобразования, генерированные комплексно сопряженной матрицей (тоже элемент группы $SL(2, C)$)

$$\begin{cases} A \longrightarrow A^*, \\ \det A^* = 1 \implies A^* \in SL(2, C), \\ a^{*\prime} = A^{*\alpha}_\beta a^{*\beta}. \end{cases} \quad (10.46)$$

Обозначим

$$a^{\dot{\alpha}} \sim a^{*\alpha}. \quad (10.47)$$

$a^{\dot{\alpha}}$ – пунктирный спинор, он преобразуется так же, как и $a^{*\alpha}$:

$$a^{\dot{\alpha}\prime} = A^{*\dot{\alpha}}_\beta a^{*\beta} = a^{\dot{\beta}} A^{+\dot{\alpha}}_\beta. \quad (10.48)$$

Операция $A \longrightarrow A^*$ нелинейная, и поэтому законы преобразования пунктирного и непунктирного (исходного) спиноров различны. Но в группе $SU(2)$ имеем $A^{-1} = A^{+-1T} = A^*$, и тогда $a^{\dot{\alpha}} \sim a_{*\alpha}$.

Введем ковариантный пунктирный спинор:

$$\begin{cases} a'_{\dot{\alpha}} = (A^{-1+})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} a_{\dot{\beta}}; \\ a^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a_{\dot{\beta}}, \\ a_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^{\dot{\beta}}. \end{cases} \quad (10.49)$$

Замечание.

Индексы α и $\dot{\alpha}$ алгебраически независимы, и по ним нельзя производить свертку, иначе будет нарушена математическая конструкция.

Вернемся к закону преобразования матриц X :

$$\begin{cases} X' = AXA^+, \\ A = (A_{\beta}^{\alpha}), \\ A^+ = (A_{\dot{\alpha}}^{+\dot{\beta}}). \end{cases} \quad (10.50)$$

Поэтому, если явно указать индексы, получим:

$$AXA^+ \longrightarrow A_{\beta}^{\alpha} X^{\beta\dot{\lambda}} A_{\dot{\lambda}}^{+\dot{\tau}}. \quad (10.51)$$

Итак, с индексной точки зрения

$$X = (X^{\alpha\dot{\beta}}) = \begin{pmatrix} X^{1\dot{1}} & X^{1\dot{2}} \\ X^{2\dot{1}} & X^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \sigma_{\mu} x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (10.52)$$

Можно проверить, что $X^{\alpha\dot{\beta}} \sim a^{\alpha} b^{\dot{\beta}}$. Ввиду $X^{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_{\mu} x^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}}$ имеем:

$$\sigma_{\mu} = (\sigma_{\mu}^{\alpha\dot{\beta}}). \quad (10.53)$$

Тогда

$$\tilde{\sigma}_{\mu} = (\sigma_0, -\sigma) = C^{-1} \sigma_{\mu}^T C \implies \varepsilon_{\lambda\dot{\beta}} \sigma_{\mu}^{\dot{\beta}\alpha} (-\varepsilon_{\alpha\tau}) = \varepsilon_{\lambda\dot{\beta}} \varepsilon_{\tau\alpha} \sigma_{\mu}^{\dot{\beta}\alpha} = (\tilde{\sigma}_{\mu})_{\lambda\dot{\tau}}. \quad (10.54)$$

Итак,

$$\tilde{\sigma}_{\mu} = ((\tilde{\sigma}_{\mu})_{\dot{\alpha}\beta}). \quad (10.55)$$

Следовательно,

$$\tilde{X} = ((\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} x^\mu) = (X_{\dot{\alpha}\beta}) = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (10.56)$$

Условие полноты в новых обозначениях:

$$g_{\mu\nu} (\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}} (\tilde{\sigma}_\nu)_{\dot{\lambda}\tau} = 2\delta_\tau^\alpha \delta_{\dot{\lambda}}^{\dot{\beta}}. \quad (10.57)$$

С учетом $X^{\dot{\alpha}\beta} \sim X^{\beta\dot{\alpha}}$ (ввиду алгебраической независимости пунктирных и непунктирных индексов) получаем связь спинорных компонент с компонентами 4-вектора:

$$\begin{cases} X^{1\dot{1}} = X_{2\dot{2}} = x^0 + x^3, \\ X^{1\dot{2}} = -X_{1\dot{2}} = x^1 - ix^2, \\ X^{2\dot{1}} = -X_{2\dot{1}} = x^1 + ix^2, \\ X^{2\dot{2}} = X_{1\dot{1}} = x^0 - x^3. \end{cases} \quad (10.58)$$

В тензорных обозначениях снова можем записать:

$$\begin{cases} x_\mu = \frac{1}{2} (\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}} X_{\dot{\beta}\alpha} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu \tilde{X}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu) x^\nu = g_{\mu\nu} x^\nu; \\ X^{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\beta}} x^\mu, \\ X_{\dot{\alpha}\beta} = (\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} x^\mu. \end{cases} \quad (10.59)$$

Заметим, что мы можем сворачивать по компонентам (по индексам пунктирным или непунктирным).

$$\begin{cases} \frac{1}{2} X_{\dot{\alpha}\beta} X^{\beta\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} \text{tr}(X \tilde{X}) = x \cdot x \equiv x^2, \\ X_{\alpha\dot{\beta}} X^{\dot{\beta}\gamma} = \delta_\gamma^\alpha x^2. \end{cases} \quad (10.60)$$

Можно обобщить рассмотренный ранг (1,1) на ранг (k, k) . Общее правило: симметричный спинор $a^{\alpha_1 \dots \alpha_k, \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k}$ ранга (k, k) эквивалентен симметричному неприводимому (операции свертков по паре индексов дает тензор ранга нуль – нельзя выделить инвариантные подпространства) тензору 4-тензору $T^{\mu_1 \dots \mu_k}$ ранга k .

Инверсия спиноров

Рассмотрим важную для физических приложений операцию, а именно инверсию (замену на $-$ – пространственная компонента меняет знак на противоположный). Самый простой пример – полярные векторы (например, векторный потенциал электромагнитного поля) и аксиальные векторы (например, вектор угловой скорости, вектор спина в квантовой механике).

$$Px^\mu = x^{\mu'} = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (10.61)$$

Поговорим о пространстве Минковского. Пусть имеется буст (переход от инерциальной системы K к инерциальной системе K')

$$\Lambda(\mathbf{V}) \in L_+^\uparrow, P\Lambda(\mathbf{V}) = \Lambda(-\mathbf{V})P. \quad (10.62)$$

В пространстве спиноров

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{V}) = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right), \\ A(-\mathbf{V}) = (A^{-1})^+, \\ P(A(\mathbf{V})a) = (A^{-1})^+(Pa). \end{array} \right. \quad (10.63)$$

С учетом

$$a^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha} a^{\beta}, b'_{\dot{\alpha}} = (A^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} b_{\dot{\beta}} \quad (10.64)$$

получаем

$$Pa^{\alpha} \sim b_{\dot{\alpha}}. \quad (10.65)$$

Определим инверсию так:

$$\left\{ \begin{array}{l} Pa^{\alpha} = ib_{\dot{\alpha}}, \\ Pa_{\alpha} = -ib^{\dot{\alpha}}, \\ Pb_{\dot{\alpha}} = ia^{\alpha}, \\ Pb_{\dot{\alpha}} = -ia_{\alpha}. \end{array} \right. \quad (10.66)$$

Отсюда следует:

$$P^2 a^{\alpha} = iPb_{\dot{\alpha}} = i^2 a^{\alpha} = -a^{\alpha}. \quad (10.67)$$

Двойное применение P вернет вектор в свое исходное состояние, но на спинорном языке это не так. Итак,

$$P^2 = -1. \quad (10.68)$$

Проверим, что это определение в пространстве Минковского дает

$$Px^\mu = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (10.69)$$

Используем установленную ранее связь спиноров и 4-векторов:

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{2}(X^{1\dot{1}} + X^{2\dot{2}}) \sim a^1 b^{\dot{1}} + a^2 b^{\dot{2}} \longrightarrow ib_1(-ia_1) + ib_2(-ia_2) = \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 \sim \frac{1}{2}(X^{1\dot{1}} + X^{2\dot{2}}) = x^0 \implies Px^0 = x^0. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Стрелка (\longrightarrow) обозначает, что получится, если применить операцию инверсии. При действии операции инверсии в пространстве Минковского x_0 переходит в x^0 . Далее для пространственных компонент:

$$x^1 = \frac{1}{2}(X^{1\dot{2}} + X^{2\dot{1}}) \sim a^1 b^{\dot{2}} + a^2 b^{\dot{1}} \longrightarrow ib_1(-ia_2) + ib_2(-ia_1) \sim \frac{1}{2}(X_{1\dot{2}} + X_{2\dot{1}}) = -x^1 \Leftrightarrow Px^1 = x^1, P\mathbf{x} = -\mathbf{x}. \quad (10.71)$$

Для x^2, x^3 будет то же самое.

Переходим к физике. Рассмотрим объект, который состоит из четырех спиноров, то есть определим 4-спинор (биспинор, так как конструируется из пары спиноров):

$$\Psi = \begin{pmatrix} a \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\alpha \\ b_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (10.72)$$

С точки зрения математики, мы сделали прямую сумму. Само по себе пространство биспиноров инвариантно относительно преобразований из группы $SL(2, \mathbb{C})$ и инверсии (преобразования P -четности). Нужно строить теорию так, чтобы она содержала инвариантные относительно P -четности преобразования. Построим динамику, предполагая, что рассматриваемый объект соответствует некой волновой функцией. Нужно связать a и b . Постулируем инвариантную относительно этих преобразований систему уравнений:

$$p^{\alpha\dot{\beta}} b_{\dot{\beta}} = ma^\alpha(1), \quad (10.73)$$

$$p^{\dot{\beta}\alpha} a^\alpha = mb_{\dot{\beta}}(2), \quad (10.74)$$

где $m = const$. Пока что нет прямого физического смысла. Покажем, что есть такая

$$P(1) = (2), P(2) = (1) \quad (10.75)$$

инвариантность. Имеем:

$$\begin{cases} Pa^\alpha = ib_{\dot{\alpha}}, \\ Pb_{\dot{\alpha}} = ia^\alpha, \\ p^{\alpha\dot{\beta}} \sim a^\alpha b^{\dot{\beta}} \longrightarrow ib_{\dot{\alpha}}(-ia_\beta) \sim p_{\dot{\alpha}\beta}, \\ p_{\dot{\beta}\alpha} \longrightarrow p^{\beta\dot{\alpha}}. \end{cases} \quad (10.76)$$

Тогда

$$\begin{cases} P(p^{\alpha\dot{\beta}} b_{\dot{\beta}}) = m(Pa^\alpha) \longrightarrow p_{\dot{\alpha}\beta} ia^\beta = mib_{\dot{\alpha}} \longrightarrow P(1) = (2), \\ P(p_{\dot{\beta}\alpha} a^\alpha) = p^{\beta\dot{\alpha}} ib_{\dot{\alpha}}, \\ Pb_{\dot{\beta}} = ia^\beta \longrightarrow P(2) = (1). \end{cases} \quad (10.77)$$

Это и означает инвариантность. Положим

$$\begin{cases} p^{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}} p^\mu, \\ p_{\dot{\beta}\alpha} = (\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{\beta}\alpha} p^\mu, \\ p^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla). \end{cases} \quad (10.78)$$

Получили «оператор импульса». Получаем систему уравнений Дирака (Р. А. М. Dirac, 1928):

$$\begin{cases} ma = i(\sigma_\mu \partial^\mu) b, \\ mb = i(\tilde{\sigma}_\mu \partial^\mu) a. \end{cases} \quad (10.79)$$

Можно записать компактно в виде одного уравнения. Уравнение Дирака в биспинорной форме:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi = 0, \quad (10.80)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} a^\alpha \\ b_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (10.81)$$

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.82)$$

Дирак писал изначально уравнения в гамильтоновой форме. Это уравнение можно применять и в случае, когда $m = 0$.



Лекция 11. Уравнение Дирака. Динамические переменные дираковского (спинорного) поля

Уравнение Дирака

На прошлой лекции сформулировали уравнение Дирака. Ранее они обозначались как a, b . Теперь заменим эти обозначения на традиционные ξ, η . По своим свойствам относительно группы $SL(2, \mathbb{C})$ первый спинор – контравариантный непунктирный спинор, второй спинор уже пунктирный. Уравнение Дирака в биспинорной форме:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi = 0, \quad (11.1)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

$$\xi = (\xi^\alpha) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

$$\eta = (\eta_{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix}; \quad (11.4)$$

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

μ – индекс Лоренца, он пробегает значения 0,1,2,3. Уравнение не должно противоречить уравнению Клейна-Гордона, которое было установлено ранее. Проверим это. Применим 11.1 к оператору $i\gamma_\mu \partial^\mu + m$ с учетом 11.5:

$$(i\gamma_\nu \partial^\nu + m)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) = -\gamma_\nu \partial^\nu \gamma_\mu \partial^\mu - m^2 = -\frac{1}{2}(\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu) \partial^\nu \partial^\mu - m^2, \quad (11.6)$$

возникла комбинация вторых производных. Хотим, чтобы дифференциальный оператор превратился в оператор Даламбера. Можно учесть симметрию и переписать уравнение. Честный вид антикоммутатора:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu &\equiv \gamma_\mu, \gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \tilde{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \tilde{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_\nu \sigma_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \tilde{\sigma}_\nu \sigma_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.7)$$

и с учетом $\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu = 2g_{\mu\nu}I$ (см. предыдущую лекцию) получаем

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I, \quad (11.8)$$

где $I = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ – единичная матрица 4x4 (в дальнейшем единичные матрицы опускаем, как это сделано в 11.1).

В результате из уравнений Дирака 11.1 в качестве следствия получаем уравнение Клейна-Гордона:

$$(\square + m^2)\Psi = 0. \quad (11.9)$$

Следовательно, этому уравнению удовлетворяет и любая компонента биспинора:

$$\begin{cases} (\square + m^2)\xi^\alpha = 0, \\ (\square + m^2)\eta_{\dot{\alpha}} = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

Рассмотрим плоскую волну (волну де Бройля), аналог того, что делалось в релятивистской механике:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(-i\varepsilon t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}). \quad (11.11)$$

Ψ_0 – это постоянный биспинор. Будем считать, что это некое частное волновое решение уравнения Клейна-Гордона. Подставив 11.11 в 11.8, получим с учетом $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$:

$$-\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0 \longrightarrow \varepsilon = \pm \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (11.12)$$

где знак плюс отвечает частицам (квантовомеханическая интерпретация), а знак минус изначально вызывал затруднения. Отрицательное решение можно интерпретировать как решение, относящееся к античастицам, это и использовал Дирак. Он предположил, что имеется два спектра уравнения Дирака, а также применил известный принцип Паули. Тут использовали оптический закон дисперсии.

Введем гамма-матрицы с верхними индексами:

$$\begin{cases} \gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu = (\gamma^0, \gamma), \\ \gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \gamma = (\gamma^k) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (11.13)$$

Заметим, что всюду при записи матриц 4x4 в блочном виде через матрицы 2x2 символ «0» означает 2x2-матрицу $\text{diag}(0,0)$.

Из антикоммутатора гамма-матриц 11.8 следует:

$$\begin{cases} (\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}I \implies (\gamma^0)^2 = I, \\ (\gamma^k)^2 = -I. \end{cases} \quad (11.14)$$

Компонентная запись уравнения Дирака 11.1 через диспинорные индексы:

$$(i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m\delta_{ab})\Psi_b = 0, a, b = 1, 2, 3, 4; \quad (11.15)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

$$\Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4), \quad (11.17)$$

$$\Psi^+ = (\Psi^*)^T = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*). \quad (11.18)$$

Биспинор Ψ и матрицы γ^μ определены с точностью до унитарного преобразования (лемма Паули):

$$\begin{cases} \Psi \longrightarrow \Psi' = V\Psi, \\ \gamma^\mu \longrightarrow \gamma^{\mu'} = V\gamma^\mu V^{-1}, \\ VV^+ = I; \end{cases} \quad (11.19)$$

$$(i\gamma \cdot \partial - m)\Psi = 0 \longrightarrow (i\gamma' \cdot \partial - m)\Psi' = 0. \quad (11.20)$$

Исходное представление (спинорное) называется вейлевским (H. Weyl), в котором имеем:

$$\begin{cases} (\gamma^0)^+ = \gamma^0, \\ \gamma^+ = -\gamma \implies (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \end{cases} \quad (11.21)$$

(это свойство инвариатно относительно унитарных преобразований – достоинство леммы Паули).

Применим к уравнению Дирака эрмитово сопряжение:

$$\Psi^+ (-i(\gamma^\mu)^+ \partial_\mu^{\leftarrow} - m) = 0. \quad (11.22)$$

Введем дираковское сопряжение:

$$\begin{cases} \bar{\gamma}^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu+} \gamma^0, \\ \bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0. \end{cases} \quad (11.23)$$

Тогда для дираковски сопряженной функции получаем уравнение:

$$\bar{\Psi}(i\gamma \cdot \partial^{\leftarrow} + m) = 0. \quad (11.24)$$

Здесь

$$\begin{cases} \bar{\Psi} = (\eta^+, \xi^+), \\ \eta^+ = (\eta_{\dot{\alpha}}^*) \sim (\eta_{\alpha}), \\ \xi^+ = (\xi^{\alpha*}) \sim (\xi^{\dot{\alpha}}). \end{cases} \quad (11.25)$$

Учитывая

$$\begin{cases} P\xi^{\alpha} = i\eta_{\dot{\alpha}}, \\ P\eta_{\dot{\alpha}} = i\xi^{\alpha}, \end{cases} \quad (11.26)$$

находим закон преобразования биспинора при инверсии:

$$\begin{cases} P\Psi = i\gamma^0\Psi, \\ P\bar{\Psi} = -i\bar{\Psi}\gamma^0. \end{cases} \quad (11.27)$$

Введем дираковское представление, которое чаще встречается в литературе:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi + \eta \\ \xi - \eta \end{pmatrix} = V\Psi_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Тогда в D-представлении $\gamma_D = V\gamma_W V^{-1}$, или

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (11.29)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.30)$$

Запишем систему уравнений для дираковских спиноров:

$$\begin{cases} p_0\varphi - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi = m\varphi, \\ -p_0\chi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi = m\chi. \end{cases} \quad (11.31)$$

Отсюда

$$\chi = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{p_0 + m} \varphi, \quad (11.32)$$

и в нерелятивистском пределе ($\mathbf{p} \rightarrow 0, p_0 \rightarrow m$) имеем $\chi \rightarrow 0$, то есть $\xi \simeq \eta$ в W-представлении.

Инверсия в D-представлении дает

$$\begin{cases} P\varphi = i\varphi, \\ P\chi = -i\chi, \end{cases} \quad (11.33)$$

так как $P\xi \rightarrow i\eta, P\eta = i\xi$. При пространственных вращениях дираковские спиноры также не смешиваются:

$$\begin{cases} \varphi' = U\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi' + \eta'), \\ \chi' = U\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi' - \eta'). \end{cases} \quad (11.34)$$

Действительно,

$$\begin{cases} \xi^{\alpha'} = U^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta}, \\ \eta'_{\dot{\alpha}} = (U^{-1+})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\beta}}, \end{cases} \quad (11.35)$$

но $U^{-1+}U \rightarrow \xi^{\alpha} \sim \eta_{\dot{\alpha}}$ при $A = U \in SU(2) \subset SL(2, C)$. При пространственно-временных преобразованиях φ, χ смешиваются, так как $A^{-1+} \neq A$.

Закон преобразования биспиноров

Для чистых бустов имеем разные законы преобразования:

$$\begin{cases} \xi' = \exp\left(\frac{\omega}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right), \\ \eta' = \exp\left(-\frac{\omega}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right); \\ \mathbf{V} = \mathbf{v}t\hbar\omega, \\ |\mathbf{v}| = 1. \end{cases} \quad (11.36)$$

Здесь учтено, что

$$\begin{cases} \xi' = A\xi, \\ \eta' = A^{-1+}\eta. \end{cases} \quad (11.37)$$

Для биспинора получаем закон преобразования:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \exp\left(\frac{\omega}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \Psi, \\ \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (11.38)$$

В дираковском (стандартном) представлении имеем:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.39)$$

Для пространственных вращений в стандартном представлении получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \exp\left(-i \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}\right), \\ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (11.40)$$

Введем матрицы

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\sigma^{\nu\mu}. \quad (11.41)$$

Объект антисимметричный. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{0k} = i\gamma^0 \gamma^k = i\alpha_k, \\ \Sigma_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kjn} \sigma^{jn}, \\ \sigma^{jn} = \varepsilon^{jnk} \Sigma_k. \end{array} \right. \quad (11.42)$$

В результате получаем закон преобразования биспинора (объединяя два закона):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi'(x') = D(\Lambda(\omega))\Psi(x), \\ D(\Lambda(\omega)) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right), \\ \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \\ x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu}. \end{array} \right. \quad (11.43)$$

Задача.

Покажите, что

$$\bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)D^{-1}(\Lambda), \quad (11.44)$$

так что

$$\bar{\Psi}'(x')\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)\Psi(x), \quad (11.45)$$

то есть ведет себя как скалярная функция.

С учетом соотношений $x = \Lambda^{-1}x'$ и

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\Lambda^{-1}x) = \left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right)\Psi(x), \\ L^{\mu\nu} = i(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu}), \end{array} \right. \quad (11.46)$$

получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi'(x) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\Psi(x), \\ J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \\ S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}. \end{array} \right. \quad (11.47)$$

Для пространственных вращений имеем:

$$\frac{1}{2}\omega_{kn}J^{kn} = \frac{1}{2}\omega_{kn}\epsilon^{kns}J_s = \omega^s J_s = \boldsymbol{\theta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}, \quad (11.48)$$

и мы получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi'(t, \mathbf{r}) = \exp(-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\Psi(t, \mathbf{r}), \\ \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}; \\ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\mathbf{r} \times \nabla, \\ \mathbf{S} = \frac{1}{2}\Sigma. \end{array} \right. \quad (11.49)$$

В релятивистской квантовой механике биспинорное поле $\Psi(x)$ является волновой функцией электрона, а $\mathbf{J}, \mathbf{L}, \mathbf{S}$ – это операторы полного, орбитального и спинового моментов электрона (в единицах \hbar), соответственно.

Уравнение Дирака при этом можно представить в гамильтоновой форме, обобщающей уравнение Шрёдингера (в обычной системе единиц):

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\partial_t\Psi = H_D\Psi, \\ H_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2, \\ \mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \\ \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}, \\ \beta = \boldsymbol{\gamma}^0, \\ \boldsymbol{\alpha}\beta = -\beta\boldsymbol{\alpha}. \end{array} \right. \quad (11.50)$$

Использовали стандартные обозначения.

Динамические переменные дираковского (спинорного) поля

Будем использовать аппарат теории поля, для построения динамических переменных. Запишем уравнения Дирака для Ψ и $\bar{\Psi}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \\ \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0. \end{array} \right. \quad (11.51)$$

Они следуют из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\partial^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (11.52)$$

Учитывая допустимое преобразование лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\Psi, \bar{\Psi}, x), \quad (11.53)$$

в дальнейшем будем использовать эквивалентный лагранжиан (асимметричная запись)

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \quad (11.54)$$

Заметим, что на решениях уравнений движения $\mathcal{L} = 0$, что будем использовать при постоянии нётеровских токов.

Тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial^\nu \Psi, \quad (11.55)$$

откуда следует 4-импульс поля

$$\begin{cases} P^0 = H = \int d^3x \Psi^\dagger i \partial_t \Psi = \int d^3x \Psi^\dagger H_D \Psi, \\ \mathbf{P} = (P^k) = \int d^3x \Psi^\dagger (-i \nabla) \Psi. \end{cases} \quad (11.56)$$

Далее, из инвариантности лагранжиана относительно глобальных калибровочных преобразований:

$$\begin{cases} \Psi'(x) = e^{i\omega} \Psi(x), \\ \bar{\Psi}'(x) = e^{-i\omega} \bar{\Psi}(x), \end{cases} \quad (11.57)$$

получаем нётеровский ток

$$\begin{cases} j^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \delta \Psi = -\bar{\Psi} i \gamma^\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \\ \partial_\mu j^\mu = 0 \text{ (на решениях уравнения Дирака!)}. \end{cases} \quad (11.58)$$

Следовательно, электрический заряд

$$\begin{cases} Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \Psi^\dagger \Psi, \\ \frac{dQ}{dt} = 0. \end{cases} \quad (11.59)$$

Закон сохранения заряда в квантовой механике интерпретируется как сохранение вероятности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho = - \oint_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, \\ \rho = \Psi^+ \Psi (\text{плотность вероятности}), \\ \mathbf{j} = \Psi^+ \boldsymbol{\alpha} \Psi (\text{плотность потока вероятности}). \end{array} \right. \quad (11.60)$$

Тензор орбитального момента:

$$L_{\alpha\beta}^{\mu} = T_{\alpha}^{\mu} x_{\beta} - T_{\beta}^{\mu} x_{\alpha}. \quad (11.61)$$

Согласно общей формуле (см. теорему Нётер) 3-вектор орбитального момента

$$\mathbf{L} = \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{kjm} \int d^3x L_{jm}^0 \right) = \int d^3x \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \int d^3x \Psi^+ (-i\mathbf{r} \times \nabla) \Psi. \quad (11.62)$$

Тензор спинового момента

$$S_{\alpha\beta}^{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\delta \omega^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \sigma_{\alpha\beta} \Psi, \quad (11.63)$$

откуда 3-вектор спина

$$\mathbf{S} = \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{kjm} \int d^3x S_{jm}^0 \right) = \int d^3x \Psi^+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \Psi. \quad (11.64)$$

α, β – это индексы Лоренца, пробегают значения 0,1,2,3.

Лекция 12. Спинорная электродинамика

Лагранжиан, описывающий взаимодействие спинорного поля с электромагнитным полем имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathcal{L}_\Psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_I, \\ D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \\ \mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi, \\ \mathcal{L}_A = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_I = -e j^\mu A_\mu = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu. \end{array} \right. \quad (12.1)$$

К дираковскому лагранжиану добавляем длинную производную. Лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi'(x) = e^{ie\omega(x)} \Psi(x), \\ \bar{\Psi}'(x) = e^{-ie\omega(x)} \bar{\Psi}(x), \\ A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \omega(x). \end{array} \right. \quad (12.2)$$

Уравнения движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0, \\ \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu^{*\leftarrow} - m) = 0, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\mu. \end{array} \right. \quad (12.3)$$

Группа Пуанкаре

Рассмотрим неоднородную группу Лоренца – группу Пуанкаре. Она оставляет инвариантным расстояние между двумя точками в метрике Минковского.

$$\begin{cases} x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \\ (x-y)^2 = g_{\mu\nu}(x^{\mu} - y^{\mu})(x^{\nu} - y^{\nu}) = inv. \end{cases} \quad (12.4)$$

Общая группа Пуанкаре (ср. с группой Лоренца) может быть разложена на четыре класса:

$$P = P_{+}^{\uparrow} \cup PP_{+}^{\uparrow} \cup TP_{+}^{\uparrow} \cup PTP_{+}^{\uparrow}. \quad (12.5)$$

Рассмотрим группу P_{+}^{\uparrow} (собственная группа Пуанкаре):

- элемент (a, Λ) ;
- закон умножения элементов $(a_2, \Lambda_2) \circ (a_1, \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2 \Lambda_2 \Lambda_1)$, $(a, \Lambda) = (a, I) \circ (0, \Lambda)$;
- единица (единичный элемент) $E = (0, I)$;
- обратный элемент $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1})$.

a – вектор сдвига.

Элемент группы (a, Λ) задается 10 параметрами (3 буста, 3 поворота и 4-вектор). Соответствующие генераторы: $J_{\mu\nu}$ (лоренцевы повороты) и P_{μ} (трансляции).

Алгебра генераторов:

$$\begin{cases} [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} + g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta}, \\ [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \\ [J_{\mu\nu}, P_{\alpha}] = i(g_{\nu\alpha} P_{\mu} - g_{\mu\alpha} P_{\nu}). \end{cases} \quad (12.6)$$

Трансляции между собой коммутируют.

В пространстве биспиноров имеем:

$$\begin{cases} J^{\mu\nu} = i(x^{\mu} \partial^{\nu} - x^{\nu} \partial^{\mu}) + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}, \\ P^{\mu} = i \partial^{\mu}. \end{cases} \quad (12.7)$$

Алгебру генераторов группы L_+^\uparrow можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_k^\pm, K_n^\pm] = i\varepsilon_{knj}K_j^\pm, \\ [K_k^+, K_n^-] = 0; \\ \mathbf{K}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{J} \pm i\mathbf{N}), \\ \mathbf{J} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{knj}J_{nj}\right), \\ \mathbf{N} = (J_{0k}). \end{array} \right. \quad (12.8)$$

Собственные значения операторов Казимира $K^{\pm 2}$ (они коммутируют со всеми генераторами группы L_+^\uparrow и поэтому кратны единичному оператору в заданном представлении) имеют вид:

$$j_1(j_1 + 1), j_2(j_2 + 1), j_i = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (12.9)$$

Спин частицы, соответствующей полю, преобразующемуся по заданному представлению равен $j = j_1 + j_2$. Произвольное представление задается парой (j_1, j_2) .

Классификация представлений

Имеем следующую классификацию представлений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (0,0) \longrightarrow \varphi(\text{скаляр}), \\
 (\frac{1}{2},0) \longrightarrow \xi^\alpha(\text{вейлевский спинор}), \\
 (0,\frac{1}{2}) \longrightarrow \eta_{\dot{\alpha}}, \\
 (\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2}) \longrightarrow \Psi = (\xi^\alpha, \eta_{\dot{\alpha}})^T(\text{дираковский биспинор}), \\
 (\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \longrightarrow A^\mu(\text{4-вектор}), \\
 (\frac{1}{2},0) \oplus (\frac{1}{2},0) = (0,0) \oplus (1,0) \longrightarrow \\
 \text{скаляр и антисимметричный самодуальный тензор}(B_{\mu\nu} = \tilde{B}_{\mu\nu}), \\
 (0,\frac{1}{2}) \oplus (0,\frac{1}{2}) = (0,0) \oplus (0,1) \longrightarrow \\
 \text{скаляр и антисимметричный антисамодуальный тензор}(B_{\mu\nu} = -\tilde{B}_{\mu\nu}), \\
 (0,1) \oplus (1,0) \longrightarrow F_{\mu\nu}(\text{антисимметричный тензор}).
 \end{array} \right.$$

Все интересующие нас структуры высших рангов можно сконструировать из вейлевских спиноров. В дальнейших курсах по суперсимметрии это будет использоваться. Физически частицы с любым спином можно составить из частиц со спином $\frac{1}{2}$.

Вернемся к вейлевскому представлению. В физике элементарных частиц исполь-

зуются обычно другие обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \Psi_R + \Psi_L, \\ \Psi_R = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\circ\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1 - \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_L \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (12.10)$$

где введена новая матрица (мы не перешли в пятимерное пространство, это исторически сложившееся название):

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho, \quad (12.11)$$

причем свойства матрицы таковы:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma^5)^2 = I, \\ \gamma^{5+} = \gamma^5, \\ tr\gamma^5 = 0, \\ \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0. \end{array} \right. \quad (12.12)$$

Эта матрица антикоммутирует со всеми γ . В вейлевском представлении (в спинорном) явный вид таков:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (12.13)$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.14)$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (12.15)$$

В дираковском (стандартном) представлении:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.16)$$

Для безмассовых частиц ($m = 0$) уравнение Дирака распадается на два независимых уравнения для вейлевских спиноров:

$$\begin{cases} (p_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi_L(\mathbf{p}) = 0, \\ (p_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi_R(\mathbf{p}) = 0. \end{cases} \quad (12.17)$$

С учетом $p_0 = |\mathbf{p}| \equiv p$ (при $m = 0$) получаем:

$$\begin{cases} \hat{h}\varphi_R = \varphi_R, \\ \hat{h}\varphi_L = -\varphi_L, \\ \hat{h} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \\ |\mathbf{n}| = 1. \end{cases} \quad (12.18)$$

Оператор \hat{h} называется спиральностью (термин взят из оптики), и вейлевские спиноры – собственные векторы этого оператора, отвечающие собственным значениям $h = +1$ (правый вейлевский спинор φ_R) и $h = -1$ (левый вейлевский спинор φ_L).

При $m \neq 0$ уравнение Дирака $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m)\Psi = 0$ эквивалентно системе уравнений (следует учесть соотношение $\boldsymbol{\gamma}^5 \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\alpha}$):

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})\Psi_R = \frac{p_0}{p}\Phi_R - \frac{m}{p}\beta\Phi_L, \\ (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n})\Psi_L = -\frac{p_0}{p}\Phi_L + \frac{m}{p}\beta\Phi_R. \end{cases} \quad (12.19)$$

Связка возникает из-за того, что масса отлична от нуля. Это будет активно использоваться в Стандартной модели. Заметим, что правые и левые компоненты биспинора являются собственными векторами оператора киральности $\boldsymbol{\gamma}^5$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}^5\Psi_R = +\Psi_R, \\ \boldsymbol{\gamma}^5\Psi_L = -\Psi_L. \end{cases} \quad (12.20)$$

Подчеркнем, что спиральность и киральность совпадают только в безмассовом пределе. Спиральность – интеграл движения: $[\Sigma \cdot p, H_D] = 0$, а киральность является интегралом движения только в безмассовом пределе: $[\gamma^5, H_D] = m[\gamma^5, \gamma^0] \neq 0$.

Замечание

Лагранжиан дираковского поля можно представить в виде:

$$L = \bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - m(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Phi}_R \Psi_L), \quad (12.21)$$

откуда следует система уравнений:

$$\begin{cases} i\gamma^\mu \partial_\mu \Phi_R - m\Phi_L = 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - m\Psi_R = 0. \end{cases} \quad (12.22)$$

По аналогии с группой Лоренца предъявим явный вид генераторов группы Пуанкаре. Построим из 10 генераторов группы Пуанкаре $J_{\mu\nu}, P_\mu$ операторы Каземира, по собственным значениям которых классифицируются неприводимые представления этой группы.

Задача

Покажите, что оператор $P^2 = P_\mu P^\mu$ является оператором Каземира (его с. з. – квадрат массы):

$$\begin{cases} [P^2, J_{\mu\nu}] = 0, \\ [P^2, P_\mu] = 0. \end{cases} \quad (12.23)$$

Из компонент $J_{\mu\nu}$ нельзя составить инвариант. Эту проблему разрешили Паули и Любанский. Оказалось, что существует единственная комбинация $J_{\mu\nu}, P_\lambda$, которая коммутирует с P_μ . Определим псевдовектор (аксиальный вектор, меняет знак при инверсии) Паули-Любанского:

$$\begin{cases} W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} J_{\nu\mu} P_\rho, \\ W_\mu P^\mu = 0, \\ [W_\mu, P_\nu] = 0. \end{cases} \quad (12.24)$$

Задача

Покажите, что $W^2 = W_\mu W^\mu$ является оператором Каземира:

$$\begin{cases} [W^2, J_{\mu\nu}] = 0, \\ [W^2, P_\lambda] = 0. \end{cases} \quad (12.25)$$

Указание: сначала получите формулу

$$W^2 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} P^2 - J_{\mu\rho} J^{\nu\rho} P^\mu P_\nu. \quad (12.26)$$

Пусть $P^2 = m^2 > 0$, тогда есть физический интерес. Тогда

$$W^2 = -m^2 s(s+1), s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \text{(спин)}. \quad (12.27)$$

Перейдём в систему покоя. Это значит, что при $P^\mu = (m, \mathbf{0})$ имеем

$$W^2 = -m^2 (J_{12}^2 + J_{23}^2 + J_{31}^2) = -m^2 \mathbf{J}^2, \quad (12.28)$$

где \mathbf{J}^2 – квадрат момента импульса в системе покоя частицы, то есть квадрат собственного момента, спина.

При $P^2 = 0$ имеем $W^2 = 0$. В силу $W_\mu P^\mu = 0$ имеем

$$W^\mu = \lambda P^\mu, \quad (12.29)$$

где λ – спиральность. Это выражение выражает тот факт, что электромагнитные волны поперечны.

Заметим также, что при $m^2 \geq 0$ оператор знака энергии

$$\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|} = \text{inv} \quad (12.30)$$

относительно преобразований из группы P_+^\uparrow .

Вывод: неприводимое представление группы Пуанкаре характеризуется массой m , спином s , знаком энергии $\varepsilon = \pm 1 (m^2 \geq 0)$. Есть и случаи, когда масса отрицательна, но они довольно экзотичны.

Задача

Показать, что на решениях уравнения Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0. \quad (12.31)$$

справедливо соотношение

$$\left\{ \begin{array}{l} W^2 \Psi = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) m^2 \Psi, \\ W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} J_{\nu\mu} P_\rho, \\ J_{\nu\mu} = x_\nu p_\lambda - x_\lambda p_\nu + \frac{1}{2} \sigma_{\nu\lambda}, \\ p_\rho = i\partial_\rho. \end{array} \right. \quad (12.32)$$

Это значит, что спин электрона равен $s = \frac{1}{2}$.

Замечание

Стоит поговорить о техническом замечании. Можно показать, что произвольная 4x4-матрица (содержит 16 комплексных чисел) может быть разложена по 16 базисным матрицам, с которыми мы уже имели дело:

$$I, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}. \quad (12.33)$$

Соответствующие билинейные формы, составленные из двух биспиноров,

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \bar{\Psi}_1 \Psi_2, \\ P = \bar{\Psi}_1 \gamma^5 \Psi_2, \\ V^\mu = \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2, \\ A^\mu = \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma^5 \Psi_2, \\ T^{\mu\nu} = \bar{\Psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \Psi_2 \end{array} \right. \quad (12.34)$$

по отношению к группе Лоренца являются, соответственно, скаляром, псевдоскаляром (меняет знак при применении к нему операции инерции), вектором, аксиальным вектором и тензором.

Лекция 13. Модель Вайнберга–Салама (ВС). Общая структура лагранжиана (случай одного поколения лептонов)

На прошлой лекции было рассмотрено дираковское поле. Именно кванты дираковского поля дают нам лептоны, известно три поколения лептонов. Имеется также три поколения кварков. Все основные инструменты и идеи, которые заложены в построении Стандартной модели, мы обсудили. Соберем их воедино и обсудим, как устроена модель Вайнберга–Салама – часть Стандартной модели, которая описывает электромагнитные и слабые взаимодействия лептонов. Пока что обсудим структуру Лагранжиана, ограничившись одним поколением лептонов. Далее сделаем обобщение на три поколения (то, что их три доказано экспериментально.)

Модель Вайнберга–Салама (ВС)

Из феноменологии слабых взаимодействий следует, что в качестве калибровочной группы следует взять группу $SU(2) \times U(1)$, причем группа $SU(2)$ отвечает триплет векторных калибровочных полей $W_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ (нижний индекс – индекс Лоренца), группе $U(1)$ – абелева группа, ей сопоставляется синглет B_μ .

Ограничимся сначала одним лептонным поколением (ν_e, e) . Первоначально фермионы (нейтрино и электрон) не имеют массы. Поэтому лагранжиан в отсутствие массы выглядит очень просто:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (13.1)$$

Как обсудили в прошлый раз, поле можно представить в виде суммы независимых левых и правых компонент, которые преобразуются по разному по отношению к группе $SU(2)$.

$$\Psi_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \Psi \quad (13.2)$$

γ^5 – матрица, определенная на прошлой лекции. Иногда она определяется в литературе другим знаком, стоит обращать на это особое внимание. Левая и правая компоненты существуют независимо.

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L. \quad (13.3)$$

Постулируем, оперируя экспериментальными данными, что левые компоненты образуют дублет – изоспинор относительно группы $SU(2)$, то есть преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \text{изоспин } I = \frac{1}{2}, \\ \nu_{eL} \longrightarrow I_3 = +\frac{1}{2}, \\ e_L \longrightarrow I_3 = -\frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad (13.4)$$

а правые компоненты мы считаем синглетами, что означает, что они вообще не преобразуются под действием группы $SU(2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_l = (e_R, \nu_{eR}), \\ l = e, \nu. \end{array} \right. \quad (13.5)$$

Такая асимметрия заложена с самого начала, чтобы объяснить экспериментально наблюдаемое нарушение четности в слабых взаимодействиях. Индекс l формирует так называемые флейверы. Здесь введен необходимый элемент ν_{eR} с учетом возможной ненулевой массы ν_e . Это расширенная Стандартная модель.

Генераторы группы $SU(2) \times U(1)$ – проекции изоспина $T_a = \frac{\tau_a}{2}$ ($a = 1, 2, 3$) и гиперзаряд Y , который упорядочивает фермионы по электрическому заряду Q так, что:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (13.6)$$

Данная формула является аналогом формулы, которая в начале 60х годов была известна в теории сильных взаимодействий. $\frac{1}{2}$ введена по традиции, иногда в литературе этот множитель опускается.

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \bar{R}i\gamma\partial R + i\bar{L}i\gamma\partial L \quad (13.7)$$

инвариантен относительно преобразований группы SU(2):

$$\begin{cases} L \longrightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\vec{\theta}L}, \\ R \longrightarrow R. \end{cases} \quad (13.8)$$

Видно, что синглеты вообще не преобразуются. В таком случае связь Q и I_3 такова:

$$\begin{cases} L: Q_l = I_3^l - \frac{1}{2}, \\ l = \nu_{eL}, eL; \\ R: Q = I_3 - 1 \text{ (для } e_R) \\ Q = I_3 = 0 \text{ (для } \nu_R). \end{cases} \quad (13.9)$$

\mathcal{L} инвариантен также относительно группы U(1).

$$\begin{cases} L \longrightarrow e^{i\alpha}, \\ L = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \nu \\ e^{i\alpha} e \end{pmatrix} \\ e_R \longrightarrow e^{i\beta} e_R, \\ \nu_R \longrightarrow e^{i\gamma} \nu_R, \end{cases} \quad (13.10)$$

причем α, β, γ – различные числа.

Замечание Капустина

U(1), которая действует как подгруппа SU(2), действует иначе:

$$e^{-i\tau_3\theta} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \nu \\ e^{i\theta} e \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

То есть ν и e приобретают разные фазы.

$U(1)$ симметрия приводит к заряду, который не совпадает с электрическим зарядом, $Q_e = 1$, а $Q_\nu = 0$.

Учитывая это различие Вайнберг использовал формулу, приведенную выше. Групповая структура позволяет произвольно выбрать гиперзаряд, то есть он не квантуется. Квантование заряда, с теоретической точки зрения, не выполняется автоматически ввиду абелевости. Поэтому нужно выйти за рамки Стандартной модели.

Из сравнения 13.6 и 13.9 находим предписание для гиперзарядов:

$$\begin{cases} Y^L = -1, \\ Y(e_R) = -2, \\ Y(\nu_R) = 0. \end{cases} \quad (13.12)$$

Как увидим позже, после необходимого спонтанного нарушения симметрии (появление массы), возникает остаточная симметрия, связанная с электрическим зарядом.

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_Q \quad (13.13)$$

Механизм спонтанного нарушения симметрии обеспечивается введением дублета скалярных комплексных хиггсовских полей.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 + i\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (13.14)$$

φ_k – вещественное. Причем $k = 1, 2, 3, 4$. Далее подводим графический итог. Все необходимые поля изобразим точками на плоскости (I_3, Y) .

По оси абсцисс – третья компонента изоспина, по оси ординат – гиперзаряд. Возникает триплет полей. Посередине поле B . Далее располагается лептонный дублет и одинокий электронный дублет.

Лагранжиан модели ВС запишем в виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{l\varphi}. \quad (13.15)$$

\mathcal{L}_G – чисто калибровочные поля; \mathcal{L}_l – лептонные поля (включено взаимодействие с калибровочными полями); \mathcal{L}_φ – скалярный дублет; $\mathcal{L}_{l\varphi}$ – лагранжиан взаимодействия лептонов с хиггсовским полем. Постулировали представление для полей. Здесь лагранжиан калибровочных полей (триплет W_μ^a и синглет B_μ):

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g\epsilon_{abc}W_\mu^b W_\nu^c)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2. \quad (13.16)$$

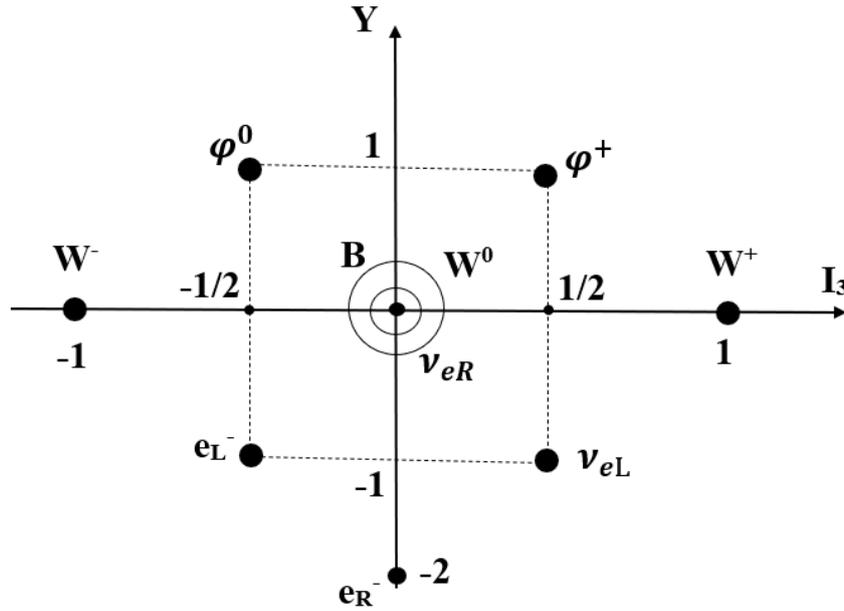


Рис. 13.1. Плоскость (I_3, Y)

Знак в скобках зависит от того, как определена длинная производная.

Лагранжиан лептонов, которые взаимодействуют с калибровочными полями строим с учетом того, что ковариантная (длинная) производная имеет вид

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igT_a W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu) \Psi. \quad (13.17)$$

g' – новая константа связи. Тогда с учетом диаграммы (I_3, Y) имеем:

$$\mathcal{L}_l = \bar{L} i \gamma^\mu (\partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{W}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu) L + \bar{e}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R + \bar{\nu}_R i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_R. \quad (13.18)$$

Лагранжиан хиггсовских скаляров, взаимодействующих с калибровочными полями:

$$\mathcal{L}_\phi = |(\partial_\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{W}_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu) \phi|^2 + \mu \phi^+ \phi - \lambda (\phi^+ \phi)^2, \quad (13.19)$$

где $\mu > 0, \lambda > 0$ – некие положительные параметры. Это следует из 13.6.

Лагранжиан юкавское взаимодействия (нет производных):

$$\mathcal{L}_{l\phi} = -f_e (\bar{e}_R [\phi^+ L] + [\bar{L} \phi] e_R) - f_\nu (\bar{\nu}_R [\phi_c^+ L] + [\bar{L} \phi_c] \nu_R). \quad (13.20)$$

$$\phi' = u\phi \longrightarrow \phi^{c'} = u\phi^c \quad (13.21)$$

Здесь введено:

$$\begin{cases} \varphi_c = i\tau_2 \varphi^* = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^0 \\ -\varphi_0 \end{pmatrix} \\ (\varphi_c)_k = \varepsilon_{kl} \varphi^{*l} \end{cases} \quad (13.22)$$

Введение связано с тем, что нейтрино не имеет электрического заряда, а электрически нейтрально в отличие от e_R .

Лагранжиан модели ВС содержит 6 параметров (в рассматриваемом случае одного поколения).

$$\begin{cases} g, g' - \text{связь между калибровочными бозонами;} \\ f_e, f_{\nu_e} - \text{юкавские связи с хиггсами;} \\ \mu, \lambda - \text{самодействие мюонов.} \end{cases} \quad (13.23)$$

Механизм Браута–Энглера–Хиггса в модели Вайнберга–Салама: массы лептонов и калибровочных бозонов

Расширим описание механизма Браута–Энглера–Хиггса. Применим его к лептонам. Сначала все безмассовое, она возникает при двух механизмах.

Системе выгодно находиться в состоянии с минимальной потенциальной энергии. Минимум потенциал Хиггса достигает при

$$|\varphi|^2 = \varphi^+ \varphi = \frac{\mu}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} > 0. \quad (13.24)$$

$$\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (13.25)$$

Можно применить оператор электрического заряда и получить нуль:

$$Q\varphi_v = (I_3 + \frac{1}{2}Y)\varphi_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\tau_3}{2} + \frac{1}{2}1 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0, Y_\varphi = +1 \quad (13.26)$$

то есть φ_v – инвариант. После спонтанного нарушения симметрии запишем поле, параметризуя его так:

$$\varphi(x) = \exp\left(i\frac{\tau_a \xi^a}{2v}(x)\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \quad (13.27)$$

причем $\exp(i\frac{\tau_a \xi^a}{2} v(x)) = U^{-1}$. Фактически получили аналог того, как число можно написать через аргумент и фазу. Пользуясь локальной калибровочной инвариантностью, можно сделать локальные калибровочные преобразования. То есть сейчас переходим к унитарной калибровке.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \longrightarrow \varphi' = U \varphi \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \\ L \longrightarrow L' = UL, \\ R \longrightarrow R' = R, \\ \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{W}'_{\mu} = U \frac{\vec{\tau}}{2} \vec{W}_{\mu} U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_{\mu} U) U^{-1}, \\ B'_{\mu} = B_{\mu}. \end{array} \right. \quad (13.28)$$

За счет сдвига две независимые поляризации приобрели третью. Итак, вакуум φ_v – инвариант подгруппы $U(1)_Q$. Она имеет $N' = 1$ параметров. Исходная группа $SU(2)_L \times U(1)_Y$ имеет $N = 4$ параметра. Нарушенную часть полной группы характеризует $N - N' = 4 - 1 = 3$ параметра. Под действием соответствующих преобразований φ_v изменяется. Итак, в унитарной калибровке останется одно скалярное хиггсовское поле $\eta(x)$. В этой унитарной (верхняя компонента занулилась) калибровке получаем лагранжиан взаимодействия лептонов с калибровочными бозонами

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -\frac{f_e}{\sqrt{2}} (v + \eta) (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) - \frac{f_v}{\sqrt{2}} (v + \eta) (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R). \quad (13.29)$$

Спонтанное нарушение симметрии дает массу полям, происходит смешивание левых и правых компонент, что отсутствовало в безмассовом случае. Появилась нужная нам скалярная комбинация. С учетом

$$\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R = \bar{\Psi} \Psi \quad (13.30)$$

находим

$$\mathcal{L}_{l\varphi} = -m_e \bar{e}(x) e(x) - m_\nu \bar{\nu}(x) \nu(x) - \frac{f_e}{\sqrt{2}} \bar{e}(x) \eta(x) e(x) - \frac{f_\nu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}(x) \eta(x) \nu(x), \quad (13.31)$$

где возникает масса лептонов:

$$\begin{cases} m_e = f_e \frac{v}{\sqrt{2}}, \\ m_\nu = f_\nu \frac{v}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (13.32)$$

и взаимодействия с хиггсом $\eta(x)$.

Аналогично возникает \mathcal{L}_ϕ с учетом

$$\begin{cases} |\partial_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2, \\ |\vec{\tau} \vec{W}_\mu \phi|^2 = \frac{1}{2} \vec{W}_\mu^2 (v + \eta)^2. \end{cases} \quad (13.33)$$

У калибровочного поля возникает массовое слагаемое. Причем $\tau_a \tau_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \tau_c$.

$$\begin{cases} (\partial_\mu \phi^+) \vec{\tau} \vec{W}_\mu \phi - \text{э.с.} = 0, \\ (\vec{\tau} \vec{W}_\mu \phi)^+ (B_\mu \phi) + \text{э.с.} = (v + \eta)^2 W_\mu^3 B^\mu. \end{cases} \quad (13.34)$$

В итоге, если отбросить константу:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \mu \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{8} (v + \eta)^2 [g^2 + \vec{W}_\mu^2 + g'^2 B_\mu^2 - 2gg' B^\mu W_\mu^3]. \quad (13.35)$$

Отсюда видно, что масса хиггса η равна

$$m_H = \sqrt{2\lambda} v. \quad (13.36)$$

Диагонализируем калибровочную часть $[g^2 + \vec{W}_\mu^2 + g'^2 B_\mu^2 - 2gg' B^\mu W_\mu^3]$, введя новые поля A_μ, Z_μ :

$$\begin{cases} A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W, \\ Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W. \end{cases} \quad (13.37)$$

Угол Вайнберга (слабого смешивания – в западной литературе) θ_W выберем так:

$$\begin{cases} \tan \theta_W = \frac{g'}{g}, \\ \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \end{cases} \quad (13.38)$$

Тогда

$$g^2(W_\mu^3)^2 + g'^2 B_\mu^2 - 2gg' B^\mu W_\mu^3 = [gW_\mu^3 - g'B_\mu]^2 = (g^2 + g'^2)Z_\mu^2. \quad (13.39)$$

В итоге

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 + \frac{1}{8}(v+H)^2[2g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + (g^2 + g'^2)Z_\mu^2], \quad (13.40)$$

где $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$, хиггсовское поле $-\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4$. Отсюда получаем массы калибровочных бозонов:

$$\begin{cases} m_W = \frac{1}{2}gv, \\ m_z = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)^{1/2}v = \frac{m_W}{\cos\theta_W}, \\ m_A = 0. \end{cases} \quad (13.41)$$

Лагранжиан калибровочных полей \mathcal{L}_G приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2}|D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+|^2 - \quad (13.42) \\ & -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)W^{+\mu}W^{-\nu} - \partial_\nu A_\mu W^{+\mu}W^{-\nu} - g^2 \cos^2(\theta_W)[(W_\mu^+ W^{-\mu})(Z^\nu Z_\nu) - (W^{+\mu} Z_\mu)(W^{-\nu} Z_\nu)] + \\ & + ig \cos\theta_W(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(W^{+\mu}W^{-\nu}) + \frac{i}{2}g \cos\theta_W[(D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+)(W^{-\mu}Z^\nu - W^{-\nu}Z^\mu) - \text{э.с.}] \end{aligned}$$

причем $ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)W^{+\mu}W^{-\nu}$ – аномальный магнитный момент W-бозона; $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ – это говорит о том, что взаимодействие обычное, подобно взаимодействию заряженных частиц с электромагнитным полем.

Матрица лептонного смешивания

Учтем теперь, что поколений на самом деле 3. Первое предположение, что необходимо просто ввести сумму, но эксперимент показывает, что должно быть смешивание. Возникает недиагональное взаимодействие, нужно установить связь между поколениями.

$$\mathcal{L}_{lH} = -y_{\alpha\beta}^l \bar{L}'_\alpha \phi'_{\beta R} - y_{\alpha\beta}^{\nu l} \bar{L}'_\alpha \tilde{\phi} \nu'_{\beta R} + \text{э.с.} \quad (13.43)$$

Возникает целая матрица юкавских связей. Стоит учесть, что $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$, $\tilde{\phi} = \phi^c$ В унитарной калибровке

$$\mathcal{L}_{lH} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)[\bar{l}'_L Y^l l'_R + \bar{\nu}'_L Y^\nu \nu'_R] + \text{э.с.} \quad (13.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l'_L = \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix} \\ l'_R = \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix} \\ v'_L = \begin{pmatrix} v'_{eL} \\ v'_{\mu L} \\ v'_{\tau L} \end{pmatrix} \\ v'_R = \begin{pmatrix} v'_{eR} \\ v'_{\mu R} \\ v'_{\tau R} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (13.45)$$

Диагонализация путем биунитарного преобразования. Крест означает эрмитово сопряжение.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} V_L^{+l} Y^l V_R^l = \frac{M^l}{v}, \\ \\ M^l = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau), \\ \\ l_L = V_L^{+l} l'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \\ \\ l_R = V_R^{+l} l'_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (13.46)$$

То же самое для нейтринного слагаемого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} V_L^{+v} Y^v V_R^v = \frac{M^v}{v}, \\ \\ M^l = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \\ \\ n_L = V_L^{+v} n'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} \\ \\ n_R = V_R^{+v} n'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (13.47)$$

Лагранжиан взаимодействия приобретает такой вид:

$$\mathcal{L}_{IH} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H}{v}\right) [\bar{l}_R M^l l_R + \bar{n}_L M^v n_R] + \text{э.с.}, \quad (13.48)$$

а также введем некоторые переобозначения:

$$\begin{cases} l_\alpha = l_{\alpha L} + l_{\alpha R}, \\ l_e = e, \\ l_\mu = \mu, \\ l_\tau = \tau, \\ \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{kL} + \mathbf{v}, (k = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (13.49)$$

Получаем массовые слагаемые в лагранжиане:

$$\mathcal{L}_H = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} m_\alpha \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{k=1}^3 m_k \bar{\nu}_k \nu_k - \frac{1}{v} \sum_{\alpha} m_\alpha \bar{l}_\alpha l_\alpha H - \frac{1}{v} \sum_k \bar{\nu}_k \nu_k H \quad (13.50)$$

Константа взаимодействия хиггса с лептонами – m/v . Это соотношение было экспериментально подтверждено. Лептонный слабый заряженный ток:

$$\begin{cases} j_\lambda^c = \bar{\nu}'_L \gamma_\lambda l'_L = \bar{n}_L V_L^{+\nu} \gamma_\lambda V_L^l l_L = \bar{n}_L u^+ \gamma_\lambda l_L, \\ u^+ = V_L^{+\nu} V_L^l, \end{cases} \quad (13.51)$$

λ – индекс Лоренца. Матрица, наблюдаемая на опыте:

$$u \equiv u_{PMNS} = V_L^{+l} V_L^\nu \quad (13.52)$$

Левые флейворные нейтринные поля:

$$\mathbf{v}_L = u n_L = V_L^{+l} \mathbf{v}'_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (13.53)$$

$$j_\lambda^c = \bar{\nu}_L \gamma_\lambda l_L = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\lambda l_{\alpha L} \quad (13.54)$$

Параметризация:

$$\begin{cases} S_{ab} = \sin \theta_{ab}, \\ c_{ab} = \cos \theta_{ab}; \\ 0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2}, \\ \delta_{13} \in (0, 2\pi) \text{ -- CP-нарушающая фаза.} \end{cases} \quad (13.55)$$

Кварковая модель адронов, сильное взаимодействие

Кратко рассмотрим сильное взаимодействие. Знаем, что наблюдаемые частицы, участвующие в сильном взаимодействии (протон, нейтрон, ряд других частиц), классифицируются по группам симметрии. Если есть фундаментальное представление группы $SU(3)$, то должны существовать мультиплеты частиц одинаковой массы, с одинаковым спином и с одинаковой пространственной четностью. Такие группы имеют размерности 1 (синглет, флейворная симметрия), 8 (октет) и 10 (декуплет). Но фундаментальное представление группы – триплет. Представления 1, 8 и 10, реально наблюдаемые в природе, можно построить, как известно из теории групп, устраивая произведение Кронекера триплетного представления. Это фундаментальные объекты – кварки. У них должны быть дробные заряды. Наблюдаемые частицы разделены на частицы с целым и полуцелым спином. Эти кварки, как фундаментальные объекты, есть кирпичики, из которых состоят адроны. Затем их существование было косвенно доказано. Считается, что фундаментальными частицами, из которых составлены сильно взаимодействующие частицы – кварки, которых 6 штук (как и антикварков). Теория для трех поколений лептонов была перенесена на построение слабых взаимодействий кварков.

С этой точки зрения, процессы распада сильно взаимодействующих частиц, выглядят как распады кварков внутри наблюдаемых частиц. Нейтрон, с точки зрения кварковой модели, состоит из кварка u и двух d -кварков. d -кварк переходит в u -кварк, появляется 2 u -кварка и 1 d -кварк, поэтому получаем на выходе протон. W распадается, поэтому мы видим электрон и антинейтрино.

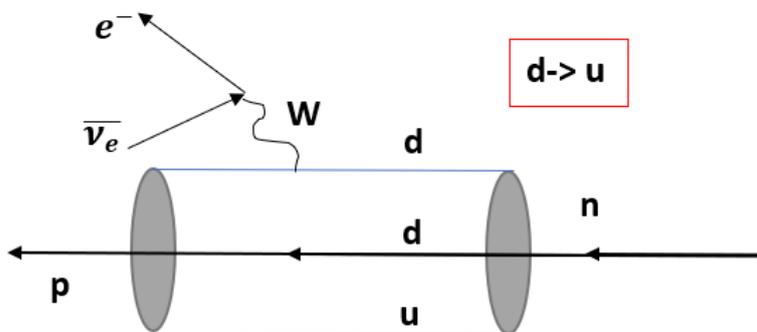


Рис. 13.2. β - распад нейтрона

Более сложный процесс включает себя процесс рождения из кварков. Кварки u и d входят в один дублет. Хорошо известная Λ -частица включает в себя третий кварк из второго поколения. Она распадется на протон и пион (состоит из кварка и антикварка). Однако s -кварк не входит в состав конечных частиц. Это означает, что s -кварк из второго поколения должен перейти в первое, превратившись в u -кварк. Снова образуется протон.

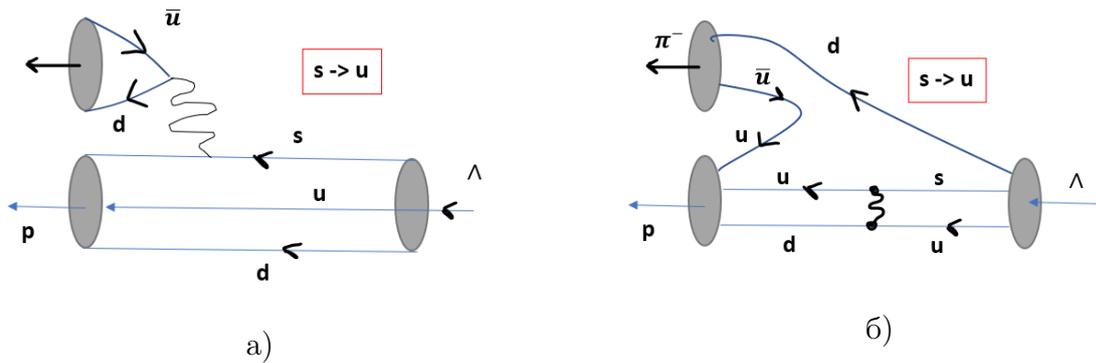


Рис. 13.3. Пример 2

W может распасться на антикварк и d , которые из одного поколения. Он образует связанное состояние – пион. Смешивание возникло впервые в кварковом секторе.

Слабый кварковый ток строится по аналогии с лептонным. Левые компоненты объединяются в слабые изодублеты.

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L. \quad (13.56)$$

Штрихи обозначают смешивание.

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (13.57)$$

где V – это матрица смешивания, ее размерность 3×3 . Она определяется 4 параметрами и является унитарной матрицей.

Матрица Кабиббо-Кобаяси-Маскавы – это 3×3 матрица. Она может быть параметризована тремя углами смешивания и фазой. Из множества возможных соглашений, стандартным стало:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad (13.58)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

причем $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, δ – фаза, ответственная за явления, нарушающие CP.

Лекция 14. Квантовая хромодинамика — SU(3)-калибровочная теория сильного взаимодействия. Асимптотическая свобода и конфайнмент. Стандартная модель и ее обобщения

Квантовая хромодинамика — SU(3)-калибровочная теория сильного взаимодействия

На прошлой лекции кратко обсудили, как устроена теория электрослабых взаимодействий. Важную часть Стандартной модели составляет теория сильных взаимодействий. Эта теория называется квантовой хромодинамикой. Обсудим, как открывались элементарные частицы, характеристики которых можно найти в справочниках: масса, спин, электрический заряд, моды распада (для нестабильных частиц).

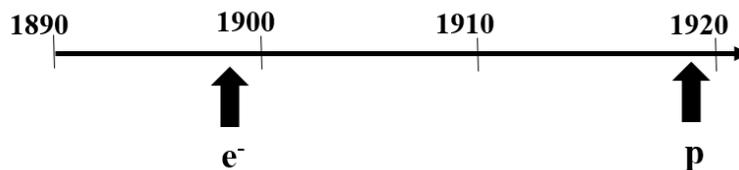


Рис. 14.1. Временная шкала 1890 г. - 1920 г.

Физика элементарных частиц фактически началась в конце 19 века, когда Томсон открыл электрон. На шкале времени отмечено это событие.

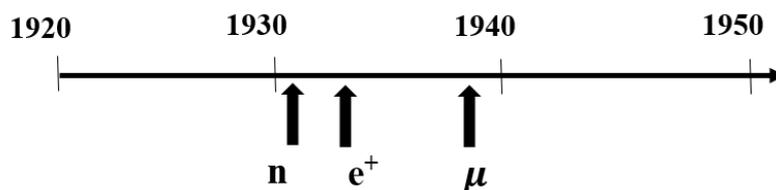


Рис. 14.2. Временная шкала 1920 г. - 1950 г.

Через 30 лет было понято, что состав простейшего атома водорода, его ядро — элементарная частица (протон).

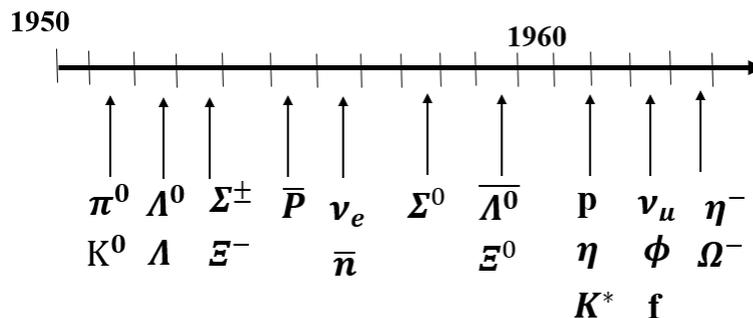


Рис. 14.3. Временная шкала 1950 г. - 1960 г.

Тогда появилась вторая элементарная частица. Позже в опытах Чедвика была открыта частица, которая похожа на протон, но является электрически нейтральной. Так возникла нейтрон-протонная модель ядра. Идея была впервые высказана профессором Д.Д. Иваненко. Параллельно развивалась и теория. В 1928 году Дирак получил свое знаменитое уравнение и пришел к выводу, что существует еще и позитрон. Затем в конце 30х годов был открыт тяжелый аналог электрона, сегодня мы называем его мюоном (по современной терминологии лептон). Он нестабилен и распадается довольно быстро.

Техника эксперимента вильно продвинулась в послевоенное время. Стали открывать различные фермионы и бозоны. Позже было открыто нейтрино. В дальнейшем появилось много других частиц, сегодня их несколько сотен. Как же привести в порядок все эти элементарные частицы? Можно объединить частицы с примерно одинаковой массой и одинаковым спином, они группируются в синглеты, октет (группы из 8 частиц) и декуплеты. Было замечено, что если расположить частицы на плоскости изоспин-гиперзаряд, то образуются правильные фигуры. Математики подсказали физикам, что изображение на плоскости – мультиплет группы $SU(3)$. Возникла идея, что на самом деле, эти частицы, объединенные вместе – частицы не элементарные, а состоящие из фундаментальных частиц, которые принято называть кварками. Главный вопрос – можно ли придать кваркам физический смысл? Первое время считалось, что это всего лишь удобный математический аппарат. Позже стало понятно, что частицы на самом деле существуют в природе.

В середине 60х годов стали рассеивать электроны высоких энергий на протоне. Обнаружили некую странность. По этим данным глубокого неупругого рассеивания (электрон при высокой передаче импульса разбивает протон) выяснилось, что се-

чение такого рассеивания ведет себя с ростом передачи импульса медленнее, чем если бы это был шарик (так считалось раньше). Оказалось, что доступные энергии соответствуют энергиям меньше, чем 10^{-13} . В процессе взаимодействия они не успевают провзаимодействовать между собой. Это и было косвенное доказательство существования кварков. Оказалось, что при большой передаче импульса, внутри, за счет квантовополевых процессов, рождаются кварк-антикварковые пары. Можно



Рис. 14.4. Временная шкала 1970 г. - 1990 г.

найти функции распределения партонов из совокупности экспериментальных данных, тем самым вычислить уносимый импульс. Оказалось, что они дают половину импульса. Высказано предположение, что другую половину уносят другие составляющие, которые не взаимодействуют с фотоном. Это есть переносчики сильного взаимодействия между кварками. Позже их назовут глюонами (название произошло от английского слова «клей»).

Загадку сильного взаимодействия удалось решить путем создания калибровочной теории сильного взаимодействия. Была обобщена эталонная калибровочная теория – квантовая электродинамика, потребовалось неабелево обобщение. Кварки уже были введены с точки зрения теории электрослабых взаимодействий. Нужно, чтобы теории были согласованы, то есть число поколений кварков должно быть равно числу лептонных поколений. Однако тогда было известно только три кварка. Анализ распадов показал, что требуется s-кварку партнер, который сегодня известен как c-кварк. В процессе изучения экспериментальных данных, была обнаружена новая частица, необычные свойства которой могли быть объяснены только тем, что она состоит из c и анти-c кварков. Так возник еще один четвертый кварк (charm). Разные уровни дают мезоны разной массы. Требовалось три поколения кварков, как мы знаем. Позже

были открыты 5 (bottom) с массой 10 ГэВ и 6 (top) кварки. Таким образом, была подтверждена 6-кварковая схема.

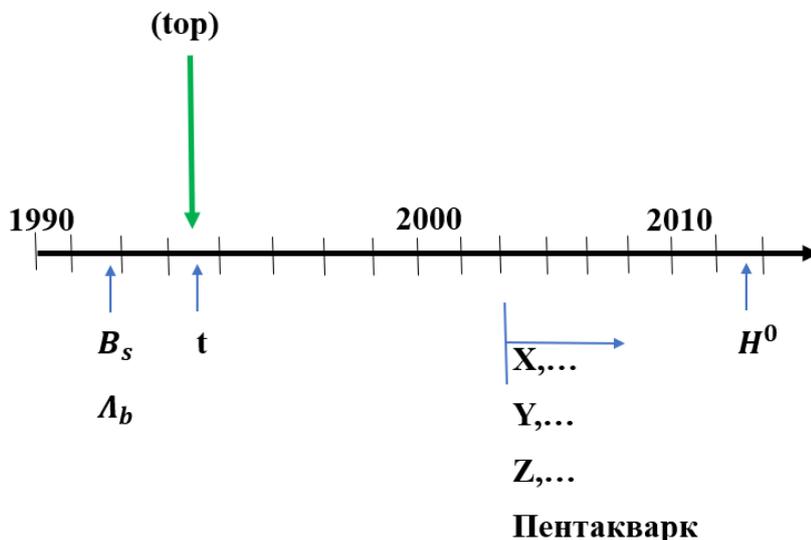


Рис. 14.5. Временная шкала 1990 г. - 2010 г.

К моменту открытия t-кварка, была не открыта только предсказанная ранее частица – бозон Хиггса. Она открыта в 2012 году на Большом Адронном Коллайдере. Сегодня основные усилия экспериментаторов направлены на то, чтобы найти отклонения от Стандартной Модели – указание на существование новой физики. Некоторые отклонения были найдены, несмотря на прекрасное совпадение теории с экспериментом.

Теория сильных взаимодействий

Переходим к обсуждению того, как устроена теория сильных взаимодействий. Кварки несут дробные заряды, причем

$$\begin{cases} Q_{u,c,t} = +\frac{2}{3}, \\ Q_{d,s,b} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (14.1)$$

Три кварковых состояния образуют барионы:

$$|B\rangle = |q_1, q_2, q_3\rangle. \quad (14.2)$$

Барионы являются фермионами, они подчиняются статистике Ферми-Дирака и принципу Паули (фундаментальный принцип, объясняет, почему вещество стабильно). Их волновая функция антисимметрична.

Мезоны рассматриваются как связанные состояния кварков и антикварков:

$$|M\rangle = |q_1, \bar{q}_2, q_3\rangle. \quad (14.3)$$

На тот момент возникла трудность в интерпретации в рамках кварковой модели – как учесть барионы со спином $3/2$? Была открыта новая частица с таким спином. Имеется 3 u-кварка в одинаковом спиновом состоянии. Они обладают симметричным положением в пространстве, спином и флейвором. Возникло противоречие между спином и статистикой. Значит, нужно ввести новое дополнительное квантовое число – цвет $a \in 1, 2, 3$.

$$|\Delta^{++}\rangle = |u_a u_b u_c\rangle \quad (14.4)$$

Волновая функция полностью антисимметрична по индексу a . Эта характеристика была подложена в основу квантовой хромодинамики. 1 постулат: адронная материя состоит из кварков. 2 постулат: адронная материя, составленная из цветовых кварков, должно представлять собой синглет по отношению к группе цвета.

С учетом нового квантового числа и будем строить теорию. По цвету нужно просуммировать. Группа унитарных 3×3 матриц должна иметь $\det U = \pm 1$. Генераторы выбирают в виде матриц Геллмана:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.5)$$

$$\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.6)$$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.7)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.8)$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.9)$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.10)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (14.11)$$

$$\lambda^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad (14.12)$$

В матрицах Геллмана можно заметить матрицы Паули. Строим генераторы группы $SU(3)$, учитывая, что группу $SU(2)$ можно вложить в нее тремя способами. Нормировку используют такую же, как и в группе $SU(2)$. Большие буквы – групповой индекс. Определим $t_{ab}^A = \frac{1}{2}\lambda_{ab}^A$.

Эта группа неабелева, поэтому алгебра Ли задается коммутатором генератора.

$$[t^A, t^B] = if_{ABC}t^C \quad (14.13)$$

(Анти-)кварковые поля в (анти-)триплетном представлении:

$$[3 \otimes \bar{3} = 8 \otimes 1, 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \otimes 8 \otimes 8 \otimes 1] \quad (14.14)$$

Строим теорию, которая по цвету обладает симметрией. Раз матрица унитарная, то она может быть представлена в виде $U = \exp(i\alpha_A t^A)$.

Нужно ввести глюонные калибровочные поля. Переносчики должны преобразовываться по присоединенному представлению группы $SU(3)$. Используем фундаментальные принципы, которые уже были заложены ранее. Должна сохраняться инвариантность \mathcal{L}_{QCD} относительно локального относительно $SU(3)_C$ калибровочного преобразования. Кварковые поля в фундаментальном взаимодействии:

$$\Psi_q(x) \longrightarrow U(x)\Psi_q(x) = \exp(i\alpha_A(x)t^A)\Psi_q(x), \quad (14.15)$$

где индекс q нумерует кварки. Глюонное калибровочное поле в сопряженном представлении:

$$A_\mu^A(x)t^A \longrightarrow U(x)A_\mu^A(x)t^AU^{-1}(x) + \frac{i}{g_s}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x). \quad (14.16)$$

В отличие от электрослабой теории, не рассматриваем спонтанное нарушение цветовой группы.

Вводим лагранжиан свободного дираковского поля. Обозначим кварковые поля Ψ_q^a , где a – это цветовой индекс, который пробегает значения 1, 2, 3.

$$\mathcal{L}_{freeDirac} =_q \bar{\Psi}_q^a \delta_{ab} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_q^b - m_q \bar{\Psi}_q^a \Psi_q^a, \quad (14.17)$$

причем $q \in (u, d, s, c, b, t)$. Биспинор сам по себе содержит 4 индекса.

Чисто глюонная часть нам уже известна. Обозначим глюонные поля как A_μ^A , где $A \in 1, \dots, 8$.

$$\mathcal{L}_{pureGluon} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (14.18)$$

где

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f_{ABC} A_\mu^B A_\nu^C. \quad (14.19)$$

То есть, коммутатор генераторов нетривиальный.

Объединение кварков с глюонами: минимальная связь кварков с глюонами, согласующаяся с локальной калибровочной инвариантностью

$$\mathcal{L}_{interaction} = \sum_q g_s \bar{\Psi}_q^a \gamma^\mu t_{ab}^A A_\mu^A \Psi_q^b, \quad (14.20)$$

где $g_s^2 = 4\pi\alpha$.

Полный (классический) лагранжиан квантовой хромодинамики:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{freeDirac} + \mathcal{L}_{interaction} + \mathcal{L}_{pureGluon} = \\ &= \sum_q \bar{\Psi}_q^a (i\delta_{ab} \gamma^\mu \partial_\mu + g_s \gamma^\mu t_{ab}^A A_\mu^A) \Psi_q^b - m_q \bar{\Psi}_q^a \Psi_q^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} = \\ &= \sum_q \bar{\Psi}_q^a (i\gamma^\mu (D_\mu)_{ab} - \delta_{ab} m_q) \Psi_q^b - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \end{aligned} \quad (14.21)$$

где $(D_\mu)_{ab} = \delta_{ab} \partial_\mu - ig_s t_{ab}^A A_\mu^A$ – длинная производная. При реальном квантовании возникает дополнительное осложнение. Оно же встречается в электродинамике. Потенциал содержит лишние степени свободы. Технически каждой скорости потенциала

должен отвечать свой импульс, поэтому дополнительные степени свободы необходимо исключить. Формально вводятся вспомогательные поля. Оставим пока в таком виде.

$$(iD - m_q \not{\partial}) \Psi_q = 0, D^\mu F_{\mu\nu}^A = g_s \sum_q \bar{\Psi}_q t^A \gamma_\nu \Psi_q \quad (14.22)$$

Универсальность связи кваркового поля с глюонами регулируется константой g_s , причем развязка происходит при $g_s \rightarrow 0$.

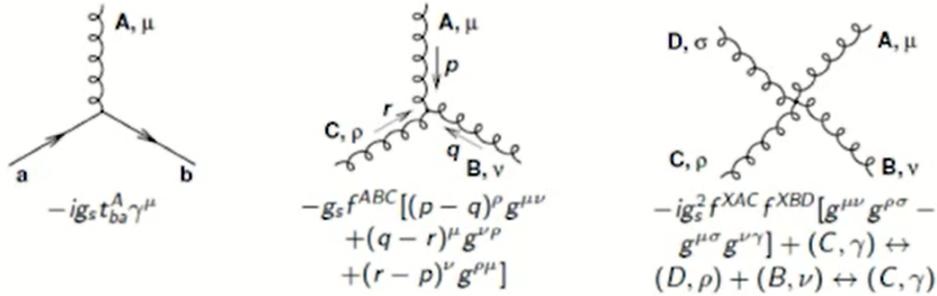


Рис. 14.6. Диаграммы взаимодействия

$$\mathcal{L} \supset \bar{\Psi}_q^a (-ig_s \gamma^\mu t_{ab}^A A_\mu^A) \Psi_q^b - g_s f^{ABC} (\partial_\mu A_\nu^A) A^{B\mu} A^{C\nu} - \frac{1}{4} g_s^2 f^{XAB} f^{XCD} A^{A\mu} A^{B\nu} A_\mu^C A_\nu^D \quad (14.23)$$

Правила Фейнмана: испускание глюона изменяет цвет кварка; глюон несет цвет и антицвет; испускание глюона изменяет глюонный цвет. На самом деле, константа связи зависит от переданного импульса. Необходимо указывать масштаб измерения α_s . Правая часть – β -функция.

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d\ln\mu^2} = \beta(\alpha_s(\mu^2)), \\ \beta(\alpha_s) = -\alpha_s^2 (b_0 + b_1 \alpha_s + b_2 \alpha_s^2 + \dots), \end{cases} \quad (14.24)$$

причем

$$\begin{cases} b_0 = \frac{11C_A - 2n_f}{12\pi}, \\ b_1 = \frac{17C_A^2 - 5C_A n_f - 3C_F n_f}{24\pi^2} = \frac{153 - 19n_f}{24\pi^2}. \end{cases} \quad (14.25)$$

То есть, есть зависимость от числа флейвиров и цвета. Оказалось, что есть 3 цвета и 6 флейвиров. Обычно масштаб выбирается с учетом массы Z-бозона.

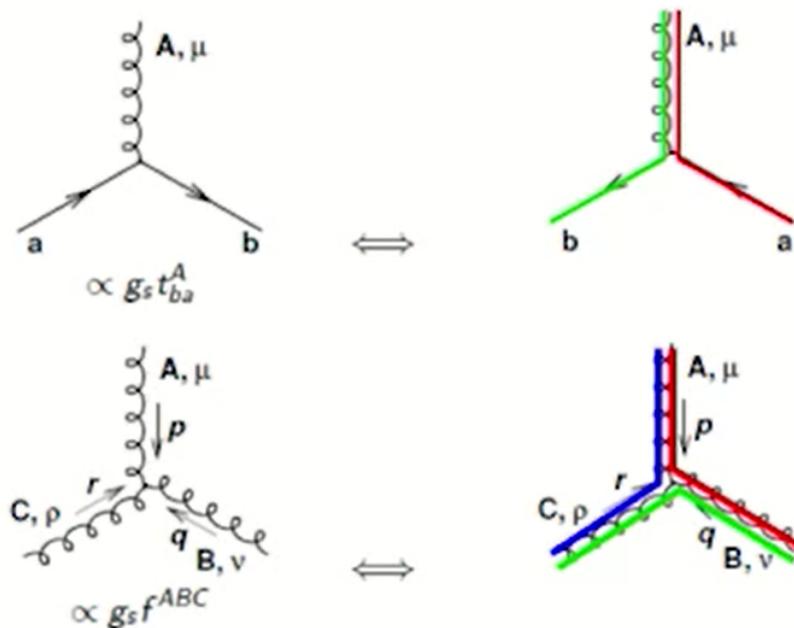


Рис. 14.7. Правила Фейнмана

Асимптотическая свобода и конфайнмент

В первом приближении имеем обмен одним глюоном, затем из-за виртуальных пар кварков и антикварков и самодействия, возникает новая поправка. В результате можно переопределить заряд.

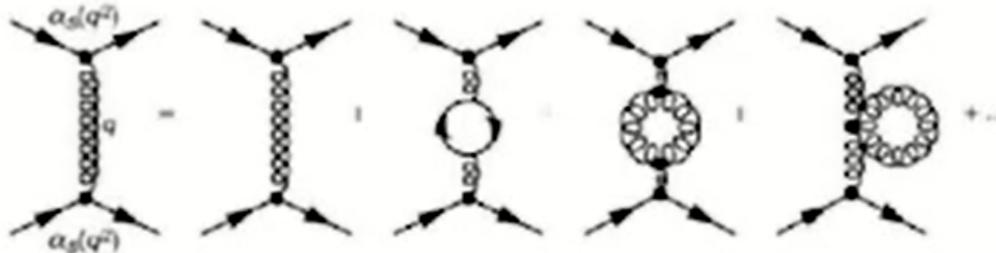


Рис. 14.8. Бегущая константа

Эксперимент подтверждает предсказание о бегущей константе.

Наблюдается размерная регуляризация. Главное, что было установлено экспериментально – явление ослабления связи (асимптотическая свобода). Если двигаться на малых q , то константа становится порядка единицы, что означает сильную связь. Это явление в неабелевой калибровочной теории в группе $SU(3)$ было открыто в 1973

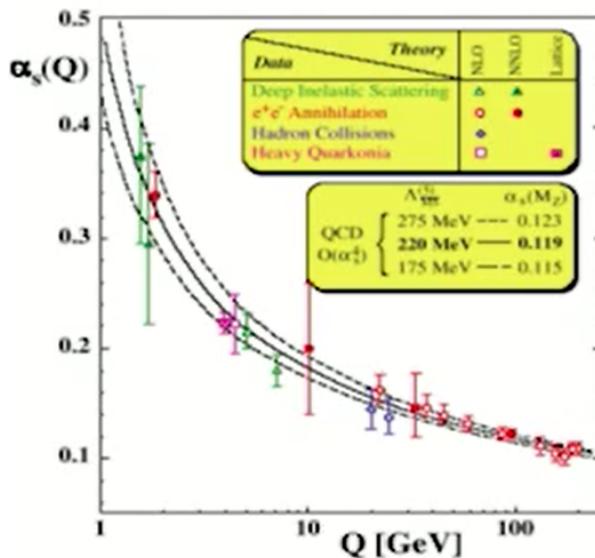


Рис. 14.9. Экспериментальные данные

году. Возрастание эффективного заряда при больших q объясняет явление «конфайнмент».

Может произойти рождение пары кварк-антикварк. На малых расстояниях возникает много кварковых пар, позже они образуют наблюдаемые адроны. Можно наблюдать как минимум 2 адронные струи. Можно показать, что средний заряд адронов несет информацию о заряде кварков.

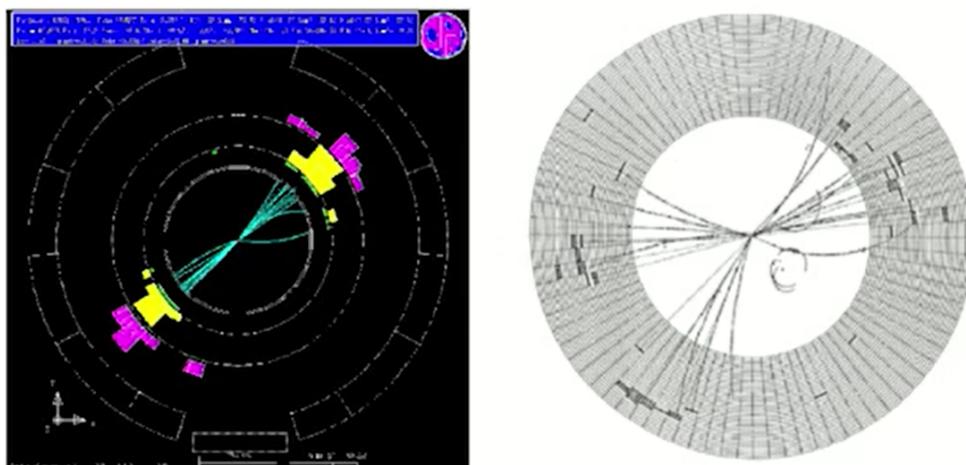


Рис. 14.10. Рождение пары $q\bar{q}$

Известно, что кварки не имеют единичного заряда, они могут излучаться в трех возможных числовых комбинациях, разные кварки имеют разную массу.

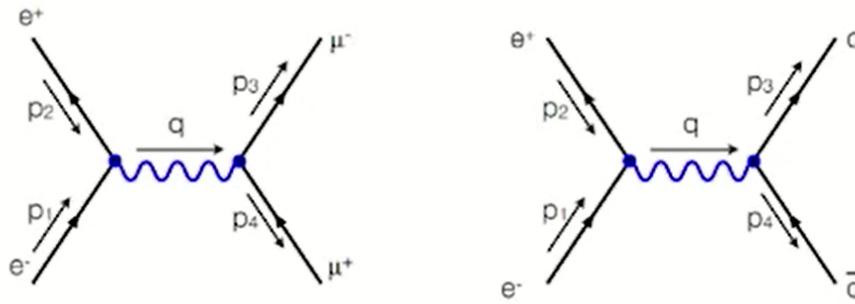


Рис. 14.11. Механизм $e^+ + e^- \longrightarrow q + \bar{q}$

Вспомним полное поперечное сечение для образования μ -образной пары:

$$\sigma = \frac{\pi}{3} \left(\frac{hc\alpha}{E} \right)^2, \quad (14.26)$$

$$\sigma_{\mu^+\mu^-} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{hc\alpha}{E} \right)^2 \implies \sigma_{q_i\bar{q}_i} = 3Q_i^2 \times \sigma_{\mu^+\mu^-} \quad (14.27)$$

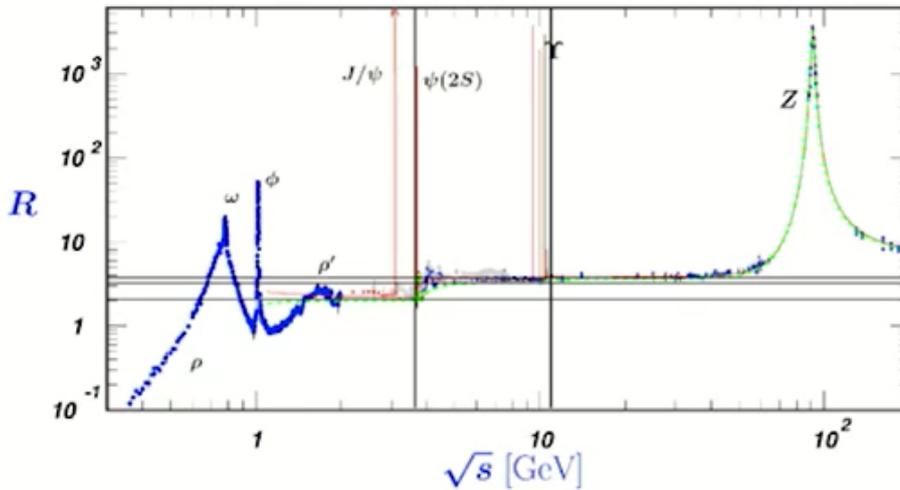


Рис. 14.12. Экспериментальные данные, которые подтверждают теорию

Теперь рассмотрим соотношение

$$R = \frac{\sum_i \sigma_{q_i\bar{q}_i}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} = 3 \times \sum Q_i^2. \quad (14.28)$$

Какие кварки мы можем получить, зависит от энергии:

$$\begin{cases} \sqrt{s} < 2m_c \sim 3.7\text{GeV}, R = 3 \times ((2/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2) = 2; \\ \sqrt{s} < 2m_b \implies 10.6\text{GeV}, R = 3 \times ((2/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2) = 10/3; \\ \sqrt{s} < 2m_t \sim 330\text{GeV}, R = 3 \times ((2/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2 + (1/3)^2) = 11/3. \end{cases} \quad (14.29)$$

Радиационные поправки здесь не учитываются. Однако этого уже достаточно, чтобы сравнить теорию с экспериментом. Видим ступенчатое поведение, как и должно быть.

На самом деле, когда рассматриваем реальный процесс столкновения протонов, знаем, что каждый из них состоит из множества партонов. На малых расстояниях игра идет между кварками и глюонами, далее они излучают, образуют пары, из них образуются кластеры – связанные состояния в виде наблюдаемых частиц.

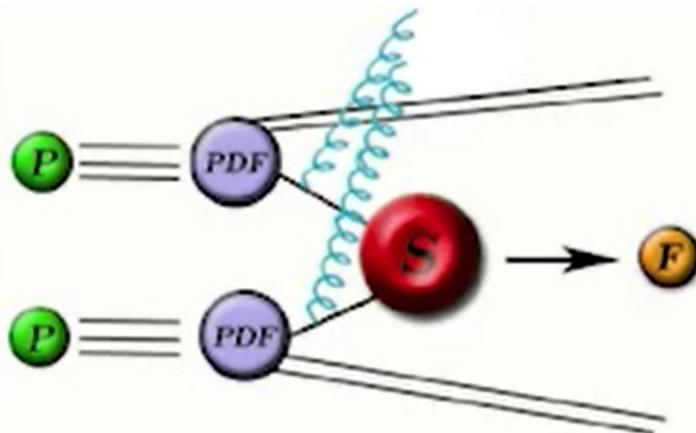


Рис. 14.13. Столкновение протонов

При высокой энергии партоны начального и конечного состояний излучают другие партоны – каскадный процесс, напоминающий так называемые ливни. В конце концов адронизируются партоны с очень низкой энергией.

Протон изображен как связанное состояние, он состоит из кварков. Происходит процесс адронизации, далее видим, что идут бесцветные объекты. Нужно уметь выделять нужный сигнал.

В области низких энергий работают с потенциальными моделями, чтобы рассчитать спектр связанных состояний. Однако есть запаздывание, для маленьких масс теория работает плохо. Квантовая хромодинамика, в отличие от теории электрослабых взаимодействий (фигурируют поля наблюдаемых частиц), строится на основе

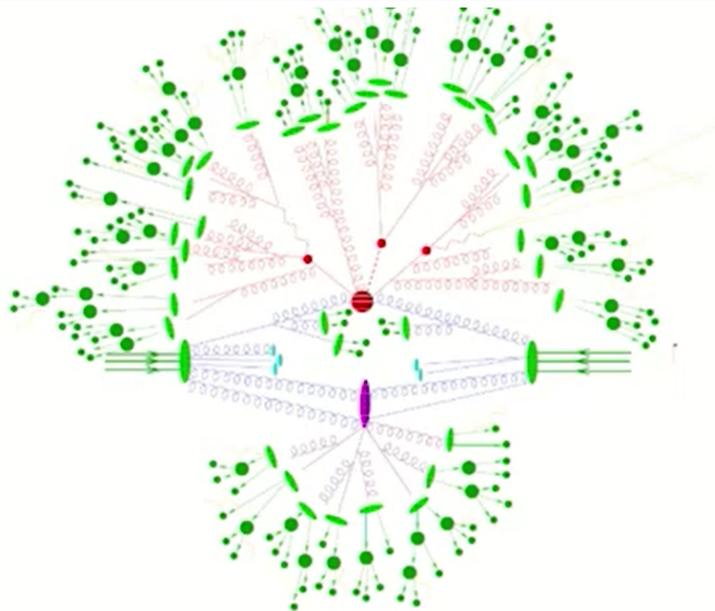


Рис. 14.14. Протон-протонное столкновение на ЛНС

фундаментальных частиц, которые не наблюдаются в эксперименте. Она объясняет, как возникают наблюдаемые на опыте частицы из частиц, которые наблюдаются в лабораториях только косвенно. На ранних этапах эволюции Вселенной была фаза деконфайнмента (кварк-глюонная плазма, может быть получена в малом объеме на короткое время на Коллайдере): кварки и глюоны существовали в свободном состоянии. Позже произошло остывание и фазовый переход в фазу конфайнмента.

Стандартная модель: преимущества и открытые вопросы

Стандартная модель – это математически непротиворечивая теория. Она совместима почти со всеми экспериментальными результатами. Современные расчеты согласуются с экспериментальными измерениями примерно до 10^{-12} . Расхождение однако существует, поэтому ожидается уточнение. Первый этап уточнения был уже получен. Возможно, это указание на новую физику (за пределами Стандартной модели).

Есть однако и вопросы, на которые Стандартная модель ответить пока не может. Вот главные из них:

- Почему существует три семейства кварков и лептонов? Мы это постулируем, но вполне возможно, что нам не хватает энергии, чтобы получить более тяжелые

Частицы.

- Почему одно семейство состоит из Q, u_R, d_R, e_r ?
- Почему электрический заряд квантуется?
- Почему локальная калибровочная группа $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$? Последние две спонтанно нарушаются, поэтому образуются массы.
- Почему пространство-время четырёхмерно? Можно предположить, что мы живем на четырехмерной гиперповерхности, которая помещена в пространство более высокой размерности.
- Почему существует 26 свободных параметров?
- Каково происхождение кварковых и лептонных масс и их смешений?
- Каково происхождение CP-симметрии?
- Каково происхождение асимметрии материи и антиматерии?
- Какова природа темной материи?
- Какова роль гравитации? Стандартная модель ее не включает. Гравитацию учитывают как классическое внешнее поле (в экспериментах практически плоское). Но возле, например, черных дыр нужно использовать искривленное пространство. Однако пока непонятно, как квантовать гравитацию.
- Почему электрослабая шкала (100 ГэВ) (Λ_{QCD}) намного ниже шкалы Планка (10^{19} ГэВ)? Что же в промежутке? Пока неизвестно.

Первое, что можно сделать – понизить число параметров, вложить группы в одну группу $SU(5)$. Тогда кварки и лептоны будут входить в один мультиплет. Если расширить теорию, то в игру вступают новые взаимодействия. Второе – унификация констант связи Стандартной модели. Константы связи при нулевой энергии сильно различаются:

$$\begin{cases} \alpha_{electromagnetism} \sim \frac{1}{137} \\ \alpha_{weak} \sim \frac{1}{30} \\ \alpha_{strong} \sim 1 \end{cases} \quad (14.30)$$

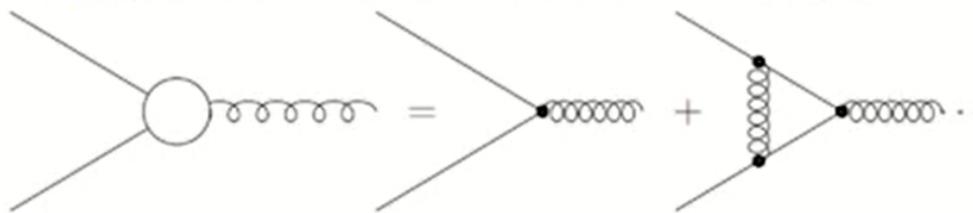


Рис. 14.15. Причины появления бегучести

Сила зависит от энергии, обусловленной квантовыми поправками.

По-видимому, в более общей теории, все взаимодействия выглядели едино. По мере снижения энергии, они разошлись. Если хотим, чтобы теория обладала свойством объединения, требуется группа $SU(5)$.

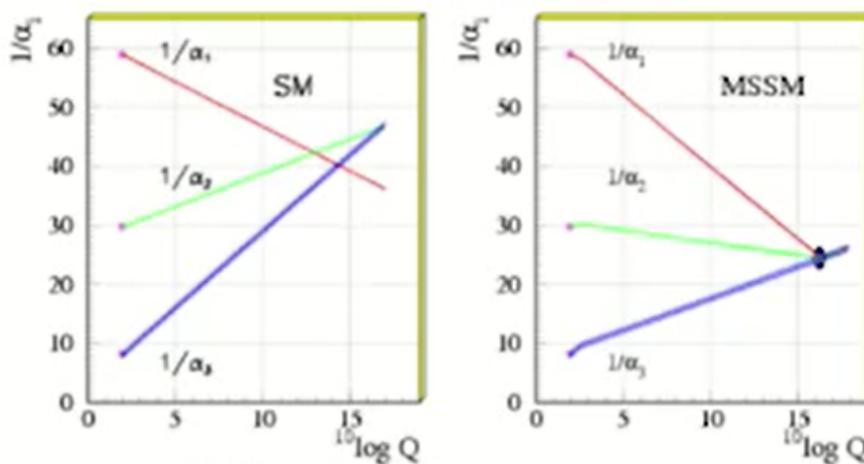


Рис. 14.16. Соотношение констант связи

Выводы

Стандартная модель строилась при тесном взаимодействии с экспериментом. Она основана на принципе симметрии (относительность, калибровочная инвариантность). Модель согласуется с квантовой механикой и является наиболее проверенной теорией всех времен. Она лишь страдает от некоторых ограничений и открытых вопросов. Например, природа массы нейтрино еще неизвестна.

Теории, выходящие за рамки Стандартной модели, строятся на основе различных теоретических идей. Эти идеи Великого объединения находятся в постоянной эволюции.



Рис. 14.17. Состав Вселенной

Стандартная модель проверена, но она не является окончательной теорией. Наша Вселенная устроена так, что Стандартная модель не может ее объяснить.

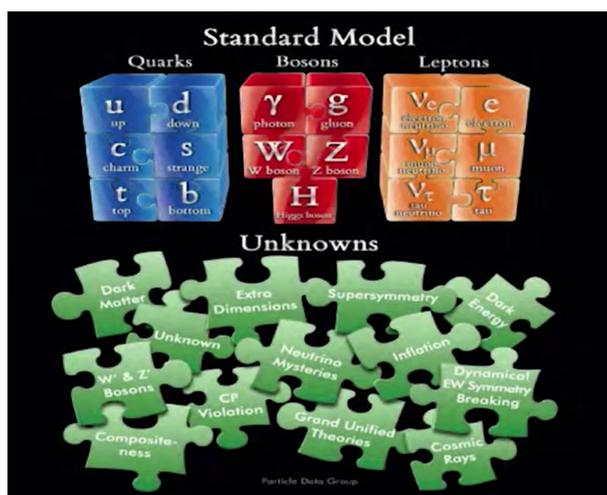


Рис. 14.18. Расширение Стандартной модели. Внизу указано то, что еще не открыто

Если будем учитывать радиационные поправки к хиггсовскому потенциалу, то может случиться так, то на больших значениях поля вакуум оказывается нестабильным, он может разрушиться. Сейчас мы находимся в метастабильном состоянии. Однако оценки показывают, что время жизни этого состояния гораздо больше времени жизни нашей Вселенной.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ