ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ПЕТРОВ
СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ХИМФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
МОЛОКОВУ АЛИСИЮ ПАВЛОВНУ

Оглавление

Лекция 1. Основные идеи теории относительности

Система понятий специальной теории относительности: пространство и время

В квантовой механике нельзя дать точные определения понятий, как это было в классической. В своих учениях Ньютон попытался дать определения основным понятиям, таким как пространство и время. Он дал следующее определение времени: «Абсолютное истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью». Ньютоново же определение пространства заключается в том, что есть некоторое пространство, в которое накидали материальных тел.

В своих лекциях по оптике, теории относительности и квантовой механике Л. Мандельштам по поводу пространства и времени писал следующее.

«Неправильно полагать, что принцип относительности перевернул наши понятия о времени и пространстве в том смысле, что на место старых ясных и четких понятий он поставили такие же новые. Это не так. Одна из больших заслуг принципа относительности в том и состоит, что он показал, что основные понятия, которыми оперировали раньше – во всяком случае, в известной своей части, – вовсе не были определены.»

Принцип относительности Галилея

Принцип относительности Галилея говорит о том, что все механические явления в разных инерциальных системах отсчета протекают одинаково. Причем Галилей, когда сформулировал этот принцип, не использовал понятие инерциальной системы отсчета.

Принцип был сформулирован в 1632 году и звучал таким образом: «Наблюдая за механическими явлениями в трюме корабля невозможно определить движется ли ваш корабль или стоит на месте». При этом Галилей подчеркивал, что движение корабля должно быть равномерным. Зная современную формулировку принципа относительности, мы имеем дело с двумя инерциальными системами отсчета: корабль или стоит неподвижно относительно причала, или он относительно этого причала движется равномерно с постоянной скоростью.

На математическом языке это формулируется так. В силу изотропии пространства выбираются две системы отсчета, оси координат которых параллельны друг другу: x параллельно x', y параллельно y' и z параллельно z' . Между ними – некоторый сдвиг, допустим по координате x. Предположим, что штрихованная координата движется в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V. Тогда из простых геометрических соображений, если в начальный момент времени они совпадают, то в последующие моменты времени можно выписать соотношения, описывающие принцип относительности Галилея:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}, \tag{1.1}$$

где V – это постоянная скорость.

Если продифференцировать по времени, то получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - V \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases}, \tag{1.2}$$

Отсюда видно, что если скорость какой-то частицы в не штрихованной системе постоянна, то в силу постоянности относительного движения и штрихованные скорости будут постоянными. Это говорит о том, что если в одной инерциальной системе отсчета частица движется равномерно и прямолинейно или покоится, то она будет точно так же двигаться и в штрихованной системе, если штрихованная система движется сама с постоянной скоростью относительно не штрихованной. Отсюда следует, что инерциальных систем отсчета может быть бесконечно много.

Из формул, реализующих преобразования Галилея, следует принцип ковариантности (сохранение формы относительно чего-то). Он говорит, что все явления описываются в разных инерциальных системах отсчета одинаковым образом. Поэтому иногда принцип относительности Галилея также называют принципом эквивалентности всех инерциальных систем отсчета.

Допустим, мы имеем замкнутую систему n частиц, имеющих парное взаимодействие, каждая частица взаимодействует с любой другой и других частиц нет. Это называется замкнутая система, у которой сохраняется импульс и угловой момент. Если возьмем любую частицу из этой системы, то уравнение в форме второго закона Ньютона будет выглядеть так:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}, \tag{1.3}$$

где m – масса частицы, $\vec{f}$ – действующая сила, которая действует на частицу со стороны других частиц. Действующая сила зависит от всех межчастичных расстояний. Данное уравнение описывает движение какой-то конкретной частицы из ансамбля частиц.

Если мы перейдем в штрихованную систему, то:

$$\begin{gathered} \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} \\ \vec{f}' = \vec{f} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Масса априори считается инвариантной величиной. Следовательно, уравнение 1.3 является инвариантным (предельный случай ковариантности), т.к. ускорение и действующая сила в данном случае постоянны. Это не означает, что данный случай применим к другим механическим явлениям.

Преобразования Лоренца

Все электромагнитные явления хорошо описываются уравнениями Максвелла, которые составляют основу теории электромагнитного поля:

$$\begin{gathered} rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ div\,\vec{E} = 4\pi\rho \\ rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ div\,\vec{H} = 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Эти явления носят волновой характер, поэтому они предполагают наличие гипотетической среды эфира для понимания среды, в которой эти волны распространяются. Принцип относительности Галилея не может быть применен к таким волнам.

Эту проблему попытался решить Лоренц, что привело к получению преобразований Лоренца в 1904 году. Он начал решать чисто математическую задачу, где подбирал преобразования координат и времени, при которых форма уравнений Максвелла оставалась бы неизменной. Формулы преобразования, которые он получил носят следующий вид:

$$\begin{cases} x' = \Gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \Gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{1.7}$$

где V – это постоянная скорость штрихованной системы отсчета относительно не штрихованной.

Лоренц не отказался от теории эфира, что нарушает принцип относительности. Для t' он отвел чисто вспомогательную роль. Это была некая величина, которая нужна для того, чтобы записать уравнения Максвелла. Вследствие этого факта автором специальной теории относительности считают не Лоренца, а Эйнштейна.

Для преобразований Лоренц сделал замену координаты времени и получил те же уравнения Максвелла (1.5) только со штрихами:

$$\begin{gathered} rot\,\overrightarrow{H'} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j'} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial t'} \\ div\,\overrightarrow{E'} = 4\pi\rho' \\ rot\,\overrightarrow{E'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{H'}}{\partial t'} \\ div\,\overrightarrow{H'} = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Таким образом, форма уравнений Максвелла не изменилась, что означает действие принципа ковариантности. В итоге Лоренц добился того, что уравнения Максвелла сохраняют свою форму относительно преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца трансформируются в преобразования Галилея, если скорость одной инерциальной системы относительно другой много меньше скорости света, т.к. тогда членом $\frac{v^2}{c^2}$ в уравнении 1.7 можно пренебречь с высокой степенью точности.

Теория Эйнштейна

В 1905 году была опубликована статья Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», в которой был сформулирован принцип относительности. В отличие от принципа относительности Галилея он утверждает, что все физические явления (не только механические) протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

В основу своей теории Эйнштейн положил два принципа (постулата). Первый принцип относительности гласит: «Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся».

Второй постулат гласит постоянство скорости света: «Каждый луч света движется в покоящейся системе координат с определенной скоростью, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом». Определение «покоящейся» носит условный характер, так была названа одна из двух равноправных систем отсчета. Поскольку источник света может двигаться в любом направлении, скорость света не зависит от направления его распространения. Независимость скорости света от скорости движения источника говорит, что она одинакова во всех системах отсчета.

Эйнштейн утверждал, что этих двух принципов достаточно, чтобы построить простую свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Он подчеркнул, что гипотеза эфира в предлагаемой теории оказывается излишней, поскольку не вводится понятие абсолютно покоящегося пространства.

Из постулатов Эйнштейна непосредственно следует, что в разных инерциальных системах отсчета свое время, отличное друг от друга. То, что Лоренц предположил, что t' - вспомогательная математическая величина, у Эйнштейна это физически обосновано.

Для этого рассмотрим две инерциальные системы отсчета. В начальный момент времени $t = 0$ они совпадают. Затем штрихованная система отсчета начинает двигаться относительно не штрихованной. В момент времени $t = 0$ источник света, источник электромагнитного поля, находящийся в начале обеих систем, производит короткую вспышку. В силу изотропии пространства эта вспышка означает сферическую волну. Опишем фронт сферической волны. В не штрихованной системе отсчета:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{1.9}$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в штрихованной системе отсчета:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t^2 \tag{1.10}$$

Получаем, что за конечное время t центр одной сферы сдвинулся относительно другой на расстояние ct, а радиус у сфер остался один и тот же. Такое невозможно представить. Чтобы выйти из этого парадокса нужно заменить в 1.10 t на t':

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{1.11}$$

Данный пример говорит о том, что t' – это физическая величина, и она должна быть введена как следствие обоих постулатов Эйнштейна. Таким образом, мы получим преобразования Лоренца тоже как следствие обоих постулатов Эйнштейна.

Лекция 2. Преобразования Лоренца и их следствия

Преобразования Лоренца

Рассмотрим еще раз следующий эксперимент. Есть две инерциальные системы отсчета. В начальный момент времени они совпадают и из начала координат испускается сферическая электромагнитная волна, которая в силу изотропии пространства и в силу постулатов Эйнштейна распространяется по всем направлениям одинаково. С течением времени увеличивается радиус этой сферы. В не штрихованной системе отсчета уравнение этой сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{2.1}$$

Наблюдатель, находящийся в штрихованной системе, видит ту же самую картину. Причем если время одно и то же, то происходит парадокс – центры раздвигаются, а радиусы – одни и те же. Поэтому Эйнштейн пришел к выводу, что время должно быть другое:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{2.2}$$

В отличие от Лоренца Эйнштейн подчеркнул, что t' — это не просто вспомогательная математическая величина, а физическая величина, означающее другое время.

В силу изотропии и в силу однородности пространства и времени всегда можно без ограничения общности считать, что оси y и z обеих систем координат параллельны друг другу и движение одной инерциальной системы отсчета относительно другой происходит вдоль оси x. Следовательно, чтобы получить искомые преобразования нужно штрихованные координаты и время представить как функции не штрихованных величин. Эти функции должны быть линейными, чтобы они оставались такими же по форме записи в другой системе, если в одной инерциальной системе отсчета рассматривается движение материального тела, на которое не действуют силы, т.е. оно прямолинейное и равномерное.

В силу того, что время однородно, можно сделать такое допущение, что в момент времени $t = 0$, t' тоже должно быть рано нулю. В противном случае это будет просто сдвиг по времени. Если это принять без ограничения общности, то это будет означать, что помимо того, что эти зависимости линейные, они должны быть еще однородными, т.е. не содержать никаких постоянных членов, не зависящих от координат.

Таким образом, мы установили, что движение одной системы относительно другой происходит вдоль оси x, т.е. ось x' совпадает с осью x. Следовательно, плоскость $z = 0$ – то же самое, что плоскость $z' = 0$. Аналогично плоскость $y = 0$ – это плоскость $y' = 0$. Поэтому если рассматривается точка в плоскости $z = 0$, то z' должно быть пропорционально z:

$$z' = \lambda z \tag{2.3}$$

В силу равноправия осей z и y, точно такое же соотношение должно быть для осей y:

$$y' = \lambda y \tag{2.4}$$

Если точка находится в плоскости $x' = 0$, то $x = Vt$. Следовательно, для произвольного момента времени:

$$x' = \alpha(x - Vt) \tag{2.5}$$

t' является линейной функцией времени t и координаты x. В противном случае при $x = 0$ и $t = 0$ штрихованное время было бы различным различных точках плоскости x'. Поэтому для времени записывается следующая линейная зависимость:

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - Vt) \\ y' = \lambda y \\ z' = \lambda z \\ t' = \gamma t - \delta x \end{cases} \tag{2.6}$$

Уравнение 2.6 – это общая форма записи для преобразования штрихованных координат и времени через не штрихованные соответствующие величины. Коэффициенты α, λ, γ и δ зависят только от скорости, т.к. среди них как частный случай должны быть преобразования Галилея для скоростей, которые много меньше скорости света.

Рассмотрим такой случай. На рисунке 2.1 штрихованная область движется в положительном направлении оси x со скоростью V. Данный процесс можно обратить, например, не штрихованная система может двигаться относительно штрихованной со скоростью $-V$ в противоположную сторону. В таком случае формулы 2.6 будут точно такими же, что означает, что зависимости коэффициентов от скорости не должны зависеть от знака скорости, они должны быть симметричными по отношению к смене знака.

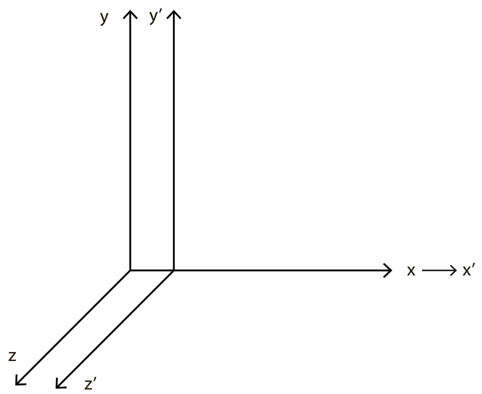

Рис. 2.1. Движение штрихованной оси относительно не штрихованной.

Вернемся к эксперименту с испусканием сферической электромагнитной волны в начальный момент времени в начале координат. Перепишем уравнение 2.1, используя формулы 2.6, следующим образом:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=\alpha^2(x-Vt)^2+\lambda^2y^2+\lambda^2z^2-c^2(\gamma t-\delta x)^2 \qquad (2.7)$$

Т.к. выражение 2.7 – это, по сути, множество, где нуль равняется нулю, то от добавления общего множителя, равенство остается верным:

$$\rho^2(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)=\alpha^2(x-Vt)^2+\lambda^2y^2+\lambda^2z^2-c^2(\gamma t-\delta x)^2 \qquad (2.8)$$

Теперь приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях координат и времени. Получаем следующие выражения:

$$\begin{cases}\alpha^2=\dfrac{\lambda^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}=\gamma^2\\ \delta^2=\dfrac{V^2}{c^4}\dfrac{\lambda^2}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\end{cases} \qquad (2.9)$$

$$\lambda^2=\rho^2 \qquad (2.10)$$

Если чисто формально положить $\gamma=1$, то мы получим подгоночные формулы Лоренца.

Т.к. до этого мы рассматривали частный случай, то запишем уравнения 2.1 и 2.2 для общего случая:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=\sigma^2 \qquad (2.11)$$
$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\sigma'^2 \qquad (2.12)$$

Предположим, что:

$$\sigma'^2=\rho^2\sigma^2 \qquad (2.13)$$

Очевидно, если воспользоваться выражениями 2.11 – 2.13, то мы снова получим выражение 2.8. Следовательно, формулы 2.6, 2.9 – 2.10 носят общий характер.

Теперь рассмотрим масштаб, который расположен перпендикулярно общей оси $x\to x'$ и параллельно оси z. Исходя из формул 2.6 длина масштаба будет выражаться следующим образом:

$$z_2'-z_1'=\lambda(z_2-z_1) \qquad (2.14)$$

Будем считать, что выбрали такую систему единиц, что длина масштаба равна единице в той системе, в которой он покоится. Тогда в силу равноправности этих процессов получаем:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda^2 = 1 \tag{2.15}$$

Теперь, зная значение λ^2, мы находим значения α^2, γ^2 и δ^2 из формул 2.9 и извлекаем корни. При извлечении берем положительные корни. Тогда получаем формулы преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \Gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \Gamma\left(t - \frac{Vx}{v^2}\right) \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.17}$$

Теперь запишем соотношение для конечных разностей:

$$\begin{gathered} \Delta x = \Gamma(\Delta x' - V\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) \end{gathered} \tag{2.18}$$

В дифференциальном виде они будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} dx = \Gamma(dx' - Vdt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \\ dt = \Gamma\left(dt' + \frac{Vdx'}{c^2}\right) \end{gathered} \tag{2.19}$$

Если инерциальная система отсчета, снабжена часами, то это означает, что имеется возможность посмотреть время в каждой точке выбранной системы координат. Данное время на часах должно быть синхронизированным. Другими словами, в каждой точке пространства, в каждой точке инерциальной системы отсчета время должно быть одним и тем же.

Следствия преобразований Лоренца

Первое следствие из преобразований Лоренца – это сложение скоростей. Нерелятивистские скорости складываются следующим образом. Если скорости движения значительно меньше скорости света, то, как следует из преобразований Галилея, для сложения скоростей получаем:

$$\dot{x}' = \dot{x} + V \tag{2.20}$$

Если скорости движения сравнимы со скоростью света, то нужно сделать следующие преобразования. Компоненты скорости в не штрихованной системе:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.21}$$

Компоненты скорости в штрихованной системе:

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} \quad v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} \quad v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} \tag{2.22}$$

Теперь с помощью формул 2.19 найдем связь между компонентами штрихованной и не штрихованной систем:

$$\begin{gathered} v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right) v_{x'}} \\ v_y = \Gamma \frac{v_{y'}}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right) v_{x'}} \\ v_z = \Gamma \frac{v_{z'}}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right) v_{x'}} \end{gathered} \tag{2.23}$$

Видно, что в данном случае компоненты скорости достаточно несимметричны, что означает не совпадение направлений скоростей в штрихованной и не штрихованной системах.

Разберем случай, когда частица со скоростью v движется только по направлению к оси x. Тогда компоненты скорости в штрихованной системе и не штрихованной следующие:

$$v_x = v \quad v_{x'} = v' \tag{2.24}$$

В данном случае задействована только первая формула из 2.23, и она выглядит следующим образом:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \left(\frac{V}{c^2}\right) v'} \tag{2.25}$$

<u>Второе следствие из преобразований Лоренца</u> – это изменение длины масштаба. Один частный случай уже был рассмотрен при выводе преобразований Лоренца (формулы 2.18).

Если масштаб расположен перпендикулярно направлению движения, то его длина не изменяется. Рассмотрим случай, когда масштаб расположен коллинеарно движению.

Длина масштаба в штрихованной и не штрихованной системах координат следующие:

$$\begin{gathered} \Delta x' = x_2' - x_1' = l' \\ \Delta x = x_2 - x_1 = l \end{gathered} \tag{2.26}$$

Преобразования Лоренца в конечных разностях даст следующую формулу:

$$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\Delta t) \tag{2.27}$$

Δt – это разность моментов времени t_2 и t_1, t_2 соответствует концу масштаба с координатой x_2, а t_1 – концу с координатой x_1.

Ключевым моментом в анализе данных соотношений является тот факт, что длина масштаба как конкретное число есть результат измерения. Другими словами, чтобы получить число, нужно реализовать какой-то процесс в результате измерения.

Предположим, что масштаб покоится в штрихованной системе отсчета. Пусть $l' = l_0$ есть собственная длина. Когда масштаб расположен перпендикулярно движению в любой системе отсчета, у него будет собственная длина.

Чтобы измерить длину движущегося масштаба, нужно измерить координаты его концов в один и тот же момент времени. Поэтому условие процесса измерения заключается в том, что $\Delta t = 0$. Тогда длина движущегося масштаба получается следующей:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{2.28}$$

Из полученной формулы видно, что длина движущегося масштаба всегда будет меньше его собственной длины.

Таким образом, в зависимости от того, в какой системе отсчета измеряется длина масштаба, она получается разная. Причем данный процесс не физический, а это результат измерения. Следовательно, истинной длины масштаба на самом деле нет. Само пространство меняет свою метрику в зависимости от того, движется ли относительно чего-то данное пространство или нет.

Лекция 3. Интервал, собственное время и ковариантность

Длина масштаба

Вспомним формулы для длины масштаба, который движется по оси x так, что относительно одной из двух систем отсчета он неподвижен, а относительно другой движется:

$$\Delta x' = \Gamma(\Delta x - V\Delta t) \tag{3.1}$$

$$\Delta x = \Gamma(\Delta x' - V\Delta t') \tag{3.2}$$

$\Delta x'$ и Δx – это разности начала и конца стержня, которые мы считаем масштабом в разных системах отсчета.

Относительно той системы, в которой покоится масштаб, нет разницы, как измерять координаты начала и конца масштаба. Относительно той системы, в которой масштаб движется, измерения нужно проводить в один и тот же момент времени. Поэтому условие процесса измерения заключается в том, что $\Delta t = 0$. Тогда длина движущегося масштаба получается следующей:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{3.3}$$

Рассмотрим формулы для измерения временных интервалов:

$$\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V\Delta x'}{c^2}\right) \tag{3.4}$$

$$\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t + \frac{V\Delta x}{c^2}\right) \tag{3.5}$$

Допустим, в штрихованной системе отсчета события, разделенные временным интервалом $\Delta t'$, происходят в одной точке пространства. Следовательно, $\Delta x' = 0$. В этом случае следующая формула:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{3.6}$$

Таким образом, временной интервал Δt всегда будет больше временного интервала в той системе, где события происходят в одной и той же точке, т.к. в знаменателе стоит величина меньшая единицы.

Рассмотрим пример с распадом мю-мезона. В лабораторных условиях период полураспада мю-мезона равен $2 \cdot 10^{-6}$ секунд. В зависимости от заряда мю-мезоны распадаются на электрон или позитрон с вылетом двух нейтрино. Поскольку в лабораторных условиях мю-мезоны движутся с нерелятивистскими скоростями, то можно считать, что это происходит в одном месте, т.е. $\Delta x' = 0$.

Известно, что мю-мезоны образовываются в верхних слоях атмосферы и регистрируются на поверхности Земли, таким образом, пролетев расстояние порядком 20 километров. Если считать по формуле $c \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, то получаем расстояние порядка 600 метров. Объяснение данного парадокса заключается в формуле 3.6: $\Delta t'$ – это собственное время жизни, V – величина скорости, близкая к световой.

Следовательно, можно сделать заключение о замедлении времени, что в разных системах отсчета время течет по-разному.

Понятие интервала

Рассмотрим еще раз следующий эксперимент. Есть две инерциальные системы отсчета. В начальный момент времени они совпадают и из начала координат испускается сферическая электромагнитная волна, которая в силу изотропии пространства и в силу постулатов Эйнштейна распространяется по всем направлениям одинаково. С течением времени увеличивается радиус этой сферы. В не штрихованной системе отсчета уравнение этой сферы:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{3.7}$$

Для общего случая уравнение 3.7 можно переписать следующим образом:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \sigma^2 \tag{3.8}$$

Рассмотрим два события с координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Тогда разность между этими двумя событиями запишется как:

$$S_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = inv \tag{3.9}$$

Если эти события бесконечно близки друг к другу:

$$dS^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = inv \tag{3.10}$$

Обе величины S_{12}^2 и dS^2 являются инвариантами. При переходе в другую инерциальную систему отсчета их квадратичная форма не меняет своей величины.

Величина, получаемая при извлечении корня из квадратичной формы, называется интервалом. В зависимости от величины самой формы она может быть нулевой, действительной или мнимой.

В дальнейшем будем считать, что для любых двух событий $\Delta y = \Delta z = 0$.

Когда речь идет о световой волне, приведенные выше формы (3.8 – 3.10) и соответствующий интервал, называемый светоподобным, равняются нулю.

Рассмотрим чисто мнимый интервал:

$$S_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0 \tag{3.11}$$

Перепишем формулу 3.11 в следующем виде:

$$S_{12}^2 = c^2\left(1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right)\Delta t^2 < 0 \tag{3.12}$$

Величина $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$ – некоторая скорость. В силу того, что интервал S_{12}^2 чисто мнимый, скорость $\bar{v}$ оказывается больше скорости света. Следовательно, скорость $\bar{v}$ е может быть связана с реальными событиями.

Перепишем формулу 3.5 для временных интервалов следующим образом:

$$\Delta t' = \Gamma\left(1 - \frac{V}{c}\frac{\bar{v}}{c}\right) \tag{3.13}$$

Теперь, если задать скорость в не штрихованной системе отсчета так, чтобы в скобках в формуле 3.13 был нуль $\left(\frac{V}{c} = \frac{\bar{v}}{c}\right)$, то $\Delta t'$ тоже обращается в нуль. Это означает, что если у нас есть чисто мнимый интервал, то можно всегда подобрать такую инерциальную систему отсчета, в которой $\Delta t' = 0$. Тогда интервал будет выглядеть следующим образом:

$$S_{12} = \sqrt{-(\Delta x')^2} \tag{3.14}$$

Такие чисто мнимые интервалы называются пространственноподобными. То, что в рассмотрении данного случая появляется скорость, большая скорости света, означает, что мы рассматриваем два независимых события.

Теперь рассмотрим действительный интервал:

$$S_{12}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0 \tag{3.15}$$

Введем, как и в предыдущем примере, скорость $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$. В данном случае скорость $\bar{v}$ не может превышать скорость света, т.е. $\bar{v} < c$. То, что в рассмотрении данного случая скорость не может превышать скорость света означает, что мы рассматриваем два события, связанных причинно-следственной связью.

Тогда формула для координат соответствует формуле 3.1. Мы можем подобрать штрихованную систему отсчета, которая движется относительно не штрихованной со скоростью $V = \bar{v}$. В этом случае $\Delta x' = 0$, и в штрихованной системе отсчета интервал будет:

$$S_{12} = c(\Delta t') \tag{3.16}$$

В данном случае интервал S_{12} называется временнеподобным.

Понятие собственного времени

Если частица движется равномерно и прямолинейно, то ее собственное время – это время, отсчитываемое в той инерциальной системе отсчета, в которой она покоится.

Рассмотрим случай, когда частица не движется равномерно и прямолинейно, а со скоростью $v = v(t)$ (рис. 3.1).

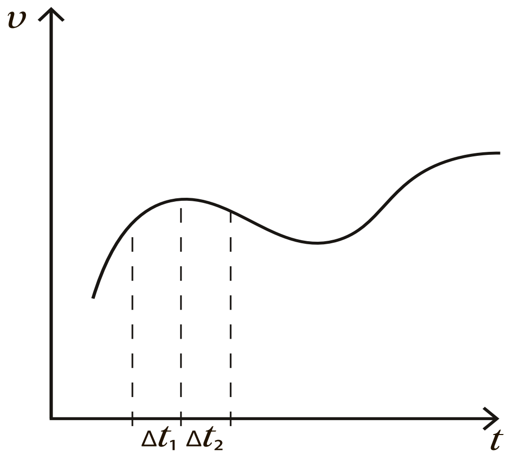

Рис. 3.1. Неравномерное движение частицы.

Выберем отрезок Δt_1, в течение которого будем считать скорость примерно постоянной. Пусть частица в течение времени Δt_1 покоится в некоторой инерциальной системе отсчета, которая движется относительно не штрихованной со скоростью v_1. В этом случае формула, связывающая штрихованные и не штрихованные временные интервалы, будет такой:

$$\Delta t_1' = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \Delta t \tag{3.17}$$

Затем выберем следующий отрезок Δt_2. Следовательно, теперь формула, связывающая штрихованные и не штрихованные временные интервалы, будет такой:

$$\Delta t_2' = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\Delta t \tag{3.18}$$

Продолжая эти действия до бесконечности, получаем для произвольного интервала формулу, связывающую штрихованные и не штрихованные временные интервалы:

$$\Delta t_i' = \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\Delta t \tag{3.19}$$

Каждая из этих величин инвариантна. Если каждый из радикалов в формулах 3.17 – 3.19 умножить на скорость света c, то получится формула 3.16, т.е. временнеподобный интервал.

Теперь просуммируем полученные временные интервалы:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i' = \tau \tag{3.20}$$

Перепишем формулу 3.20, подставив формулу 3.19:

$$\tau = \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\right)\Delta t \tag{3.21}$$

Очевидно, что сумма всех Δt по оси времени:

$$\sum \Delta t_i = N \cdot \Delta t \tag{3.22}$$

Формула 3.21 приближенная в силу того, что внутри каждого интервала скорость считается постоянной величиной. Сделаем теперь предельный переход $N \to \infty$, $\Delta t \to 0$. Тогда получаем окончательную формулу для собственного времени:

$$\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt \tag{3.23}$$

где T – это некоторая выбранная конечное время, измеренное по часам в инерциальной системе отсчета. Соответственно $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}dt$. При этом собственное время частицы – это время, вычисленное по формуле 3.23.

Собственное время также является инвариантной величиной.

Принцип ковариантности

Можно считать, что принцип ковариантности – это математическая формулировка принципа относительности.

Рассмотрим обычное трехмерное пространство, в котором разыгрываются все события классической нерелятивистской динамики. В силу изотропии пространства можно поворачивать оси, как нам удобно, при этом форма уравнений не должна меняться.

Если имеются две системы отсчета, начала которых совпадают, но одна из систем отсчета повернута относительно другой. Следовательно, для любого вектора в штрихованной системе отсчета справедлива формула:

$$\overrightarrow{a'} = \mathbb{S}\vec{a} \tag{3.24}$$

Вектора $\overrightarrow{a'}$ и $\vec{a}$ – это один и тот же вектор, только один раз компоненты его относятся к штрихованной системе отсчета, другой раз – к не штрихованной. Связь задается через ортогональною матрицу преобразования $\mathbb{S}$.

Элементы ортогональной матрицы преобразования $\mathbb{S}$ подчиняются условию:

$$\sum_{i=1}^{3} S_{ij}S_{ik} = \delta_{jk} \tag{3.25}$$

Инвариантом является скалярное произведение, которое определяется с помощью данной матрицы. В частности, расстояние между двумя близкими точками:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = inv \tag{3.26}$$

При таком ортогональном преобразовании при повороте осей с помощью данной матрицы форма уравнений не должна меняться.

Таким образом, ковариантность – это неизменность формы относительно какого-то преобразования.

Теперь рассмотрим четверки чисел как события. Введем четыре числа (ct, x, y, z). Эта четверка чисел – четырехмерная точка, из которых образуется некоторое четырехмерное линейное пространство. Данное четырехмерное пространство называется пространством Минковского.

В отличие инварианта из формулы 3.26, в данном случае инвариант следующий:

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = inv \tag{3.26}$$

В данном случае видно, что идет чередование знаков. Это признак того, что пространство является неэвклидовым или псевдоэвклидовым.

Пусть есть радиус-вектор $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Ему будет соответствовать четырехмерный радиус-вектор $\vec{R} = \{ct, x, y, z\} = \{R^0, R^1, R^2, R^3\} = \{R^0, \vec{r}\}$. Скалярное произведение этого вектора самого на себя:

$$\vec{R}\vec{R} = R^2 = (R^0)^2 - (R^1)^2 - (R^2)^2 - (R^3)^2 \tag{3.27}$$

Если трехмерные вектора при ортогональном преобразовании преобразуются по закону 3.24 с помощью ортогональной матрицы, то в специальной теории относительности при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую четырехмерные вектора преобразуются по закону:

$$\overrightarrow{R'} = \Gamma\vec{R} \tag{3.28}$$

где Γ – матрица Лоренца. Эта формула называется псевдоортагональным преобразованием.

Матрица Лоренца – это четырехмерная матрица. Она записывается следующим образом:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$\Gamma_{11} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Свойство псевдоортогональной матрицы заключается в том, что произведение двух матриц Лоренца есть псевдоортогональная матрица Лоренца. Докажем это свойство. Имеются две инерциальные системы отсчета, четырехмерные радиус-вектора которых связаны следующим соотношением:

$$\overrightarrow{R'} = \Gamma^{(1)}\vec{R} \tag{3.31}$$

где $\Gamma^{(1)}$ – это матрица 3.29 с параметром скорости V_1, т.е. штрихованная система движется относительно не штрихованной со скоростью V_1.

Теперь рассмотрим еще одну инерциальную систему отсчета, которая движется относительно штрихованной с другой постоянной скоростью V_2:

$$\overrightarrow{R''} = \Gamma^{(2)}\overrightarrow{R'} \tag{3.32}$$

Учитывая формулу 3.31, можем переписать формулу 3.32 в следующем виде:

$$\overrightarrow{R''} = \Gamma^{(2)}\Gamma^{(1)}\vec{R} = \Gamma\vec{R} \tag{3.33}$$

Тогда дважды штрихованная система движется относительно не штрихованной со скоростью:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \tag{3.34}$$

Сформулируем непосредственно принцип ковариантности. Поставим в соответствие некоторому трехмерному вектору $\vec{a}$ четырехмерный вектор $\vec{A} = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{A^0, \vec{a}_{rel}\}$. При переходе в другую инерциальную систему отсчета вектор $\vec{A}$ переходит в вектор $\overrightarrow{A'}$, который связан с вектором $\vec{A}$ с помощью матрицы Лоренца:

$$\overrightarrow{A'} = \Gamma\vec{A} \tag{3.35}$$

Поэтому если имеется два четырехмерных вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, то точно так же, как и для радиус-вектора $\vec{R}$, вводится скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{A}\vec{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = A^0B^0 - \{\vec{a}_{rel} \cdot \vec{b}_{rel}\} \tag{3.36}$$

Если имеется некоторое релятивистское соотношение, которое на языке релятивистских векторов выражается как $\vec{A} = \vec{B}$, то при переходе в другую систему отсчета нужно подействовать матрицей Лоренца на каждый из этих векторов:

$$\Gamma\vec{A} = \Gamma\vec{B} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{B'} \tag{3.37}$$

Соотношение 3.37 полностью иллюстрирует принцип ковариантности.

Релятивистская динамика

Запишем уравнение динамики в форме второго закона Ньютона в нерелятивистском случае:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \tag{3.38}$$

В соответствии с принципом ковариантности заменим вектора, обозначаемые маленькими буквами, т.е. нерелятивисткие, на вектора, обозначаемые большими буквами:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \tag{3.39}$$

Тогда при переходе в другую штрихованную систему отсчета получим:

$$\frac{d\overrightarrow{P'}}{d\tau} = \overrightarrow{F'} \tag{3.40}$$

Лекция 4. Переход в релятивистскую систему

Замена нерелятивистских векторов

Принцип ковариантности заключается в том, что если есть нерелятивистский вектор $\vec{a}$, то релятивистских четырехмерный вектор $\vec{A} = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$. Скалярное произведение этого вектора самого на себя:

$$\vec{A}\vec{A} = A^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \qquad (4.1)$$

Скалярное произведение этого вектора на самого себя – инвариантная величина, т.е. сохраняется численно при преобразованиях Лоренца:

$$\overrightarrow{A'} = \Gamma\vec{A} \qquad (4.2)$$

где Γ – матрица Лоренца.

Когда во всех соотношениях заменяются нерелятивистские вектора, соответствующими релятивистскими четырехвекторами такими, что скалярное произведение каждого на каждый из этих векторов является инвариантом, то мы говорим, что эти соотношения ковариантные.

Введем собственное время:

$$d\tau = \gamma^{-1}dt \qquad (4.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4.3)$$

Величина γ похожа на Γ, входящую в матрицу Лоренца, но Γ зависит от постоянной скорости движения, следовательно, является константой, в то время как γ зависит от функции времени, т.к. в этом случае скорость не постоянна.

Релятивистская динамика

Запишем второй закон Ньютона для нерелятивистской частицы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \qquad (4.4)$$

Переходя к релятивизму, получаем:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \qquad (4.5)$$

Уравнение 4.5 четырехмерное. Запишем, что такое векторы $\vec{P}$, $\vec{V}$ и $\vec{R}$:

$$\vec{P} = m\vec{V} \tag{4.6}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau} \tag{4.7}$$

$$\vec{R} = \{ct, \vec{r}\} \tag{4.8}$$

Масса m взята из нерелятивистской механики. В релятивистской механике используется та же масса, что и в нерелятивистской.

Учитывая формулу 4.2, получим:

$$\vec{P} = m\vec{V} = \{m\gamma c, m\gamma\vec{v}\} \tag{4.9}$$

$$\vec{V} = \{\gamma c, \gamma\vec{v}\} \tag{4.10}$$

Тогда скалярное произведение четырехимпульса:

$$\vec{P}\vec{P} = m^2c^2 \tag{4.11}$$

Предположим, что:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} = \left\{F^0, \gamma\vec{f}\right\} \tag{4.12}$$

Нужно записать четыре скалярных уравнения – одно уравнение для нулевых компонент и три для пространственных компонент, которое можно записать как одно трехмерное уравнение. Запишем уравнение для пространственных компонент:

$$\frac{dm\gamma\vec{v}}{d\tau} = \gamma\vec{f} \tag{4.13}$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\vec{f} \tag{4.14}$$

Получается трехмерное векторное релятивистское обобщение второго закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{f} \tag{4.15}$$

Теперь запишем уравнение для нулевых компонент:

$$\frac{dP^0}{d\tau} = F^0 \tag{4.16}$$

В уравнении 4.16 неизвестно, что такое F^0, поэтому в первую очередь найдем ее. Для этого запишем скалярное произведение четырехскорости на саму себя и продифференцируем его по собственному времени:

$$\frac{d}{d\tau}\vec{V}\vec{V} = 0 \tag{4.17}$$

Учитывая произведение двух векторов, уравнение 4.17 можно переписать в виде:

$$\vec{V}\frac{d\vec{V}}{d\tau} = 0 \tag{4.18}$$

Теперь, если учесть, что четырехимпульс – это масса, умноженная на скорость, то уравнение 4.18 принимает следующий вид:

$$\vec{V}\frac{1}{m}\frac{d\vec{P}}{d\tau} = 0 \tag{4.19}$$

$$\vec{V}\frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{m}\vec{V}\vec{F} = 0 \tag{4.20}$$

$$\frac{1}{m}V^0F^0 - \frac{1}{m}\gamma\vec{v}\gamma\vec{f} = 0 \tag{4.21}$$

Полученное соотношение 4.21 можно считать уравнением относительно неизвестной величины F^0. Тогда получаем нулевую компоненту для четырехсилы:

$$F^0 = \frac{\gamma}{c}\left(\vec{v}\vec{f}\right) \tag{4.22}$$

Учитывая полученные соотношения, перепишем уравнение 4.16:

$$\gamma\frac{dm\gamma c}{dt} = \frac{\gamma}{c}\left(\vec{v}\vec{f}\right) \tag{4.23}$$

В явном виде получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{v}\vec{f} \tag{4.24}$$

Обозначим $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \varepsilon$. Данная величина является полной энергией для одной частицей с нерелятивистской массой m. Она является интегралом движения, когда частица свободная и когда $\vec{v}\vec{f}$ равняется нулю (сила перпендикулярна скорости).

Предположим, что сила потенциальна и равняется:

$$\vec{f} = -\nabla U \tag{4.25}$$

Если домножить 4.25 на dt, то получится:

$$d\varepsilon = -d\vec{r}\nabla U = -dU \tag{4.26}$$
$$d(\varepsilon + U) = 0 - \text{интеграл движения} \tag{4.27}$$

Данная выкладка плоха тем, что мы предполагаем, что потенциал не зависит от времени. Независимость потенциала от энергии находится в прямом противоречии с постулатами теории относительности, потому что это означает, что сигнал на конечное расстояние может передаваться с бесконечно большой скоростью, чего в природе не может быть.

Полная энергия

Рассмотрим формулу полной энергии для одной частицей с нерелятивистской массой m:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.28}$$

Если разложить в ряд по степеням $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ получим:

$$\varepsilon = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + 0\left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \cdots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{4.29}$$

Часть уравнения 4.24 $\left(\frac{1}{2}mv^2 + \cdots\right)$ называется кинетической релятивистской энергией. Таким образом, полная энергия для одной частицей с нерелятивистской массой m состоит из кинетической релятивистской энергией и константой равной mc^2, являющейся энергией покоя.

Запишем четырехимпульс, используя формулу 4.28:

$$\vec{P} = \{m\gamma c, m\gamma\vec{v}\} = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right\} \tag{4.30}$$

Квадрат данного импульса будет равен:

$$\vec{P}\vec{P} = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - P^2 = mc^2 \tag{4.31}$$

Из формулы 4.31 видно, что четырехимпульс – инвариант, и, таким образом, при опускании члена mc^2 из формулы 4.29 инвариантность четырехимпульса теряется, что говорит о том, что член mc^2 является необходимым компонентом формулы 4.29.

Вектор $\vec{P}$ из формулы 4.30 при записи в виде $\left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right\}$ называют вектором энергии импульса.

Применение специальной теории относительности к классической динамике

Перенесем определение импульса из нерелятивистской механики в специальную теорию относительности:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} \tag{4.32}$$

где $\mathcal{L}$ – функция Лагранжа.

Т.к. нам не известно, как функция Лагранжа зависит для свободной частицы, предположим, что она зависит следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma) \tag{4.33}$$

Приравняем покомпонентно выражение 4.32:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m\gamma\vec{v}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\alpha} = m\gamma v_\alpha \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{\partial v_\alpha}{\partial v} = m\gamma v_\alpha \tag{4.35}$$

где $\alpha = x, y, z$, v – модуль скорости.

В результате получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = mc^2\gamma^{-2} \tag{4.36}$$

Теперь чтобы записать функцию Лагранжа в явном виде, нужно проинтегрировать соотношение 4.36. В результате интегрирования получаем функцию Лагранжа для свободной частицы:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.37}$$

Функция Лагранжа для несвободной частицы имеет вид:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\vec{r}, t) \tag{4.38}$$

где $U(\vec{r}, t)$ – потенциальная энергия несвободной частицы.

Используя функцию Лагранжа для свободной частицы, можно записать выражение для функции Гамильтона для свободной частицы, записанную как функцию импульса:

$$\{\vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}\} = \mathcal{H}(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{4.39}$$

Данное выражение релятивистски инвариантно.

Задача про осциллятор

Рассмотрим одномерный осциллятор, в котором частица движется по одной переменной:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -kx \tag{4.40}$$

где $(-kx)$ – действующая сила. Данная сила потенциальна, поэтому запишем формулу потенциальной энергии:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.41}$$

В силу нелинейности в знаменателе выражения 4.40 нельзя сказать, что данный осциллятор является гармоническим. Данная задача нелинейная, и она не допускает никаких аналитических решений, ее можно решать только численно.

Численно выражение 4.40 является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Его можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка. Затем задаются начальные условия по скорости и по положению. В качестве начального положения координаты принимается положение равновесия.

Выберем систему единиц такую, что $c = 1, m = 1$ и $k = 1$.

Теперь выберем энергию, являющуюся интегралом движения и включающую в себя и кинетическую, и потенциальную энергии: $E = 1{,}005$. Данной энергии соответствует скорость $v \sim 0{,}1c$.

Решение данной задачи представлено на рисунке 4.1.

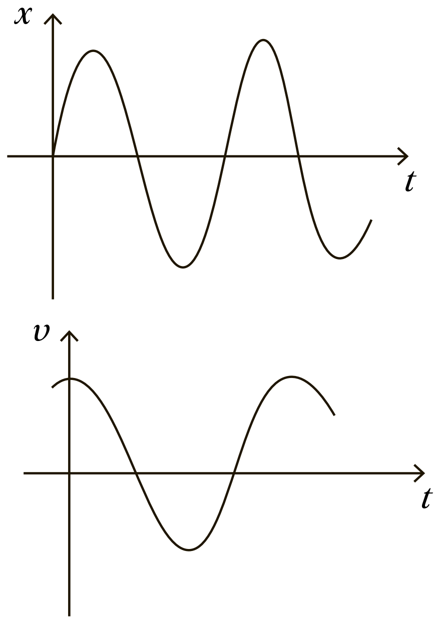

Рис. 4.1. Решение задачи про осциллятор при $E = 1{,}00$.

Спектр Фурье в этом случае будет представлен в виде, изображенном на рисунке 4.2.

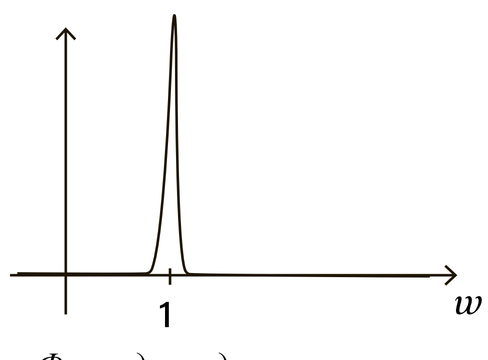

Рис. 4.2. Спектр Фурье для задачи про осциллятор при $E = 1{,}00$.

Таким образом, можно сделать вывод, что данный осциллятор с большой степенью точности ведет себя так же, как гармонический осциллятор.

Теперь выберем такую систему единиц, в которой $E = 10$. Данной энергии соответствует скорость $v \sim 0{,}995c$, т.е. скорость ультрарелятивистская.

В данном случае решение задачи и спектр Фурье будет иметь следующий вид (рис. 4.3, 4.4).

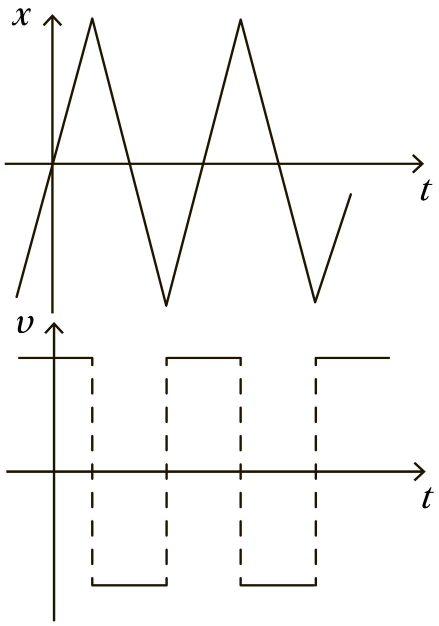

Рис. 4.3. Решение задачи про осциллятор при $E = 10$.

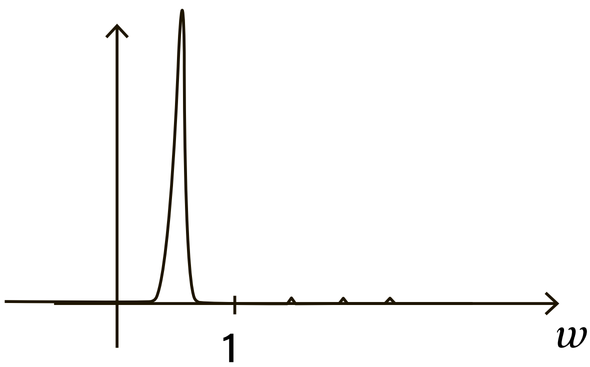

Рис. 4.4. Спектр Фурье для задачи про осциллятор при $E = 10$.

Таким образом, мы видим, что при энергии, которой соответствует скорость, близкая к скорости света, осциллятор перестают вести себя как гармонический.

Лекция 5. Угловой момент

Двумерный релятивистский осциллятор

В релятивистском двумерном случае динамические уравнения осциллятора записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -kx \\ \frac{d}{dt}\frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -ky\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$, за счет чего в уравнениях 5.1 возникает связь, которая при увеличении скорости двумерного осциллятора становится сильнее.

Релятивистская масса

Перепишем нерелятивистское уравнение движения в релятивистском виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \tag{5.2}$$

Три пространственные компоненты из формулы 5.2 дают релятивистский закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \tag{5.3}$$

В отличие от формулы 5.2, в формуле 5.3 импульс $\vec{p}$ релятивистский (индекс опущен), который выражается как:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \tag{5.4}$$

В данном случае масса была взята из нерелятивистской механики, что выглядит странно, т.к. в релятивистском инварианте для четырехимпульса данная масса была взята как константа (mc^2).

В нерелятивистском случае масса трактуется как меру инерции. Рассмотрим теперь релятивистский случай. Перепишем релятивистский закон Ньютона (уравнение 5.3), расписав в нем импульс с помощью массы:

$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{f}) \tag{5.5}$$

Ускорение $\frac{d\vec{v}}{dt}$ будет коллинеарно действующей силе, когда действующая сила будет перпендикулярно скорости. В этом случае получаем динамическое уравнение:

$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \tag{5.6}$$

Второй случай, когда ускорение $\frac{d\vec{v}}{dt}$ будет коллинеарно действующей силе, это когда сила пропорциональна скорости. В этом случае получаем динамическое уравнение:

$$m\gamma^3\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \tag{5.7}$$

Релятивистскую массу $m\gamma$ в случае уравнения 5.6 иногда называют поперечной, а массу $m\gamma^3$ в случае уравнения 5.8 называют продольной, но данные названия не несут в себе физического смысла.

Таким образом, мы имеем право отказаться от понятия релятивистской массы в силу неоднозначности его определения.

Угловой момент

Нерелятивистский угловой вектор для одной частицы выглядит следующим образом:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{5.8}$$

Очевидно, что несмотря на то, что в теории относительности вместо $\vec{r}$ и $\vec{p}$ вводятся релятивистские четырехвекторы радиус-вектора и импульса, релятивистский угловой момент с помощью формулы 5.8 ввести нельзя, т.к. не определена операция векторного произведения для четырехвекторов.

Вектор $\vec{l}$ является аксиальным вектором, поэтому мы можем записать его в виде антисимметричной матрицы 3×3, у которой на диагонали должны стоять нули, а элементы, симметричные главной диагонали должны быть одинаковы по величине и противоположны по знаку. Тогда мы можем переписать формулу 5.8 в следующем виде, сделав замену $\{x, y, z\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$:

$$l = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_z & -l_y \\ -l_z & 0 & l_x \\ l_y & -l_y & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Теперь обобщим данную матрицу на четырехмерный случай, сделав замену $l_{ik} \rightarrow L^{ik}$:

$$\begin{pmatrix} L^{00} & L^{01} & L^{02} & L^{03} \\ L^{10} & L^{11} & L^{12} & L^{13} \\ L^{20} & L^{21} & L^{22} & L^{23} \\ L^{30} & L^{31} & L^{32} & L^{33} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

В общем виде матрица 5.10 будет записана в следующем виде:

$$L^{ij} = X^i P^j - X^j P^i \tag{5.11}$$

Компоненты четырехмерного радиус-вектора и четырехимпульса обозначается следующим образом:

$$\vec{R} = \{X^0, X^1, X^2, X^3\} \tag{5.12}$$
$$\vec{P} = \{P^0, P^1, P^2, P^3\} \tag{5.13}$$

Переформулируем принцип ковариантности, исходя из этого примера, чтобы в нем фигурировали рассмотренные нами матрицы. Воспользуемся аналогией с трехмерным случаем. Вектор углового момента для трехмерного случая:

$$\vec{j} = \mathbb{I}\,\vec{w} \tag{5.14}$$

где $\mathbb{I}$ – матрица тензора инерции, $\vec{w}$ – угловая скорость.

При ортогональном повороте, который реализуется с помощью матрицы $\mathbb{S}$, вектор углового момента $\vec{j}$ переходит в вектор углового момента в повернутой системе $\vec{j}\,'$:

$$\mathbb{S}: \vec{j} \rightarrow \vec{j}\,' = \mathbb{S}\,\vec{j} \tag{5.15}$$

Теперь умножим соотношение 5.14 на матрицу ортогонального преобразования $\mathbb{S}$ слева, вставив между матрицей тензора инерции и угловой скорости единичную матрицу:

$$\mathbb{S}\,\vec{j} = \mathbb{S}\,\mathbb{I}\,\vec{w} = \mathbb{S}\,\mathbb{I}\,\mathbb{S}^{+}\mathbb{S}\,\vec{w} \tag{5.16}$$

Тогда получаем:

$$\vec{j}\,' = \mathbb{I}'\,\vec{w}' \tag{5.17}$$
$$\mathbb{I}' = \mathbb{S}\,\mathbb{I}\,\mathbb{S}^{+} \tag{5.18}$$

Таким образом, если трехмерные векторы подчиняются преобразованию 5.15, а трехмерные матрицы подчиняются преобразованию подобия 5.18, то форма уравнения не меняется. Начальная форма уравнений, представленная уравнением 5.14, в повернутой системе имеет вид 5.17. Каждый член изменился при повороте, но форма соотношений осталась той же самой. Это означает, что соотношение 5.17 ковариантно относительно ортогонального преобразования.

Трехмерный тензор первого ранга и второго ранга

Трехмерный вектор $\vec{a}$ переходит в трехмерный вектор $\vec{a}'$ под действием матрицы $\mathbb{S}$:

$$\vec{a} \xrightarrow{\mathbb{S}} \vec{a}' = \mathbb{S}\,\vec{a} \tag{5.19}$$

Покомпонентно это записывается в следующем виде:

$$a'_\alpha = \sum_\beta \mathbb{S}_{\alpha\beta} a_\beta \tag{5.20}$$

Таким образом, каждый из компонент штрихованного вектора представляется линейной комбинацией компонент не штрихованного вектора, а коэффициент линейной комбинации – это элементы матрицы преобразования.

Если тройка чисел при ортогональном преобразовании преобразуется таким образом, что каждая из них при ортогональном преобразовании является линейной комбинацией трех других, а коэффициент составляет матрицу ортогонального преобразования, то эта тройка чисел называется <u>трехмерным тензором первого ранга</u>. Трехмерный тензор первого ранга может быть представлен в виде вектора, но очевидно, что не любая тройка векторов может быть представлена как тензор первого ранга.

При ортогональном преобразовании трехмерная матрица A переходит в матрицу A' с помощью матрицы преобразования таким образом:

$$A \xrightarrow{\mathbb{S}} A' = \mathbb{S}A\mathbb{S}^{+} \tag{5.21}$$

Запишем соотношение 5.21 по компонентам:

$$A'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \mathbb{S}_{\alpha\gamma}\mathbb{S}_{\beta\delta}A_{\gamma\delta} \tag{5.22}$$

Формула 5.18 является частным случаем формулы 5.22.

В формуле 5.22 мы получаем, что 9 элементов не штрихованной матрицы переходят в 9 элементов штрихованной матрицы. Каждый из штрихованных элементов представляет из себя линейную комбинацию 9 не штрихованных, а коэффициенты линейной комбинации образуют сложную структуру $\mathbb{S}_{\alpha\gamma}\mathbb{S}_{\beta\delta}$.

Если 9 элементов при ортогональном преобразовании преобразуются по закону 5.22, то эти 9 элементов называются трехмерным тензором второго ранга.

Если некоторый вектор $\vec{a}$ преобразуется по закону 5.20 и по этому же самому закону преобразуется некоторый вектор $\vec{b}$ следующим образом:

$$b'_\gamma = \sum_\delta \mathbb{S}_{\gamma\delta} b_\delta \tag{5.23}$$

то при перемножении компоненты штрихованных a и b появляется двойная сумма, форма которой будет выглядеть следующим образом:

$$a'_\alpha b'_\beta = \sum_{\gamma,\delta} \mathbb{S}_{\alpha\gamma} \mathbb{S}_{\beta\delta} a_\gamma b_\delta \tag{5.24}$$

Таким образом, произведение компонент двух тензоров первого ранга преобразуется по тому же закону, что и компоненты тензора второго ранга. Это означает, что из произведения двух тензоров первого ранга можно построить тензор второго ранга, потому что выполняется соотношение 5.24.

В итоге получаем, что при ортогональном преобразовании в трехмерном пространстве выполняется принцип ковариантности. Соотношения, в которых фигурируют трехмерные вектора, трехмерные тензоры первого ранга или трехмерные тензоры второго ранга не меняют своей формы при ортогональном преобразовании.

Четырехмерный тензор первого ранга и второго ранга

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой любой релятивистский четырехвектор преобразуется по закону:

$$\vec{A} \xrightarrow{\Gamma} \vec{A}' = \Gamma\vec{A} \tag{5.25}$$

где Г – матрица преобразований Лоренца.

Записывая покомпонентно, получаем:

$$A'_\alpha = \sum_\beta \Gamma_{\alpha\beta} A_b \tag{5.26}$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Если у нас есть четырехмерная матрица 4×4, то преобразование примет следующий вид:

$$\mathbb{F} \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{F}' = \Gamma\mathbb{F}\Gamma^{+}\vec{A} \tag{5.27}$$

$$\left(\mathbb{F}^{\alpha\beta}\right)' = \sum_{\gamma,\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\delta}\mathbb{F}^{\gamma\delta} \tag{5.28}$$

Четверка чисел, которая при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую преобразуется по закону 5.26 как линейная комбинация с коэффициентами, которые реализуются матрицей Лоренца, называется <u>четырехмерный тензор первого ранга</u>.

Результат, полученный в 5.28, говорит, что 16 величин при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую преобразуются линейным образом через 16 величин не штрихованный системы отсчета с коэффициентами, которые линейны по элементам матрицы Лоренца. Следовательно, эти 16 величин называются <u>четырехмерным тензором второго ранга</u>.

Аналогично трехмерному тензору при перемножении двух четырехмерных тензоров первого ранга получаем:

$$(A^{\alpha})'\left(B^{\beta}\right)' = \sum_{\gamma,\delta} \Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\delta}A^{\alpha}\, B^{\beta} \tag{5.29}$$

Таким образом, произведение элементов четырехмерных тензоров первого ранга преобразуется так же, как элементы четырехмерного тензора второго ранга, т.е. такое произведение образовывает четырехмерный тензор второго ранга.

Совокупность законов изменения

Закон изменения для углового момента для одной частицы в нерелятивистком случае:

$$\dot{\vec{l}} = \vec{n} = \vec{r} \times \vec{f} \tag{5.30}$$

где $\vec{n}$ – это момент действующей на частицу силы.

Теперь обобщим трехмерное уравнение 5.30 на специальную теорию относительности, т.е. запишем в четырехмерном виде:

$$\frac{d\vec{L}}{d\tau} = \vec{N} \tag{5.31}$$

Элементы матрицы $\vec{N}$ будут выглядеть:

$$N^{ij} = X^{i}F^{j} - X^{j}F^{i}$$

Уравнение 5.31 записано в общем виде. Всего же мы получим 6 скалярных уравнений. Эти скалярные уравнения разобьются следующим образом:

$$\frac{dL^{0k}}{d\tau} = \gamma\frac{dL^{0k}}{dt} = N^{0k} \tag{5.32}$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(ct\vec{p} - \frac{\varepsilon}{c}\vec{r}\right) = \gamma ct\vec{f} - \frac{\gamma}{c}\left(\vec{f}\vec{v}\right)\vec{r} \tag{5.33}$$

После преобразований уравнение 5.33 примет следующий вид:

$$\left(\vec{p} - \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right) + t\left(\dot{\vec{p}} - \vec{f}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\dot{\varepsilon} - \vec{f}\vec{v}\right) = 0 \tag{5.34}$$

Четырехмерный импульс покомпонентно имеет следующий вид:

$$\vec{P} = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p} = m\gamma\vec{v}\right\} = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \vec{v}\ \frac{\varepsilon}{c^2}\right\} \tag{5.35}$$

Рассмотрим слагаемые, полученные в уравнении 5.34:

- $\left(\vec{p} - \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right) = 0$ – закон изменения пространственных компонент четырехмерного импульса
- $\left(\dot{\vec{p}} - \vec{f}\right) = 0$ – закон изменения релятивистского импульса
- $\left(\dot{\varepsilon} - \vec{f}\vec{v}\right) = 0$ – закон изменения полной энергии частицы

Объединяя полученные ранее результаты, мы получаем:

$$\begin{cases} \dot{\vec{l}} = \vec{r}\times\vec{f} \\ \dot{\vec{p}} = \vec{f} \\ \dot{\varepsilon} = \vec{f}\vec{v} \end{cases} \Leftarrow \quad \frac{d\vec{L}}{d\tau} = \vec{N} \tag{5.36}$$

Таким образом, решая некоторую специальную задачу про изменение углового момента, мы получили изменения для всех остальных физических величин.

На самом деле аналогичная ситуация встречалась нам раньше, когда мы обобщили нерелятивистский закон импульса, заменяя трехмерный вектор нерелятивистского импульса четырехвектором, мы не только получили релятивистский закон изменения импульса, но и закон полной энергии. Это не удивительно, поскольку элементы четырехвектора могут быть выражены через энергию. Точно так же, обобщая нерелятивистский закон изменения углового момента, мы построили матрицу L, среди элементов которой не только элементы трехмерного релятивистского момента, но и вполне определенные комбинации релятивистского трехмерного импульса и энергии, что в итоге приводит ко всей совокупности законов изменения (формулы 5.36).

В классической механике так же имеются законы изменения, совпадающие по форме с полученными уравнениями. Но если релятивистские уравнения получены все сразу, то в классической механике имеется своего рода последовательность. Сначала формулируется закон изменения импульса – второй закон Ньютона, который потом используется при выводе изменения законов момента и энергии.

Лекция 6. Релятивистское исследование взаимодействующих частиц

Система невзаимодействующих частиц

Запишем формулу для четырехвектора энергии импульса:

$$\vec{P} = \{m\gamma c, m\gamma\vec{v}\} = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right\} \tag{6.1}$$

Правая запись формулы 6.1 предпочтительнее, т.к. можно не рассматривать энергию как $(mc^2\gamma)$, а просто принять ее как за данное. Например, если мы будем рассматривать фотон, масса которого равна нулю, то формула $\{m\gamma c, m\gamma\vec{v}\}$ не годится, т.к. теряется смысл, а формула $\left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right\}$ годится, т.к. нам известна полная энергия фотона.

В процессах, в которых участвует много частиц, в теории относительности довольно тяжело рассматривать энергию их взаимодействия. Поэтому сначала мы рассматриваем, что частицы не взаимодействует друг с другом, затем они наскакивают на некоторую мишень, где происходит некий процесс, после чего частицы вылетают, снова не взаимодействуя друг с другом. В итоге, мы рассматриваем ситуацию до взаимодействия и ситуацию после взаимодействия.

Рассмотрим систему невзаимодействующих частиц. Четырехимпульс каждой частицы будет иметь вид:

$$\vec{P_i} = \left\{\frac{\varepsilon_i}{c}, \vec{p_i}\right\} \tag{6.2}$$

Релятивистское произведение этого вектора самого на себя является инвариантом, поэтому мы можем записать:

$$\frac{{\varepsilon_i}^2}{c^2} - {p_i}^2 = {m_i}^2 c^2 = inv \tag{6.3}$$

Теперь рассмотрим изолированную систему частиц, т.е. когда нет внешнего взаимодействия. Введем следующие значения:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \tag{6.4}$$

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} \tag{6.5}$$

Поскольку частицы свободные, частицы летят с постоянной скоростью, значит, квадрат импульса и квадрат полной энергии сохраняются по-отдельности. Следовательно, сохраняются и суммы 6.4-6.5.

Теперь составим четырехвектор, который будет выглядеть покомпонентно следующим образом:

$$\vec{P} = \left\{\frac{1}{c}\sum_i \varepsilon_i\,, \sum_i \vec{p}_i\right\} \tag{6.6}$$

Очевидно, что компоненты 6.6 тоже представляют из себя правильный четырехвектор, потому что это есть сумма правильных релятивистских четырехмерных векторов для отдельных частиц:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i \tag{6.7}$$

Если мы подействуем на этот вектор матрицей Лоренца, то получим:

$$\Gamma\vec{P} = \sum_i \Gamma\vec{P}_i = \sum_i \vec{P}_i{}' = \vec{P}' \tag{6.8}$$

Раз это правильный четырехвектор, то по аналогии с отдельной частицей, можно записать инвариант:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = inv \tag{6.9}$$

Рассмотрим пример с двумя частицами. В этом случае инвариант из формулы 6.9 будет представлен в следующем виде:

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2} - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = m^2c^2 \tag{6.10}$$

Преобразовывая данное соотношения получаем:

$$m_1{}^2c^2 + m_2{}^2c^2 + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{c^2} - 2\vec{p}_1\vec{p}_2 = m^2c^2 \tag{6.11}$$

Из формулы 6.11 видим, что в зависимости от направления частиц $\vec{p}_1\vec{p}_2$ будет иметь разное значение, а массы имеют фиксированное значения. Значит, соотношения между суммами масс и массой из двух частиц будет меняться в зависимости от условия движения.

Рассмотрим следующий пример. Возьмем соотношение 6.10 и будем считать, что эти две частицы – это два фотона. Пока формально оставим правую часть этого соотношения неизменным:

$$\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{c^2}-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2=m^2c^2 \tag{6.12}$$

Энергии фотонов и их модули импульсов равны между собой:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2 \tag{6.13}$$

$$p_1=p_2=\frac{\varepsilon}{c} \tag{6.14}$$

Если два фотона летят в одном направлении, то, следуя соотношению 6.12, их масса будет равна нулю. Если же фотоны летят на встречу друг другу, тогда их масса будет равна $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\mathrm{c}}$. Таким образом, в зависимости от направления движения фотонов масса двух фотонов может изменяться от нуля до $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\mathrm{c}}$.

Данный пример доказывает, что масса системы частиц не аддитивна.

Скорость центра массы

Перепишем четырехмерный импульс 6.6-6.7 в соответствии с формулами 6.1-6.2:

$$\vec{P}=\left\{\frac{\varepsilon}{c},\vec{p}\right\}=\left\{\frac{\varepsilon}{c},\frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}\right\} \tag{6.15}$$

Из формулы 6.15 видно, что суммарный трехмерный релятивистский импульс будет равен:

$$\vec{p}=\frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v} \tag{6.16}$$

Откуда можем получить, что трехмерная скорость будет равна:

$$\vec{v}=\frac{c^2}{\varepsilon}\vec{p} \tag{6.17}$$

Мы утверждаем, что в данном случае $\vec{v}$ – это скорость центра масс системы нескольких частиц.

Та система отсчета, в которой полный импульс равен нулю, называется <u>системой центра инерции</u>:

$$\vec{p}=0 \tag{6.18}$$

Следовательно, это та система отсчета, которая относительно некоторой изначально выбранной системы движется со скоростью $\vec{v}$.

В нерелятивистской механике мы вводили центр масс следующим образом:

$$\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{6.19}$$

$$\vec{v} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \tag{6.20}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор центра масс, $\vec{v}$ – скорость центра масс.

В релятивистской механике мы вводим только понятие скорости центра масс.

Релятивистская масса частиц

Рассмотрим систему частиц, не взаимодействующих друг с другом, на которые также не действуют никакие внешние силы. Выберем инерциальную систему отсчета, которая совпадает с центром инерции 6.18. Это означает, что скорость равна нулю и, следовательно, инвариант (скалярное произведение четырехмерного вектора) будет выглядеть:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} = m^2 c^2 \tag{6.21}$$

В данном случае важно, что энергия из формулы 6.4 сохраняется сама по себе, и тогда в системе центра масс она будет выглядеть следующим образом:

$$mc^2 = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{{v_i}^2}{c^2}}} \tag{6.22}$$

$$m = \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1 - \frac{{v_i}^2}{c^2}}} \tag{6.23}$$

Из полученной формулы видно, что масса не аддитивна и что масса не является мерой количества вещества, т.к. при скоростях близких к скорости света масса частиц больше зависит от скорости частиц, чем от их массы.

Таким образом, мы можем считать, что релятивистская масса системы частиц является в некотором роде мерой энергии системы частиц.

Распад ядра

Рассмотрим ситуацию, когда частицы взаимодействуют между собой. В первую очередь рассмотрим одну частицу или тело, структура которого нас не интересует. Будем считать, что эта частица движется как единое целое в соответствии с релятивистскими законами динамики. Более того мы будем считать, что сила на него не действует, и, следовательно, оно движется с постоянной скоростью. Выберем такую инерциальную систему отсчета, в которой это тело покоится. Его энергия в этой системе отсчета будет равна mc^2.

По прошествии некоторого времени вместо рассматриваемого тела (например, ядра) появились две половинки, причем эти половинки никуда друг от друга не отлетают. В этом случае энергия их энергия будет $m_1c^2 + m_2c^2$. Таким образом, в данном случае масса ядра равняется сумме масс его продуктов распада. Кроме того, возможна такая ситуация, что эти половинки имеют еще какую-то скорость каждая, и они разлетаются.

До распада частица была свободной и имела энергию покоя. После распада у каждой из половинок своя скорость, они достаточно далеко друг от друга и не взаимодействуют между собой. Энергия системы в данном случае станет равной ε_1 и ε_2:

$$\varepsilon_1 = m_1c^2 + T_1 \tag{6.24}$$
$$\varepsilon_2 = m_2c^2 + T_2 \tag{6.25}$$

где T_1 и T_2 – релятивистские кинетические энергии первой и второй половинок соответственно.

Закон энергии сохраняется. Следовательно, запишем:

$$mc^2 = m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 + T_2 \tag{6.26}$$

Кинетические энергии являются неотрицательными величинами, поэтому мы можем записать:

$$T_1 + T_2 = mc^2 - m_1c^2 - m_2c^2 \geq 0 \tag{6.27}$$
$$T_1 + T_2 = (m - m_1 - m_2)c^2 \geq 0 \tag{6.28}$$

В данном случае была описана ситуация радиоактивного распада. Условие для распада фигурирует следующим образом. Вводят величину дефекта масс:

$$\sum_i m_i - m = \Delta m \tag{6.29}$$

Распад возможен тогда, когда дефект масс является отрицательной величиной:

$$\Delta m < 0 \tag{6.30}$$

Тогда из выражения 6.28 получается:

$$T_1 + T_2 = -\Delta m \cdot c^2 \tag{6.31}$$

Условие 6.30 необходимое для распада, но не достаточное. Удобство специальной теории относительности в том, что мы можем не знать механизм, за счет которого произошел распад, но можем описать процесс формулами, которые работают.

Определим теперь кинетическую энергию образовавшихся осколков. Рассмотрим систему после взаимодействия в инерциальной системе, которая совпадает с центром масс:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \tag{6.32}$$

Отсюда следует, что модули этих векторов равны нулю и, следовательно:

$$\varepsilon_1^2 - m_1^2 c^4 = \varepsilon_2^2 - m_2^2 c^4 \tag{6.33}$$

Соответственно нам известно, как выглядит каждая ε_i из выражения 6.33:

$$\varepsilon_i = m_i c^2 + T_i, \ \ i = 1, 2 \tag{6.34}$$

Теперь пользуясь соотношениями 6.26 и 6.33, мы можем выразить соответствующие кинетические энергии разлета осколков ядра T_1 и T_2 следующим образом:

$$T_1 = \frac{(m - m_1)^2 - m_2^2}{2m} c^2 \tag{6.35}$$

$$T_2 = \frac{(m - m_2)^2 - m_1^2}{2m} c^2 \tag{6.36}$$

Поток частиц и мишень

Рассмотрим еще один пример, в котором мы будем использовать тот же самый метод. Нам не нужно знать, как происходило взаимодействие между частицами. Мы только будем рассматривать ситуацию, что было до взаимодействия и что стало после взаимодействия, причем взаимодействие «до» должно быть достаточно рано, а взаимодействие «после» должно быть достаточно поздно для того, чтобы если взаимодействие все же было, то им можно было бы пренебречь.

Имеется поток частиц с массой m_1, энергией ε_1 и импульсом $\vec{p}_1$, и этот поток направляется на мишень. Мы выбираем инерциальную систему отсчета, которая связана с этой мишенью, и считаем, что происходит взаимодействие каждой частицы из этого потока с каждой частицей в мишени. Частица мишени имеет массу m_2, энергию $\varepsilon_2 = m_2c^2$ и, следовательно, импульс $\vec{p}_2 = 0$.

Запишем четырехмерный вектор импульса до взаимодействия, т.е. частица m_1 достаточно далеко находится от мишени и еще не взаимодействует с ней:

$$\vec{P}_1 = \left\{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{c}, \vec{p}_1\right\} \tag{6.37}$$

После взаимодействия с мишенью вылетают частицы m_3 и m_4. Рассмотрим ситуацию «после» в другой инерциальной системе отсчета – в системе отсчета центра масс этих двух частиц. Это означает, что в этой системе отсчета:

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \tag{6.38}$$

Четырехмерный вектор импульса в этой системе отсчета будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{P}_2 = \left\{\frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{c}, 0\right\} \tag{6.39}$$

Таким образом, мы перешли от одной инерциальной системы отсчета в другую. Следовательно, инвариант должен быть одним и тем же и равен:

$$\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{c^2} - p_1^2 = \frac{(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2}{c^2} \tag{6.40}$$

Энергия частиц, вылетевших после взаимодействия с мишенью, будет:

$$\varepsilon_3 = m_3c^2 + T_3 \tag{6.41}$$
$$\varepsilon_4 = m_4c^2 + T_4 \tag{6.42}$$

Преобразовывая выражение 6.35, получим:

$$\frac{1}{c^2}\left((T_3 + T_4) + (m_3 + m_4)c^2\right)^2 = 2T_1m_2 + (m_1 + m_2)^2c^2 \tag{6.43}$$

Таким образом, энергетический баланс заключается в формуле 6.38. В данной формуле и слева, и справа все слагаемые положительные. Очевидно, что чем больше энергия налетающей частицы с массой m_1, тем большая энергия передаются частицам с массами m_3 и m_4.

Рассмотрим предельный случай, когда $T_3 = T_4 = 0$, т.е. частицы образовались, но не вылетели. Отсюда следует:

$$(m_3 + m_4)^2 c^2 = 2T_1 m_2 + (m_1 + m_2)^2 c^2 \tag{6.44}$$

Данный случает соответствует тому, что кинетической энергии налетающей частицы хватило только на то, чтобы образовалось две новые частицы, но без кинетической энергии. Если взять кинетическую энергию, меньшую данной величины, которую обычно пороговой, то образование новых частиц не происходит:

$$T_{\text{пор}} = \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} c^2 \tag{6.45}$$

Таким образом, условие необходимое для образования двух новых частиц выглядит следующим образом:

$$T_1 \geq T_{\text{пор}} \tag{6.46}$$

Лекция 7. Задача Кеплера

Введение в задачу Кеплера

Под задачей Кеплера понимается движение двух небесных тех (или любых других двух тел), которые взаимодействуют между собой по закону:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{7.1}$$

где α – константа, которая пропорциональна произведению гравитирующих масс.

Обычно эта задача разбирается, когда масса одного тела много меньше массы другого тела. После отделения центра масс задача сводится к движению частицы с приведенной массой. В случае небесной механики приведенная масса – это с большой степенью точности масса самой планеты, которая обращается вокруг Солнца (вокруг общего центра масс).

С точки зрения специальной теории относительности выражение 7.1 является неправильным потенциалом, потому что в нем не присутствует время, что противоречит постулатам теории относительности. Тем не менее результат, который получается примиряет нас с такой вынужденной ошибкой.

В рамках классической механики мы установили, что планеты вокруг Солнца обращаются по эллиптическим орбитам. Однако в рамках специальной теории относительности мы получим, что орбита релятивистской частицы в ньютоновском поле тяготения отличается от варианты, изученного в классической механике. Совершив один оборот, перигелий поворачивается на небольшой угол. Данный эффект фиксировался еще 100 лет назад в астрономических наблюдениях.

Функция Лагранжа для свободной частицы

Рассмотрим функцию Лагранжа для свободной частицы:

$$\mathcal{L} = mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{7.2}$$

Т.к. частица свободная, то функция Лагранжа совпадает с кинетической энергией. Если нам нужно учесть потенциал, то мы получаем:

$$\mathcal{L} = mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U \tag{7.3}$$

где m – это приведенная масса частицы (планеты).

Точно так же, как и в классической механике сила, которая действует на эту частицу, центральная. Следовательно, момент силы равен нулю, вследствие чего угловой момент этой частицы постоянен по величине и направлению. Это означает, что плоскость, в которой происходит движение, все время сохраняет постоянную ориентацию, ортогональную вектору углового момента. Раз это плоское движение, то, как и в классической механике, мы должны рассматривать двумерную задачу.

В силу симметрии задачи выбираются полярные координаты. Тогда функция Лагранжа будет записываться следующим образом:

$$\mathcal{L} = mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)} - U \tag{7.4}$$

где φ – циклическая координата.

Следовательно, соответствующий обобщенный импульс будет равен:

$$P_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}} \tag{7.5}$$

Нетрудно показать, что интеграл движения P_φ записывается точно так же, как и в классической механике:

$$P_\varphi = l \tag{7.6}$$

где l – это величина углового момента.

Второй закон Кеплера

Динамикой при движении планет вокруг Солнца управляют 3 закона Кеплера. Второй закон Кеплера говорит о том, что за равные времена радиус-вектор частицы заметает одинаковые площади.

Величина этой секториальной скорости равна:

$$v = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \tag{7.7}$$

Из релятивистской формулы 7.5 видно, что величина 7.7 не может быть постоянной. Таким образом, второй закон Кеплера в релятивистском случае не работает.

Эффективный потенциал

В классической механике мы также использовали следующий интеграл движения, который в релятивистском случае примет вид:

$$E = \frac{mc^2}{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)} + U \tag{7.8}$$

С учетом всех написанных формул выразим величину квадрата радиальной скорости:

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{(E-U)^2}\left(1 + \frac{l^2}{m^2c^2r^2}\right) \tag{7.9}$$

Слева в формуле 7.9 стоит неотрицательная величина. Следовательно, правая часть тоже должна быть неотрицательной величиной. Таким образом, получаем следующее выражение:

$$(E-U)^2 \geq m^2c^4\left(1 + \frac{l^2}{m^2c^2r^2}\right) \tag{7.10}$$

Извлечем квадратный корень из данного выражения и возьмем положительное значение. Нетрудно убедиться, что при отрицательном значении корня получится нефизическая задача.

Таким образом, получим:

$$E \geq U + mc^2\sqrt{1 + \frac{l^2}{m^2c^2r^2}} \tag{7.11}$$

В нерелятивистской механике интеграл движения имел следующий вид:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U = E \tag{7.12}$$

По аналогии с релятивистской энергией:

$$E \geq U + \frac{l^2}{2mr^2} \tag{7.13}$$

где второе слагаемое $\frac{l^2}{2mr^2}$ называется центробежным членом. Сумма реального потенциала U и центробежного члена называется потенциальной энергией радиального движения.

Выражение 7.13 является основой для качественного анализа движения. Рисуется график эффективного потенциала (рис. 7.1), где нуль соответствует выбору потенциальной энергии в виде $\left(-\frac{\alpha}{r}\right)$. Из графика видно, что если энергия принимает отрицательное значение, то движение финитное и заключено между точками, в которых E равняется эффективному потенциалу. Положение минимума и величина минимума зависят от величины углового момента.

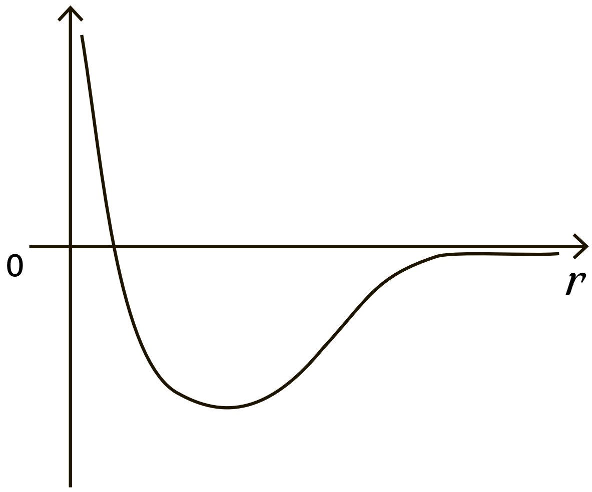

Рис. 7.1. График эффективного потенциала для нерелятивистского случая.

Теперь если посмотреть на релятивистское выражение 7.11, то слагаемое $mc^2\sqrt{1+\frac{l^2}{m^2c^2r^2}}$ имеет смысл релятивистского центробежного члена.

Теперь рассмотрим случай, когда радиальная переменная r стремится к нулю:

$$E \geq -\frac{\alpha}{r} + \frac{mc^2 l}{mcr} \tag{7.14}$$

$$E \geq \frac{cl-\alpha}{r} \tag{7.15}$$

Из полученного выражения видно, что в зависимости от значения углового момента l величина $\frac{cl-\alpha}{r}$ может быть больше или меньше нуля.

Вынесем из выражения 7.15 c и тогда получим:

$$E \geq c\frac{l-\frac{\alpha}{c}}{r} \tag{7.16}$$

Значение $\frac{\alpha}{c}$ есть некоторое минимальное значение углового момента:

$$\frac{\alpha}{c} = l_{min} \tag{7.17}$$

Если угловой момент больше l_{min}, то выполняется неравенство 7.15-7.16.

Теперь соответствующий аналог нерелятивистского графика для эффективного потенциала для релятивистского случая примет вид, показанный на рисунке 7.2. Нетрудно увидеть, что если $l > l_{min}$, то график эффективного потенциала ведет себя следующим образом, изображенным сплошной кривой. Данный график очень похож на нерелятивистский случай за исключением того, что он сдвинут на энергию покоя вверх. Если $l < l_{min}$, то эффективный потенциал будет вести себя следующим образом, изображенным пунктирной кривой.

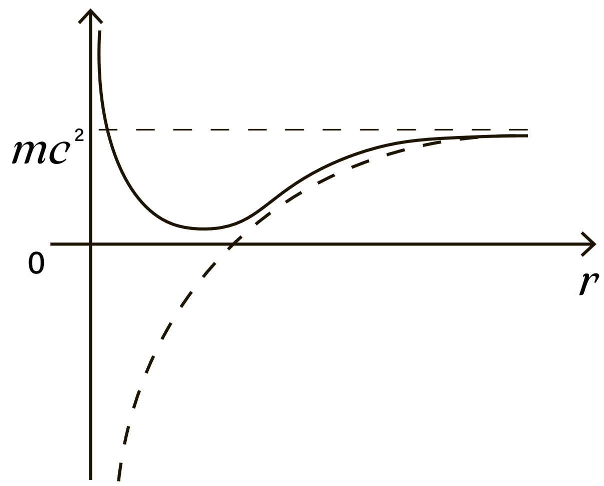

Рис. 7.2. График эффективного потенциала для релятивистского случая.

Дифференциальная формула орбиты

Теперь найдем корни уравнения интеграла движения для релятивистского случая, когда энергия равняется в точности эффективному потенциалу, это будут значения r_1 и r_2. Они являются двумя концентрическими окружностями, внутри которых происходит движение.

Выразим дифференциальную форму орбиты:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \cdots \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \cdots \end{aligned}\right\} \quad d\varphi = \frac{cl}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - m^2c^4 - 2EU + U^2 - \frac{l^2c^2}{r^2}}} \tag{7.18}$$

Если сделать замену $U = \frac{1}{r}$, то дифференциал $dU = -\frac{dr}{r^2}$. В результате получим:

$$\frac{b}{r} = 1 + e\cos(\beta\varphi) \tag{7.19}$$

В релятивистском случае β отлично от единицы и равняется:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{l_{min}^2}{l^2}} \tag{7.20}$$

В нерелятивистском случае $l_{min} = 0$, и. тогда $\beta = 1$.
Выражение для параметра b записывается в следующем виде:

$$b = \beta^2 \frac{c^2 l^2}{\alpha E} \tag{7.21}$$

Формула для эксцентрисета выглядит следующим образом:

$$e = \sqrt{\frac{E^2 - \beta^2 m^2 c^4}{E^2(1 - \beta^2)}} \tag{7.22}$$

Чтобы из релятивистских формул перейти к нерелятивистским, нужно сначала избавиться от энергии покоя, а затем устремить скорость света к бесконечности. Таким способом легко получить предельные нерелятивистские выражения для эксцентрисета и параметра релятивистской орбиты.

Смещение орбиты

Величина смещения перигелия за один оборот равна:

$$\varphi = \pi \frac{1 - \beta}{\beta} \tag{7.23}$$

Следовательно, минимальное значение r, которое показывает расстояние от Солнца до перигелия, достигается при следующих значениях угла:

$$\varphi = 0, \frac{2\pi}{\beta}, \frac{4\pi}{\beta}, \dots \tag{7.24}$$

В то же время значение апогелия будет отвечать следующим значениям:

$$\varphi = \frac{\pi}{\beta}, \frac{3\pi}{\beta}, \dots \tag{7.25}$$

Третий закон Кеплера

Мы уже установили, что второй закон Кеплера не работает. Первый закон Кеплера также не работает, т.к. в релятивистском случае движение происходит не по эллипсу.

В нерелятивистском случае большая полуось задается выражением:

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} \tag{7.26}$$

Но в релятивистском случае движение происходит не по эллипсу, поэтому релятивистская большая полуось задается более сложно.

Используя интегралы движения, мы можем записать:

$$ldt = \frac{r^2}{c^2}(E - U)dr \tag{7.27}$$

Интегрируя данное выражение, мы можем получить величину периода:

$$T = \frac{1}{lc^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} r^2\left(E - \frac{\alpha}{r}\right)dr \tag{7.28}$$

$$T = 2\pi\frac{\alpha}{c}\frac{m^2c^4}{(m^2c^4 - E^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.29}$$

В данном случае период зависит от энергии и не зависит от величины момента.

Релятивистский закон Кеплера в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{\alpha}a^3\left(\frac{\frac{\alpha}{2a}}{mc^2} + \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2a}\right)^2}{m^2c^4}}\right) \tag{7.30}$$

Релятивистская формулировка теории поля

Теория относительности началась с того, когда было обнаружено, что уравнения Максвелла не удовлетворяют принципу относительность Галилея. Тогда Лоренц стал искать, каким преобразованиям удовлетворяют уравнения Максвелла, чтобы их форма сохранялась при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{gathered} rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ div\,\vec{E} = 4\pi\rho \\ rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ div\,\vec{H} = 0 \end{gathered} \tag{7.31}$$

Лоренц стал решать задачу для пространства, в котором нет токов и зарядов, есть только поле. Следовательно, уравнения Максвелла в данном случае примут следующий вид:

$$\begin{gathered} rot\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ div\,\vec{E} = 0 \\ rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ div\,\vec{H} = 0 \end{gathered} \tag{7.32}$$

Он стал искать такие преобразования координаты времени, которые сохранили бы форму выражений 7.32. Это значит, что если мы выполним следующий переход:

$$x, y, z \quad \rightarrow \quad x', y', z' \tag{7.33}$$
$$t \quad \rightarrow \quad t' \tag{7.34}$$

то для уравнений Максвелла нужно поставить только штрихи, чтобы сохранить форму уравнений:

$$\begin{gathered} rot\,\vec{H}' = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t} \\ div\,\vec{E}' = 0 \\ rot\,\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}'}{\partial t} \\ div\,\vec{H}' = 0 \end{gathered} \tag{7.35}$$

Лекция 8. Уравнения Максвелла в специальной теории относительности

Нековариантная форма уравнений Максвелла

Пусть в некоторой системе отсчета у нас имеются три компоненты вектора напряженности $\vec{E}$ и три компонента напряженности магнитного поля $\vec{H}$. Лоренц подобрал преобразования координаты времени и получил такие $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$, что записи уравнения Максвелла в обоих системах отсчета абсолютно одна и та же:

$$\{\vec{E}, \vec{H}\} \quad \rightarrow \quad \{\vec{E}', \vec{H}'\} \tag{8.1}$$

Однако полученные формулы преобразования ничего не имеют общего с изученными нами ранее преобразованиями по Лоренцу. В качестве примера приведем следующую формулу:

$$E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c} H'_{z'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{8.2}$$

Видно, что в формуле 8.2 E_y зависит не только от E'_y, но и от напряжения магнитного поля $H'_{z'}$.

Таким образом, нельзя говорить, что это ковариантная форма уравнений Максвелла, т.к. не смотря на сохранение формы, соответствующие четырехмерные объекты отсутствуют.

Закон сохранения заряда

Предположим, что в некоторой области непрерывным образом распределен электрический заряд и ему не запрещено проходить сквозь границы этой области. Тогда изменение заряда по времени равняется потоку через замкнутую поверхность, которая охватывает этот заряд, вектора плотности тока $\vec{j}$ на элемент поверхности $d\vec{\sigma}$:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(\tau)} \rho d\tau = \oint \vec{j} d\vec{\sigma} \tag{8.3}$$

Данный интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса в объемный интеграл:

$$\oint \vec{j}d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\tau)} div\, \vec{j}d\tau \qquad (8.4)$$

В силу произвольности объема мы можем приравнять подынтегральные выражения из уравнений 8.3 и 8.4 и получить закон сохранения заряда в дифференциальной форме, называемым уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \vec{j} = 0 \qquad (8.5)$$

С понятием дивергенции тесно связано понятие градиента – символьного трехмерного вектора:

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \qquad (8.6)$$

Поэтому можно говорить, что дивергенция $\vec{j}$ является скалярным произведением двух трехмерных векторов $\nabla\vec{j}$. Не трудно заметить, что в выражении 8.5 помимо дивергенции $div\ \vec{j}$, где присутствует трехмерный градиент, также присутствует $\frac{\partial}{\partial t}$. Поэтому если $\frac{\partial}{\partial t}$ добавить $\frac{1}{c}$, то мы получим некоторые компоненты, похожие на четырехмерный градиент:

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right\} = \triangledown \qquad (8.7)$$

Т.к. мы ввели четырехмерный градиент, то теперь у нас есть четырехмерный вектор, называемый <u>четырехмерным релятивистским током</u>:

$$\vec{J} = \{c\rho, \vec{j}\} \qquad (8.8)$$

Теперь выражение 8.5 в четырехмерном обозначении будет выглядеть следующим образом:

$$\triangledown\vec{J} = 0 \qquad (8.9)$$

На самом деле представление четырехмерного релятивистского вектора в виде совокупности четырех компонент неоднозначно. Она заключается в том, что, с одной стороны, мы можем задать четыре компоненты данного вектора:

$$\vec{A} = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} \tag{8.10}$$

которые будем называть контравариантными компонентами или контрвариантным вектором (индексы располагаются вверху), а с другой стороны, мы можем задать у этого же самого вектора четыре других компоненты, которые будем называть ковариантными компонентами (индексы располагаются снизу):

$$\vec{A} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} \tag{8.11}$$

Очевидно, что между ними не может быть какого-либо произвольного соотношения. Они должны представлять один и тот же вектор, и это достигается следующим образом:

$$A_0 = A^0 \quad A_i = -A^i, \;\; i = 1, 2, 3 \tag{8.12}$$

В силу данного определения не трудно увидеть, что они представляют один и тот же вектор, т.к. если брать скалярное произведение данного вектора на самого себя, то очевидно, что это будет тот же самый инвариант.

С другой стороны, воспользовавшись соотношением 8.12, можно скалярное произведение двух векторов записать в следующем виде:

$$\vec{A}\vec{B} = \sum_{i=0}^{3} A^i B_i = \sum_{i=0}^{3} A_i B^i \tag{8.13}$$

Таким образом, мы добились того, что если мы работаем с релятивистскими четырехвекторами, то в скалярном произведении мы можем иметь все знаки положительными. Для этого один из множителей должен быть записан в контрвариантном виде, а другой – в ковариантном.

Сделаем уточнение, что формулы перехода от одной системы отсчета к другой для контрвариантных векторов выглядят следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &= \Gamma\vec{A} \\ \vec{A} &= \Gamma^{-1}\vec{A}' \end{aligned}\right\} contra- \tag{8.14}$$

Теперь, если мы хотим заменить контрвариантные компоненты на ковариантные, то мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &= \Gamma^{-1}\vec{A} \\ \vec{A} &= \Gamma\vec{A}' \end{aligned}\right\} co- \tag{8.15}$$

Теперь рассмотрим выражение 8.9. В форме записи этого выражения с физической точки зрения нуль будет в правой части всегда, не зависимо от того, в какой системе отсчета мы работаем, потому что закон сохранения заряда сохраняется во всех системах отсчета. Это говорит о том, что в данном выражении действительно должно быть произведением двух релятивистских четырехвекторов.

Рассмотрим четырехмерный градиент. Его компоненты будут выглядеть следующим образом:

$$\overset{4}{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial X^0}, \frac{\partial}{\partial X^1}, \frac{\partial}{\partial X^2}, \frac{\partial}{\partial X^3}\right\} \tag{8.16}$$

где X^0 – это компоненты четырехмерного радиуса $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \{X^0, X^1, X^2, X^3\} \tag{8.17}$$

Символьный вектор $\overset{4}{\nabla}$ является ковариантным. Чтобы это показать, возьмем произвольную функцию g от штрихованного радиус-вектора $\vec{R}'$, который контрвариантный. Раз он контрвариантный, то, используя формулу 8.14, мы можем записать следующее выражение:

$$g(\vec{R}') = g(\Gamma\vec{R}) = f(\vec{R}) \tag{8.18}$$

Теперь возьмем частную производную произвольной функции f по какой-либо компоненте вектора $\vec{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial X^l} = \sum_{m=0}^{3} \frac{\partial g}{\partial X'^m}\frac{\partial X'^m}{\partial X^l} \tag{8.19}$$

$$X'^m = \sum_k \Gamma_{mk} X^k \tag{8.20}$$

$$\frac{\partial X'^m}{\partial X^l} = \Gamma_{ml} \tag{8.21}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X^l} = \sum_m \Gamma_{ml}\frac{\partial g}{\partial X'^m} = \sum_m \Gamma_{lm}\frac{\partial g}{\partial X'^m} \tag{8.22}$$

В силу произвольность функции g и f формула частной производной будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial X^l} = \sum_m \Gamma_{lm}\frac{\partial}{\partial X'^m} \tag{8.23}$$

В данном случае это покомпонентная запись для преобразования вектора:

$$\overset{4}{\nabla} = \Gamma \, \overset{4}{\nabla}' \tag{8.24}$$

Таким образом, выражение 8.24 удовлетворяет записи формулы 8.15, и, следовательно, четыре компоненты оператора дифференцирования по контравариантным компонентам радиус-вектора $\vec{R}$ образуют четырехмерный ковариантный вектор. Тогда мы можем использовать следующую запись:

$$\overset{4}{\nabla} = \{D_0, D_1, D_2, D_3\} \tag{8.25}$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial X^i}, \;\; i = 0, 1, 2, 3 \tag{8.26}$$

Аналогичным образом мы можем установить, что данный четырехмерный градиент мы также можем записывать как контрвариантные компоненты. Тогда его компоненты примут вид:

$$\overset{4}{\nabla} = \{D^0, D^1, D^2, D^3\} \tag{8.27}$$

$$D^i = \frac{\partial}{\partial X_i}, \;\; i = 0, 1, 2, 3 \tag{8.28}$$

Таким образом, четырехмерный вектор тока $\vec{J}$ является четырехмерным правильным релятивистским вектором.

Формулировка теории поля на языке электромагнитных потенциалов

Как известно, теорию поля можно формулировать или на языке напряженностей поля, или на языке электромагнитных потенциалов. Рассмотрим сначала формулировку теории поля на языке электромагнитных потенциалов.

Известно, что есть потенциал φ и векторный потенциал $\vec{a}$. Эти потенциалы берутся из уравнения Даламбера:

$$\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = f \tag{8.29}$$

$$\chi = \varphi, a_\alpha, \quad \alpha = x, y, z \tag{8.30}$$

В зависимости от того, какая из четырех величин из выражения 8.30 будет представлена χ, функция f в правой части выражения 8.29 будет выглядеть следующим образом:

$$f = 4\pi\rho, \;\; \chi = \varphi$$
$$f = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\alpha, \;\; \chi = a_\alpha \tag{8.31}$$

Неоднозначность потенциалов заключается в том, что если вместо потенциала φ взять потенциал φ', который будет равен:

$$\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.32}$$

где ψ – произвольная функция координаты времени. В этом случае напряженность электрического магнитного поля не изменится.

Соответственно векторный потенциал меняется следующим образом:

$$\vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} + \frac{1}{c}\nabla\psi \tag{8.33}$$

Запишем условие Лоренца, с помощью которого получается уравнение Даламбера:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\,\vec{a} = 0 \tag{8.34}$$

Оно похоже на уравнение непрерывности, т.е. закон сохранения заряда в дифференциальной форме. Если мы возьмем четырехмерный потенциал $\vec{A}$, нулевая компонента которого будет равна скалярному потенциалу φ, а три пространственных будут равны векторному потенциалу $\vec{a}$, то мы получаем следующее соотношение:

$$\triangledown\vec{A} = 0 \tag{8.35}$$
$$\vec{A} = \{\varphi, \vec{a}\} \tag{8.36}$$

Из выражения 8.29 видно, что оператор $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – это скалярное произведение четырехмерного градиента самого на себя. Таким образом, мы можем записать:

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\sum_{k=0}^{3} D_k D^k \tag{8.37}$$

Очевидно, что соотношения 8.29 и 8.30 представляют собой следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} f = 4\pi\rho,\ \ \chi = \varphi \\ f = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\alpha},\ \ \chi = a_{\alpha} \end{aligned}\right\} \ -\frac{4\pi}{\text{c}}\vec{J} \tag{8.38}$$

Таким образом, используя выражение 8.37-8.38 мы получаем:

$$\left(\sum_{k=0}^{3} D_k D^k\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{\text{c}}\vec{J} \tag{8.39}$$

В данном выражении скалярный оператор действует на четырехмерный вектор.

Потенциалы могут быть откалиброваны с помощью калибровки Лоренца. Запишем замены 8.32 и 8.33 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} + \frac{1}{c}\nabla\psi \end{aligned}\right\} \ \vec{A} \quad \rightarrow \quad \vec{A}, -\nabla\psi \tag{8.40}$$

Формулировка теории поля на языке напряженностей электромагнитного поля

Теперь рассмотрим формулировку теории поля на языке напряженностей электромагнитного поля. Трехмерную напряженность электромагнитного поля нельзя расширить до четырехмерных аналогов.

В первую очередь определим напряженности полей с помощью потенциалов:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} \tag{8.41}$$

$$\vec{H} = rot\,\vec{a} = \nabla\times\vec{a} \tag{8.42}$$

Многочисленные опыты, которые говорят, что у нас в одной системе отсчета может быть одно поле, а в другой системе отсчета другое поле, говорят о том, что электрическое и магнитное поля сами по себе имеют значения только тогда, когда мы находимся в одной инерциальной системе отсчета. Следовательно, они должны представлять одну сущность, которая должна преобразовываться по Лоренцу при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Для того, чтобы это получить, напишем в явном виде 6 формул, которые следуют из выражений 8.41 и 8.42:

$$H_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \tag{8.43}$$

$$H_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \tag{8.44}$$

$$H_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{8.45}$$

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial a_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{8.46}$$

$$E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial a_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{8.47}$$

$$E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial a_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{8.48}$$

Мы знаем, что компоненты $\vec{a}$ являются компонентами $\vec{A}$, а дифференцирование по x, y, z – это соответствующие компоненты дифференцирования по координатам четырехмерного вектора. Поэтому теперь перепишем формулы 8.43-8.48 в четырехмерном виде:

$$H_x = \frac{\partial A^3}{\partial X^2} - \frac{\partial A^2}{\partial X^3} \tag{8.49}$$

$$H_y = \frac{\partial A^1}{\partial X^3} - \frac{\partial A^3}{\partial X^1} \tag{8.50}$$

$$H_z = \frac{\partial A^2}{\partial X^1} - \frac{\partial A^1}{\partial X^2} \tag{8.51}$$

$$E_x = \frac{\partial A^1}{\partial X^0} - \frac{\partial A^0}{\partial X^1} \tag{8.52}$$

$$E_y = \frac{\partial A^2}{\partial X^0} - \frac{\partial A^0}{\partial X^2} \tag{8.53}$$

$$E_z = \frac{\partial A^3}{\partial X^0} - \frac{\partial A^0}{\partial X^3} \tag{8.54}$$

В данном случае потенциал записан через контрвариантные компоненты четырехмерного градиента, который есть оператор дифференцирования по контрвариантным компонентам. Следовательно, согласно определению в итоге получаются ковариантные компоненты.

Лекция 9. Релятивистское уравнение Максвелла

Тензор электромагнитного поля

Ранее мы преобразовывали релятивистский угловой момент с помощью добавления к матрице 3×3 нулевых элементов. Таким образом получается матрица 4×4. Тогда в каждом элементе матрицы мы получали компоненты правильных четырехвекторов, которые при переходе в другую инерциальную систему отсчета преобразовываются следующим образом:

$$\left(X^i\right)' = \sum_l \Gamma_{il} X^l \tag{9.1}$$

$$(P^k)' = \sum_m \Gamma_{km} P^k \tag{9.2}$$

Данные выражения являются определением компонент четырехмерного тензора первого ранга. Именно это определение делает тензор первого ранга релятивистски инвариантным.

Поскольку в каждом элементе матрицы встречаются данные произведения, то перемножая эти две суммы мы получаем:

$$\left(X^i\right)'(P^k)' = \sum_{lm} \Gamma_{il}\Gamma_{km} X^l P^k \tag{9.3}$$

Произведение $X^l P^k$ из выражения 9.3 называется элементом четырехмерного тензора второго ранга. Данное преобразование является двойным преобразованием Лоренца и, следовательно, оно делает данный тензор второго ранга правильным релятивистским тензором. Тогда произвольный элемент этого тензора будет задаваться следующим соотношением:

$$\left(\mathbb{F}^{ik}\right)' = \sum_{lm} \Gamma_{il}\Gamma_{km} \mathbb{F}^{lk} \tag{9.4}$$

Таким образом, мы продемонстрировали, как произведение компонент четырехмерного тензора первого ранга приводит к четырехмерному тензору второго ранга. Обратное утверждение из данного факта не следует.

Аналогично с релятивистским угловым моментом введем тензор электромагнитного поля.

Каждый трехмерный вектор напряженности расширять до четырехмерного варианта никак не получается. Поэтому мы пользуемся следующим преобразованием:

$$\vec{H} = rot\,\vec{a} \tag{9.5}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} \tag{9.6}$$

Данные выражения дают нам 6 соотношений. Компоненты трехмерного потенциала $\vec{a}$ и скалярного потенциала φ образуют четырехмерный релятивистский потенциал $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \{\varphi, \vec{a}\} \tag{9.7}$$

Если на основании формул 9.5 и 9.6 подробно расписывать каждую компоненту и затем переписывать компоненты трехмерного потенциала $\vec{a}$ и скалярного потенциала φ как компоненты четырехмерного релятивистского потенциала $\vec{A}$, то мы получим следующее выражение для соответствующего четырехмерного тензора второго ранга:

$$\mathbb{F}_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial X^i} - \frac{\partial A_i}{\partial X^k} \tag{9.8}$$

Не трудно видеть, что данный тензор обладает следующими свойствами:

- При повторении компонент получаются нули
- Когда компоненты меняются местами, то они меняют знак

Теперь выразим через эти компоненты все физически значимые напряженности:

$$\begin{gathered} H_x = -F_{23} \quad H_y = F_{13} \quad H_z = -F_{12} \\ E_x = F_{01} \quad E_y = F_{02} \quad E_z = F_{03} \end{gathered} \tag{9.9}$$

Согласно этим формулам можно заполнить матрицу 4×4 и получить тензор электромагнитного поля, записанный через дважды ковариантные компоненты.

Поскольку нам также понадобятся контрвариантные компоненты, то запишем тот же самый тензор, но записанный в контрвариантных компонентах:

$$\mathbb{F}^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial X_i} - \frac{\partial A^i}{\partial X_k} \tag{9.10}$$

В контрвариантных компонентах компоненты электромагнитного поля будут записываться в следующем виде:

$$\begin{gathered} H_x = -F^{23} \quad H_y = F^{13} \quad H_z = -F^{12} \\ E_x = -F^{01} \quad E_y = -F^{02} \quad E_z = -F^{03} \end{gathered} \tag{9.11}$$

В данном случае знаки сохранились только для напряженности магнитного поля, а для напряженности электрического поля поменялись, потому что нулевой индекс может стоять в любом месте, при этом знак сохраняется, а остальные компоненты при переходе в другой вид меняют знак. В случае элементов напряженности магнитного поля знак поменялся дважды, таким образом не изменившись.

Если мы работаем с дважды контравариантными компонентами тензора электромагнитного поля, то преобразование этих компонент при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой записываются следующим образом:

$$(\mathbb{F}')^{ik} = \sum_{lm} \Gamma_{il}\Gamma_{km}\mathbb{F}^{lm} \tag{9.12}$$

Если же мы работаем с дважды ковариантными компонентами тензора электромагнитного поля, то преобразование этих компонент при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой записываются следующим образом:

$$(\mathbb{F})_{lm} = \sum_{lm} \Gamma_{il}\Gamma_{km}(\mathbb{F}')_{lm} \tag{9.13}$$

Если теперь, работая с контрвариантными компонентами, мы хотим записать обратное соотношение, т.е. выразить не штрихованные элементы тензора через штрихованные, то нужно записать то же самое выражение, но с матрицами Лоренца в -1 степени.

Воспользовавшись, данными формулами можно получить соотношения, как связываются компоненты напряженности электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Теперь возьмем элементы тензора второго ранга и проведем с ними операцию свертывания, которая приводит к тому, что ранг тензора понижается на единицу:

$$\sum_{i,k} \mathbb{F}_{ik}\mathbb{F}^{ik} = \sum_{i,k} \mathbb{F}'_{ik}(\mathbb{F}')^{ik} \tag{9.14}$$

Таким образом, мы получаем тензор нулевого ранга, т.к. в данном случае операция свертывания проводится дважды. Известно, что тензор нулевого ранга всегда должен быть релятивистски инвариантным. Проделывая предложенную операцию, мы получим, что этот инвариант равен:

$$\sum_{i,k} \mathbb{F}_{ik}\mathbb{F}^{ik} = inv = 2\left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2\right) \tag{9.15}$$

Это означает, что если в некоторой инерциальной системе отсчета напряженности электрического и магнитного поля равны по величине, то они всегда будут равны по величине в любой другой инерциальной системе отсчета. Если в некоторой системе отсчета магнитное поле всегда больше электрического, то это соотношение будет сохраняться между ними и в других инерциальных системах отсчета.

Есть еще один инвариант, который записывается следующим образом:

$$\sum_{i,k,l,m} e^{iklm}\mathbb{F}_{ik}\mathbb{F}^{ik} = \vec{E}\vec{H} \qquad (9.16)$$

где e^{iklm} – это четырехмерный тензор четвертого ранга, все элементы которого равны 0 или 1. Данный тензор является антисимметричным, т.е. от нуля отличны только те элементы, для которых все индексы различны, причем по определению элемент $e^{0123} = +1$, а любой другой элемент с отличными неравными индексами принимает значение от количества перестановок: если четное число перестановок – $e^{iklm} = +1$; если нечетное – $e^{iklm} = -1$.

При выполнении выражения 9.16 мы снова получаем тензор нулевого ранга. Физически результат данного выражения означает, что если в некоторой инерциальной системе отсчета у нас электрическое и магнитное поля ортогональны друг другу, то эта ортогональность сохраняется при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета. Причем случай, когда в какой-то инерциальной системе отсчета одно из полей обращается в нуль, не исключается, и, следовательно, в любых других инерциальных системах отсчета оно тоже будет нулевым.

Релятивистская форма уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла содержат напряженности электрического и магнитного поля, дифференцированные либо по координатам, либо по времени. Следовательно, на релятивистском языке эти члены должны выглядеть как производные по компонентам четырехвектора от компонент тензора магнитного поля. Поэтому запишем следующую конструкцию:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial X^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial X^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial X^k} = 0 \qquad (9.17)$$

Каждое из слагаемых данного выражения на тензорном языке представляет из себя элемент четырехмерного тензора третьего ранга. В каждом из слагаемых имеется тройка индексов. Не трудно видеть, что если все индексы одинаковые, то мы получим тождество, в котором нуль равняется нулю. Если два индекса одинаковые и не равны третьему, то мы также получим тождество, в котором нуль равняется нулю. Следовательно, для того чтобы получилось уравнение относительно неизвестных компонент, а не тождество, нужно, чтобы индексы не были равны между собой.

Рассмотрим случай, когда $i = 1, k = 2, l = 3$:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial X^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial X^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial X^2}=0 \tag{9.18}$$

Теперь воспользуемся выражениями 9.9 для дважды ковариантных компонент:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial z}-\frac{\partial H_x}{\partial x}-\frac{\partial H_y}{\partial y}=0 \tag{9.19}$$

Данное выражение ковариантно, потому что при переходе в другую систему отсчета форма уравнения осанется той же самой.

Таким образом, мы получили уравнение Максвелла, ковариантная форма которого представлена выражением 9.19:

$$div\,\vec{H}=0 \tag{9.20}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $i=0, k=1, l=2$:

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial X^2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial X^0}+\frac{\partial F_{20}}{\partial X^1}=0 \tag{9.21}$$

Снова воспользуемся выражениями 9.9 для дважды ковариантных компонент и получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0 \tag{9.22}$$

Данное выражение соответствует следующему уравнению:

$$\left(rot\,\vec{E}\right)_z=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{9.23}$$

Помимо рассмотренных нами случаев, есть также случае, когда $i=0, k=1, l=3$ и $i=0, k=2, l=3$. Они приводят к тому же самому, что и уравнение 9.23, только для компонент x и y.

В итоге мы получаем, что на самом деле выражение 9.17, когда мы подставляем различные индексы, приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial X^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial X^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial X^k}=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} div\,\vec{H}=0 \\ rot\,\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \tag{9.24}$$

Таким образом, мы получили пару уравнений Максвелла, которые не содержат токов и зарядов, причем левая форма записи выражения 9.24 является ковариантной формой данной пары уравнений Максвелла.

Теперь рассмотрим уравнения Максвелла для токов и зарядов:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (9.25)$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (9.26)$$

Перепишем для удобства при последующих преобразованиях данные выражения в следующем виде:

$$div\,\vec{E} = \frac{4\pi}{c}c\rho \qquad (9.27)$$

$$rot\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (9.28)$$

Таким образом в правых частях уравнений 9.27-9.28 остался четырехмерный ток, умноженный на константу $\frac{4\pi}{c}$:

$$\vec{J} = \{c\rho, \vec{j}\} \qquad (9.25)$$

Следовательно, в левой части у нас тоже должен стоять четырехмерный вектор или четырехмерный тензор первого ранга.

Возьмем элемент тензора первого ранга и просуммируем его по повторяющимся индексам:

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial X^k} \qquad (9.26)$$

Данная операция, в отличии от выражения 9.14, не является операцией свертывания, потому что в выражении 9.26 стоит произведение тензоров разных рангов.

Записанное выражение должно быть тензором первого ранга. Для этого делается переход в другую инерциальную систему отсчета и записывается в штрихованном виде. Тогда мы получим:

$$F^{ik} = \sum_{l,m}\Gamma_{li}^{-1}\Gamma_{km}^{-1}(F')^{lm} \qquad (9.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^k} = \sum_{n}\Gamma_{kn}\frac{\partial}{\partial X'^n} \qquad (9.28)$$

Теперь подставим полученные соотношения 9.27-9.28 в выражение 9.26:

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial X^{k}}=\sum_{k}\sum_{n}\Gamma_{nk}\frac{\partial}{\partial X'^{n}}\sum_{l}\Gamma_{li}^{-1}\sum_{m}\Gamma_{km}^{-1}(F')^{lm} \qquad (9.29)$$

Теперь выполним стандартную операцию, которая заключается в том, что мы меняем порядок суммирования:

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial X^{k}}=\sum_{l}\Gamma_{li}^{-1}\sum_{n}\Gamma_{nk}\frac{\partial (F')^{ln}}{\partial X'^{n}} \qquad (9.30)$$

Проделав данные операции, мы убеждаемся, что мы преобразовали четырехмерный тензор первого ранга в явном виде.

Теперь распишем в явном виде компоненты вектора 9.26:

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial X^{1}}+\frac{\partial F^{02}}{\partial X^{2}}+\frac{\partial F^{03}}{\partial X^{3}}=-div\,\vec{E},\ \ i=0 \qquad (9.31)$$

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial X^{0}}+\frac{\partial F^{12}}{\partial X^{2}}+\frac{\partial F^{13}}{\partial X^{3}}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\left(rot\,\vec{H}\right)_x,\ \ i=1 \qquad (9.32)$$

Для $i=2$ и $i=3$ выражения получатся аналогичные выражению 9.32 только для компонент y и z.

В результате получаем окончательно ковариантную форму второй пары уравнений Максвелла, которые содержат токи и заряды:

$$-\sum_{k}\frac{\partial F^{ik}}{\partial X^{k}}=\frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad (9.33)$$

Сила Лоренца

На заряженную частицу действует сила Лоренца. Запишем ее в привычном для нас трехмерном виде:

$$\vec{f}_{л}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right] \qquad (9.34)$$

где e – это заряд частицы.

Динамическое уравнение движения в ковариантной форме:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \tag{9.35}$$

Данное уравнение распадается на нулевую компоненту и три пространственных компоненты. Следовательно, компоненты будут выглядеть следующим образом:

$$\vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = e\vec{v}\vec{E} \\ \dfrac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \dfrac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] \end{cases} \tag{9.36}$$

Лекция 10. Формализм Лагранжа и Гамильтона в релятивизме

Движение релятивистского заряда в электромагнитном поле

Если частица движется под действием сил, то соответствующее релятивистское динамическое уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \tag{10.1}$$

Дифференцирование по собственному времени:

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \tag{10.2}$$

Четырехмерный импульс и четырёхмерная сила включает в себя скалярную нулевую компоненту в виде и три пространственных компоненты в виде трехмерного вектора:

$$\vec{P} = \{m\gamma c, \vec{p} = m\gamma\vec{v}\} \tag{10.3}$$
$$\vec{F} = \left\{\frac{\gamma}{c}\vec{v}\vec{f}, \gamma\vec{f}\right\} \tag{10.4}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{10.5}$$

где $\vec{v}$ – это нерелятивистская скорость.

Четырехмерное уравнение 10.1 может быть записано как четыре скалярных уравнения в ковариантных и контрвариантных компонентах.

Движение частицы заряженной частицы описывается силой Лоренца:

$$\vec{f}_{л} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] \tag{10.6}$$

После преобразований, основанных на формулах 10.1-10.5, для силы Лоренца мы получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\vec{v}\vec{E} \tag{10.7}$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] \tag{10.8}$$

Данные четыре уравнения 10.7-10.8 (одно скалярное и одно векторное) эквивалентны уравнению 10.1. Однако с точки зрения теории относительности данные уравнения не совсем правильные, т.к. мы не можем сказать, что при переходе в другую систему отсчета форма этих уравнений сохраниться, т.е. мы не можем точно знать ковариантные ли это уравнения.

Нам надо, чтобы эти четыре уравнения записывались в следующем ковариантном виде:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad \frac{dP_i}{d\tau} = F_i, \;\; i = 0, 1, 2, 3 \tag{10.9}$$

Приведем уравнение 10.7 в соответствии с уравнением 10.9 с $i = 0$:

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{e}{c}\left(\gamma v_x E_x + \gamma v_y E_y + \gamma v_z E_z\right) \tag{10.10}$$

Компоненты γv_x, γv_y и γv_z означают пространственные компоненты четырехскорости $\vec{V}$. Компоненты электрического поля записываются через компоненты тензора электромагнитного поля F. В итоге мы получим:

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{e}{c}(V^1F_{01} + V^2F_{02} + V^3F_{03}) \tag{10.11}$$

Следовательно, мы получаем нулевое уравнение из системы уравнений 10.9:

$$\frac{dP_0}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_k V^k F_{0k} \tag{10.12}$$

В данном выражении выполняется операция свертывания, которая приводит к понижению ранга тензора. Следовательно, мы получаем четырехмерный тензор первого ранга.

Таким образом, мы получили нулевое уравнение. Данное уравнение релятивистски ковариантно и отличается от уравнения 10.7.

Для однообразия построим одну пространственную компоненту. Первая компонента, т.е. компонента по x, будет выражаться следующим уравнением:

$$\frac{dP^1}{d\tau} = \frac{e}{c}\left(\gamma \mathrm{c} E_x + \gamma v_y H_z - \gamma v_z H_y\right) \tag{10.13}$$

По аналогии с нулевым уравнением получаем:

$$\frac{dP^1}{d\tau} = \frac{e}{c}\left(V^0(-F_{10}) + V^2(-F_{12}) - V^3F_{13}\right) \tag{10.14}$$

Следовательно, мы получаем первое уравнение из системы уравнений 10.9:

$$\frac{dP^1}{d\tau} = -\frac{e}{c}\sum_k V^k F_{1k} \tag{10.15}$$

Видно, что уравнения 10.12 и 10.15 очень похожи за исключением знака минус в уравнении 10.15. Чтобы привести их к общему виду, мы умножаем уравнение 10.15 на -1 и индекс «1» опускаем вниз. В таком случае получаем:

$$\frac{dP_1}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_k V^k F_{1k} \tag{10.16}$$

Аналогично можно получить остальные пространственные компоненты:

$$\frac{dP_2}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_k V^k F_{2k} \tag{10.17}$$

$$\frac{dP_3}{d\tau} = \frac{e}{c}\sum_k V^k F_{3k} \tag{10.18}$$

Таким образом, теперь мы получили действительно ковариантную форму системы уравнений 10.9, которая не совпадает с более удобной для работы системой уравнений 10.7-10.8, хотя физически эта система может быть более осмысленна.

Теперь исходное уравнение 10.1 мы можем для случая движения заряженной частицы во внешних полях записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F}_{\text{л}} \tag{10.19}$$

где $\vec{F}_{\text{л}}$ – это четырехвектор силы Лоренца, компоненты которого представлены уравнениями 10.12, 10.16-10.18.

Формализм Лагранжа и Гамильтона

Если у нас есть функция Лагранжа, то мы знаем, как перейти к функции Гамильтона. А если мы получаем релятивистскую функцию Гамильтона, то мы можем записывать соответствующий гамильтониан.

Уравнение Лагранжа имеет следующий вид, если функция Лагранжа может быть выражена как разность кинетической и потенциальной энергии:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\nu} = 0 \tag{10.20}$$

Эквивалентная форма уравнения Лагранжа выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu \tag{10.21}$$

где Q_ν – обобщенная сила. Для случая, когда у нас имеется только одна частица, обобщенную силу можно расписать как:

$$Q_\nu = \vec{f}\frac{\partial r}{\partial q_\nu} \tag{10.22}$$

где $\vec{f}$ – сила, которая действует на частицу.

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{f}$ является силой Лоренца. Сила Лоренца зависит не только от координат, но и от скорости, что усложняет нам задачу. Однако если найдется такая функция U, которая зависит и от координат, и от скорости, что обобщенная сила Q_ν будет равняться:

$$U \quad \rightarrow \quad Q_\nu = -\frac{\partial U}{\partial q_\nu} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\nu} \tag{10.23}$$

то тогда мы можем использовать уравнение 10.20. В этом случае функция Лагранжа действительно будет зависеть от разности кинетической и потенциальной энергии.

Тогда получаем:

$$\vec{f} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] \tag{10.24}$$

$$U = U(\vec{r}, \vec{v}, t) \tag{10.25}$$

В этом случае Q_x, Q_y и Q_z будут совпадать с декартовыми компонентами силы Лоренца, и тогда сила Лоренца будет представляться в виде:

$$\vec{f} = -\nabla U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \tag{10.26}$$

Уравнение 10.24 является явным выражением для силы через напряженности электрических и магнитных полей. В свою очередь соответствующие напряженности электрического и магнитного полей:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} \tag{10.27}$$

$$\vec{H} = rot\,\vec{a} \tag{10.28}$$

Нам надо переписать силу Лоренца не в терминах напряженностей, а в терминах электромагнитных потенциалов $\vec{a}$ и φ, которые составляют четырехмерный потенциал.

Опустив все выкладки, мы получаем:

$$\vec{f} = -\nabla\left(e\varphi - \frac{e}{c}\vec{v}\vec{a}\right) - \frac{e}{c}\frac{d\vec{a}}{dc} \tag{10.29}$$

Если сравним полученную формулу 10.29 с формулой 10.26, то обобщенная потенциальная энергия, которая является функцией координат и скорости, будет выглядит следующим образом:

$$U = e\varphi - \frac{e}{c}\vec{v}\vec{a} \tag{10.30}$$

Теперь мы можем записать функцию Лагранжа, которая теперь будет равна разности кинетической энергии и потенциальной обобщенной энергии:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}\vec{v}\vec{a} \tag{10.31}$$

К сожалению, функция Лагранжа похожа на массу, зависящую от скорости. Она не является ни одним из математических объектов, которые должны корректно использоваться при построении аппарата специальной теории относительности. Однако уравнения, которые получаются из нее, нормальные с релятивистской точки зрения.

Перейдем от функции Лагранжа к функции Гамильтона. Для этого нужно ввести обобщенный импульс:

$$\vec{P} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} \tag{10.32}$$

Обобщенный импульс является трехмерным релятивистским импульсом. Продифференцировав его, получим:

$$\vec{P} = m\gamma\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{a} \tag{10.33}$$

Данная формула нужна для того, чтобы из нее получить зависимость скорости от обобщенного импульса, а затем использовать традиционную формулу функции Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \vec{v}\vec{p} - \mathcal{L} \tag{10.34}$$

Выразим зависимость скорости от обобщенного импульса из формулы 10.33:

$$\vec{v} = \frac{c\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{a}\right)}{\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{a}\right)^2}} \tag{10.35}$$

Теперь если подставить 10.35 в уравнение 10.34, то мы получим функцию Гамильтона для заряженной частицы, находящейся во внешнем поле:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{a}\right)^2} + e\varphi \tag{10.36}$$

Уравнение Шредингера для релятивистской свободной частицы

Начнем с самого простого случая, когда у нас имеется свободная частица. В нерелятивистской квантовой механике данная задача простая, однако при рассмотрении релятивистского случая задача приводит к неожиданным физическим результатам.

Если частица свободная, потенциал φ равен нулю, векторный потенциал $\vec{a}$ равен нулю, то функция Гамильтона для свободной частицы будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{H} = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \tag{10.37}$$

Получим уравнение Шредингера. В нерелятивистском случае мы имеем:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{10.38}$$

Уравнение Шредингера содержит только первую производную по времени, потому что если известна волновая функция в начальный момент времени, то такое уравнение позволяет пошагово идти через малые интервалы времени и всегда определять, разлагая все в ряды Тейлора по степеням малых отрезков времени, волновые функции через данные малые интервалы времени:

$$\Psi(t_0) \to \Psi(t_0 + \Delta t) \to \Psi(t_0 + 2\Delta t) \to \cdots \tag{10.39}$$

Для свободной релятивистской частицы уравнение Шредингера будет выглядеть следующим образом:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \sqrt{c^2\hat{P}_x^2 + c^2\hat{P}_y^2 + c^2\hat{P}_z^2 + m^2c^4}\Psi \tag{10.40}$$

С точностью до множителя операторы $\hat{P}_x$, $\hat{P}_y$ и $\hat{P}_z$ представляют из себя квадраты пространственных компонент четырехмерного градиента:

$$\frac{\hbar}{i}\overset{4}{\nabla} = \left\{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\hbar}{i}\nabla\right\} \tag{10.41}$$

Дифференцирование ведется по контрвариантным компонентам четырехмерного радиус-вектора:

$$\vec{R} = \{ct, \vec{r}\} \tag{10.42}$$

Лекция 11. Задача со свободной частицей и частицей в центральном поле

Волновое уравнение Дирака и решение матрицы для свободной частицы

Волновое уравнение в форме Шредингера, которое получил Дирак, записывается следующим образом:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_D\Psi \tag{11.1}$$

где H_D – гамильтониан Дирака, который равен:

$$H_D = c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + mc^2\beta \tag{11.2}$$

где $\vec{\alpha}, \beta$ – матрицы, $\hat{\vec{p}}$ – оператор вектора импульса. β – это диагональная матрица, на диагонали которой единичный и минус единичный блок.

Теперь разделим переменные, т.е. отделим пространственные переменные от временной переменной. Тогда волновая функция записывается в виде:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\Psi \tag{11.3}$$

Стоит отметить, что Ψ в уравнении 11.2, в отличие от формы Шредингера, это координатная волновая функция, т.е. она зависит только от координат. В результате, чтобы найти функцию 11.2 нужно решать стационарное уравнение Дирака:

$$H_D\Psi = E\Psi \tag{11.4}$$

Запишем вид матрицы $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

где $\vec{\sigma}$ – это трехмерный матричный вектор, компоненты которого являются матрицами Пауля, 0 – в данном случае это нулевая матрица 2×2.

В уравнении 11.2 у нас есть произведение $\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}$. Это будет следующая матрица:

$$\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.6}$$

Если мы учтем, как будут выглядеть матричный вектор $\vec{\sigma}$ через его компоненты в виде матриц Пауля, тогда матрица $\vec{\sigma}\vec{p}$ в явном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{\sigma}\hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

В силу того, что гамильтониан Дирака имеет матричную форму 4×4, то под волновой функцией из уравнения 11.3 мы будем считать так же четырехмерный столбец, компоненты зависят от координат. Это связано с тем, что можно ввести вектор спина с точностью до $\frac{\hbar}{2}$:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

Теперь решим задачу стационарного уравнения Шредингера, решение которой будем искать в виде:

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}}\vec{u} \tag{11.9}$$

где $\vec{u}$ – это числовой вектор-столбец, который добавлен в силу структуры гамильтониана. Поэтому каждая из матриц, которая присутствует в гамильтониане Дирака, действует на вектор $\vec{U}$, но перед этим нужно экспоненту из уравнения 11.9 внести под знак оператора, в котором стоят в матрице 11.7 $\vec{\sigma}\vec{p}$:

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)}\vec{u} \tag{11.10}$$

Теперь учитывая, как выглядят операторы $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ и $\hat{p}_z$, не трудно увидеть, что они каждый раз дифференцируют свой сомножитель в уравнении 11.10. В итоге, если подействовать оператором 11.7 на предполагаемое решение функции 11.9, тогда мы получаем:

$$\vec{\sigma}\hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + ip_y & -\hat{p}_z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{\sigma}\vec{p} \tag{11.11}$$

В некотором смысле мы получили то же самое решение, что и в нерелятивистской квантовой механике. В итоге вместо уравнения 11.4 после того, как мы подставили предполагаемый вид решения, убедились, что блок $\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}$ перешел в $\vec{\sigma}\vec{p}$, у нас появляется задача:

$$\mathbb{H}_D\vec{u} = E\vec{u} \tag{11.12}$$

где $\mathbb{H}_D$ – это матрица гамильтониана Дирака из формулы 11.2, в котором второе слагаемое остается без изменений, а первое изменилось в соответствии с заменой 11.11.

Теперь нам нужно решить задачу на собственные значения для соответствующей матрицы. Для этого нам удобно числовой столбец $\vec{u}$ записать следующим образом:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

где $\vec{v}$ и $\vec{w}$ – это двумерные вектора. Вектор $\vec{v}$ состоит из компонент u_1 и u_2, а $\vec{w}$ – это компоненты u_3 и u_4. Тогда относительно этих векторов уравнение 11.12 разбивается на систему из двух линейных уравнений относительно:

$$\begin{cases} (mc^2 - E)\vec{v} + c\vec{\sigma}\vec{p}\vec{w} = 0 \\ c\vec{\sigma}\vec{p}\vec{v} - (mc^2 + E)\vec{w} = 0 \end{cases} \tag{11.14}$$

Условие нетривиальности решения данной системы состоит в том, что нужно составить характеристический многочлен из коэффициентов при неизвестных $\vec{v}$ и $\vec{w}$ и приравнять его к нулю:

$$-(m^2c^4 - E^2) - c^2(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = 0 \tag{11.15}$$

$$(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} = p^2 1 \tag{11.16}$$

Здесь 1 – это единичная матрица 2×2. Следовательно, уравнение 11.15 преобразовывается в следующий вид:

$$E = \pm E_p \tag{11.17}$$

$$E_p = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \tag{11.18}$$

Запишем формулу для квадрата E:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2 \tag{11.19}$$

Данная формула хороша тем, что она релятивистски правильна, потому что если мы вспомним, что такое четырехмерный вектор импульса:

$$\vec{P} = \left\{\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right\} \tag{11.20}$$

скалярное произведение которого на самого себя будет инвариантом:

$$\vec{P}\vec{P} = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \tag{11.21}$$

то сравнивая формулы 11.21 и 11.19, отличие будет заключаться только в обозначении энергии. Поэтому полученное уравнение 11.19 находится в полном соответствии со скалярном произведением четырехмерного вектора импульса энергии самого на себя.

Теперь введем оператор, состоящей из блочной матрицы 2×2:

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

Здесь $\vec{\sigma}\vec{p}$ мы понимаем как скалярное произведение двух векторов.

Данная матрица 11.22 коммутирует с матрицей $\mathbb{H}_D$:

$$[\mathbb{H}_D \Sigma_p] = 0 \tag{11.23}$$

Раз коммутатор равен нулю, то это означает, что собственные вектора матрицы Дирака $\mathbb{H}_D$ являются также собственными векторами оператора Σ_p. Следовательно, мы можем написать:

$$\Sigma_p \vec{u} = \lambda \vec{u} \tag{11.24}$$

Если теперь мы учтем 11.22 и 11.13, то мы получим из 11.24:

$$(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{v} = \lambda \vec{v} \tag{11.25}$$
$$(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{w} = \lambda \vec{w} \tag{11.26}$$

На самом деле с точностью до обозначений это одно и то же уравнение на собственные значения. Для того, чтобы найти собственные значения λ, подействуем еще раз оператором Σ_p на уравнение 11.25:

$$(\vec{\sigma}\vec{p})^2 \vec{v} = \lambda^2 \vec{v} \tag{11.27}$$

Следовательно, учитывая, что матрица $(\vec{\sigma}\vec{p})^2$ эрмитова, поскольку изначально гамильтониан был эрмитов, то получим собственные значения:

$$\lambda = \pm p \tag{11.28}$$

Вспомним теорему о максимальной проекции спина, которая гласит, что если вектор импульса задает какое-то направление в пространстве, и учитывая, что оператор спина – это с точностью до $\frac{\hbar}{2}$ эта самая матрица $\vec{\sigma}\vec{p}$, то очевидно в силу этой теоремы мы можем считать, что у нас есть такие направления, задаваемые вектором $\vec{p}$, что проекция спина на это направление равняется либо $+\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}$, либо $-\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}$.

Не трудно видеть, что двум собственным значениям 11.28 будут соответствовать следующие вектора, один из которых соответствует направлению $+p$, а другой $-p$:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{11.29}$$

Теперь вспомним, что у нас возможны два значения энергии из уравнения 11.17. Со знаком «плюс» их называют положительными решениями, а со знаком «минус» – отрицательными решениями. Тогда каждый собственный вектор $\vec{u}$, который полностью определяет волновую функцию свободной частицы, может или иметь положительную проекцию на вектор импульса, т.е. соответствовать значению $\lambda = +p$, или $\lambda = -p$. Кроме того, также возможны два знака у энергии из уравнения 11.17.

Если мы первый знак оставим за направлением спина на соответствующее направление, задаваемое импульсом, то тогда возможны следующие решения:

$$u_{++} \quad u_{\pm} \quad u_{\mp} \quad u_{--} \tag{11.30}$$

Теперь запишем эти вектора в явном виде. Это будут четырехмерные вектора. Допустим, мы выбираем значение $E = +E_p$, вектор $\vec{v}$ будет равен $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, вектор $\vec{w}$ тогда можно выразить из 11.14. Тогда мы получим:

$$\vec{w} = \frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{mc^2 + E_p}\vec{v} \tag{11.31}$$

Учитывая, что $(\vec{\sigma}\vec{p})$, действуя на $\vec{v}$ дает либо $+v$, либо $-v$, получаем:

$$\vec{w} = \frac{c}{mc^2 + E_p}(\pm p)\vec{v} = \pm\frac{cp}{mc^2 + E_p}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{11.32}$$

Обозначим $\delta_p = \frac{cp}{mc^2+E_p}$. Тогда вектор $\vec{w}$ будет выглядеть как $\begin{bmatrix}\delta_p\\0\end{bmatrix}$. И тогда вектор u_{++} в явном виде будет записываться:

$$u_{++} = \begin{bmatrix}1\\0\\\delta_p\\0\end{bmatrix} \tag{11.33}$$

Теперь выберем значение $E = -E_p$. Аналогично с прошлыми действиями выражаем вектор $\vec{v}$ через вектор $\vec{w}$ из уравнения 11.14:

$$\vec{v} = \frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})}{mc^2 + E_p}\vec{w} = \pm\delta_p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

Таким образом, мы получили 4 вектора: 2 из уравнения 11.32 и 2 из уравнения 11.34. Теперь запишем оставшиеся из 11.30 вектора:

$$u_{\mp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\delta_p \end{bmatrix} \quad u_{\pm} = \begin{bmatrix} -\delta_p \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_{--} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.35}$$

Не трудно увидеть, что полученные 4 вектора из 11.33 и 11.35 взаимно ортогональны. Таким образом, мы можем взять линейную комбинацию этих четырех векторов в силу принципа суперпозиции.

Теперь запишем общее решение волнового уравнения Шредингера для свободной частицы:

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}\vec{u} \tag{11.36}$$

В данном решении физически значимый множитель является плоской волной де Бройля, причем она будет плоской волной и для положительных, и для отрицательных значений энергии, в отличии от нерелятивистской квантовой механики.

Дирак исходил из того, что можно не отбрасывать решения с отрицательными энергиями, потому что они тоже правильно описывают поведение свободной частицы. Также его аргументом было, что если отбрасывать отрицательные решения, то тогда нарушается полнота базиса. Для состояний с отрицательной энергией Дирак предложил следующую трактовку, что существует море электронов с отрицательной кинетической энергией и с отрицательной энергией покоя, и это море электронов никак себя не проявляет, потому что частицы его создающие не создают никаких полей – ни гравитационных, ни электромагнитных, и, когда все состояния из штрихованной области рисунка 11.1 заняты, то тогда он назвал это абсолютным вакуумом.

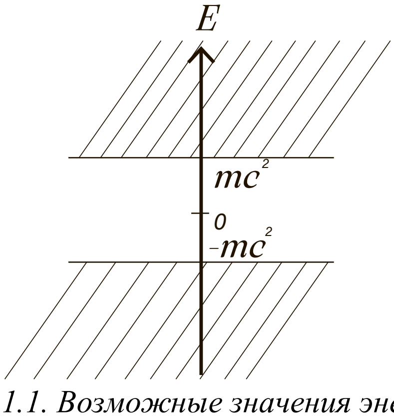

Рис. 11.1. Возможные значения энергии.

Если теперь появляется одно не занятое состояние в море отрицательных энергий, то физически наблюдаемая картина соответствует тому, что в области положительных энергий появляется одна частица с положительной кинетической энергией и энергий покоя, но обладающей противоположным знаком, т.е. положительный электрон, который называется позитрон.

Таким образом, мы разобрали задачу про свободную квантовую релятивистскую частицу и получили все возможные решения. Более последовательно данная теория была разработана в рамках квантовой теории поля.

Частица в центральном поле

Рассмотри задачу, когда частица со спином 1/2 находится в центральном поле. Это означает, что соответствующий гамильтониан Дирака будет выглядеть следующим образом:

$$H = c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + mc^2\beta + V(r) \tag{11.37}$$

где $V(r)$ – это центральный потенциал, зависящий от радиальной переменной.

В нерелятивистском случае орбитальный момент коммутирует с гамильтонианом в силу сферической симметрии. Поэтому проверим, коммутирует ли орбитальный момент с гамильтонианом в релятивистском случае. Орбитальный момент коммутирует, если коммутирует каждая из его проекций.

Возьмем некоторую проекцию орбитального момента и вычислим ее коммутатор. Очевидно, что она коммутирует с матрицей β и с центральным потенциалом $V(r)$, потому что оператор действует только по сферическим углам, и, следовательно, он любую функцию, зависящую от радиальной переменной зануляет. Остается только матрица $\vec{\alpha}$, которую мы и проверяем:

$$\left[\hat{L}_x, c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\right] = \left[y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, c\vec{\alpha}\vec{p}\right] = ic\hbar\left(\alpha_y\hat{p}_z - \alpha_z\hat{p}_y\right) \neq 0 \tag{11.38}$$

Очевидно, что этот коммутатор не равен нулю, т.к. здесь появляются компоненты спина. Такой же результат получается и для других компонент оператора орбитального момента.

Теперь то же самое проделаем с оператором спина:

$$\left[S_x, c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\right] = ic\hbar\left(\alpha_z\hat{p}_y - \alpha_y\hat{p}_z\right) \neq 0 \tag{11.39}$$

Мы видим, что проекция спинового момента так же не коммутирует с гамильтонианом и что с результатом в уравнении 11.38 она отличается только знаком. Это означает, что если сложить эти проекции 11.38 и 11.39, то очевидно, что данный результат будет равен нулю:

$$\left[L_x + S_x, c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}\right] = 0 \tag{11.40}$$

Следовательно, по правилу сложения моментов мы получаем момент, слагаемые которого имеют разную природу, но в соответствии с теоремой об обобщенном угловом моменте мы можем ввести оператор полного момента электрона:

$$\vec{J} = \hat{\vec{L}} + \vec{S} \tag{11.41}$$

Таким образом, мы получаем, что полный момент коммутирует с гамильтонианом Дирака:

$$\left[\vec{J}, H_D\right] = 0 \tag{11.42}$$

Для дальнейших выкладок нам понадобится соотношение, называемое основным вспомогательным тождеством (ОВТ):

$$\left(\vec{\alpha}\vec{A}\right)\left(\vec{\alpha}\vec{B}\right) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{S}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \tag{11.43}$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – это любые векторы или операторы, коммутирующие с σ.

Учитывая, что матрица $\vec{\alpha}$ имеет размер 4×4 и выражается через блоки σ, то подставляя в соотношение 11.43 этот явный вид, мы получаем:

$$\left(\vec{\sigma}\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}\vec{B}\right) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) \tag{11.44}$$

Возьмем вместо $\vec{A}$ трехмерный вектор $\vec{r}$, а вместо $\vec{B}$ возьмем оператор орбитального момента:

$$\vec{A} = \vec{r} \quad \vec{B} = \hat{\vec{L}} = \vec{r}\times\hat{\vec{p}} \tag{11.45}$$

Теперь запишем векторное произведение:

$$\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\hat{\vec{p}}\right) = \vec{r}\left(\vec{r}\hat{\vec{p}}\right) - r^2\hat{\vec{p}} \tag{11.46}$$

Подставляя соотношения 11.45 и 11.46 в 11.44, получаем:

$$\vec{\sigma}\hat{\vec{p}} = \frac{1}{r}(\vec{\sigma}\vec{r})\frac{1}{r}\left\{\left(\vec{r}\hat{\vec{p}}\right) + i\frac{2}{\hbar}\left(\vec{S}\hat{\vec{L}}\right)\right\} \tag{11.47}$$

Преобразовывая уравнение 11.47, мы получим следующий член:

$$\frac{\vec{r}}{r}\hat{\vec{p}} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{11.48}$$

В этом случае ответ, который здесь получается, выглядит следующим образом:

$$\frac{\vec{r}}{r}\hat{\vec{p}} = \hat{p}_r - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r} \tag{11.49}$$

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \tag{11.50}$$

Таким образом, перейдя от $\vec{\sigma}$ к $\vec{\alpha}$, запишем ответ:

$$\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} = \frac{1}{r}(\vec{\alpha}\vec{r})\left\{\hat{p}_r + \frac{i}{r}\left(\frac{2}{\hbar}\vec{S}\hat{\vec{L}} + \hbar\right)\right\} \tag{11.51}$$

Лекция 12. Релятивистский атом водорода. Часть 1

Частица в центральном поле

Гамильтониан Дирака для частицы в центральном поле выглядит следующим образом:

$$H = c\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + mc^2\beta + V(r) \tag{12.1}$$

где $\vec{\alpha}$ – это матрица 4×4, β – диагональная матрица, $V(r)$ – это центральный потенциал, зависящий от радиальной переменной.

Ранее мы также вывели следующие соотношения:

$$\left[\vec{J}, H\right] = 0 \tag{12.2}$$

$$\vec{J} = \hat{\vec{L}} + \vec{S} \tag{12.3}$$

Запишем формулу для спинового момента:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

Преобразуем с помощью основного вспомогательного тождества (ОВТ) выражение 12.1:

$$\vec{\alpha}\hat{\vec{p}} = \frac{1}{r}(\vec{\alpha}\vec{r})\left\{\hat{p}_r + \frac{i}{r}\left(\frac{2}{\hbar}\vec{S}\hat{\vec{L}} + \hbar\right)\right\} \tag{12.5}$$

$$\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \tag{12.6}$$

Введем следующее обозначение:

$$\alpha_0 = \vec{\alpha}\vec{n} \tag{12.7}$$

где $\vec{n}$ – это единичные вектор, имеющего направление трехмерного радиус-вектора $\frac{\vec{r}}{r}$.

Учитывая вид матрицы $\vec{\alpha}$, можно вычислить квадрат матрица α_0, который будет равен единичной матрице:

$$\alpha_0{}^2 = 1 \tag{12.8}$$

Также учитывая вид матрицы $\vec{\alpha}$, можно показать, что матрица α_0 антикоммутирует с матрицей β:

$$\alpha_0\beta + \beta\alpha_0 = 0 \tag{12.9}$$

В данном случае удобно выбрать матрицу α_0, которая удовлетворяет соотношениям 12.8 и 12.9, в таком виде:

$$\alpha_0 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

Введем оператор из соотношения 12.5, который определится следующим образом:

$$\beta\left(\frac{2}{\hbar}\vec{S}\hat{\vec{L}} + \hbar\right) = \hbar\hat{K} \tag{12.11}$$

где $\hat{K}$ – это безразмерный скалярный оператор, причем этот оператор коммутирует с радиальным импульсом, с матрицей α_0 и с матрицей β:

$$\left[\hat{K}, \hat{p}_r\right] = 0 \tag{12.12}$$
$$\left[\hat{K}, \alpha_0\right] = \left[\hat{K}, \beta\right] = 0 \tag{12.13}$$

Перепишем гамильтониан Дирака из выражения 12.1, используя представленные соотношения:

$$H = c\alpha_0\hat{p}_r + ic\hbar\frac{1}{r}\alpha_0\beta\hat{K} + mc^2\beta + V(r) \tag{12.14}$$

Если теперь мы будем решать стационарное уравнение:

$$(H - E)\Psi = 0 \tag{12.15}$$

то умножив данное уравнение слева на r, в уравнении 12.14 r в знаменателе пропадет, и у нас останется оператор $\hat{K}$, который коммутирует с радиальной переменной и с оператором радиального импульса. Следовательно, возникнет ситуация разделения переменных.

Таким образом, исходную волновую функцию мы будем искать в виде функции, которая зависит только от радиальной переменной, умноженной на некоторую функцию, которая от радиальной переменной не зависит, и которая будет определяться как собственная функция оператора $\hat{K}$. Эти функции называются шаровыми функциями со спином.

Чтобы возникла ситуация разделения переменных, нужно представить функцию Ψ в виде произведения двух некоторых функций, одна из которых зависит от r, а другая не зависит:

$$\Psi = U(r)Y(r) \tag{12.16}$$

Следовательно, действие оператора $\hat{K}$ на функцию Y даст нам собственное значение, которое нам не известно. И таким образом, мы получим некоторый радиальный градиент.

В первую очередь определим собственные значения оператора $\hat{K}$. Для этого сделаем следующую процедуру:

$$\hbar^2\hat{K}^2 = \frac{4}{\hbar^2}\left(\vec{S}\hat{\vec{L}}\right)^2 + \hbar^2 \tag{12.17}$$

Раскрывая вид квадрата скалярного произведения $\left(\vec{S}\hat{\vec{L}}\right)^2$ распишем квадрат безразмерного оператора $\hat{K}$:

$$\hbar^2\hat{K}^2 = \begin{pmatrix} \left(\vec{\sigma}\hat{\vec{L}}\right)^2 + 2\hbar\sigma\hat{\vec{L}} + \hbar^2 & 0 \\ 0 & \left(\vec{\sigma}\hat{\vec{L}}\right)^2 + 2\hbar\sigma\hat{\vec{L}} + \hbar^2 \end{pmatrix} \tag{12.18}$$

В ОВТ положим, что $\vec{A} = \vec{B} = \hat{\vec{L}}$. Используя данное тождество найдем, чему равно $\left(\vec{\sigma}\hat{\vec{L}}\right)^2$ из выражения 12.18:

$$\left(\vec{\sigma}\hat{\vec{L}}\right)^2 = \hat{L}^2 + i\vec{\sigma}\left(\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}}\right) = \hat{L}^2 - \hbar\vec{\sigma}\hat{\vec{L}} \tag{12.19}$$

Теперь воспользуемся полученным соотношением 12.19 и запишем чему равен полный квадрат из выражения 12.18:

$$\left(\vec{\sigma}\hat{\vec{L}}\right)^2 + 2\hbar\sigma\hat{\vec{L}} + \hbar^2 = \left(\hat{\vec{L}} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \tag{12.20}$$

Тогда ответ будет следующим:

$$\hbar^2\hat{K}^2 = \hat{J}^2 + \frac{\hbar^2}{4} \tag{12.21}$$

Собственные значения оператора углового момента согласно теории об обобщенном угловом моменте будут равны:

$$\text{СЗ } \hat{J}^2: \quad \hbar^2 j(j+1), \qquad j = \left|l - \frac{1}{2}\right|, l + \frac{1}{2} \tag{12.22}$$

Тогда собственные значения безразмерного скалярного оператора $\hat{K}$ будут равны:

$$\text{СЗ } \hat{K}^2: \quad j(j+1) + \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{12.23}$$

Теперь для собственного значения оператора $\hat{K}$ нужно извлечь корень из собственных значений, представленных в выражении 12.23:

$$\text{СЗ } \hat{K}: \quad \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) = \pm 1, \pm 2, \ldots = k \tag{12.24}$$

Запишем оставшийся гамильтониан, который назовем радиальным, воспользовавшись тем, что известны собственные значения оператора $\hat{K}$:

$$H_r = c\alpha_0 \hat{p}_r + ic\hbar\alpha_0\beta\frac{k}{r} + mc^2\beta + V(r) \tag{12.25}$$

Теперь найдем собственные значения радиального гамильтониана:

$$(H_r - E)u = 0 \tag{12.26}$$

Учтем, что радиальный гамильтониан, стоящий в выражении 12.26, является матрицей 4×4, образованной из всех слагаемых выражения 12.25. Поэтому на самом деле u из выражения 12.26 должно рассматриваться как четырехмерный столбец:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \\ u_3(r) \\ u_4(r) \end{bmatrix} \tag{12.27}$$

Все слагаемые из выражения 12.25 нам известны. В силу этого мы можем записать данное выражение в матричном виде, данная матрица будет действовать на столбец 12.27, и тогда будет получаться тот же самый столбец, умноженный на собственное значение E. Результат данных действий получается довольно удобным, потому что тогда на самом деле система из четырех уравнение 12.27 разбивается на две подсистемы:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_3(r) \\ u_1(r) \\ u_3(r) \end{bmatrix} \tag{12.28}$$

В таком случае нужно решать только одну подсистему, т.к. обе подсистемы идентичны друг другу. Теперь вместо четырехмерного столбца мы имеем двумерный столбец, неизвестные функции которого будем обозначать как F и G:

$$\frac{1}{r}\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{cases} (\hbar c)^{-1}(E - mc^2 - V)F + \dfrac{\partial G}{\partial r} + \dfrac{k}{r}G = 0 \\ (\hbar c)^{-1}(E - mc^2 - V)G + \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{k}{r}F = 0 \end{cases} \tag{12.29}$$

Таким образом, мы получили систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций F и G.

Релятивистский атом водорода

Возьмем в качестве центрального потенциала кулоновский потенциал:

$$V = -\frac{Ze^2}{r} \tag{12.30}$$

где Z – это заряд ядра, e – это заряд электрона.

Точно так же, как и в нерелятивистском случае, посмотрим на асимптотику решения. У нас должно быть две асимптотики: когда электрон близко к ядру и когда расстояние между электроном и протоном большое.

Рассмотрим первую асимптотику, когда электрон расположен близко к ядру. Тогда из выражения 12.29 мы получим:

$$r \to 0 \quad \begin{cases} \dfrac{Ze^2}{\hbar c}\dfrac{1}{2}F + \dfrac{\partial G}{\partial r} + \dfrac{k}{r}G = 0 \\ \dfrac{Ze^2}{\hbar c}\dfrac{1}{2}G + \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{k}{r}F = 0 \end{cases} \tag{12.31}$$

У нас появилась величина $\frac{e^2}{\hbar c}$, которая называется постоянной тонкой структуры и которую обозначим следующим образом:

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \gamma \approx \frac{1}{137} \tag{12.32}$$

Если мы будем искать неизвестные функции в выражении 12.31 как степенные функции, то тогда мы можем искать решения данного выражения в виде:

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = r^s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{12.33}$$

Тогда мы получим систему из двух уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} \gamma Za + (s+k)b = 0 \\ (s-k)a - \gamma Zb = 0 \end{cases} \tag{12.34}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$-(\gamma Z)^2 - (s^2 - k^2) = 0 \tag{12.35}$$

Отсюда мы определяем s с точностью до знака:

$$s = \pm\sqrt{k^2 - \gamma^2 Z^2} \tag{12.36}$$

Очевидно, что мы должны взять положительное значение корня, потому что в противном случае асимптотика будет r^{-s}, и она будет расходиться. Также под корнем должно быть положительное значение, которое не всегда положительное, т.к. когда $Z > 137$, тогда под корнем получается отрицательное значение. Но нас не должны интересовать такие тяжелые водородоподобные атомы, потому что, когда Z большое, мы уже не имеем право рассматривать такой атом как точечную частицу.

Теперь рассмотрим вторую асимптотику при r, стремящейся к бесконечности:

$$r \to \infty \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial r} + \dfrac{1}{\hbar c}(E - mc^2)F = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{\hbar c}(E + mc^2)G = 0 \end{cases} \tag{12.37}$$

Точно так же, ка и в нерелятивистском случае, решение системы уравнений 12.37 можно искать в виде обычной экспоненты:

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = e^{\delta r}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{12.38}$$

Если подставить 12.38 в 12.37, приравнять определитель, составленный из коэффициентов полученного уравнения к нулю, то мы получим характеристическое уравнение, из которого мы получаем δ:

$$\delta = \pm\frac{1}{\hbar c}\sqrt{m^2c^4 - E^2} \tag{12.39}$$

Таким образом, мы получили неоднозначность. В данном случае мы выбираем знак «минус», т.к. на бесконечности функция должна экспоненциально спадать. Также под корнем должно быть положительное число, и, следовательно, все значения энергии, во множестве которых содержится весь спектр релятивистского атома водорода, должны удовлетворять следующему условию:

$$-mc^2 < E < mc^2 \tag{12.40}$$

Это означает, что на энергетической оси все значения энергии должны находиться в штрихованной зоне на рисунке 12.1.

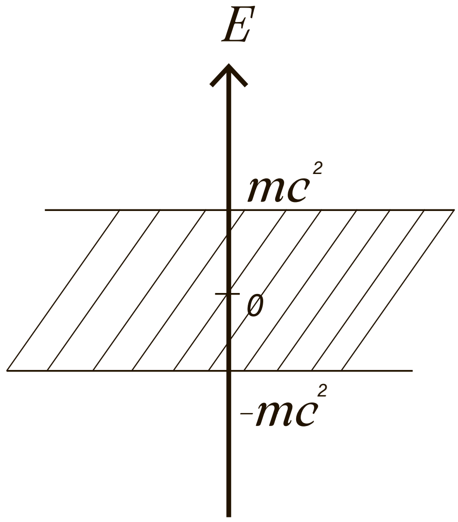

Рис. 12.1. Возможные значения энергии.

Таким образом, мы определили асимптотические решения 12.29 при малых и больших r. Теперь точно так же, как в случае нерелятивистского атома водорода, мы пишем решение, которое должно быть справедливо на всей полупрямой от нуля до бесконечности:

$$\begin{cases} F = e^{\delta r} \sum\limits_{i=0} a_i r^{i+s} \\ G = e^{\delta r} \sum\limits_{i=0} b_i r^{i+s} \end{cases} \tag{12.41}$$

В данном выражении мы видим, что при малых r имеет значение только член с $i = 0$, а при больших значениях r эти ряды должны быть устроены таким образом, чтобы они не нарушали экспоненциальные асимптотики.

Лекция 13. Релятивистский атом водорода. Часть 2

Релятивистский атом водорода

Радиальная волновая функция в силу того, что сам радиальный гамильтониан имеет четырехмерную матричную структуру, записывается следующим образом:

$$f = \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_3(r) \\ u_1(r) \\ u_3(r) \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

Следовательно, если мы будем подробно расписывать радиальные уравнения Дирака, то мы получим систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент радиальной функции f.

Оказывается, что эта система устроена таким образом, что можно рассматривать только две компоненты:

$$f = \begin{bmatrix} u_1(r) \\ u_3(r) \\ u_1(r) \\ u_3(r) \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{r}\begin{bmatrix} F(r) \\ G(r) \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

В результате мы ищем решения этой системы уравнений в таком виде:

$$\begin{cases} F = e^{\delta r}\sum\limits_{i=0} a_i r^{i+s} \\ G = e^{\delta r}\sum\limits_{i=0} b_i r^{i+s} \end{cases} \tag{13.3}$$

Величины δ и s были определены, рассматривая две асимптотики. Асимптотика при малых r дает нам:

$$s = \sqrt{k^2 - \gamma^2 Z^2} \tag{13.4}$$

При таком подходе Z должно быть достаточно малым.

Также ранее мы получили следующие соотношение:

$$K^2 = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{13.5}$$

Тем временем асимптотика при больших r дает нам:

$$\delta = -\frac{1}{\hbar c}\sqrt{m^2c^4 - E^2} \tag{13.6}$$

Из уравнения 13.6 следует, что весь энергетический спектр релятивистского атома водорода замкнут между двумя горизонтальными асимптотами каким-то образом (рис.13.1).

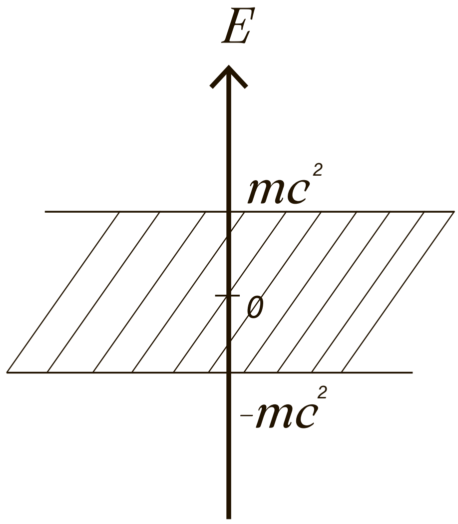

Рис. 13.1. Возможные значения энергии.

Подставляя ряды 13.3 в дифференциальное уравнение, мы получаем некоторые линейные функции:

$$\varphi_1(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}) = 0 \tag{13.7}$$
$$\varphi_2(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}) = 0 \tag{13.8}$$

Однако с данными функциями не удобно работать, поэтому обычно одну из функций умножают на что-то, другую умножают на что-то другое, затем складывают или вычитают их и получают достаточно простое выражение:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}) = 0\\ \varphi_2(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}) = 0\end{array}\right\} \quad \to \quad a_{i+1}(\dots) = b_{i+1}(\dots) \tag{13.9}$$

Следующий заключается в обрыве рядов. Если мы обрываем ряды, то тогда очевидно, что заведомо у нас асимптотики не нарушаются ни при малых r, ни при больших r. Любая конечная степень r не портит экспоненту, а при $r \to 0$ старшим членом будет r^s.

В результате мы получаем насильный обрыв, который говорит о том, что:

$$a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, \dots, a_N \neq 0, a_{N+1} = 0, \dots \quad (13.10)$$
$$b_0 \neq 0, b_1 \neq 0, \dots, b_N \neq 0, b_{N+1} = 0, \dots \quad (13.11)$$

Из этого насильного обращения в нуль коэффициентов, начиная с $N+1$, не трудно получить выражение для энергии:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1 + \frac{\gamma^2 Z^2}{(N+s)^2}} \quad (13.12)$$

Если из выражения 13.12 извлечь корень, то мы получим уровни энергий релятивистского атома водорода.

Решение задачи про релятивистский атом водорода Зоммерфельдом

Рассмотрим решение задачи про релятивистский атом водорода Зоммерфельда, который получил данное решение за 10 лет до создания квантовой механики в 1915 году.

Зоммерфельд рассматривал данную задачу как плоскую. Координаты были полярными на плоскости, потому что потенциал центральный. В итоге он записывал два следующих интеграла, первый из которых записывается в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = n_\varphi h \quad (13.13)$$

где $n_\varphi h$ – это целое кратное от постоянное Планка (перечеркнутой постоянной Планка в то время еще не существовало), где n_φ пробегает все целые значения, начиная с единицы. Поскольку p_φ является интегралом движения, этот интеграл движения является величиной углового момента.

При решении интеграла 13.13 получаем следующее выражение:

$$2\pi L = n_\varphi h \quad (13.14)$$

где L – это величина углового момента.

Второй интеграл записывается точно так же, как первый, но для радиальной переменной:

$$\oint p_r dr = n_r h \quad (13.15)$$

То, что интеграл центрический, говорит нам о том, что мы берем интеграл от r_{min} до r_{max}, а затем от r_{max} до r_{min}.

Зоммерфельд берет функцию Гамильтона, которая записывается следующим образом:

$$\mathcal{H} = p\sqrt{p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + m^2c^2} - \frac{Ze^2}{r} \tag{13.16}$$

где $\frac{Ze^2}{r}$ – это кулоновский потенциал.

Вместо p_φ берется величина углового момента с соответствующим множителем. Поскольку релятивистская функция Гамильтона является интегралом движения, и этот интеграл движения равен E:

$$\mathcal{H} = p\sqrt{p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + m^2c^2} - \frac{Ze^2}{r} = E \tag{13.17}$$

то из уравнения 13.17 мы можем выразить в явном виде радиальный импульс как функцию от радиальной переменной и другие параметры, присутствующие в этом уравнении.

В результате данных выкладок Зоммерфельд получил следующее значение энергии:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2Z^2}{\left(n_r^2 + \sqrt{n_\varphi^2 - \gamma^2Z^2}\right)^2}}} \tag{13.18}$$

Теперь сравним формулу Дирака 13.12, предполагая, что мы извлекли из нее квадрат, и формулу Зоммерфельда 13.18. Они не похожи по смыслу чисел, которые в них фигурируют, за исключением γ^2Z^2. Но тем не менее, если мы начнем численно сравнивать эти формулы, то они будут совпадать. Однако принципиальная разница заключается в том, что в теории Дирака явно учтено существование спинового момента электрона, о котором в 1915 году еще никто не слышал.

Введение новых квантовых чисел

Теперь введем другие квантовые числа в отличие от тех, которые присутствовали в формулах ранее. Во-первых, введем главное квантовое число, которое, как и в нерелятивистском случае, обозначим как n:

$$n = j + \frac{1}{2} + N \tag{13.19}$$

где N – это число членов в ряду. На самом деле данная формула похожа на соответствующую формулу для главного квантового числа в нерелятивистском случае, но с некоторыми модификациями.

Также вводится вспомогательная величина, которая зависит от величины квантового числа j:

$$\varepsilon_j = j + \frac{1}{2} - s \tag{13.20}$$

Теперь с помощью квантовых чисел 13.19 и 13.20 мы перепишем формулу для энергии. Очевидно, что тогда в отличие от нерелятивистского случая у нас возникает, что энергия определяется не только главным квантовым числом, но еще будет определяться квантовым числом полного углового момента j. Тогда формула 13.12 примет следующий вид:

$$E_{nj}^2 = \frac{m^2c^4}{1 + \frac{\gamma^2 Z^2}{\left(n - \varepsilon_j\right)^2}} \tag{13.21}$$

Очевидно, что данная формула совпадает с формулой 13.12 за исключением того, что мы ее записали, введя главное квантовое число и с помощью функции ε_j введя полное квантовое число полного углового момента.

Видно, что в отличии от нерелятивистского случая каждый уровень с определенным фиксированным значением главного квантового числа n еще расщепляется, поскольку при фиксированном квантовом числе у нас могут быть разные значения квантового числа j.

Теперь найдем корень уравнения 13.21, раскладывая его в ряд Тейлора при условии, что $\gamma Z \ll 1$, т.е. мы рассматриваем атом водорода и водородоподобные ионы гелия. Тогда мы получим следующее выражение:

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma^2 Z^2}{2n^2} - \frac{\gamma^4 Z^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \cdots \right\} \tag{13.22}$$

Данный ряд очень быстро сходится. Если учесть явное выражение для постоянной тонкой структуры, то выражение 13.22 можно переписать в следующем виде:

$$E_{nj} = mc^2 \left\{ 1 - \frac{Z^2 e^4 m}{c^2 \hbar^2} \frac{1}{2n^2} - \frac{Z^4 e^8 m}{c^2 \hbar^4} \frac{1}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \cdots \right\} \tag{13.23}$$

Первый член выражения 13.23 является энергией покоя, второй член является нерелятивистской энергией в точности, третий член, который является самым весомым из всего бесконечного ряда, дает релятивистскую поправку и величину расщепления.

Энергия релятивистского атома водорода и величина расщепления

Вернемся к рисунку 13.1. По сути дела, сама энергия атома водорода есть все выражение 13.23 за исключением энергии покоя. В виду того, что все члены выражения 13.23 достаточно малые, мы видим, что если мы пользуемся данной формулой, то все уровни энергии расположены между двумя горизонтальными асимптотами из рисунка 13.1 и прижаты к верхней горизонтальной асимптоте.

Если теперь мы будем говорить только о квантованных значениях уровней атома водорода из формулы 13.23, то очевидно, что весь квантовый спектр будет в узкой области при больших n стремиться к горизонтальной асимптоте $E = 0$, как и в нерелятивистском случае.

При фиксированном n минимальное значение j будет:

$$j_{min} = \frac{1}{2} \tag{13.24}$$

Теперь если пошагово увеличивать n, то мы дойдем до максимального значения j, которое будет иметь значение:

$$j_{max} = n - \frac{1}{2} \tag{13.25}$$

Таким образом, мы получаем ряд значений j:

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{1}{2} \tag{13.26}$$

Следовательно, при фиксированном n нерелятивистский уровень энергии расщепляется на следующее значение:

$$j_{max} - j_{min} + 1 = n \tag{13.27}$$

Таким образом, мы видим, что основное состояние, отвечающее $n = 1$ не расщепляется в теории Дирака. Все остальные расщепляются и число расщепленных уровней равно значению главного квантового числа.

Нарисуем нерелятивистское значение энергии при каком-то фиксированном n (рис.13.2) в левом столбце. Тогда в правом столбце мы будем рисовать релятивистские уровни энергии, причем мы будем ограничиваться тем, что дает второй член формуле 13.23, а значит все нерелятивистские поправки при очень хорошем приближении будут даваться третьим членом, остальные члены мы отбрасываем. В третьем члене $-\frac{Z^4e^8m}{c^2\hbar^4}\frac{1}{2n^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)$ все n уровней в зависимости от j будут располагаться таким образом, что чем больше j, тем соответствующий подуровень будет ниже. Расстояние от нерелятивистского значения в этом случае $j=\frac{1}{2}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{Z^4}{137^2}\frac{1}{4}\frac{1}{2n^4} \tag{13.28}$$

Тогда по мере роста j все подуровни будут опускаться ниже и самый глубокий подуровень будет отвечать максимальному значению j. По формуле третьего члена из уравнения 13.23 не трудно получить величину расщепления от верхнего до нижнего уровня:

$$\frac{Z^4}{137^2}\frac{n-1}{2n^4} \tag{13.29}$$

Каждый из этих расщепленных уровней является вырожденным, потому что j пробегает следующие значения:

$$j=\left|l-\frac{1}{2}\right|, l+\frac{1}{2} \tag{13.30}$$

и тогда получается, что мы берем два значения l, которые отличаются на единицу, и, следовательно, каждый из этих двух подуровней будет двукратно вырожденным за исключением максимального значения.

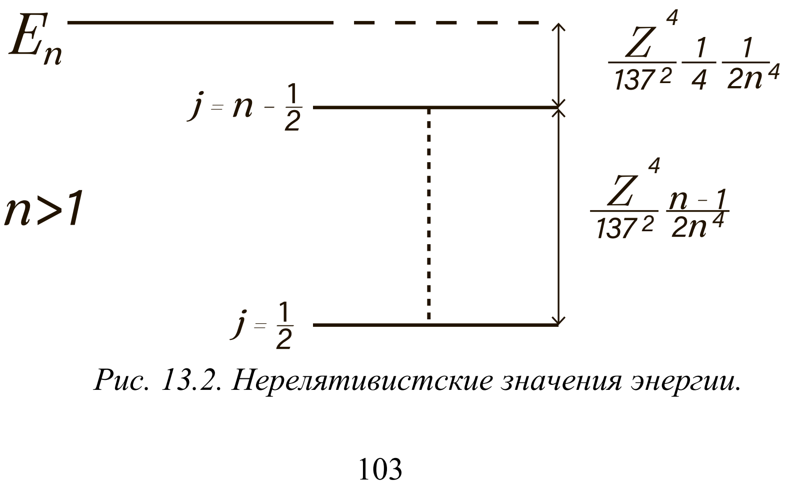

Рис. 13.2. Нерелятивистские значения энергии.

Теперь нарисуем заключительную картину уровней энергии (рис. 13.3). Левый столбец будет включать в себя нерелятивистские значения энергии. Основное состояние $n = 1$, следующие $n = 2$ и $n = 3$. В правый столбец мы будем откладывать релятивистские значения энергии и сравнивать их с нерелятивистскими.

Нижний нерелятивистский нерасщепленный уровень будет обозначаться $1s_{1/2}$. Затем переходим к уровню $n = 2$, тогда для него будет 3 расщепленных уровня. Для $n =$ 3 мы получим 5 расщепленных уровней.

На самом деле, если сравнивать полученную теоретическую картину по Дираку с экспериментом, то в эксперименте помимо эффектов Дирака присутствует множество других эффектов, которые расщепляют полученные уровни на еще одни.

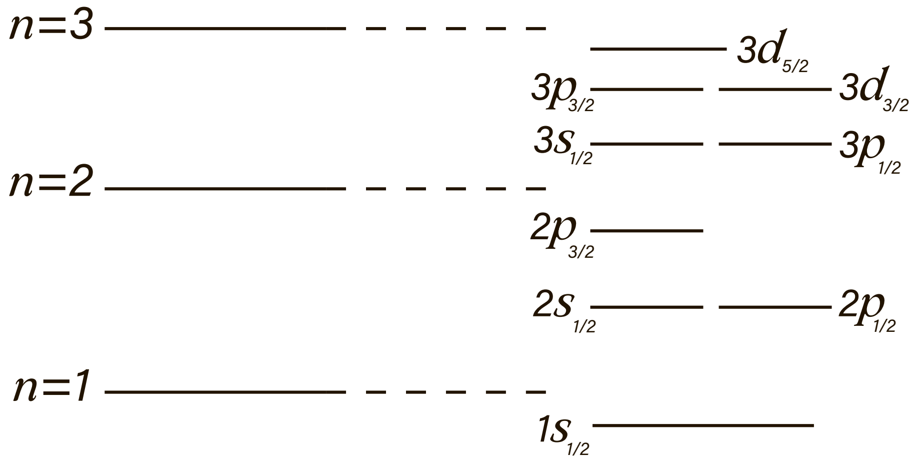

Рис. 13.3. Уровни энергии в нерелятивистском и релятивистском случае.

ХИМИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ