МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ПУАССОНОВУ И БИГАМИЛЬТОНОВУ ГЕОМЕТРИИ

КОЗЛОВ
ИВАН КОНСТАНТИНОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ. СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ, ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ, НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ VK.COM/TEACHINMSU.

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КОЩЕЕВУ АННУ ВИТАЛЬЕВНУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Содержание

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

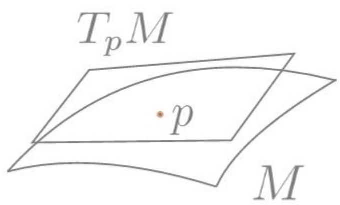
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Лекция 1. Линейная пуассонова геометрия

Введение

Для лучшего понимания курса рекомендуется предварительно изучить основы дифференциальной геометрии и симплектической геометрии.
Напомним некоторые понятия и опишем объекты изучения данного курса.

Рассмотрим произвольное многообразие, в каждой его точке определено касательное пространство (это линейное пространство, объект линейной алгебры). Введя скалярное произведение на каждом касательном пространстве, которое гладко зависит от точки p, получим риманово многообразие.



В симплектической геометрии на каждом касательном пространстве вводится кососимметричная невырожденная билинейная форма. Получаем 2-форму w на многообразии, на которую накладывается дополнительное условие замкнутости ($dw = 0$ - это условие интегрируемости, благодаря нему выполнена теорема Дарбу, и в окрестности каждой точки можно выбрать "хорошие" координаты, в которых форма приводится к каноническому виду).

В нашем курсе сначала будут рассмотрены симплектические многообразия, а затем формы, которые не являются невырожденными; наложим на последние некоторые дополнительные условия, которые позволят интегрировать такую структуру. Это будут пуассоновы многообразия.

После этого рассмотрим линейное пространство и две кососимметричные билинейные формы на нем и изучим соответствующий дифференцально-геометрический объект. Это будет пара согласованных скобок Пуассона.

Эти объекты можно рассматривать с точки зрения дифференциальной геометрии, но в нашем курсе они будут рассмотрены в связи с изучением интегрируемых систем и бигамильтоновых систем. Конечно, мы не сможем рассмотреть все вопросы, касающиеся этих объектов, в первую очередь, мы будем изучать то, как можно проинтегрировать бигамильтоновы системы.

Рассмотрим бигамильтонову систему:

$$v = \{x,\ H_1\}_A = \{x,\ H_2\}_B$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Это некоторое векторное поле, которое является гамильтоновым относительно двух согласованных скобок Пуассона. Мы хотим построить достаточно большое число первых интегралов, которые будут в би-инволюции относительно обеих этих скобок.

Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, т.е.

$$V = \mathbb{K}^n,$$

и B - кососимметричная билинейная форма на V

$$B: \ V \times V \ \to \ \mathbb{K}.$$

Кососимметричность:

$$B(u, v) = -B(v, u)$$

Билинейность:

$$B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w), \quad B(\lambda u, v) = \lambda B(u, v)$$

$$B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w), \quad B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v)$$

Для любых векторов $u, v, w \in V$ и константы $\lambda \in \mathbb{K}$.

Обычно мы считаем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, т.е.

$$V = \mathbb{R}^n \quad \text{или} \quad V = \mathbb{C}^n$$

Замечание 1.1. *Почти все утверждения (по линейной алгебре) верные для* $\mathbb{C}$, *верны и для произвольного алгебраически замкнутого поля* $\mathbb{K}$ *с* $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.

Многие утверждения можно обобщить на случай $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

Если $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$, *то понятие кососимметричности бессмысленно. Нужно рассматривать альтернированные формы:*

$$w(v, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Полезно помнить, что любая билинейная форма

$$B: \ V \times V \ \to \mathbb{K}$$

задает два линейных отображения

$$B_1: \ V \to V^*, \ \ B_2 : V \to V^*$$

по формулам

$$B_1(u)(v) := B(u, v), \ \ B_1(u)(v) := B(v, u).$$

Отображения B_1 и B_2 часто обозначают через

$$B_1(u) = B(u, \cdot), \ \ B_2(u) = B(\cdot, u).$$

Для кососимметричных форм $B_2 = -B_1$, поэтому мы будем рассматривать только отображение B_2. Для краткости будем обозначать

$$Bv := B_2 v.$$

Обратно, любое отображение

$$A : V \to V^*$$

задает билинейную форму

$$B :\ V \times V\ \to \mathbb{K}$$

по формуле

$$B(u, v) =< u, Av > . \tag{1.1}$$

В правой части стоит значение ковектора Av на векторе u.

Итак, дано линейное пространство, на котором задана кососимметричная билинейная форма. (V, B) - пространство с дополнительной структурой. Мы изучим следующие вопросы:
1. Канонический вид дополнительной структуры B;
2. Различные виды подпространств $U \subset (V, B)$;
3. Устройство группы автоморфизмов $Aut(V, B)$.

Линейная пуассонова геометрия - т.е. геометрия пространства (V, B) - легко сводится к симплектическому случаю, когда $\ker B = 0$.
Линейная симплектическая геометрия хорошо описана в
D. McDuff and D. Salamon. "Introduction to symmetric topology"
A. Cannas da Silva. "Lectures on symplectic geometry".

Линейная теорема Дарбу

Теорема 1.1. ***(Линейная теорема Дарбу)***
Для любой кососимметричной билинейной формы B на конечномерном пространстве V найдется такой базис

$$e1, \dots, e_k,\ \ f_1, \dots, f_k,\ \ g_1, \dots, g_{n-2k},$$

в котором матрица формы B имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где E_k - единичная $(k \times k)$- матрица

Матрица (2) - канонический вид формы B.

Иногда каноническим видом матрицы B называют его вид в базисе

$$e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k, \quad g_1, \ldots, g_{n-2k}.$$

Матрица B меняется следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Напомним определения, связанные с билинейными формами:

1) Ядро формы B:
$$\ker(B) = \{u \,|\, B(u, v) = 0, \ \forall v \in V\}.$$

2) Ранг формы B:
$$\operatorname{rk} B = \dim \ker B.$$
Также обозначается через $\operatorname{rank} B$.

3) Коранг формы B
$$\operatorname{corank} B = \dim V - \operatorname{rk} B.$$

Если

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-2k} \end{pmatrix},$$

то

$$\operatorname{rk} B = 2k, \quad \operatorname{corank} B = n - 2k.$$

Следствие 1.1. *Канонический вид формы B определен однозначно.*

Определение 1.1. *Множества $X, Y \subset V$ косоортогональны (или отрогональны относительно формы B), если*

$$B(u, v) = 0, \forall u \in X, \ \forall v \in Y.$$

Обозначение: $X \perp Y$ или $X \perp_B Y$.

Определение 1.2. *Косоортогональное дополнение к подпространству W:*

$$W^{\perp} = \{v \,|\, B(u, v) = 0 \ \ \forall u \in W\}$$

Увержение 1.1. *Свойства (косо)ортогонального дополнения:*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1)
$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap \ker B) \tag{4}$$

2)
$$(W^{\perp})^{\perp} = W + \ker B \tag{5}$$

3)
$$W \cap W^{\perp} = \ker(B|_W) \tag{6}$$

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольный базис $e_1, \ldots, e_k$ в $W \cap \ker B$ и дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_{k+l}$ пространства W.
$W^{\perp}$ задается системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} B(e_1, v) = 0 \\ \vdots \\ B(e_{k+l}, v) = 0 \end{cases}.$$

По определению $B(u,v) = 0$ для любого $v \iff u \in \ker B$. Поэтому первые k строк равны нулю, а остальные линейно независимы.
Получаем $\dim V - \dim(W \cap \ker B)$ урвнений в $\dim V$- мерном пространстве.

2) Очевидно, что $W + \ker B \perp W^{\perp}$, поэтому $W + \ker B \subset (W^{\perp})^{\perp}$.

Остается показать, что размерности пространств равны.

Очевидно, что $\ker B \subset W^{\perp}$, поэтому

$$\dim (W^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim W^{\perp} + \dim\ker B =$$

$$= \dim V - (\dim V - \dim W + \dim(W \cap \ker B)) + \dim\ker B =$$
$$= \dim W + \dim\ker B - \dim(W \cap \ker B) = \dim(W + \ker B).$$

3) Очевидно:
$$v \in W \cap W^{\perp} \iff v \in W,\ v \perp W \iff v \in \ker B|_W.$$

□

Доказательство. **линейной теоремы Дарбу.**
Нам будет удобнее приводить матрицу к виду (3).

Индукция по $\dim V$.
Покажем, как выделить один блок.

$$B \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Хотим найти такие вектора e_1 и f_1 что $(e_1, f_1) = 1$.
Берем произвольный вектор, не лежащий в ядре:

$$e_1 \in B, \quad e_1 \notin \ker B.$$

Существует вектор v такой что $B(e_1, v) \neq 0$.

Нормируем:

$$f_1 = \frac{v}{B(e_1, v)} \Rightarrow B(e_1, f_1) = 1.$$

Полагаем $U =< e_1, f_1 >$.
Тогда $V = U \oplus U^\perp$ и задача сводится к построению базиса в подпространстве $U^\perp$.

$\square$

Типы подпространств

Определение 1.3. *Подпространство $W \subset (V, B)$ называется*
изотропным, если $W \subset W^\perp$
коизотропным, если $W \supset W^\perp$
лагранжевым, если $W = W^\perp$
симплектическим, если $W \cap W^\perp = \emptyset$

Упражнение 1.1. *Два пространства $V_1, V_2 \subset (V, B)$ лежат в одной орбите $Aut(V, B)$ тогда и только тогда, когда совпадают следующие три числа:*

$$\dim V_i, \quad \dim(V_i \cap \ker B), \quad \dim(\ker B|_{V_i}).$$

По сути, та же самая задача:

Упражнение 1.2. *Доказать, что для любого подпространства $W \subset (V, B)$ существует базис, в котором матрицы формы*

$$B = \left(\begin{array}{cc|ccccc|c}
0 & E_k & & & & & & \\
\hline
-E_k & & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & E_i & & & \\
 & & & -E_i & 0 & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right),$$

а подпространство W соответствует выделенному в матрице блоку.

Определение 1.4. *Линейное пространство V называется симплектическим, если на нем задана невырожденная кососимметрическая билинейная форма w.*

Обычно теоремой Дарбу называют терему ниже (эквивалентную уже доказанной). Для единообразия в общем случае обе эти теоремы будем называть теоремой Дарбу.

Теорема 1.2. *Пусть (V^{2n}, w) - линейное симплектическое пространство, тогда в нем существует базис*

$$e_1, \dots, e_n,\ f_1, \dots, f_n,$$

в котором матрица формы w имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Такой базис называется симплектическим (или каноническим).
Соответствующие (линейные) координаты $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ тоже называются симплектическими.

Определение 1.5. *Пространство с кососимметрической билинейной формой (V, B) будем называть линейным пуассоновким пространством.*

В общем случае линейное пространство распадается в прямую сумму симплектического пространства и ядра.
Таким способом линейная пуассонова геометрия сводится к симплектической: нужно добавить ядро и посмотреть что получится.

$$(V, B) = (W^{2k}, w) + \ker B$$

Определение 1.6. *Линейный оператор $A : V \to V$ в линейном симплектическом пространстве (V, w) называется симплектоморфизмом, если*

$$w(Au, Av) = w(u, v). \tag{7}$$

Если фиксирован симплектический базис V^{2n}, то условие (7) перепишется в виде

$$A^T \Omega_{2n} A = \Omega_{2n}, \quad \Omega_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Группа симплектоморфизмов обозначается через $Sp(V, w)$ или $Sp(2n, \mathbb{K})$.
Последнее чаще обозначает множество матриц A, удовлетворяющих (7).

Определение 1.7. *Группа автоморфизмов пуассонова пространства $Aut(V, B)$ состоит из линейных операторов $A : V \to V$, удовлетворяющих условию*

$$B(Au, Av) = B(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Изучение группы $Aut(V, B)$ фактически сводится к симплектическому случаю.

Упражнение 1.3. *Доказать, что если*

$$B = \begin{pmatrix} \Omega_{2k} & 0 \\ 0 & 0_r \end{pmatrix}, \quad \Omega_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix},$$

то $A \in Aut(V, B)$ тогда и только тогда когда

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix},$$

где $X = Sp(2k, \mathbb{K}), \quad Y \in Mat_{2k \times r}(\mathbb{K}), \quad Z \in GL(r, 2\mathbb{K})$.

Увераждение 1.2. *Пусть A - линейный симплектический оператор. Тогда*

1)
$$\det A = 1.$$

2) *Характеристический многочлен $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ удовлетворяет соотношению*
$$P(\lambda) = \lambda^{2n} P(\frac{1}{\lambda}).$$
В частности, если λ - собственное значение A, то $\frac{1}{\lambda}$ - тоже собственное значение.

3) *Если v_λ и v_μ - собственные вектора, отвечающие собственным значениям λ и μ таким, что $\lambda\mu \neq 1$, то $w(v_\lambda, v_\mu) = 0$.*

Доказательство. 1) Матрица любого симплектического оператора удовлетворяет условию
$$A^T \Omega A = \Omega,$$
поэтому $\det A = \pm 1$.
Определитель равен 1, т.к. любой симплектический оператор сохраняет ориентацию пространства, заданную формой объема
$$\tau = \underbrace{w \wedge \ldots \wedge w}_{n}.$$
Кратко напомним, почему $\underbrace{w \wedge \ldots \wedge w}_{n}$ - форма объема.

С точки зрения тензорного анализа:
Билинейная форма на V - это тензор типа $(0, 2)$ на V.
Кососимметричная билинейная форма на V - это 2-форма на V. Поэтому их можно записывать в виде
$$B = \sum_{i<j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$
Размерность пространства k-форм на n-мерном пространстве $\dim \wedge^k(V^n) = C_n^k$. Если $k = n$, то $\dim \wedge^n(V^n) = 1$.
В этом случае достаточно найти один элемент в пространстве $\wedge^n(V^n)$ - одну форму максимальной размерности, и все формы будут ей пропорциональны.

Одно из таких отображений - определитель матрицы, тогда все другие формы ей пропорциональны.
$$\Omega(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1^1 & \ldots & u_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^1 & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}$$

Мы считаем, что

$$dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i.$$

Более обще, внешнее произведение $\wedge$ форм определяется так, что

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^k(v_1, \ldots, v_k) := \det(< \alpha^j, v_j >) =$$

$$= \begin{vmatrix} < \alpha^1, v_1 > & \ldots & < \alpha^1, v_k > \\ \vdots & & \vdots \\ < \alpha^k, v_1 > & \ldots & < \alpha^k, v_k > \end{vmatrix}.$$

В симплектических координатах $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ симплектическая форма имеет вид

$$w = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i.$$

Упражнение 1.4. *Проверить, что*

$$\underbrace{w \wedge \ldots \wedge w}_{n} = n! dx^1 \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dy^n.$$

Таким образом, это выражение действительно является ненулевой формой объема.

2) Действительно,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(\Omega^{-1}(A^T)^{-1}\Omega - \lambda\Omega^{-1}\Omega) =$$

$$= \det((A^T)^{-1} - \lambda) = \det(A^{-1} - \lambda) = (-\lambda)^{2n} \det A \det(A - \frac{1}{\lambda}E)$$

3) Пусть $\lambda\mu \neq 1$ и

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda, \quad Av_\mu = \mu v_\mu.$$

Покажем, что

$$w(v_\lambda, v_\mu) = 0.$$

Действительно,

$$w(v_\lambda, v_\mu) = w(Av_\lambda, Av_\mu) = \lambda\mu w(v_\lambda, v_\mu)$$

откуда $w(v_\lambda, v_\mu) = 0$.

□

Пример (его содержание станет понятно позже)
Пусть $n = 2$ и $A \in Sp(4, \mathbb{R})$.
Пусть все собственные значения A различны и не равны 0.

$$\lambda \in \sigma(A) \;\Rightarrow\; \lambda, \lambda^{-1}, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^{-1} \in \sigma(A).$$

Возможные спектры $\sigma(A)$:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $e^{\alpha}, e^{-\alpha}, e^{\beta}, e^{-\beta}$

2) $e^{\alpha}, e^{-\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i\beta}$

3) $e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i\beta}$

4) $e^{\alpha+i\beta}, e^{\alpha-i\beta}, e^{-\alpha+i\beta}, e^{-\alpha-i\beta}$,

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.2. *Эти 4 типа спектра соответсвуют 4 типам невырожденных особенностей (типа центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус соответственно) в теории невырожденных гамильтоновых систем.*

Можно посмотреть на $Sp(2n)$ как на группу Ли.

$Sp(2n)$ как группа Ли. Алгебра Ли $sp(2n)$

Группа Ли G = группа со структурой многообразия.

Структуры согласованы: групповая операция и взятие обратного элемента

$$G \times G \ \to \ G, \quad x, y \to xy$$

$$G \ \to \ G \quad x \to x^{-1}$$

должны быть гладкими отображениями.

Определение 1.8. *Алгебра Ли - это линейное пространство V, снабженное кососимметричной билинейной операцией*

$$[\cdot, \cdot] : \ V \times V \ \to \ V,$$

удовлетворяющей тождеству Якоби

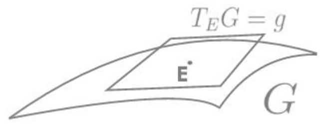
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Касательное пространство в единице $g = T_e G$ к любой группе Ли G обладает g естественной структурой алгебры Ли.

Для матричных алгебр Ли $G \subset GL(n)$ структура алгебры Ли на $T_e GL(n) = Mat_{n \times n}$ задается стандартным коммутатором

$$[A, B] = AB - BA.$$

Структура алгеблы Ли: пусть G - группа Ли, возьмем касательное пространство к G в единице $T_E G = g$ - это и будет алгебра Ли. Там можно некоторым естественным образом определить скобку $[\cdot, \cdot]$.



Пример

$$SL(n, \mathbb{R}) \subset Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$\det A = 1$, берем касательное пространство в единице - это тоже некоторое множество матриц. Можно задать коммутатор двух матриц как $[A, B] = AB - BA$.

Обозначим $T_E SL(n) = sl(n)$ - касательное пространство к $SL(n)$ в единице, алгебра Ли.

Упражнение 1: $sl(n)$ - это множество матриц, у которых след равен нулю.

Упражнение 2: коммутатор двух матриц с нулевым следом есть матрица с нулевым следом. (Это верно, т.к. $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.)

Симплектические операторы образуют группу $Sp(V, w)$.
$Sp(V, w) = Sp(2n, \mathbb{R})$ - линейная симплектическая группа.

Теорема 1.3. *1) $Sp(2n, \mathbb{R})$ - связная некомпактная группа Ли размерности $n(2n+1)$.*

2) $Sp(2n, \mathbb{R})$ диффеоморфна $U(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$.

Напомним, что унитарная группа $U(n)$ - это множество операторов, сохраняющих унитарное скалярное произведение, т.е.

$$U(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) \,\big|\, A\overline{A}^T = E\}.$$

Лемма 1.1. *Алгебра Ли $sp(V, w)$ группы $Sp(V, w)$ состоит из линейных преобразований $X : V \to V$ таких, что*

$$w(Xu, v) + w(u, Xv) = 0, \quad \forall u, v \in V.$$

В симплектическом базисе

$$sp(2n, \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X - 1^T \end{pmatrix} \,\middle|\, X_2^T = X_2,\ X_2^T = X_2 \right\}$$

Следствие 1.2.

$$\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = \dim sp(2n, \mathbb{R}) = n(2n+1)$$

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Доказательство. Любой элемент $x \in sp(2n, \mathbb{R})$ удовелтворяет тождеству

$$w(Xu, v) + w(u, Xv) = 0, \quad \forall u, v \in V.$$

Это доказывется дифференцированием тождества

$$w(A(t)u, A(t)v) = w(u, v)$$

для семейства симплектических операторов $A(t) \in Sp(2n, \mathbb{R})$.

С другой стороны, если

$$w(Xu, v) + w(u, Xv) = 0, \quad \forall u, v \in V,$$

то все операторы

$$exp(tX) = E + tX + \frac{t^2X^2}{2} + \dots$$

являются симплектическими. По свойству экспоненты

$$\frac{d}{dt}exp(tX) = Xexp(tX),$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}w(A(t)u, A(t)v) = 0.$$

□

В симплектической геометрии далеко идущей является идея о том, что любое симплектическое пространство

$$(\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dx^i \wedge dy^i)$$

является овеществлением унитарного комплексного пространства

$$(\mathbb{C}^n, \sum_j \overline{z}^j z^j).$$

В этом цикле лекций нам не потребуетя этот факт, но его стоит иметь в виду.

Упражнение:

Лемма 1.2.

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n).$$

Диффеоморфизм $Sp(2n, \mathbb{R}) \approx U(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$ это по сути теорема о полярном разложении симплектического оператора.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лемма 1.3. *Любую матрицу $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ можно единственным образом представить в виде $A = PQ$, где*
P - симплектическая, симметричная положительно определенная матрица:

$$p \in Sp(2n), \quad P^T = P, \quad P > 0.$$

Q - ортогональная матрица.

$$Q \in Sp(2n, \mathbb{R}), \quad Q^T = Q^{-1}.$$

Матрица $P = (AA^T)^{1/2}$ называется симплектической благодаря следующему утверждению:

Увереждение 1.3. *Если $P = P^T \in Sp(2n, \mathbb{R})$ - симметрияная положительно определенная матрица, то*

$$P^\alpha = Sp(2n, \mathbb{R})$$

для всех вещественных $\alpha > 0$.

$Sp(2n)$ гомотопически эквивалентна $U(n)$, поэтому у них совпадают все гомотопические группы и группы (ко)гомологий.

Следствие 1.3. *Фунаментальные группы $Sp(2n)$ и $U(n)$ изоморфны $\mathbb{Z}$.*

$$\pi_1(Sp(2n)) \approx \pi_1(U(n)) \approx \mathbb{Z}.$$

Детерминант

$$\det: \ U(n) \to S^1$$

устанавливает изоморфизм

$$\pi_1(Sp(2n)) \approx \pi_1(U(n)) \approx \mathbb{Z}.$$

Гомотопические свойства $U(n)$ также известны (см., например, Дубровин-Новиков-Фоменко, том 3)

Множество всех лагранжевых пространств образует лагранжев грассманиан $L(n)$.

Лемма 1.4. *Лагранжев грассманиан $L(n)$ является гладким $n(n+1)/2$ - мерным подмногообразием грассманиана $Gr(n, V^{2n})$.*

Любые два лагранжевых подпространства можно перевести друг в друга симплектическим преобразованием. Это действие задает на $L(n)$ структуру однородного пространства

$$L(n) = U(n)/O(n)$$

В теории групп Ли:

1) Однородное пространство - множество M вместе с заданным на нем транзитивным действием группы Ли G.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Для любой подгруппы Ли H группы Ли G множество левых смежных классов

$$M = G/H$$

обладает единственной структурой гладого многообразия т.ч. M будет однородным пространством относительно естественного действия группы G

$$g(hH) = (gh)H, \quad g, h \in G.$$

Можно исследовать топологические свойства грассманиана.

Следствие 1.4. *Фундаментальная группа лагранжева грассманиана изоморфна множеству целых чисел*

$$\pi_1(L(n)) \approx \mathbb{Z}.$$

С этого факта начинается теория, связанная с индексом Маслова.

Лекция 2. Теорема Жордана-Кронекера

Изучим геометрию конечномерного линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$, на котором задана пара кососимметричных билинейных форм A, B:

$$A, B: \ V \times V \to \mathbb{K},$$
$$A(u,v) = -A(v,u), \ \ A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 A(u_1, v_1) + \lambda_2 A(u_2, v),$$
$$B(u,v) = -B(v,u), \ \ B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v).$$

Говорят, что на V задан пучок (т.е. однопараметрическое семейство) билинейных форм

$$P = \{A_\lambda, \ \ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

где

$$A_\lambda = A + \lambda B, \ \ \lambda \in \overline{\mathbb{K}}, \ \text{ и } \ A_\infty = B.$$

Подчеркнем, что параметр λ лежит в

$$\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{KP}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Замечание 2.3. *Если не оговорено противное, считаем, что поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто,*
$\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.

Можно считать $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Единственное исключение - случай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, его мы рассмотрим отдельно.

Теорема Жордана-Кронекера

Теорема 2.4. *(Жордана-Кронекера)*
Пусть A и B - две кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то существует базис пространства V, в котором матрицы обеих форм A и B одновремнно приводятся к блочно-диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

при этом каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1) *Жорданов блок с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \lambda & 1 & & \\ & & 0 & & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \\ \hline -\lambda & & & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & -\lambda & & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) Жорданов блок с собственным значением ∞

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & 0 & & & & \end{array}\right)$$

3) Кронекеров блок

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & -1 & & & & 0 & \\ & & 0 & & & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & & 0 & \\ & & -1 & & & & & \end{array}\right)$$

Каждый кронекеров блок - это $(2k_i + 1) \times (2k_i + 1)$ блок, где $k_i \geq 0$. В частности, если $k_i = 0$, то A_i и B_i - это две 1×1 нулевые матрицы

$$A_i = (0), \quad B_i = (0).$$

Единственность разложения Жордана-Кронекера

Вначале докажем следующее утверждение

Теорема 2.5. *Типы блоков в разложении ЖК определены однозначно с точностью до перестановки.*

Введем инварианты.
Пусть $P = \{A + \lambda B\}$ - пучок кососимметричных форм на V.

1) Ранг пучка P:
$$\operatorname{rank} P = \max_{\lambda \in \mathbb{K}} \operatorname{rank} A_\lambda.$$

2) (Количество кронекеровых блоков) равно корангу пучка:
$$\operatorname{corank} P = \dim V - \operatorname{rank} P$$

Пример
Рассмотрим один кронекеров блок и сумму

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$A+\lambda B = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} & & \\ & & 0 \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ -\lambda & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ & & -\lambda \end{matrix} & \begin{matrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{k} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{k+1}$$

$$\ker(A+\lambda B) = < (0,\ldots,0 \mid (-1)^k\lambda^k,\ldots,-\lambda,1) >$$

Определение 2.9. *Форма A_λ в пучке регулярная, если*

$$\operatorname{rk} A_\lambda = \operatorname{rk} P.$$

Замечание 2.4. *Количество жордановых блоков с собственным значением λ равно*

$$\frac{1}{2}(\operatorname{rk} P - \operatorname{rk} A_{-\lambda}).$$

Подчеркнем, что нужно брать форму $A_{-\lambda} = A - \lambda B$.
Это верно и для $\lambda = \infty$, нужно взять $A_{-\infty} = B$.

Пример

Рассмотрим Жорданов блок и разность

$$A-\lambda B = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} & & & \\ & & 0 & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & \\ -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & 0 & \\ & & & \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\operatorname{corank} P = 0, \quad \operatorname{corank} A_{-\lambda} = 2.$$

Пусть $P = \{A+\lambda B\}$ - пучок кососимметричных форм на V.

1) Ядерное подпространство

$$K = \sum_{\lambda\text{ - регул.}} \ker(A+\lambda B).$$

Это сумма "больших частей" кронекеровых блоков.
Если в разложении Жордана-Кронекера кронекеровы блоки имеют размер $(2k_i+1)\times(2k_i+1)$, то

$$\dim L = \sum_{i=1}^{N} k_i$$

2) Мантийное подпространство = векторы, ортогональные ядерному подпростарнству K относительно всех форм $A + \lambda B$:

$$M = K^{\perp}.$$

Это сумма всех жордановых блоков.
Как следствие, M/K = сумма всех жордановых блоков.

Типы жордановых блоков в разложении ЖК определяются следующим образом:

Если B невырождена

$$\ker B = 0,$$

то ЖК разложение $A + \lambda B$ восстанавливается по ЖНФ оператора рекурсии

$$P = B^{-1}A.$$

У оператора рекурсии каждый жорданов блок встречается четное число раз. Если эти жордановы блоки разбить по парам, получим типы жордановых блоков для пары форм.
В общем случае можно рассмотреть сумму жордановых блоков M/K. На них можно считать, что форма B невырождена. (Если это не так, то можно заменить форму на подходящую линейную комбинацию.)

Типы кронекеровых блоков в разложении ЖК определяются следующим образом:

Можно рассмотреть полиномиальные решения степени k:

$$(A - \lambda B)v(\lambda) = 0, \quad v(\lambda) = v_0 + v_1\lambda + \ldots + v_k\lambda^k.$$

Иными словами, рассматриваются конечные цепочки

$$\begin{aligned} Bv_k &= 0, \\ Bv_{k-1} &= Av_k, \\ &\ldots \\ Av_0 &= 0. \end{aligned}$$

Векторы v_i (из всех полиномиальных решений степени $\leq k$) порождают подпространства V_k:

$$0 \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k \subset \ldots$$

При этом

$$V_0 = \ker A \cap \ker B, \qquad V_N = V.$$

Пространство V_k - это сумма "больших частей" кронекеровых блоков размера не более $(2k + 1) \times (2k + 1)$.

Для одного кронекерова $(2k+1)\times(2k+1)$ блока

$$A-\lambda B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & -\lambda & & \\ & & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 & -\lambda \\ \hline -1 & & & & & & & \\ -\lambda & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & -1 & & & 0 & & \\ & & -\lambda & & & & & \end{array}\right)$$

Уравнение $(A-\lambda B)v(\lambda)=0$ имеет единственное (с точностью до пропорциональности) решение

$$v(\lambda) = (0,\dots,0 \mid \lambda^k,\dots,\lambda,1)$$

Для жордановых блоков уравнение $(A-\lambda B)v(\lambda)=0$ не имеет решения.
Решения для кронекеровых блоков порождают $\ker(A+\lambda B)$ (как модуль над $\mathbb{K}[\lambda]$).

Размеры кронекеровых блоков выражаются через $\dim V_k$.
Пусть k_l - количество кронекеровых блоков размера $(2l+1)\times(2l+1)$. Тогда

$$\dim V_k = \sum_{l\le k} k_l(l+1).$$

Откуда

$$k_l = \frac{1}{l+1}(\dim V_l - \dim V_{l-1}), \quad k_0 = \dim V_0.$$

Утверждение о единственности разложения ЖК доказано.

Доказательство теоремы Жордана-Кронекера. Конгруэнтноть.

Доказательство теоремы Жордана-Кронекера можно найти в работе
R.C. Thompson "Pencils of complex and real symmetric and skew matrices"
опирающейся на
F.R. Gantmacher "Theory of matrices".
Мы рассмотрим только основную идею доказательства.

Будем считать, что поле $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Для произвольного алгебраически замкнутого поля доказательство точно такое же.

Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2 \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ - симметричные или кососимметричные матрицы. При этом
Матрицы A_1, A_2 либо обе симметричные, либо обе кососимметричные:

$$A_2^T = \varepsilon_1 A_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

Матрицы B_1, B_2 тоже либо обе симметричные, либо обе кососимметричные:

$$B_2^T = \varepsilon_2 B_1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Теорема 2.6. *Пучки $A_i+\lambda B_i$ конгруэнтны, т.е. существует $C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ т.ч.*

$$A_2 + \lambda B_2 = C(A_1 + \lambda B_1)C^T$$

тогда и только тогда, когда пучки $A_i+\lambda B_i$ строго эвивалентны, т.е. существуют $P, Q \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ т.ч.

$$A_2 + \lambda B_2 = P(A_1 + \lambda B_1)Q.$$

Очевидно, условие конгруэнтности сильнее условия строгой эквивалентности.

Доказательство. теоремы 2.6.
Обозначим $\Lambda_i = A_i + \lambda B_i$. Условие конгруэнтности:

$$\Lambda_2 = P\Lambda_1 Q. \tag{2.1}$$

Транспонируем его:

$$\Lambda_2^T = Q^T \Lambda_1^T P^T.$$

Так как A_i, B_i либо симметричные, либо кососимметричные, получаем

$$\Lambda_2 = Q^T \Lambda_1 P^T. \tag{2.2}$$

Из $(2.1), (2.2)$ получаем

$$P\Lambda_1 Q = Q^T \Lambda_1 P^T.$$

Получили равенство:

$$\Lambda_1 Q(P^T)^{-1} = P^{-1} Q^T \Lambda_1$$

Обозначим $U = Q(P^T)^{-1}$, тогда

$$\Lambda_1 U = U^T \Lambda_1.$$

Тогда для любой матрицы $S = f(U)$, являющейся полиномом от U, т.ч. $|S| \neq 0$ выполнено

$$\Lambda_1 S = S^T \Lambda_1. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получаем

$$\Lambda_2 = PS^T \Lambda_1 S^{-1} Q.$$

Мы хотим найти такое $S = f(U)$, чтобы выражение $\Lambda_2 = PS^T\Lambda_1 S^{-1}Q$ стало условием конгруэнтности, т.е. чтобы

$$(PS^T)^T = S^{-1}Q.$$

Последнее равенство эквивалентно $S^2 = U$.
Это можно сделать: в качестве $f(\lambda)$ можно взять интерполяционный многочлен $\sqrt{\lambda}$ на спектре U. У многозначной функции $\sqrt{\lambda}$ есть однозначная ветвь на $\sigma(U)$, т.к. $|U| \neq 0$. □

Теорема Жордана-Кронекера для линейных отображений.

Теорема 2.7. *Рассмотрим два конечномерных линейных пространства U и V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ с $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$. Тогда для любых двух линейных отображений*

$$A, B\colon U \to V$$

существуют базисы U и V, в которых матрицы пучка $P = \{A + \lambda B\}$ имеют блочно-диагональный вид:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & & & \\ & A_1 + \lambda B_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k + \lambda B_k \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $0_{m,n}$ - это нулевая $m \times n$ матрица, а каждая пара блоков A_i, B_i имеет один из следующих видов:

1) Жорданов блок с собственным значением $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2) Жорданов блок с собственным значением ∞

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

3) Горизонтальный кронекеров блок

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Вертикальный кронекеров блок

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 2.5. *1) Количество и типы жордановых блоков в разложении ЖК определены однозначно с точностью до перестановки.*

2) Нулевой блок $0_{m,n}$ рассматриветсяся как объединение
m вертикальных 1×0 кронекеровых блоков и
n горизонтальных 0×1 кронекеровых блоков.

Пусть $A + \lambda B$ - пучок прямоугольных матриц.
Введем несколько инвариантов, которые полностью определяют разложение ЖК пучка $A + \lambda B$:

1) *Минимальные индексы столбцов.*
Рассмотрим уравнение
$$(A + \lambda B)x(\lambda) = 0. \tag{2.5}$$
Возьмем фундаментальный ряд решений $x_1(\lambda), \dots, x_p(\lambda)$ уравнения (2.5). А именно, возьмем максимально возможное число линейно независимых решений т.ч.
степень ε_1 решения $x_1(\lambda)$ минимально возможна,
степень $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ решения $x_2(\lambda)$ минимально возможна среди всех решений линейно независимых с $x_1(\lambda)$,
и т.д.

Степени $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \ldots \leq \varepsilon_p$ это минимальные индексы столбцов пучка $A + \lambda B$.

2) *Минимальные индексы строк.*
Определяются аналогично минимальным индексам столбцов, но нужно рассматривать уравнение
$$(A^T + \lambda B^T)y(\lambda) = 0. \tag{2.6}$$
Минимальные индексы строк
$$\eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_q$$
пучка $A + \lambda B$ - это степени фундаментального ряда решений $y_1(\lambda), \dots, y_q(\lambda)$ уравнения (2.6).

3) *Элементарные делители.*
Пусть $\operatorname{rank}(A + \lambda B) = r$.

Обозначим через $D_j(\lambda, \mu)$ НОД всех миноров j-го порядка матрицы $\mu A + \lambda B$.
Инвариантные многочлены пучка $A + \lambda B$ - это числа
$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_r(\lambda, \mu)}{D_{r-1}(\lambda, \mu)}, \dots, i_r(\lambda, \mu) = \frac{D_1(\lambda, \mu)}{D_0(\lambda, \mu)} = D_1(\lambda, \mu).$$
Несложно показать, что каждый следующий инвариантный многочлен - делитель предыдущего:
$$i_{s+1}(\lambda, \mu) \mid i_s(\lambda, \mu).$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Разложим инвариантные многочлены на неприводимые множители

$$\begin{matrix} i_1 = (\phi_1)^{c_1} \dots (\phi_s)^{c_s} \\ i_2 = (\phi_1)^{d_1} \dots (\phi_s)^{d_s} \\ \dots \\ i_r = (\phi_1)^{l_1} \dots (\phi_s)^{l_s} \end{matrix} \tag{2.7}$$

Элементарные делители пучка $A + \lambda B$ - это все отличные от единицы многочлены среди

$$(\phi_1)^{c_1}, \dots, (\phi_s)^{l_s}$$

в разложении (2.7).

Можно доказать следующее утверждение (см. Гантмахер "Теория матриц")

Увержение 2.4. *Элементраные делители квазидиагональной матрицы*

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{pmatrix}$$

суть объединение элементарных делителей $A(\lambda)$ и элементарных делителей $B(\lambda)$.

Несложно проверить, что

1) Каждому минимальному индексу столбцов ε соответствует горизонтальный

$$\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$$

кронекеров блок.

2) Каждому минимальному индексу строк η соответствует вертикальный

$$(\eta + 1) \times \eta$$

кронекеров блок.

3) Каждому жорданову $m \times m$ блоку с собственным значением λ_0 соответсвует элементарный делитель

$$(\lambda + \lambda_0 \mu)^m.$$

Теорема 2.8. *(Кронекер)*
Два произвольных пучка прямоугольных матриц $A_1 + \lambda B_1$ и $A_2 + \lambda B_2$ (одного и того же размера) строго эквивалентны тогда и только тогда, когда у них совпадают все минимальные индексы (строк и столбцов) и одни и те же элементарные делители.

Теорема ЖК для кососимметричных билинейных форм легко следует из теоремы ЖК для операторов:
Из-за косисимметричности минимальные индексы строк = минимальные индексы столбцов.
Элементарные делители - квадраты, поскольку у кососимметричных матриц четный ранг и определен корень из определителя (пфаффиан).

Пфаффиан.

Определение 2.10. *Пфаффиан кососимметрчной матрицы A - это многочлен от ее элементов $Pf(A)$ т.ч.*

$$Pf^2(A) = \det A.$$

Для нечетного n определитель и пфаффиан кососимметричной матрицы $n \times n$ равны 0. Для кососимметричных матриц размера $2n \times 2n$ пфаффиан - многочлен степени n.

Примеры

1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = a^2, \quad Pf(A) = a.$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = (af - be + dc)^2, \quad Pf(A) = af - be + dc$$

Формулы для пфаффиана

Рассмотрим бивектор

$$w = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Тогда

$$\frac{1}{n!} w^{\wedge n} = Pf(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{2n}.$$

Явная формула:

$$Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}.$$

Замечание 2.6. *Коэффициенты матрицы $A + \lambda B$ лежат в кольце многочленов $\mathbb{K}[\lambda]$, а не в поле. Тем не менее, определитель и пфаффиан - многочлены от элементов матрицы. Поэтому все формулы достаточно доказать над $\mathbb{C}$.*

Увереждение 2.5. *Чтобы доказать существование пфаффиана достаточно доказать, что $Pf(CAC^T) = \det C \cdot Pf(A)$ для любой матрицы C порядка n, вычислить его для матрицы A в каноническом виде.*

Доказательство. При замене базиса

$$(e_1, \ldots, e_m) = (e_1', \ldots, e_m')C$$

матрицы меняются по закону

$$A' = CAC^T,$$

а формы объема по формуле

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_m = (\det C) e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_m.$$

С другой стороны,

$$w^{\wedge m} = m! Pf(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_m = m! Pf(A') e'_1 \wedge \ldots \wedge e'_m,$$

что доказывает фомулу. □

Лекция 3. Билагранжев грассманиан

Увеpждение 3.6. *Оператор P (рекурсивный оператор) самосопряжен относительно обеих форм A и B:*

$$A(Pu,v)=A(u,Pv),\qquad B(Pu,v)=B(u,Pv).$$

Доказательство. Напомним определение оператора P. Пусть $\ker B=0$.
Тогда можно определить $P=B^{-1}A:\ V\to V$.
Другими словами, это оператор со свойством $B(u,Pv)=A(u,v)$.

По кососимметричности $B(u,Pv)=A(u,v)=-A(v,u)=-B(v,Pu)=B(Pu,v)$. Итак, получаем условие самосопряженности оператора P относительно формы B.

Самосопряженность относительно A:

$$A(u,Pv)=-A(Pv,u)=-B(Pv,Pu)=B(Pu,Pv)=A(Pu,v)$$

Получили условие самомосопряженности оператора P относительно формы A. □

Тогда теорему Жордана-Кронекера можно переформулировать для самосопряженного оператора на симплектическом пространстве.

Теорема Жордана-Кронекера для самосопряженного оператора на симплектическом пространстве.

Теорема 3.9. *Для любого самосопряженного оператора P в симплектическом пространстве (V^{2n},B) над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ существует базис, в котором матрицы оператора P и формы B блочно-диагональны:*

$$P=\begin{pmatrix}P_1&&&\\&P_2&&\\&&\ddots&\\&&&P_k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_k\end{pmatrix}$$

и каждая пара блоков P_i и B_i имеет вид

$$P_i=\left(\begin{array}{cccc|cccc}\lambda&&&&&&&\\1&\lambda&&&&&&\\&\ddots&\ddots&&&&0&\\&&1&\lambda&&&&\\\hline&&&&\lambda&1&&\\&&&&&\lambda&\ddots&\\&&0&&&&\ddots&1\\&&&&&&&\lambda\end{array}\right)\quad B_i=\left(\begin{array}{cccc|cccc}&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&0&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\\\hline-1&&&&&&&\\&-1&&&&&&\\&&\ddots&&&&0&\\&&&-1&&&&\end{array}\right)$$

Замечание 3.7. *Разложение ЖК зависит лишь от ЖНФ оператора рекурсии P.*

Поэтому для любого поля $\mathbb{K}$ (не обязательно алгебраически замкнуто) эквивалентны следующие условия:

1) *Самосопряженный оператор P в симплектическом пространстве (V, B) приводится к каноническому виду.*

2) *Все собственные значения оператора P принадлежат полю $\mathbb{K}$:*

$$\sigma(P) \subset \mathbb{K},$$

3) *Характеристический многочлен оператора P разлагается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$:*

$$\det(P - \lambda E) = \prod_j (\lambda_j - \lambda).$$

Доказательство теоремы ЖК в симплектическом случае намного проще.

Шаг 1. Рассмотрим пространство V в прямую сумму корневых подпространств оператора P

$$V = \oplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V^\lambda.$$

Здесь

$$V^\lambda = \{v \in V \mid (P - \lambda E)^N v = 0\},$$

где N достаточно большое.

Увереждение 3.7. *Корневые подпространства, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны относительно формы B:*

$$V^\lambda \perp_B V^\mu, \lambda \neq \mu.$$

Доказательство. Если $\lambda \neq \mu$, то ограничение оператора $(P - \lambda E)$ на V^μ является невырожденным оператором.
Поэтому для любого вектора $v \in V^\mu$ существует вектор $w = (P - \lambda E)^{-1} v \in V^\mu$.
Для любых $e_\lambda \in V^\lambda, e_\mu \in V^\mu$ имеем

$$B(e_\lambda, e_\mu) = B(e_\lambda, (P - \lambda E)(P - \lambda E)^{-1} e_\mu) = B((P - \lambda E)e_\lambda, (P - \lambda E)^{-1} e_\mu) = \ldots =$$

$$= \ldots = B((P - \lambda E)^m e_\lambda, (P - \lambda E)^{-m} e_\mu) = 0.$$

□

Замечание 3.8. *Корневые пожпространства P ортогональны, даже если*

$$\sigma(P) \nsubseteq \mathbb{K}$$

Это легко показать, взяв алгебраическое замыкание $\mathbb{K}$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Перейдем к случаю нильпотентного оператора: для каждого $\lambda \in \mathbb{K}$ рассмотрим ограничение оператора $P - \lambda E$ на соответствующее корневое подпространство V^λ.

Шаг 2. Пусть тепеь P - нильпотентный оператор

$$P^m = 0, \quad P^{m-1} \neq 0.$$

Выделим один блок.
Рассмотрим произвольный вектор $e_1 \in V$ такой, что $P^{m-1}e_1 \neq 0$. Положим $e_i = P^{i-1}e1$.
Существует вектор $f_n \in V$ такой что

$$B(e_i, f_n) = \delta^i_n.$$

Положим $f_i = P^{n-i} f_n$.
Тогда вектора e_i, f_j образуют базис жорданова блока.

В базисе e_i, f_j матрицы ограничения оператора P и формы B на подпространство $< e_i.f_j >$ равны

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что

$$B(e_i, e_j) = 0, \quad B(f_i, f_j) = 0.$$

Увеждение 3.8. *Пусть P - самосопряженный оператор в симплектическом пространстве (V, w). Тогда для любого вектора $v \in V$ подпространство*

$$< v, Pv, \dots, P^N v, \dots >$$

изотропно.

Существование вектора f_n т.ч.

$$B(e_i, f_n) = \delta^i_n$$

легко следует из следующих двух простых утверждений из линейной алгебры.

Увеждение 3.9. *Любое изотропное подпространство симплектического пространства содержится в некотором лагранжевом подпространстве.*

Увеждение 3.10. *Любой базис $e_1, \dots, e_n$ лагранжева подпространства $L \subset (V, w)$ можно расширить до симплектического базиса e_i, f_j пространства (V, w):*

$$w(e_i, f_j) = \delta^i_j.$$

Теорема о приведении самосопряженного оператора в симплектическом пространстве к каноническому виду полностью доказана.

Вещественная теорема Жордана-Кронекера.

Теорема 3.10. *Любые две кососимметрические билинейные формы A и B на вещественном конечномерном векторном пространстве V можно одновременно привести к блочно-диагональному виду, при этом каждый блок будет*

1) *либо кронекеровым блоком,*
2) *либо жордановым блоком с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,*
3) *либо вещественным жордановым блоком с комплексным собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$:*

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \Lambda & E & & \\ & & & & & \Lambda & \ddots & \\ & & 0 & & & & \ddots & E \\ & & & & & & & \Lambda \\ \hline -\Lambda & & & & & & & \\ -E & -\Lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -E & -\Lambda & & & & \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & E & & & \\ & & & & & E & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E \\ \hline -E & & & & & & & \\ & -E & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -E & & & & \end{array}\right)$$

Здесь Λ и E - это 2×2 матрицы $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажем вещественную теорему Жордана-Кронекера в случае, когда

1) форма B невырождена
$$\ker B = 0,$$
2) и у оператора рекурсии P есть только одна пара комплексно сопряженных собственных значений
$$\alpha \pm i\beta.$$

Первое доказательство

1) Комплексифицировать пространство
$$V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$$
2) Применить комплексную теорему Жордана-Кронекера.

Указание 1. Если $e_1 + i\hat{e}_1, \ldots, e_n + i\hat{e}_n,\ \ f_1 + i\hat{f}_1, \ldots, f_n + i\hat{f}_n$ - базис комплексного жорданова блока с собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$, то базис соответствующего вещественного жорданова блока:
$$\sqrt{2}e_1,\ \sqrt{2}\hat{e}_1,\ \ldots\ \sqrt{2}e_n,\ \sqrt{2}\hat{e}_n,\quad \sqrt{2}f_1,\ -\sqrt{2}\hat{f}_1,\ \ldots\ \sqrt{2}f_n,\ -\sqrt{2}\hat{f}_n,$$

Указание 2. Векторы $e_j + i\hat{e}_j$ и $f_k + i\hat{f}_k$ ортогонально сопряжены векторам $e_l - \hat{e}_l$ и $f_m - \hat{f}_m$, так как они принадлежат различным корневым подпространствам оператора $P = B^{-1}A$.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Второе доказательство

Доказательство основывается на следующем утверждении

Увреждение 3.11. *В каждом корневом подпространстве оператора P, соответствующем паре комплексно сопряженных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, существует комплексная структура J, самосопряженная относительно A и B.*

Эта комплексная структура J - полупростая часть оператора $\dfrac{P-\alpha E}{\beta}$.

Напоминание из курса алгебры:
Линейный оператор A полупрост, если у любого A-инвариантного подпространств есть дополнительное A-инвариантное подпространство.
Если поле алгебраически замкнуто, то полупростые операторы суть диагонализируемые.
Оператор N нильпотентен, если $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Аддитивное разложение Жордана-Шевалле линейного оператора A:

$$A = S + N,$$

где S - полупростой, а N - нильпотентный оператор, и $[S, N] = 0$.

Если поле совершенно, то
аддитивное разложение Жордана-Шевалле определено однозначно
S и N являются полиномами от A без свободного члена.

Любое поле нулевой характеристики (в частности, поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$) и любое конечное поле совершенны.

Для одного вещественного жорданова блока:

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \Lambda & & & & & & & \\ E & \Lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & E & \Lambda & & & & \\ \hline & & & & \Lambda & E & & \\ & & & & & \Lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & E \\ & & & & & & & \Lambda \end{array}\right), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Комплексная структура

$$J = \left(\begin{array}{cccc|cccc} J_0 & & & & & & & \\ & J_0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & J_0 & & & & \\ \hline & & & & J_0 & & & \\ & & & & & J_0 & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_0 \end{array}\right), \quad J_0 = \frac{\Lambda - \alpha E}{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3.9. *J является комплексной структурой, т.е. $J^2 = -E$, так как характеристический полином $\dfrac{P - \alpha E}{\beta}$ равен $(t^2+1)^n$.*

Оператор J самосопряжен, так как он является полиномом от P.

Схема второго доказательства:

Продолжить формы A и B до комплексных билинейных форм на V:

$$A^{\mathbb{C}}(u,v) = A(u,v) - iA(u,Jv), \quad B^{\mathbb{C}}(u,v) = B(u,v) - iB(u,Jv).$$

Применить комплексную теорему Жордана-Кронекера.

Указание. Если $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ - базис комплексного жорданова блока с собственным значением $\lambda = \alpha_i\beta$, то базис соответствующего вещественного блока:

$$e_1,\ -Je_1,\ \ldots,\ e_n,\ -Je_n,\ f_1,\ Jf_1,\ \ldots,\ f_n,\ Jf_n.$$

Группа автоморфизмов.

Алгебра Ли группы автоморфизмов описана в
P. Zhang "Algebraic Properties of Compatible Poisson Structures" .

Отметим, что элементы группы автоморфизмов $C \in Aut(V, A, B)$ задаются уравнениями

$$C^T AC = A, \quad C^T BC = B.$$

Сответствующая алгебра Ли задается системой линейных уравнений

$$C^T A + AC = 0, \quad C^T B + BC = 0,$$

которые несложно решить.

Теорема 3.11. *(P. Zhang)*
Пусть пространство (V, A, B) состоит из

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) *кронекеровых блоков размера* $(2k_i + 1) \times (2k_i + 1)$, *где* $i = 1, \ldots, q$ *и*

$$1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_q,$$

при этом кратности кронекеровых блоков равны $m_1, \ldots, m_l$;

2) *жордановых блоков с собственным значением* λ_s, *где* $s = 1, \ldots, p$, *а половины размеров равны*

$$\begin{gathered} k_1(\lambda_1), \ldots, k_{s_1}(\lambda_1) \\ \ldots \\ k_1(\lambda_p), \ldots, k_{s_p}(\lambda_p), \end{gathered}$$

где $k_1(\lambda_t) \geq k_2(\lambda_t) \geq \ldots \geq k_{s_t}(\lambda_t)$.
Тогда

$$\dim Aut(V, A, B) = \sum_{t=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{s_t} (2q + 4j - 1) k_j(\lambda_t) \right) + \sum_{j=1}^{q} (2k_j + 1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} m_i(m_i - 1).$$

Замечание 3.10. *Общий ответ для* $Aut(V, A, B)$ *или* $aut(V, A, B)$ *легко получается, если посчитать их для суммы двух блоков.*

Также нахождение $Aut(V, A, B)$ упрощается, если помнить, что $Aut(V, A, B)$ сохраняет:

1) все инвариантные подпространства, в частности:
ядерное подпространство K,
мантийное подпространство M,
ядра всех форм $\ker A_\lambda$;

2) оператор рекурсии P (на сумме жордановых блоков M/K);

3) и соотношение
$$Au = Bv.$$

Пусть $e_1, \ldots, e_k, f_0, \ldots, f_k$ - канонический базис кронекерова k-блока.
Тогда в базисе $e_k, \ldots, e_1, f_k, \ldots, f_0$ матрицы форм A и B имеют вид

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & 1 & 0 \\ & 0 & & \iddots & \iddots & \\ & & & 1 & 0 & \\ \hline & & -1 & & & \\ & \iddots & 0 & & & \\ -1 & \iddots & & & 0 & \\ 0 & & & & & \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & 0 & 1 \\ & 0 & & \iddots & \iddots & \\ & & & 0 & 1 & \\ \hline & & 0 & & & \\ & \iddots & -1 & & & \\ 0 & \iddots & & & 0 & \\ -1 & & & & & \end{array}\right)$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Тогда элементы $Aut(V, A, B)$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\lambda} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\lambda} & & & \\ \hline b_{k+1} & \dots & b_{2k} & \lambda & & \\ b_k & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & b_{k+1} & & & \ddots \\ b_1 & \dots & b_k & & & \lambda \end{array}\right), \quad b_i \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Следствие 3.5. *Для одного кронекерова блока (V, A, B) подпространство $U \subset V$ является $Aut(V, A, B)$-инвариантным тогда и только тогда, когда либо оно содержит ядерное подпространство $K \subset U$, либо оно содержится в нем $K \supset U$.*

Пусть теперь пространство (V, A, B) состоит из q кронекеровых $p-$блоков

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & E_q & 0 \\ & \iddots & \iddots & \\ E_q & 0 & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & -E_q \\ & \iddots & 0 \\ -E_q & \iddots & \\ 0 & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & 0 & E_q \\ & \iddots & \iddots & \\ 0 & E_q & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & 0 \\ & \iddots & -E_q \\ 0 & \iddots & \\ -E_q & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

Тогда элементы $Aut(V, A, B)$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \Lambda^{-T} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \Lambda^{-T} & & & & \\ \hline D_{k+1} & \dots & \dots & D_{2k} & \Lambda & & & \\ D_k & \ddots & & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ D_2 & & \ddots & D_{k+1} & & & & \ddots \\ D_1 & D_2 & \dots & D_k & & & & \Lambda \end{array}\right),$$

где $\Lambda \in GL(q, \mathbb{K})$, а матрицы $D_i = \Lambda S_i$, где S_i - произвольные симметричные $q \times q$ матрицы.

Пусть (V, A, B) - сумма l жордановых блоков с собственным значением 0. Переставим базис, чтобы

$$P = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ Id_{2l} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & Id_{2l} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} & & & \Omega_{2l} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \\ \Omega_{2l} & & & \end{pmatrix}, \quad \Omega_{2l} = \begin{pmatrix} 0 & Id_l \\ -Id_l & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $Aut(V, A, B)$ состоит из операторов вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ A_2 & A_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_n & A_{n-1} & \dots & A_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1 \in Sp(2l, \mathbb{K})$, и матрицы $B_i = A_1^{-1} A_i$ удовлетворяют условию

$$B_2^T \Omega_{2l} + \Omega_{2l} B_2 = 0,$$
$$\dots$$
$$B_n^T \Omega_{2l} + B_{n-1}^T \Omega_{2l} B_2 + \ldots + B_2^T \Omega_{2l} B_{n-1} + \Omega_{2l} B_n = 0.$$

Замечание 3.11. *Для суммы l одинаковых жордановых блоков $Sp(2l, \mathbb{K})$ - полупростая часть группы $Aut(V, A, B)$:*

$$Aut(V, A, B) \approx Sp(2l, \mathbb{K}) \times H,$$

где H - разрешимая группа.
Это не случайно - на пространстве V/N^{n-1} можно задать кососимметрическую билинейную форму по формуле

$$B_{n-1}(u, v) = B(u, N^{n-1} v),$$

где $N = P - \lambda E$ - нильпотентная часть оператора рекурсии.

Так мы получаем инвариантно определенное симплектическое пространство размерности $2l$.

Теорема 3.12. *(P. Zhang)*
Пусть пространство (V, A, B) состоит из l_i жордановых k_i-блоков с собственным значением 0, где $i = 1, \ldots, N$ и $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$.
Рассмотрим базис пространства V, в котором матрицы оператора $P = B^{-1} A$ и формы B имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_N \end{pmatrix},$$

прр этом блоки P_i и B_i равны

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ E_{2l_i} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_{2l_i} & 0 \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} & & & Q_{2l_i} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \\ Q_{2l_i} & & & \end{pmatrix},$$

где $Q_{2s} = \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{pmatrix}$, а E_s - это единичная $s \times s$ матрица.

Тогда алгебра Ли группы автоморфизмов $Aut(V, A, B)$ состоит из элементов вида

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c}
C_1^{1,1} & & & & & & & & \\
C_2^{1,1} & C_1^{1,1} & & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & C_1^{1,2} & & & \dots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\
C_n^{1,1} & \dots & \dots & \dots & C_1^{1,1} & C_m^{1,2} & \dots & C_1^{1,2} & \\
\hline
C_1^{2,1} & & & & & C_1^{2,2} & & & \\
\vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & & \dots \\
C_m^{2,1} & & C_1^{2,1} & & & C_m^{2,2} & \dots & C_1^{2,2} & \\
\hline
 & & \dots & & & & \dots & & \dots
\end{array}\right)$$

где $C_s^{i,j}$ - это $l_i \times l_j$ матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$(C_s^{i,j})^T Q_{2l_j} + Q_{2l_i} C_s^{i,j} = 0.$$

В частности элементы диагональных блоков $C_s^{i,i}$ должны лежать в симплектической группе Ли $sp(2l_i, \mathbb{K})$, так как

$$(C_s^{i,i})^T Q_{2l_i} + Q_{2l_i} C_s^{i,i} = 0.$$

Типы подпространств.

Определение 3.11. *Подпространство $U \subset (V, A + \lambda B)$ называется*
инвариантным, если оно $Aut(V, A, B)$-инвариантно;
би-изотропным, если оно изотропно относительно всех форм пучка $A + \lambda B$;
максимально би-изотропным, если оно не содержится ни в каком большем би-изотропном подпространстве;
билагранжевым, если оно максимально изотропно относительно почти всех форм пучка $A + \lambda B$;
допустимым, если $AU = BU$.

Теорема 3.13. *Пусть P - нильпотентный самосопряженный оператор на симплектическом пространстве (V, B).*
Тогда любое подпространство $W \subset V$ инвариантное относительно группы автоморфизмов $Aut(V, B, P)$ имеет вид

$$W = \oplus(\ker P^{k_i} \cap \operatorname{Im} P^{l_i}).$$

Следующее замечание ограничивает количество и типы слагаемых.

Обозначим через V_j^k сумму всех жордановых блоков высоты (ровно) k;
Далее обозначим через $U^m(V_j^k)$ подпространство V_j^k, состоящее из всех векторов высоты m.

Замечание 3.12. *Пусть пространство (V, B, P) является суммой жордановых блоков высоты $k_1, \dots, k_N$, где $k_1 > k_2 > \dots > k_N$.*
Тогда любое инвариантное подпространство имеет вид

$$U^{m_1}(V_j^{k_1}) \oplus \dots \oplus U^{m_n}(V_j^{k_N}),$$

где

$$0 \le m_1 - m_2 \le k_1 - k_2$$
$$\dots$$
$$0 \le m_{N-1} - m_N \le k_{N-1} - k_N.$$

Увержение 3.12. *Любое билагранжево подпространство - максимально би-изотропно.*

Максимально би-изотропное подпространство $L \subset (V, P)$ билагранжево тогда и только тогда, когда

$$\dim L = \dim V - \frac{1}{2} \operatorname{rank} P.$$

Определение 3.12. *Билагранжев грассманиан $BLG(V, P)$ = множество всех билагранжевых подпространств (это подмножество Грассманиана $Gr_k(V)$).*

Билагранжев грассманиан $BLG(V, P)$ никогда не пуст (можно взять "половины блоков" в ЖК разложении).

Рассмотрим ядерное пространство

$$K = \sum_{k-\text{регул.}} \ker A_\lambda.$$

K - би-изотропное подпространство (т.е. изотропное для всех форм A_λ)
в кронекеровом случае K - единственное билагранжево пространство.

Билигранжиан не зависит от кронекеровых блоков.

Теорема 3.14. *Подпространство $L \subset (V, P)$ билагранжево тогда и только тогда, когда*
L содержит ядерное подпространство K
L/K билагранжево в M/K.

Отметим, что

$$K \subset L \subset M.$$

Рассмотрим жорданов случай. Пусть $\ker B = 0$. Рассмотрим оператор рекурсии

$$P = B^{-1}A.$$

Теорема 3.15. *Если форма B невырождена, то подпространство $L \subset (V, P)$ билагранжево $\Leftrightarrow$ L лагранжево относительно B и инвариантно относительно $P = B^{-1}A$:*

$$PL \subset L.$$

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть L лагранжево относительно B и P-инвариантно. По определению оператора рекурсии P

$$A(u, v) = B(u, Pv).$$

Поэтому L изотропно относительно всех форм $A + \lambda B$ и

$$\dim L = \frac{1}{2} \dim V.$$

Следовательно L билагранжево.

($\Rightarrow$) Пусть L билагранжево.
Тогда L лагранжево (т.е. максимально изотропно) относительно B и для любых $u, v \in L$

$$B(u, Pv) = A(u, v) = 0.$$

Следовательно, $Pv \in L$, т.е. L инвариантно относительно P. □

Любое изотропное пространство продолжается до билагранжева.
Не любое би-изотропное пространство продолжается до билагранжева.

Теорема 3.16. *Би-изотропные пространства $U \subset (V, A, B)$, которые содержатся в некотором билагранжевом подпространстве, можно описать следующим образом*

1) *Если форма B невырождена и $P = B^{-1}A$, то U может быть продолжено до билагранжева подпространства $\Leftrightarrow$ P-инвариантное подпространство U_P, порожденное U, би-изотропно.*

2) *В общем случае U может быть расширено до билагранжева подпространства тогда и только тогда, когда*
U содержится в подпространстве-мантии M.
Подпространство $U/(U \cap K)$ би-изотропно в M/K.

Пространство V распадается в сумму корневых подпространств P

$$V = \oplus_\lambda V_\lambda,$$

которые ортогональны относительно P.

Теорема 3.17. *В жордановом случае любое билагранжево подпространство $L \subset (V, P)$ есть прямая сумма билагранжевых подпространств L_λ в корневых подпространствах V_λ:*

$$L = \oplus_\lambda L_\lambda.$$

Теорема 3.18. *Если $(V, A + \lambda B)$ состоит из одного жорданова блока с собственным значением 0, то для любого лагранжева подпространства $L \subset (V, A + \lambda B)$*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

существует базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$, в котором матрицы A и B как в теореме ЖК:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right), \tag{3.1}$$

а билагранжево подпространство L имеет вид

$$L =< e_s, e_{s+1}, \dots, e_n, f_1, \dots, f_{s-1} > \tag{3.2}$$

где $s \leq \frac{n}{2}$. Более того, число s определено однозначно.

Пусть N - нильпотентный оператор на V. Будем говорить, что
Вектор v имеет высоту m, если

$$N^m v = 0, \quad N^{m-1} v \neq 0.$$

Подпространство $U \subset V$ имеет высоту m, если m - максимум высот векторов в U.

Для жорданова блока в качестве N мы берем нильпотентную часть оператора рекурсии $N = P - \lambda E$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Поместим базис в таблицу

e_1	f_1
e_2	f_{n-1}
$\vdots$	$\vdots$
e_{n-1}	f_2
e_n	f_1

Тогда билагранжевы подпространства имеют вид

$$\begin{array}{|c|}\hline e_1\\ \hline e_2\\ \hline e_3\\ \hline \vdots\\ \hline e_{n-1}\\ \hline e_n\\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline e_2 & \\ \hline e_3 & \\ \hline \vdots & \\ \hline e_{n-1} & \\ \hline e_n & f_1\\ \hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline e_3 & \\ \hline \vdots & \\ \hline e_{n-1} & f_2\\ \hline e_n & f_1\\ \hline\end{array},\ \dots\ \begin{array}{|c|c|}\hline e_{\frac{n-1}{2}} & \\ \hline e_{\frac{n+1}{2}} & f_{\frac{n-1}{2}}\\ \hline \vdots & \vdots\\ \hline e_n & f_1\\ \hline\end{array}\ \text{или}\ \begin{array}{|c|c|}\hline e_{\frac{n}{2}} & f_{\frac{n}{2}}\\ \hline \vdots & \vdots\\ \hline e_n & f_1\\ \hline\end{array}$$

Рассмотрим два случая.

1) Высота L максимальна. Тогда существует $e_1 \in L$ высоты n.
Построим базис жорданова блока. Положим $e_i = N^{i-1}e_1$.
Выберем поизвольный $f_n \in V$ т.ч.

$$B(e_i, f_n) = \delta_n^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Положим $f_{n-i} = N^i f_n$.
Так как N самосопряжен (относительно B).

$$B(e_i, f_j) = B(e_i, N^{n-j}e_i, f_n) = B(N^{n-j}e_i, f_n) = B(e_{n-j+1}, f_n) = \delta_j^i.$$

Это гарантирует, что векторы $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ образуют базис жорданова блока.
L имеет требуемый вид

$$L =< e_1, \dots, e_n >,$$

поскольку L имеет размерность n и P-инвариантно.

2) Высота L не максимальна.
Возьмем максимальное s такое что $L \subset \operatorname{Im} N^s$. Переходя к ортогональным дополнениям, получаем, что $L \supset \ker N^s$.
Выберем произвольный e_1 такой что вектор $N^s e_1 = e_{s+1}$ является вектором наибольшей высоты в L. Построим базис ЖК $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ как на шаге 1.
Пространство L имеет требудемый вид

$$L =< e_s, e_{s+1}, \dots, e_n, f_1, \dots, f_{s-1} >,$$

потому что оно содержит $\ker N^s$, e_s и P-инвариантно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 3.13. *Пусть P - жорданов пучок на V. Билагранжево подпространство $L \subset BLG(V,P)$ разложимо, если существует разложение V в прямую сумму жордановых блоков*

$$V = J_1 \oplus \ldots \oplus J_N,$$

т.ч. билагранжево пространство тоже разлагается в прямую сумму

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_N,$$

где каждое $L_i = L \cap J_i$ - билагранжево в J_i.

Не все билагранжевы пространства разложимы.

Пример.
Рассмотрим сумму жордановых 1- и 3- блоков с собственным значением 0

$$(V,P) = J_{0,2} \oplus J_{0,6}.$$

Тогда в базисе $e_{i,j}, f_{i,j}$ ЖК разложения пространство

$$L =< e_{1,3}, f_{1,1}, e_{1,2} + e_{2,1}, f_{1,2} - f_{2,1} >$$

биалгранжево, но не разложимо. Действительно, подпространство $L + \ker P / \ker P$ двумерно, что невозможно для разложимых пространств.

Количество орбит $Aut(V,P)$ в $BLG(V,P)$ может быть бесконечным.
Например это так для суммы жордановых 1-, 3-, ..., $2n+1$-блоков при $n > 5$:

$$(V,P) = J_{0,2} \oplus \ldots \oplus J_{0,4n+2}.$$

Рассмотрим билагранжевы подпространства $BLG_U(V)$, содержащие $Aut(V,P)$-инвариантное подпространство

$$U = \sum_{i=1}^{n-1} (\ker P^i \cap \in P^i) \tag{3.3}$$

В ЖК базисе

$$U = \oplus_{i=2}^{n} < e_{i,2i-1}, \ldots, e_{i,i+1},\ f_{i,1}, \ldots, f_{i,i-1} > \tag{3.4}$$

Так как U би-изотропно

$$U^{\perp} = U \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} < e_{i,i}, f_{i,i} > \tag{3.5}$$

С одной стороны $\dim BLG_U(V)$ велика.

$$\dim BLG_U(V) = \dim BLG\, U^{\perp}/U.$$

Одна из форм =0, поэтому билагранжевы в U = лагранжевы в $U^{\perp}/U$. Поэтому

$$\dim BLG_U(V) = \dim \Lambda(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

С другой стороны группа $Aut(V,P)$ действует на $\dim BLG_U(V)$ как маленькая группа, так как она сохраняет все подпространства

$$< e_{i,i}, f_{i,i} >$$

в $U^{\perp}/U$. Получаем подгруппу в произведении n симплектических групп:

$$\dim \left(\underbrace{Sp(2) \times \ldots \times Sp(2)}_{n} \right) = 3n.$$

Теорема 3.19. *Для одного жорданова блока $J_{0,2n}$ с собственным значением 0:*

1) *билагранжев грассманиан распадается на $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ орбит действия $Aut(J_{0,2n})$;*

2) *только одна орбита открыта. Билагранжево подпространство L общего положения (т.е. принадлежит открытой орбите $Aut(J_{0,2n})$) $\Leftrightarrow$ существует вектор v максимальной высоты т.ч.*

$$L =< v, Pv, \ldots, P^{n-1}v >$$

3) *открытая орбита имеет размерность n и имеет естественную структуру суммы $n-1$ расслоений гиперплоскостей $\mathcal{O}(1)$ над $\mathbb{K}P^1 = \Lambda(1)$.*

Если вектор имеет вид

$$v = p_1 e_1 + \ldots p_n e_n + q_1 f_1 + \ldots + q_n f_n,$$

то соответвующее билагранжево подпространство порождается строками

$$\begin{pmatrix} p_1 & \ldots & p_n & q_1 & \ldots & q_n \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \\ & & p_1 & q_n & & \end{pmatrix}$$

Несложно построить атлас из двух карт, для которых $p_1 \neq 0$ или $q_n \neq 0$.

Теорема 3.20. *$Aut(V,P)$-инвариантные билагранжевы подпространства существуют $\Leftrightarrow$ размерности всех жордановых блоков делятся на 4.*

*Более того, это инвариантное билагранжево подпространство единственно - это сумма
ядерного подпространства K
и подпространств*

$$\ker(P - \lambda E)^{2k}$$

для каждого жорданова $4k \times 4k$ блока с собственным значением λ (и оператором рекурсии P на нем).

Лекция 4. Пуассоновы многообразия

Пуассоновы многобразия. Бивектор Пуассона.

Пусть M - гладкое одномерное вещественное многообразие.

Соглашения и обозначения:

C^∞ - пространство гладких функций на M.
Кососимметричные тензоры типа $(k, 0)$ называем k-векторами.
Выполнено правило суммирования Энштейна (суммирование по повторяющимся верхним и нижним индексам). Например,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

Подробнее о пуассоновых многообразиях:

J.-P. Dufour, N.T. Zung "Poisson structures and their normal forms"
Cannas da Silva, A. Weinstein "Geometric models for noncommunicative algebras"

Определение 4.14. *Скобкой Пуассона на многобразии M называется кососимметричное билинейное отображение*

$$\{\cdot,\cdot\}: \ C^\infty(M)\times C^\infty(M),$$

$$f, g \to \{f, g\}$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

и тождеству Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Билинейность здесь означает $\mathbb{R}$-билинейность:

$$\{cf, g\} = c\{f, g\}, \quad \{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$$

для любых функций $f, g, h \in C^\infty(M)$ и любого скаляра $c \in \mathbb{R}$.

Мы написали условие линейности лишь по одному аргументу. Оно эквивалентно билинейности из-за кососимметричности

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Определение 4.15. *Многообразие M, снабженное скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, называется пуассоновым многообразием.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Аналитические и голоморфиные скобки Пуассона определяются аналогично.

Если $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, то можно рассматривать пуассоновы алгебры (об этом позже).

Пример
На любом многобразии M можно ввести нулевую скобку Пуассона:

$$\{f, g\} = 0, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Увержение 4.13. *Для любого билинейного отображения*

$$\{\cdot,\cdot\}: \ C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

удовлетворяющего тождеству Лейбница

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

существует такое тензорное поле типа $(0, 2)$ $\mathcal{A}^{ij}$ *на многообразии* M*, что*

$$\{f, g\} = \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{4.1}$$

Любая скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ задается некоторым бивектором Пуассона

$$\mathcal{A} = \sum_{i<j} A^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

А именно, для любых функций f и g выполнено

$$\{f, g\} = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Скобку Пуассона с бивектором $\mathcal{A}$ также обозначают через $\{,\}_\mathcal{A}$.

Для доказательства утверждения 4.13 воспользуемся леммой Адамара

Лемма 4.5. *Адамара*
Пусть $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *- гладкая функция определенная в выпуклой окрестности* U *точки* $0 \in \mathbb{R}^n$*.*

Тогда существуют такие гладкие функции

$$g_1, \ldots, g_n: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

определенные в U*, что для всех* $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ *имеет место равенство*

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0) + \sum_{i=1}^n x^i g_i(x^1, \ldots, x^n), \ \ g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

Доказательство. Лемма Адамара доказывается при помощи формулы Ньютона-Лейбница:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)dt = \sum_{i=1}^n x^i g_i(x),$$

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)dt.$$

□

Доказательство. (существование бивектора Пуассона)
Фиксируем произвольную точку $p \in M$. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ - локальные координаты в окрестности p.
Будем считать, что p - начало координат. Общий случай доказывается аналогично.

Докажем, что в точке p

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\{x^i, g\}.$$

$\{f(0), g\} = f(0)\{1, g\} = 0$, потому что по тождеству Лейбница

$$\{1, g\} = \{1 \cdot 1, g\} = \{1, g\} + \{1, g\}.$$

Скобка со вторым слагаемым дает нужное выражение:

$$\left\{x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0), g\right\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\{x^i, g\}.$$

Скобка с третьим слагаемым тоже равна нулю (в точке p):

$$\{x^i x^j h_{ij}, g\} = x^i\{x^j h_{ij}, g\} + x^j h_{ij}\{x^i, g\} = 0.$$

□

Упражнение 4.5. *Показать, что тензорное поле $\mathcal{A}^{ij}$ является бивектором Пуассона тогда и только тогда, когда оно*
кососимметрично $\mathcal{A}^{ij} = -\mathcal{A}^{ji}$.
удовлетворяет следующему тождеству

$$\sum_{\textit{цикл. } i,j,k} \mathcal{A}^{is}\frac{\partial \mathcal{A}^{jk}}{\partial x^s} = 0. \tag{4.2}$$

Тождество (4.2) - это записанное в локальных координатах тождество Якоби.

Упражнение 4.6. *Проверить, что следующие бивекторные поля задают скобку Пуассона.*

1) Бивекторное поле

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x^{2i-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{2i}}$$

на $\mathbb{R}^{2n}(x^1, \dots, x^n)$ *(и, как следствие, любой бивектор с постоянными коэффициентами).*

2) Любое бивекторное поле

$$\mathcal{A} = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

на $\mathbb{R}^2(x,y)$.

Далее мы укажем более эффективные способы проверки тождества Якоби.

Следующее утверждение также легко доказывается при помощи леммы Адамара.

Увержение 4.14. $\mathbb{R}$*-линейное отображение*

$$\Pi : \underbrace{C^\infty(M) \times \ldots \times C^\infty(M)}_{k} \to C^\infty(M)$$

задает k*-вектор* $\Pi^{i_1,\dots,i_k}$ *по формуле*

$$\Pi(f_1, \dots, f_n) = \Pi^{i_1,\dots,i_k} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x^{i_k}}$$

тогда и только тогда, когда Π *кососимметрично и удовлетворяет тождеству Лейбница:*

$$\Pi(fg, f_2, \dots, f_k) = f\Pi(g, f_2, \dots, f_k) + g\Pi(f, f_2, \dots, f_k).$$

Используя это утверждение, легко показать следующее.

Упражнение 4.7. *Пусть* Π *- бивекторное поле на* M*. Зададим "скобку Пуассона" по формуле:*

$$\{f, g\} := \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Показать, что отображение

$$\Lambda(f, g, h) = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$$

определяет 3-вектор на M*.*

3-векторное поле Λ называется якобиатором.

Упражнение 4.8. *Проверить, что в локальных координатах*

$$\Lambda^{ijk} = \sum_{i<j<k} \left(\sum_{\text{цикл. } i,j,k} \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^s} \mathcal{A}^{sk} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Гамильтоновы векторные поля.

Вспомним определение касательного векторного поля как дифференциальный оператор.

Определение 4.16. *Пусть M - гладкое многообразие, тогда векторное поле v на нем - это $\mathbb{R}$-линейный оператор на пространстве гладких функций*

$$v: \ C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

$$f \to v(f),$$

удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$v(fg) = fv(g) + v(f)g.$$

При помощи леммы Адамара можно показать, что в локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ любой такой дифференциальный оператор имеет вид

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

На функции $f \in C^\infty(M)$ он действует по правилу

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Для любой гладкой функции H на пуассоновском многообразии $(M, \{,\})$ отображение

$$v_H: \ f \to \{f, H\}$$

удовлетворяет тождеству Лейбница.

Поэтому v_H является векторным полем на M.

Определение 4.17. *Векторное поле*

$$v_H = \{\cdot, H\},$$

называется гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом H.

Если скобка Пуассона задается бивекторным полем

$$\mathcal{A} = \sum_{i<j} \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j},$$

то координаты гамильтонового векторного поля равны

$$v_H^i = \mathcal{A}^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Напомним, что алгебла Ли - это линейное пространство V, снабженное кососимметричной билинейной операцией

$$[\cdot, \cdot]: \ V \times V \to V,$$

(называемой коммутатором или скобкой Ли) удовлетворяющей тождеству Якоби

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

1) Для любого линейного пространство V множество его линейных преобразований $End(V)$ является агеброй Ли, где скобка Ли - это коммутатор операторов

$$[A, B] := AB - BA.$$

2) Пространство касательных векторных полей $Vect(M)$ образуют алгебру Ли относительно коммутатора векторных полей

$$[u, v](f) := u(v(f)) - v(u(f)).$$

3) Любая скобка Пуассона $\{,\}$ задает на $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли.

Пусть $(M, \mathcal{A})$ - пуассоново многообразие.

Увернждение 4.15. *Отображение*

$$f \to -v_f$$

является гомоморфизмом из алгебры Ли гладких функций $C^\infty(M)$ в алгебру Ли векторных полей $Vect(M)$.
Иными словами, для любых $f, g \in C^\infty(M)$ выполнено

$$[v_f, v_g] = -v_{\{f,g\}}.$$

Доказательство. Это следствие из тождества Якоби:

$$[v_f, v_g](h) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} = -v_{\{f,g\}}(h).$$

□

Подчеркнем, $f \to v_f$ - это антигомоморфизм алгебр Ли.

Замечание 4.13. *В некоторых статьях и учебниках некоторые формулы пишут с другим знаком. Это стандарнтная ситуация для симплектической (и пуассоновой) геометрии.*

Симплектические многообразия.

Пусть V - конечномерное линейное пространство.

Увернждение 4.16. *Если $G = (g_{ij})$ - невырожденный тензор типа $(0, 2)$ на V, то элементы обратной матрицы $G^{-1} = (g^{ij})$, задаваемые формулой*

$$\sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j,$$

образуют тензор типа $(0, 2)$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Тензор типа $(0,2)$ - это билинейная форма

$$G:\ V\to V^*.$$

Обратное отображение

$$G^{-1}:\ V^*\to V$$

является билинейной формой на V^*, т.е. тензором типа $(0,2)$.
Здесь $V^{**}=V$, т.к. V конечномерно. □

Определение 4.18. *Симплектическое многообразие (M,w) - это многообразие с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой w.*

Симплектические многообразия всегда четномерны

$$\dim M = 2n,$$

т.к. 2-формы на кососимметрических пространствах вырождены.

Форма w называется симплектической структурой на M^{2n}.
Условия на w:

1) Замкнутость:
$$dw=0.$$

2) Невырожденность - форма
$$\underbrace{w\wedge\ldots\wedge w}_{n}$$
не обращается в ноль ни в какой точке $x\in M$.

Покажем, что симплектическая структура суть невырожденная пуассонова структура.
Пусть w - невырожденная 2-форма.

Определим скобку Пуассона по формуле

$$\{f,g\}=\Omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j},\ \text{где}\ \ \Omega^{ij}w_{jk}=\delta^i_k. \tag{4.3}$$

Увержение 4.17. *Невырожденная 2-форма w замкнута*

$$dw=0$$

тогда и только тогда, когда скобка (4.3) удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0.$$

Так же как и на пуассоновском многообразии, любая гладкая функция H на симплектическом многообразии (M^{2n}, w) задает векторное поле по формуле

$$X_H = w^{-1} dH.$$

Эквивалентно, X_H можно задать формулой

$$w(u, X_H) = u(H).$$

Поле X_H называется гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом H. Это поле также иногда называют косым градиентом и обозначают $\operatorname{sgrad} H$.

Следующее утверждение вытекает из определения гамильтоновых векторных полей.

Увержение 4.18. *Для любых функций f и g на симплектическом многообразии (M, w) выполнено тождество:*

$$w(v_f, v_g) = v_f(g) = -\{f, g\}$$

Замечание 4.14. *В общем случае, дифференциал k-формы η задается по формуле*

$$dw(v_0, \dots, v_k) = \sum_i (-1)^i v_i(w(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k)$$

Эту формулу легко проверить:

1) *обе части выражения кососимметричны и $C^\infty(M)$ - линейны по аргументам v_i,*

2) *формула выполнена для базисных касательных векторов $v_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$.*

Доказательство. (Симплектические структуры суть невырожденные пуассоновы.)

Воспользуемся известной формулой для dw.

$$dw(v_1, v_2, v_3) = v_1 w(v_2, v_3) + w(v_1, [v_2, v_3]) + v_2 w(v_3, v_1) +$$

$$+ w(v_2, [v_3, v_1]) + v_3 w(v_1, v_2) + w(v_3, [v_1, v_2]).$$

Равенство $dw = 0$ достаточно проверять для гамильтоновых векторных полей:

$$v_1 = v_f, \quad v_2 = v_g, \quad v_3 = v_h. \tag{4.4}$$

Действительно, равенство $dw = 0$ достаточно показать в произвольной точке $x \in M$. В точке x дифференциал dw зависит лишь от значения векторов v_i в этой точке.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

И мы всегда можем добиться выполнения (4.4) в одной точке x.

Проверим, что "замкнутость переходит в тождество Якоби" .
Для краткости через $\Sigma_{\text{цикл.}}$ будем обозначать сумму по циклической перестановке f, g и h,

$$0 = dw(v_f, v_g, v_h) = \Sigma_{\text{цикл.}}[v_f(w(v_g, v_h)) + w(v_f, [v_g, v_h])] =$$

$$= \Sigma_{\text{цикл.}}[-v_f(\{g, h\}) - v_g(v_h(f)) + v_h(v_g(f))] = \Sigma_{\text{цикл.}}[\{f, \{g, h\}\} - v_g(v_h(f)) + v_h(v_g(f))] =$$

$$= 3(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}).$$

Утверждение доказано. $\square$

Лекция 5. Примеры пуассоновых мнообразий

Скобка Ли-Пуассона.

Вначале рассмотрим скобки Пуассона на линейном пространстве V^n. Важнейшие примеры скобок Пуассона:

1) Скобки с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i<j} A^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Любой такой бивектор - бивектор Пуассона.

2) Скобка Ли-Пуассона (линейная скобка):

$$\sum_{i<j} \left(\sum_k C_{ij}^k x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Когда линейный бивектор задает скобку Пуассона?

Заметим, что любая линейная скобка Пуассона

$$\sum_{i<j} \left(\sum_k C_{ij}^k x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

задает на пространстве линейных функций V^* структуру алгебры Ли

$$\{x_i, x_j\} = C_{ij}^k x_k.$$

Верно и обратное (линейные скобки Пуассона и алгебры Ли суть одно и то же).

Увереждение 5.19. *На двойственном пространстве* $\mathfrak{g}$ *к любой конечномерной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *существует естественная линейная скобка Пуассона, заданна формулой*

$$\{f, g\}(x) = < x, [df|_x\,, dg|_x] > . \tag{5.1}$$

В формуле (5.1)*:*
$x \in \mathfrak{g}^*$.
f, g *- функции на* $\mathfrak{g}$.
мы отождествляем $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ *и рассматриваем дифференциалы функций* df, dg *как элементы* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Фиксируем произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ - произвольный базис $\mathfrak{g}$.
Пусть

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $x_1, \ldots, x_n$ - соответствующие координаты на $\mathfrak{g}^*$.

2) $C^k_{\mathfrak{g}}$ - структурные константы $\mathfrak{g}$:

$$[e_i, e_j] = C^k_{ij} e_k.$$

Легко видеть, что в координатах скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$< x, [df|_x\,, dg|_x] >= \sum_{i,j} \left(\sum_k C^k_{ij} x_k \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Эта скобка задается бивектором, поэтому для нее остается лишь проверить тождество Якоби.
Его достаточно проверять для линейных функций. Для них

$$\{x_i, x_j\} = C^k_{ij} x_k$$

и тождества Якоби для скобки Ли-Пуассона и для алгебры $\mathfrak{g}$ - одно и то же уравнение C^k_{ij}. □

Теорема Дарбу-Вайнштейна.

Теорема 5.21. *(Дарбу-Вайнштейна)*
В окрестности произвольной точки x пуассонова многообразия M^n существуют локальные координаты

$$p^1, \ldots, p^m, q^1, \ldots, q^m, s^1, \ldots, s^k, \quad (2m + k = n),$$

в которых скобка Пуассона имеет вид

$$\{p^i, q^j\} = \delta^i_j, \quad \{s^i, s^j\} = \phi^{ij}(s^1, \ldots, s^k),$$

где все функции ϕ^{ij} обращаются в ноль в точке x.
Все остальные попарные скобки координатных функций равны нулю.

Иными словами, бивектор Пуассона имеет вид

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i<j} \phi^{ij}(s) \frac{\partial}{\partial s^i} \wedge \frac{\partial}{\partial s^i}.$$

Матрица бивектора Пуассона в теореме Дарбу-Вайнштейна

$$\begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(s) \end{pmatrix}.$$

При этом $\Phi(s(x)) = 0$.

Покажем, используя теорему Дарбу-Вайнштейна, что любое пуассоново многообразие распадается в дизъюнктвное объединение симплектических.

Симплектические листы.

Гамильтоновы векторные поля X_H на пуассоновых многообразиях $(M^n, \mathcal{A})$ заметают симплектические листы.

Определение 5.19. *Две точки на пуассоновом многообразии назовем эквивалентными, если их можно соединить ломаной из отрезков фазовых кривых гамильтоновых полей.*
Классы эквивалентных друг другу точек называются симплектическими листами пуассонова многообразия.

Следующее утверждение следует из теоремы Дарбу-Вайнштейна.

Теорема 5.22. *Каждый симплектический лист $\mathcal{F}$ пуассонова многообразия (M, Π) - это погруженное симплектическое многообразие.*
Симплектическая структура на листах задается формулой

$$w(X_f, X_g) = -\{f, g\}.$$

Пуассонова структура Π полностью определяется симплектическими структурами на симплектических листах.

Действительно, если в координатах (p^i, q^i, s^i) матрица бивектора Пуассона - как в теореме Дарбу-Вайнштейна:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(s) \end{pmatrix}, \quad \Phi(s(x)) = 0,$$

то гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H в точке x имеет вид

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}, -\frac{\partial H}{\partial p}, 0\right).$$

Локально симплектический лист $\mathcal{F}_s$ проходящий через x:

$$s^i = 0.$$

Разберем нексколько примеров.

Алгебра Ли $sl(2, \mathbb{R})$. В базисе

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e + f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e - f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

выполнены соотношения

$$[h, e + f] = 2(e - f), \quad [h, e - f] = 2(e + f), \quad [e + f, e - f] = -2h.$$

Поэтому в базисе $h, e + f, e - f$ структурные константы имеют вид

$$C_3^{12} = 2, \quad C_2^{13} = 2, \quad C_1^{23} = -2.$$

Скобка Пуассона-Ли в том же базисе $h, e+f, e-f$ равна

$$\mathcal{A}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2z & 2y \\ -2z & 0 & -2x \\ -2y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{rk}\mathcal{A} = \begin{cases} 0, & \text{в точке } (0,0,0), \\ 2, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Увержение 5.20. *Проверить, что все гамильтоновы векторные поля на $sl(2,\mathbb{R})$ сохраняют функцию*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Указание: $df \in \ker \mathcal{A}^{ij}$.

Орбиты коприсоединенного представления:

1) Точка $(0,0,0)$

2) Связные компоненты поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = const$ все начала координат.

Алгебра Ли $so(3,\mathbb{R})$
$so(3,\mathbb{R})$ состоит из кососимметричных матриц 3×3.
В базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

выполнены соотношения

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k.$$

Поэтому в базисе e_1, e_2, e_3 структурные константсы имеют вид

$$C_3^{12} = 1, \quad C_2^{13} = -1, \quad C_1^{23} = 1$$

Скобка Пуассона-Ли равна

$$A^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{rk}\mathcal{A} = \begin{cases} 0, & \text{в точке } (0,0,0), \\ 2, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Орбиты коприсоединенного представления - сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = const$$

(Включая точку $(0,0,0)$).

Примеры симплектических многообразий:

1) Кокасательное расслоение (T^*M, w_0).

2) Кэлеровы многообразия, в частности
Линейное комплексное пространство $(\mathbb{C}^n), h(z) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{z}^i z^i)$.
Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$.

3) Симплектические листы пуассоновых многообразий
орбиты коприсоединенного представления.

Подробнее о примерах симплектических многообразий можно прочитать в
D. McDuff and D. Salamon "Introduction to symplectic toplogy"
A. Cannas da Silva "Lectures on symplectic geometry"

Кокасательное расслоение.

Кокасательное расслоение T^*B к любому гладкому многообразию B^n обладает естественной симплектической структурой.

В канонических координатах p_i, q^i, где
q_i - координаты на базисе B,
p_i - двойственные координаты в слое (т.е. это ковектора в базисе dq^i).
каноническая 2-форма имеет вид

$$w_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i.$$

Форму w_0 также называют 1-формой Лиувилля.
Каноническая 2-форма на T^*B - это дифференциал канонической 1-формы

$$w_0 = d\gamma_0.$$

То, что w_0 имеет вид $\sum\limits_i dp_i \wedge dq^i$ следует из следующего утверждения.

Упражнение 5.9. *Показать, что в канонических координатах p_i, q^i каноническая 1-форма γ_0 имеет вид*

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i.$$

Орбиты коприсоединенного представления.

Присоединенное представление группы Ли G на ее касательном пространстве $\mathfrak{g}$:

$$Ad:\ G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$Ad_{\mathfrak{g}} x = d_e(\rho(g))(x)$$

определяется как дифференциал в единице действия группы G.

$$\rho(g): \ G \to Diff\, G$$

$$\rho(g): \ h \to ghg^{-1}$$

Сопряженное к нему действие на коалгебре - коприсоединенное представление:

$$Ad^* : G \to GL(\mathsf{g}^*),$$

$$< x, Ad^*(\mathsf{g})(\xi) >=< Ad(\mathsf{g}^{-1})x, \xi > .$$

Дифференциалы Ad и Ad^* в единице $e \in G$ задают
присоединенное представление алгебры Ли g на себе

$$ad = d_e Ad : \ \mathsf{g} \to GL(\mathsf{g})$$

и коприсоединенное представление алгебры Ли g на своем двойственном пространстве

$$ad^* = d_e Ad^* : \to GL(\mathsf{g}^*).$$

Присоединенное и коприсоединенное представление можно определить и для абстрактной алгебры Ли:
присоединенное представление определяется при помощи коммутатора

$$ad_x(y) = [x, y]$$

коприсоединенное представление - двойственное к присоединенному

$$< x, ad_x^*(\xi) >= - < ad_y(x), \xi >$$

Упражнение 5.10. *Орбиты коприсоединенного представления группы Ли G - симплектические листы скобки Ли-Пуассона на g^*.*

Пусть G - группа Ли, g^* - соответствующая коалгебра. $\xi \in \mathsf{g}^*$ - произвольная точка в ней.
Для любого элемента $\xi \in \mathsf{g}^*$ соответствующая орбита коприсоединенного представления

$$O_\xi = \{Ad^*_{\mathsf{g}}\xi \mid \mathsf{g} \in G\}$$

является гладким (погруженным) многообразием.

Касательное пространство к орбите:

$$T_\xi O_\xi = \{ad^*_x \xi \mid x \in \mathsf{g}\}$$

Симплектическая структура на O_ξ (форма Кириллова) определяется по следующей формуле:

$$w(ad^*_{a_1}(\xi), ad^*_{a_2}(\xi)) = \xi([a_1, a_2]).$$

Алгебра Пуассона.

Определение 5.20. *Алгебра Пуассона - это векторное пространство $\mathcal{F}$ над полем $\mathbb{K}$, снабженное двумя операциями: умножение и скобка Пуассона $\{,\}$ - удовлетворяющим следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{F}, \cdot)$ - это ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра;

2) $(\mathcal{F}, \{,\})$ является алгеброй Ли (т.е. $\{,\}$ кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби);

3) Выполнено тождество Лейбница (т.е. $\{x, \cdot\}$ является дифференцированием):

$$\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} + y \cdot \{x, z\}.$$

Пусть $\}$ - произвольная конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$.

Тогда мы можем ввести структуру пуассоновой алгебры на алгебре многочленов $\mathbb{K}[\mathtt{g}^*]$, определив ее на линейных функциях по формуле

$$\{x_i, x_j\} = c_{ij}^k x_k,$$

и формально продолжив на остальные полиномы по правилу Лейбница.

Определение 5.21. *Пусть $(M, \{,\}_M)$ и $(N, \{,\}_N)$ - пуассоновы многообразия. Отображение*

$$\phi: \ M \to N$$

называется пуассоновым морфизмом ли пуассоновым отображением, если

$$\phi^*: \ C^\infty(N) \to C^\infty(M)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли относительно соответствующих скобок Пуассона.

Иными словами, для любых $f, g \in C^\infty(N)$ должно выполняться тождество

$$\{\phi^* \mathtt{f}, \phi^* \mathtt{g}\}_M = \phi^* \{f, g\}_N.$$

Отображение симплектических многообразий

$$f: \ (M_1, w_1) \to (M_2, w_2)$$

называется симплектоморфизмом, если

$$f^* w_2 = w_1.$$

Упражнение 5.11. *Доказать следующие утверждения.*

1) Любой симплектоморфизм является пуассоновым морфизмом, но не наоборот.

2) *Любой пуассонов морфизм из пуассонова многообразия $(N^m, \mathcal{A})$ в симплектическое (M^{2n}, w) является субмерсией.*

3) *Погружение симплектических листов является пуассоновым морфизмом.*

Упражнение 5.12. *Доказать, что для любого диффеоморфизма*

$$f:\ N \to N,$$

индуцированное отображение кокасательного пространства

$$f^*:\ T^*N \to T^*N$$

является пуассоновым морфизмом (и сохраняет 1-форму Лиувилля).

Упражнение 5.13. *Доказать, что для любого гомоморфизма алгебр Ли*

$$f:\ \langle \to \}$$

двойственное отображение

$$f^*:\ \}^* \to \langle^*$$

является пуассоновым морфизмом. В частности, для любой подалгебры $\langle \subset \}$ пуассоновым морфизмом является проекция

$$pr:\ \}^* \to \langle^*.$$

Упражнение 5.14. *Доказать, что для любой связной группы Ли отображение левого сдвига*

$$L:\ T^*G \to \}^*$$

является пуассоновым.

Отображение правого сдвига является анти-пуассоновым (нужно изменить знак у скобки Ли-Пуассона, чтобы он стал пуассоновым).

Векторные поля $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ действуют на функциях и других векторных полях при помощи следующих операций.

1) Производная функция

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

2) Коммутатор векторных полей

$$[X, Y]^i = X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Кратко обсудим два способа продолжить эти операции - производную Ли и скобку Схоутена.
Мы дадим их алгебраичекое определение.

Определение 5.22. *Производная Ли вдоль векторного поля v - это отображение, сопоставляющее любому тензору типа (p,q) тензор типа (p,q)*

$$\mathcal{L}_v : \mathcal{T}^p_q(M) \to \mathcal{T}^p_q(M).$$

и удовлетворяющее следующим свойствам:

1) для любой функции f

$$\mathcal{L}_v f = v(f),$$

2) для любого аекторного поля u

$$\mathcal{L}_v u = [v, u],$$

3) для любых 1-формы α и векторного поля u

$$\mathcal{L}_v < \alpha, u > = < \mathcal{L}_v \alpha, u > + < \alpha, \mathcal{L}_v u >,$$

4) производная Ли тензороного произведения находится по правилу Лейбница:

$$\mathcal{L}_v(S \otimes T) = (\mathcal{L}_v S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_v T)$$

Любое векторное поле v определяет однопараметрическую группу (локальных) диффеоморфизмов ϕ_t т.ч.

$$v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t.$$

Эта группа автоморфизмов позволяет переносить тензорные поля вдоль путей.

Построим однопараметричекое семейство тензорных полей $\phi^*_{-t}T$.
Производная Ли - производная по параметру этого семейства тензорных полей:

$$L_v T = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi^*_{-t} T.$$

Легко проверить, что для базисных векторных полей $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ производная Ли совпадает с обычной операцией частной производной:

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^k}} T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k}.$$

Векторное поле X на пуассоновом многообразии (M, Π) называется пуассоновым векторным полем, если

$$\mathcal{L}_X \Pi = 0.$$

Векторное поле является пуассоновым тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\{Xf, g\} + \{f, Xg\} = X\{f, g\}.$$

Пусть A - это a-вектор, а B - это b-вектор. Тогда их скобка Схоутена $[A, B]$ - это $(a+b-1)$-вектор, определяемый следующим образом.
Формально обозначим $\zeta_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и будем обозначать $\zeta_i \wedge \zeta_j$ через $\zeta_i\zeta_j$. Тогда

$$A = \sum_{i_1 < \ldots < i_a} A^{i_1 \ldots i_a} \zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_a}, \quad B = \sum_{i_1 < \ldots < i_b} B^{i_1 \ldots i_b} \zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_b}.$$

Положим

$$\frac{\partial \zeta_{i-1} \ldots \zeta_{i_p}}{\partial \zeta_{i_k}} = (-1)^{p-k} \zeta_{i_1} \ldots \hat{\zeta_{i_k}} \ldots \zeta_{i_p},$$

где "шляпка" означает остутствие сомножителя.

Коммутатор векторных полей тогда записывается в виде

$$[X, Y] = \sum_i \frac{\partial X}{\partial \zeta_i} \frac{\partial Y}{\partial x^i} - \sum_i \frac{\partial Y}{\partial \zeta_i} \frac{\partial X}{\partial x^i}.$$

Определение 5.23. *Скобка Схоутена a-вектора и b-вектора B - это $(a+b-1)$-вектор $[A, B]$, определяемый следующей формулой*

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \frac{\partial B}{\partial x^i} - (-1)^{(a-1)(b-1)} \sum_i \frac{\partial B}{\partial \zeta_i} \frac{\partial A}{\partial x^i}.$$

Упражнение 5.15. *Показать, что скобка Схоутена обладает следующими свойствами (для любых a-векторного поля A, b-вектораного поля B и c-векторного поля C).*

1) Градуированная кософкоммутативность:

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)} [B, A].$$

2) Градуированное правило Лейбница:

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C],$$

$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b} [A, C] \wedge B.$$

3) Градуированное тождество Якоби:

$$(-1)^{(a-1)(c-1)} [A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(c-1)} [B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)} [C, [A, B]] = 0.$$

4) Если X - векторное поле, то

$$[X, B] = \mathcal{L}_X B.$$

Упражнение 5.16. *Показать, что скобка Схоутена однозначно определяется свойствами 1)-4).*
Также вывести из этих свойств, что она не зависит от выбора координат.

Пусть A и B - два бивекторных поля. Тогда

$$[A, B] = \sum_s \frac{\partial A}{\partial \zeta_s} \frac{\partial B}{\partial x^s} + \sum_s \frac{\partial B}{\partial \zeta_s} \frac{\partial A}{\partial x^s} =$$

$$= 2 \sum_s \left(A^{ks} \frac{\partial B^{ij}}{\partial x^s} + B^{ks} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^s} \right) \zeta_i \zeta_j \zeta_k.$$

Следствие 5.6. *Бивектор* Π *является бивектором Пуассона тогда и только тогда, когда*

$$[\Pi, \Pi] = 0.$$

Лекция 6. Гамильтоновы действия

Пуассоновы когомологии.

Пуассоновы когомологии подробнее описаны в
J.-P. Dufour, N.T. Zung "Poisson structures and their normal forms" .

Напомним, что
Скобка Схоутена a-вектора A и b-вектора B - это $(a+b-1)$-вектор $[A,B]$.
Π - бивектор Пуассона, тогда и только тогда, когда $[\Pi,\Pi]=0$.

Увеждение 6.21. *Если* Π *- бивектор Пуассона, то для любого поливекторного поля* A *выполнено*

$$[\Pi,[\Pi,A]]=0.$$

Доказательство. Вспомним градуированное тождество Якоби:

$$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A,[B,C]]+(-1)^{(b-1)(a-1)}[B,[C,A]]+(-1)^{(c-1)(b-1)}[C,[A,B]]=0.$$

Возьмем $B=C=\Pi$. Тогда $b=c=2$, и

$$(-1)^{(a-1)}[A,[\Pi,\Pi]]+(-1)^{(a-1)}[\Pi,[\Pi,A]]-[\Pi,[A,\Pi]]=0.$$

Далее, скобка Схоутена (градуированно) кососоммутативна:

$$[A,B]=-(-1)^{(a-1)(b-1)}[B,A].$$

Поэтому

$$[A,\Pi]=-(-1)^{a-1}[\Pi,A].$$

Получаем, что

$$2[\Pi,[A,\Pi]]=(-1)^{(a-1)}[A,[\Pi,\Pi]]=0,$$

поскольку $[\Pi,\Pi]=0$. ☐

Обозначим:
$\mathcal{V}^k(M)$ - пространство k-векторных полей на M (это кососимметричные тензорные поля типа $(k,0)$).
$\delta=\delta_\Pi:\ \mathcal{V}^k\to\mathcal{V}^{k+1}(M)$ результат скобки поливектора с бивектором Π:

$$\delta_\Pi(A)=[\Pi,A].$$

Когомологии этого комплекса называются пуассоновыми когомологиями:

$$H^k_\Pi(M)=\ker\delta^k_\Pi/\operatorname{Im}\delta^{k-1}_\Pi,$$

где

$$\delta^n_\Pi:\ \mathcal{V}^n(M)\to\mathcal{V}^{n+1}(M).$$

Эти когомологии также называют когомологиями Лихнеровича-Пуассона и обозначают $H^k(M,\Pi)$ или $H^k_{LP}(M,\Pi)$.

Интерпретация некоторых пуассоновых когомологий:

1) Нулевые когомологии $H^0_\Pi(M)$ - это пространство функций $f \in C^\infty(M)$ таких, что
$$[\Pi, f] = 0.$$
Это функции Казимира пуассоновой структуры Π, их также можно задать условием
$$\{f, g\} = 0, \quad \forall g \in C^\infty(M).$$

Упражнение 6.17. *Доказать следующие утверждения:*

а) Функции Казимира на связном симплектическом многообразии - это константы.

б) Функции Казимира на произвольном пуассоновом многообразии - это (гладкие) функции, постоянные на каждом симплектическом листе.

2) Первые когомологии $H^1_\Pi(M)$ - это фактор
пространства пуассоновых векторных полей $[\Pi, X] = 0$, т.е. векторных полей X, сохраняющих скобку Пуассона
$$[\Pi, X] = -\mathcal{L}_X \Pi;$$
по пространству гамильтоновых векторных полей
$$X_f = [\Pi, f].$$

3) Вторые когомологии $H^2_\Pi(M)$ - это фактор
пространства бивекторов Λ т.ч. :
$$[\Pi, \Lambda] = 0;$$
по пространству точных пуассоновых структур
$$[\Pi, X] = -\mathcal{L}_X \Pi,$$
т.е. по всевозможным производным Ли скобки Π.

Пара скобор Пуассона A и B называются согласованными, если
$$[A, B] = 0.$$

Упражнение 6.18. *Пусть A и B - скобки Пуассона.*
Доказать, что следующие условия эквивалентны:

1) A и B согласованы,

2) $A + B$ является скобкой Пуассона,

3) любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\mu A + \lambda B$ тоже скобка Пуассона.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Пуассоновы когомологии возникают как препятствия к (формальному) приведению пуассоновых структур к нормальной форме.

Например, если скобки Π и Λ согласованы, то

$$[\Pi + \varepsilon\Lambda, \Pi + \varepsilon\Lambda] = \varepsilon^2[\Lambda, \Lambda] = 0(mod\varepsilon)^2.$$

Подробнее см. J.-P. Dufour, N.T. Zung "Poisson structures and their normal forms" .

Для пуассоновых когомологий также верна теорема:

Теорема 6.23. *(Майера-Вьеториса)*
Пусть $M = U \cup V$, где U, V - открытые подмножества многообразия M.
Тогда короткая точная последовательность коцепей

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}^*(U \cup V) \xrightarrow{i^*} \mathcal{V}^*(U) \oplus \mathcal{V}^*(V) \xrightarrow{j^*} \mathcal{V}^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

где

$$i^*(w) = (\Lambda|_U, \Lambda|_V), \quad j^*(\Lambda_1, \Lambda_2) = (\Lambda_1 - \Lambda_2)|_{U \cap V},$$

порождает длинную точную последовательность когомологий:

$$\ldots \longrightarrow H^i(U \cup V) \xrightarrow{i^*} H^i(U) \oplus H^i(V) \xrightarrow{j^*}$$

$$\xrightarrow{ji^*} H^i(U \cap V) \longrightarrow H^{i+1}(M) \longrightarrow \ldots \tag{6.1}$$

На симплектическихм многообразиях мы можем отождествить поливекторы и дифференциальные формы при помощи симплектической структуры.

Упражнение 6.19. *На симплектическом многообразии (M^{2n}, w) пуассоновы когомологии изоморфны когомологиям де Рама.*

В целом, вычисление пуассоновых когомологий - довольно сложная задача.

Гамильтоновы векторные поля.

Напомним, что гамильтоновым векторным полем на пуассоновом многообразии $(M, \mathcal{A})$ называется векторное поле

$$v_H = \mathcal{A}dH.$$

Функция H называется гамильтонианом векторного поля v_H.

Аналогично на симплектическом многообразии (M^{2n}, w) гамильтоново векторное поле задается формулой

$$v_H = w^{-1}dH.$$

Поле v_H называют косым градиентом и обозначают $\operatorname{sgrad} H$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Векторное поле v на симплектическом многообразии (M^{2n}, w) называется симплектическим, если оно сохраняет симплектическую структуру:

$$\mathcal{L}_v w = 0.$$

Любое гамильтоново векторное пространство является симплектическим: это следует из тождества Лейбница:

$$\mathcal{L}_v w = i_v(dw) + d(i_v w)$$

Более того, из тождества Лейбница видно:

$$\begin{array}{rcl} \text{векторное поле } v & \leftrightarrow & \text{1-форма } i_v w \\ \text{симплектическое векторное поле} & \leftrightarrow & \text{замкнутая 1-форма} \\ \text{гамильтоново векторное поле} & \leftrightarrow & \text{точная 1-форма} \end{array}$$

Таким образом любое гамильтоново поле - локально симплектческое.

Увержение 6.22. *Если $H^1_{DeRham}(M^{2n}) = 0$, то все симплектические векторные поля гамильтоновы.*

Если $H^1(M) \neq 0$, то не все симплектические действия гамильтоновы:
Пример.
На торе

$$(\mathbb{T}^2, d\phi_1 \wedge d\phi_2),$$

где $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ векторное поле

$$\frac{\partial}{\partial \phi^1}$$

является симплектическим, но не гамильтоновым.

Теорема 6.24. *Если векторное поле v на пуассоновом многообразии $(N, \mathcal{A})$*

1) сохраняет пуассонову структуру

$$L_v \mathcal{A} = 0$$

2) касается симплектических листов,

то оно (локально) гамильтоново

$$v = \mathcal{A} dH$$

в окрестности точки $x \in (M, \mathcal{A})$ постоянного ранга.

Это следует из теоремы Дарбу-Вайнштейна.

Задача. Привести пример пуассонова многообразия (M^n, A) и векторного поля v на M т.ч.

1) поле v сохраняет скобку Пуассона $\mathcal{L}_v A = 0$

2) поле v касается симплектических листов;

3) поле v не является гамильтоновым векторным полем.

Решение. Приведем два примера.

В обоих примерах пуассоново многообразие (M^n, A) - это плоскость $\mathbb{R}^2$ со скобкой Пуассона

$$A = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

Вне особой точки $x = 0,\ y = 0$ векторное поле v имеет вид

$$v = \operatorname{sgrad} f,$$

где функция f по тем или иным причинам не может быть продолжена в точку $(0, 0)$.

Пример 1. Особенность в нуле.
Векторное поле $v = (y, -x)$. Гамильтониан имеет особенность в нуле:

$$f = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C.$$

Пример 2. Нетривиальная монодромия.
Векторное поле $v = (y, -x)$. Гамильтониан является многозначной функцией:

$$f = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k.$$

В полярных координатах это просто угол

$$f(\rho, \phi) = \phi.$$

Оба векторных поля негамильтоновы, т.к. гамильтониан (на каждом симплектическом листе) определен однозначно с точностью до константы.

Напомним, что скобка Ли-Пуассона на коалгебре Ли имеет вид

$$\{f, g\} = \{x, [df, dg]\}$$

Теорема 6.25. *Векторное поле v, сохраняющее скобку Ли-Пуассона на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, будет гамильтоновым в следующих двух случаях:*

1) $\mathfrak{g}$ - полупростая алгебра Ли, v - аналитическое векторное поле;

2) $\mathfrak{g}$ - компактная полупростая алгебра Ли, v - гладкое векторное поле.

Это следует из фактов о когомологиях алгебр Ли (см. леммы Уайтхеда).

Упражнение 6.20. *Доказать, что любое гамильтоново векторное поле на* $so(3,\mathbb{R})$ *касается симплектических листов.*

Указание: У симплектических листов разные объемы.

Упражнение 6.21. *Рассмотрим скобку Ли-Пуассона* $\mathcal{A}$ *для алгебры Ли* $sl(2,\mathbb{R})$. *Построить следующие гладкие векторные поля* v, *которые являются пуассоновыми*

$$\mathcal{L}_v\mathcal{A} = 0,$$

но при этом

1) либо не касаются симплектических листов;

2) либо касаются всех листов, но не являются на них гамильтоновыми.

Перейдем теперь от векторных полей к действию групп.

Симплектическое действие группы Ли G на симплектическом многообразии (M^{2n}, w) - это гомоморфизм

$$G \to Symp(M^{2n}, w)$$

(такой, что $G \times M$ - гладкое отображение).

Пусть далее:
(M^{2n}, w) - симплектическое многообразие.
G - группа Ли.
g - алгебра Ли группы Ли G.
g^* - двойственное пространство к алгебре Ли g.
$\rho:\ G \to Symp(M^{2n}, w)$ - симплектическое действие.

Любое действие группы Ли

$$\rho:\ G \to Diff(M)$$

порождает гомоморфизм алгебр Ли

$$\rho_*:\ \mathsf{g} \to Vect(M),$$

которое сопоставляет каждому элементу алгебры Ли g векторное поле на многообразии M (инфинитезимальное действие).
Формально:

$$\rho_*(v)\,x \ = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho(\exp(tv)) \circ x)$$

Скобка Ли на $Vect(M)$ в формуле гомоморфизма

$$\rho_*([x,y]_{\mathsf{g}}) = [\rho_*(x), \rho_*(y)]_{Vect}$$

- коммутатор векторных полей.

Симплектическое действие гамильтоново, если оно продолжвется до (анти)гомоморфизмов алгебр Ли.

Гамильтоновы действия.

Определение 6.24. *Симплектическое действие $\rho: G \to Symp(M^{2n}, w)$ называется гамильтоновым, если существует отображение*

$$\mu^*: \mathfrak{g} \to C^\infty(M),$$

такое, что

1) *$\mu^*(v)$ - функция Гамильтона для векторного поля $\rho_*(v)$ для любого вектора $v \in \mathfrak{g}$;*

2) *μ^* - антигомоморфизм алгебр Ли:*

$$\mu^*([u,v]) = -\{\mu^*(u), \mu^*(v)\},$$

где $\{,\}$ - соответствующая скобка Пуассона.

Отметим, что если векторное поле v гамильтоново, то гамильтониан H определен однозначно с точностью до прибавления константы (первообразная точной 1-формы определяется значением функции в одной точке).
Напомним, что

$$\operatorname{sgrad}\{H_x, H_y\} = -[\operatorname{sgrad} H_x, \operatorname{sgrad} H_y]$$

Поэтому для двух любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ разность

$$H_{x,y} - \{H_x, H_y\} = c(x,y) = const$$

является постоянной функцией.

Упражнение 6.22. *Проверить, что*

$$c([x,y],z) + c([y,z],x) + c([z,x],y) = 0$$

для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Каждая точка $x_0 \in M$ может рассматриваться как отображение

$$C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

(т.е. каждая точка - это функционал на $c^\infty(M)$).
Функция $f(x)$ при этом ставится в соответствие ее значение в точке x_0

$$f(x) \to f(x_0)$$

Поэтому, если есть отображение $\mu^*: \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, то возникает двойственное отображение

$$\mu: (M^{2n}, w) \to \mathfrak{g}^*$$

заданное формулой

$$< \mu(x), v > := \mu^*(v)(x)$$

Определение 6.25. *Симплектическое действие $\rho: \ G \to Symp(M^{2n}, w)$ называется гамильтоновым, если существует отображение*

$$\mu: \ (M^{2n}, w) \to \mathfrak{g}^*,$$

такое, что

1) *Для любого $v \in \mathfrak{g}$ функция $H_v: \ (M^{2n}, w) \to \mathbb{R}$, определенная по формуле*

$$H_v(x) := < \mu(x), v >$$

является функцией Гамильтона для векторного поля $\rho_*(v)$;

2) *Отображение μ эквивариантно относительно действия ρ группы G на многообразии (M^{2n}, w) антиэквивариантно относительно коприсоединенного действия Ad^* группы G на коаглебре $\mathfrak{g}^*$:*

$$\mu \circ \rho_g = -Ad^*_{\mathfrak{g}} \circ \mu, \quad \forall g \in G$$

Набор (M, w, G, μ) называется гамильтоновым G-пространством.

Упражнение 6.23. *Коприсоединенное представление $\rho = Ad^*$ - это гамильтоново действие группы Ли G на орбите коприсоединенного представления*

$$O_\varepsilon = \{Ad^*_{\mathfrak{g}}(\xi) \mid g \in G\}.$$

Функции гамильтона, соответствующие $x \in \mathfrak{g}$ - соотвествующие линейные функции на $\mathfrak{g}^*$:

$$H_x = x.$$

Пусть G - связная группа Ли, $\rho: \ \ g \to Symp(M^{2n}, w)$ - ее симплектическое действие.
Хотим понять, когда это действие будет гамильтоново.
Иными словами, мы ищем такое отображение $\mu^*: \ \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, что следующая диаграмма будет коммутативна

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu^*"'] & & Vect_{symp}(M) \\
& \mathfrak{g} \arrow[ur, "\rho_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Положим

$$C^k = \Lambda^k \mathfrak{g}^* = k\text{-цепи на } \mathfrak{g} = \text{кососимметричные}$$
$$k\text{-линейные отображения } \underbrace{\mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Граничный оператор $\delta : \ C^k \to C^{k+1}$ определяется по формуле

$$\delta c(v_0, \dots, v_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([v_i, v_j], v_0 m \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k)$$

Упражнение 6.24. $\delta^2 = 0$ *или иными словами следующая последовательность точна*

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^n \xrightarrow{\delta} \dots$$

Точная последовательность групп

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} C^2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^n \xrightarrow{\delta} \dots$$

порождает группы когомологий

$$H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \frac{\ker \delta \ : \ C^k \to C^{k+1}}{\operatorname{Im} \delta \ : \ C^{k-1} \to C^k},$$

которые называются когомологиями алгебр Ли или когомологиями Шевалье.

Теорема 6.26. *Если* $\mathfrak{g}$ *- когомологии алгебры Ли компактной связной группы Ли* G*, то*

$$H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = H^k_{deRham}(G)$$

В дальнейшем нам потребуется в основном группы $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ и $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Опишем их подробнее.

1) $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.
   В данном случае, 1-цепи - это элементы $c \in \mathfrak{g}^*$.

   $$\delta c(u, v) = -c([u, v]),$$

   поэтому $\delta c = 0 \Leftrightarrow c|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = 0$.
   Получаем, что

   $$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = Ann[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^*$$

2) $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.
   В данном случае, 2-цепи - это кососимметричные билинейные отображения $c : \ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$.

   $$\delta c(u, v, w) = -c([u, v], w) + c([u, w], v) - c([v, w], u),$$

   при этом $c = \delta b \ \Leftrightarrow \ c(u, v) = \delta b(u, v) = -b([u, v])$.

Теорема 6.27. *Компактная группа Ли* G *полупроста* $\Leftrightarrow$ *ее алгебра совпадает со своим коммутантом* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Лемма 6.6. *(Леммы Уайтхеда)*
Пусть G *- коммутативная группа Ли. Тогда*

$$G - \textit{полупроста} \ \Leftrightarrow \ H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0.$$

Теорема 6.28. *Если $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = 0$, то любое симплектическое действие группы Ли G с касательной алгеброй $\mathfrak{g}$ является гамильтоновым.*

Увеждение 6.23. *Коммутатор симплектических полей - гамильтоново векторное поле.*

Доказательство. Любое симплектическое поле - локально гамильтоново.
$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$.
Скобка $\{f, g\}$ не меняется при прибавлении констант к f, g. □

Доказательство. Доказательство теоремы.
Коммутатор симплектическиъ полей - гамильтоново векторное поле. $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
Отсюда следует, что все векторные поля $\rho_*(v)$ являются гамильтоновыми.
Построим линейное отображение

$$\hat{\mu} : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$$

(выберем гамильтонианы $H_1, \ldots, H_n$ для базиса $e_1, \ldots, e_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Исправим $\hat{\mu}$ до гомоморфизма алгебр Ли, используя $H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = 0$.

Рассмотрим функции

$$c(u, v) = H^{[u,v]} + \{H^u, H^v\}.$$

Соответсвующие гамильтоновы векторные поля равны, поэтому (для каждой компоненты связности M) поэтому $c(u, v) = const \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $c(u, v)$ задает 2-цепь на $\mathfrak{g}$. Из-за тождества Якоби она является коцепью $4(\delta c = 0)$.

$H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = 0 \Rightarrow c = \delta b$ для некоторого $b \in \mathfrak{g}^*$.
Теперь "исправляем" $\hat{\mu}^*$. Полагаем

$$\mu^*(u) = \hat{\mu}^* + b(u).$$

μ^* является искомым гомоморфизмом алгебр Ли

$$\mu^*([u, v]) = H^{[u,v]} + b([u, v]) = \{H^u, H^v\} = \{\mu^*(u), \mu^*(v)\}$$

□

Пусть G - компактная группа Ли.

Теорема 6.29. *Пусть $H^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = 0 \quad \Rightarrow$ отображение момента гамильтонова G-действвия на определено однозначно.*

Доказательство. Пусть μ_1 и μ_2 - два отображения момента. $\mu_1(u)$ и $\mu_2(u)$ - гамильтонианы одного векторного поля $\Rightarrow \mu_1(u) - \mu_2(u) = c(u)$ (локально) постоянная функция.

Получаем 1-цепь $c: \ \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$.
Однако, $\mu_1(u)$ и $\mu_2(u)$ - гомоморфизмы алгебр Ли, поэтому $c([u,v]) = 0$, поэтому

$$c \in Ann[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$$

В общем случае $\mu' = \mu + c$, где $c \in Ann[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (т.е. отображение момента определено однозначно с точностью до элемента из аннулятора коммутатора). □

Итак, были рассмотрены в некотором смысле два диаметрально противоположных случая - симплектические действия полупростых и коммутативных групп Ли. В этих случаях можно сказать следующее:

1) G - полупроста. Любое симплектическое действие гамильтоново. Отображение момента определено однозначно.

2) G - коммутативна. Не все симплектические действия гамильтоновы. Отображение момента определено с точностью до прибавления константы $c \in \mathfrak{g}^*$.

Интегрируемые гамильтоновы системы.

Определение 6.26. *Гамильтонова сстема с n степенями свободы и гамильтонианом H - это динамическая система, заданная гамильтоновым векторным полем v_H, т.е. система*

$$\dot{x}^i = (w^{-1})\frac{\partial H}{\partial x^j}$$

В симплектических координатах (p_i, q_i) мы получаем уравнение Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases}$$

Функция постоянная вдоль векторного поля v называется первым интегралом динамической системы $\dot{x} = v$.

Иными словами, функция f является первым интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{sgrad} H(f) = \{f, H\} = 0$$

Гамильтониан всегда является первым интегралом для своей гамильтоновой системы (т.е. скобка Пуассона кососимметрична) $\{H, H\} = 0$. Обычная интерпретация гамильтониана в физике и механике - энергия системы.

Две функции f, g на пуассоновом многообразии коммутируют или находятся в инволюции, если $\{f, g\} = 0$.

Функции, коммутирующие с любой другой функцией называются функциями Казимира (или, немного неформально, Казимирами) скобки Пуассона. Казимиры - вседа первые интегралы гамильтоновых сиситем.

У невырожденных скобок Пуассона (т.е. у скобок Пуассона, соответствующих симплектическим структурам) нетривиальных Казимиров нет (т.е. единственные функции Казимира - констарнты).

Теорема 6.30. *Якоби*
Если f и g - первые интегралы гамильтоновой системы (на произвольном пуассоновом многообразии), то их скобка Пуассона $\{f, g\}$ - тоже первый интеграл системы.

Доказательство. Немедленно следует из тождества Якоби:

$$\begin{array}{l}\{f,g\}=0\\ \{g,h\}=0\end{array} \quad \Rightarrow \quad \{\{f,g\},h\}=0.$$

□

Определение 6.27. *Динамическая система $\dot{x} = XM^{2n}, w)$ называется интегрируемой, если существуют интегралы $f_1, \ldots, f_n$ т.ч.*
Они функционально независимы, т.е. почти всюду

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_n \neq 0.$$

Функции f_i находятся в инволюции:

$$[X_{f_i}, X_{f_j}] = 0.$$

Все векторные поля X_{f_j} полны. (иногда это условие опускают)

Отображение

$$\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n) : \ (M^{2n}, w) \to \mathbb{R}^n$$

называется отображением момента.

Теорема 6.31. *Связная компактная поверхность регулярного уровня $\mathcal{F}^{-1}$ отображения момента $\mathcal{F} : \ (M^{2n}, w) \to \mathbb{R}^n$ диффеоморфна тору $\mathbb{T}^n$.*

В окрестности этой поверхности существуют координаты действие-угол: а именно, существуют такие координаты s^i на базе и координаты $\phi_i(\mod 1)$ на слое $\mathbb{T}$, что симплектическая структура имеет вид $w = \sum\limits_{i=1}^{n} d\phi_i \wedge ds^i$.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}^{-1}(Ox), w) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & (D^n \times \mathbb{T}^n, \sum\limits_{i=1}^{n} d\phi_i \wedge ds^i) \arrow[d, "\pi_1"] \\
Ox \arrow[r] & D^n
\end{tikzcd}
$$

Здесь Ox - это окрестность точки x, действия s^i - это координаты на диске D^n, углы $\phi_i(\mod 1)$ - это координаты на торе $\mathbb{T}^n$, а π_1 - это тривиальная проекция на первый сомножитель D^n.

Глобальная теорема Лиувилля.

Определение 6.28. *Локально-тривиальное расслоение*

$$\pi :\ (M^{2n}, w) \to B^n$$

называется лагранжевым расслоением, если
тотальное пространство (M^{2n}, w) является симплектическим многообразием,
каждый слой F_n являтеся лагранжевы подмногообразием, т.е.

$$\dim F^n = \frac{1}{2}\dim M^{2n}, \quad w|_{F^n} \equiv 0.$$

Примеры Лагранжевых расслоений

1) Кокасательное расслоение.
   Любое кокасательное расслоение

   $$\pi_0 :\ (T^*B, w_0) \to B^n,$$

   снабженное канонической 2-формой $w_0 = \sum\limits_i dp_i \wedge dq^i$ является лагранжевым расслоением.

2) Подкрученное лагранжево расслоение.
   Для любого лагранжева расслоения $\pi :\ (M^{2n}, w) \to B^n$ расслоение

   $$\pi :\ (M^{2n}, w + \pi^*\phi) \to B^n$$

   является лагранжевым.

3) Отображение момента. Отображение момента любой интегрируемой гамильтоновой системы задает лагранжево расслоение с особенностями.

Пуассоново действие корректно определено.

Уверкдение 6.24. *Рассмотрим произвольное лагранжево расслоение*

$$\pi: \ (M^{2n}, w) \to B^n.$$

Если $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ - произвольный базис T_x^*B, то векторные поля

$$v_{\alpha^i} = w^{-1}(\pi^*\alpha^i)$$

являются n попарно коммутирующими векторныыми полями на слое F_x^n.

1) Векторное поле v_α касается слоя F_x, так как ограничение формы w на каждый слой F_x равно нулю.

   Отображение $\alpha \to v_\alpha$ изоморфно отображает T_x^*B на $T_x(F_x)$ так как размерности этих пространств совпадают, и у отображения $\alpha \to v_\alpha$ нет ядра.

   Векторные поля v_α не имеют нулей, т.е. $v_\alpha(x) \neq 0$, так как форма w невырождена.

2) Векторные поля v_α и v_β коммутируют, так как

$$[v_\alpha, v_\beta] = -X_{w(v_\alpha, v_\beta)} = 0.$$

   Последнее равенство выполнено, так как слой лагранжев.

Договоренности:
Слои всех рассматриваемых лагранжевых расслоений связны.
Пуассоново действие корректно определено (т.е. все поля v_α полны).

Следствия:
Слои расслоения диффеоморфны $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.
В частности, компактные слои диффеоморфны тору $\mathbb{T}^n$.

Определение 6.29. *Послойное действие $T*B$ на (M^{2n}, w), при котором ковектор α действует как сдвиг за единичное время вдоль векторного поля*

$$v_\alpha = w^{-1}(\pi^*, \alpha),$$

мы будем называть пуассоновым действием.

Ядро изотропии пуассонова действия - решетка на базисе.

Определение 6.30. *Решеткой ранга k на многообразии B^n мы будем называть подрасслоение P кокасательного расслоения T^*B такое, что*

1) *Каждый слой P_x решетки P является подгруппой T_x^*B по сложению.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

2) *Для любой точки $x \in B^n$ существуют такие локальные координаты $x^1, \dots, x^n$, что решетка P порождается (в каждом кокасательном пространстве как подгруппа по сложению) ковекторами $dx^1, \dots, dx^k$.*

Определение 6.31. *Аффинные многообразия - это гладкие многообразия, на которых задана плоская связность (без кручения).*

На многообразии M^n задана аффинная структура, если существует атлас (U_α, ϕ_α), у которого все функции склейки $\phi_\beta^{-1}\phi_\gamma$ являются аффинными преобразованиями

$$x \to Ax + \vec{b}$$

с целочисленной матрицей A, т.е. все функции склейки $\phi_\beta^{-1}\phi_\gamma$ лежат в группе

$$GL_n(\mathbb{Z}) \leftthreetimes \mathbb{R}^n \subset Aff_n$$

Увержение 6.25. *Многообразие B^n может служить базой лагранжева расслоения*

$$\pi: \ (M^{2n}, w) \to B^n$$

с компактным тотальным пространством (M^{2n}, w) тогда и только тогда, когда B^n является целочисленным афффинным многообразием.

Целочисленная аффинная структура и решетка (максимального ранга) - это одно и то же. (Решетка порождается дифференциалами локальных целочисленных аффинных координат dx^i.)

Лемма 6.7. *Пусть P - это решетка на многообразии B^n. Тогда*

1) *Факторкасательное расслоение*

$$\pi_0: \ (T^*B/P, w_0) \to B^n$$

является корректно определенным лагранжевым расслоением. Симплектическая структура w_0 индуцируется канонической 2-формой на кокасательном расслоении.

2) *Для любого сечения*

$$\alpha: \ B^n \to T^*/P$$

дифференциал $d\alpha$ является корректно определенной 2-формой на B^n (дифференциал $d\alpha$ не зависит от выбора локального представителя формы α).

Определение 6.32. *Пусть $\pi_i: \ (M_i^{2n}, w_i) \to B^n$ - два лагранжевых расслоения над одной и той же базой B^n. Послойный симплектоморфизм $f: \ (M_1^{2n}, w_1) \to (M_2^{2n}, w_2)$ тождественный на базе называется лагранжевой эквивалентностью.*

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{tikzcd}
(M_1^{2n}, w_1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & (M_2^{2n}, w_2) \arrow[d, "\pi_2"] \\
B^n \arrow[r, equal] & B^n
\end{tikzcd}$$

Теорема 6.32. *Если лагранжево расслоение*

$$\pi : \ (M^{2n}, w) \to B^n$$

с решеткой P допускает лагранжево сечение

$$s : \ B^n \to M^{2n},$$

то оно лагранжево эквивалентно факторкокасательному расслоению

$$\pi_0 : \ (T^*B/P, w_0) \to B^n.$$

Эта теорема обобщает классическую теорему Лиувилля.

Лекция 7. Невырожденные особенности

Невырожденные особенности.

Подробнее о невырожденных особенностях:
A.V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, "Singularities of integrable Hamiltonian systems"
А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко "Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация" .

Пусть (M^{2n}, w) - симплектическое многообразие.
Любая функция $f:\ (M^{2n}, w) \to \mathbb{R}$ определяет в каждой своей критической точке x

$$df|_x = 0$$

линейный оператор

$$A_f:\ (T_xM^{2n}, w) \to (T_xM^{2n}, w),$$

заданный формулой

$$A_f = w^{-1}d^2f.$$

Увержение 7.26. *Построенный оператор*

$$A_f = w^{-1}d^2f$$

является элементом симплектической алгебры Ли $sp(T_xM^{2n}, w)$.

Доказательство. Матрицы операторов из $sp(T_xM^{2n}, w)$ задаются условием

$$\Omega A + A^T\Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Omega A)^T = \Omega A,$$

где Ω - матрицы w.
Это условие выполнено для A_f, поскольку $\Omega A_f = d^2f$ - симметричная матрица.

□

Увержение 7.27. *Отображение $f \to A_f$ - это гомоморфизм алгебр Ли: если $df|_x = 0$ и $dg|_x = 0$, то*

$$[A_f, A_g] = A_{\{f,g\}}.$$

Рассмотрим особую точку $x \in (M^{2n}, w)$ ранга 0 отображения момента $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ (т.е. $df_i|_x = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$).
Функции $f_1, \ldots, f_n$ коммутируют, поэтому соответсвующие операторы $A_{f_1} \ldots A_{f_n}$ порождают некоторую коммутативную подалгебру $\mathtt{h}_x \subset sp(T_xM)$.

Определение 7.33. *Особая точка $x \in (M^{2n}, w)$ ранга 0 называется невырожденной особой точкой (ранга 0), если $\mathtt{h}_x \subset sp(T_xM)$ - подалгебра Картана.*

Подалгебра Картана $\mathtt{h}$ алгебры Ли $\mathtt{g}$ - это нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором (если $[X, Y] \in \langle$ для всех $Y \in \mathtt{h}$, то $X \in \mathtt{h}$).

Теорема Уильямсона классифицирует все подалгебры Картана алгебры $sp(2n, \mathbb{R})$ с точностью до сопряжения. При ее формулировке используем то, что отображение $f \to A_f$ отождествляет симплектическую алгебру Ли $sp(2n, \mathbb{R})$ и алгебру Ли квадратичных форм на линейном симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i)$.

Теорема 7.33. *(теорема Уильямсона)*
Для любой подалгебры Картана $\mathtt{h} \subset sp(2n, \mathbb{R})$ существуют линейные координаты $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ линейного симплектического пространства $(\mathbb{R}^{2n})$ такие, что $w = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, и следующие n квадратичных полиномов образуют базис в $\mathtt{h}$:

1) $f_j(p, q) = p_j^2 + q_j^2$ *(эллиптический тип)* $j = 1, \dots, k_e$
2) $f_j(p, q) = p_j^2 - q_j^2$ *(гиперболический тип)* $j = k_e + 1, \dots, k_e + k_h$
3) $f_j(p, q) = p_j q_j + p_{j+1} q_{j+1}$ $f_{j+1}(p, q) = p_j q_{j+1} - p_{j+1} q_j$ *(фокус-фокус)*
   $j = k_e + k_h + 1, k_e + k_h + 3, \dots, k_e + k_h + 2k_f = n$

Подалгебры, соответсвующие разным тройкам (k_e, k_h, k_f) не сопряжены.

В общем случае, особая точка $x \in (M^{2n}, w)$ ранга r называется невырожденной, если она переходит в невырожденную особую точку ранга 0 после редукции по гамильтонову действию. Это означает следующее:
Берем $L_x = T_x O_x \subset T_x M^{2n}$ - касательное пространство к орбите гамильтонова действия.
$L_x^{\perp}$ - косоортогональное дополнение к L_x.
На $L_x^{\perp}/L_x$ индуцируется симплектическая структура (функции f_i коммутируют).
St_x действует на $L_x^{\perp}$.
Отображение $St_x \to sp(L_x^{\perp}/L_x)$ задает некоторую коммутативную подалгебру $\mathtt{h} \subset sp(L_x^{\perp}/L_x)$.

Определение 7.34. *Особая точка $x \in (M^{2n}, w)$ ранга r называется невырожденной особой точкой (ранга r), если $\mathtt{h}_x \subset sp(L_x^{\perp}/L_x)$ - подалгебра Картана.*

Локальное устройство слоения Лиувилля в окрестности особенности полностью определяется типом ее картановской подалгебры (т.е. тройкой чисел (k_e, k_h, k_f)).

Теорема 7.34. *Всякое слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точкой типа (k_e, k_h, k_f) и ранга r локально симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения L_{ell}, k_h экземпляров слоения L_{hyp}, k_f экземпляров слоения L_{foc} и $r = n - k_e - k_h - 2k_f$ экземпляров слоения L_{reg}, где*

1) *Слоение L_{ell} - это слоение в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$, порожденное функцией $p^2 + q^2$.*
2) *Слоение L_{hyp} - это слоение в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$, порожденное функцией $p^2 - q^2$.*
3) *Слоение L_{foc} - это слоение в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^4, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2)$, порожденное двумя коммутирующими функциями $p_1 q_1 + p_2 q_2$, $p_1 q_2 - q_1 p_2$.*
4) *Слоение L_{reg} - это слоение в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$, порожденное функцией p.*

Перейдем к полулокальному устройству особенностей (т.е. об устройстве слоения Лиувилля в окрестности особого слоя отображения момента).

Начнем с систем с одной степенью свободы.
Пусть далее все особенности интегрируемой гамильтоновой системы (M^2, w, H) являются невырожденными (иными словами, H - функция Морса на M^2).

В двумерном случае невырожденные особенности функции H на $(M^{2n}, w) =$ морсовские особенности H.

Лемма 7.8. *(Лемма Дарбу-Морса)*
Для любой невырожденной критической точки x функции H на двумерном симплектическом многообразии (M^2, w) существуют такие локальные симплектические координаты p, q, что функция H зависит либо от $p^2 + q^2$, либо только от pq:

$$H = H(p^2, q^2) \text{ (эллиптический случай),}$$
$$H = H(pq) \text{ (гиперболический случай).}$$

Определение 7.35. *Атом (или 2-атом) - это росток слоения Лиувилля на особом слое.*

Т.е. две особенности (рассматриваемые с полулокальной точки зрения) соответствуют одному и тому же атому тогда и только тогда, когда некоторые их окрестности лиувиллево эквивалентны.

Количество особых точек в особом слое называется сложностью атома.

Следующая теорема является известным фактом из теории Морса.

Увеждение 7.28. *Существует ровно два атома сложности 1 - эллиптический (атом A) и гиперболический (атом B). Все атомы большей сложности - гиперболические, т.е. все их особые точки являются гиперболическими особыми точками.*

Есть алгоритм для описания гиперболических атомов.

Теорема 7.35. *Для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ количество атомов сложности k равно $2, 4, 10, 58, 322, 3044, 33917$ соответственно.*

Отметим, что все атомы, кроме A и B не стабильны. Все гиперболические атомы распадаются на атомы B при малом шевелении (функции Марса плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии).

Рассмотрим теперь системы с 2 степенями свободы.
Начнем с особенностей сложности 1. Есть два типа таких особенностей:

1) Эллиптическая особенность.

2) Гиперболическая особенность.

Увеждение 7.29. *В размерности 4 существует только одна, с точностью до лиувиллевой эквивалентности, эллиптическая особенность ранга 1, и она является прямым произведением эллиптического атома V_{ell} и регулярного слоения V_{reg} (т.е. просто прямого произведения $D^1 \times S^1$).*

Классификация гиперболических особенностей ранга 1 была описана А.Т. Фоменко и Х. Цишангом. Сформулируем полученный ими результат, переформулировав его в терминах почти прямых произведений.

Теорема 7.36. *В размерности 4 любая гиперболическая особенность ранга 1 лиувиллево эквивалентна особенности одного из следующих двух видов:*

1) *прямое произведение $V_{hyp} \times V_{reg}$;*
2) *фактор прямого произведения $V_{hyp} \times V_{reg}$ по действию группы $\mathbb{Z}_2$ определенного формулой*
$$(x, s, \phi \to (\tau(x), s, \phi + \pi),$$
где $x \in V_{hyp}$, (ϕ, s) - координаты действие-угол на V_{reg}, а τ - это инволюция $V_{hyp} \to V_{hyp}$, неподвижные точки которой - это некоторые вершины гиперболического атома V_{hyp}.

Теорема 7.37. *Пусть x - невырожденная особая точка ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, w, H, f). Пусть все (M^4, w, H, f) - вещественно-аналитическое. Тогда в окрестности точки $x \in M^4$ существуют координаты (p_1, q_1, p_2, q_2), в которых симплектическая структура имеет вид $w = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, а функции H и f имеют вид:*

1) *случай центр-центр:*
$$H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2),$$
$$f = f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2);$$
2) *случай центр-седло:*
$$H = H(p_1q_1, p_2^2 + q_2^2),$$
$$f = f(p_1q_1, p_2^2 + q_2^2);$$
3) *случай седло-седло:*
$$H = H(p_1q_1, p_2q_2),$$
$$f = f(p_1q_1, p_2q_2);$$
4) *случай фокус-фокус:*
$$H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 - q_2^2),$$
$$f = f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 - q_2^2).$$

Об окрестности слоя, содержащего особые точки ранга 0, можно сказать следующее:

1) Особенность типа центр-центр только одна (с точностью до эквивалентности). Она лиувиллево эквивалентна прямому произведению атомов A.

2) Любая особенность типа центр-седло лиувиллево эквивалентна прямому произведению седлового атома и эллиптического атома A.

3) Существует ровно 4 особенности типа седло-седло сложности 1 (т.е. содержащие ровно ровно одну особую точку на слое). Эти особенности полностью различаются своими круговыми молекулами.

4) Особенность типа фокус-фокус сложности 1 ровно одна (с точностью до лиувиллевой C^0-эквиваленстности).

Существует 4 особенности типа седло-седло сложности 1:

1) особенность типа прямого произведения

$$B \times B$$

2) особенность типа почти прямого произведения

$$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2.$$

В этом полупрямом произведении группа $\mathbb{Z}_2$ действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия.

3) особенность типа почти прямого произведения

$$(B \times D_1)/\mathbb{Z}_2.$$

В этом полупрямом произведении группа $\mathbb{Z}_2$ действует на каждом из сомножителей как центральная симметрия.

4) особенность типа $(C_2 \times C_2)/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$:
одна порождающая $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ действует так: на 1 слагаемом как симметрия относительно оси x, на 2 слагаемом - симметрия относительно оси z, а
вторая порождающая $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, наоборот, на 1 слагаемом - симметричная относительно оси z, на 2 слагаемом - симметрична относительно оси x.

Рассмотрим простейшую четырехмерную особенность типа фокус-фокус. Рассмотрим $\mathbb{R}^4$ со стандартной симплектической структурой $w_0 = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ и две функции

$$f_1 = p_1q_1 + p_2q_2$$

$$f_2 = p_1q_2 - p_2q_1$$

Сразу же получаем следующее утверждение.

Увержение 7.30. *Особая точка типа фокус-фокус является изолированной особой точкой.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Особенность типа фокус-фокус можно комплексифицировать. Введем комплексные координаты

$$p = p_1 - ip_2$$

$$q = q_1 + iq_2$$

В этих координатах симплектическая структура имеет вид

$$w = \mathrm{Re}(dp \wedge dq),$$

а отображение момента $F = f + if_2$ задано формулой

$$F = pq.$$

В комплексных координатах следующее утверждение очевидно.

Увеждение 7.31. *В шаровой окрестности четырехмерной особенности типа фокус-фокус из теоремы Элиассона выполнены следующие утверждения:*

1) *Особый слой представляет собой объединение двух трансверсально пересекающихся дисков.*

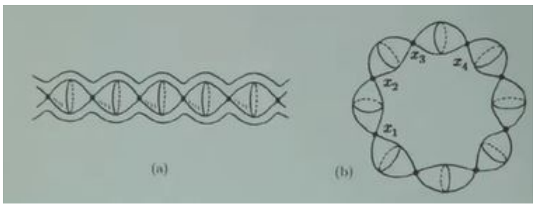
2) *Неособый слой - цилиндр.*

В общем случае фокусная особенность (т.е. окрестность слоя, содержащего только фокусные особые) полностью определяется количеством особых точек в слое.

Теорема 7.38. *(V.S. Matveev, Nguyen Tien Zung)*
Фокусные особенности равной сложности полулокально лиувиллево C^0-эквивалентны.

Топологические инварианты отсутствуют, но есть дифференциальные и симплектические инварианты.

Слой фокусной особенности - это тор с перетяжками



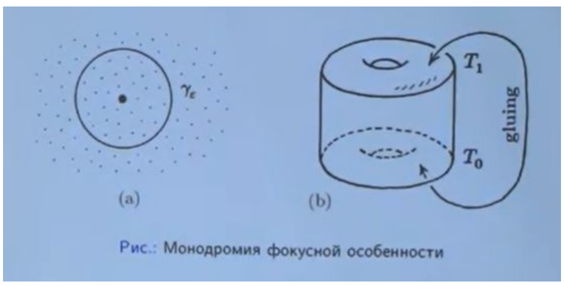


Рис.: Монодромия фокусной особенности

Теорема 7.39. *(V.S. Matveev, Nguyen Tien Zung)*
Матрица монодромии для фокусной особенности сложности k имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если $(M_1^{2k}, w_1, f_1, \ldots, f_k)$ и $(M_2^{2l}, w_2, g_1, \ldots, g_l)$ - две ИГС, то

$$(M_1^{2k} \times M_2^{2l}, w_1 \times w_2, f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l)$$

тоже ИГС. Это система типа прямое произведение.
Точка (x_1, x_2) - особая $\Leftrightarrow$ хотя бы одна из точек x_1, x_2 критическая.
Ранг точки (x_1, x_2) - сумму рангов точек x_1 и x_2.
Особая точка (x_1, x_2) - невырождена $\Leftrightarrow$ обе точки x_1, x_2 невырождены (или неособы).

Пример.

1) По теореме Лиувилля окрестность тора Лиувилля в системе с n степенями свободы лиувиллева эквивалентна произведению n тривиальных систем с одной степенью свободы.

2) По теореме Элиассона окрестность любой невырожденной точки распадается в прямое произведение базовых невырожденных особенностей.

Особенность типа почти прямого произведения - это фактор особенности типа прямого произведения

$$U = V_1 \times \ldots \times V_m$$

по действию группы G, удовлетворяющему следующим свойствам:

1) Группа G действует на каждом сомножителе V_i симплектоморфизмами

$$\psi_i : \ G \to Symp(V_i),$$

сохраняющими слоение Лиувилля на них.

2) Действие G на произведении $V_1 \times \ldots \times V_m$ свободно.

$$\psi(g)(x_1, \ldots, x_m) = (\psi_1(g)(x_1), \ldots, \psi_m(g)(x_m))$$

Так как действие свободно, фактор $U \backslash G$ - это многообразие.

Так как действия симплектические и сохраняют слоения Лиувилля, на факторе $U \backslash G$ индуцируется симплектическая структура и слоение Лиувилля.

Рассмотрим невырожденную особенность слоения Лиувилля на (M^{2n}, w).

Пусть L - особый слой слоения Лиувилля, Σ_L - бифуркационная диаграмма окрестности этого слоя.
Пусть x_j - точки минимального ранга r на L.

Эти точки образуют один или несколько критических торов рагмерности r.
Для каждого тора рассмотрим их малые окрестности и соответсвующие бифуркационные диаграммы Σ_{x_j}.

Говорят, что невырожденная особенность удовлетворяет условию нерасщепляемости, если все бифуркационные диаграммы Σ_{x_j} совпадают между собой и совпадают со всей бифуркационной диаграммой:

$$\Sigma_L = \Sigma_{x_j}$$

Теорема 7.40. *(Nguyen Tien Zung)*
Любая невырожденная особенность, которая удовлетворяет условию нерасщепляемости лиувиллево эквивалентна особенности типа почти прямого произведения со слагаемыми одного из следующих типов:

1) *эллиптическая особенность V_{ell} одной степени свободы (т.е. атом A);*

2) *гиперболическая особенность V_{hyp} с одной степенью свободы;*

3) *фокусная особенность V_{foc} с двумя степенями свободы;*

4) *тривиальное слоение Лиувилля V_{reg} без особенностей с одной степенью свободы (т.е. прямое произведение $D^1 \times S^1$).*

Эллиптические особенности возникают в следующих известных теоремах (пока краткая, нестрогая формулировка):

1) Atiyah-Guillemiin-Sternberg: образ отображения момента - выпуклый многогранник.

2) Delzant: гамильтоновы $\mathbb{T}^n$ действия классифицируются своим образом отображения момента.

Теорема 7.41. *(Атья, Гийемин, Стернберг)*
Для гамильтонова действия тора $\mathbb{T}^k$ на компактном симплектическом многообразии (M^{2n}, w).

1) *Проообраз любой точки $\xi \in \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^n$ при отображении момента $\mu^{-1}(\xi)$ связен (или пуст).*

2) *Образ $\mu(M)$ есть выпуклое множество.*

3) *Образ $\mu(P)$ является выпуклой оболочкой конечного набора точек, являющихся образами всех неподвижных точек действия.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Определение 7.36. *Торическое (симплектическое) многообразие - это связное компактное многообразие (M^{2n}, w), на котором задано эффективное гамильтоново действие тора $\mathbb{T}^n$.*

Действие эффективно, если у отображения

$$\rho: \ \mathbb{T}^n \to Symp(M, w)$$

нет ядра $\ker\rho = e$.
Важно, что

$$\dim \mathbb{T}^n = \frac{1}{2}\dim(M^{2n}, w)$$

Определение 7.37. *Многогранник Дельзанта - это выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ т.ч.*

1) *В каждой вершине сходится ровно n ребер.*

2) *Каждое ребро параллельно вектору решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.*

3) *Для каждой вершины многогранника вектора, идущие вдоль ребер, сходящихся к вершине можно выбрать так, что они образуют базис решетки.*

Теорема 7.42. 1) *Образ отображения момента торического многообразия является многогранником Дельзанта.*

2) *Каждому многограннику Дельзанта соответствует только одно торическое многообразие.*

Образ отображения момента торического многообразия определен с точностью до аффинного преобразования с целочисленной матрицей линейной части:

$$\vec{x} \to A\vec{x} + \vec{b}, \quad A \in GL(n, \mathbb{Z}), \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

Пример
Тор $\mathbb{T}^2$ действует на $\mathbb{CP}^2$:

$$(e^{i\Theta_1}, e^{i\Theta_2}) \circ (z_0 \ : \ z_1 \ : \ z_2) = (z_0 \ : \ e^{i\Theta_1} z_1 \ : \ e^{i\Theta_2} z_2)$$

Проверить, что действие можно задать парой гамильтонианов

$$H_1 = \frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}, \qquad H_1 = \frac{|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}$$

Неподвижные точки действия:

$$(1 \ : \ 0 \ : \ 0), \quad (0 \ : \ 1 \ : 0), \quad (0 \ : \ 0 \ : \ 1)$$

Образ отображения момента - натянутый на них треугольник.

Задачи для исследования.

Теорема 7.43. *(J.J. Duistermaat (1980))*
Если лагранжево расслоение

$$\pi : \ (M^{2n}, w) \to B^n$$

с решеткой P допускает лагранжево сечение

$$s : \ B^n \to M^{2n},$$

то оно лагранжево эквивалентно факторкасательному расслоению

$$\pi_0 : \ (T^*B/P, w_0) \to B^n.$$

Эта теорема обобщает классическую теорему Лиувилля.

Теорема 7.44. *(J.J. Duistermaat (1980))*
Лагранжевы расслоения $\pi : \ (M^{2n}, w) \to B^n$ с решеткой P классифицируются с точностью до лагранжевой эквивалентности своим лагранжевым классом Черна

$$[\sigma] \in H^1(B, \Lambda T^*B/P).$$

Здесь $\Lambda T^*B/P$ - пучок лагранжевых сечений T^*B/P (пучок замкнутых решетчатых 1-форм на B^n).
$H^1(B, \Lambda T^*B/P)$ - когомологии Чеха с коэффициентами в пучке $\Lambda T^*B/P$.

Говорят, что на топологическом пространстве X задан пучок O со значениями в пространстве сечений некоторого расслоения, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлено некоторое семейство непрерывных сечений $O(U)$ расслоения над U таким образом, что:
если $V \subset U$ и $s \in O(U)$, то $s|_V \in O(V)$;
если $U = \cup_\alpha U_\alpha$ и s - такое сечение на U, что $s|_{U_\alpha} \in O(U_\alpha)$, то $s \in O(U)$.

Набросок доказательства.

Это все равно, что сказать, что расслоения классифицируются своими функциями склейки.
Пусть $\{U_\alpha\}$ - покрытие B^n т.ч. над каждым элементом покрытия существует лагранжево сечение $s_\alpha : \ U_\alpha \to (M^{2n}, w)$.
Набор функций склеек $\{\sigma_{\alpha\beta} = s_\beta s_\alpha^{-1}\}$ образуют коцикл (функции $\sigma_{\alpha\beta}$ - это сечения $\Lambda T^*B/P$).
Соответствующй класс 1-когомолгий Чеха $[\sigma] \in H^1(B, \Lambda T^*B/P)$ - искомый.

Короткая точная последовательность пучков:

$$0 \longrightarrow \Lambda T^*B/P \xrightarrow{i} T^*B/P \xrightarrow{d} \Lambda^2 B \longrightarrow 0$$

Соответствующая длинная точная когомологическая последовательность:

$$\ldots \longrightarrow H^0(B, T^*B/P) \xrightarrow{d} H^0(B, \Lambda^2 B) \xrightarrow{\delta} H^1(B, \Lambda T^*B/P)$$
$$\xrightarrow{i} H^1(B, T^*B/P) \xrightarrow{d} H^1(B, \Lambda^2 B) \longrightarrow \ldots$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Увержение 7.32. *Имеют место следующие естественные изоморфизмы:*

1) $H^1(B, T^*B/P) = H^2(B, P)$

2) $H^1(B, \Lambda^2 B) = H^3(B, \mathbb{R})$

1) Фактор $H^0(B, \Lambda^2 B)/H^0(B, T^*B/P) = H^2(B, \mathbb{R})/H^2_P(B)$ - это нетривиальные подкручивания.

2) Класс группы $H^1(B, T^*B/P) = H^2(B, P)$ - это препятствие к построению сечения.

3) Класс группы $H^1(B, \Lambda^2 B) = H^3(B, \mathbb{R})$ - это препятствие к построению симплектической структуры (класс $[\psi] \in H^3(B, \mathbb{R})$ почти лагранжева расслоения $\pi:\ (M^{2n}, \eta) \to B^n$, где $d\eta = \pi^*\psi$).

Определение 7.38. *Локально-тривиальное расслоение* $\pi:\ (M^{2n}, \eta) \to B^n$ *мы будем называть почти лагранжевым расслоением, если на тотальном пространстве* M^{2n} *задана 2-форма* η*, удовлетворяющая трем условиям:*

1) $d\eta = \pi^*\psi$ *для некоторой 3-1ормы на базе* B^n*.*

2) Форма η *невырождена.*

3) Ограничение формы η *на каждый слой тождественно равно нулю* $\eta\big|_{F_x} \equiv 0$*.*

Почти лагранжево расслоение авляется лагранжевым тогда и только тогда, когда $d\eta = 0$.

Рассматривается ИГС

$$F = (F_1, \ldots, F_n):\ (M^{2n}, w) \to \mathbb{R}^n.$$

Отображение F собственное (т.е. проообраз $\forall$ компакта - компакт).

Пространство (M^{2n}, w) разбивается на связные компоненты поверхностей уровня F:

$$\pi:\ (M^{2n}, w, \mathcal{L}) \to B$$

$\mathcal{L}$ - соотвествующее особое лагранжево слоение.
B - база или пространство орбит.

Две системы называются топологически/симплектически эквивалентными $\Leftrightarrow$ $\exists$ гомеоморфизм/симплектоморфизм, сохраняющий слоения.

Две ИГС

$$p_i:\ (M_i^{2n}, w_i, \mathcal{L}_i) \to O_i, \quad i = 1, 2$$

грубо топологически/симплетически эквивалентны, если существуют гомеоморфизм баз $\phi: O_1 \to O_2$, покрытия U_i базы O_1 и существуют послойные гомеоморфизмы/симплектоморфизмы

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

$$\begin{tikzcd}
p_1^{-1}U_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "p_1"] & p_2^{-1}(\phi U_i) \arrow[d, "p_2"] \\
U_i \arrow[r, "\phi"] & \phi U_i
\end{tikzcd}$$

т.ч. для каждой точки $x \in U_i \cap U_j$ "функции склейки" $\psi_i^{-1}\psi_j$ тождественно действуют на
фундаментальных группах стартов слоя $p_1^{-1}(x)$
первых гомологиях $H_1(p_1^{-1}(x), \mathbb{Z})$.

Пучок локальных симплектоморфизмов системы $\mathcal{A}_s$: открытому подмножеству U базы сопоставляются симплектоморфизмы $p^{-1}(U)$, которые тождественно действуют на
фундаментальных группах стратов слоя $p_1^{-1}(x)$
первых гомологиях $H_1(p_1^{-1}(x), \mathbb{Z})$

Функции склейки $\psi_i^{-1}\psi_j$ задают лагранжев класс Черна $\mu_L \in H^1(\mathcal{A}_s)$.

Теорема 7.45. *(N.T. Zung)*
Если у двух грубо симплектически эквивалентных интегрируемых гамильтоновых систем совпадают лагранжевы классы Черна (по отношению к общей "эталонной" системе), то они симплектически эквивалентны.

Аналог решетки: пучок аффинной монодромии $\mathcal{R}$ - открытому множеству U сопоставляется множество симплектических S^1-действий на $(\pi^{-1}(U), w)$, сохраняющих каждый слой $\mathcal{L}$.

Форма β на $(M^{2n}, \mathcal{L})$ мы будем называть базовой, есл для любого векторного поля X на M^{2n}, касающегося $\mathcal{L}$ выполнено

$$i_X\beta = i_X d\beta = 0$$

Дифференциал базовой формы - базовая форма.

$\mathcal{Z}^1$ - пучок замкнутых дифференциальных 1-форм.

Короткая точная последовательность пучков:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{Z}^1 \longrightarrow A_s = \mathcal{Z}^1/\mathcal{R} \longrightarrow 0$$

Соотетствующая длинная точная последовательность когомологическая последовательность:

$$\ldots \longrightarrow H^1(O, \mathcal{R}) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{Z}^1) \longrightarrow H^1(O, A_s)$$
$$\longrightarrow H^2(O, \mathcal{R}) \longrightarrow H^2(O, \mathcal{Z}^1) \longrightarrow \ldots$$

Увержение 7.33. $H^i(O, \mathcal{Z}^1) = H^{i+1}(O, \mathbb{R})$

Лекция 8. Геометрия Нийенхейса

Эта лекция примерно следует работе A.V. Bolsinov, A. Yu. Konyaev, V.S. Matveev, "Nijenhuis Geometry"

Тензор Нийенхейса. Свойства.

Пусть P - тензорное поле типа $(1,1)$ (или, другими словами, поле эндоморфизмов) на многообразии M.

Определение 8.39. *Тензор Нийенхейса N_P поля эндоморфизмов P - это тензорное поле типа $(1,2)$, задаваемое формулой*

$$\mathcal{N}_P(v,w) = P^2[v,w] + [Pv,Pw] - P[Pv,w] - P[v,Pw]$$

Операторы Нийенхейса - это тензорные поля P типа $(1,1)$ с нулевым тензором Нийенхейса $N_P = 0$.

Многообразие M, на котором задан оператор Нийенхейса называется многообразием Нийенхейса.

Упражнение 8.25. *Проверить, что N_P действительно задает тензор типа $(1,2)$.*

Для этого достаточно проверить, что отображение

$$N_P: \ Vect(M) \times Vect(M) \to Vect(M)$$

является $C^\infty(M)$ линейным по каждому аргументу.

Упражнение 8.26. *Проверить, что в локальных координатах*

$$(\mathcal{N}_P)^i_{jk} = P^l_j \frac{\partial L^i_j}{\partial x^l} - P^l_k \frac{\partial L^i_j}{\partial x^l} - P^i_l \frac{\partial P^l_k}{\partial x^j} + P^i_l \frac{\partial P^l_j}{\partial x^k}.$$

Пара скобок Пуассона $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ согласованы, если $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ - снова скобка Пуассона.

Увеждение 8.34. *Невырожденные скобки Пуассона $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда связывающий их оператор рекурсии*

$$P = \mathcal{A}\mathcal{B}^{-1}, \qquad P_x: \ T_xM \to T_xM$$

нийенхейсов.

Напомним, что если ∇ - симметрическая связность, то

$$[u,v] = \nabla_u v - \nabla_v u$$

Увеждение 8.35.

$$\mathcal{N}_P(u,v) = (P\nabla_u P - \nabla_{Pu}P)v - (P\nabla_v P - \nabla_{Pv}P)u.$$

Увреждение 8.36. *Рассмотрим тензор Нийенхейса $\mathcal{N}_P$ как отображение, сопоставляющее векторному полю эндоморфизмов:*

$$N_P: \ u = N_P(u, \cdot).$$

Тогда

$$\mathcal{N}_P: \ u \to P\mathcal{L}_u P - \mathcal{L}_{Pu} P,$$

где через $\mathcal{L}_v$ обозначена производная Ли вдоль поля v.

Увреждение 8.37. *Рассмотрим тензор Нийенхейса $\mathcal{N}_P$ как отображение, сопоставляющее 1-форме 2-форму:*

$$N_P: \ \alpha \to \beta = \alpha(N_P(\cdot, \cdot)).$$

Тогда

$$\beta(\cdot, \cdot) = d(P^{*2})(\cdot, \cdot) + d\alpha(P\cdot, P\cdot) - d(P^*\alpha)(P\cdot, \cdot) - d(P^*\alpha)(\cdot, P\cdot), \tag{8.1}$$

Увреждение 8.38. *Пусть P - оператор Нийенхейса.*
Тогда для любого полинома $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ с постоянными коэффициентами оператор $p(P)$ тоже является оператором Нийенхейса:

$$\mathcal{N}_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_{p(P)} = 0.$$

Увреждение 8.39. *Также*

$$d(\operatorname{tr} L^k) = k(L^*)^{k-1} d \operatorname{tr} L, \tag{8.2}$$

и более обще

$$d(\operatorname{tr} p(L)) = p'(L)^* d \operatorname{tr} L, \tag{8.3}$$

где $L^*: \ T_q^*M \to T_q^*M$ обозначает двойственный оператор к L и $p'(\cdot)$ обозначает производную $p(\cdot)$.

Доказательство. Условие $\mathcal{N}_L = 0$ запишем в виде

$$\mathcal{L}_{L\xi} L = L\mathcal{L}_\xi L.$$

Отсюда

$$(\mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi)L = 0.$$

Обозначим

$$\mathcal{D} = \mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi.$$

Тогда

$$\mathcal{D}(L^n) = \mathcal{D}(L^{n-1})L + L^{n-1}\mathcal{D}(L).$$

Поэтому

$$(\mathcal{L}_{p(L)\xi} - p(L)\mathcal{L}_\xi)p(L) = 0,$$

т.е. $\mathcal{N}_{p(L)} = 0$.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Чтобы доказать
$$d(\operatorname{tr} L^k) = k(L^*)^{k-1} d \operatorname{tr} L, \tag{8.4}$$
используем
$$\mathcal{L}_{L^n\xi} L = L^n \mathcal{L}_\xi L, \tag{8.5}$$
где $n = k - 1$. Получаем
$$\mathcal{L}_{L^{k-1}\xi} \operatorname{tr} L = \operatorname{tr}(\mathcal{L}_{L^{k-1}\xi} L) = \operatorname{tr}(L^{k-1}\mathcal{L}_\xi L) = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \mathcal{L}_\xi L^k = \frac{1}{k}\mathcal{L}_\xi \operatorname{tr} L^k,$$
что эквивалентно требуемому.

□

Увержение 8.40. *Если L - оператор Нийенхейса, то для любого векторного поля ξ*
$$L^*(d\chi(t)) - t \cdot d\chi(t) = \chi(t) \cdot d \operatorname{tr} L, \tag{8.6}$$
$\chi(t) = \det(t \cdot Id - L)$ - характеристический многолчен оператора L (а t рассматривается как формальный параметр).

Доказательство. Достаточно доказать, что
$$L^* d(\det L) = \det L \cdot d \operatorname{tr} L. \tag{8.7}$$
и подставить в эту формулу $t \cdot Id - L$ вместо L.

Вначале заметим, что для любого оператора L (не обязательно Нийенхейсова) и векторного поля η выполнено
$$\mathcal{L}_\eta \det L = \operatorname{tr}(\hat{L}\mathcal{L}_\eta L), \tag{8.8}$$
где $\hat{L}$ - коматрица L (т.е. $\hat{L}L = \det L \cdot Id$).

Поскольку L нийенхейсов оператор, $\mathcal{L}_{L\xi} L = L\mathcal{L}_\xi L$. Остается подставить в (8.7) $\eta = L\xi$:
$$\mathcal{L}_{L\xi} \det L = \operatorname{tr}(\hat{L}\mathcal{L}_{L\xi} L) = \operatorname{tr}(\hat{L}L\mathcal{L}_\xi L) = \det L \cdot \operatorname{tr} \mathcal{L}_\xi L = \det L \cdot \mathcal{L}_\xi \operatorname{tr} L,$$

□

Увержение 8.41. *Пусть L - оператор Нийенхейса и $\lambda(x)$ - гладкое собственное значение L, т.е. функция, удовлетворяющая условию*
$$\det(L - \lambda(x) \cdot Id) \equiv 0$$
Тогда дифференциал $d\lambda$ удовлетворяет следующему соотношению:
$$(L - \lambda(x))^* d\lambda(x) = 0. \tag{8.9}$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для точек $p \in M$ т.ч.

1) в их малой окрестности кратности собственных значений оператора L постоянны (такие точки всюду плотны),

2) $d\lambda(p) \neq 0$ (иначе тождество тривиально),

3) $\lambda(p) = 0$ (иначе заменим $L \to L - \lambda(p)Id$).

Выберем локальные координаты $x^1, \dots, x^n$ т.ч.

$$d\lambda(x) = x^n.$$

Тогда

$$\det L = x_n^k f(x), \quad f(p) \neq 0.$$

Нужно показать, что

$$L^* dx^n = 0.$$

Знаем, что

$$L^*(d \det L) = \det L \cdot d \operatorname{tr} L.$$

Подставляя $\det L = x_n^k f(x)$, получаем:

$$L^*(kf(x)dx_n + x_n df(x)) = x_n f(x) \cdot d \operatorname{tr} R$$

Требуемое равенство $L^* dx^n = 0$ получается, поскольку $\lambda(p) = x_n(p) = 0$ и $f(p) \neq 0$. □

Упражнение 8.27. *Пусть $\xi = \xi(x)$ - гладкое собственное векторное поле оператора Нийенхейса L с собственным значением $\lambda(x)$, т.е.*

$$(L - \lambda \cdot Id)\xi(x) = 0.$$

Тогда

$$(L - \lambda \cdot Id)\mathcal{L}_\xi L = 0.$$

Указание: использовать $L\mathcal{L}_\xi L - \mathcal{L}_{L\xi} L = 0$.

Увреждение 8.42. *Пусть $\lambda(x)$ - гладкое собственное значение оператора Нийенхейса L с (локально) постоянной кратностью.*
Тогда распределение

$$Im(L - \lambda(x) \cdot Id)$$

гладкое и интегрируемое.

Доказательство. Гладкость распределения - общий факт.
Интегрируемость $\operatorname{Im} L$ следует из теоремы Фробениуса.

Действительно,

$$L^2[u, v] + [Lu, Lv] - L[Lu, v] - L[u, Lv] = 0,$$

откуда

$$[Lu, Lv] = L([Lu, v] + [u, Lv] - L[u, v]) \in \operatorname{Im} L.$$

Далее, обозначим $L_\lambda = L - \lambda(x) \cdot Id$. Тогда:

$$[L_\lambda u, L_\lambda v] = [Lu, Lv] + [\lambda u, \lambda v] - [Lu, \lambda v] - [\lambda u, Lv] =$$

$$= L[Lu, v] + L[u, Lv] - L^2[u, v] + \lambda^2[u, v] + \lambda d\lambda(u)v -$$

$$-\lambda d\lambda(v)u - \lambda[Lu, v] - d\lambda(Lu)v - \lambda[u, Lv] + d\lambda(Lv)u =$$

$$= L_\lambda[Lu, v] + L_\lambda[u, Lv] - L_\lambda(L + \lambda Id)[u, v] - d\lambda(L_v u)v + d\lambda(L_\lambda v)u.$$

По ранее доказанному последние два слагаемых исчезают.
Откуда

$$[L_\lambda u, L_\lambda v] = L_\lambda([Lu, v] + [u, Lv] - (L + \lambda Id)[u, v]) \in \operatorname{Im} L_\lambda.$$

По теореме Фробениуса это доказывает утверждение. □

Упражнение 8.28. *В условиях прошлого утверждения, пусть все распределения*

$$\operatorname{Im}(L - \lambda(x) \cdot Id)^k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

постоянного ранга.
Тогда эти распределения гладкие и интегрируемы.

Если $\lambda = \lambda(x)$ - единственное собственное значение L в точке x, то существуют локальные координаты, в которых у L верхне-треугольная матрица (с λ на диагонали).

Увреждение 8.43. *Пусть L - оператор Нийенхенса.*
Тогда если $u, v \in \ker L$, то $[u, v] \in \ker L^2$.
Аналогично, если

$$u, v \in \ker(L - \lambda(x) \cdot Id),$$

то

$$[u, v] \in \ker(L - \lambda(x) \cdot Id)^2,$$

где $\lambda(x)$ - гладкая собственная функция L.

Доказательство. Если $Lu = 0$ и $Lv = 0$, то

$$0 = \mathcal{N}_L(u, v) = L^2[u, v] - L[Lu, v] - L[u, Lv] + [Lu, Lv] = L^2[u, v].$$

Пусть $Lu = \lambda u$ и $Lv = \lambda v$. Тогда

$$0 = L^2[u, v] + [\lambda u, \lambda v] - L[\lambda u, v] - L[u, Lv] =$$

$$= L^2[u, v] + \lambda^2[u, v] + \lambda d\lambda(u)v - \lambda d\lambda(v)u - \lambda L[u, v] + d\lambda(v)Lu - \lambda L[u, v] - d\lambda(u)Lv =$$

$$= L^2[u, v] - 2\lambda L[u, v] + \lambda^2[u, v] = (L - \lambda \cdot Id)^2[u, v].$$

То есть, $[u, v] \in \ker L_\lambda^2$. □

Типы точек.

Точка $p \in M$ называется алгебраически в общем положении (или алгебраически общей), если в ее окрестности постоянен алгебраический тип (т.е. характеристика Сегре) оператора L, т.е. постоянны

1) количество собственных значений λ_i,

2) размеры жордановых блоков, соответствущих каждому собственному значению λ_i

(Сами значения λ_i не учитываются.)

Точка $p \in M$ называется gl-регулярной, если в ее окрестности каждому собственному значению соответствует ровно один жорданов блок.
Это эквивалентно тому, что $GL(n)$ - орбита оператора

$$\mathcal{O}(L(p)) = \{XL(p)X^{-1} \mid X \in GL(n)\}$$

имеет максимальную размерность.

Рассмотрим характеристический многочлен

$$\chi_{P(x)}(t) = \det(t \cdot Id - P(x)) = \sum_{k=0}^{n} t^k \sigma_{n-k}(x)$$

Точка $p \in M$ называется дифференциально невырожденной, если дифференциалы коэффициентов характеристического многочлена

$$d\sigma_1(x), \ldots, d\sigma_n(x)$$

линейно независимы в этой точке.

Определение 8.40. *Точка $p \in M$ называется точкой скалярного типа, если*

$$L(p) = \lambda \cdot Id, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Локальное устройство операторов Нийенхейса.

Теорема 8.46. *Пусть L - оператор Нийенхейса.*
Пусть в окрестности точки $p \in M$ его характеристический многочлен разлагается в виде произведения двух взаимно-простых многочленов

$$\chi_L(T) = \chi_1(t)\chi_2(t), \qquad \text{НОД}(\chi_1(t), \chi_2(t)) = 1.$$

Тогда оба распределения

$$\mathcal{D}_i = \ker \chi_i(L)$$

интегрируемы.

Более того, в подходящей системе координат $(x_1, \dots, x_r, y_{r+1}, \dots, y_n)$ *(где* $\mathcal{D}_1$ *порождается векторами* ∂_{x_i}*, а* $\mathcal{D}_2$ *порождается векторами* ∂_{y_j}*) оператор* L *имеет блочно-диагональный вид:*

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} L_1(x) & 0 \\ 0 & L_2(y) \end{pmatrix}, \tag{8.10}$$

где $r \times r$ *матрица* L_1 *зависит только от* x*-координат, а* $(n-r) \times (n-r)$ *матрица* L_2 *зависит только от* y*-координат.*

Другими словами, L *распадается в прямую сумму операторов Нийенхейса:*

$$L(x, y) = L_1(x) \oplus L_2(y).$$

Применяя эту теорему для разложения характеристического многочлена на неприводимые множители, получаем:

Теорема 8.47. *Пусть спектр* L *в точке* $p \in M$ *состоит из*

1) k *вещественных собственных значений* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *с кратностями* $m_1, \dots, m_k$ *соответственно и*

2) s *пар комплексно-сопряженных собственных значений* $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ *с кратностями* $l_1, \dots, l_s$.

Тогда в окрестности точки $p \in M$ существуют локальные координаты

$$x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^{m_1}), \ \dots, \ x_k = (x_k^1, \dots, x_k^{m_k}), \ u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^{2l_1}), \ \dots, \ u_s = (u_s^1, \dots, u_s^{2l_s}),$$

в которых L принимает блочно-диагональный вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1(x_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & L_k(x_k) & & & \\ & & & L_1^{\mathbb{C}}(u_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L_s^{\mathbb{C}}(u_s) \end{pmatrix}$$

где каждый блок зависит только от своей группы переменных и является оператором Нийенхейса относительно них.

Другими словами, каждый оператор Нийенхейса L локально распадается в прямую сумму операторов Нийенхейса

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$$

каждый из которых в точке $p \in M$ имеет либо одно вещественное, либо пару комплексно-сопряженных собственных значений.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Следствие 8.7. *Предыдущая теорема дает канонический вид для полупростых операторов в окрестности алгебраически общей точки, т.е. для операторов, которые диагонализируются над $\mathbb{C}$, у которых кратности собственных значений локально постоянны.*

Главное - доказать, что распределение $\mathcal{D}_i = \ker \chi_i(L)$ интегрируемы.
Тогда по теореме Фробениуса существуют соответствующие локальные координаты (x, y), в которых распределение $\mathcal{D}_1$ задается координатами x, а распределение $\mathcal{D}_2$ - координатами y, и

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} L_1(x,y) & 0 \\ 0 & L_2(x,y) \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

Упражнение 8.29. *Показать, что если $N_L = 0$ и L имеет вид (8.11), то $L_1 = L_1(x)$ и $L_2 = L_2(y)$.*

Замечание 8.15. *Подчеркнем - предыдущие две теоремы верны в окрестности любой точки.*

Теорема 8.48. *Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ - коэффициенты характеристического многочлена:*

$$\chi(t) = \det(t \cdot Id - L) = t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \ldots + \sigma_{n-1} t + \sigma_n$$

оператора Нийенхейса L.
Тогда в любых локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ выполнено

$$J(x)L(x) = S_\chi(x)J(x), \quad \text{где } \; S_\chi(x) = \begin{pmatrix} -\sigma_1(x) & 1 & & & \\ -\sigma_2(x) & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\sigma_{n-1}(x) & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\sigma_n(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.12}$$

и $J(x)$ - матрица Якоби набора функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ от $x_1, \ldots, x_n$.

gl-регулярные нийенхейсовы операторы.

В работе
A.V. Bolsinov, A.Yu. Konyaev, V.S. Matveev, "Nijnehuis Geometry III: gl-regular Nijenhuis operators"
доказаны теоремы о приведении gl-регулярных нийенхейсовых операторов к первой и второй сопровождающим формам.
Также там описаны нормальные формы в окрестности особых точек в размерности два и некоторые топологические препятствия к существованию gl-регулярных нийенхейсовых операторов на замкнутых поверхностях.

Следующие условия эквивалентны:

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) $GL(n,\mathbb{R})$-орбита опреатора L
$$\mathcal{O}(L) = \{PLP^{-1} \mid P \in GL(n,\mathbb{R})\} \subset gl(n,\mathbb{R})$$
имеет максимальную размерность.

2) Операторы $ld, L, \ldots, L^{n-1}$ линейно независимы.

3) Каждому собственному значению L соответствует ровно один жорданов блок (включая комплексные собственные значения).

4) Минимальный полином L совпадает с характеристическим
$$\chi_L(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - L) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - \ldots - c_n.$$

5) L эквивалентна первой сопровождающей матрице
$$\begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ c_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

6) L эквивалентна второй сопровождающей матрице
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$
где c_i - коэффициенты характеристического многочлена $\chi_L(\lambda)$.

Теорема 8.49. *Рассмотрим вещественно аналитические gl-регулярные оператор L с характеристическим многочленом*
$$\chi_L(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - L) = \lambda^n - f_1\lambda^{n-1} - \ldots - f_n,$$
где $n \geq 2$, в достаточно малой окрестности точки $p \in M$.
Тогда следующие три условия эквивалентны:

1) L - оператор Нийенхейса.

2) Существует система локальных координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$, в которой L принимает следующий вид
$$L_1(x) = \begin{pmatrix} f_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ f_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ f_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

где $f_i = f_i(x)$ - коэффициенты характеристического многочлена в этой системе координат.
Эти коэффициенты удовлетворяют следующей системе УРЧП:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = f_i \frac{\partial f_1}{\partial x^{j+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x^{j+1}},$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x^j} = f_n \frac{\partial f_1}{\partial x^{j+1}}. \tag{8.14}$$

для $1 \leq i,\ j \leq n-1$.

3) *Существует система локальных координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$, в которой L принимает следующий вид*

$$L_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ f_n & f_{n-1} & \ldots & f_2 & f_1 \end{pmatrix}, \tag{8.15}$$

где $f_i = f_i(x)$ - коэффициенты характеристического многочлена в этой системе координат.
Эти коэффициенты удовлетворяют системе УРЧП, которая может быть записана следующим образом

$$dw = 0, \quad d(L^* w) = 0, \tag{8.16}$$

где $w = f_n dx^1 + \ldots + f_1 dx^n$.

Теорема 8.50. *Для любых n вещественно-аналитических функций $v_1(t), \ldots, v_n(t)$, определенных в окрестности нуля, рассмотрим функцию*

$$r(\lambda, t) = \lambda^n - v_1(t)\lambda^{n-1} - v_2(t)\lambda^{n-2} - \ldots - v_{n-1}(t)\lambda - v_n(t)$$

и матричное соотношение

$$r(L, M) = 0,$$

где $M = x^1 L^{n-1} + x^2 L^{n-2} + \ldots + x^{n-1} L + x^n Id$ и L - gl-регулярная $n \times n$ матрица. Тогда

1) *По теореме о неявной функции коэффициенты $f_1, \ldots, f_n$ характеристического полинома L однозначно выражаются в окрестности $x = 0$ из этого матричного соотношения как вещественно-аналитические функции от $x^1, \ldots, x^n$.*

2) *Полученные таким образом функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ - это решения*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = f_i \frac{\partial f_1}{\partial x^{j+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x^{j+1}},$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x^j} = f_n \frac{\partial f_1}{\partial x^{j+1}}, \tag{8.17}$$

удовлетворяющие начальному условию

$$\begin{array}{c} f_1(0, \dots, 0, x^n) = v_1(x^n), \\ f_2(0, \dots, 0, x^n) = v_2(x^n), \\ \dots \\ f_n(0, \dots, 0, x^n) = v_n(x^n). \end{array} \tag{8.18}$$

Теорема 8.51. *Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ - коэффициенты характеристического многочлена:*

$$\chi(t) = \det(t \cdot Id - L) = t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \ldots + \sigma_{n-1} t + \sigma_n$$

оператора Нийенхейса L. Тогда в любых локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ выполнено

$$J(x)L(x) = S_\chi(x)J(x), \quad \text{где} \quad S_\chi(x) = \begin{pmatrix} -\sigma_1(x) & 1 & & & \\ -\sigma_2(x)^0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\sigma_{n-1}(x) & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\sigma_n(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

и $J(x)$ - матрица Якоби набора функций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ от $x_1, \dots, x_n$.

Следствие 8.8. *Если функции $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ функционально независимы в окрестности т. $p \in M$, то L однозначно восстанавливается по ним в окрестности этой точки по формуле*

$$L(x) = J^{-1} S_\chi(x) J(x).$$

Используя теорему о восстановлении опертора Нийенхейса по его характеристическому многочлену, получаем:

Теорема 8.52. *Пусть L - оператор нийенхейса на M^n. Предположим, что L дифференциально невырожден в точке $p \in M$ и что дифференциалы коэффициентов характеристического полинома $d\sigma_1, \dots, d\sigma_n$ линейно независимы в точке p.*
Тогда существуют локальные координаты $x_1, \dots, x_n$, в которых

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & & & \\ x_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ x_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

Упражнение 8.30. *Обобщить предыдущую теорему, разложив локально оператор оператор Нийенхейса в прямую сумму, в соответствии с разложением характеритического многочлена на множители.*

Утверждение этой теоремы можно переписать как

$$L^*(d\chi(t)) = -\chi(t) \cdot d\sigma_1 + t \cdot d\chi(t)$$

и оно получается, если приравнять коэффициенты при первой степени в формуле из следующего утверждения.

Увреждение 8.44. *Если L - оператор Нийенхейса, то для любого векторного поля ξ*

$$L^*(d\chi(t)) - t \cdot d\chi(t) = \chi(t) \cdot d\operatorname{tr} L, \tag{8.21}$$

$\chi(t) = \det(t \cdot Id - L)$ *- характеристический многочлен оператора L (а t рассматривается как формальный параметр).*

Упражнение 8.31. *Если L дифференциально-невырожденный оператор на почти всем M, то следующие условия эквивалентны:*

1) *L - оператор Нийенхейса;*
2) *$d(\operatorname{tr} L^k) = k(L^*)^{k-1} d\operatorname{tr} L$ для $k = 2, \ldots, n+1$;*
3) *$L^*(d\chi(t)) - t \cdot d\chi(t) = \chi(t) \cdot d\operatorname{tr} L$.*

Некоторые дальнейшие результаты.

Линейные операторы Нийенхейса соответствуют левосимметрическим алгебрам. В работе

A.Yu. Konyaev, "Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators"

классифицированы эти алгебры размерности 2 и изучена проблема линеаризации в окрестности точек скалярного типа.

В работе

A.V. Bolsinov, A.Yu. Konyaev, V.S. Matveev, "Applications of Nijenhuis geometry: Nondegenerate singular points of Poisson-Nijenhuis structures"

доказана следующая теорема об устройстве структур Пуассона-Нийенхейса в окрестности особых точек.

Теорема 8.53. *Пусть (w, P) - вещественно-аналитическая структура Пуассона-Нийенхейса на M^{2n}.*
Предположим, что в точке $p \in M^{2n}$ дифференциалы $d\operatorname{tr} P, \ldots, d\operatorname{tr} P^n$ линейно независимы.

Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, в которых $w = \sum_i dx_i \wedge dp_i$, а L задается матрицей

$$\begin{pmatrix} A & 0_n \\ S & A^T \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -x_{n-1} & \vdots & & \ddots & 1 \\ -x_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_n \\ p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 9. Согласованные скобки Пуассона

Согласованные скобки Пуассона.

Определение 9.41. *Две скобки Пуассона A и B называются согласованными, если любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами $\alpha A + \beta B$ тоже является скобкой Пуассона.*

Пару согласованных скобок Пуассона также называют бигамильтоновой структурой.

Замечание 9.16. *Скобки Пуассона A и B согласованы $\Leftrightarrow$ $A + B$ тоже является скобкой Пуассона.*

Увеждение 9.45. *Если A - невырожденная скобка Пуассона, то пара скобок Пуассона A и B согласовны тогда и только тогда, когда равен нулю тензор Нийенхейса оператора рекурсии $P = BA^{-1}$:*

$$N_P = 0$$

Пусть $\mathfrak{g}$ - конечномерная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ - соответствующее двойственное пространство. На коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ существуют естественные скобки Пуассона:

1) Линейная скобка (скобка Ли-Пуассона):

$$\{f, g\}(x) :=< x, [df|_x, dg|_x] >,$$

2) Постоянная скобка (скобка с замороженным аргументом). Фиксируем $a \in \mathfrak{g}$. Тогда
$$\{f, g\}_a(x) :=< a, [df|_x, dg|_x] > .$$

Мы воспользовались каноническим изоморфизмом $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$.
Скобка $\{,\}_a$ согласована со скобкой Ли-Пуассона $\{,\}$ для любого $a \in \mathfrak{g}^*$.
Иногда пучок $\{,\} + \lambda\{,\}_a$ называют пучком "сдвига аргумента" .

Пусть A и B - согласованные скобки Пуассона на многообразии M.

1) Через A_λ, где $\lambda \in \hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ мы будем обозначать скобку $A + \lambda B$, если $\lambda \in \mathbb{K}$ или B, если $\lambda = \{\infty\}$. Однопараметрическое семейство $\{A + \lambda B\}$ мы будем называть пуском согласованных скобок Пуассона.

2) Ранг скобки Пуассона A, заданной на многообразии M, равен
$$\max_{x \in M}(\operatorname{rk} A(x))$$
Рангом пучка согласованных скобок Пуассона $\{A + \lambda B\}$ называется число
$$\max_{\lambda \in \hat{\mathbb{K}}}(\operatorname{rk} A_\lambda)$$

3) Скобка A_λ из пучка называется регулярной (в точке x), если

$$\operatorname{rk} A(x) = \max_{\lambda \in \hat{\mathbb{K}}} \operatorname{rk}\{A + \lambda B\}(x)$$

Динамическую систему $\dot{x} = v$ на многообразии M, на котором заданы две согласованные скобки Пуассона $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют бигамильтоновой, если она является гамильтоновой сразу относительно обоих скобок Пуассона и любой их нетривиальной линейной комбинации.

Интегрируемость многих гамильтоновых систем связана с наличием бигамильтоновой структуры:

1) F. Magri, "A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation"

2) Мищенко А.С., Фоменко А.Т. "Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли"

3) А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, "Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем"

"Словарик" : Линейная алгебра $\leftrightarrow$ дифференциальная геометрия
Кососимметричная форма $\leftrightarrow$ скобка Пуассона
Ядро кососимметричной формы $\leftrightarrow$ функции Казимира
Пучок кососимметричных форм $\leftrightarrow$ согласованные скобки Пуассона
Изотропные пространства $\leftrightarrow$ семейства коммутирующих функций
Максимально изотропные подпространства $\leftrightarrow$ интегрируемые системы
Билагранжевы подпространства $\leftrightarrow$ полные свойства фукнций в биинволюции.

Теорема Туриэля.

Перейдем к краткому описанию локального устройства (невырожденных) бигамильтоновых структур.

Результаты о локальном устройстве пары согласованных скобок Пуассона:

I.S. Zakharevich, "Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation"
A. Panasyuk, "Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank, Poisson geometry"
F.J. Turiel, "Classification locale simultanee de deux formes symplectiques compatibles"
F.J. Turiel, "On the local theory of Veronese webs"
F.J. Turiel, "The local product theorem for bihamiltonian structures"

Пусть M - вещественное или комплексное многообразие.
В вещественном случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ все гладкое (класса C^∞).
В комплексном случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ все комплексно-аналитическое (в частности все 2-формы - это (2,0)-формы).

Определение 9.42. *Пару дифференциальных 2-форм (w_0, w_1) на многообразии M мы будем называть согласованными, если выполнены следующие условия:*

1) *Форма w_0 невырождена.*

2) *Обе формы w_0 и w_1 замкнуты*

$$dw_0 = 0, \qquad dw_1 = 0$$

3) *Тензор Нийенхейса поля эндоморфизмов $P = w_0^{-1} w_1$ равен нулю*

$$N_P = 0.$$

Напомним, что тензор Нийенхейса N_P поля эндоморфизмов P задается формулой

$$N_P(X, Y) = [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY] + P^2[X, Y].$$

Определение 9.43. *Пусть (w_0, w_1) - пара соглсованных 2-форм на многообразии M. Точку $x_0 \in M$ мы будем называть регулярной, если в некоторой ее окрестности Ox_0 постоянны следующие инварианты Жордана-Кронекера:*

1) *количество различных собственных значений λ_i операторов $P_x : T_xM \to T_xM$,*

2) *количество и размеры жордановых блоков, отвечающих каждому собственному значению λ_i.*

Регулярные точки можно также описать следующим образом. Напомним, что локальным репером называется набор векторных полей, заданных в окрестности некоторой точки многообразия, и линейно независимых в каждой точке этой окрестности.

Замечание 9.17. *Точка $x_0 \in M$ является регулярной тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки существует локальный репер $v_1(x), \dots, v_n(x)$ такой, что матрицы обеих форм w_0 и w_1 имеют блочно-диагональный вид, как в теореме Жордана-Кронекера*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix},$$

но каждое собственное значение $\lambda_i(x)$ зависит от точки многообразия:

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J(\lambda_i(x)) \\ \hline -J^T(\lambda_i(x)) & 0 \end{array}\right), \quad B_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -E & 0 \end{array}\right)$$

Локальное устройство невырожденных бигамильтоновых структур в окрестности регулярной точки было описано Туриэлем в

F.J. Turiel, "Classification locale simultanee de deux formes symplectiques compatibles"

А именно, в работе описана структура согласованных 2-форм в окрестности таких регулярных точек $x_0 \in (M, w_0, w_1)$, что каждое собственное значение либо постоянно, либо не имеет критических точек в некоторой окрестности точки x_0:

$$\lambda_i \equiv const, \text{ или } d\lambda_i(x) \neq 0.$$

Следующие две теоремы позволяют свести задачу к случаю одного собственного значения в комплексном случае или к случаю одного вещественного или двух комплексно-сопряженных значений в вещественном случае.

Теорема 9.54. *(Turiel, 1994)*
Пусть (w_0, w_1) - пара согласованных 2-форм на многообразии M.
Тогда у любой регулярной точки $x_0 \in (M, w_0, w_1)$ существует окрестность Ox изоморфная прямому произведению многообразий, с заданными на них парами могласованных 2-форм:

$$(Ox, w_0, w_1) = \prod (O_i x, w_{0,i}, w_{1,i}),$$

где характеристический многочлен каждой пары форм $(w_{0,i}, w_{1,i})$ неразложим.

Эта теорема верна не только для регулярных точек (это факт про оператор Нийенхейса).

Случай постоянных собственных значений описывается следующей теоремой.

Определение 9.44. *Невырожденную бигамильтонову структуру (w_0, w_1) мы будем называть плоской в точке $x \in M$, если существуют такие локальные координаты в окрестности этой точки, в которых матрицы обеих форм w_0 и w_1 записываются с постоянными коэффициентами.*

Теорема 9.55. *(Turiel, 1994)*
Невырожденная бигамильтонова структура (w_0, w_1) является плоской в окрестности точки $x \in M$ тогда и только тогда, когда точка x регулярна и все собственные значения постоянны.

Определение 9.45. *Пару невырожденных бигамильтоновых структур (M', w_0', w_1') и (M'', w_0'', w_1'') мы будем называть изоморфными тогда и только тогда, когда существует диффеоморфизм $f: M' \to M''$ такой, что $f^* w_1'' = w_1'$ и $f^* w_2'' = w_2'$.*

Теорема 9.56. *(Turiel, 1994)*
Раасмотрим пару форм (w_0', w_1') и (w_0'', w_1'') на многообразиях M' и M'', такие, что каждой паре соответствует только одно собственное непостоянное значение без критических точек.
Тогда регулярные точки $x' \in M'$ и $x'' \in M''$ имеют изоморфные окрестности тогда и только тогда, когда разложения Жордана-Кронекера пар форм (w_0', w_1') и (w_0'', w_1'') в этих точках совпадает (т.е. состоит из одного и того же набора жордановых блоков).

Не все инварианты Жордана-Кронекера можно реализовать неплоскими согласованными 2-формами.

Теорема 9.57. *(Turiel, 1994)*
Пусть (w_0, w_1) - пара согласованных 2-форм на многообразии M с одним собственным значением λ, которое не имеет критических точек на M.
Тогда для любой регулярной точки $x \in M$ в разложении Жордана-Кронекера соответствующего касательного пространства $(T_{x_0}M, w_0, w_1)$ наибольший жорданов блок всегда (строго) больше, чем остальные жордановы блоки.

Теорема 9.58. *Пусть w_0 и w_1 - согласованные 2-формы на многообразии M^n, а $x_0 \in M^n$ - регулярная точка.*
Пусть далее у поля эндоморфизмов $P = w_0^{-1}w_1$ только одно собственное значение λ и $d\lambda|_{x_0} \neq 0$. Пусть разложение Жордана-Кронекера пары форм w_0 и w_1 в точке x_0 состоит из жордановых $k_1 + 1, k_2, \dots, k_n$ блоков, где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.
Тогда в окрестности точки x_0 существуют локальные коодинаты

$$(x_1^1, \dots, x_1^{k_1}, y_1^1, \dots, y_1^{k_1}, x_2^2, \dots, \dots, y_n^{k_n}, z, \lambda)$$

такие, что

$$w_0 = \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_s} dx_s^i \wedge dy_s^i\right) + dz \wedge d\lambda$$

$$w_1 = \lambda w_0 + \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_s} dx_s^i \wedge dy_s^{i+1}\right) + \alpha \wedge d\lambda + dy_1^1 \wedge d\lambda,$$

где

$$\alpha = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{k_s}(i + \frac{1}{2})y_s^i dx_s^i + (i - \frac{1}{2})x_s^i dy_s^i.$$

Иными словами, матрицы форм имеют вид:

$$w_0 = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & E_{k_1} & & & & & \\ -E_{k_1} & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & E_{k_n} & & \\ & & & -E_{k_n} & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$w_1 = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & J_{k_1}(\lambda) & & & & 0 & \alpha_1 \\ -J_{k_1}^T(\lambda) & 0 & & & & & \beta_1 + \delta \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & J_{k_n}(\lambda) & 0 & \alpha_n \\ & & & -J_{k_n}^T(\lambda) & 0 & 0 & \beta_n \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ -\alpha_1^T & -\beta_1^T - \delta^T & \dots & -\alpha_n^T & -\beta_n^T & -\lambda & 0 \end{array}\right),$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

где

$$\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y_s^1 \\ \frac{5}{2}y_s^2 \\ \vdots \\ (k_s+\frac{1}{2})y_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad \beta_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_s^1 \\ \frac{3}{2}x_s^2 \\ \vdots \\ (k_s-\frac{1}{2})x_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Замечание 9.18. *1) Подчеркнем, что последняя координата - это собственное значение λ. Также отметим, что $\dfrac{\partial}{\partial z}$ - это гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $\pm\lambda$ относительно формы w_0. (Знак $\pm$ зависит от соглашения о знаках при определении гамильтонового векторного поля.)*

2) Слагаемое $\alpha \wedge d\lambda$ нужно, чтобы форма w_1 была замкнута.

3) Слагаемое $dy_1^1 \wedge d\lambda$ нужно, чтобы инварианты Жордана-Кронекера в окрестности точки x_0 были постоянны.

Другой вид форм (одна форма - линейная, другая - постоянная) описан в

Oliver, P.J., "Canonical forms and integrability of biHamiltonian systems"

Также там описаны бигамильтонианы.

Интегрируемость инвариантных распределений.

Подпространство W линейного пространства V, на котором заданы две кососимметричные билинейные формы A и B, мы будем называть инвариантным, если оно инвариантно относительно действия группы бисимплектоморфизмов $BSp(V, A, B)$, т.е. группы автоморфизмов V, сохраняющих обе формы A и B.

Распределение $\widetilde{\mathtt{v}}$ на многообразии M, на котором здана пара согласованных 2-форм (w_0, w_1) мы будем называть инвариантным, если каждое подпространство $\widetilde{\mathtt{v}}_x$ является инвариантным подпространством соответствующего касательного пространства T_xM.

Инвариантные распределния интегрируемы?
Этот вопрос был поставлен ранее в работе

Болсинов А.В., Изосимов А.М., Коняев А.Ю., Ошемков А.А. "Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования. Труды семинара по векторному и тензорному анализу."

Этот вопрос связан с изучением бигамильтоновых систем и локального устройства согласованных скобок Пуассона.

Теорема 9.59. *Пусть P - нильпотентный самосопряженный оператор на симплектическом пространстве (V, B).*

Тогда любое подпространство $W \subset V$ инвариантное относительно группы автоморфизмов $Aut(V, B, P)$ имеет вид

$$W = \oplus(\ker P^{k_j} \cap \operatorname{Im} P^{l_i}).$$

Следствие 9.9. *Если пространство (V, B, P) является суммой жордановых блоков одной и той же высоты k, то инвариантные подпространства - это в точности пространства*

$$\ker P^i = \operatorname{Im} P^{k-i}$$

Следующее замечание позволяет ввести ограничения на количество слагаемых и их виды.

Замечание 9.19. *Сумму подпространств вида $\ker P^{k_i} \cap \operatorname{Im} R^{l_i}$ можно также описать следующим образом. Обозначим через V_J^k сумму всех жордановых блоков высоты (ровно) k. Далее обозначим через $U^m(V_J^k)$, состоящее из всех векторов высоты m.*
Пусть протранство (V, B, P) является суммой жордановых блоков высоты $k_1, \ldots, k_N$, где $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$.
Тогда любое инвариантное подпространство имеет вид:

$$U^{m_1}(V_J^{k_1}) \oplus \ldots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}),$$

где

$$0 \le m_1 - m_2 \le k_1 - k_2$$
$$\ldots$$
$$0 \le m_{N-1} - m_N \le k_{N-1} - k_N$$

Теорема 9.60. *Пусть многообразие распадается в прямое произведение*

$$(M, w_0, w_1) = (M', w_0', w_1') \times (M'', w_0'', w_1''),$$

где характеристические многочлены χ' и χ'' пар форм (w_0', w_1') и (w_0'', w_1'') взаимнопросты в каждой точке M.
Тогда любое инвариантное распределение на M - прямое произведение инвариантных распределений на M' и M'':

$$F = F' \times F''$$

Произведение этих распределений интегрируемо $\Leftrightarrow$ каждое слагаемое интегрируемо.

Теорема 9.61. *Рассмотрим пару согласованных форм w_0, w_1 на M с одним собственным значением λ. Пусть x_0 - регулярная точка M.*
Предположим, что в точке x_0 размеры жордановых клеток оператора рекурсии $P = w_0^{-1} w_1$ равны

$$(k_1 + 1), \;\; (k_1 + 1), \;\; k_2, \;\; k_2, \;\; \ldots, \;\; k_n, \;\; k_n,$$

где

$$k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_n.$$

Тогда

1) *существует окрестность x_0, в которой все инвариантные распределения, кроме, может быть,*
$$\ker(P-\lambda E)^{k_i},$$
где $i>1$, являются интегрируемыми;

2) *распределения $\ker(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>1$, интегрируемы в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда $\lambda = const$ в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Доказательство проводится прямым вычислением. Достаточно найти локальный репер

$$e_1^0,\ e_1^1,\ \ldots,\ e_1^{k_1},\ f_1^0,\ \ldots,\ f_1^{k_1},\ e_2^1,\ \ldots,\ e_n^{k_n},\ f_n^1,\ \ldots,\ f_n^{k_n} \tag{9.1}$$

в окрестности точки x_0 в котором матрицы форм w_0 и w_1 состоят из жордановых блоков, после чего явно найти каждое инвариантное распределение и проверть его инволютивность.

Базис меньших $(k_2,\ldots,k_n)$ жордановых блоков:

$$e_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i^1} - \frac{(k_i+\frac12)y_i^{k_i}}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_i}},$$

$$e_i^s = (P-\lambda E)^{s-1}e_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i^s} - \frac{(k_i+\frac12)y_i^{k_i}}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_i-s+1}} + \alpha_i^s\frac{\partial}{\partial z},$$

$$f_i^{k_i} = \frac{\partial}{\partial y_i^1} - \frac{\frac12 x_i^1}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_i}},$$

$$f_i^s = (P-\lambda E)^{k_i-s}f_i^{k_i} = \frac{\partial}{\partial y_i^s} - \frac{\frac12 x_i^1}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^s} + \beta_i^s\frac{\partial}{\partial z},$$

где

$$\alpha_i^s = (s-\frac12)y_i^{s-1} - \frac{(k_i+\frac12)y_i^{k_i}}{(\frac12 x_1^1+1)}((k_i-s+\frac32)x_1^{k_i-s+2}+\delta_s^{k_i+1})$$

$$\beta_i^s = (s+\frac12)x_i^{s+1} - \frac{\frac12 x_i^1}{(\frac12 x_1^1+1)}((s+\frac12)x_1^{s+1}+\delta_0^s)$$

Базис наибольшего (k_1+1)-блока:

$$e_1^0 = -\frac{\partial}{\partial\lambda} + \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_s} -(j+\frac12)x_s^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_s^j} + (j-\frac12)y_s^{j-1}\frac{\partial}{\partial y_s^j}\right)$$

$$e_i^s = (P-\lambda E)^s e_i^0$$

$$f_1^{k_1} = \frac{1}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_1}},$$

$$f_1^s = (P-\lambda E)^{k_1-s} f_1^{k_1} = \frac{1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^s} + \beta_1^s \frac{\partial}{\partial z},$$

$$f_1^0 = \frac{\partial}{\partial z}$$

где

$$\beta_1^s = \frac{1}{\frac{1}{2}x_1^1+1}((s+\frac{1}{2})x_1^{s+1} + \delta_0^s)$$

□

Лемма 9.9. *В случае одного непостоянного собственного значения в описаннных локальных координатах инвариантные подпространства имеют вид*

$$U^{m_1+1}(V_j^{k_1+1}) \oplus \ldots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}) =< \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_1^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_1^{m_1}}, e_1^{k_1}, \ldots, e_1^{k_1-m_1} > \oplus \tag{9.2}$$

$$\bigoplus_{s=2}^{N} < \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+2}}, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+1}} - \frac{(k_s+\frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}, \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_s^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s-1}}, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s}} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}} > \tag{9.4}$$

Пусть w_0, w_1 - пара согласованных симплектических структур.

Задача. Какие инвариантные распределения интегрируемы?
Ранее обсуждались распределения, инвариантные в каждой точке. Здесь вопрос про автоморфизмы пучка $Aut(A+\lambda B)$ или локальный автоморфизм.
Не каждый автоморфизм в касательном пространстве будет продлжаться до локального автморфизма.

Гипотеза. Распределение должно выгляжеть так: λ - собственное значение (инвариантно) + $"d\lambda"$ и все, что "оно порождает" .
Т.е. к ответу для инвариантных поточечных распределений нужно добавить распределение, порожденное каждым собственным значением, и все, что оно порождает.

Лекция 10. Кронекеровы пучки

Кронекеровы пучки.

Определение 10.46. *Пучок согласованных скобок Пуассона $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ на M мы будем называть*

1) *жордановым (соответственно кронекеровым), если в каждой точке $x \in M$ разложение Жордана-Кронекера $\mathcal{A}(x)+\lambda\mathcal{B}(x)$ состоит лишь из жордановых (соответственно кронекеровых) блоков.*

2) *плоским, если в некоторой системе координат у бивекторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ постоянные коэффициенты.*

Напоминание

Жорданов блок

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & J_\lambda \\ \hline -J_\lambda^T & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ -E & 0 \end{array}\right)$$

Кронекеров блок

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & -1 & & & & 0 & \\ & & 0 & & & & & \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & & 0 & \\ & & -1 & & & & & \end{array}\right)$$

Когда на коалгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ пучок "сдвига аргумента"

$$\{,\} + \lambda\{,\},$$

плоский?

Если $\mathfrak{g}$ - простая, то пучок плоский, это доказано в:

A. Panasyuk, "Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank" .

I. Zakharevich, "Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation" .

Иварианты Жордана-Кронекера для пары билинейных форм (A, B) на линейном пространвнстве V:

1) количество и размеры кронекеровых блоков,

2) количество собственных значений λ_i,

3) количество и размеры жордановых блоков, соответствующих каждому собственному значению λ_i.

Указание. Какие инварианты ЖК у пары форм (A, B) на V^n (над полем K) в общем положении? Показать следующее.

1) Если $n = 2k$, то это k жордановых блоков 2×2 с различными собственными значениями.
   Это эквивалентно тому, что оператор рекурсии $P = B^{-1}A$ диагонализируем, и собственные значения "максимально различны" ,т.е. идут парами.

2) Если $n = 2k + 1$, то это один кронекеров $(2k + 1) \times (2k + 1)$ блок.
   Это эквивалентно тому, что

$$\dim\ker A + \lambda B = 1, \qquad \forall\lambda \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}.$$

Будем говорить, что пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ на нечетномерном многообразии M^{2n+1} в положении в точке $x \in M^{2n+1}$, если на $T_x^*M^{2n+1}$ соответствующее разложение ЖК состоит из одного кронекерова блока.

Опять же, это эквивалентно тому, что

$$\dim\ker\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x) = 1, \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Случай размерности 3.

В размерности 3 локально есть три вида плоских пучков:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$.

2) $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{B}$, где $\lambda = const$.

3) $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ - кронекеров пучок ранга 2.

Первые два случая тривиальны, рассмотрим третий.

3-сети

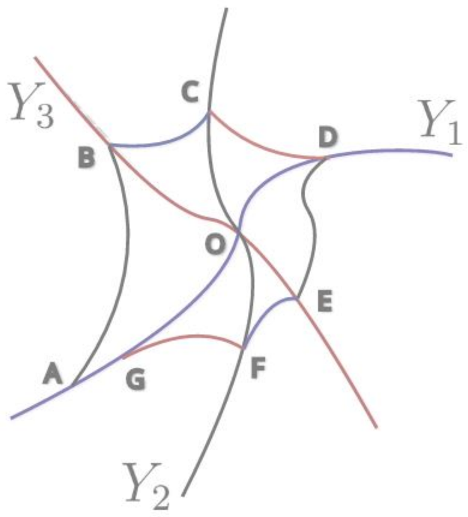
Определение 10.47. *3-сетью на плоскости $\mathbb{R}^2$ назовем три семейства гладких кривых, т.ч.*

1) Через каждую точку проходит ровно одна кривая из каждого семейства.

2) Кривые из разных семейств пересекаются трансверсально.

3-сеть называется тривиальной, если она диффеоморфна сети, заданной тремя семействами параллельных прямых.

Тривиальные 3-сети также называются гексагональными, потому что это 3-сети, для которых любой шестиугольник $ABCDEFG$ как на следующем рисунке замкнут (для любых точек O и A).



Теорема 10.62. *(Бляшке)*
3-сеть тривиальна тогда и только тогда, когда она гексагональна.

Далее, определим кривизну 3-сети.

Пусть кривые в 3-сети задаются функционалами f_1, f_2 и f_3. Пусть

$$\varepsilon = f_3(A) - f_3(O).$$

Тогда можно показать, что

$$f_3(G) - f_3(G) = \mathtt{k}\varepsilon^3 + \ldots$$

$\mathtt{k}$ зависит от выбора f_3, чтобы избавиться от неоднозначности, введем форму кривизны Бляшке

$$\theta = \mathtt{k}\frac{\partial f_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_3}{\partial f_2} df_1 \wedge f_2.$$

Теорема 10.63. *(Бляшке)*
3-сеть тривиальна тогда и только тогда, когда ее форма кривизны равна нулю.

Сети Веронезе

Рассмотрим пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ на M^3 в общем положении. Фиксируем малую шаровую окрестность $U \subset M^3$.
Пусть локально f, g, h - функции Казимира для $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

Следующие утверждения следуют из теоремы ЖК:

1) df, dg и dh попарно линейно независимы,

2) но все вместе df, dg и dh линейно зависимы

в каждой точке $x \in M^3$.

Таким образом, h - функция от f и g.
Рассмотрим отображение

$$\pi = (f, g) : \to \ \mathbb{R}^2$$

Образы поверхностей уровня f, g и h образуют 3-сеть $W(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

$W(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется бигамильтоновой редукцией пучка $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$.

Теорема 10.64. *Пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ общего положения плоский тогда и только тогда, когда есть $W(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ тривиальна.*

Эта теорема верна в любой размерности, не только 3.

В аналитическом случае эта теорема доказана в
I. Gelfand and I. Zakharevich, "Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems"
J.M. Gelfand and I. Zakharevich, "On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure"
В гладком случае эта теорема доказана в
F.J. Turiel, "C^∞ - equivalence entre tissus de Veronese et structures bihamiltoniennes"

Для пучка $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ на M^3 форма

$$\Theta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \pi^*(\theta),$$

где $\therefore$ - кривизна Бляшке сети $W(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется формой кривизны.

Теорема 10.65. *(А.М. Изосимов)*
Пусть $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ - пучок общего положения на трехмерном многообразии M^3. Тогда в локальных координатах x, y, z выполнено

$$\theta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 2\sum_{\text{цикл.}} \left(\left\{z, \frac{\operatorname{div}(\operatorname{sgrad}_{\mathcal{B}} z)}{\Delta_z}\right\}_{\mathcal{A}}\right) - \left(\left\{z, \frac{\operatorname{div}(\operatorname{sgrad}_{\mathcal{A}} z)}{\Delta_z}\right\}_{\mathcal{B}}\right) dx \wedge dy,$$

где

1) *сумма берется по циклическим перестановкам x, y, z;*

2) $\operatorname{sgrad}_{\mathcal{A}} z$ *и* $\operatorname{sgrad}_{\mathcal{B}} z$ *- гамильтоновы векторные поля $\mathcal{A}dz$ и $\mathcal{B}dz$ соответственно.*

3) $\operatorname{div} V$ *- это дивергенция* $\Sigma \dfrac{\partial V^i}{\partial x^i}$

4) Δ_z *имеет вид*

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \{z, x\}_{\mathcal{A}} & \{z, x\}_{\mathcal{B}} \\ \{z, y\}_{\mathcal{A}} & \{z, y\}_{\mathcal{B}} \end{vmatrix},$$

5) если Δ_x, Δ_y или Δ_z обращается в ноль, то соответствующие слагаемые опускаются.

Теорема 10.66. *(А.М. Изосимов)*
Пусть $\mathcal{P}$ - пучок общего положения на M^3.
Тогда

1) Локально существует (не единственная) согласованная с пучком связность ∇ без кручения, т.е.

$$\nabla \mathcal{A}_\lambda = 0, \quad \forall \mathcal{A}_\lambda \in \mathcal{P}.$$

2) Для любой такой связности ∇

$$\Theta(\mathcal{P}) = -4 AltRic \nabla.$$

Отметим, что в отличие от риманова случая тензор Ритчи не обязательно симметричен.

Отметим, что по первому тождеству Бьянки

$$AltRic = \frac{1}{2} \operatorname{tr} R,$$

где R - тензор кривизны Римана.
Поэтому

$$\Theta(\mathcal{P})(X, Y) = -2 \operatorname{tr} R(X, Y).$$

Примеры.

Лиев пучок - это пучок согласованных структур алгебр Ли.
Ему соответствует пучок линейных скобок Пуассона, т.е. пучок скобок Ли-Пуассона.
Рассмотрим пучок скобок Ли-Пуассона $\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}$ на V^*.
Например, подобные пучки возникают для волчков Манакова и Клебша.
Условие плоскости лиевых пучков:

$$\theta(\mathcal{P}) = 2 \sum_{\text{цикл.}} \left(\left\{ z, \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathcal{B}} z)}{\Delta_z} \right\}_{\mathcal{A}} \right) - \left(\left\{ z, \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathcal{A}} z)}{\Delta_z} \right\}_{\mathcal{B}} \right) dx \wedge dy,$$

где

1) x, y, z рассматривается как базис в V (и линейные координаты на V),

2)

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \{z, x\}_{\mathcal{A}} & \{z, x\}_{\mathcal{B}} \\ \{z, y\}_{\mathcal{A}} & \{z, y\}_{\mathcal{B}} \end{vmatrix},$$

3) $\operatorname{ad}_{\mathcal{A}} z$ и $\operatorname{ad}_{\mathcal{B}} z$ - операторы присоединенного представления для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Пример. Если $\mathcal{A}$ - полупростая алгебра Ли, то любой линейный пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ - плоский.

Действительно,
$\mathcal{A}+\varepsilon\mathcal{B}$ полупросты для малых ε,
кривизна обращается в ноль, поскольку $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z = \operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}} w = 0$ для любого $w \in V$.

Наконец, рассмотрим две согласованные скобки:

1) линейную скобку $\mathcal{A}$ (она соответствует алгере Ли $\mathfrak{g}$)

2) и постоянную $\mathcal{B}$ (она соответсвует 2-коциклу алгебры $\mathfrak{g}$).

В частности, сюда входят пучок "сдвига аргумента" (когда $\mathcal{B}$ соответсвует фиксированному элементу $a \in \mathfrak{g}^*$).

Условие плоскости этих пучков $\mathcal{P}(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$:

$$\theta(\mathcal{P}) = 2\sum_{\text{цикл.}} \frac{\mathcal{A}(z, \Delta_z)\operatorname{tr}(\operatorname{ad} z)}{\Delta_z^2} dx \wedge dy,$$

где

1) x, y, z рассматриваются как базис в $\mathfrak{g}$ (и линейные координаты на $\mathfrak{g}^*$);

2) $\operatorname{ad} z$ - оператор присоединенного представления для $\mathfrak{g}$.

3) $$\Delta_z = \begin{vmatrix} [z,x] & \mathcal{B}(z,x) \\ [z,y] & \mathcal{B}(z,y) \end{vmatrix}$$

1) Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то для $\operatorname{tr}\operatorname{ad} w = 0$ любого $w \in \mathfrak{g}$. Поэтому пучок $\mathcal{P}(\mathfrak{g}, \mathcal{A})$ плоский для любой постоянной скобки $\mathcal{A}$.

2) Пример неплоского линейного пучка (на 5-мерной алгебре Ли) описан в

A. Konyaev, "Algebraic and geometric properties of system obtained by the argument translation method"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 11. Общий случай

Плоские кронекеровы пучки.

Будем говорить, что пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ на нечетномерном многообразии M^{2n+1} в положении в точке $x \in M^{2n+1}$, если на $T_x^*M^{2n+1}$ соответствующее разложение ЖК состоит из одного кронекерова блока.

Опять же, это эквивалентно тому, что

$$\dim\ker\mathcal{A}(x)+\lambda\mathcal{B}(x) = 1, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}.$$

Теорема 11.67. *Пусть пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ - в общем положении в точке $x \in M^{2n+1}$.*

Тогда пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ плоский в окрестности точки x тогда и только тогда, когда существует полином f_λ степени n такой что при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено следующее:

1) f_λ - функция Казимира скобки $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$, т.е.

$$(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B})df_\lambda = 0,$$

2) $df_\lambda \neq 0$.

В следующей работе описан другой (более эффективный на практике) критерий плоскости пучка в общем положении - через инвариантые плотности.

A.M. Izosimov, "Flat bi-Hamiltonian structures and invariant densities"

Эта теорема была доказана в аналитическом случае в

I.M. Gelfand and I. Zakharevich, "Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures"

F.J. Turiel, "$C^\infty - equivalenceentretissusdeVeroneseetstructuresbihamiltoniennes$" .

Плотность на многообразии M^n - это n-форма, не обращающаяся в ноль ни в одной точке.

Плотность w на пуассоновском многообразии M^n мы назовем инвариантной, если она сохраняется всеми гамильтоновыми векторными полями.

Пуассоново многообразие, которое допускает инвариантную плотность, мы назовем унимодулярным.

Упражнение 11.32. *Показать, что любое пуассоново многообразие локально унимодулярно в окресности точки общего положения.*

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Указание: использовать теорему Дарбу-Вайнштейна.

Несложно использовать следующее:

Увеpждение 11.46. *Пусть $\mathcal{A}$ - скобка Пуассона на многообразии M^n.*
И пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ - локальные координаты в окрестности точки $z \in M$.
Тогда плотность

$$w = \rho(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

инвариантна относительно $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\mathcal{A}^{ij} \frac{\partial \log \rho}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^j} \right) = 0.$$

На самом деле, это условие на цикл наибольшей размерности в пуассоновых гомологиях.
Оно также может быть записано в виде

$$d(\mathcal{A} * w) = 0,$$

где звездочка обозначает свертку.

Плотность w би-инвариантна относительно бигамильтоновой структуры $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$, если она инвариантна относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{B}$.

Бигамильтонова структура унимодулярна, если для нее существует би-инвариантная плотность.

Теорема 11.68. *Пусть пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ - в общем положении в точке $x \in M^{2n+1}$.*

Тогда пучок $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$ плоский в окрестности точки x тогда и только тогда, когда он унимодулярный в окрестности точки x.

В локальных координатах мы получаем систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\mathcal{A}^{ij} \alpha_j + \frac{\partial \mathcal{A}^{ij}}{\partial x^j} \right) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\mathcal{B}^{ij} \alpha_j + \frac{\partial \mathcal{B}^{ij}}{\partial x^j} \right) = 0.$$

При этом,

1) если эта система имеет решение, то оно единственно;

2) пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ унимодулярный тогда и только тогда, когда замкнут 1-форма

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2n+1} \alpha_i dx^i,$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

3) биинвариантная плотность при этом задается формулой

$$w = \exp\left(\int\limits_{z_0}^{z} \alpha\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n+1}.$$

В следующей работе был получен критерий плоскости пучков, который эквивалентен ранее описанному критерию через плотности.

F.-J. Turiel. "Flatness of generic poisson pairs in odd dimension" .

Теорема 11.69. *Пусть пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ - в общем положении в точке $x \in M^{2n+1}$. Тогда пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ плоский в окрестности точки x тогда и только тогда, когда существует 1-форма λ т.ч. для любой плотности Ω выполнено:*

$$d(\mathcal{A} * \Omega) = \lambda \wedge (\mathcal{A} * \Omega),$$

$$d(\mathcal{B} * \Omega) = \lambda \wedge (\mathcal{B} * \Omega).$$

Докажем критерий через плотность. Вначале докажем следующее утверждение.

Увержение 11.47. *Пусть $\mathcal{A}$ - скобка Пуассона ранга $2n$ на $(2n+1)$-мерном многообразии M^{2n+1}.*
Пусть плотность w инвариантна относительно $\mathcal{A}$.

Рассмотрим 1-форму α, которая получается при свертке w с n-той внешней степенью $\mathcal{A}$:

$$\alpha = w * \Lambda^n \mathcal{A}.$$

Тогда

$$d\alpha = 0, \quad \text{и} \quad \mathcal{A}\alpha = 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение локально.
По теореме Дарбу-Вайнштейна локально координаты $(x^1, \ldots, x^{2n+1})$, в которых

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Пусть

$$w = \rho(x^1, \ldots, x^{2n+1}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Если w инвариантна, то ρ зависит только от x^{2n+1}:

$$w = \rho(x^{2n+1}) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Откуда

$$\alpha = w * \Lambda^n \mathcal{A} = const \cdot \rho(x^{2n+1}) dx^{2n+1}.$$

□

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Доказательство. Доказательство теоремы 11.69.

В одну сторону. Очевидно, что плоский пучок унимодулярен.
Достаточно взять форму $w = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n+1}$ в подходящих координатах.

В другую сторону. Пусть пучок унимодулярен - плотность w инвариантна относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.
Положим

$$\alpha_\lambda = w * \Lambda^n(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}).$$

Эта форма - полином степени n по λ.

По ранее доказанному

$$d\alpha_\lambda = 0, \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_\lambda\alpha_\lambda = 0.$$

Кроме того, $\alpha_\lambda \neq 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, поскольку $\dim\ker\mathcal{A}_\lambda = 1$.
Поэтому полагая

$$F_\lambda(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \alpha_z,$$

мы получаем полиномиальное семейство функций Казимира.
По ранее известному критерию (через функции Казимира) пучок плоский. □

Смешанный случай.

Распределение на поверхности уровня функций Казимира:

$$F = \cap_{\lambda-\text{общ. пол.}} \operatorname{Im}(A + \lambda B)$$

1) F инволютивно (в любой точке!) как пересечение инволютивных распределений.

2) Если A_μ регулярно, то $F \subset \operatorname{Im} A_\mu$. Поэтому ограничение $w_\mu|_F$ корректно определено ограничение соответствующей симплектической структуры w_μ в $\operatorname{Im} A_\mu$.

3)
$$F = Ann(\bigoplus_{\lambda-\text{общ. пол.}} \ker(A + \lambda B))$$

Локально - это расслоение на орбиты действия функций Казимира.

$$G = A_\mu(\bigoplus_{\lambda-\text{gener}} \ker A_\lambda)$$

для любого $\mu \in \overline{\mathbb{K}}$.
Здесь мы рассматриваем A_μ как отображение

$$A_\mu(x) : \ T_x^*M \to T_xM.$$

Следующие свойства вытекают из теоремы Жордана-Кронекера.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

1) Распределение G не зависит от μ.

2) $G = Ann(\bigoplus_{\lambda-\text{общ. пол.}} \ker(A+\lambda B) \oplus (\text{Жордановы блоки}))$

3) $G = \ker w_\mu|_F$.

4) G инволютивно (в каждой точке).

Теорема 11.70. *Рассмотрим регулярную точку $x_0 \in (M, A, B)$ пары согласованных скобок Пуассона A и B.*
Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - соотвествующие собственные значения скобок.

Тогда если

$$\dim < d\lambda_1, \dots, a\lambda_n >= \dim < a\lambda_1|_F, \dots, d\lambda_n|_F >,$$

где

$$F = \cap_{\lambda\text{- } gen} \mathrm{Im}(A+\lambda B),$$

то у точки y_0 существует окрестность, которая разлагается в прямое произведение симплектической и кронекеровой бигамильтоновой структуры по крайне мере в следующих случаях:

1) Комплексно или вещественно-аналитический.

2) Гладкий вещественный, если все собственные значения вещественные.

Замечание 11.20. *Это утверждение верно не только для регулярных точек (например, размеры кронекеровых блоков могут меняться).*

Рассмотрим скобки Пуассона A, B на многобразии M.
Пусть все кронекеровы блоки тривиальны и собственное значение только одно λ.
Тогда возможны 3 случая.

1) λ постоянно.
Тогда пучок плоский. (И, очевидно, расщепим.)

2) λ не постоянно, но постоянно на симплектических листах.

Тогда существует базис, в котором матрицы скобок A и B такие же, как и в теореме Жордана-Кронекера, но собственные значения λ зависят от листов.

Доказательство. A, $B-\lambda A$ - пара согласованных скобок Пуассона с одним постоянным собственным значением. □

(Пучок, очевидно, не расщепим.)

3) λ не постоянно на листах.

Тогда пучок расщепляется. Локальное устройство задается теоремой Туриэля.

Результаты о локальном устройтве пары согласованных скобок Пуассона в смешанном случае:

F.J. Turiel, "The local product theorem for bihamiltonian strucrutes"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 12. Невырожденные особенности и бигамильтоновы системы

Невырожденные особенности и бигамильтоновы системы.

Bolsinov, A.V.; Oshemkov, A.A. "Singularities of integrable Hamiltonian systems"
Bolsinov, A.V.; Oshemkov, A.A. "Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems"
Bolsinov, A.V.; Borisov, A.V.; Mamaev, I.S. "Topology and stability of integrable systems"
Bolsinov, A.V.; Izosimov A.M. "Singularities of bi-Hamiltonian systems"
Izosimov A.M. "Stability in bihamiltonian systems and multidimensional rigid body"

Определение 12.48. *Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ - пучок согласованных скобок Пуассона.*

Динамическая система
$$\dot{x} = v$$
называется бигамильтоновой, если она гамильтонова относительно всех скобок $\mathcal{A}_\lambda$ общего положения.

Обозначим через

$\mathcal{F}_P = \{$ алгебра, порожденная фукнциями Казимира регулярных скобок $\mathcal{A}_\lambda$ $\}$

Свойства $\mathcal{F}_P$:

1) Все фукнции из $\mathcal{F}_P$ - первые интегралы бигамильтоновой системы.

2) Функции из $\mathcal{F}_P$ попарно коммутируют между собой относительно любой скобки из пучка
$$\mathtt{f}, \mathtt{g} \in \mathcal{F}_P \quad \Rightarrow \quad \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}_\lambda = 0 \quad \forall\lambda.$$

Это немедленно следует из теоремы ЖК.

Теорема 12.71. *$\mathcal{F}_P$ полно тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{P}$ кронекеров.*

Это тоже следствие из теоремы ЖК.

Далее считаем, что $\mathcal{P}$ - кронекеров пучок.

Рассмотрим множество особых точек лагранжевого расслоения, заданного $\mathcal{F}_P$:
$$S_{\mathcal{P}} = \{x \in M \mid \dim d\mathcal{F}_{\mathcal{F}} \text{ не максимальна}\}.$$

Рассмотрим точки, где падает ранг каждой скобки
$$S_\lambda = \{x \in M \mid \operatorname{rank} \mathcal{A}_\lambda < \operatorname{rank} \mathcal{P}.$$

Теорема 12.72. $S_{\mathcal{P}} = \cup_{\lambda \in \overline{\mathbb{C}}} S_\lambda$.

Это следует из теоремы Дарбу-Вайнштейна.

Напомним, что линеаризация скобки Пуассона $\mathcal{A}$ - это алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ на $\ker \mathcal{A}(x)$, которая определяется следующим образом.

Если $\xi, \eta \in \ker \mathcal{A}(x)$ и

$$f, g \in C^\infty(M), \qquad df = \xi,\ dg = \eta,$$

то по определению

$$[\xi, \eta] = d\{f, g\}(x) \in \ker \mathcal{A}(x).$$

Теорема 12.73. *$x \in M$ - положение равновесия для $\mathcal{F}_P$ тогда и только тогда, когда ядра всех форм положения совпадают:*

$$\ker \mathcal{A}_\lambda(x) = \ker \mathcal{A} - \mu(x), \qquad \lambda, \mu - \textit{общ. пол.}$$

Пусть $\mathcal{P} = \{\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}\}$ - пучок согласованных скобок на M.
Фиксируем $x \in M,\ \lambda \neq 0$ и рассмотрим $\ker \mathcal{A}_\lambda(x)$.
На $\ker \mathcal{A}_\lambda(x)$ заданы две структуры:

1) структура алгебры Ли $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{\mathcal{A}_\lambda}$ - линеаризация скобки $\mathcal{A}$,

2) билинейная форма - ограничение формы B на $\ker \mathcal{A}_\lambda(x)$.

Увержение 12.48. *Эти две скобки Пуассона согласованы.*

Соответствующий пучок

$$d_\lambda \mathcal{P}(x)$$

называется λ-линеаризацией пучка $\mathcal{P}$ в точке $x \in M$.

Когда когласованы линейная и постоянная скобки Пуассона?

$$\mathcal{A}^{ij} = s_{ij}^k x_k, \qquad \mathcal{B}^{ij} = const.$$

Постоянная скобка не согласована со скобкой Ли-Пуассона на алгебре Ли тогда и только тогда, когда она является 2-коциклом, т.е.

$$B([\xi, \eta], \zeta) + B([\eta, \zeta], \xi) + B([\zeta, \xi], \eta) = 0$$

Рассмотрим пару $(\mathfrak{g}, B)$:

1) $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли,

2) B - 2-коцикл на $\mathfrak{g}$.

Обозначим соответствующий пучок скобок Пуассона через $\mathcal{P}^{\mathfrak{g}, B}$.

Построим по $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\mathfrak{g}, B}$ пучок коммутирующих функций $\mathcal{F}_P$.

1) Пучок $\mathcal{P}^{\mathtt{g},B}$ мы будем называть полным, если $\mathcal{P}$ полно.

2) Полный пучок $\mathcal{P}^{\mathtt{g},B}$ мы будем называть невырожденными, если $0 \in \mathtt{g}^*$ - невырожденная особая точка пучка $\mathcal{F}_P$.

Наша цель - описать все невырожденные пучки $\mathcal{P}^{\mathtt{g},B}$.

В общем случае для произвольного пучка $\mathcal{P}$ - когда для алгебры $\mathcal{F}_P$ точка $x \in S_{\mathcal{P}}$ невырождена?

Обозначим через $\Lambda(x)$ значения λ_i для которых ранг $\mathcal{A} + \lambda_i\mathcal{B}$.

Теорема 12.74. *Точка x невырождена тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda_i \in \Lambda(x)$:*

1) λ_i-линеаризация пучка $\mathcal{P}$ невырождена,

2) коранг λ_i-линеаризации равен $\operatorname{corank} \mathcal{P}$.

Тип Вильямсона точки x = "сумма" типов для всех λ_i-линеализаций.

Теорема 12.75. *(А.М. Изосимов)*
Комплексный случай.
Линейный пучок $\mathcal{P}^{\mathtt{g},B}$ невырожден тогда и только тогда, когда

$$\mathtt{g} \simeq (\bigoplus so(3,\mathbb{C})) \oplus ((\bigoplus \mathcal{D})/\mathtt{h}_0) \oplus (\bigoplus \mathbb{C}),$$

где
$\mathcal{D}$ - это бриллиантовая алгебра Ли.
$\mathtt{h}_0$ - это коммутативный идеал, лежащий в центре $\bigoplus \mathcal{D}$.
$\ker B$ - это картановская подалгебра $\mathtt{g}$.

Определение 12.49. *Бриллиантовая алгебра Ли - это 4-мерная (комплексная) алгебра с порождающими e, f, g, h, связанными соотношениями*

$$[t,e] = f, \quad [t,f] = -e, \quad [e,f] = h, \quad [h,\mathcal{D}] = 0.$$

$\mathcal{D}$ - это нетривиальное расширение $e(2,\mathbb{C})$.

Матричное представление $\mathcal{D}$:

$$\alpha e + \beta f + \theta + \gamma h \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 2\gamma \\ 0 & 0 & -\theta & \beta \\ 0 & \theta & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Функции Казимира:

$$F_1 = f^2 + e^2 + 2th, \quad F_2 = h.$$

Теорема 12.76. *(А.М. Изосимов)*
Вещественный случай.
Линейный пучок $\mathcal{P}^{\mathfrak{g},B}$ невырожден тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{g} = (\bigoplus so(3,\mathbb{R})) \oplus (\bigoplus sl(2,\mathbb{R})) \oplus (\bigoplus so(3,\mathbb{C}))\oplus$$

$$((\bigoplus \mathfrak{g}_{ell}) \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_{hyp}) \oplus (\bigoplus \mathfrak{g}_{foc})/\mathfrak{h}_0) \oplus (\bigoplus \mathbb{R})),$$

где

1) $\mathfrak{g}_{ell}$ *и* $\mathfrak{g}_{hyp}$ *- это нетривиальные центральные расширения* $e(2)$ *и* $e(1,1)$ *(это вещественные формы $\mathcal{D}$),*

2) $\mathfrak{g}_{foc}$ *рассматривается как вещественная алгебра Ли,*

3) $\mathfrak{h}_0$ *- это коммутативный идеал, лежащий в центре суммы,*

4) $\ker B$ *- это картановская подалгебра* $\mathfrak{g}$.

Тип особенности однозначно определяется количеством эллиптических, гиперболических и фокусных компонент в указанной сумме.

Теорема 12.77. *(теорема Элиассона)*
Всякое слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки типа (k_e, k_h, k_f) и ранга 0 локально симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения L_{ell}, k_h экземпляров слоения L_{hyp}, k_f экземпляров слоения L_{foc}, где

1) L_{ell} *- слоение в окрестности нуля в* $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$*, порожденное функцией*
$$p^2 + q^2.$$

2) L_{hyp} *- слоение в окрестности нуля в* $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq$*, порожденное функцией*
$$p^2 - q^2.$$

3) L_{foc} *- слоение в окрестности нуля в* $(\mathbb{R}^4, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$*, порожденное двумя коммутирующими функциями*
$$p_1q_1 + p_2q_2, \quad p_1q_2 - q_1p_2.$$

Рассмотрим вращение $2n$-мерного твердого тела.
Пусть

1) $\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ - разложение $\mathbb{R}^{2n}$ в 2-мерные подпространства, порожденные собственными векторами тензора инерции J,

2) w_i - угловые скорости вращения в плоскостях V_i,

3) J_i и J_i' - собственные значения J, соответствующие V_i (это главные моменты инерции).

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Рассмотрим функцию

$$y = f_i(x) = \frac{(x - J_i^2)(x - J_i'^2)}{w_i(J_i + J_i')^2},$$

которая задает параболу на плоскости (x, y).
Объединение этих парабол - это параболическая диаграмма P вращения.

Теорема 12.78. *1) Положение равновесия (стационарное вращение) $X \in so(n)$ невырождено тогда и только тогда, когда параболическая диаграмма P находится в общем положении.*

2) Если P в общем положении, то положение равновесия устойчиво тогда и только тогда, когда все пересечения вещественны и расположены в верхней полуплоскости.

Лекция 13. Инварианты Жордана-Кронекера

Alexey Bolsinov, Pumei Zhang, "Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras"

Инварианты Жордана-Кронекера.

Напоминание:

Теорема 13.79. *(теорема Жордана-Кронекера)*
Для любых двух кососимметрических билинейных форм A, B на конечномерном комплексном линейном пространстве V существует базис V, в котором матрицы A и B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

при этом каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1) *Жорданов блок с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \lambda & 1 & & \\ & 0 & & & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \\ \hline -\lambda & & & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & -\lambda & & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right)$$

2) *Кронекеров блок*

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & \\ & & 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 0 \\ \hline -1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ & \ddots & -1 & & 0 & \\ & & 0 & & & \end{array}\right) \quad B_i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & \\ & & 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & 0 & & 0 & \\ & & -1 & & & \end{array}\right)$$

Для пучка $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$:

1) Если кронекеровы блоки имеют размеры $(2k_i - 1) \times (2k_i - 1)$, то k_i мы будем называть Кронекеровыми индексами пучка $\mathcal{P}$.

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

2) Числа $-\lambda_i$ из жордановых блоков называются характеристическими числами пучка $\mathcal{P}$.

Сделав замену базиса в пучке можно всегда добиться, чтобы форма B была регулярна.

Определение 13.50. *Инвариантами Жордана-Кронекера пары согласованных скобок Пуассона мы будем называть следующий набор дискретных инвариантов:*

1) количество различных собственных значений жордановых блоков,

2) количество и размеры жордановых блоков для каждого собственного значения,

3) количество и размеры кронекеровых блоков.

Пусть $\mathfrak{g}$ - (конечномерная) алгебра Ли, а c_{ij}^k - ее структурные константы.
Мы получаем пару форм:

$$\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k), \qquad \mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k) \tag{13.1}$$

для любых $x, a \in \mathfrak{g}^*$.

Определение 13.51. *Иварианты Жордана-Кронекера алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *- это инварианты Жордана-Кронекера для пары* $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ *общего положения.*

Мы будем рассматривать только комплексные алгебры Ли.

Многие факты, верные над $\mathbb{C}$, верны и над $\mathbb{R}$.

Очевидно, что для скобок $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ эти инварианты одни и те же для точек x и параметров a общего положения.

Вопрос. Инварианты Жордана-Кронекера алгебр Ли:
1. Какими они могут быть?
2. Какие они у известных алгебр Ли?

Свойства инвариантов.

"Словарик" : Линейная алгебра $\leftrightarrow$ дифференциальная геометрия
Кососимметричная форма $\leftrightarrow$ скобка Пуассона
Ядро сосоимметричной формы $\leftrightarrow$ функции Казимира
Пучок кососимметричных форм $\leftrightarrow$ согласованные скобки Пуассона
Изотропные пространства $\leftrightarrow$ семейства коммутирующих функций
Максимально изотропные подпространства $\leftrightarrow$ интегрируемые системы
Блигранжевы подпространства $\leftrightarrow$ полные семейства функций в биинволюции.

Линейная алгебра

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Увеждение 13.49. *Для любой пары билинейных форм A, B на комплексном линейном пространстве V следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$ - кронекеров пучок, т.е. в разложении ЖК пары форм A, B нет жордановых блоков;*

2) *ранг всех форм пучка постоянен:*

$$\operatorname{rk} A_\lambda = \operatorname{rk} \mathcal{P}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

3) *ядерное подпространство $K \subset V$ билаганжево;*

4) *есть только одно билагранжево подпространство.*

Увеждение 13.50. *Пусть $\mathcal{P} = \{A+\lambda B\}$ - пучок кососимметричных билинейных форм, и $\mu \neq 0$*
Тогда:

1) *Количество жордановых блоков с собственным значением μ равно*

$$\frac{1}{2}(\dim \ker(A + \mu B) - \operatorname{corank} \mathcal{P})$$

2) *Количество нетривиальных жордановых блоков с собственным значением μ равно*

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{corank}\left(A|_{\ker(A+\mu B)}\right) - \operatorname{corank} \mathcal{P}\right).$$

(Тривиальные жордановы блоки - это 2×2 блоки.)

Алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ - конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{g}^*$ - ее двойственное пространство.

Определение 13.52. *Аннулятор элемента $a \in \mathfrak{g}^*$:*

$$\operatorname{Ann} a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid ad^*_\xi a = 0\}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ann} a = \ker \mathcal{A}_a.$$

Для регулярного $a \in \mathfrak{g}^*$ аннулятор $\operatorname{Ann} a$ порождается дифференциалом локальных инвариантов коприсоединенного представления (= функций Казимира скобки Ли-Пуассона).

Определение 13.53. *Индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$:*

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{x \in \mathfrak{g}^*} \dim \operatorname{Ann} x.$$

Индекс - это коразмерность орбиты общего положения

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g} = \operatorname{codim}\mathcal{O}_{red}$$

Алгебры Ли, у которых $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 0$, называются Фробениусовыми.

Кронекеровы индексы

Увержение 13.51. *Пусть $\mathcal{P} = \{\mathcal{A}_{x+\lambda a}\}$ пучок общего положения, $x, a \in \mathfrak{g}^*$. Тогда:*

1) *количество кронекеровых блоков в разложении ЖК пучка $\mathcal{P}$ равна индексу алгебры Ли $\mathfrak{g}$,*

2) *количество тривиальных кронекеровых блоков в разложении ЖК пучка $\mathcal{P}$ не меньше размерности центра алгебры Ли $\mathfrak{g}$,*

3) *количество алгебраически независимых многочленов в алгебре сдвигов F_a равно сумме кронекеровых индексов k_i алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е.*

$$\operatorname{tr}\deg F_a = \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}\mathfrak{g}} k_i.$$

Теорема 13.80. *(А.С. Воронцов)*
Пусть

1) *$f_1(x), \ldots, f_s(x) \in P(\mathfrak{g})$ - алгебраически независимые Ad^*-инвариантные многочлены, $s = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$,*

2) *$m_i = \deg f_i$ - их степени, удовлетворяющие $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_s$.*

Тогда

$$m_i \geq k_i,$$

где $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_s$ - кронекеровы индексы алгебры $\mathfrak{g}$.
Более того, если алгебра $\mathfrak{g}$ кронекерова типа, и

$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{ind}\mathfrak{g}),$$

то тогда

$$\deg f_i = k_i.$$

Жордановы блоки

Особое множество $\operatorname{Sing} \subset \mathfrak{g}^*$ состоит из всех точек $y \in \mathfrak{g}^*$ для которых

$$\operatorname{corank} A_y > \operatorname{ind}\mathfrak{g}.$$

Другими словами, это объединение всех орбит коприсоединенного представления не максимальной размерности

$$\operatorname{Sing} = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim\operatorname{Ann}(y) > \operatorname{ind}\mathfrak{g}\}.$$

Увērждение 13.52. *У алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существуют характеристические числа λ_α тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}\operatorname{Sing} = 1.$$

Для полупростых алгебр Ли $\operatorname{codim}\operatorname{Sing} = 3$.

Sing - алгебраическое многообразие. Рассмотрим объединение всех компонент коразмерности 1, назовем его Sing_0. Тогда Sing_0 задается одним уравнением:

$$\operatorname{Sing}_0 = \{f(x) = 0\}$$

Многочлен $f(x)$ можно выразить через коэффициенты структурного тензора c_{ij}^k.

Падеение ранга $\Leftrightarrow$ равенству нулю некоторых миноров $\Leftrightarrow$ все необходимые пффафианы обращаются в ноль

$$f(x) = \text{НОД}(\operatorname{Pf} C_{i_1,\dots,i_{2k}}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{2k} \le \dim \mathfrak{g})$$

Разложим $f(x)$ в произведение неприводимых

$$f(x) = f_1(x)^{s_1} \ldots f_m(x)^{s_m}$$

Рассмотрим редуцированный многочлен

$$f_{red}(x) = f_1(x) \ldots f_m(x)$$

Увērждение 13.53. 1) *Количество различных характеристических чисел λ_α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равно степени $f_{red}(x)$. Степень $f(x)$ равна количеству характеристических чисел с учетом кратности.*

2) *Разложение $f(x)$ на неприводимые множители разбивает собственные числа на m семейств Λ_i. В каждом семействе $\deg(f_i(x))$ характеристических чисел, каждое из них с кратностью s_i.*

Для фробениусовых алгебр Ли ($\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 0$) множество Sing определяется одним многочленом

$$f(x) = \operatorname{Pf}\mathcal{A}_x = \sqrt{\det(c_{ij}^k x_k)}.$$

Предположим, что $f(x) = f_{red}(x) \Leftrightarrow$ размерность $\deg f = \dfrac{1}{2}\dim\mathfrak{g}$ равна геометрической размерности Sing (количество различных точек пересечения прямой общего положения $x + \lambda a \subset \operatorname{Sing}$).

Увērждение 13.54. *Пусть $\mathfrak{g}$ - Фробениусова алгебра Ли и геометрическая размерность $\operatorname{Sing} \subset \mathfrak{g}^*$ равна $\frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}$.*
Тогда пучок общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ диагонализируем (т.е. не имеет жордановых блоков размера больше чем 2×2) и все его собственные значения различны.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Вычисление инвариантов ЖК.

Если $\mathfrak{g}$ - полупроста, то в алгебре полиномиальных инвариантов существует естественный базис $f_1, \ldots, f_k$ со свойством

$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}),$$

отсюда немедленно вытекает ранее доказанное А. Панасюком утверждение

$$k_i = \deg f_i$$

Числа $e_i = \deg f_i - 1$ известны как экспоненты полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Полупростые алгебры Ли - кронекерова типа и их кронекеровы индексы

$$k_1, \ldots, k_n, \qquad s = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$$

равны $k_i = e_i + 1 = \deg f_i$ и имеют следующий вид

- $A_n:\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots;\ n+1;$
- $B_n:\ 2;\ 4;\ 6;\ \ldots;\ 2n;$
- $C_n:\ 2;\ 4;\ 6;\ \ldots;\ 2n;$
- $D_n: 2;\ 4;\ 6;\ \ldots;\ 2n-2;$
- $G_2:\ 2;\ 6;$
- $F_4:\ 2;\ 6;\ 8;\ 12;$
- $E_6:\ 2;\ 5;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;$
- $E_7:\ 2;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 18;$
- $E_8:\ 2;\ 8;\ 12;\ 14;\ 18;\ 20;\ 24;\ 30.$

Полупрямые суммы $\mathfrak{g} \oplus_\rho V$, где $\mathfrak{g}$ проста и представление $\rho:\ \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ неприводимо, кронекеров типа (следует из того, что $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \geq 2$).

У $e(n) = so(n) + \mathbb{R}^n$ инварианты ЖК такие же, как и для $so(n+1)$.

У $sl(n) + \mathbb{R}^n$ один кронекеров блок размера $\dim \mathfrak{g}$ (т.к. один инвариант нужной степени).

Для полупрямых сумм $\mathfrak{g} \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ с простой алгеброй Ли по стандартному представлению инварианты ЖК были вычислены К.С. Ворушиловым:

Ворушилов К.С., "Инварианты Жордана-Кронекера для полупрямых сумм вида $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ "

Для алгебры Ли верхнетреугольных матриц t_n размера $n \times n$ инварианты ЖК могут быть найдены при помощи результатов А. Архангельского.

А.А. Архангельский, "Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц"

- Если n нечетно, то t_n смешанного типа, кронекеровиндексы равны
$$1;\ 3;\ 5;\ \ldots;\ n-1$$
и еще есть $\dfrac{n}{2}$ различных собственных значений.

  Кронекеровы индексы находятся при помощи инвариантов коприсоединенного представления, жордановы - из устройства особого множества Sing (задается неприводимым многочленом степени $\dfrac{n}{2}$).

- Если n четно, то t_n кронекерова типа и кронекеровы индексы равны
$$1;\ 3;\ 5;\ \ldots;\ n.$$

- Инварианты маломерных алгебр Ли ($\deg \leq 5$) вычислены в

  Zhang P., "Algebraic Aspects of Compatible Poisson Structures"

- Алгебра Ли $\mathrm{aff}(n) = gl(n) + \mathbb{R}^{n^2}$ тоже жорданового типа, у нее n различных собственных значений, размеры блоков:
$$\underbrace{1,\ \ldots,\ 2}_{n-2}, 4$$

Увержение 13.55. *Прямой сумме алгебр Ли $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ соответствует объединение инвариантов Жордана-Кронекера.*

При этом собственные значения для подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ нужно считать разными.

Увержение 13.56. *Один ронекеров $(2k+1) \times (2k+1)$ блок можно реализовать при помощи алгебры Ли с базисом*
$$e_1,\ \ldots,\ e_k,\ f_0,\ \ldots,\ f_k$$
и коммутационными соотношениями:
$$[e_i,\ f_{i-1}] = -f_{i-1},$$
$$[e_i,\ f_i] = f_i.$$

Реализация инвариантов.

Увеждение 13.57. *Набор из жордановых $n_1+1,\ \ldots,\ n_m$ блоков, где $n_i > n_j$ при $i < j$, можно реализовать при помощи алгебры Ли с базисом*

$$e_0,\ f_0,\ e^i_j,\ f^i_j,\quad \text{где } i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n_m$$

и коммутационными соотношениями:

$$[e^i_j,\ f^i_j] = e^i_{j-k}.$$

При этом мы формально считаем $e^i_0 = e_0,\ f^i_0 = f_0$ для всех i.

Также см.

Oliver, P.J., "Canonical forms and integrability of diHamiltonian systems"

Вопрос Какие есть препятствия к реализации "смешанных" инвариантов Жордана-Кронекера?

Инварианты Жордана-Кронекера:

1) Мы можем релизовать любой кронекеров блок;

2) Рассмотрим набор жорданоых блоков размера

$$\frac{1}{2}\text{ размера}:\quad n_1+1, n_2, \ldots, n_k,$$

где $n_i \le n_j, i > j$.
Здесь единственное ограничение - чтобы самый большой блок (размера n_1+1) был строго больше остальных. Это следует из теоремы Туриэля о каноническом виде согласованных симплектических структур.

Если теперь самый большой блок нестрого больше остальных, то, скорее всего, теорема Туриэля о расщеплении будет давать некоторое препятствие к реализации.
Например, это случай одного кронекерова блока и жордановых блоков размера 2×2 с кратностями:

$$\underbrace{2,\ 2,\ \ldots,\ 2}_{\lambda_1}, \ldots, \underbrace{2,\ 2,\ \ldots,\ 2}_{\lambda_s} + \text{кронекеров блок} \tag{13.2}$$

Тем не менее, случаи такой реализации возможны, они были описаны с работах К.С. Ворушилова.

Рассмотрим

$$gl(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$$
$$sl(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$$

и пусть $n = k \cdot m$. Тогда получим следующий ответ.

Фактически, мы рассматриваем некоторую матрицу и некоторые вектора

$$(A,\ u_1,\ \ldots,\ u_k)$$

Тогда можно построить некоторую естественную фкункцию

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1 & \ldots & u_k & Au_1 & \ldots & Au_k & \ldots & A^m u_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = f$$

Оказываается, для случая $sl(n)$ это будет единственный инвариант коприсоединенного представления и харакретистический многочлен.
Кронекеров блок будет один, а собственные значения будут функциями от функций Казимира. Это случай, когда нет расщепления в теореме Туриэля, поэтому именно в этом случае будет набор жордановых блоков 2×2 в нужном количестве и один кронекеров блок (13.2).

В случае $gl(n)$ жордановы блоки размера

$$2,\ \ldots,\ 2,\ 4$$

будут соотвествовать каждому собственному значению.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Лекция 14. Инварианты Жордана-Кронекера представлений

Инварианты ЖК представлений.

Alexey Bolsinov, Anton Izosimov, Ivan Kozlov, "Jordan-Kronecker invariants of Lie algebra representations and degrees of invariant polynomials"

Теорема 14.81. *Рассмотрим два конечномерных линейных пространства U и V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ с $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$.
Тогда для любых двух линейных отображений*

$$A, B:\ U \to V$$

существуют базисы U и V, в которых матрицы пучка $\mathtt{P} = \{A + \lambda B\}$ имеют блочно-диагональный вид:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0_{m,n} & & & \\ & A_1 + \lambda B_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k + \lambda B_k \end{pmatrix}, \tag{14.1}$$

где $0_{m,n}$ - это нулевая $m \times n$-матрица, а каждая пара блоков A_i, B_i имеет один из следующих видов:

1) Жорданов блок с собственным значением $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

2) Жорданов блок с собственным значением ∞

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Горизонтальный кронекеров блок

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Вертикальный кронекеров блок

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} -1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Замечание 14.21. *1) Количество и типы жордановых блоков в разложении ЖК определены однозначно с точностью до перестановки.*

2) Нулевой блок $0_{m,n}$ *рассматривается как объединение*

- m *вертикальных* 1×0 *кронекеровых блоков и*
- n *горизонтальных* 0×1 *блоков.*

Пусть $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$ - пучок матриц. Введем следующие понятия.

- Горизонтальные индексы $h_1, \ldots, h_p$ - это длины (т.е. количество столбцов) горизонтальных кронекеровых блоков;
- Вертикальные индексы $v_1, \ldots, v_q$ - это высоты (т.е. количество строк) вертикальных кронекеровых блоков.

Рассмотрим линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве V:

$$\rho : \mathfrak{g} \to gl(V)$$

Тогда для любого $x \in V$ определен оператор

$$R_x : \mathfrak{g} \to V,$$

$$R_x(\xi) = \rho(\xi)x.$$

Мы будем рассматривать пучок $R_a + \lambda R_b$ для пары $(a, b) \in V \times V$ общего положения.

Определение 14.54. *Инварианты Жордана-Кронекера представления* $\rho : \mathfrak{g} \to gl(V)$ *- это*

- *количество различных собственных значений жордановых блоков,*
- *количество и размеры жордановых блоков, соответствующих каждому собственному значению,*
- *горизонтальные и вертикальные кронекеровы индексы*

для пучка $R_a + \lambda R_b = R_{a+\lambda b}$ *общего положения.*

Интерпретация Жк инвариантов.

Жордановы блоки

Точку $a \in V$ называется регулярной, если

$$\dim \mathrm{St}_a \le \dim \mathrm{St}_x, \quad \forall x \in V.$$

Нерегулярные точки называются особыми. Множество особых точек обозначается через

$$\mathrm{Sing} \subset V.$$

Увереждение 14.58. *1) Собственные значения жордановых блоков $R_{a+\lambda b}$ - это в точности те значения $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых прямая $a + \lambda b$ пересекает* Sing.

В частности, в разложении ЖК есть жордановы блоки с собственным значением ∞ тогда и только тогда, когда a - особая.

2) У пучка $R_a + \lambda R_b$ общего положения нет жордановых блоков тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{codim} \mathrm{Sing} \geq 2.$$

Рассмотрим матрицу R_x и возьмем все ее ненулевые миноры размера $r \times r$, где $r = \dim \mathcal{O}_{reg}$.
Получаем полиномы

$$p_1(x), \dots, p_N(x)$$

на V.
Тогда $\mathrm{Sing} \subset V$ задается

$$p_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Предположим, что

$$\operatorname{codim} \mathrm{Sing} = 1.$$

Тогда

$$p_i(x) = p_\rho(x) h_i(x).$$

Поэтому $\mathrm{Sing} = \mathrm{Sing}_0 \cup \mathrm{Sing}_1$, где

$$\mathrm{Sing}_0 = \{p_\rho(x) = 0\} \quad and \quad \mathrm{Sing}_! = \{h_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, N\}. \tag{14.2}$$

Предложение 14.1. *Степень фундаментального полуинварианта p_ρ равна сумме размеров жордановых блоков для пучка $R_{a+\lambda b}$ общего положения.*

Кронекеровы блоки

Предложение 14.2. *1) Количество горизонтальных индексов $n_h(\rho)$ равно*

$$\dim \mathrm{St}_{reg}.$$

2) Количество вертикальных индексов $n_v(\rho)$ равно

$$\operatorname{codim} \mathcal{O}_{reg}.$$

- Количество тривиальных горизонтальных кронекеровых блоков равно

$$\dim(\mathrm{St}_X \cap \mathrm{St}_A).$$

- Количество тривиальных вертикальных кронекеровых блоков равно

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Im} R_X + \operatorname{Im} R_A).$$

Увержение 14.59. *Пусть A - регулярный элемент пучка $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$, т.е.*

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \mathcal{P}.$$

Тогда для любого $u_0 \in \ker A$ существует последовательность векторов

$$\{u_0, \ldots, u_l \in U\}$$

таких, что выражение

$$u(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} u_j \lambda^j$$

является решением уравнения

$$(A + \lambda B)u(\lambda) = 0. \tag{14.3}$$

Аналогично для любого $u_0 \in \ker A^*$ существует последовательность векторов

$$\{u_0, \ldots, u_l \in V^*\}$$

таких, что выражение

$$u(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} u_j \lambda^j$$

является решением уравнения

$$(A + \lambda B)^* u(\lambda) = 0. \tag{14.4}$$

Кронекеровы индексы и алгебра инвариантов

Теорема 14.82. *(Нижние оценки степеней инвариантов)*
Предположим, что

$$f_1, \ldots, f_m$$

алгебраически независимые инвариантные полиномы ρ, и

$$\deg f_1 \leq \ldots \leq \deg f_m.$$

Пусть также

$$v_1(\rho) \leq \ldots \leq v_q(\rho)$$

суть вертикальные индексы ρ.
Тогда

$$\deg f_i \geq v_i(\rho) \tag{14.5}$$

для $i = 1, \ldots, m$.

Для коприсоединенных представлений аналогичный результат был получен А.С. Воронцовым.

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Теорема 14.83. *(О множестве, где инварианты становятся зависимыми)*
Пусть

$$f_1, f_2, \ldots, f_q$$

полный набор алгебраически независимых полиномиальных инвариантов представления

$$\rho: \mathfrak{g} \to gl(V),$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *Степени f_i равны вертикальным индексам ρ:*

$$\deg f_i = v_i(\rho).$$

2) *Сумма степеней f_i равна общему вертикальному индексу представления ρ:*

$$\sum \deg f_i = \sum v_i(\rho).$$

3) *Множество, где $f_1, \ldots, f_q$ зависимы имеет коразмерность ≥ 2 в V.*

4) *Множество, где $f_1, \ldots, f_q$ зависимы содержится в* Sing*, т.е. в компонентах коразмерности ≥ 2 множества особых точек представления ρ в V.*

Теорема 14.84. *(О полиномиальности алгебры инвариантов)*
Предположим, что

$$f_1, f_2, \ldots, f_q$$

полный набор алгебраически независимых инварианных полиномов представления

$$\rho: \mathfrak{g} \to gl(V),$$

Тогда выполнено следующее:

1) *Если степени f_i равны вертикальным индексам:*

$$\deg f_i = v_i(\rho)$$

(эквивалентно, $\sum \deg f_i = \sum v_i(\rho)$), то алгебра $\mathbb{C}[V]^{\mathfrak{g}}$ полиномиальных инвариантов ρ свободно порождается $f_1, f_2, \ldots, f_q$ (т.е. это полиномиальная алгебра).

2) *Наоборот, если алгебра $\mathbb{C}[V]^{\}}$ полиномиальных инвариантов ρ свободно порождается $f_1, f_2, \ldots, f_q$, и, кроме того, ρ не имеет собственных полуинвариантов (т.е. любой полуинвариант является инвариантом), то степени f_i равны вертикальным индексам.*

ρ не имеет собственных полуинвариантов, если алгебра Ли совершенна, т.е. если она совпадает со своим коммутантом:

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

В частности, это так для полупростых алгебр Ли.

Вычисление инвариантов ЖК.

Сумма стандартных представлений $gl(n)$

Рассмотрим сумму m стандартных представлений $gl(n)$

$$\rho^{\oplus_m}: \ gl(V) \to gl(V^{\oplus_m})$$

В этом базисе это просто правые умножения:

$$R_X: \ Mat_{n\times n} \to Mat_{n\times m}$$
$$Y \to YX \tag{14.6}$$

Предложение 14.3. *Рассмотрим произвольные*

$$X, A \in Mat_{n\times m}.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ разложение ЖК правого умножения на X и A

$$R_X, R_A: \ Mat_{k\times n} \to Mat_{k\times m} \tag{14.7}$$

получается из разложения ЖК X^T и A^T, если каждый блок взять k раз.

Лемма 14.10. *Для любой пары линейных отображений*

$$X, A: \ W^m \to V^n$$

общего положения существуют базисы V^n и W^m т.ч. X и A задаются следующими $n \times m$ матрицами.

- *Если $m < n$:*
$$X = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix} \tag{14.8}$$
- *Если $n = m$:*
$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{14.9}$$
где λ_i различные числа.
- *Если $m > n$*
$$X = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \end{pmatrix} \tag{14.10}$$

Эти пары матриц в общем положении и для алгебр $sl(n)$, $so(n)$ и $sp(n)$.
Достаточно доказать, что для любых

$$C \in GL(n), \ \ D \in GL(m)$$

ЖК разложения пучков

$$R_X + \lambda R_A, \quad \text{и} \quad R_{CXD} + \lambda R_{CAD}$$

совпадают.

Для этого достаточно построить линейные автоморфизмы

$$\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \psi: Mat_{n\times m} \to Mat_{n\times m}$$

(которые не обязаны быть автоморфизмами алгебр Ли) т.ч. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "R_{CXD}+\lambda R_{CAD}"] \arrow[d, "\phi"] & Mat_{n\times m} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "R_X+\lambda R_A"] & Mat_{n\times m} \end{tikzcd}$$

- Для $sl(n)$:
$$\phi(Y) = C^{-1}YC, \quad \psi(Z) = CZD.$$
- Для $so(n)$ и $sp(n)$
$$\phi(Y) = C^{*}YC, \quad \psi(Z) = (C^{*})^{-1}ZD,$$
где $C^* = C^T$ для $so(n)$ и $sp(n)$ обсуждается далее.

ЖК инварианты суммы m стандартных представлений $gl(n)$:

1) Случай $m < n$. Поделим m на $n-m$ с остатком:
$$m = q(n-m) + r, \quad q, r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq < m-n. \tag{14.11}$$
Будут следующие $n(n-m)$ горизонтальных кронекеровых индексов:
$$\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{n(n-m-r)}, \quad \underbrace{q+2, \dots, q+2}_{nr}.$$
2) Случай $n = m$.
Будет n собственных значений, каждому из которых соответствует n жордановых 1×1 блоков:
$$J_{\lambda_1,1}, \dots, J_{\lambda_1,n}, J_{\lambda_2,1}, \dots, J_{\lambda_n,n}.$$
3) Случай $m > n$.
Поделим $n(m-n)$ вертикальных кронекеровых индексов:
$$\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{n(n-m-r)}, \quad \underbrace{q+2, \dots, q+2}_{nr}.$$

У суммы стандартных представлений $gl(n)$ нет полиномиальных инвариантов (есть рациональные инварианты - отношение определителей миноров), поэтому теоремы о связи кронекеровых индексов и алгебры инвариантов не дают информации.

Сумма стандартных представлений $sl(n)$

Теорема 14.85. *Инварианты ЖК для суммы m стандартных представлений $sl(n)$ следующие:*

1) *Если $m < n$, то будет $n(n-m)-1$ горизонтальных кронекеровых блоков "максимально равного размера" .*

2) *Если $m > n$, то будет $n(n-m)+1$ вертикальных кронекеровых блоков "максимльно равного размера" .*

3) *Если $m = n$, то инварианты ЖК состоят из*

   - *n различных собственных значений, каждому из которых соотвествует $n-1$ жорданов 1×1 блок:*

$$J_{\lambda_1,1}, \dots, J_{\lambda_1,n-1}, J_{\lambda_2,1}, \dots, J_{\lambda_n,n-1}.$$

   - *и один вертикальный $(n-1) \times n$ кронекеров блок*

$$\eta_1 = n$$

Упражнение 14.33. *Пусть*

$$\rho : \ sl(n) \to gl(Mat_{n\times m})$$

сумма m стандартных представлений $sl(n)$ и $X \in Mat_{n\times m}$.
Тогда:

1) *Если $m < n$, то алгебра инвариантов ρ тривиальна.*

2) *Если $m = n$, то алгебра инвариантов свободно порождается $\det X$.*

3) *Если $m = n+1$, то алгебра инвариантов свободно порождается $n \times n$ минорами X.*

4) *Если $m > n+1$, то алгебра инвариантов не свободно порождена.*

Сумма стандартных представлений $so(n)$ и $sp(n)$

Для алгебры Ли $sp(n)$ мы всегда считаем, что n четно $n = 2k$.

То, что мы обозначаем за $sp(n)$ часто обозначают через $sp(2k)$:
это $n \times n$ матрицы X, удовлетворяющие условию

$$X^T\Omega + \Omega X = 0, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_{\frac{n}{2}} \\ -I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \tag{14.13}$$

Дугими словами, элементы $sp(n)$ имеют вид

$$X = \Omega^{-1} S,$$

где S симметричная матрица.

В следующих формулах

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \mathfrak{g} = sp(n), \\ -1, & \mathfrak{g} = so(n). \end{cases}$$

Теорема 14.86. *ЖК инваринты суммы m стандартных представлений $so(n)$ и $sp(n)$ следующие:*

1) Если $m < n$ и как ранее

$$n = q(n-m) + r,$$

то разложение ЖК состоит из

- $\dfrac{(n-m)(n-m+\varepsilon)}{2}$ *горизонтальных индексов:*

$$\underbrace{2q+1, \dots, 2q+1}_{\frac{(n-m-r)(n-m-r+\varepsilon)}{2}}, \underbrace{2q+2, \dots, 2q+2}_{(n-m-r)r}, \underbrace{2q+3, \dots, 2q+3}_{\frac{r(r+\varepsilon)}{2}}$$

- $\dfrac{m(m-\varepsilon)}{2}$ *вертикальных индексов*

$$v_i = 2.$$

2) Если $m = n$.

- *В случае $so(n)$*

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, \quad \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{n(n-1)}{2}}$$

- *В случае $sp(n)$*

$$\underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{n(n-1)}{2}} + n \text{ жордановых } 1 \times 1 \text{ блоков}$$

3) Если $m > n$, то ЖК инварианты состоят из $n(m-n) + \dfrac{n(n-\varepsilon)}{2}$ вертикальных индесов:

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{(m-n-\varepsilon)n}, \quad \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{n(n+\varepsilon)}{2}}$$

Упражнение 14.34. *Пусть*

$$\rho: \ so(n) \to gl(Mat_{n\times m})$$

сумма m стандартных представлений $so(n)$ и $X \in Mat_{n\times m}$.
Тогда:

1) *Если $m < n$, то алгебра инвариантов представления ρ свободно порожлается $\dfrac{m(m+1)}{2}$ внутренними произведениями столбцов X.*

2) *Если $m \geq n$, то алгебра инвариантов не свободно порождена.*

При $m \geq n$ алгебра инвариантов порождается произведениями столбцов и $n \times n$ минорами.

Упражнение 14.35. *Пусть*

$$\rho: \ sp(n) \to gl(Mat_{n\times m})$$

сумма m стандартных представлений $sp(n)$ и $X \in Mat_{n\times m}$.
Тогда

1) *Если $m \leq n+1$, то алгебра инвариантов представления ρ свободно порождается $\dfrac{m(m-1)}{2}$ симплектическими произведениями столбцов X.*

2) *Если $m > n+1$, то алгебра инвариантов не свободно порождена.*

В симплектичеком случае миноры выражаются через симплетические произведения при помощи Пфаффиана.

Лекция 15. Обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко

Болсинов А.В., Изосимов А.М., Коняев А.Ю., Ошемков А.А. "Алгебра и топология инегрируемых систем. Задачи для исследования. Труды семинара по векторному и тензорному анализу" Том 28 - с.119-191, 2012.
A. Bolsinov, V. Matveev, E. Miranda, S. Tabachnikov, "Open Problems, Questions, and Challenges in Finite-Dimensional Integrable Systems"

Материалы на сайте:

http://dfgm.math.msu.su/zadachi.php

В частности, А.В. Болсинов, А.А. Ошемков

1) Интегрируемые системы на алгебрах Ли и особенности отображения момента
2) Топология особенностей отображения момента классических и квантовых интегрируемых систем

ЗАДАЧИ

Линейная алгебра.

Разложение ЖК:

1) Как может меняться разложение ЖК при изменении размерности пространства на 1?

   В частности, какие могут быть разложения ЖК для гиперпространств

$$U \subset (V, A, B), \quad \dim U = \dim V - 1?$$

   Какие разложения ЖК у гиперпространства общего положения?

2) Как может меняться разложение ЖК при деформации пучка $A_\varepsilon + \lambda B_\varepsilon$?

   Какие типичные перестройки?

Подпространства:

1) Как устроены допустимые подпространства, определяемые условием

$$AU = BU?$$

2) Когда два подпространства $U_1, U_2 \subset (V, A, B)$ лежат в одной орбите $Aut(V, A, B)$? Рассмотреть следующие случаи:
   - $\dim U_i = 1$,

- $\operatorname{codim} U_i = 1$.

Группа автоморфизмов:

1) Что изменится, если рассматривать автоморфизмы, переводящие весь пучок $\mathcal{P}$ в себя, а не пару форм в пару форм?

2) Топологические свойства $Aut(V, A, B)$?

Билагранжиан:

1) Топологические свойства $BLG(V, A, B)$?

2) $BLG(V, A, B)$ - алгебраическое подмногообразие грассманиана. Верно ли, что разложимые подпространства образуют (единественную) неприводимую компоненту максимальной размерности?

Бигамильтоновы системы.

Задача. Любая ли бигамильтонова система локально биинтегрируема?

Задача. Любой ли класс билгранжевых подпространств локально реализуем биинтегрируемой системой?

Т.е. пусть есть динамическая система

$$v = \mathcal{A}d\mathtt{f} = \mathcal{B}d\mathtt{g} = \mathcal{A}_\lambda d\mathtt{f}_\lambda,$$

которая гамильтонова относительно пары согласованных скобок Пуассона.
В таком случае имеем интегралы

$$f_1^\lambda, \dots, f_i^\lambda -$$

казимиры $\mathcal{A}_\lambda$. Их можно объединить, и то, что мы получим, будет соотвествовать ядерному подпространству в каждой точке общего положения

$$\mathcal{F} = \{\text{алгебра, порожденная } f_j^\lambda\}$$

Эта алгебра коммутативна.

Набор функций в биинволюции $\mathcal{F}$ будет полон $\Leftrightarrow$ пучок $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ кронекеров.

У нас есть бигамильтоновость, хотим получить биинтегрируемость:
Любые две функции из этого пучка относительно любой скобки будут давать 0 $\{f, g\}_\mu = 0$ + полный набор в биинволюции.

"Приятный" вид форм (одна форма - линейная, другая - постоянная) описан в

Oliver, P.J., "Canonical forms and integrability of biHamiltonian systems" , p.177-187

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ ПРОФ РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ НА VK.COM/TEACHINMSU

Также там описаны бигамильтонианы.

Какие представления инвариантны относительно локальных автоморфизмов пучка $\{\mathcal{P} = \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}\}$?

Распределения, которые инвариантны в каждой точке, описаны в

И.К. Козлов, "Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур" , стр. 91-111

Инварианты ЖК.

Задача. Вычислить инварианты ЖК для следующих классов алгебр Ли:

1) Полупрямые суммы $\mathfrak{g} +_\rho V$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и коммутативного идеала V,
2) Борелевские подалгебры простых алгебр Ли,
3) Параболические подалгебры простых алгебр Ли,
4) Централизаторы сингулярных элементов $a \in \mathfrak{g}$ для простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$,
5) Алгебы Ли малых размерностей.

См.

Alexey Bolsinov, Pumei Zhang, "Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras"

Про полупрямые суммы $\mathfrak{g} \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ с простой алгеброй Ли по стандартному представлению инварианты ЖК см. результаты:

Ворушилов К.С.б "Инварианты Жордана-Кронекера для полупрямых сумм вида $sl(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$" , стр. 3-18

Гипотеза. Не существует алгебры Ли, у которой инварианты Жордана-Кронекера

- один кронекеров $(2k+1) \times (2k+1)$ блок, где $k > 1$,
- и много $N > k$ собственных значений,
- где i-тому собственному значению соотвествует много n_i жордановых 2×2 блоков.

Идея:
По теоремам Туриэля (симплектический и смешанный случаи) локально не будет расщепления.

Собственные числа λ_i будут функциями от функций Казимира (т.е. $d\lambda_i$ будут лежать в ядерном подпространстве).

"Не поместятся" ?

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

Инварианты ЖК представлений.

Как эффективно считать размеры горизонтальных Кронекеровых блоков? Связано ли это с тем, как устроено расслоение стабилизаторов?

1) Были вычислены ЖК инварианты суммы станартных представлений $gl(n)$ для любой пары $(X, A) \in Mat_{n\times m}$.

   Можно ли сделать то же самое для $sl(n)$?
   А также $so(n)$ и $sp(n)$?

2) Что происходит с ЖК инвариантами при ограничении представления с $gl(n)$ на $sl(n)$?

   Более общий вопрос - что происходит с ЖК инвариантами при ограничении на подлгебру коразмерности 1?

Можно продолжить вычисления ЖК инвариантов.
Алгебры, для которых это еще можно сделать:

1) Верхнетреугольные матрицы ($b(n)$).
2) Строго верхнетреугольные матрицы ($n(n)$).
3) Дальше идут борелевские подалгебры и различные блочно-треугольные матрицы.

Действие сопряжением на парах форм.
Здесь можно рассматривать различные группы:

- $gl(n)$
- $sl(n)$
- $o(n)$
- $sp(n)$

и т.д. А также рассматривать различные типы форм:

- Пара симметричных форм.
- Пара кососимметричных форм.
- Симметричная и кососимметричная форма.
- Пара произвольных билинейных форм.

В первых трех случаях можно использовать результаты Гантмахера (+ Томпсона) о каноническом виде.

Во втором можно попробовать посмотреть на количество орбит (приведя к каноническому виду одну форму в общем положении - ее можно рассматривать как пару: симметричная + кососимметричная форма), количество тривиальных блоков и воспользоваться соображениями симметричности.

Обобщенная гипотеза Мищенко-Фоменко.

Метод сдвига аргумента:

- Если $\mathtt{f}$ и $\mathtt{g}$ - инварианты коприсоединенного представления, то функции $\mathtt{f}(x+\lambda a)$ и $\mathtt{g}(x+\mu a)$ коммутируют относительно скобок $\{\}$ и $\{\}_a$.
- Рассматриваем инварианты $\mathtt{f}$ и берем их сдвиги $\mathtt{f}(x+\lambda a)$ - это в точности функции Казимира скобки $\{\}+\{\}_a$.
- Сдвиги инваринтов образуют подалгебру F_a.

Теорема 15.87. *(А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко)*
Если a - регулярный элемент полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то

1) *Функции F_a попарно коммутируют относительно скобок $\{\}$ и $\{\}_a$.*
2) *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то семейство F_a полно, т.е. оно содержит*

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$$

независимых полиномов.

- Аннулятор элмента $a \in \mathfrak{g}^*$ = соответствующий стабилизатор для коприсоединенного представления

$$\operatorname{Ann} a = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}^*_\xi(a) = 0\}$$

  С точки зрения скобки Ли-Пуассона $\operatorname{Ann} a = \ker \mathcal{A}_a$.

- Индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$ = коразмерность регулярной орбиты коприсоединенного представления

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{x \in \mathfrak{g}^*} \dim \operatorname{Ann} x$$

  Также индекс = количество функционально независимых (локально) инвариантов коприсоединенного представления.

Теорема 15.88. *(Гипотеза Мищенко-Фоменко)*
На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к любой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует полное семейство F коммутирующих между собой полиномов.

Доказана С.Т. Садэтовым в 2004 году.

Sadetov S.T., "A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture"

Теорема 15.89. *(Обобщенная гипотеза метода сдвига аргумента)*
На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ *к любой конечномерной алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *существует полное семейство* G_a *полиномов в биинволюции, т.е. в инволюции относительно двух скобок* $\{,\}$ *и* $\{\}_a$.

Верна ли эта гипотеза?

Метод сдвига аргумента работает, потому что в кронекеровом случае билагранжево подпространство единственно.

Q: Соотвествует ли выделенному билагранжеву подпространству естественный набор полиномов в биинволюции?

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
teach-in ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ