



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

РАМАЗАНОВ
САБИР РАМАЗАНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

1 Лекция 1. Элементы ОТО. Источники гравитационных волн. Вычисление частот гравитационных волн. Различие между гравитацией Ньютона и гравитацией Эйнштейна.	4
1.1 Введение	4
1.2 Основные понятия ОТО	5
1.3 Источники гравитационных волн	6
1.4 Вычисление частоты гравитационных волн	7
1.5 Сравнение гравитации Ньютона и Эйнштейна	8
2 Лекция 2. Вывод уравнения с источником. Калибровка Лоренца. Решение уравнения без источников. Лямбда тензор. Бесследовая поперечная калибровка	12
2.1 Общее ковариантное преобразование	12
2.2 Вывод уравнения, описывающего эволюцию $h_{\mu\nu}$	12
2.3 Следствия калибровки Лоренца	14
2.4 Гравитационные волны в пустоте	15
2.5 Λ -тензор	16
2.6 Поляризации тензора h_{ij}^{TT}	16
2.7 Уравнения движения в TT -калибровке	16
2.8 Уравнение отклонения геодезической	17
2.9 Эксперимент <i>LIGO</i>	17
3 Лекция 3. Гравитационные волны от двух вращающихся черных дыр и от слияния черных дыр	19
3.1 Вычисление гравитационной волны от двух вращающихся черных дыр	19
3.2 Λ -тензор (продолжение)	22
3.3 Гравитационная волна от слияния двух черных дыр	23
4 Лекция 4. Энергия гравитационной волны. Квадрупольная формула Эйнштейна	26
4.1 Энергия и гравитация	26
4.2 Теорема Нетер	26
4.3 Аналогия из электродинамики	27
4.4 Расчет ТЭИ гравитационной волны	28
4.5 Квадрупольная формула Эйнштейна	29

5	Лекция 5. Квадрупольная формула Эйнштейна и ее применение к системе двух вращающихся черных дыр	31
5.1	Закон изменения циклической частоты вращения двух черных дыр . . .	31
5.2	Следствия формулы для изменения циклической частоты орбитально-го вращения двух черных дыр	34
6	Лекция 6. Пульсары в сдвоенных системах	38
6.1	Некоторые характеристики двойных систем	38
6.2	Пульсары	39
6.3	Пульсар в двойной системе. Проверка результатов ОТО	41
6.3.1	Поправки к периоду пульса	41
6.3.2	Проверка результатов ОТО	44
6.4	Pulsar timing array	45
7	Лекция 7. Гравитационные волны и космология. Форма гравитационной волны. Релаксированное уравнение Эйнштейна	48
7.1	Форма гравитационной волны	48
7.2	Фурье-образ сигнала от гравитационных волн	49
7.3	Гравитационные волны и космология	50
7.4	Релаксированное уравнение Эйнштейна	52
7.5	Учет поправок к вычислению гравитационных волн	54
8	Лекция 8. Эффект гравитационно-волновой памяти	56
8.1	Память гравитационных волн	56
8.2	Оценка эффекта памяти гравитационных волн	61
9	Лекция 9. Приливные силы в физике гравитационных волн	63
9.1	Эффект гравитационной памяти	63
9.2	Уравнение Толмена - Оппенгеймера - Волкова	65
9.3	Приливные силы (Tidal forces)	67
10	Лекция 10. Гравитационные волны в космологии	71
10.1	Основные эпохи космологии	71
10.2	Гравитационные волны и космология	71
10.3	Гравитационные волны из радиационно-доминированной стадии	72
10.4	Зачем изучать гравитационные волны из ранней Вселенной?	73
10.5	Оценка частоты гравитационных волн в экспериментах	74
10.6	Ограничение на плотность энергии гравитационных волн	75

10.7	Нуклеосинтез	76
10.8	Вклад гравитационных волн в расширение Вселенной	77
11	Лекция 11. Гравитационные волны от радиационно-доминированной стадии	79
11.1	Гравитационные волны от RD-эпохи в отсутствие источника	79
11.2	Гравитационные волны от RD-эпохи с учетом источника	81
11.3	Как δ -функция связана со статистической изотропией	84
11.4	Плотность энергии гравитационных волн	84
11.5	Спектр гравитационных волн в пределе маленьких k	85
12	Лекция 12. Гравитационные волны от фазового перехода 1 рода	86
12.1	Неоднородное скалярное поле как источник гравитационных волн	86
12.2	Фазовые переходы в ранней Вселенной	87
12.2.1	Действие Намбу-Гото	89
12.2.2	Длительность фазового перехода первого рода	91
12.3	Гравитационные волны от фазовых переходов первого рода	93

Лекция 1. Элементы ОТО. Источники гравитационных волн. Вычисление частот гравитационных волн. Различие между гравитацией Ньютона и гравитацией Эйнштейна.

Введение

Гравитационные волны являются актуальной темой в современной науке, что обуславливается рядом преимуществ.

Первое преимущество заключается в том, что существование гравитационных волн было подтверждено. В 2015-ом году 14-го сентября в эксперименте LIGO была зафиксирована гравитационная волна. Ей было дано название GW150914. Данный эксперимент по обнаружению гравитационной волны был аналогичен эксперименту, с помощью которого была доказана СТО. Экспериментальная установка позволяет фиксировать гравитационный волны с частотами от 10 Hz до 100 Hz и представляет собой лазерный интерферометр, схематично представленный на рис 2.1.

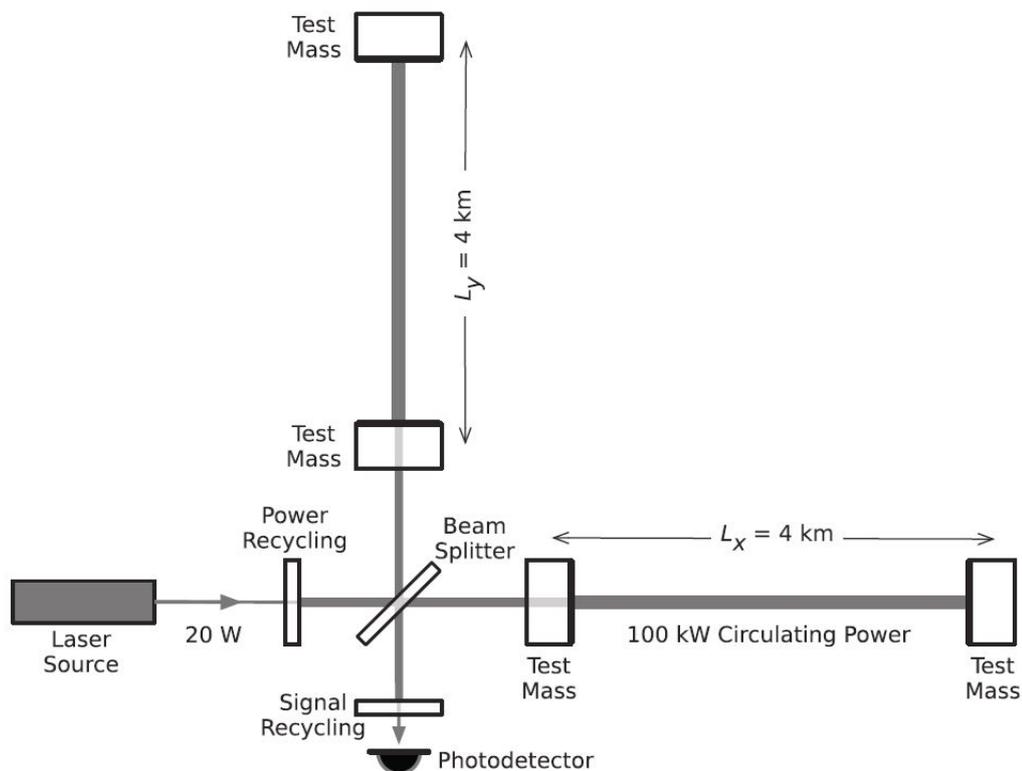


Рис. 1.1. Экспериментальная установка LIGO

Идея данного эксперимента от части зародилась в МГУ и восходит к 1960-ым годам. Около 50-ти лет прошло с возникновения идеи детектирования гравитационных волн до ее реализации, что показывает всю сложность эксперимента.

Второе преимущество состоит в том, что эксперименты в данной области продолжаются. На данный момент запланирован на 2035-2037 годы эксперимент LISA. В отличии от LIGO, новый эксперимент будет проводиться в небе, с помощью спутников, и сможет зафиксировать волны с частотами около $10^{-3} Hz$. Также запланирован ещё один наземный эксперимент Einstein Telescope, который будет на порядок чувствительнее LIGO и будет способен фиксировать частоты от 10 Hz до 100 kHz.

Гравитационные волны являются предсказанием ОТО и изучение гравитационных волн позволит лучше понять эту теорию.

Основные понятия ОТО

Основной объект в ОТО - метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Вдали от гравитирующих масс мы можем выбрать координаты в пустоте так, что метрика Минковского $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Мы будем использовать сигнатуру:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим возмущение метрики:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Мы будем работать в режиме слабого поля $\text{mod } h_{\mu\nu} \ll \text{mod } \eta_{\mu\nu}$ большую часть курса. Данное возмущение подчиняется волновому уравнению:

$$\square h_{\mu\nu} = 0, \quad (1.2)$$

где $\square = -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Самое простое решение данного уравнения - плоская волна, которая определяется следующей формулой:

$$h_{\mu\nu} = \text{Re}[H_{\mu\nu} \exp\{ik_{\mu}x^{\mu}\}], \quad (1.3)$$

где $k_{\mu} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ - волновой вектор.

Можно вспомнить аналогичную формулу в электродинамике:

$$\square A_{\mu} = 0. \quad (1.4)$$

В общем виде уравнение движения имеют следующий вид:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = \square A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (1.5)$$

Формула (4) получится из (5), если наложить калибровку Лоренца: $\partial^\mu A_\mu = 0$.

Данная аналогия заставляет задуматься, что уравнение (2) также дано в калибровке. Эта калибровка также называется калибровкой Лоренца. Данная аналогия была проведена с целью показать, что ОТО - калибровочная теория.

Мы знаем о существовании гравитационных волн, но чтобы гравитационная волна появилась нам нужен ее источник. Так же как и в электродинамике нам был нужен ток, который был источником электромагнитного поля. В электродинамике уравнение с источником выглядит следующим образом: $\square A_j = -ej_0$. В ОТО уравнение с источником:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad T_{\mu\nu} - \text{тензор энергии импульса.} \quad (1.6)$$

Далее мы узнаем, что $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, где $h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$.

В физике высоких энергий Ньютоновскую константу записывают следующим образом:

$$G = \frac{1}{M_{PL}^2}, \quad \text{где} \quad M_{PL} = 122 \times 10^{13} \text{Gev} - \text{Планковская масса} \quad (1.7)$$

Таким образом, мы можем оценить малость константы G . Скорость света в -4 степени и Ньютоновская константа G в совокупности дают очень малый порядок величины. Отсюда мы можем заключить, что гравитационные волны очень слабые.

Источники гравитационных волн

Первая зафиксированная гравитационная волна была испущена при столкновении двух черных дыр. У одной черной дыры была масса, равная 30 массам солнца, а у другой была масса, равная 35 массам солнца. Черные дыры вращались вокруг центра масс и производили гравитационные волны. За счет испускания гравитационных волн уменьшалось расстояние между ними. В итоге они слились в черную дыру, имеющую массу 62 массы солнца. Три массы солнца ушло в гравитационные волны.

Черные дыры используются для наблюдения гравитационных волн, так как черные дыры - самые компактные объекты во вселенной. Радиус черной дыры можно сопоставить с радиусом Шварцшильда $R \approx R_S = \frac{2G}{M}c^2$. Можно произвести оценку скорости, с которой будут вращаться черные дыры при слиянии:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (1.8)$$

подставляя в данное выражение вместо радиуса r радиус шварцшильда R_S , мы получим, что $v \approx c$.

Ещё одним объектом, производящим гравитационные волны, являются двойные нейтронные звезды. Слияние двух нейтронных звезд наблюдалось, это событие именуется GW170817. Особенность этого события состоит в том, что одновременно с гравитационной волной наблюдалось световое излучение. Из этого наблюдения был сделан вывод, что скорость гравитационных волн близка к скорости света $|c_{g\omega} - c|/c \leq 10^{-15}$.

Двойные системы в разных точках вселенной могут излучать слабые гравитационные волны. Суммируясь, волны дают почти изотропный измеримый сигнал. Он называется гравитационным волновым фоном.

Данные источники можно обобщить в один класс, назвав их физическими источниками. Но можно выделить и другой класс, так называемых космологических источников. В него входят:

- 1) инфляция (усиленные вакуумные флуктуации)
- 2) топологические дефекты (космические струны, доменные стенки)
- 3) фазовые переходы 1-го рода

Обычно, когда говорят о космологических источниках, имеют в виду гравитационные волны, приходящих с разных уголков вселенной. Иногда космологические источники и различные двойные системы в разных точках вселенной объединяют в стохастические гравитационные волны.

Вычисление частоты гравитационных волн

Пусть у нас есть две черные дыры, вращающиеся вокруг центра масс.

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^2}. \quad (1.9)$$

Или, переписывая через циклическую частоту, получим:

$$\omega^2 = \frac{G_N(M_1 + M_2)}{R^3}, \quad (1.10)$$

где ω - частота обращения черных дыр друг относительно друга. Объявим, что частота гравитационных волн $\omega_{g\omega} = 2\omega$. Фактор 2 в нашей задаче не важен, так как мы будем делать оценку, но он имеет важный физический смысл: спин гравитационного поля.

Здесь используется приближение круговых орбит. Это верное предположение, так как гравитационные волны уносят угловой момент и, как следствие, эксцентриситет уменьшается. Но с другой стороны гравитационные волны уносят энергию и черные дыры сближаются, поэтому мы можем считать орбиты квазикруговыми.

Заметим, что угловая частота будет иметь максимальное значение, когда черные дыры сблизятся на минимальное расстояние. Данное расстояние будет равно двум радиусам Шварцшильда:

$$R_{min} = \frac{2GM}{c^2} \times x, \quad \text{где} \quad M = M_1 + M_2. \quad (1.11)$$

Здесь введена неизвестный фактор $x \approx 1$. В дальнейшем мы узнаем, что за ним стоит глубокий физический смысл. Теперь у нас есть все необходимое для вычисления частоты гравитационных волн.

$$f_{g\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{\frac{c^6}{8x^3 G_N^2 M^2}} = \frac{22 \text{kHz } M_\odot}{x^{3/2} M}. \quad (1.12)$$

Подставим $x = 3$, в дальнейшем мы убедимся, что это так.

$$\boxed{f_{g\omega} = 4.4 \text{kHz} \frac{M_\odot}{M}}. \quad (1.13)$$

Подставляя значение массы $M = 65M_\odot$, получим значение частоты $\boxed{f_{g\omega} = 70 \text{Hz}}$. Мы нашли частоту LIGO.

Пользуясь формулой (13) можем оценить частоты для различных черных дыр. Нижняя граница массы черной дыры: $M \geq 2.6M_\odot$. Соответствующая этой массе частота равна 1 kHz. В центре нашей галактики находится черная дыра. Её масса $M \approx 43 \times 10^6 M_\odot$. И частота гравитационных волн будет равна $f_{g\omega} = 10^{-3} \text{Hz}$. На земле такие частоты измерить невозможно, поэтому необходимо переходить на околоземное пространство. Этим будет заниматься LISA. Однако в основном ученые используют массы черных дыр порядков $10^{10} - 10^{11} M_\odot$, чему соответствуют частоты порядка $f_{g\omega=10^{-8} \text{Hz}}$.

Сравнение гравитации Ньютона и Эйнштейна

Вернемся к вопросу, который мы пока обошли стороной. Почему $x = 3$? Данный вопрос позволяет сравнить гравитации Ньютона и Эйнштейна.

Мы ввели x при решении задачи, в которой две черные дыры медленно падали друг на друга. При этом минимальное расстояние их сближения мы записали как: $R_{min} = x(R_{S1} + R_{S2})$. Физически эта точка означает следующее. Пока расстояние между

черными дырами больше чем R_{min} , они сближаются по круговым орбитам, как только расстояние становится меньше R_{min} , черные дыры начинают падать друг на друга.

Вспомним механику Ньютона. Рассмотрим систему двух частиц.

Запишем энергию частицы в Ньютоновской теории в центрально симметричном поле.

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} r \dot{\phi}^2 - \frac{G_N m M}{r} \quad (1.14)$$

Угловой момент сохраняется: $mr^2\dot{\phi} = l$, тогда энергию можно переписать в следующем виде:

$$E/m = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{l^2}{2m^5 2r^2} - \frac{G_N M}{r}. \quad (1.15)$$

Объявим величину $\frac{l^2}{2m^5 2r^2} - \frac{G_N M}{r} = V_N$ эффективным потенциалом. Тогда динамику частицы можно понять по рис 2

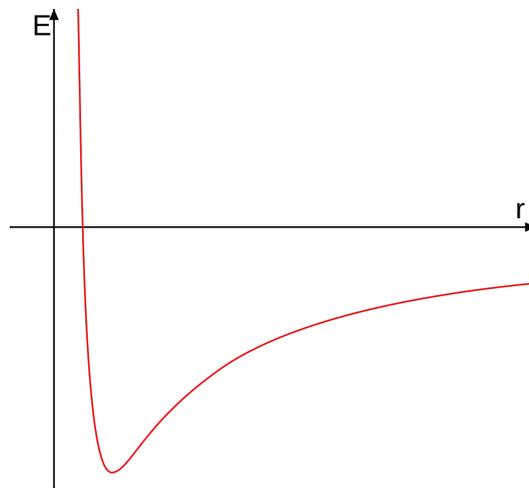


Рис. 1.2. Энергия частицы в гравитационном поле Ньютона.

Здесь точка минимума соответствует круговой орбите, остальные точки соответствуют эллиптическим орбитам. Данная картина не будет меняться при изменении углового момента.

В теории Эйнштейна динамика частицы описывается графиком на рис 3:

Здесь точка минимума также соответствует круговым орбитам. Теперь у нас есть точка максимума, которая тоже соответствует круговым орбитам, но это неустойчивая точка. Данная картина зависит от углового момента. Она верна пока

$$l^2 > \frac{12G_N^2 M^2 m^2}{c^2}. \quad (1.16)$$

Главное отличие в том, что мы можем попасть в центр.

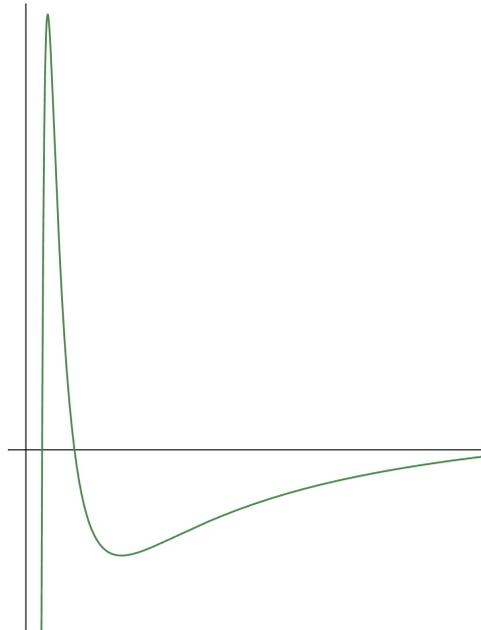


Рис. 1.3. Энергия частицы в гравитационном поле Эйнштейна при большем значении момента.

В случае если условие (16) не соблюдается, график будет выглядеть следующим образом:

Все частицы будут попадать в центр. В заключается принципиальное отличие Ньютоновской гравитации и гравитации Эйнштейна: в Ньютоновской гравитации при любом ненулевом моменте вы не можете попасть в центр, в гравитации Эйнштейна при большем значении момента и энергии вы можете попасть в центр, при снижении до определенного значения момента вы будете захвачены черной дырой.

Особый интерес вызывает случай, когда имеет место равенство:

$$l^2 = \frac{12G_N^2 M^2 m^2}{c^2}. \quad (1.17)$$

В этом случае у вас точки максимума и минимума на рис 3 сольются в одну точку - точку перевала. Соответствующий радиус:

$$r = \frac{6G_N M}{c^2} = 3R_S. \quad (1.18)$$

Отсюда и получается значение $x = 3$. Физически этот радиус соответствует самой глубокой орбите, по которой может двигаться точка.

Вид для графика на рис 3 задается уравнением:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_E(r) = \frac{E^2 - m^2 c^2}{m^2}, \quad \text{где} \quad V_E = \frac{c^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2m^2 r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3}. \quad (1.19)$$

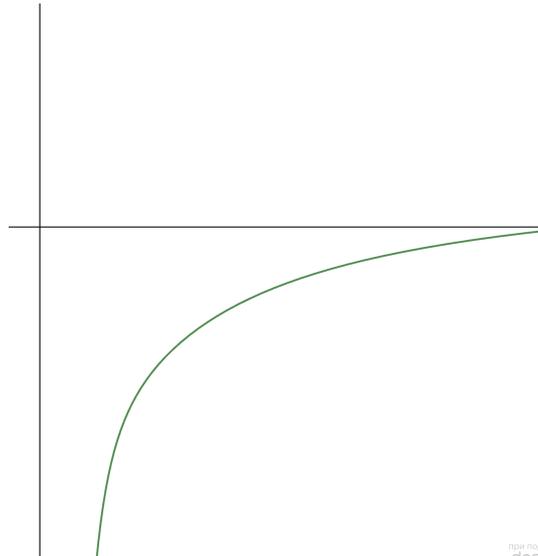


Рис. 1.4. Энергия частицы в гравитационном поле Эйнштейна при малом значении момента.

Для получения данного уравнения нужно записать следующую конструкцию: $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2$. Затем необходимо перейти в координаты Шварцшильда:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi. \quad (1.20)$$

Метрика Шварцшильда:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{R_S}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Лекция 2. Вывод уравнения с источником. Калибровка Лоренца. Решение уравнения без источников. Лямбда тензор. Бесследовая поперечная калибровка

Список литературы:

- 1) *Michele Maggiore* — первые разделы;
- 2) *Ландау-Лифшиц*;
- 3) *Misner-Thorne-Wheeler* (MTW);
- 4) *David Tong lectures* — видео-лекции;

Общее ковариантное преобразование

Под действием диффеоморфизмов метрический тензор преобразуется как

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}(x) \quad (2.1)$$

Здесь и далее мы интересуемся гравитацией в режиме «слабого поля». Нас будет интересовать ситуация, когда метрический тензор имеет форму:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

где возмущение над метрикой Минковского очень мало $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Тогда, нас будут интересовать только малые преобразования, при которых смещение координаты достаточно мало:

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad \text{где } |\partial_\nu \xi_\mu| \leq |h_{\mu\nu}|. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, как тензор $h_{\mu\nu}$ преобразуется под действием таких преобразований:

$$h_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (2.4)$$

Вывод уравнения, описывающего эволюцию $h_{\mu\nu}$

Начнем с уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Тензор Ричи схематически выглядит как

$$R_{\mu\nu} \sim \partial\Gamma + \cancel{O(\Gamma^2)} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

где Γ — символы Кристоффеля. Символы Кристоффеля — это достаточно малая величина $\Gamma^2 \sim h^2$ и членами такого порядка малости мы интересоваться не будем (*Линеаризованная теория Эйнштейна*).

В виду того, что $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ включает в себя производные метрического тензора:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\nu}g_{\sigma\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}), \quad (2.7)$$

и метрика Минковского постоянна, то

$$\Gamma \sim O(\partial h). \quad (2.8)$$

Наконец, схематически уравнение Эйнштейна будет иметь вид:

$$\partial^2 h = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Проведем все вычисления честно. Тензор Ричи (без учета Γ^2):

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda}. \quad (2.10)$$

В линеаризованной теории символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Выведем из такого определения Γ -символов тензор Ричи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\cancel{\partial_{\mu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\nu}} + \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\cancel{\partial_{\mu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\nu}} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\nu}. \quad (2.12)$$

Замечание. Если произвести преобразование $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}$, то тензор $R_{\mu\nu}$, определенный по формуле (2.10) остается неизменным. Можно доказать, что и тензор Римана инвариантен относительно такого преобразования в линеаризованной теории.

Рассмотрим скаляр кривизны:

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \partial^{\mu}\partial_{\lambda}h_{\mu}^{\lambda} - \square h \quad (2.13)$$

Тогда уравнение Эйнштейна (2.5):

$$\frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial_{\nu}h + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\lambda}h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^{\sigma}\partial^{\lambda}h_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

Введем объект

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (2.15)$$

который обладает тем свойством, что для его следа: $\bar{h} = -h$. Тогда можно «обратить» уравнение (2.15):

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (2.16)$$

Введем калибровку Лоренца:

$$\boxed{\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0} \quad (2.17)$$

Замечание: Если переходить от линеаризованной теории к общековариантной, то эта калибровка имеет вид:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.18)$$

Подставляя $h_{\mu\nu}$, которая определяется как в формуле (2.16), с учетом калибровки Лоренца, уравнение Эйнштейна (2.14):

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}. \quad (2.19)$$

Это главное уравнение, которое решают физики гравитационных волн. В качестве теста на здравый смысл можно вывести отсюда Ньютоновскую гравитацию, подставляя статический источник $T_{00} = M\delta(\vec{x})$:

$$ds^2 = \underbrace{-(1 + 2\Phi_N) dt^2}_{\text{чистый Ньютон}} + \underbrace{(1 - 2\Phi_N) d\vec{x}^2}_{\text{первый пост-Ньютон}}. \quad (2.20)$$

Первый пост-Ньютон определяет угол наклона при распространении света — первое подтверждение правильности ОТО.

Следствия калибровки Лоренца

Рассмотрим преобразование $\bar{h}_{\mu\nu}$ в общем случае преобразований координат (2.3):

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho \quad (2.21)$$

Действуя справа на это выражение производной, и приравнивая результат нулю, получим следствие калибровки Лоренца:

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \xi_\mu + \partial_\nu \partial_\rho \xi^\rho \quad (2.22)$$

Теперь, чтобы калибровка выполнялась и для преобразованного $\bar{h}'_{\mu\nu}$, необходимо положить:

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = f_\nu(x) \quad (2.23)$$

$$\square \xi_\nu = f_\nu(x). \quad (2.24)$$

Гравитационные волны в пустоте

Уравнение на $\bar{h}_{\mu\nu}$ без источников:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Решение этого уравнения можно рассмотреть в виде наложения плоских волн:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left[H_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \right], \quad (2.26)$$

Т.к. функция $f_\nu(x) = 0$, то

$$\square \xi_\nu = 0 \quad (2.27)$$

Можно найти такие ξ_ν , удовлетворяющие уравнению, чтобы:

$$\xi_\nu = \lambda_\nu e^{ik_\rho x^\rho}. \quad (2.28)$$

Тогда, можем выбрать 4 функции λ_ν таким образом, чтобы

1) Занулить след (*TT-калибровка*):

$$\bar{h} = 0, \quad (2.29)$$

после чего

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

2) Остается еще три функции λ_i , правильным выбором которых можно добиться:

$$h_{0i} = 0 \quad (2.31)$$

Таким образом, из 10 компонент тензора $h_{\mu\nu}$ мы 4 убрали Лоренцевской калибровкой и еще 4 компоненты убрали правильным выбором λ_ν (*TT*) — остается 2 компоненты (степени свободы). **В общей теории относительности есть 2 степени свободы, которые могут распространяться как волны в вакууме.**

В силу калибровки Лоренца и $h_{0i} = 0$ можем написать:

$$\partial^\mu h_{\mu 0} = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial^0 h_{00} + \cancel{\partial^i h_{i0}} = 0 \quad (2.33)$$

откуда

$$\partial^0 h_{00} = 0 \quad (2.34)$$

Тогда, когда мы говорим о гравитационных волнах, мы полагаем $h_{00} = 0$. И объединяя это с предыдущими утверждениями:

$$h_{0\mu} = 0 \quad (2.35)$$

$$h = 0 \quad (2.36)$$

$$\partial^j h_{ij} = 0. \quad (2.37)$$

Λ-тензор

Конечно, на практике, никто подбирает функции $f_{\nu}(x)$, чтобы наложить бесследовую калибровку. Есть автоматический способ, как это сделать с помощью т.н. Λ-тензора.

Допустим возмущение метрики вычислено в Лоренцевской калибровке. Тогда, чтобы получить h_{ij} в бесследовой калибровке, надо:

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij;kl} h_{kl} \quad (2.38)$$

Λ-тензор строится из проекторов. Рассмотрим проектор:

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (2.39)$$

где n_i - направление распространения волны. Проекторы обладают свойством:

$$P_{ij} P_{jk} = P_{ik}. \quad (2.40)$$

Тогда Λ-тензор:

$$\Lambda_{ij;kl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (2.41)$$

Поляризации тензора h_{ij}^{TT}

Часто тензор h_{ij}^{TT} разбивают на 2 поляризации — представляют в виде наложения двух гравитационных волн с различными поляризациями h_+ и h_{\times} :

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_{\times} & 0 \\ h_{\times} & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Уравнения движения в TT-калибровке

Разные калибровки — это разные системы отсчета. Задумаемся, как выглядит в этой калибровке уравнение движения — уравнение геодезических:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} u^{\lambda} u^{\rho} = 0. \quad (2.43)$$

Предположим, что материальная точка изначально не двигалась до прихода волны:

$$\left. \frac{dx^i}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.44)$$

После прихода волны в нашей калибровке:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i = -\frac{c^2}{2} (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) = 0 \quad (2.45)$$

Таким образом, в поперечной калибровке координата не смещается.

Уравнение отклонения геодезической

Рассмотрим уравнение отклонения геодезической

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(x + \xi) \frac{d(x^\lambda + \xi^\lambda)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} = 0, \quad (2.46)$$

где ξ^μ по физическому смыслу — координатное расстояние между зеркалами в каком-нибудь гравитационном эксперименте. Можно убедиться, что

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (2.47)$$

Это общее уравнение для отклонения от геодезической, и в нем возник тензор Римана. Тензор Римана удобнее всего вычислять в бесследовой поперечной калибровке.

Рассмотрим, как действует гравитационная волна на отклонение от геодезической ξ^μ в лабораторной системе отсчета:

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} h_{ij}^{TT} \xi^j. \quad (2.48)$$

Последний закон похож на 2 закон Ньютона. В эксперименте можно считать, что на зеркала в гравитационном эксперименте действует сила F_i :

$$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi_j \quad (2.49)$$

Эксперимент *LIGO*

Схема эксперимента представлена на рисунке 2.1. Оказывается, что время про-

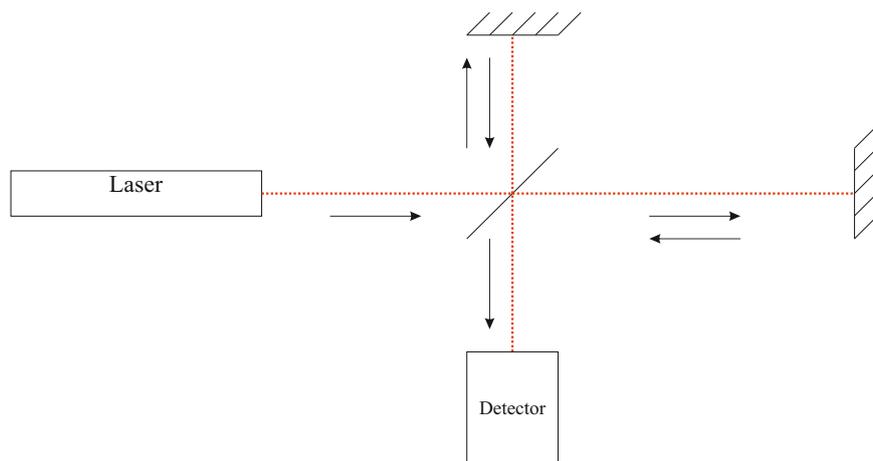


Рис. 2.1. Эксперимент *LIGO*

хождения лазера по разным путям (которые одинаковы по длине) оказывается разным, если на центральное зеркало действует гравитационная волна. Эту разницу времени можно полностью посчитать в бесселедовой поперечной калибровке.

Для простоты предположим, что у света есть только одна поляризационная компонента h_+ , тогда интервал:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + (1 + h_+) dx^2 + [1 - h_+] dy^2 + dz^2 \quad (2.50)$$

Будем считать, что расположение зеркал не меняется и, т.к. мы исследуем распространение света, накладываем условие:

$$ds^2 = 0 \quad (2.51)$$

Тогда dx :

$$dx = c dt \left[1 - \frac{h_+}{2} \right] \quad (2.52)$$

Возьмем интеграл от предыдущего выражения:

$$L = c(t_1 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_1} h_+ dt \quad (2.53)$$

t_0 — время прохождения центрального зеркала, t_1 — время, когда свет дошел до правого зеркала. Будем считать, что h_+ — какая-то волна. Тогда можем заметить, в силу того, что $L = \text{const}$, что $t_1 - t_0$ зависит от h_+ .

$$h_+ = h_0 \cos \omega t \quad (2.54)$$

И набеги фаз по разным осям не равны друг другу.

$$\Delta\varphi_y = -\Delta\varphi_x \quad (2.55)$$

Лекция 3. Гравитационные волны от двух вращающихся черных дыр и от слияния черных дыр

Вычисление гравитационной волны от двух вращающихся черных дыр

Нашей главной целью будет получить гравитационную волну объекта, который представляет собой две вращающихся черных дыры (см. рис. 3.1). Будем решать

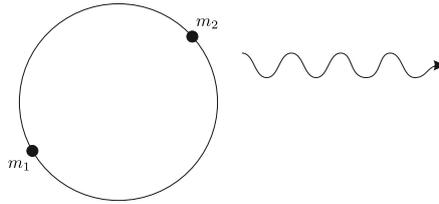


Рис. 3.1. Две вращающиеся черные дыры

уравнение:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

Общее решение для такой задачи:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x-x') T^{\mu\nu}(x') \quad (3.2)$$

где функция Грина $G(x-x')$ удовлетворяет уравнению:

$$\square G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \quad (3.3)$$

Видим, что этот случай аналогичен тому, который рассматривается в теории электромагнетизма, где функция Грина была:

$$G(x-x') = -\frac{1}{4\pi |\vec{x}-\vec{x}'|} \delta(ct-ct' - |\vec{x}-\vec{x}'|). \quad (3.4)$$

Домашнее задание: Самостоятельно вывести эту функцию Грина. Можно расписать разложение функции Грина через Фурье-компоненты

$$G(x-x') = \int d^4p \frac{e^{-ip(x-x')}}{p^2} \quad (3.5)$$

с граничными условиями:

$$G(x-x') = 0 \text{ при } t-t' < 0, \quad (3.6)$$

откуда можно вывести функцию Грина (3.4). Интегрируя уравнение (3.2) по времени, с такой функцией Грина, получим:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T^{\mu\nu} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right). \quad (3.7)$$

В общем случае, мы говорим об источниках на далеких расстояниях. Поэтому разумным является *приближение далеких расстояний*. Пользуясь обозначениями рисунка 3.2:

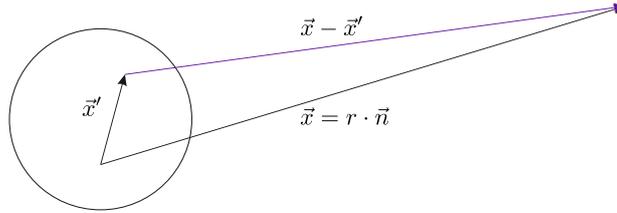


Рис. 3.2. Приближение далеких расстояний

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{x}' \cdot \vec{n} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (3.8)$$

где поправки получаются порядка отношения размера источника к расстоянию до источника. В астрофизике, когда $d \sim \text{км}$, а $r \sim \text{Парсек}$, это приближение выполняется с большой точностью. Тогда

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{r} T^{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c}, \vec{x}' \right). \quad (3.9)$$

Несмотря на то, что мы интегрируем по координатам источника, мы интересуемся тем, что происходит вне источника — в вакууме. Поэтому можем перейти в бесследовую поперечную калибровку, путем домножения \bar{h} на Λ -тензор:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^4 r} \Lambda_{ij;kl}(\vec{n}) \int d^3\vec{x}' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c}, \vec{x}' \right). \quad (3.10)$$

Разложим T_{kl} по малой добавке ко времени $\frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c}$.

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c}, \vec{x}' \right) = \quad (3.11)$$

$$= T_{kl} \left(\underbrace{t - \frac{r}{c}}_{t_{\text{ret}}}, \vec{x}' \right) + \frac{1}{c} \dot{T}_{kl} \cdot \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} + \frac{1}{2c^2} \ddot{T}_{kl} \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{n})^2}{c^2} + \dots \quad (3.12)$$

Физический смысл этого разложения — мультипольное разложение. С другой стороны, можно обратить внимание, что $\dot{T}_{kl} \sim \omega$, где ω — угловая скорость вращающегося

источника. Тогда в первом порядке разложения

$$\dot{T}_{kl} \cdot \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} \sim \frac{\omega \vec{x}' \cdot \vec{n}}{c} \sim \frac{\omega d}{c} \sim \boxed{\frac{v}{c}} \quad (3.13)$$

То есть мы получили еще и разложение по малым скоростям.

Несмотря на малость слагаемых в разложении T_{kl} , для того, чтобы отличить гравитационные волны от шума в эксперименте, необходимо учитывать даже такие поправки. В рамках этой лекции, для простоты ограничимся только нулевым членом разложения:

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{n}}{c}, \vec{x}' \right) \approx T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right). \quad (3.14)$$

Введем объект

$$S_{kl} = \int d^3 \vec{x}' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) \quad (3.15)$$

В терминах этого объекта гравитационная волна записывается как:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^4 r} \Lambda_{ij;kl} S_{kl} \quad (3.16)$$

Введем объекты, которые называются массовые квадрупольи:

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3 \vec{x}' T_{00} (t_{\text{ret}}, \vec{x}') \quad (3.17)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3 \vec{x}' T_{00} (t_{\text{ret}}, \vec{x}') x'^i \quad (3.18)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3 \vec{x}' T_{00} (t_{\text{ret}}, \vec{x}') x'^i x'^j \quad (3.19)$$

Введем также токовые мультиполи:

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3 \vec{x}' T^{0i} \quad (3.20)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3 \vec{x}' T^{0i} x'^j \quad (3.21)$$

Рассмотрим производную по времени:

$$\dot{P}^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3 \vec{x}' \dot{T}^{0i} x'^j \quad (3.22)$$

Пользуясь законом сохранения тензора энергии-импульса в линеаризованной теории — $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (этот закон согласован с калибровкой Лоренца), можем получить:

$$\partial_o T^{0i} + \partial_k T^{ki} = 0, \quad (3.23)$$

и тогда, перекидывая производную на x'^j , получим:

$$\dot{P}^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3 \vec{x}' \dot{T}^{0i} x'^j = - \int d^3 \vec{x}' \partial_k T^{ki} x'^j = S^{ij} \quad (3.24)$$

Введем симметризацию S^{ij} , как

$$S^{ij} = \frac{1}{2} (\dot{P}^{i,j} + \dot{P}^{j,i}). \quad (3.25)$$

Аналогичным образом, можно вывести S^{ij} через производные M^{ij} :

$$\dot{M}^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d\vec{x}' \dot{T}_{00} x'^i x'^j \quad (3.26)$$

Расписывая калибровку:

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0 \quad (3.27)$$

Можем перебросить производную:

$$\dot{M}^{ij} = -\frac{1}{c^2} \int d\vec{x}' \partial_l T^{l0} x'^i x'^j = P^{i,j} + P^{j,i}. \quad (3.28)$$

Таким образом,

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij} \quad (3.29)$$

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \Lambda_{ij;kl} \ddot{M}_{kl} \quad (3.30)$$

Иногда вместо M^{ij} вводят квадрупольный момент:

$$Q^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d\vec{x}' T_{00} \cdot \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right). \quad (3.31)$$

Λ-тензор (продолжение)

Рассмотрим систему координат, связанную с объектом, излучающим гравитационные волны (см. рис. 3.3). Допустим, мы хотим посмотреть распространение гравитационных волн в направлении оси Oz . Λ - тензор представляется в виде:

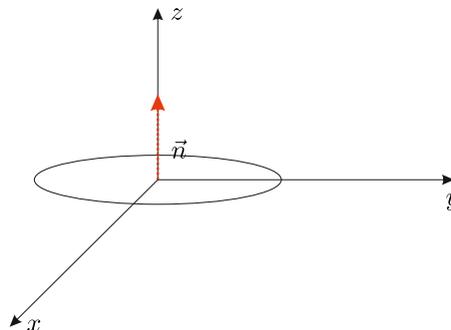


Рис. 3.3. Система координат

$$\Lambda_{ij;kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \quad (3.32)$$

Если мы смотрим вдоль оси Oz , можем написать

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \left((PMP)_{ij} - \frac{1}{2}P_{ij} \text{tr}(PA) \right). \quad (3.33)$$

Но если мы выбрали ось вдоль луча наблюдения, то проекционная матрица P вырождается:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

и вычисление матриц становится тривиальным. Кроме того, вспомним, как записывается h_{ij} в терминах плюс- и кросс-поляризаций:

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

и тогда сравнивая это выражение с матрицей, которая получается по формуле (3.33):

$$h_+ = \frac{G}{c^4 r} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (3.36)$$

$$-h_\times = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{M}_{12}. \quad (3.37)$$

Далее, если нужно изучать излучение гравитационных волн в произвольном направлении, надо «крутить матрицы» M_{ij} , то есть

$$\mathcal{M}_{ij} = (R^T \mathcal{M}' R)_{ij}, \quad (3.38)$$

где R — матрицы вращения.

Гравитационная волна от слияния двух черных дыр

Задача представлена на рисунке 3.1. Задачу двух тел всегда можно привести к задаче одного тела с массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. В силу малости скоростей, можем воспользоваться знаменитой формулой Эйнштейна

$$E = mc^2, \quad (3.39)$$

и тогда (после интегрирования δ -функций в T^{00})

$$M_{ij} = \mu x^i x^j, \quad (3.40)$$

где x^i — координаты, соответствующие траектории тела, на которое мы заменили два изначальных тела.

В нашей задаче 2 тела двигаются друг относительно друга по циклической орбите. Сводя эту задачу к задаче одного тела, получаем, что это тело движется по орбите радиуса $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ вокруг центра масс.

Выбираем ось Oz перпендикулярно плоскости вращения:

$$z = 0 \quad (3.41)$$

$$x = R \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.42)$$

$$y = R \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.43)$$

Тогда

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = 2\mu R^2 \omega^2 \cos 2\omega t \quad (3.44)$$

$$\ddot{M}_{12} = 2\mu R^2 \omega^2 \sin 2\omega t \quad (3.45)$$

Если все подставить в h_+ , получим

$$h_+ = \frac{4G}{c^4 r} \mu \omega^2 R^2 \times \cos 2\omega t \quad (3.46)$$

Видим, что частота гравитационной волны равняется двум частотам циклического вращения черных дыр:

$$\boxed{\omega_{\text{gw}} = 2\omega} \quad (3.47)$$

в случае, когда наблюдение происходит в направлении, перпендикулярном плоскости вращения.

Замечание: С формулой (3.45) и связано утверждение, что $\dot{T} \sim \omega$.

Перепишем выражение для h_+ в другой форме. Для этого вспомним теорему Вириала:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{G\mu \cdot (m_1 + m_2)}{2R} \quad (3.48)$$

Удобно переписать все через циклическую частоту. Т.к. $v = \omega R$ и обозначая $m_1 + m_2 \equiv M$:

$$\omega^2 = \frac{G \times M}{R^3}. \quad (3.49)$$

Тогда радиус

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \quad (3.50)$$

Наконец, компонента поляризации гравитационной волны

$$h_+ = \frac{4G}{c^4 r} \mu \omega^2 \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{2/3} \cos 2\omega t. \quad (3.51)$$

Объединим μ и M в последней формуле в M_c (в дословном переводе «щебечущая» масса)

$$M_c^{5/3} = \mu M^{2/3} \text{ — chirp mass} \quad (3.52)$$

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (3.53)$$

Выражение для h_+ в терминах *chirp mass*:

$$h_+ = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \times \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{2/3} \cos(2\pi f_{\text{gw}} t), \quad (3.54)$$

где $f_{\text{gw}} = \frac{\omega_{\text{gw}}}{2\pi}$ - обычная частота гравитационной волны.

Домашнее задание: Подставить в эту формулу параметры эксперимента *LIGA*: $m_{1,2} = 30M_{\text{солнца}}$, $f_{\text{gw}} \approx 100$ Hz, $r \approx 500$ Мрс. Проверить, что $h_+ \sim 10^{-21}$ — типичный размер гравитационной волны от астрономических объектов.

Замечание: Этот результат в конечном счете будет использован для вычисления энергии гравитационной волны. Но результат «очень скучный», т.к. мы неявно предполагаем, что у гравитационной частота постоянна. На практике это не выполняется. У синусоиды колебаний есть модуляция — амплитуда сигнала растет.

Лекция 4. Энергия гравитационной волны. Квадрупольная формула Эйнштейна

Энергия и гравитация

Этот раздел общей теории относительности считается достаточно тяжелым, т.к. получить простое выражение для энергии нельзя — есть определенная проблема с гравитационным тензором энергии-импульса.

Пусть наша система характеризуется тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ и сбрасывает энергию через гравитационные волны.

$$\frac{dE_{\text{syst}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} \quad (4.1)$$

Хотим найти полный ТЭИ, учитывающий энергию системы и гравитационных волн (вне системы) одновременно:

$$T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} - ? \quad (4.2)$$

Проблема состоит в том, что найти локальное калибровочно-инвариантное выражение для $t^{\mu\nu}$ невозможно.

Литература по теме:

- 1) §96 Ландау-Лифшиц — Теория Поля.

Ландау и Лифшиц переписали уравнение Эйнштейна в виде

$$\partial_\mu ((T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\sqrt{-g}) = 0 \quad (4.3)$$

и объявили величину $t^{\mu\nu}$ псевдотензором гравитации в ОТО. Исходя из этого можно считать изменение энергии в системе. $t^{\mu\nu}$ называют псевдотензором Ландау-Лифшица. Однако, как можно убедиться, что в силу отсутствия локальной калибровочной инвариантности этого объекта, энергию гравитационной волны нельзя посчитать как

$$E_{\text{gw}} = \int d^3\vec{x} t^{00} \quad (4.4)$$

Теорема Нетер

Будем работать в линеаризованной теории вдали от самой системы $r \gg d$. Для того, чтобы вывести ТЭИ используется теорема Нетер. Чтобы получить ТЭИ необходимо использовать симметрии Лагранжиана относительно трансляций:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \underbrace{\varepsilon^\mu}_{\text{const}}. \quad (4.5)$$

ТЭИ представляется как

$$t^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial^\nu \phi_i \quad (4.6)$$

Таким образом, необходимо знать лагранжиан для гравитации \mathcal{L} . Действие в линеаризованной теории:

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R = \int d^4x (1+h) (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Разложим тензор Ричи по h , учитывая, то $R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, получим

$$S_E = \int d^4x (1+h) (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \left[R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \right] \quad (4.8)$$

Окончательный результат для квадратичного действия:

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{64\pi G} \left[\partial_\lambda h_{\alpha\beta} \partial^\lambda h^{\alpha\beta} - \partial_\lambda h \partial^\lambda h + 2\partial_\lambda h^{\lambda\sigma} \partial_\sigma h - 2\partial_\lambda h^{\lambda\sigma} \partial_\rho h^\rho_\sigma \right] \quad (4.9)$$

Интересно, что ключевую роль будет играть только первый член. Если мы хотим вычислим ТЭИ, то для простоты можем выбрать калибровку (т.к. работаем вне источника)

$$h = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad (4.10)$$

тогда последние 3 члена в Лагранжиане становятся равными нулю.

$$t^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \left[-\frac{c^4}{64\pi G} \partial_\lambda h_{\alpha\beta} \partial^\lambda h^{\alpha\beta} \right] + \frac{c^4}{32\pi G} \partial^\mu h_{\alpha\beta} \partial^\nu h^{\alpha\beta} \quad (4.11)$$

Важный момент состоит в том, что выражение для $t^{\mu\nu}$ не калибровочно-инвариантно. В каждой точке мы можем выбрать такую систему координат, чтобы «занулить» все эти производные.

Пусть калибровочное преобразование:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (4.12)$$

и $t^{\mu\nu}$ будет зависеть от калибровочных функций ξ_μ . Это проблема, т.к. локально получить калибровочно-инвариантное выражение не представляется возможным.

Для разрешения этой проблемы проведем аналогию с электродинамикой.

Аналогия из электродинамики

Лагранжиан электродинамики:

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

откуда тензор энергии-импульса:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = F_{\rho}^{\mu} \partial^{\nu} A^{\rho} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (4.14)$$

видим, что это выражение также не калибровочно-инвариантно. **Утв.** В любой теории к ТЭИ, посчитанному по теореме Нетер, можно добавить тензор

$$T_{\text{N}}^{\mu\nu} + \partial_{\rho} C^{\rho\mu\nu}, \quad (4.15)$$

где $C^{\rho\mu\nu}$ антисимметричен по первым двум индексам. Такой ток также заведомо будет сохраняться

$$\partial_{\mu} T_{\text{N}}^{\mu\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\rho} C^{\rho\mu\nu} = 0 \quad (4.16)$$

Это трюк согласован с тем, что Лагранжиан тоже определен с точностью до 4-дивергенции:

$$\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L} + \partial_{\mu} K^{\mu}. \quad (4.17)$$

Тогда к ТЭИ электродинамики можем добавить член $-F^{\mu\rho} \partial_{\rho} A^{\nu}$. И итоговый ТЭИ:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = F_{\rho}^{\mu} F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (4.18)$$

это выражение калибровочно-инвариантное.

Таким образом, можем сделать вывод, что слагаемые, определенного вида $\partial \dots C \dots$, добавляемые к ТЭИ не играют роли в финальном выражении для энергии. Действительно, посчитаем вклад такого члена в электродинамике:

$$\delta E = \int d\vec{x} \partial_i C^{i00} \rightarrow 0 \quad (\text{в силу теоремы Гаусса}) \quad (4.19)$$

Расчет ТЭИ гравитационной волны

Усредним $t^{\mu\nu}$ (можем так сделать, по аналогии с электродинамикой)

$$t^{\mu\nu} \rightarrow \langle t^{\mu\nu} \rangle = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^{\mu} h_{\alpha\beta} \partial^{\nu} h^{\alpha\beta} \rangle - \frac{c^4}{64\pi G} \eta^{\mu\nu} \underbrace{\langle \partial_{\lambda} h_{\alpha\beta} \partial^{\lambda} h^{\alpha\beta} \rangle}_{= -\langle \partial_{\lambda} \partial^{\lambda} h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \rangle} \quad (4.20)$$

Усреднение заключается в том, что мы всегда можем «перебросить производную» (то есть проинтегрировать по частям и не учитывать граничные члены). Используя уравнение движения, можем написать

$$\partial_{\lambda} \partial^{\lambda} h_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.21)$$

и второй член обращается в ноль. Таким образом, тензор энергии-импульса гравитационных волн

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^\mu h_{\alpha\beta} \partial^\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (4.22)$$

Чтобы говорить об энергии гравитационных волн необходимо выбрать какой-то объем с размером стенок $L \gg \frac{\lambda}{2\pi}$. В то же время, мы интересуемся масштабами $T \gg \frac{1}{f_{\text{gw}}}$. Таким образом, $t^{\mu\nu}$ по физическому смыслу — энергия гравитационных волн.

Совершим калибровочное преобразование:

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha, \quad (4.23)$$

тогда в преобразованном $t^{\mu\nu}$ появятся члены вида:

$$-\langle \partial^\mu (\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha) \partial^\nu h^{\alpha\beta} \rangle = 0 \quad (4.24)$$

т.к. можем перебросить производные на последний сомножитель и воспользоваться уравнением движения. Таким образом, теперь можем считать $t^{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантным.

Квадрупольная формула Эйнштейна

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0 \quad (4.25)$$

Тогда, если взять интеграл по объему:

$$\int_V d^3x \partial_0 t^{00} + \partial_i t^{0i} = 0 \quad (4.26)$$

Это выражение можно переписать как

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{cdt} = - \int d^3x \partial_i t^{0i} = - \int dS \vec{n}_r t^{0r} \quad (4.27)$$

Мы знаем, чем равняется $h^{\alpha\beta}$ для гравитационной волны

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{rc^4} \Lambda_{ij;kl}(\vec{n}) \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (4.28)$$

тогда (пренебрегая членами $\sim \frac{1}{r^2}$)

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{cdt} = - \frac{c^3}{32\pi G} \int d\Omega r^2 \langle \partial^0 \frac{2G}{rc^4} \Lambda_{ij;kl}(\vec{n}) \ddot{Q}_{kl} - \frac{2G}{rc^4} \Lambda_{ij;k'l'} \ddot{Q}_{k'l'} \rangle, \quad (4.29)$$

далее

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{cdt} = -\frac{c^2 (2G)^2}{32\pi Gc^8} \int d\Omega \underbrace{\Lambda_{ij;kl}(\vec{n})\Lambda_{ij;k'l'}(\vec{n})}_{=\Lambda_{kl;k'l'}} \langle \ddot{Q}_{kl}\ddot{Q}_{k'l'} \rangle \quad (4.30)$$

Далее, нужно взять интеграл по всем углам

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} = -\frac{G}{8\pi c^5} \frac{2\pi}{15} (11\delta_{kk'}\delta_{ll'} - 4\delta_{kl}\delta_{k'l'} + \delta_{kl'}\delta_{lk'}) \quad (4.31)$$

и наконец

$$\boxed{\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{kl}\ddot{Q}_{kl} \rangle} \text{ — Einstein 1915} \quad (4.32)$$

исходя из этой формулы можно понять, как эволюционирует система.

Лекция 5. Квадрупольная формула Эйнштейна и ее применение к системе двух вращающихся черных дыр

На этой лекции, исходя из квадрупольной формулы Эйнштейна

$$P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (5.1)$$

мы будем описывать систему двух вращающихся тел (черных дыр), найдем закон сближения двух черных дыр и закон изменения циклической частоты вращения двух черных дыр. У этой формулы есть ограничения. В частности, она работает в при-

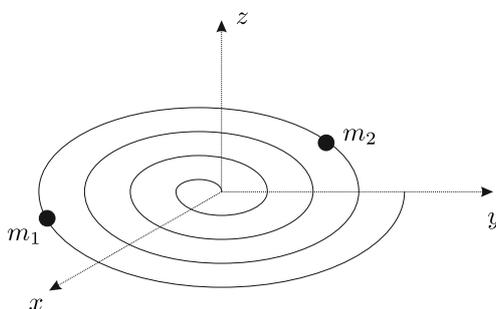


Рис. 5.1. Система двух вращающихся черных дыр

ближении малых скоростей $v \ll c$.

Закон изменения циклической частоты вращения двух черных дыр

Перепишем квадрупольную формулу для системы, представленной на рисунке 5.1:

$$Q_{ij} = \underbrace{\mu}_{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right). \quad (5.2)$$

Если система располагается в плоскости OXY , тогда ненулевые компоненты — Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} .

$$P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^5} \times \left(\ddot{Q}_{11}^2 + \ddot{Q}_{22}^2 + 2 \cdot \ddot{Q}_{12}^2 \right) \quad (5.3)$$

Будем рассматривать круговые орбиты — в системе, которая активно сбрасывает гравитационные волны это хорошее приближение. Тогда т.к. $x_1 = R \cdot \cos \omega t$, а $x_2 =$

$R \cdot \sin \omega t$.

$$\ddot{Q}_{11} = \mu (\ddot{x}_1^2) = \mu R^2 \omega^3 \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \right) = 4\mu R^2 \omega^3 \sin 2\omega t \quad (5.4)$$

$$\ddot{Q}_{22} = -\ddot{Q}_{11} \quad (5.5)$$

$$\ddot{Q}_{12} = -4\mu R^2 \omega^3 \cos 2\omega t \quad (5.6)$$

и тогда квадруполь равняется:

$$P_{\text{quad}} = \frac{32G}{5c^5} \mu^2 \omega^6 R^2. \quad (5.7)$$

Эта формула описывает количество энергии, которое излучается системой за единицу времени в приближении низких скоростей черных дыр.

Одним из важных упрощений является то, что, т.к. мы работаем в приближении малых скоростей, мы будем использовать Ньютоновскую динамику, в которой циклическая частота вращения определяется законом Кеплера:

$$\omega^2 = \frac{G \overbrace{M}^{m_1+m_2}}{R^3}. \quad (5.8)$$

Нас интересует то, как циклическая частота меняется со временем $\dot{\omega} = ?$ Выражая R из формулы (5.8), перепишем квадрупольную формулу в виде

$$P_{\text{quad}} = \frac{32}{5c^5} G^{7/3} \omega^{10/3} M_c^{10/3}, \quad (5.9)$$

где *chirp mass*:

$$M_c = \mu^{3/5} \times M^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (5.10)$$

Введем энергию орбиты (избавляясь от R аналогично предыдущему случаю)

$$E_{\text{orb}} = -\frac{Gm_1 m_2}{2R} = -\frac{G^{2/3} M_c^{5/3} \omega^{2/3}}{2}. \quad (5.11)$$

Тогда закон баланса энергии:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -P_{\text{quad}}. \quad (5.12)$$

Вычислим производную по времени:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -\frac{G^{2/3} M_c^{5/3} \dot{\omega}}{3\omega^{1/3}} = -\frac{32G^{7/3}}{5c^5} \omega^{10/3} M_c^{10/3}. \quad (5.13)$$

Отсюда получаем закон изменения ω :

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5c^5} (GM_c)^{5/3} \times \omega^{11/3}. \quad (5.14)$$

Интегрируем методом разделения переменных:

$$\omega^{-8/3} = -\frac{256}{5c^5} (GM_c)^{5/3} t + C'. \quad (5.15)$$

Наконец, обращая это выражение, получим

$$\omega = \frac{1}{\left(C' - \frac{256}{5c^5} (GM_c)^{5/3} t\right)^{3/8}} \quad (5.16)$$

Видим, что с течением времени, $\omega \rightarrow \infty$ (см. рис. 5.2, черная линия на рисунке). В реальности, конечно, такого не происходит, и чтобы это учесть вводится регуляризация, чтобы учесть порог, после которого приближение Ньютоновской динамики перестает быть верным (красная линия). Кроме того, в какой-то момент перестает выполняться приближение круговых орбит и две черные дыры «падают» друг на друга. Это происходит, когда расстояние между черными дырами $r = r_{ISCO}$. Мы

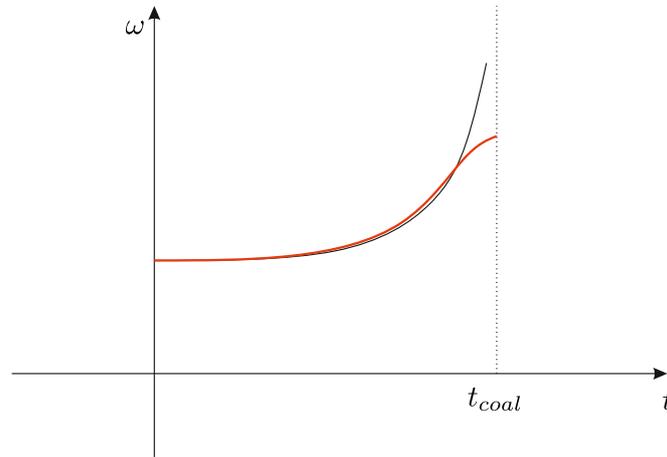


Рис. 5.2. Зависимость ω от времени t

предполагаем, что процесс, соответствующий краю графика $r \approx r_{ISCO}$, занимает очень малый промежуток времени ($t \approx t_{coal} \pm \Delta t$, $\Delta t \ll 1$). Иными словами, будем работать в приближении $r \gg r_{ISCO}$.

Перепишем выражение для ω в виде:

$$\omega = \frac{1}{(t_{coal} - t)^{3/8}} \times \left(\frac{5}{256}\right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/8}. \quad (5.17)$$

Введем обозначение для времени, которое осталось до падения черных дыр друг на друга, $\tau = t_{coal} - t$. Из закона Кеплера:

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \sim \tau^{1/4} \quad (5.18)$$

ТО ЕСТЬ

$$R(\tau) = R_0 \times \frac{\tau^{1/4}}{\tau_0}. \quad (5.19)$$

График радиуса представлен на рисунке 5.3.

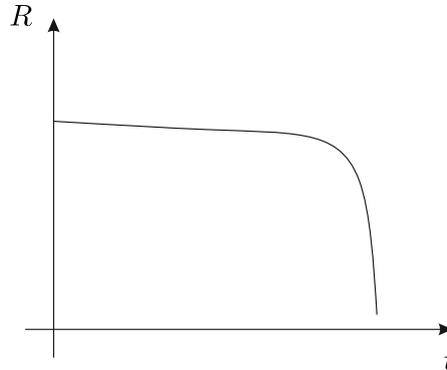


Рис. 5.3. Зависимость R от времени t

Следствия формулы для изменения циклической частоты орбитального вращения двух черных дыр

- 1) Вспомним, что для частоты гравитационных волн ω_{gw} выполняется соотношение

$$\omega = \frac{\omega_{\text{gw}}}{2} = \pi f_{\text{gw}}. \quad (5.20)$$

Тогда частота гравитационных волн:

$$f_{\text{gw}} = 150 \text{ Hz} \times \left(\frac{1 \text{ s}}{\tau}\right)^{3/8} \times \left(\frac{M_{\odot}}{M_c}\right)^{5/8}. \quad (5.21)$$

Таким образом, если в какой-то момент нам известна частота гравитационной волны, то мы можем вычислить время до слияния двух черных дыр, которые вызывают эту гравитационную волну.

В экспериментах (например, *LIGO*) есть ограничения на частоту, т.к. на Земле очень трудно избавиться от шума, и измеряемая частота $f_{\text{gw}} > 10 \text{ Hz}$. Так, для первого объекта, который наблюдался *GW150914* самая низкая частота, которую удалось зафиксировать — 30 Hz, откуда было вычислено время, которое прошло до слияния черных дыр — $\tau = 0.2 \text{ s}$, откуда можно найти, чему равняется M_c : $M_c \approx 26M_{\odot}$.

- 2) Перепишем закон Кеплера для частоты гравитационных волн:

$$\pi^2 f_{\text{gw}}^2 = \frac{GM}{R^3}. \quad (5.22)$$

или, используя выражение для ω (5.17)

$$\left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau}\right)^{3/4} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/4} = \omega^2 = \frac{(2\pi)^2}{T^2}. \quad (5.23)$$

Хотим найти, как связаны период обращения и время, которое осталось до слияния черных дыр — выразим τ через T :

$$\tau = 10^7 \text{ years} \cdot \left(\frac{M_\odot}{\mu}\right) \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{T}{1 \text{ hour}}\right)^{8/3}, \quad (5.24)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, а $M = m_1 + m_2$.

Замечание: 10^7 лет — время, близкое к 10^{10} лет, то есть к возрасту Вселенной.

Для достаточно больших периодов $T \gg 1 \text{ day}$ время τ может оказаться больше времени жизни Вселенной. Другими словами, слияние черных дыр в нашей наблюдаемой Вселенной никогда не произойдет.

Интересно, что получить объекты с таким $T \leq 1 \text{ day}$, то есть с орбитальным радиусом $R \leq 10^7 \text{ km}$ — весьма нетривиальная задача, т.к. таких объектов очень мало — непонятен механизм, по которому эти два объекта можно сблизить.

- 3) В 1992 году произошло качественное изменение в вычислении параметров гравитационных волн (труда необходимо потратить гораздо больше, чем ожидалось). Это связано с тем, что необходимо учитывать число циклов, которое волна прошла в детекторе N_{cycl} . Это число рассчитывается по формуле

$$N_{cycl} = \underbrace{\int_{t_{\min}}^t f_{gw}(t') dt'}_{\frac{\Delta\phi}{2\pi}} = \int_{t_{\min}}^t df_{gw} \times \frac{f_{gw}}{\dot{f}_{gw}} \quad (5.25)$$

С учетом выражений, которые мы получили:

$$N_{cycl} = \frac{5}{96\pi^{8/3}} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/3} \int_{f_{\min}}^f df_{gw} f_{gw}^{-8/3}. \quad (5.26)$$

Возьмем интеграл

$$N_{cycl} = \frac{1}{32\pi^{8/3}} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/3} \left(-\frac{1}{f^{5/3}} + \frac{1}{f_{\min}^{5/3}}\right). \quad (5.27)$$

Можно рассмотреть также величину

$$\frac{dN_{cycl}}{d \ln f} = \frac{5}{96\pi^{8/3}} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/3} \frac{1}{f_{gw}^{5/3}}. \quad (5.28)$$

Используя закон Кеплера, можно выразить частоту гравитационной волны через скорость орбитального движения черных дыр

$$f_{\text{gw}}^{1/3} = \frac{v}{\pi^{1/3}} \frac{1}{(GM)^{1/3}}. \quad (5.29)$$

И тогда:

$$\frac{dN_{\text{cycl}}}{d \ln f} = \frac{5}{96\pi} \left(\frac{c}{v}\right)^5 \cdot \left(\frac{M}{M_c}\right)^{5/3}. \quad (5.30)$$

Можно заметить, что в силу зависимости N_{cycl} от скорости число циклов, которое мы получаем гигантское.

Чем интересно число циклов? Пусть есть сигнал $s(t)$, полученный в эксперименте

$$s(t) = n(t) + h(t), \quad (5.31)$$

где $n(t)$ — шум, $h(t)$ — гравитационная волна. Для того, чтобы избавиться от шума необходимо рассмотреть свертку с сигналом:

$$\frac{1}{T} \int dt' s(t') h^{\text{th}}(t') = \frac{1}{T} \int n(t') h^{\text{th}}(t') dt' + \frac{1}{T} \int (h^{\text{th}}(t'))^2 dt' \quad (5.32)$$

В силу того, что $n(t)$ и $h(t)$ не скоррелированы, и можно надеяться, что $\frac{1}{T} \int n(t') h(t') dt' \sim \frac{1}{\sqrt{T}} \rightarrow 0$.

Важно отметить, что мы ищем гравитационную волну в сигнале, основываясь на информации о волне, которую мы знаем из теории $h^{\text{th}}(t')$. А значит, если мы неправильно попадем в фазу гравитационной волны, то такое рассмотрение неприменимо. Именно поэтому фаза гравитационной волны — такая важная величина и ее считают с большой точностью.

Если считать поправки к $\frac{dN_{\text{cycl}}}{d \ln f}$, раскладывая по $\frac{v}{c}$, получим

$$\frac{dN_{\text{cycl}}}{d \ln f} = \frac{5}{96\pi} \left(\frac{c}{v}\right)^5 \cdot \left(\frac{M}{M_c}\right)^{5/3} \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^{5+1/2} \right] \quad (5.33)$$

до третьего пост-Ньютоновского члена.

Точность измерения гравитационных волн таким образом напрямую зависит от фазы предсказанного h^{th} . Сейчас для предсказаний недостаточно только аналитических методов, для обеспечения необходимой точности используются численные методы ОТО.

4) Энергия, которая излучается при коллапсе черных дыр.

$$E_{\text{rad}} = \int dt P_{\text{quad}} = \int \underbrace{dt}_{\frac{d\omega}{\dot{\omega}}} \frac{32}{5c^5} G^{7/3} \times \omega^{10/3} M_c^{10/3} \quad (5.34)$$

После взятия интеграла (обрезаем на верхней частоте):

$$E_{\text{rad}} = \frac{1}{2} G^{2/3} M_c^{5/3} \omega_{\text{max}}^{2/3} \approx 0.005 \cdot M_c \cdot c^2 \cdot \left(\frac{M_c}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \quad (5.35)$$

в качестве частоты была подставлена максимальная частота, соответствующая *ISCO*, т.е. $\omega_{\text{max}} \sim 75$ Hz. Для объекта *GW15014* излучается $M_{\odot} c^2$.

Лекция 6. Пульсары в сдвоенных системах

Эта лекция будет носить научно-популярный характер. В ней не будет сложных формул, а некоторые выражения будут даваться без вывода. Она будет посвящена таким объектам как *пульсары*.

Некоторые характеристики двойных систем

Частота обращения системы из двух тел увеличивается при сближении тел за счет излучения гравитационных волн, подчиняется формуле

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega^{11/3}. \quad (6.1)$$

Перепишем эту формулу через период

$$P_b = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.2)$$

тогда

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \times P_b^{-5/3}. \quad (6.3)$$

На прошлых лекциях мы работали в приближении циклических орбит и пренебрегли эксцентриситетом. Без этого предположения (эксцентриситет $e \neq 0$), формула усложняется (без вывода)

$$\dot{P}_b = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \times P_b^{-5/3} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}} \quad (6.4)$$

Эту формулу можно вывести аналитически. Для этого в квадрупольную формулу для мощности излучения гравитационных волн:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (6.5)$$

необходимо подставить выражения для \ddot{Q}_{ij} орбит с эксцентриситетом.

Помимо того, что система из двух тел излучает гравитационные волны, она излучает также угловой момент, который уносится гравитационными волнами:

$$\frac{dL^i}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \epsilon^{ikl} \langle \ddot{Q}_{ka} \ddot{Q}_{la} \rangle. \quad (6.6)$$

Этот результат можно получить, используя теорему Нетер.

Учитывая квадрупольную формулу, и излучение углового момента и законы сохранения, можно вывести уравнение для изменения большой полуоси эллиптической орбиты (см. рис. 6.1) $\frac{da}{dt}$ и уравнение для эксцентриситета:

$$\frac{de}{dt} = -eC(e, a), \quad (6.7)$$

где $C(e, a)$ — положительная функция.

Замечание: Для системы из двух черных дыр можно показать, что в экспериментах по обнаружению гравитационных волн от этого объекта, эксцентриситет действительно пренебрежимо мал ($e \sim 10^{-6}$).

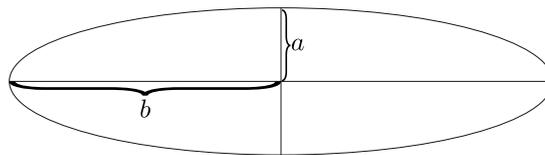


Рис. 6.1. Полуоси орбиты

На этой лекции будут рассматриваться системы — находящиеся «между» системами двойных нейтронных звезд и солнечной системой, пульсары в сдвоенных системах (*binary pulsars*).

Пульсары

Binary pulsars или пульсары в двойных системах — система, очень похожая по своему виду на двойную систему, изображенную на рисунке (3.1), однако один из объектов является пульсаром.

- Система черных дыр очень релятивистская — в момент, когда наиболее интенсивно излучаются гравитационные волны, черные дыры движутся со скоростями $\sim 0.1c$.
- Солнечная система — это, конечно, нерелятивистская система.
- Скорости пульсаров в сдвоенных системах находятся «посередине» между скоростями систем, упомянутых выше.

Пульсар — нейтронная звезда, которая вращается (период вращения нейтронной звезды вокруг своей оси обозначим P) и у которой есть магнитное поле. По каким-то причинам, нейтронная звезда излучает узко скользящий пучок света (луч) — см. рис. 6.2.

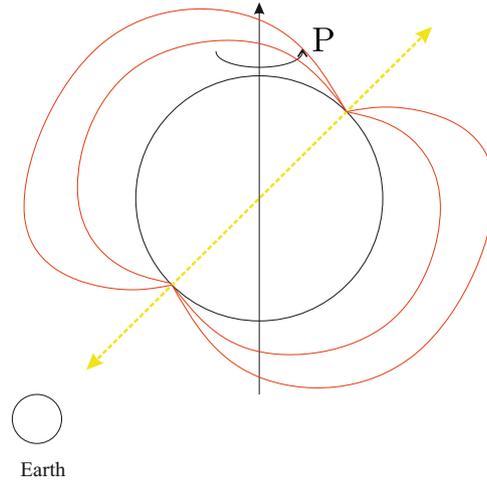


Рис. 6.2. Пульсар

Главный вопрос, касающийся нейтронных звезд (пульсаров) состоит в том, почему излучаемое ей магнитное поле настолько гигантское.

Для этого надо понимать механизм происхождения нейтронных звезд. Сверхмассивные звезды коллапсируют — внутри звезды происходят процессы горения, и вся структура такой звезды напоминает «луковицу», в центре которой находится железное ядро. Железо в центре сверхмассивных звезд перестает гореть, и радиации становится недостаточно, чтобы препятствовать коллапсу. В итоге, ядро звезды коллапсирует в нейтронную звезду (или в черную дыру), а внешние слои порождают взрыв сверхновой (core-collapse).

Замечание: не все сверхновые заканчиваются образованием нейтронной звезды.

Во время коллапса массивной звезды угловой момент примерно сохраняется

$$L \sim M_{\text{core}} \cdot \omega r^2 \approx \text{const}, \quad (6.8)$$

что приводит при коллапсе к гигантской циклической частоте вращения нейтронной звезды: $1 - 1000 \frac{\text{вращений}}{\text{сек}}$.

С другой стороны, имеет место сохранение магнитного потока $B \times S \approx \text{const}$, поэтому изначальное магнитное поле тоже растет, как только площадь при коллапсе начинает сжиматься: $B \sim \frac{1}{r^2}$. Поля могут достигать значений $B \sim 10^8 - 10^{15} \text{G}$. Для сравнения, магнитное поле Земли $B_{\text{Земли}} \approx 1 \text{G}$.

Замечание: В электродинамике при низких энергиях Лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L}_{\text{em}} \sim -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{45m_e^4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2. \quad (6.9)$$

Тензор э/м поля $F_{\mu\nu}$ можно представить через магнитное поле. Когда второй член в Лагранжиане становится сравнимым по своей величине с основным первым членом,

то можно сказать, что мы достигаем максимального значения магнитного поля, т.к. при увеличении этого поля, будут создаваться e^+e^- -пары из вакуума.

Критическая величина магнитного поля

$$B_{\text{cr}} \sim \frac{3m_e^2}{\alpha} \sim 10^{18} \text{ Г.} \quad (6.10)$$

Таким образом, магнитное поле нейтронных звезд близко по своему значению к максимально возможному.

Когда луч радиации нейтронной звезды направлен в сторону Земли, мы видим сигналы от нейтронных звезд. В силу вращения нейтронной звезды вокруг своей оси, мы видим последовательность пульсов с периодом, определяющимся периодом вращения нейтронной звезды. Этот объект и называется пульсаром.

Такие пульсы мы регистрируем регулярно. Степень периодичности этих пульсов феноменальна — их точность сопоставима с точностью атомных часов. Эта периодичность позволяет с высокой точностью проверять предсказания Общей Теории Относительности.

Пульсар в двойной системе. Проверка результатов ОТО

Пульсар может входить в состав двойной системы. Компаньоном пульсара может быть какая-то звезда или другой пульсар. На основе зарегистрированных пульсов мы можем понять, по какой орбите движется этот объект, рассчитать орбиту. В частности, можно посчитать, как изменяется период орбиты и сравнить с предсказаниями.

В рамках этого подхода необходимо учитывать много тонкостей. Несмотря на высокую периодичность пульсов, есть много эффектов, нарушающих эту периодичность, которые надо вычитать, чтобы делать выводы.

Поправки к периоду пульса

Один из главных эффектов связан с тем, что Земля вращается вокруг Солнца. Другой эффект связан с тем, что луч света от пульсара при прохождении в окрестности Солнца приобретает «задержку».

Чтобы оценить эти эффекты, рассмотрим выражение для метрики в Ньютоновском пределе. Т.к. мы рассматриваем распространение света интервал мы полагаем равным нулю:

$$ds^2 = -[1 + 2\Phi]c^2 dt^2 + [1 - 2\Phi(\vec{x})]d\vec{x}^2 = 0 \quad (6.11)$$

Для времени распространения света от пульсара (emission time t_e) до наблюдателя

(t_{obs}) мы можем записать

$$c(t_{\text{obs}} - t_e) = \int_{r_{\text{obs}}}^{r_p} |d\vec{x}| (1 - 2\Phi(\vec{x})) = |\vec{r}_p - \vec{r}_{\text{obs}}| - \underbrace{2 \int_{r_{\text{obs}}}^{r_p} |d\vec{x}| \Phi(\vec{x})}_{\text{Shapiro time delay}} \quad (6.12)$$

Первое слагаемое соответствует распространению света в плоском пространстве-времени, а второе — называют *временем задержки Шапиро*.

Первое слагаемое часто переписывают через *барицентр* Земли и Солнца \vec{r}_b :

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_b + \vec{r}_b - \vec{r}_{\text{obs}}| \approx |\vec{r}_p - \vec{r}_b| + (\vec{r}_b - \vec{r}_{\text{obs}}) \vec{n}, \quad (6.13)$$

где \vec{n} — вектор направления пульсара.

Можно также выделить время t_{SSB} как

$$t_{\text{SSB}} = t_{\text{obs}} - \underbrace{\frac{(\vec{r}_b - \vec{r}_{\text{obs}})}{c} \vec{n}}_{=\Delta_R} + 2 \int_{r_{\text{obs}}}^{r_p} |d\vec{x}| \Phi(\vec{x}) \quad (6.14)$$

Таким образом, мы переопределяем сигналы, как если бы их регистрировали в барицентре Солнечной системы.

- 1) Δ_R — время задержки Рюмера, связанное с годовым вращением Земли.
- 2) Вычислим время Шапиро для системы, на рисунке (6.3) (r_E — расстояние от Солнца до Земли)

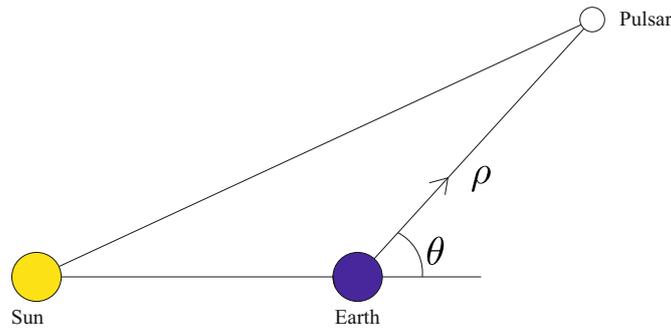


Рис. 6.3. Система Земля-Солнце-Пульсар

$$\Delta_S = +2 \int_{r_{\text{obs}}}^{r_p} \frac{2GM_{\odot}}{r} dp \quad (6.15)$$

$$r^2 = r_E^2 + \rho^2 + 2r_E \rho \cos \theta \quad (6.16)$$

исключая r , получаем (d — расстояние от Земли до пульсара):

$$\Delta_S = \frac{2GM_\odot}{c^3} \int_0^d \frac{d\rho}{\sqrt{r_E^2 + \rho^2 + 2r_E\rho \cos \theta}} \quad (6.17)$$

Для вычисления этого интеграла сначала рассматривают выражение при $\cos \theta = 0$:

$$\Delta_S = \frac{2GM_\odot}{c^3} \left[\int_0^d \frac{d\rho}{\sqrt{r_E^2 + \rho^2 + 2r_E\rho \cos \theta}} - \frac{d\rho}{\sqrt{r_E^2 + \rho^2}} \right] + \frac{GM_\odot}{c^3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{r_E^2 + \rho^2}} \quad (6.18)$$

Последний член не зависит от угла θ , и он дает постоянный ненаблюдаемый вклад в период пульса.

В интеграле же в квадратных скобках верхний предел интегрирования с точностью до малых поправок можно заменить на $+\infty$.

$$\Delta_S = \frac{2GM_\odot}{c^3} \ln(1 + \cos \theta) + const \quad (6.19)$$

Таким образом, мы рассчитали эффект Шапиро в поле Солнца.

- 3) Есть еще множество различных поправок. Например, можно рассмотреть т.н. поправку Эйнштейна (*Einstein time delay*).

Одним из самых первых экспериментов по проверке ОТО, с которого началась т.н. *золотая эра ОТО* является эксперимент по измерению изменение частоты света в поле Земли. Эффект связан с тем, что часы в собственной системе Земли и координатное время различаются:

$$t_{\text{obs}} = \tau_{\text{obs}} + \Delta_E. \quad (6.20)$$

Суммируя наши результаты, получим

$$t_{\text{SSB}} = \tau_{\text{obs}} + \Delta_E + \Delta_R - \Delta_S \quad (6.21)$$

— время прихода импульсов от пульсара в барицентр Солнечной системы.

Необходимо связать время прихода сигнала с собственным временем излучения в системе пульсара. Чтобы это учесть, надо повторить вычисление всех поправок с учетом того, что мы находимся в системе отсчета пульсара

$$t_{\text{SSB}} = T_e + \tilde{\Delta}_E + \tilde{\Delta}_R - \tilde{\Delta}_S. \quad (6.22)$$

Таким образом, учтя эти поправки, мы можем с высокой точностью определить движение пульсара и его компаньона.

Проверка результатов ОТО

Так, из эксперимента можно определить то, как меняется период со временем $\dot{P}_b(M_c)$. Этот результат, однако не может считаться проверкой ОТО, т.к. зависит от *chirp mass*, которая является линейной комбинацией массы пульсара m_p и массы компаньона m_c , и мы можем подобрать их так, чтобы выполнялись все соотношения.

Для двойных систем можно также измерить вековое смещение перигелия $\langle \dot{\omega} \rangle$ (Так, классическим экспериментом по проверке ОТО является измерение смещения перигелия Меркурия). Эту величину также можно определить как функцию от массы пульсара и массы компаньона $\langle \dot{\omega} \rangle(m_p, m_c)$.

Теперь, вместе с \dot{P} у нас есть 2 величины, которые позволяют определить массы объектов в двойной системе.

Наконец, третьей величиной, которую можно измерить является, т.н. параметр Эйнштейна:

$$\tilde{\Delta}_E = \gamma \times \sin u,$$

где u — параметр, определяющий движение в эллиптической орбите ($r = a(1 - e \cos u)$), γ — параметр, который определяет задержку времени на пульсаре, благодаря полю компаньона. Величина γ также может выражаться в терминах (m_p, m_c).

Проверка ОТО состоит в проверке самосогласованности выражений для m_p и m_c через наблюдаемые. Действительно, три кривые, соответствующие $\langle \dot{\omega} \rangle$, γ , \dot{P}_b должны пересечься на осях, соответствующих двум массам. Так и происходит (см. рис. ??). Линии пересекаются с точностью до долей процента.

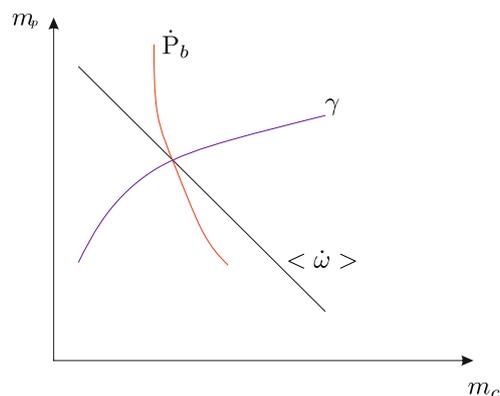


Рис. 6.4. Проверка результатов ОТО

Замечание: В более продвинутых экспериментах изучаются сдвоенные системы, в которых оба объекта являются пульсарами. И тогда на графике 6 линий пересекаются в одной точке.

Pulsar timing array

Рассмотрим способ обнаружить гравитационные волны, излученные неким объектом, с помощью пульсара. Эксперименты *NANOGrav*, *EPTA*, *PPTA*, *IPTA*, *ChPTA*.

Рассмотрим систему из множества пульсаров (*Pulsar timing array* или *PTA*), излучающие в направлении Земли. Пусть какой-то объект излучает гравитационное поле h_{ij} . Такую систему можно представлять как гигантский «рукав LIGO» длиной 100 световых лет. С использованием такого «интерферометра» мы можем видеть волны с частотой $f \sim \frac{1}{\text{year}} \sim 32\text{nHz}$. Тогда мы с большой точностью можем измерить из-

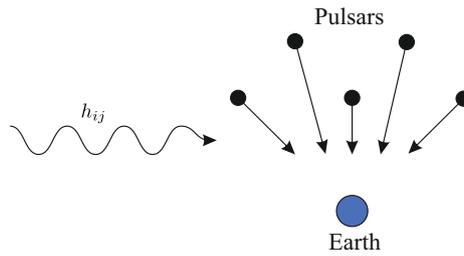


Рис. 6.5. Pulsar timing array

менение частоты между пульсами в присутствии гравитационной волны. Выберем какой-то пульсар a , расстояние до пульсара с учетом направления — \hat{p}^a , \vec{n} — направление распространения гравитационной волны h_{ij} , тогда (без вывода)

$$\boxed{\frac{v_0 - v(t)}{v_0} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_i^a \hat{p}_j^a}{1 + \vec{n} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}(\vec{n})} + \text{Noise} \quad (6.23)$$

Обозначим эту величину $Z^a(t, \hat{p}^a)$. Разница значений гравитационного поля в TT-калибровке между пульсаром и Землей:

$$\Delta h_{ij} = h_{ij}(t_p, \vec{n}) - h_{ij}(t_E, \vec{n}). \quad (6.24)$$

Будем работать только с одним гравитационным полем — с волной в момент приема сигнала на Земле.

Во Вселенной может распространяться большое количество гравитационных волн в различных направлениях. Тогда, чтобы учесть их все, необходимо дополнительно проинтегрировать по всем направлениям

$$\frac{v_0 - v(t)}{v_0} = \frac{1}{2} \int d\vec{n} \frac{\hat{p}_i^a \hat{p}_j^a}{1 + \vec{n} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}(\vec{n}) \quad (6.25)$$

Гравитационную волну можно разложить в ряд Фурье

$$h_{ij}(t, \vec{n}) = \sum_A \int_{-\infty}^{+\infty} df e^{i\pi f(t - \vec{n} \cdot \vec{x}_e)} h_A(f, \vec{n}) e_{ij}^A, \quad (6.26)$$

Чтобы понять смысл последнего выражения, необходимо вспомнить формулу для гравитационной волны, распространяющейся вдоль оси OZ :

$$h\left(t - \frac{z}{c}\right) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \cdot e^{i2\pi f(t-z/c)} \quad (6.27)$$

Такую волну можно расписать как сумму по двум поляризациям

$$h\left(t - \frac{z}{c}\right) = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i2\pi f(t-z/c)} \quad (6.28)$$

Матрицы при $h_{+\times}$ называются матрицами (тензорами) поляризации:

$$e_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

В общем случае, поляризационные матрицы будут иметь размерность 3×3 и будут зависеть от угла между направлением волны и оси OZ в выбранной системе координат $e_{ij}^A = e_{ij}^A(\theta, \varphi)$.

Что делать, чтобы избавиться от шума? Рассмотрим корреляцию какой-то пары пульсаров:

$$\langle Z^a(t, \hat{p}^a) Z^b(t, \hat{p}^b) \rangle \quad (6.30)$$

В реальности эту корреляцию заменяют на интеграл по времени наблюдения, причем делают такой сдвиг по времени между Z , чтобы шум был «раскоррелирован» и ушел в ноль.

Рассмотрим ситуацию, когда несколько источников генерируют волны в разных направлениях. Тогда для таких источников предполагается

$$\langle h_A^*(f, \vec{n}) h_{A'}(f', \vec{n}') \rangle = \delta^{(2)}(\vec{n} - \vec{n}') \delta_{AA'} \delta(f - f') H(f) \quad (6.31)$$

Тогда, учитывая это свойство, выражения выше значительно упрощаются

$$\langle Z^a(t, \hat{p}^a) Z^b(t, \hat{p}^b) \rangle = \frac{1}{4} \int d\vec{n} \frac{\hat{p}_i^a \hat{p}_j^a}{1 + \vec{n} \hat{p}^a} \cdot \frac{\hat{p}_i^b \hat{p}_j^b}{1 + \vec{n} \hat{p}^b} \times e_{ij}^A(\vec{n}) e_{kl}^A(\vec{n}') \int df |H(f)|^2 \quad (6.32)$$

Этот интеграл был взят численно в 1983 году. Его можно взять аналитически, написав ответ, где ξ — угол между направлениями на два пульсара \hat{p}^a, \hat{p}^b :

$$\langle Z^a(t, \hat{p}^a) Z^b(t, \hat{p}^b) \rangle = const \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1 - \cos \xi}{2} \left[\ln \left(\frac{1 - \cos \xi}{2} - \frac{1}{6} \right) \right] \right) \equiv \Gamma_{ab}(\xi) \quad (6.33)$$

Если получится зафиксировать такую кривую, то это однозначно будет говорить о том, что мы «живем» в гравитационном поле, т.к. эта угловая зависимость включает

в себя зависимость от поляризационных тензоров, которые характерны для безмассового поля спина 2. И это удалось в 2023 году.

Из этого был сделан вывод, что на некотором уровне достоверности, существует гравитационно-волновой фон.

Хочется также понять, откуда пришли эти гравитационные волны. Рассмотрим формулу для максимальной частоты от слияния черных дыр (M — масса черных дыр)

$$f_{\text{gw, max}} = 4.4 \text{ kHz} \frac{M_{\odot}}{M} \quad (6.34)$$

Отсюда следует, что для того, чтобы попасть в область пHz необходимо предположить, что масса черных дыр $M \sim 10^{10} M_{\odot}$. Можно оценить, что распределение по частотам от слияния черных дыр будет

$$f \frac{dE_{\text{gw}}}{df} \sim f^{2/3} \quad (6.35)$$

Но то, что наблюдает *NANOGrav*

$$f \frac{dE_{\text{gw}}}{df} \sim f^{1.8 \pm 0.6} \quad (6.36)$$

Лекция 7. Гравитационные волны и космология. Форма гравитационной волны. Релаксированное уравнение Эйнштейна

На этой лекции мы продолжим изучение явления излучения гравитационных волн двойными системами.

Форма гравитационной волны

На лекции 5 было выведено уравнение для изменения частоты гравитационных волн (или частоты двойной системы) со временем

$$\dot{f}_{\text{gw}} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \cdot \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{gw}}^{11/3} \quad (7.1)$$

Мы проинтегрировали это уравнение, получили зависимость от времени

$$f_{\text{gw}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{265\tau} \right)^{3/8} \cdot \left(\frac{c^3}{GM_c} \right)^{5/8} \quad (7.2)$$

где время $\tau = \underbrace{t_{\text{coal}}}_{\text{время слияния ЧД}} - \underbrace{t}_{\text{время наблюдения}}$ — время, которое осталось до слияния черных дыр. Понятно, что частота будет расти по мере того, как это время τ будет уменьшаться.

Также, на одной из прошлых лекций была выведена формула для амплитуды гравитационных волн

$$h_+(t) = A_+ \cos \left[2\pi f_{\text{gw}} \underbrace{t_{\text{ret}}}_{=t-\frac{r}{c}} \right] \quad (7.3)$$

$$h_{\times}(t) = A_{\times} \cos [2\pi f_{\text{gw}} t_{\text{ret}}], \quad (7.4)$$

где амплитуды для соответствующих поляризаций

$$A_+ = \frac{4}{r} \times \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \cdot \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{2/3} \cdot \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \quad (7.5)$$

$$A_{\times} = \frac{4}{r} \times \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \cdot \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}}{c} \right)^{2/3} \cdot (\cos \theta) \quad (7.6)$$

Формулы для $A_{+/\times}$ вводятся так, как будто частота f_{gw} не зависит от времени. Зависимость от времени вводится самостоятельно как

$$A_{+/\times} \rightarrow A_{+/\times}(f_{\text{gw}}(\tau)). \quad (7.7)$$

Далее будем ограничиваться рассмотрением для $+$ -поляризации. Амплитуда тогда тоже становится зависящей от времени

$$h_+ = A_+(f_{\text{gw}}(\tau)) \cdot \cos \left[2\pi \int^{\tau_{\text{ret}}} f_{\text{gw}}(t') dt' \right], \quad (7.8)$$

где нижний предел в интеграле определяет начальную фазу. Таким образом, получили форму гравитационной волны в пределе квадрупольной формулы.

Отсюда можно выразить форму гравитационной волны в явном виде

$$h_+ = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \times \cos \left[-2 \left(\frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} \tau^{5/8} + \Phi_0 \right] \quad (7.9)$$

Тогда получается сигнал как на рисунке (7.1). Именно такую форму гравитационной волны увидели в эксперименте *LIGO*. Такое явление носит название *chirp signal*.

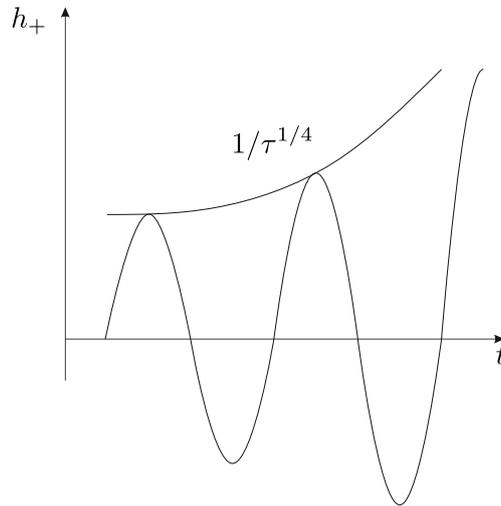


Рис. 7.1. Форма гравитационной волны

Таким образом, это все, что можно извлечь для двойной системы из квадрупольной формулы.

Фурье-образ сигнала от гравитационных волн

$$\tilde{h}_+(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_+(t_{\text{ret}}) \cos[\Phi(t_{\text{ret}})] e^{i2\pi ft} dt_{\text{ret}}. \quad (7.10)$$

Сначала распишем экспоненту через запаздывающее время как

$$\exp\{i2\pi ft\} = \exp\{i2\pi ft_{\text{ret}}\} \times \exp\left\{i2\pi f \frac{r}{c}\right\}, \quad (7.11)$$

и косинус распишем через экспоненты

$$\cos[\Phi(t_{\text{ret}})] = \frac{1}{2} \left(e^{i\Phi(t_{\text{ret}})} + e^{-i\Phi(t_{\text{ret}})} \right). \quad (7.12)$$

Интеграл будем вычислять *методом седловой точки* — будем выкидывать слагаемые, где осцилляции быстрые, и оставлять только те, где осцилляции подавлены. Тогда

$$e^{i\Phi(t_{\text{ret}})} e^{i2\pi f t_{\text{ret}}} \rightarrow 0 \quad (7.13)$$

$$\tilde{h}_+(f) \approx e^{i2\pi f r/c} \int_{-\infty}^{+\infty} A_+(t_{\text{ret}}) \times e^{i2\pi f t_{\text{ret}} - i\Phi(t_{\text{ret}})} dt_{\text{ret}} \quad (7.14)$$

Найдем седловую точку этого интеграла. Стационарная точка t_* определяется как

$$2\pi f = \dot{\Phi}(t_*) = 2\pi f_{\text{gw}}(t_*). \quad (7.15)$$

Вокруг этой точки мы можем разложить экспоненту до членов квадратичных по малому параметру

$$\tilde{h}_+(f) = e^{i2\pi f \frac{r}{c}} e^{2\pi f t_* - i\Phi(t_*)} \times \int_{-\infty}^{\infty} A_+(t_*) \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \ddot{\Phi}(t_*) (t_{\text{ret}} - t_*)^2 \right\} d(t_{\text{ret}} - t_*). \quad (7.16)$$

Этот интеграл легко берется

$$\tilde{h}_+(f) \approx \frac{e^{i2\pi f \frac{r}{c}}}{2} A_+(t_*) \sqrt{\frac{2}{\ddot{\Phi}(t_*)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ix^2}}_{=\sqrt{\pi} e^{-i\pi/4}} \times e^{i2\pi f t_* - i\Phi(t_*)} \quad (7.17)$$

где

$$\ddot{\Phi} = 2\pi \dot{f}_{\text{gw}}(t_*) \sim f_{\text{gw}}^{11/3} \quad (7.18)$$

Наконец, Фурье-образ формы гравитационной волны

$$\tilde{h}_+(f) = e^{i2\pi f \frac{r}{c}} \sqrt{\frac{5}{24}} \frac{c}{\pi^{2/3}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/6} \times \frac{1}{f^{7/6}} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} e^{i2\pi f t_* - i\Phi(t_*) - i\Phi_0} \quad (7.19)$$

Гравитационные волны и космология

Источники гравитационных волн как правило находятся на космологических расстояниях. Как следствие, красное смещение от таких источников может быть значительным. То, что мы считали до этого, соответствует ситуации, когда гравитационные волны распространяются в плоском пространстве-времени.

Так, красное смещение от первого обнаруженного источника гравитационных волн $Z \approx 0.09$, что соответствует расстоянию 500 Мрс. Сигналы от сверхмассивных

черных дыр, в свою очередь, могут прийти с красным смещением в $Z \geq 1$, и учет расширения Вселенной становится критичным.

С большой степенью точности, кривое пространство можно учесть, заменив Даламбертиан плоского пространства в уравнении гравитационных волн, на Даламбертиан искривленного пространства как

$$\square h_{ij} = 0, \text{ где} \quad (7.20)$$

$$\square = \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu). \quad (7.21)$$

В пределе, когда $\lambda_{\text{gw}} \ll H^{-1}$, гравитационная волна распространяется как в пространстве Минковского.

Обычно в рамках этого подхода работают в терминах конформного времени

$$ds^2 = a^2(\eta) (-c^2 d\eta^2 + d\vec{x}^2) \quad (7.22)$$

И тогда уравнение для гравитационной волны (под штрихом понимается производная по конформному времени), если волна распространяется вдоль OZ :

$$h''_{ij} - \partial_z^2 h_{ij} + 2 \frac{a'}{a} h'_{ij} = 0 \quad (7.23)$$

Для упрощения, можно перейти к новому полю

$$\tilde{h}_{ij} = a \cdot h_{ij} \quad (7.24)$$

и уравнение для нового поля:

$$\tilde{h}''_{ij} - \partial_z^2 \tilde{h}_{ij} - \underbrace{\frac{a''}{a}}_{\sim H^2} \tilde{h}_{ij} = 0 \quad (7.25)$$

и последним членом можно пренебречь. Таким образом, гравитационные волн в терминах конформного поля распространяются в искривленном пространстве как в плоском пространстве-времени Минковского.

Чтобы перейти к обычному полю гравитационной волн достаточно в конце результата поделить на масштабный фактор a :

$$h_{ij} = \frac{1}{a} \tilde{h}_{ij} \quad (7.26)$$

Рассмотрим новую форму гравитационной волны (все времена и частоты берем такими, как если бы они только что излучились источником)

$$h_+ = \frac{4}{a(t_{\text{obs}})r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}^{\text{source}}}{c} \right)^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cos \left[\int dt_{\text{ret}}^{\text{source}} f_{\text{gw}}^{\text{source}}(t') \right], \quad (7.27)$$

где частота наблюдения

$$f^{\text{obs}} = \frac{f^{\text{source}}}{1+z} \quad (7.28)$$

тогда под \cos можно заменить времена и частоты на t^{obs} т.к. факторы $1+z$ сократятся.

$$\cos \left[\int dt_{\text{ret}}^{\text{source}} f_{\text{gw}}^{\text{source}}(t') \right] \rightarrow \cos \left[\int dt_{\text{ret}}^{\text{obs}} f_{\text{gw}}^{\text{obs}}(t') \right]. \quad (7.29)$$

Таким образом, для наблюдателя, с учетом красного смещения форма гравитационной волны будет

$$h_+ = \frac{4 \cdot (1+z)^{2/3}}{a(t_{\text{obs}})r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} (\pi f_{\text{gw}}^{\text{obs}})^{2/3} \times \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2} \right) \times \cos \left[\int dt_{\text{ret}}^{\text{obs}} f_{\text{gw}}^{\text{obs}}(t') \right] \quad (7.30)$$

Также в космологии принято выражать все в терминах фотометрического расстояния. Величину $a(t_{\text{obs}}) \cdot r$ можно трактовать как физическое расстояние до источника.

Фотометрическое расстояние

$$r_{\text{ph}}(z) = d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (7.31)$$

или с другой стороны

$$r_{\text{ph}}(z) = (1+z) \times a(t_{\text{obs}})r. \quad (7.32)$$

И в терминах фотометрического расстояния форма гравитационной волны

$$h_+ = \frac{4 \cdot (1+z)^{5/3}}{r_{\text{ph}}(z)} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} (\pi f_{\text{gw}}^{\text{obs}})^{2/3} \times \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2} \right) \times \cos \left[\int dt_{\text{ret}}^{\text{obs}} f_{\text{gw}}^{\text{obs}}(t') \right] \quad (7.33)$$

После этого фактор $(1+z)$ можно включить в переопределение chirp mass. Тогда учет расширения Вселенной заключается в переопределении величин

$$r \rightarrow r_{\text{ph}}(z), \quad M_c \rightarrow \mathcal{M}_c = M_c \times (1+z). \quad (7.34)$$

Замечание: Сейчас обсуждается возможность определения постоянной Хаббла через гравитационные волны. Так, угол θ в формулах выше можно извлечь из сопоставления поляризаций волн h_+ и h_\times . Далее из эволюции гравитационных волн \dot{f}_{gw} можно узнать chirp mass. Зная все это из формулы (7.33) можно узнать фотометрическое расстояние. Зная красное смещение источника, можно восстановить постоянную Хаббла.

Релаксированное уравнение Эйнштейна

Чтобы отличить гравитационные волны от фонового шума, необходимо знать фазу гравитационной волны с гигантской точностью. К сожалению, квадрупольная

формула Эйнштейна не дает такой точной информации. Число циклов, которые ГВ пройдет в эксперименте LIGO необходимо знать с точностью до долей цикла!

Запишем уравнение Эйнштейна точно, но в необычной форме, для чего введём объект

$$\hat{h}^{\alpha\beta} = (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \left(-\eta^{\alpha\beta} \right) \quad (7.35)$$

Замечание: Этот объект уже встречался нам в линеаризованной теории:

$$\hat{h}_{\text{lin}}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h = -\bar{h}^{\alpha\beta}. \quad (7.36)$$

Введем Лоренцеву калибровку на этот объект

$$\partial_\beta \hat{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (7.37)$$

Она эквивалентна калибровке:

$$\partial_\alpha \left[(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} \right] = 0 \quad (7.38)$$

В этой калибровке можно написать уравнение

$$\square \hat{h}^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\alpha\beta} - \text{точное уравнение Эйнштейна}, \quad (7.39)$$

где

$$\tau^{\alpha\beta} = (-g) T^{\alpha\beta} + \frac{c^4}{16\pi G} \partial_\mu \partial_\nu \left(\hat{h}^{\alpha\mu} \hat{h}^{\beta\nu} - \hat{h}^{\mu\nu} \hat{h}^{\alpha\beta} \right) + (-g) t_{LL}^{\alpha\beta}, \quad (7.40)$$

$T^{\alpha\beta}$ — тензор Энергии-Импульса материи, $t_{LL}^{\alpha\beta}$ — псевдотензор Ландау-Лифшица, который представляет собой гигантский ряд производных от $\hat{h}^{\alpha\beta}$. Характерный член:

$$(-g) t_{LL}^{\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi G} \left(g_{\lambda\mu} g^{\nu\beta} \partial_\nu \hat{h}^{\alpha\lambda} \partial_\rho \hat{h}^{\beta\mu} + \dots \right) \quad (7.41)$$

Замечание: Псевдотензор Ландау-Лифшица $t_{LL}^{\alpha\beta}$ — попытка построить тензор энергии-импульса для гравитационного поля.

Уравнения Эйнштейна в такой форме (7.39) называются *релаксированными уравнениями Эйнштейна*, и из них исходят, когда пытаются найти поправки к форме гравитационной волны.

Действительно, когда мы получали квадрупольную формулу Эйнштейна мы учитывали только тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}$, но на самом деле источником гравитационных волн могут являться сами гравитационные волны, и этот вклад необходимо учитывать.

Учет поправок к вычислению гравитационных волн

Формальная процедура заключается в том, чтобы воспринимать τ как источник и интегрировать по нему

$$\hat{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \tau^{\alpha\beta} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right). \quad (7.42)$$

После чего рассматриваются поправки по теории возмущений. Так, на прошлых лекциях рассматривался нулевой порядок, в котором:

$${}^{(0)}\tau^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}. \quad (7.43)$$

Если же рассматривать более высокие порядки, то надо решать уравнение итеративно:

$${}^{(N+1)}\hat{h}^{\alpha\beta} = {}^{(N+1)}\hat{h}^{\alpha\beta}({}^{(N)}\tau). \quad (7.44)$$

Когда берут такого рода интегралы, разбивают пространство вокруг источника на две области (см. рис. 7.2).

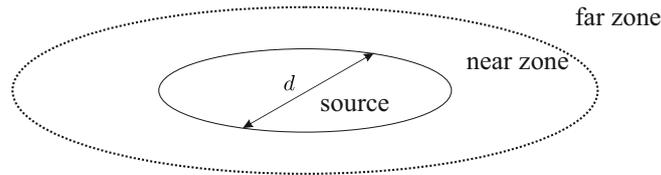


Рис. 7.2. Области вокруг источника

В ближней радиационной зоне вычисление компонент тензора $\hat{h}^{\alpha\beta}$ заключается в вычислении поправок по характерным скоростям $\frac{v}{c}$ источника (пост-Ньютоновское разложение/PN-разложение)

$$\hat{h}^{\alpha\beta} = \sum_m^{\text{post-Newtonian}} \frac{1}{c^m} \hat{h}_m^{\alpha\beta} \quad (7.45)$$

В дальней радиационной зоне (там, где мы «живем» и пытаемся поймать ГВ) используется пост-Минковское (PM-) разложение по константе Ньютона

$$\hat{h}^{\alpha\beta} = \sum_n G^n \hat{h}_n^{\alpha\beta}. \quad (7.46)$$

Далее, разложения в двух зонах сравниваются и находятся $\hat{h}_n^{\alpha\beta}$ пост-Минковского разложения. Стоит отметить вычислительную сложность этой процедуры.

Ранее, в РМ-разложении мы рассмотрели только член $n = 1$ и $h \sim G$, а волновое уравнение имело тривиальный вид

$$\square \hat{h}_1^{\alpha\beta} = 0 \quad (7.47)$$

Для более высоких порядков, надо иметь в виду, что во втором порядке источниками ГВ станет гравитационное поле, посчитанное в первом порядке \hat{h}_1 , с точностью до их квадратичных комбинаций:

$$\square \hat{h}_2^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} \tau^{\alpha\beta} [\hat{h}_1, \hat{h}_1] \quad (7.48)$$

и так далее.

Таким образом, мы учитываем, что при распространении ГВ взаимодействуют с другими ГВ. Одним из эффектов будет то, что ГВ уже не будут распространяться свободно со скоростью света. Еще один эффект, который связан с такими нелинейностями — *гравитационная память*.

Осцилляции гравитационных волн при усреднении не всегда дают ноль. происходит накопление (память ГВ) постоянной моды h . Это происходит потому, что $\tau^{\alpha\beta}$ включает в себя ТЭИ:

$$\square \hat{h}^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} \times \underbrace{\tau^{\alpha\beta}}_{= \frac{c^4}{32\pi G} \langle h_{ij} \partial h_{ij} \rangle} \quad (7.49)$$

И сворачивая гравитационное поле с гравитационным полем (каждое из которых осциллирует и зависит от $t - \frac{r}{c}$), на первый план выходит их медленно меняющаяся часть. Этот эффект и приводит к накоплению гравитационной памяти.

Лекция 8. Эффект гравитационно-волновой памяти

Ближайшие 2 лекции будут посвящены тонким вопросам, касающихся физики гравитационных волн.

Память гравитационных волн

Этот эффект считается сравнительно новым, хотя о нем говорили еще в 70-х годах (*Зельдович, Пономарев*). Однако пристальное внимание к этому эффекту возникло именно сейчас из-за гравитационно-волновых экспериментов.

Рассмотрим уравнение, полученное на одной из прошлых лекций, описывающее влияние гравитационной волны h_{ij}^{TT} на распределение тел в пространстве — ξ^i являются координатами материальных точек в лабораторной системе:

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j \quad (8.1)$$

Рассмотрим ситуацию в линейной гравитации, когда имеется набор точек и расстояние между ними определяется их координатами ξ^i , а гравитационная волна движется перпендикулярно рисунку (см. рис. 8.1). Гравитационная волна имеет две поляризации:

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \times \sin\left(\omega t - \frac{z}{c}\right) \quad (8.2)$$

При прохождении волны через систему, расстояние между точками будет меняться.

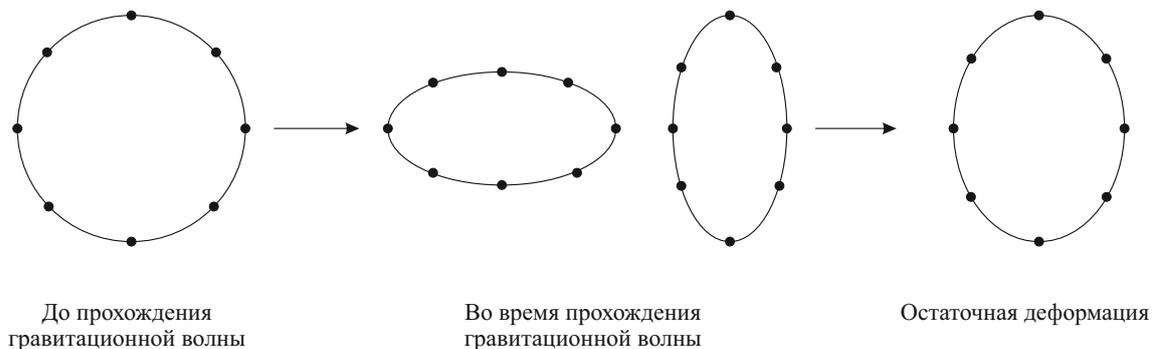


Рис. 8.1. Иллюстрация эффекта гравитационной памяти

После прохождения гравитационной волны — система (**в случае линейной гравитации**) вернется в исходное состояние.

Однако на самом деле, после прохождения гравитационной волны должна остаться некоторая остаточная деформация за счет нелинейного эффекта *гравитационной памяти*.

Если речь идет о настоящем эксперименте *LIGO*, прохождение гравитационной волны должно вызвать необратимое смещение зеркал интерферометра. Весь эффект можно описать как:

$$h_{ij}^{mem} = h_{ij}(t \rightarrow +\infty) - h_{ij}(t \rightarrow -\infty) \quad (8.3)$$

Эффект гравитационно-волновой памяти в эксперименте будет заключаться в том, что осцилляции в экспериментальных данных не будут усредняться в ноль. Будет наблюдаться «накопительный эффект» усреднения (см. рис. 8.2). Вспомним уравнение,

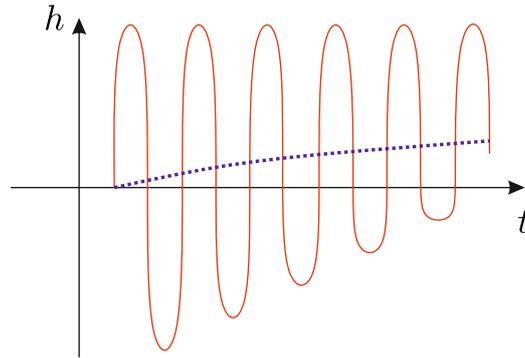


Рис. 8.2. Эффект гравитационной памяти в эксперименте

для формы гравитационной волны, учитывающие нелинейные эффекты:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} [T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}]. \quad (8.4)$$

В частности, согласно последнему уравнению сами гравитационные волны могут быть источниками гравитационных волн. $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса источника (например, системы из двух вращающихся черных дыр), а $t_{\mu\nu}$ — собственный ТЭИ гравитационных волн (являющийся дополнительным источником ГВ).

Из теоремы Нетер:

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{TT} \partial_\nu h_{ij}^{TT} \rangle. \quad (8.5)$$

В уравнении (8.4) будем рассматривать только второй член, чтобы проследить интересующий нас эффект (перейдем сразу к пространственным компонентам благодаря ГТ-калибровке):

$$\square \bar{h}_{kl} = -\frac{1}{2} \langle \partial_k h_{ij}^{TT} \partial_l h_{ij}^{TT} \rangle \quad (8.6)$$

Ввиду того, что волна распространяется вдоль какого-то направления (это, по сути, плоские волны) можно заменить производные по пространственным координатам на производные по времени n_k, n_l — направления векторов:

$$\square \bar{h}_{kl} = -\frac{n_k n_l}{2c^3} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (8.7)$$

Это связано с тем, что на больших расстояниях волна имеет вид:

$$h_{ij}^{TT} \sim \frac{1}{r} F \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (8.8)$$

Тогда $\partial_k h_{ij}^{TT} \sim r^{-2}$, и на больших расстояниях эта величина стремится к нулю:

$$\partial_k h_{ij}^{TT} \approx -\frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial_k r}{c}}_{=n_k/c} \dot{F} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (8.9)$$

Будем интегрировать уравнение (8.7), используя функцию Грина:

$$\bar{h}_{kl} = \frac{1}{8\pi c^2} \int d^4x n'_k n'_l \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \delta(ct' - ct + |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (8.10)$$

Главный эффект, о котором мы будем говорить, можно понять уже из этой формулы. Величины h_{ij}^{TT} осциллируют и, как следствие, их комбинация «содержит постоянный член», чем можно объяснить то, что осцилляции не усредняются в ноль (правда, пока накопительный эффект не очевиден).

На прошлых лекциях было получено выражение для мощности излучения гравитационных волн (для линеаризованной теории):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi} \int d\Omega \times \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle \quad (8.11)$$

Отсюда можно выразить $\langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle$:

$$\langle \dot{h}_{ij} \dot{h}_{ij} \rangle = \frac{32\pi G}{c^3 r^2} \frac{dE}{dt d\Omega}, \quad (8.12)$$

что и подставляем в уравнение (8.10)

$$\bar{h}_{kl} = \frac{4}{c^5} \int \frac{d^4x}{|\vec{x} - \vec{x}'|} n'_k n'_l \frac{1}{r'^2} \times \frac{dE}{dt' d\Omega'} \delta(ct' - ct + |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (8.13)$$

Тогда внутри собирается величина, для которой выражение также было получено ранее (с использованием Λ -тензора):

$$\frac{dE}{dt' d\Omega'} = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \times \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle, \quad (8.14)$$

Тогда выражение для \bar{h}_{kl} преобразуется к виду:

$$\bar{h}_{kl} = \frac{G}{2\pi c^{10}} \int \frac{d^4x'}{|\vec{x} - \vec{x}'| \cdot r'^2} n'_k n'_l \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \delta(ct' - ct + |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (8.15)$$

Мера интеграла:

$$\int d^4x' \equiv \int c dt' dx' = \int c dt' r'^2 dr' d\Omega' \quad (8.16)$$

Можно заметить, что r'^2 тогда сократится. Получаем

$$\bar{h}_{kl} = \frac{G}{2\pi c^{10}} \int dt' dr' d\Omega' \frac{n'_k n'_l}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \times \delta \left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right) \quad (8.17)$$

Проинтегрируем по δ -функции, учитывая, что $\bar{h}_{kl} = \bar{h}_{kl}(\vec{R}, t)$ есть функция от времени и расстояния от источника ГВ до наблюдателя. Введем обозначения, представленные на рисунке 8.3. В прошлый раз при вычислении подобного интеграла мы интегриро-

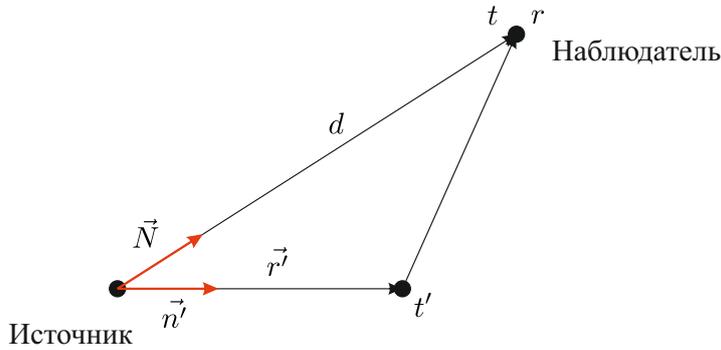


Рис. 8.3. Эффект гравитационной памяти в эксперименте

вали только по размерам источника. Теперь, в силу того, что ГВ распространяются везде, и становятся источниками для других ГВ, необходимо проинтегрировать по всему пространству. Удобно ввести величину

$$u' = t' - \frac{r'}{c}, \quad (8.18)$$

соответствующую времени, когда был испущен гравитон, который приходит в точку r' . Тогда

$$\bar{h}_{kl} = \frac{G}{2\pi c^{10}} \int du' dr' d\Omega' \frac{n'_k n'_l}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \times \delta \left(u' + \frac{r'}{c} - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right) \quad (8.19)$$

Хотим проинтегрировать δ -функцию по dr' , для чего перепишем часть нашего интеграла в виде

$$\int \frac{dr'}{|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \frac{\delta(r' - r'_*)}{\left| \frac{1}{c} + \frac{r'_* - \vec{N}\vec{n}' \cdot d}{c|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \right|}, \quad (8.20)$$

где r'_* — решение уравнения:

$$u' + \frac{r'_*}{c} - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'_*|}{c} = 0 \quad (8.21)$$

Тогда интеграл по r'

$$\int \frac{dr'}{|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \frac{\delta(r' - r'_*)}{\left| \frac{1}{c} + \frac{r'_* - \vec{N}\vec{n}' \cdot d}{c|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \right|} = c \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'_*| + r'_* - (\vec{N}\vec{n}') d} \quad (8.22)$$

И пользуясь определением r'_* (вставить ссылку):

$$\int \frac{dr'}{|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \frac{\delta(r' - r'_*)}{\left| \frac{1}{c} + \frac{r'_* - \vec{N}\vec{n}' \cdot d}{c|\vec{x} - \vec{x}'_*|} \right|} = \frac{c}{ct - cu' - (\vec{N} \times \vec{n}')d}. \quad (8.23)$$

Возвращаясь к \bar{h}_{kl} получим

$$\bar{h}_{kl}(t, \vec{d}) = \frac{G}{2\pi c^9} \int_{-\infty}^{+\infty} du' d\Omega' n'_k n'_l \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \frac{1}{ct - cu' - (\vec{N} \times \vec{n}')d} \quad (8.24)$$

Можно сделать еще одно физическое упрощение. Для этого надо заметить, что переменная u' ограничена во времени, и ее максимальное значение $u_{\max} = t - \frac{d}{c}$. Это значение достигается при $r'_* \equiv 0$. Тогда верхний предел в интеграле по du' можно заменить на $t - \frac{d}{c}$.

Кроме того, можно заметить, что u' в физически релевантных ситуациях ($R \gg 1$) ограничено и $\Delta u' \approx 0$ и $u' \rightarrow t - \frac{d}{c}$.

$$\bar{h}_{kl}(t, \vec{d}) = \frac{G}{2\pi c^9 d} \int_{-\infty}^{t-d/c} du' d\Omega' n'_k n'_l \Lambda_{ij,i'j'}(\vec{n}') \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \quad (8.25)$$

Совершим физически оправданное упрощение этого интеграла — факторизуем этот интеграл, забывая про часть, которая зависит от углов.

$$\bar{h}_{kl} = \frac{G}{2\pi c^9 d} \int_{-\infty}^{t-d/c} du' \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{i'j'} \rangle \times \int \frac{d\Omega' n'_k n'_l}{1 - \vec{N} \times \vec{n}'} \Lambda_{ij,i'j'} \quad (8.26)$$

При вычислении второго интеграла получится выражение с символами Кронекера, благодаря которым можем принять $i = i'$ и $j = j'$. И далее будем рассматривать только первый интеграл.

Вспомним, чему равен квадрупольный момент в двойных системах

$$Q_{ij} \sim \mu \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) \quad (8.27)$$

где μ — приведенная масса черных дыр. Также была вычислена и 3-я производная по времени квадрупольного момента

$$\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} = 32\mu^2 \omega^6 R^4 \quad (8.28)$$

Также мы получали зависимость ω от времени до слияния черных дыр:

$$\omega(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{3/8}} \quad (8.29)$$

$$R \sim \tau^{1/4} \quad (8.30)$$

Тогда выражение (8.28) можно переписать как

$$\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij} = 32\mu^2\omega_0^6R_0^4 \times \underbrace{\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{9/4} \times \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}_{=\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{5/4}} \quad (8.31)$$

индекс «0» обозначает значения величин в начальный момент. Тогда гравитационные волны

$$\bar{h}_{kl} = \frac{G}{2\pi c^9 d} 32\mu^2\omega_0^6R_0^4 \times \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \left(\frac{\tau_0}{\tau'}\right)^{5/4} = \frac{G}{2\pi c^9 d} 32\mu^2\omega_0^6R_0^4 \times 4 \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/4} - 1 \right] \quad (8.32)$$

Таким образом, нелинейности в общей теории относительности приводят к тому, что помимо осциллирующих членов, возникают члены другого типа. Мы получили один из таких, медленно растущих вкладов в гравитационное поле.

Члены, которые зависят от всей прошлой «истории» источника, называются *hereditary terms* или наследственные источники.

В эксперименте *LIGO* именно этот член ответственен за поведение гравитационного поля как на рисунке (8.2).

Оценка эффекта памяти гравитационных волн

Оценим величину этого эффекта откинув постоянную часть, которая не зависит от времени

$$\Delta\bar{h}_{kl} = \frac{64G}{\pi c^9 d} \cdot \mu^2\omega_0^6R_0^4\tau_0 \times \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/4} \quad (8.33)$$

Из закона Кеплера для величин в начальный момент рассмотрения:

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{R_0^3}, \quad (8.34)$$

где M — суммарная масса черных дыр.

Вспомним также соотношение, связывающее расстояние между черными дырами и время, которое им остается до слияния, следующее из квадрупольной формулы:

$$\tau_0 = \frac{5}{256} \frac{c^5 R_0^4}{G^3 M^2 \mu}. \quad (8.35)$$

Подставляя это соотношение в нашу оценку для эффекта, получим

$$\Delta\bar{h}_{kl} = \frac{5GM\mu}{4\pi c^4 d R_0} \times \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/4} \quad (8.36)$$

Примем во внимание выражение

$$R(\tau) = R_0 \times \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/4} \quad (8.37)$$

и тогда

$$\Delta \bar{h}_{kl} = \frac{5GM\mu}{4\pi c^4 d \cdot R(\tau)} \quad (8.38)$$

И снова применяя формулу Кеплера (8.34), с учетом того, что скорость вращения черных дыр

$$v^2 = R^2(\tau) \cdot \omega^2(\tau) \quad (8.39)$$

с учетом константы Ньютона (которая была опущена в предыдущих вычислениях), и добавим функцию зависящую от углов, которую мы не учитывали

$$\implies \Delta \bar{h}_{kl} = \frac{5G \mu v^2}{4\pi c^4 d} \cdot f_{kl}(\theta). \quad (8.40)$$

Можно сделать вывод, что величина эффекта памяти по порядку величины

$$\Delta \bar{h}_{kl}^{mem} \sim \frac{G\mu}{c^2 d}, \quad (8.41)$$

что можно соотнести с Ньютоновским потенциалом на гигантском расстоянии (потенциал Солнца на расстоянии в 500 Мpc) $\sim \Phi_{\odot}(d \approx 500 \text{ Мpc})$. Численная оценка эффекта (под Φ_{\odot} понимаем потенциал, который создает Солнце вблизи Земли)

$$\Delta \bar{h}_{kl}^{mem} \sim \Phi_{\odot} \times \frac{r}{d} \sim 10^{-22}. \quad (8.42)$$

Видим, что эффект гравитационной памяти всего на 1 порядок меньше величины самой гравитационной волны (10^{-11} в эксперименте *LIGO*). Таким эффектом, конечно, нельзя пренебречь.

Лекция 9. Приливные силы в физике гравитационных волн

Эффект гравитационной памяти

В прошлый раз на лекции обсуждался эффект Гравитационной памяти. Мы говорили, что если учесть не только тензор энергии-импульса источника, но и ТЭИ гравитационных волн (выйти в режим нелинейной гравитации), то появляется новый эффект. Помимо осцилляций электромагнитных волн в эксперименте будет фиксироваться медленно меняющийся вклад (см. рис. 8.2).

Замечание: Эффект гравитационно-волновой памяти в некоторых случаях проявляется даже в отсутствие учета нелинейностей гравитации.

Рассмотрим линеаризованную гравитацию:

$$\square \bar{h}_{ij} = -\frac{16\pi G}{c^4} \bar{h}_{ij}, \quad (9.1)$$

в рамках которой опишем систему двух вращающихся друг относительно друга астрономических объектов массами m_1 и m_2 . Для простоты будем считать, что $m_1 \gg m_2$ и будем рассматривать только движение тела массой m_2 вокруг тела массой m_1 (См. рис. 9.1). Еще одним упрощением будет то, что мы будем рассматривать только гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси Oz , которая перпендикулярна плоскости вращения.

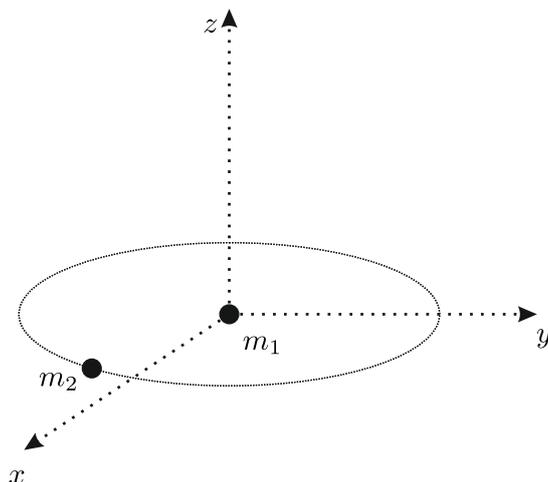


Рис. 9.1. Система вращающихся объектов, генерирующая гравитационные волны

Для этого случая можем сразу написать выражение для гравитационной волны:

$$h_{ij}^{TT} = 2 \frac{G_N}{c^4 R} \underbrace{\ddot{M}_{ij}^{TT}}_{Q_{ij}^{TT}}, \quad (9.2)$$

где M_{ij}^{TT} — квадрупольный момент.

$$M_{ij}^{TT} = \int d\vec{x} \rho(\vec{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{2} |\vec{x}|^2 \delta_{ij} \right). \quad (9.3)$$

Операция взятия бесследовой поперечной (TT -) части эквивалентна действию Λ -тензора:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G_N}{c^4 R} \Lambda_{ij,kl} Q_{kl}, \quad (9.4)$$

который имеет вид

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad (9.5)$$

где

$$P_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k. \quad (9.6)$$

Перейдем от h_{ij}^{TT} к поляризациям, которые вводятся как

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Тогда выражение для h_+

$$h_+ = \frac{2G_N}{c^4 R} \times m_2 [\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + x_1 \ddot{x}_1 - x_2 \ddot{x}_2]. \quad (9.8)$$

Пока происходит только круговое вращение, мы имеем только осцилляции, эффект гравитационно-волновой памяти не наблюдается.

Совершим мысленный эксперимент, в рамках которого «отбросим» массу m_2 — допустим, после какого-то процесса тело улетело на бесконечно далекое расстояние. Асимптотическое значение скорости этого тела (движущегося вдоль оси Oy) обозначим v_∞ .

В результате этого процесса произойдет генерация гравитационно-волновой памяти. Это можно увидеть из формулы (9.8) — на бесконечности h_+ соответствует какое-то постоянное значение. Появляется «скачок» в значении h_+ :

$$\Delta h_+^{mem} = -\frac{2G_N}{c^4 R} \times m_2 v_\infty^2. \quad (9.9)$$

Такая ситуация (в рамках которой генерируется этот эффект) реализуется, например, в результате вспышки сверхновой, во время которой гигантское количество нейтрино улетает в пространство.

Этот процесс можно обобщить на случай любого другого процесса, где будут несвязанные частицы:

$$\Delta h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 R} \sum_A \frac{M_A v_i^A v_j^A}{1 - \vec{N} \vec{v}_A / c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}. \quad (9.10)$$

Замечание: Нелинейный эффект гравитационной памяти можно переосмыслить в терминах линейной памяти. Так, гравитоны — это несвязанные частицы в системе, которые и порождают эффект.

Уравнение Толмена - Оппенгеймера - Волкова

С помощью гравитационных волн можно понять, какое уравнение состояния вещества соответствует системе двух сближающихся черных дыр или нейтронных звезд. Уравнение состояния нейтронной звезды неизвестно и, говорят, что гравитационные волны — это единственный способ его определить. На данный момент получены неплохие ограничения на уравнения состояния нейтронных звезд.

Рассмотрим центрально-симметричную метрику

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (9.11)$$

Замечание: Из этого анзаца можно вывести, например, метрику Шварцшильда, если положить

$$e^{2\Phi} = e^{2\Lambda} = 1 - \frac{2G_N m}{c^2 r}. \quad (9.12)$$

Запишем (0,0)-компоненту уравнения Эйнштейна:

$$G_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{00}, \quad (9.13)$$

откуда

$$\frac{8\pi G_N}{c^4} \rho c^2 e^{2\Phi} = \frac{e^{2\Phi}}{r^2} \left[1 - \frac{d}{dr} (r e^{-2\Lambda}) \right], \quad (9.14)$$

откуда получаем

$$\implies e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2G_N m_r}{c^2 r} \right), \quad (9.15)$$

где

$$m_r = 4\pi \int dr r^2 \rho(r), \quad (9.16)$$

$\rho(r)$ — зависимость плотности вещества нейтронной звезды от радиуса.

Из закона сохранения следует

$$\nabla_{\mu} T_1^{\mu} = 0 \implies \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{\rho r^2 + p} \frac{dp}{dr}, \quad (9.17)$$

где p — давление. Получаем связь между градиентом потенциала Φ и градиентом давления.

(1, 1)-компонента уравнения Эйнштейна дает

$$-\frac{8\pi G_N p}{c^4} e^{2\Lambda} = \frac{-2r\Phi' + e^{2\Lambda} - 1}{r^2}. \quad (9.18)$$

И все остальные компоненты уравнения Эйнштейна выполняются с учетом этого тождества. После преобразований этих соотношений, получим замкнутое уравнение

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{G_N}{r^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \left(m_r + \frac{4\pi r^3 p}{c^2}\right) \times \left(1 - \frac{2G_N m_r}{c^2 r}\right)^{-1}} \quad (9.19)$$

Уравнение (9.19) носит название *уравнения Толмена - Оппенгеймера - Волкова*.

Тогда если мы знаем уравнение состояния вещества нейтронной звезды:

$$p = p(\rho), \quad (9.20)$$

то из уравнения ГОВ можно получить замкнутое уравнение для плотности энергии (или для давления). Тогда можно было бы даже построить зависимость массы нейтронной звезды от радиуса $M(R)$. Но, к сожалению, уравнение состояния вещества нейтронной звезды пока неизвестно.

Замечание: Из этого уравнения, в частности, следует ограничение на массу нейтронных звезд:

$$M_{NS} \leq 2.2M_{\odot} \quad (9.21)$$

Замечание: Действуя аналогичным образом, можно было бы получить уравнение для потенциала Φ и тогда, зная уравнение состояния, можно определить гравитационный потенциал.

Замечание: Даже в случае не полностью сферически-симметричной нейтронной звезды (например, когда она находится в поле другого массивного объекта, деформирующего звезду) можно получить уравнение для гравитационного потенциала, в котором единственная неизвестная — уравнение состояния.

Приливные силы (Tidal forces)

Рассмотрим ситуацию, когда один массивный объект находится в гравитационном поле другого. До этого мы предполагали, что сливающиеся объекты, порождающие гравитационные волны, являются точечными. Но, конечно, в реальности это не так. Разные части нейтронной звезды по-разному откликаются на внешнее гравитационное поле Φ_{ext} — нейтронная звезда деформируется, и у нее возникает квадрупольный момент Q'_{ij} (см. рис. 9.2)

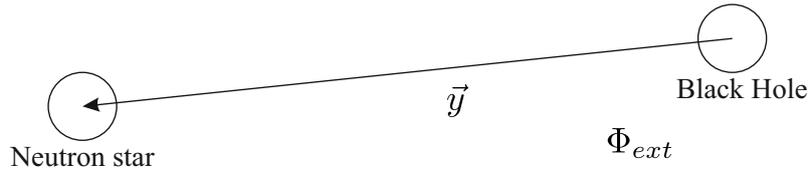


Рис. 9.2. Нейтронная звезда в поле массивного объекта

Тогда можно записать закон Ньютона для нейтронной звезды с учетом ее внутренней структуры:

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \int d\vec{z} \rho(t, \vec{z}) \times \partial_i \Phi_{\text{ext}}(t, \vec{y} + \vec{z}), \quad (9.22)$$

где \vec{z} — координата, описывающая внутренние точки звезды.

Теперь разложим потенциал по z , т.к. радиус нейтронной звезды предполагается малым:

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \int d\vec{z} \rho(t, \vec{z}) \times \left[\partial_i \Phi_{\text{ext}}(t, \vec{y}) + \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}(t, \vec{y}) z^j + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}}(\vec{y}, t) z^j z^k \dots \right]. \quad (9.23)$$

- 1) Нулевой член разложения соответствует Ньютонской силе, которая действует на точечный объект.
- 2) Интеграл по \vec{z} первого члена разложения даст координату центра масс.

$$m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -m \partial_i \Phi_{\text{ext}} + \underbrace{\partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}} \int d\vec{z} \rho(t, \vec{z}) z^j}_{=y^j} - \frac{1}{2} \int d\vec{z} \rho(t, \vec{z}) \partial_i \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}} z^j z^k \quad (9.24)$$

- 3) Интеграл по \vec{z} второго члена разложения даст квадрупольный момент. Именно этот член соответствует деформации, вызванной внешней силой.

$$-\frac{1}{2} \int d\vec{z} \rho(t, \vec{z}) \partial_i \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}} z^j z^k = -\frac{1}{2} Q'_{jk} \partial_i \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}}. \quad (9.25)$$

Введем величину, называемую *Love number* (название произошло от фамилии ученого). Производные внешнего потенциала и квадрупольный момент Q'_{ij} связаны как

$$Q'_{jk} = -\lambda \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}}, \quad (9.26)$$

λ — размерный параметр, и можно ввести безразмерную величину *Love number* (или число Лава):

$$k_2 = \frac{3G}{2} \lambda R_{NS}^{-5}, \quad (9.27)$$

где R_{NS} — радиус нейтронной звезды. Индекс «2» соответствует тому, что это *квадрупольная* деформация.

Учет деформации нейтронной звезды дает вклад в полную механическую энергию астрономических объектов, который надо учитывать.

Энергия орбитального движения двух объектов с учетом энергии приливных сил:

$$E_{\text{orbit}} = -\frac{G_N m_1 m_2}{2d} + \Delta E^t, \quad (9.28)$$

d — расстояние между объектами. Оценим добавку к энергии по порядку величины как:

$$\Delta E^t \sim Q_{jk} \times \partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}}. \quad (9.29)$$

Можем переписать это выражение в терминах производных внешнего потенциала:

$$\Delta E^t \sim \lambda (\partial_j \partial_k \Phi_{\text{ext}})^2. \quad (9.30)$$

Численно оценим эту величину:

$$\Delta E^t \sim \lambda \frac{G^2 m_2^2}{d^6}. \quad (9.31)$$

Сравним эту величину с основным вкладом в энергию (энергией точечных источников):

$$\frac{\Delta E^t}{E_{\text{point}}} \sim \lambda G_N \frac{m_2}{m_1 \cdot d^5} \quad (9.32)$$

перейдем от λ к числам Лава:

$$\frac{\Delta E^t}{E_{\text{point}}} \sim k_2 \left(\frac{R_{NS}}{d} \right)^5 \quad (9.33)$$

величина k_2 типичная для нейтронных звезд $k_2 \sim 0.1 - 1$. Скорость нейтронной звезды, которая вызвана вращением вокруг компаньона:

$$\frac{G_N m_2}{d} \sim v^2 \quad (9.34)$$

Введем величину α — *компактность*:

$$\alpha = \frac{G_N \times m}{c^2 R} \quad (9.35)$$

- Для черных дыр α принимает свое максимальное значение

$$\alpha_{\text{BH}} = 0.5, \quad (9.36)$$

- Коактность для нейтронных звезд

$$\alpha_{\text{NS}} \approx 0.1 - 0.2 \quad (9.37)$$

Тогда

$$\boxed{\frac{\Delta E^t}{E_{\text{point}}} \sim \frac{k_2}{\alpha^5} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^{10}} \quad (9.38)$$

Эффекты, связанные с приливными силами, соразмерны по своему значению с слагаемыми в ряду теории возмущений по параметру $\frac{v}{c}$ (за счет фактора α^{-5}).

Важно отметить, что этот эффект еще не был зарегистрирован экспериментально.

Замечание: Чтобы отличить сигналы от нейтронных звезд от сигналов черных дыр, не обязательно опираться только на этот эффект. Достаточно сравнить частоты сигналов. Вспомним формулу для максимальной частоты гравитационных волн:

$$f_{\text{max}} \approx 4.4 \text{kHz} \times \frac{M_{\odot}}{M_{\text{obj}}} \quad (9.39)$$

Тогда просто их частотного анализа можно понять, какие объекты сливаются.

Важно понять, также, как выглядят эффекты, связанные с приливными силами, с точки зрения гравитационных волн.

Вспомним, что в случае с точечными источниками мы, отталкиваясь от формулы

$$E_{\text{orb}} = -\frac{G_N m_1 m_2}{2R} \quad (9.40)$$

выражали радиус через частоту, после чего использовали квадрупольную формулу и уравнение баланса энергии

$$\dot{E}_{\text{orb}} = -\dot{E}_{\text{GW}} \quad (9.41)$$

и приходили к уравнению вида:

$$\dot{\omega} = \text{const} \times \omega^{11/3}. \quad (9.42)$$

Частота гравитационных волн же связана с частотой обращения объектов как

$$\omega_{\text{gw}} = 2\omega, \quad (9.43)$$

откуда мы, наконец, находили частотно-временную зависимость гравитационных волн

$$h_{ij} \sim \cos \left[\int_0^t \omega_{\text{gw}}(t') dt' \right]. \quad (9.44)$$

Все эти же шаги необходимо проделать, чтобы предсказать форму гравитационной волны при наличии приливных сил. В итоге меняется фазовый фактор ψ в формуле (9.44):

$$h_{ij} \sim \cos \left[\psi \left(1 + \frac{v}{c} \right)^{10} \cdot \frac{k_2}{\alpha^5} \right]. \quad (9.45)$$

Из экспериментов получают оценки на числа Лава k_2 , откуда, подставив их в уравнение Толмена - Оппенгеймера - Волкова, находят ограничения на радиусы объектов. Так, для нейтронных звезд с массами $M_{NS} = 1.4M_{\odot}$ ограничение на радиус $R_{NS} < 13.6\text{km}$.

Лекция 10. Гравитационные волны в космологии

Основные эпохи космологии

Согласно современным представлениям, мы живем сейчас в Λ -эпоху, то есть эпоху, в которую доминирует темная энергия. Те источники, которые мы изучали ранее (двойные системы), мы изучали в современную эпоху, и красное смещение во всех выкладках мы неявно полагали $Z \leq 1$.

На этой лекции будут рассмотрены гравитационные волны, которые были излучены в более ранние эпохи.

Основные эпохи в космологии представлены на рисунке 10.1.

- Λ -epoch — Лямбда-эпоха. Современная температура космического микроволнового излучения $T_{\text{СМВ}} \approx 2,73$ К, или, переводя в электрон-вольты $T = 2,73 \cdot 0,86 \cdot 10^{-4} \text{eV} \sim 2 \times 10^{-4} \text{eV}$, значение красного смещения $Z \leq 1$;
- MD-epoch — Материально-доминированная эпоха. Температура Вселенной — $T = 3000$ К, красное смещение $Z \approx 1000$;
- RD-epoch — радиационно-доминированная эпоха, $T \approx 10000$ К = 1 eV;
- Preheating — эпоха разогрева;
- Inflation — инфляция;

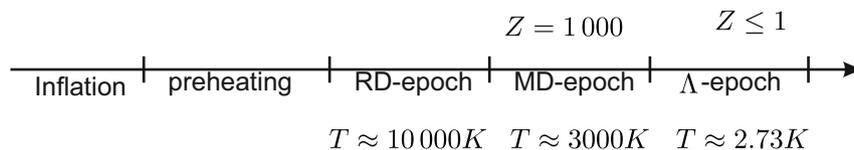


Рис. 10.1. Основные эпохи в космологии

При температуре $T \sim 1$ MeV начал происходить первичный нуклеосинтез во Вселенной (BBN).

Гравитационные волны и космология

Есть 2 типа гравитационных волн, приходящих из ранних космологических эпох.

- 1) Первый тип — гравитационные волны, приходящие в постинфляционную эпоху. В первую очередь, нас будет интересовать гравитационные волны из стадии радиационного доминирования (RD-epoch).

- 2) Второй тип — гравитационные волны из инфляционной эпохи. Появление гравитационных волн из этой эпохи не связано с наличием какого-либо источника, — они являются квантовыми флуктуациями, усиленными выходом мод за горизонт. Такие гравитационные волны впервые были предсказаны *Старобинским*. Наблюдение таких гравитационных волн может стать первым указанием на то, что гравитация имеет квантовую природу.

Гравитационные волны из радиационно-доминированной стадии

В рамках линеаризованной гравитации уравнения гравитационных волн будут очень похожи на то, что изучалось на прошлых лекциях:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (10.1)$$

однако надо учитывать, что Вселенная не статичная, а расширяющаяся. Интервал в этом случае:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j], \quad (10.2)$$

где

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \text{ — конформное время.} \quad (10.3)$$

Конформное время вводится, чтобы привести интервал к удобному виду, похожему на интервал в плоском пространстве.

Плотность энергии радиации в радиационно-доминированной стадии:

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) \times T^4, \quad (10.4)$$

где $g_*(T) \approx 106.75$ — степени свободы при температурах во Вселенной $T \geq 100$ GeV, при которой все степени свободы Стандартной Модели являются релятивистскими.

Чтобы найти это число степеней свободы, надо знать число бозонных и фермионных степеней свободы при высоких температурах:

$$g_*(T) = \sum_{\text{bosons}} g_*^b(T) + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_*^f(T), \quad (10.5)$$

где фактор $\frac{7}{8}$ связан с тем, что фермионы и бозоны подчиняются разным статистикам.

Главным уравнением в этой теории является *уравнение Фридмана*:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_{\text{rad}}, \quad (10.6)$$

где H — параметр Хаббла. Из уравнения Фридмана сразу следует, что

$$H \sim \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}, \quad (10.7)$$

где M_{Pl} — масса Планка.

Зачем изучать гравитационные волны из ранней Вселенной?

Существует только ограниченное количество источников, которые могут создавать такие гравитационные волны, которые мы можем измерять. В литературе, в этой связи, часто обсуждаются **фазовые переходы 1-го рода**, в частности — **электрослабый фазовый переход** (надо отметить, что все источники гравитационных волн находятся за пределами Стандартной Модели). Также стоит упомянуть *космические струны* и *доменные стенки*, которые могут быть одними из самых мощных источников гравитационных волн, но также невозможны в рамках Стандартной Модели элементарных частиц.

Одной из главных приятных особенностей гравитационных волн является то, что они ни с чем не взаимодействуют.

- 1) Главная причина состоит в том, что гравитон крайне слабо взаимодействует с полями материи. Число таких взаимодействий можно оценить как:

$$\Gamma \sim n \times \sigma \times \nu^1 = n \cdot \sigma, \quad (10.8)$$

где $n \sim T^3$ — концентрация источников, а $\sigma \sim G_N^2 \cdot T^2$ — сечение рассеяния. Таким образом

$$\Gamma \sim G_N^2 \times T^5 \sim \frac{T^5}{M_{\text{Pl}}^4}, \quad (10.9)$$

что можно интерпретировать, как число взаимодействий гравитона за единицу времени. Чтобы понять, насколько мала эта величина, надо сравнить ее с параметром Хаббла (10.7) в радиационно-доминированную эпоху ($T \leq 10^{15}$ GeV). Тогда можно сделать вывод, что темп взаимодействия гравитонов с материей всегда меньше скорости расширения Вселенной. Значит, гравитон, который удалось бы зафиксировать, ни с кем не взаимодействовал. Это одна из причин, почему гравитационные волны сейчас так активно изучаются.

- 2) Вторая причина — результаты эксперимента *NANOGrav*, в которых утверждается, что найдены гравитационные волны, которые возможно имеют космологическое происхождение.

В космологиях в первую очередь работают с (вообще, обезразмеренными) плотностями энергий частиц (остаточными концентрациями):

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{tot}}}, \quad (10.10)$$

где ρ_i — плотность энергии частицы, ρ_{tot} — полная плотность энергии во Вселенной.

Для гравитонов (гравитационных волн) используют другое выражение для этой величины — берут производную плотности энергии по логарифму частоты:

$$\Omega_{\text{gw}} = \frac{d\rho_{\text{gw}}}{\rho_{\text{tot}} d \ln f}, \quad (10.11)$$

то есть рассматривают спектральную плотность энергии. Тем самым подчеркивается, что интерес представляет, в первую очередь, спектральная зависимость этой величины. Кроме того, непосредственно плотности энергии гравитационных волн обычно сложно предсказать, а спектральную зависимость — часто удается.

Результаты эксперимента *NanoGrav*:

$$\Omega_{\text{gw}} \approx 5.8 \times 10^{-8} \cdot \left(\frac{f}{32 \text{ nHz}} \right). \quad (10.12)$$

Эту величину можно сравнить с плотностью энергии фотонов космического микроволнового излучения:

$$\Omega_{\text{CMB}} \sim 10^{-5}. \quad (10.13)$$

Таким образом, согласно результатам эксперимента *NANOGrav*, нас окружает не только СМВ, но и гравитационный фон, который всего на 2-3 порядка меньше.

Однако есть конкурирующая гипотеза, которая утверждает, что такой гравитационный фон «пришел» не из ранней Вселенной, а из слияния сверхмассивных черных дыр не в радиационно-доминированную эпоху, а гораздо позже.

Оценка частоты гравитационных волн в экспериментах

Для того, чтобы предсказать частоту гравитационных волн f_{gw} , необходимо конкретизировать их источник. Про источники мы знаем мало, поэтому будем исходить из других предположений.

Т.к. мы оцениваем гравитационные волны в RD-эпоху, мы можем пользоваться двумя характерными энергетическими масштабами значением температуры T и параметра Хаббла H .

- Тогда предположим, что частота ГВ от источника линейно связана с температурой, а волна излучена в период t_e . Тогда в учетом красного смещения, получим

$$f_{\text{gw}} \sim T(t_e) \times \frac{a(t_e)}{a_0}. \quad (10.14)$$

Тогда современное значение частоты:

$$f_{\text{gw}} \sim T_0 \times \left(\frac{g_*(T_0)}{g_*(T_e)} \right)^{1/3}, \quad (10.15)$$

где $T_0 \approx 2.73 \text{ K} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ eV}$. Эта оценка получена из соотношения для энтропии Вселенной.

$$S \cdot a^3 \sim g_*(T) \times T^3 \times a^3 = \text{const}. \quad (10.16)$$

Переводя в герцы, получим

$$f_{\text{gw}} \approx 300 \text{ GHz}. \quad (10.17)$$

Эта оценка оказывается очень близка к реальности, и эта частота гораздо больше максимально доступной для измерения в экспериментах $300 \text{ GHz} \gg 10 \text{ kHz}$.

- Выдвинем другую гипотезу, справедливую для многих источников: пусть частота гравитационных волн определяется Хаббловским расширением:

$$f_{\text{gw}} \approx H(t_e) \times \frac{a(t_e)}{a_0},$$

отсюда следует, что

$$f_{\text{gw}} \sim \frac{T_e^2}{M_{\text{Pl}}} \cdot \frac{T_0}{T_e} = \frac{T_0 \times T_e}{M_{\text{Pl}}}.$$

Тогда для частот порядка pHz , что соответствует частотам в экспериментах, необходимая температура излучения $T_e \approx 100 \text{ MeV}$.

Для частот порядка $\mu\text{Hz} \implies$ температура $T_e \approx 100 \text{ GeV}$.

Ограничение на плотность энергии гравитационных волн

Плотность энергии гравитационных волн зависит от масштабного фактора как

$$\rho_{\text{gw}}(a) \sim \frac{1}{a^4}. \quad (10.18)$$

Это можно понять, если рассмотреть формулу одной из предыдущих лекций:

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{\langle h'_{ij}{}^{TT} h'_{ij}{}^{TT} \rangle}{32\pi G_N a^2}, \quad (10.19)$$

а амплитуда гравитационных волн падает как

$$h_{ij}^{TT} \sim \frac{1}{a} e^{ik\tau - i\vec{k}\vec{x}}. \quad (10.20)$$

Тогда можно написать, что если гравитационная волна была произведена в момент t_e , тогда

$$\rho_{\text{gw}}(t) = \rho_{\text{gw}}(t_e) \times \left(\frac{a(t_e)}{a(t)} \right)^4. \quad (10.21)$$

Из этого следует, что иногда можно «перепутать» гравитационную волну с радиацией.

Начнем с уравнения Фридмана:

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \left(\underbrace{\rho_{\text{rad}}}_{\sim \frac{1}{a^4}} + \underbrace{\rho_{\text{gw}}}_{\sim \frac{1}{a^4}} \right). \quad (10.22)$$

Из этого уравнения можно получить ограничения на плотность энергии гравитационных волн. При температуре $T \leq 1$ MeV начинается нуклеосинтез. Элементы, которые образуются во время нуклеосинтеза (Дейтерий, Гелий, Литий), могут быть зарегистрированы в современной Вселенной с тем, чтобы подтвердить предсказания нуклеосинтеза.

Тогда, добавляя в уравнение Фридмана дополнительные члены при этих температурах, можно негативно повлиять на образование этих элементов. Это и является одним из мощных источников предсказаний из космологии для физики частиц.

Нуклеосинтез

До температуры $T \approx 1$ MeV во Вселенной активно происходят процессы, связанные с рождением/уничтожением протонов и нейтронов:



При температуре $T \sim 1$ MeV отношение протонов и нейтронов «замораживается»:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \exp \left\{ -\frac{m_n - m_p}{T_f} \right\} \quad (10.24)$$

Температуру, при которой происходит эта заморозка, можно оценить, сравнивая темп этих процессов :

$$G_F^2 T^5 \sim \frac{T^2}{M_{\text{Pl}}}, \quad (10.25)$$

откуда и получается наша оценка.

Обратим внимание, что мы не учитывали влияние гравитационных волн на расширение Вселенной. Чтобы сделать все точнее, необходимо учесть ρ_{gw} , а значит — температура заморозки существенно изменится.

Предсказание с обычными параметрами:

$$\frac{n_n}{n_p} \approx 0.2 \quad (10.26)$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что в нашей Вселенной 75% водорода H и 25% гелия He .

Соответственно, если изменится закон Хаббла, изменяется температура T_f и, в конечном итоге, изменится концентрацию Гелия во Вселенной. Это и является одним из главных ограничений на плотность гравитационных волн.

Вклад гравитационных волн в расширение Вселенной

Формализуем наши предыдущие размышления. В отсутствие гравитационных волн в плазме при температуре $T = 1 \text{ MeV}$ присутствуют только частицы e^+ , e^- , γ , ν . Тогда с учетом степеней свободы

$$H^2(T) = \frac{8\pi G_N \pi^2}{3 \cdot 30} \times T^4 \times \left(\underbrace{4}_{e^+e^-} \cdot \frac{7}{8} + \underbrace{2}_{\gamma} + \frac{7}{8} \underbrace{N_\nu}_{\text{число флейворов } \nu} \cdot 2 \right) \quad (10.27)$$

Теперь будем считать, что у нас есть гравитационные волны — гравитоны ведут себя, как $\frac{1}{d^4}$. Тогда эквивалентно можно описать гравитацию, как дополнительные сорта нейтрино

$$H^2(T) = \frac{8\pi G_N \pi^2}{3 \cdot 30} \times T^4 \times \left(4 \cdot \frac{7}{8} + 2 + \frac{7}{8} (N_\nu + \Delta N_\nu) \cdot 2 \right) \quad (10.28)$$

Важно понимать, что это только эффективная форма записи, которая обусловлена тем, что плотности энергии нейтрино и гравитационных волн ведут себя одинаковым образом.

При температурах $T \ll 1 \text{ MeV}$ можно не учитывать e^+ , e^- . Кроме того, нейтрино уже вышли из плазмы, и поэтому их температура отличается от температуры фотонов. С учетом этих тонкостей, можно записать

$$H^2(T) = \frac{8\pi G_N \pi^2}{3 \cdot 30} \times T^4 \times \left(2 + \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} (N_\nu + \Delta N_\nu) \cdot 2 \right) \quad (10.29)$$

Собирая все факторы, отсюда следует, что эффективная плотность гравитационных волн

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{\pi^2}{30} T_\gamma^4 \times \frac{7}{4} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \Delta N_\nu. \quad (10.30)$$

Далее, в экспериментах накладывают ограничения на эффективные дополнительные степени свободы нейтрино ΔN_ν (в частности, из физики BBN):

$$\Delta N_\nu \leq 0.11 \text{ (Planck, 2018)}. \quad (10.31)$$

Перепишем соотношение в виде отношения плотностей энергий гравитационных волн и фотонов:

$$\frac{\rho_{\text{gw}}}{\rho_\gamma} = \frac{7}{8} \times \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \times \Delta N_\nu \quad (10.32)$$

где $\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T_\gamma^4$.

В форме, через остаточную концентрацию:

$$\Omega_{\text{gw}} \leq \Omega_\gamma \times 0.02 \quad (10.33)$$

Таким образом, гравитационных волн должно быть, по крайней мере, в 100 раз меньше, чем фотонов.

На данном этапе мы не конкретизировали источник гравитационных волн. На следующей лекции мы опишем свойства гравитационных волн в зависимости от источника, который их произвел.

Лекция 11. Гравитационные волны от радиационно-доминированной стадии

На этом занятии будет продолжено изучение космологических гравитационных волн. На данный момент, в первую очередь, нас будут интересовать гравитационные волны от радиационно-доминированной стадии (см. рис. 10.1).

Ситуация здесь схожа с тем, что происходит в плоском-пространстве времени, с учетом масштабного фактора:

$$ds^2 = a^2(\tau) [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}]. \quad (11.1)$$

Масштабный фактор $a^2(\tau)$ для гравитационных волн от RD-стадии ведет себя в зависимости от конформного времени как

$$a(\tau) \sim \tau \sim \sqrt{t}. \quad (11.2)$$

Нас интересуют гравитационные волны $h_{\mu\nu}$, которые являются возмущением над метрикой плоского пространства. Они ассоциированы с поперечными, бесследовыми компонентами метрики $h_{ij}^{TT} \in h_{\mu\nu}$.

Гравитационные волны от RD-эпохи в отсутствие источника

Предположим, что источник гравитационных волн отсутствует $T_{\mu\nu}^{GW} = 0$. В плоском пространстве-времени уравнение гравитационных волн (здесь и далее предполагается, что мы работаем в бесследовой поперечной калибровке):

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} h_{ij} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} h_{ij} = 0 \quad (11.3)$$

или

$$\square h_{ij} = 0. \quad (11.4)$$

В нашем случае, надо учесть наличие масштабного фактора и его зависимость от времени.

Уравнение Эйнштейна:

$$\bar{G}^\mu_\nu = 8\pi G_N \bar{T}^\mu_\nu, \quad (11.5)$$

где тензор Эйнштейна $G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R$.

Рассмотрим возмущение уравнения Эйнштейна в отсутствие источников

$$\delta G^\mu_\nu = \cancel{8\pi G_N} \delta T^\mu_\nu \rightarrow 0 \quad (11.6)$$

и можно показать, что возмущение за счет поперечных компонент метрики

$$\delta G_j^i = \frac{1}{2a^2} \left[(h_{ij}^{TT})'' + 2\frac{a'}{a} (h_{ij}^{TT})' - \vec{\nabla}^2 h_{ij}^{TT} \right] = 0 \quad (11.7)$$

Из последнего уравнения непосредственно следует уравнение для распространения гравитационных волн в пустоте (во Вселенной Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера FLRW в отсутствие источников):

$$(h_{ij})'' + 2\frac{a'}{a} (h_{ij})' - \vec{\nabla}^2 h_{ij} = 0. \quad (11.8)$$

Подобного рода уравнения в космологии (особенно для безмассовых полей) решаются переходом от h_{ij} к \hat{h}_{ij} :

$$h_{ij} = \frac{\hat{h}_{ij}}{a}. \quad (11.9)$$

Тогда уравнение (11.8) приводится к виду

$$\hat{h}_{ij}'' - \frac{a''}{a} \hat{h}_{ij} - \vec{\nabla}^2 \hat{h}_{ij} = 0 \quad (11.10)$$

Учитывая линейную зависимость a от конформного времени, $a'' = 0$. Тогда переопределенное поле удовлетворяет тому же уравнению, что и исходное поле в плоском пространстве-времени:

$$\hat{h}_{ij}'' - \vec{\nabla}^2 \hat{h}_{ij} = 0. \quad (11.11)$$

Решением этого уравнения являются плоские моды:

$$\hat{h}_{ij} \sim \cos(k\eta + \alpha), \quad (11.12)$$

а исходное поле

$$h_{ij} \sim \frac{\cos(k\eta + \alpha)}{a} \quad (11.13)$$

Таким образом, гравитационная волна ведет себя как плоская волна, амплитуда которой падает с масштабным фактором. Это утверждение применимо к любым безмассовым полям (тензорная структура поля h_{ij} не играет тут особой роли).

Плотность энергии таких гравитационных волн

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{\langle h'_{ij} h'_{ij} \rangle}{32\pi G_N a^2}. \quad (11.14)$$

Тогда для подгоризонтных мод $\frac{k}{a} \gg H$

$$\rho_{\text{gw}} \sim \frac{1}{a^4}. \quad (11.15)$$

Гравитационные волны от RD-эпохи с учетом источника

Усложним задачу, добавив в уравнение члены, которые отвечают источнику гравитационных волн

$$\frac{1}{2a^2} \left[(h_{ij})'' + 2\frac{a'}{a}h'_{ij} - \vec{\nabla}^2 h_{ij} \right] = 8\pi G_N \delta T^i_j \quad (11.16)$$

- 1) Чтобы источник порождал гравитационные волны, у него должна быть бесследовая поперечная компонента

$$\delta T^i_j \rightarrow (\delta T^i_j)^{TT} \quad (11.17)$$

В космологии у большей части источников компонента $(\delta T^i_j)^{TT} \approx 0$.

В космологии в качестве источников в основном рассматриваются объекты, удовлетворяющие уравнению состояния идеальной жидкости:

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u_{\nu} + P\delta^{\mu}_{\nu}. \quad (11.18)$$

Тогда для пространственных компонент

$$T^i_j = (\rho + P)u^i u_j + P\delta^i_j. \quad (11.19)$$

В космологии часто выполнено линейное приближение, в котором все скорости малы, и член квадратичный по скоростям можно не рассматривать. И тогда в линеаризованной теории остается только

$$\delta T^i_j = \delta P \delta^i_j, \quad (11.20)$$

а у такой структуры, действительно, нет поперечных бесследовых компонент, которые нужны для производства гравитационных волн.

Таким образом, условие для производства гравитационных волн источниками:

$$\boxed{\delta(T^i_j)^{TT} \neq 0}. \quad (11.21)$$

Далее, будем предполагать выполнение этого необходимого условия генерации гравитационных волн.

2) Разложение по спиральностям

Все возмущения метрики раскладываются как

$$h_{00} = 2\Psi \quad (11.22)$$

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma \quad (11.23)$$

$$h_{ij} = -2\Phi \delta_{ij} + \dots + h_{ij}^{TT}. \quad (11.24)$$

В рамках обычной космологии рассматривается ситуация, когда источник имеют только скалярные флуктуации, в то время, как тензорные флуктуации ведут себя как возмущения без источника, которые свободно распространяются в расширяющейся Вселенной.

В линеаризованной гравитации, аналогичное разложение по спиральностям можно сделать для тензора энергии-импульса:

$$\delta T_0^0 = \delta \rho \quad (11.25)$$

$$\delta T_j^i = \delta P \delta_j^i + (\delta T_j^i)^{TT} \quad (11.26)$$

Тогда только скалярные компоненты ТЭИ приводят к скалярным возмущениям метрики, и только $(\delta T_j^i)^{TT}$ -компоненты приводят к генерации гравитационных волн. Иначе говоря, рассматривая гравитационные волны, можно не учитывать все вклады тензора энергии импульса, помимо поперечной бесследовой. Таким образом, уравнения Эйнштейна сводятся к

$$\frac{1}{2a^2} \left[(h_{ij})'' + 2\frac{a'}{a} h'_{ij} - \vec{\nabla}^2 h_{ij} \right] = 8\pi G_N (\delta T_j^i)^{TT} \quad (11.27)$$

Это линейное уравнение с источником, решение которого не слишком трудное. Перепишем его в другой форме

$$h''_{ij} + 2\frac{a'}{a} h'_{ij} - \vec{\nabla}^2 h_{ij} = 16\pi G_N a^2 \underbrace{\Pi_{ij}}_{\equiv (\delta T_j^i)^{TT}} \quad (11.28)$$

Перейдем к Фурье-представлению

$$h_{ij}(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\tau e^{-i\vec{k}\vec{x}} h_{ij}(\vec{x}, \tau) \quad (11.29)$$

$$\Pi_{ij}(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\tau e^{-i\vec{k}\vec{x}} \Pi_{ij}(\vec{x}, \tau) \quad (11.30)$$

Кроме того, разобьем h_{ij} на 2 поляризации:

$$h_{ij}(\vec{k}, \tau) = \sum_{A=+, \times} e_{ij}^A(\vec{k}) h_A(\vec{k}, \tau) \quad (11.31)$$

Такое же разложение можно написать для Π_{ij} . Т.к. поляризации ортогональны, то исходное выражение будет независимо удовлетворяться для каждой из поляризаций:

$$h''_A + 2\frac{a'}{a} h'_A + k^2 h_A = 16\pi G_N a^2 \Pi_A. \quad (11.32)$$

Введем поле \hat{h}_A :

$$h_A = \frac{\hat{h}_A}{a}, \quad (11.33)$$

тогда

$$\hat{h}_A'' + k^2 \hat{h}_A = 16\pi G_N a^3 \Pi_A \quad (11.34)$$

и тогда решение

$$h_A(\vec{k}, \tau) = \frac{16\pi G_N}{a(\tau) \times k} \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau' a^3(\tau') \sin k(\tau - \tau') \times \Pi_A(\vec{k}, \tau'), \quad (11.35)$$

а начальные условия

$$h_A(\tau_1) = h_A'(\tau_1) = 0. \quad (11.36)$$

Также можно учесть, что в физически оправданном случае, источник имеет не только начальное время «включения», но и финальное время действия, и тогда $\tau \rightarrow \tau_f$.

Мы наблюдаем гравитационные волны на временах $\tau \gg \tau_f$. Плотность энергии гравитационных волн (в координатном представлении):

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{1}{32\pi G_N a^2} \langle h'_{ij} h'_{ij} \rangle. \quad (11.37)$$

Примем предположения из космологии:

- 1) Предположение статистической однородности — предполагается, что генерация гравитационных волн в разных местах Вселенной происходит одинаковым образом.
- 2) Предположение статистической изотропии — в разных направлениях производство гравитационных волн происходит одинаковым образом.
- 3) Предположение о неполяризованности источника (это справедливо для большинства объектов в космологии).

Все эти три свойства можно объединить в одну простую формулу:

$$\langle \Pi_A(\vec{k}, \tau') \Pi_{A'}(\vec{q}, \tau'') \rangle = \delta_{AA'} \delta(\vec{k} + \vec{q}) P(k, \tau', \tau''). \quad (11.38)$$

- Символ $\delta_{AA'}$ отвечает тому, что источник неполяризованный (две поляризации не пересекаются);
- Наличие функции $\delta(\vec{k} + \vec{q})$ является отражением пространственной однородности;
- Пространственная изотропия отвечает тому факту, что результатом действия коррелятора является величина, пропорциональная спектру мощности $P(k, \tau', \tau'')$, зависящему только от абсолютной величины вектора \vec{k} .

Как δ -функция связана со статистической изотропией

Пусть $f(\vec{x})$ — какая-то функция. Свойство статистической изотропии заключается в выполнении свойства:

$$\langle f(\vec{x})f(\vec{y}) \rangle = \langle f(\vec{x} - \vec{y})f(0) \rangle. \quad (11.39)$$

То есть, смещение векторов на одно и то же значение не меняет значения коррелятора. Возьмем фурье-образ этой величины :

$$I = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{x}d\vec{y}e^{-i\vec{k}\vec{x}-i\vec{q}\vec{y}} \langle f(\vec{x})f(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{x}d\vec{y}e^{-i\vec{k}\vec{x}-i\vec{q}\vec{y}} \langle f(\vec{x} - \vec{y})f(0) \rangle \quad (11.40)$$

Произведем замену $\vec{x} \rightarrow \vec{z} \equiv \vec{x} - \vec{y}$, $d\vec{x} = d(\vec{x} - \vec{y})$. Тогда правая часть равенства:

$$I = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{y}e^{-i\vec{q}\vec{y}-i\vec{k}\vec{z}} \int d(\vec{z})e^{-i\vec{k}\vec{z}} \langle f(\vec{z})f(0) \rangle. \quad (11.41)$$

После этого, можем взять интеграл по $d\vec{y}$ и получить δ -функцию:

$$I = \delta(\vec{k} + \vec{q}) \times \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{z}e^{-i\vec{k}\vec{z}} \langle f(\vec{z})f(0) \rangle. \quad (11.42)$$

Плотность энергии гравитационных волн

Выражение (11.37), с учетом космологических предположений, которые представлены выше, преобразуется к виду (при временах $\tau \gg \tau_f$):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{gw}} &= \frac{8\pi G_N}{a^4(\tau)} \int d\vec{k}d\vec{q} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' d\tau'' \times \\ &\times \left(\delta_{AA'} \delta(\vec{k} + \vec{q}) P(k, \tau', \tau'') \right) e^{i(\vec{k} + \vec{q})\vec{x}} a^3(\tau') a^3(\tau'') e_{ij}^A(\vec{k}) e_{ij}^{A'}(\vec{q}) \times \\ &\times \left[\cos k(\tau - \tau') \cos k(\tau - \tau'') + \frac{\sin k(\tau - \tau') \sin k(\tau - \tau'')}{k^2 \tau^2} - \frac{\sin k(2\tau - \tau' - \tau'')}{k\tau} \right]. \end{aligned} \quad (11.43)$$

После интегрирования по δ -функциям и суммирования по поляризациям:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{gw}} &= \frac{32\pi G_N}{a^4(\tau)} \int d\vec{k} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' d\tau'' a^3(\tau') a^3(\tau'') P(k, \tau', \tau'') \times \\ &\times \left[\cos k(\tau - \tau') \cos k(\tau - \tau'') + \frac{\sin k(\tau - \tau') \sin k(\tau - \tau'')}{k^2 \tau^2} - \frac{\sin k(2\tau - \tau' - \tau'')}{k\tau} \right]. \end{aligned} \quad (11.44)$$

С очень хорошей степенью точности выполняется приближение «подгоризонтного режима» $k\tau \gg 1$ (в силу того, что время наблюдения τ порядка возраста Вселенной). Кроме того, произведение косинусов можно преобразовать как

$$\cos k(\tau - \tau') \cos k(\tau - \tau'') = \frac{1}{2} \left(\cos(2k\tau - k\tau' - k\tau'') + \cos(k(\tau'' - \tau)) \right). \quad (11.45)$$

Выражение для плотности энергии:

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{16\pi G_N}{a^4(\tau)} \int d\vec{k} \iint_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' d\tau'' a^3(\tau') a^3(\tau'') P(k, \tau', \tau'') \times \cos [k(\tau'' - \tau')]. \quad (11.46)$$

Учитывая изотропию пространства-времени, $d\vec{k} \rightarrow 4\pi dk k^2$:

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{64\pi^2 G_N}{a^4(\tau)} \int dk k^2 \iint_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' d\tau'' a^3(\tau') a^3(\tau'') P(k, \tau', \tau'') \cos [k(\tau'' - \tau')]. \quad (11.47)$$

Обычно в экспериментах измеряют плотность энергии в конкретном частотном диапазоне — измеряют величину $\frac{d\rho_{\text{gw}}}{d\ln k}$. Тогда

$$\frac{d\rho_{\text{gw}}}{d\ln k} = \frac{64\pi^2 G_N}{a^4(\tau)} k^3 \times \iint_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' d\tau'' a^3(\tau') a^3(\tau'') \cos [k(\tau'' - \tau')] P(k, \tau', \tau''). \quad (11.48)$$

И задача сводится к получению спектра мощности (коррелятора) $P(k, \tau', \tau'')$.

Спектр гравитационных волн в пределе маленьких k

Рассмотрим случай $k\tau_f \ll 1$, то есть в момент окончания действия источника τ_f все моды k были подгоризонтными. Тогда косинус в формуле (11.48) обращается в единицу, и вся зависимость от частоты содержится в множителе

$$d \frac{\rho_{\text{gw}}}{d\ln k} \sim k^3 \cdot P(k, \tau', \tau''). \quad (11.49)$$

Утв. В пределе $k \rightarrow 0$ величина

$$P(k, \tau', \tau'') \Big|_{k \rightarrow 0} \rightarrow \text{const}, \quad (11.50)$$

и спектр при низких частотах ведет себя как $f(k) \sim k^3$. Степень 3 обязана своим происхождением числу пространственных координат.

Лекция 12. Гравитационные волны от фазового перехода 1 рода

Неоднородное скалярное поле как источник гравитационных волн

В прошлый раз обсуждались общие свойства гравитационных волн, которые по-лучаются в ранней Вселенной с общим тензором Энергии-Импульса:

$$h''_{ij} + 2\frac{a'}{a}h'_{ij} - \partial_x^2 h_{ij} = 16\pi G_N a^2 (T_{ij})^{TT}. \quad (12.1)$$

Мы пришли к выводу, что если есть бесследовые поперечные компоненты ТЭИ в ранней Вселенной, то можно сгенерировать гравитационные волны. Это достаточно сильное ограничение на источники волн в различных теориях. Об одном из источников гравитационных волн мы поговорим на этой лекции.

Обычно, в рамках классической космологии, раннюю Вселенную рассматривают как набор частиц, и сама Вселенная считается однородной. Однако в этой ситуации сгенерировать гравитационные волны не получится.

В то же время, рассматриваются гипотетические ситуации, когда во Вселенной имеются неоднородности. Часто, в качестве источника гравитационных волн предполагают неоднородное распределение скалярного поля. Тензор Энергии-Импульса скалярного поля имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi)^2 - V(\varphi) \right), \quad (12.2)$$

где $V(\varphi)$ — потенциал скалярного поля. Пространственная часть этого тензора:

$$T_{ij} = \partial_i \varphi \partial_j \varphi. \quad (12.3)$$

Замечание: Конечно, скалярное поле — это не единственный предполагаемый источник гравитационных волн. Одной из популярных гипотез является гипотеза о том, что гравитационные волны генерируются первичными магнитными полями. В этом случае,

$$T_{ij} \sim B_i B_j \quad (12.4)$$

Такие неоднородные распределения скалярного поля могут существовать, если во Вселенной имели место **фазовые переходы**

Фазовые переходы в ранней Вселенной

В первую очередь, когда говорят о фазовых переходах в ранней Вселенной, имеют в виду *электрослабые фазовые переходы* и *КХД фазовые переходы*.

Замечание: В рамках современной Стандартной модели, таких переходов не существует.

Рассмотрим потенциал поля Хиггса в вакууме:

$$V_{\text{Higgs}}^{\text{vac}} = \frac{\lambda}{4}\phi^4 - \frac{\lambda}{2}v^2\phi^2, \quad (12.5)$$

то есть поле Хиггса — поле, потенциал которого имеет вакуумное значение v , которое соответствует вакуумному значению этого скалярного поля.

Однако, на самом деле, мы «живем в плазме», то есть во Вселенной, у которой есть своя температура T . Поэтому потенциал поля Хиггса несколько модифицируется и имеет в общем виде форму:

$$V_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2}M^2(T)\phi^2 - \frac{1}{3}\delta(T)\phi^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (12.6)$$

где за счет взаимодействия с плазмой появляются *термальные поправки*

$$M^2(T) = \gamma(T^2 - T_0^2) \quad (12.7)$$

$$\delta(T) = A \times T. \quad (12.8)$$

Если положить $T = 0$, то потенциал Хиггса принимает стандартную форму.

Чтобы понять, где возникают фазовые переходы, надо посмотреть на эволюцию этого потенциала с температурой Вселенной. Температура Вселенной падает с масштабным фактором. Тогда, в пределе высоких температур потенциал принимает форму, представленную на рис. (12.1), соответствующую восстановленной симметрии, т.к. слагаемое $\sim T_0$ пренебрежимо мало по сравнению с другими.

По мере уменьшения температуры, потенциал может модифицироваться, причем если изначально у потенциала был только один минимум, то со временем может появиться второй (см. рис. 12.1). Второй минимум может стать *истинным минимумом* — стать ниже изначального. В итоге, мы приходим к обычной картине *спонтанного нарушения симметрии* при $T = 0$. Такая картинка соответствует **фазовому переходу первого рода**, т.к. фазовые переходы, которые происходят путем подбарьерного туннелирования, чаще всего являются фазовыми переходами первого рода (*FOPTs*). (См. рис. 12.2)

Замечание: Фазовый переход второго рода был бы в ситуации, когда переход в истинный минимум происходит из максимума потенциала.

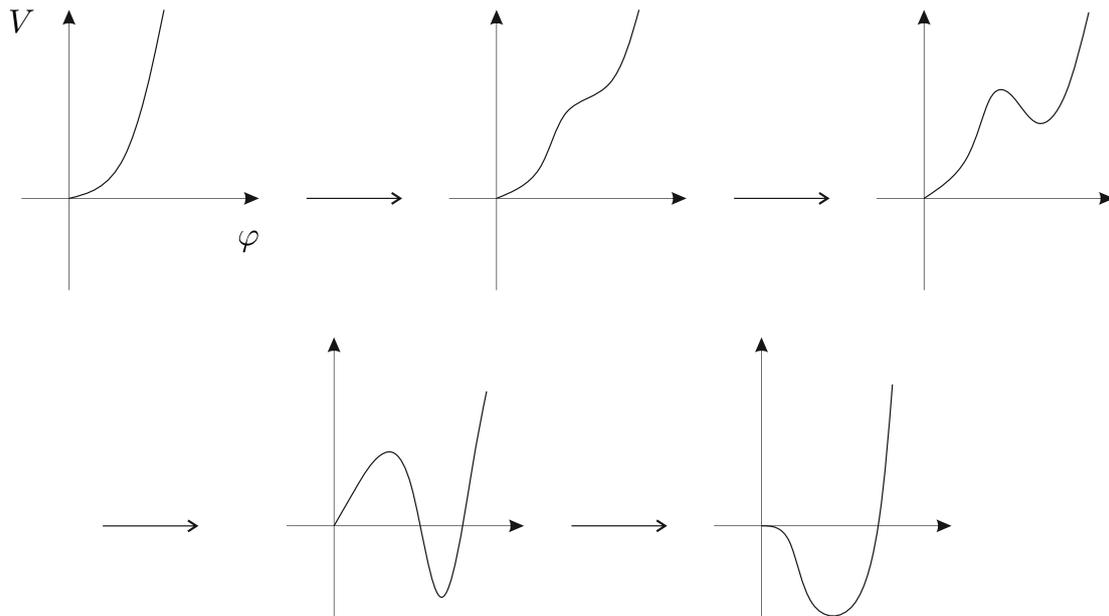


Рис. 12.1. Изменение потенциала скалярного поля с понижением температуры

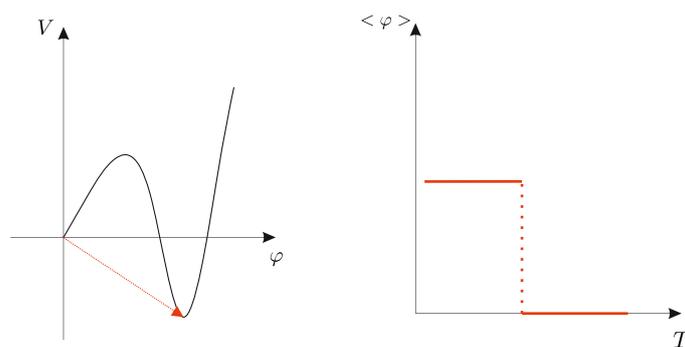


Рис. 12.2. Фазовый переход первого рода для потенциала и полей

Таким образом, в процессе понижения температуры, истинный минимум ($V = 0$, $\varphi = 0$ на рис. 12.1), в котором «сидит» система, становится ложным. Какое-то время система переохлаждается, находясь в ложном минимуме, и в какой-то момент условия во Вселенной становятся возможными для того, чтобы произошло образование «пузырей истинного вакуума».

Фазовый переход, с точки зрения эволюции поля можно изобразить так, как показано на рисунке (12.2). При больших температурах (ситуация с восстановленной симметрией) поле в среднем нулевое, а при уменьшении температуры, происходит скачок.

Замечание: Для фазовых переходов второго рода скачка не происходит, а происходит плавное преобразование поля от нуля до ненулевого значения. Разрыв терпит

производная.

Фазовый переход первого рода, подобно тому, как в процессе кипения жидкости образуются пузырьки, происходит с образованием пузырей истинного вакуума. Внутри этого пузыря $\langle \phi \rangle_{\text{true}} = v$, а вне (состояние ложного вакуума) — $\langle \phi \rangle_{\text{false}} = 0$. Энергию такого пузыря можно оценить как разность поверхностной и объемной энергий

$$E_{\text{bubble}} = 4\pi R^2 \mu - \frac{4\pi}{3} R^3 \Delta V, \quad (12.9)$$

где R — радиус пузыря, μ — натяжение, ΔV — разница в энергиях между ложным и истинным вакуумами. Такая оценка работает в тонкостенном приближении, когда ненулевые градиенты у скалярного поля ϕ присутствуют только в малой области возле стенок «пузыря».

Если радиус шарика очень маленький, доминирует член с натяжением, а объемный член подавлен. Тогда вакуумный шарик стремится сжаться. В случае же большего радиуса — шарик стремится расшириться.

Условие для критического радиуса шара — условие экстремума вакуумной энергии:

$$R_c : \frac{\partial E_{\text{bubble}}}{\partial R} = 8\pi\mu R_c - 4\pi R_c^2 \Delta V = 0, \quad (12.10)$$

откуда можно найти минимальный радиус шарика, при котором он начнет расширяться

$$R_c = \frac{2\mu}{\Delta V}. \quad (12.11)$$

Энергия критического шарика:

$$E_c = \frac{16\pi}{3} \frac{\mu^3}{\Delta V}. \quad (12.12)$$

Пузыри истинного вакуума — неоднородная конфигурация, которая необходима для генерации гравитационных волн. Такие пузыри при $R > R_c$ будут расширяться со скоростью близкой к скорости света, и заполнять области ложного вакуума. И наоборот при $R < R_c$ стенки пузыря схлопываются со скоростью $\sim c$.

Действие Намбу-Гото

В тонкостенном приближении эволюция вакуумного пузыря описывается действием Намбу-Гото

$$S = -\mu \int d^3 \zeta \sqrt{\gamma}, \quad (12.13)$$

где γ — индуцированная метрика на сфере:

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^b}. \quad (12.14)$$

Действие Намбу-Гото является обобщением действия для материальной точки:

$$S = -m \int ds \quad (12.15)$$

на случай бесконечно тонкой стенки.

Задача: Из действия Намбу-Гото найти уравнение эволюции радиуса шара при $\Delta V = 0$. Ответ:

$$\ddot{R} + \frac{2}{R} (1 - \dot{R}^2) = 0. \quad (12.16)$$

Решая это уравнение для произвольных начальных условий на \dot{R} и \ddot{R} , аттракторным решением будет:

$$|\dot{R}| = 1, \quad (12.17)$$

или, в случае схлопывающегося пузыря: $\dot{R} = -1$. Получаем, что стенка действительно движется со скоростью света.

В случае же, когда $\Delta V \neq 0$:

$$\ddot{R} + \frac{2}{R} (1 - \dot{R}^2) = \frac{\Delta V}{\mu} (1 - \dot{R}^2)^{3/2} \quad (12.18)$$

В этом случае решение остается в виде

$$|\dot{R}| = 1, \quad (12.19)$$

но при $R \ll 1$ второе слагаемое в правой части доминирует.

Замечание: Из уравнения (12.18) можно также оценить критический радиус, если пренебречь \dot{R} и поделить правую часть на левую.

При расширении пузырей истинного вакуума в какой-то момент происходит ситуация, когда их стенки перекрываются. Рассмотреть такую ситуацию аналитически пока нельзя. Однако именно процесс столкновения стенок пузырей ассоциируется с производством гравитационных волн.

Одна доменная стенка не может произвести гравитационные волны, т.к. ее квадрупольный момент равен нулю. Асимметрия, необходимая для производства гравитационных волн, возникает при комбинациях пузырей и столкновении нескольких стенок.

Для производства гравитационных волн, необходимо, чтобы радиус стенки стал:

$$R_c \sim \beta^{-1}, \quad (12.20)$$

где β^{-1} — длительность фазового перехода первого рода.

Длительность фазового перехода первого рода

Необходимо рассмотреть ситуацию, когда пузыри истинного вакуума сталкиваются друг с другом, в результате расширения их стенок. В виду того, что стенка расширяется со скоростью света, если длительность процесса β^{-1} , то радиус столкновения

$$R_* \approx v_{\text{wall}} \beta^{-1}. \quad (12.21)$$

Для того, чтобы найти длительность фазового перехода, необходимо найти несколько величин. Одна из которых — вероятность нуклеации пузыря (в единице объема):

$$\Gamma \approx A \times T^4 \times \exp \left[-\frac{S_b(T)}{T} \right] \quad (12.22)$$

- Экспонента, которая фигурирует в этом выражении — энергия пузыря

$$S_b[T] = 4\pi \int dr r^2 \left[\left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - \Delta V_{\text{eff}} \right], \quad (12.23)$$

индекс b от слова «*bounce*», что показывает, что мы смотрим действие на отскоковом решении Φ .

В квантовой механике у частицы возникает возможность протуннелировать сквозь классически недоступную область, и есть ненулевая вероятность оказаться в области, которая отделена потенциальным барьером. Для того, чтобы найти вероятность туннелирования в квантовой механике считают *действие в евклидовом времени на отскоковом решении*:

$$\Gamma \sim e^{-S_b}. \quad (12.24)$$

Процесс туннелирования в истинный минимум в температурной классической теории поля считается таким же образом.

Действие S_b можно посчитать, изучив динамику поля Φ .

- Параметр A близок к константе.

Для того, чтобы произошел фазовый переход первого рода, нужно, чтобы величина Γ была сравнима с характерным масштабом во Вселенной — например, с величиной

$$\boxed{\Gamma \approx H_*^4}, \quad (12.25)$$

где H_* — параметр Хаббла в момент фазового перехода.

Для конкретных температур и потенциалов, мы можем посчитать вероятность нуклеации. Изначально, когда разница между минимумами мала, эта вероятность

оказывается подавлена. Действительно, при малом ΔV критический радиус $R_c = \frac{2\mu}{\Delta V}$ оказывается большим и протуннелировать в соответствующее состояние оказывается сложно. Однако, когда разница ΔV становится большой, критический радиус уменьшается, и вероятность нуклеации Γ увеличивается.

Таким образом, если взять объем $V \approx H_*^{-3}$, тогда вероятность образования пузыря в единицу времени

$$\Gamma V \approx H_* . \quad (12.26)$$

И в единицах Хаббловского объема в среднем появляется **хотя бы один критический пузырь и фазовый переход первого рода оказывается возможным.**

Оценим, какая должна быть величина $\frac{S_b}{T}$ в момент выполнения этого условия (12.25).

$$\underbrace{A}_{\approx 1} \times T^4 \times \exp \left[-\frac{S_b[T]}{T} \right] \approx \left(\sqrt{\frac{\pi^2 g_*(T_*)}{90}} \frac{T_*^2}{M_{\text{Pl}}} \right)^4 , \quad (12.27)$$

откуда для характерных температур $T_* \sim 100 \text{ GeV}$:

$$\frac{S_b[T_*]}{T_*} \approx 4 \ln \frac{M_{\text{Pl}}}{T_*} \cdot \text{const} \approx 100 - 200 . \quad (12.28)$$

Кроме того, экспоненту можно разложить в ряд в предположении, что время фазового перехода достаточно мало:

$$\frac{S_b[T]}{T} \approx \frac{S_b[T_*]}{T_*} + (t - t_*) \frac{d}{dt} \frac{S_b[T]}{T} \Big|_{t_*} , \quad (12.29)$$

отсюда следует, что темп нуклеации при фазовом переходе можно записать в форме:

$$\Gamma = \Gamma_* \times e^{\beta(t-t_*)} , \quad (12.30)$$

где величина β отвечает за длительность фазового перехода. Можно оценить

$$\beta^{-1} \approx \Delta t_{\text{ФОРТ}} . \quad (12.31)$$

$$\beta = - \frac{d}{dt} \frac{S_b[T]}{T} \Big|_{t_*} . \quad (12.32)$$

Также, численными симуляциями можно показать, что

$$\frac{\beta}{H_*} \approx 10 - 1000 . \quad (12.33)$$

Другими словами, время фазового перехода первого рода оценивается как:

$$\Delta t_{\text{ФОРТ}} \approx (10^{-1} - 10^{-3}) H_*^{-1} . \quad (12.34)$$

Гравитационные волны от фазовых переходов первого рода

Рассмотрим ситуацию, когда стенки двух пузырей истинного вакуума «сталкиваются» друг с другом (см. рис. 12.3). Такой объект может изучать гравитационные волны.

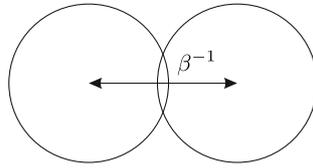


Рис. 12.3. Столкновение пузырей истинного вакуума

Характерный размер такого двойного объекта

$$R_* \approx \beta^{-1}. \quad (12.35)$$

Отсюда следует, что характерная частота гравитационных волн в момент излучения

$$f \approx \frac{\beta}{2\pi} f \approx \left(\frac{\beta}{H_*} \right) \cdot \frac{H_*}{2\pi}, \quad (12.36)$$

т.к. величина β определяет размер неоднородности. Из связи β с параметром Хаббла. Современная же частота будет определяться как

$$f_0 = \frac{\beta}{H_*} \times \frac{H_*}{2\pi} \times \frac{a_*}{a_0}, \quad (12.37)$$

и после вычислений, можно получить

$$f_{\text{gw}} \approx 10^{-6} \times \frac{\beta}{H_*} \times \left(\frac{T_*}{100 \text{ GeV}} \right) \text{ Hz}, \quad (12.38)$$

откуда видно, что в рамках расширенной Стандартной модели, в которой возможны электрослабые фазовые переходы, то характерная частота гравитационных волн от таких объектов

$$f_{\text{gw}} \sim 10^{-1} \text{ mHz}. \quad (12.39)$$

Если речь идет о фазовом переходе КХД — частоты будут порядка

$$f_{\text{gw}} \sim 10^{-9} \text{ Hz}. \quad (12.40)$$

Амплитуда гравитационных волн

$$h^2 \Omega_{\text{gw}}(f) \approx 167 \times 10^{-5} \times \left(\frac{H_*}{\beta} \right)^2 \times \alpha^2 \times v_\omega^3 \times \quad (12.41)$$

$$\times \begin{cases} f^3, & f \ll f_{\text{peak}} \\ \frac{1}{f}, & f \gg f_{\text{peak}} \end{cases} \quad (12.42)$$

где α — фактор, определяющийся разностью вакуумных энергий и плотностью радиации:

$$\alpha \equiv \frac{\Delta V}{\rho_{\text{rad}}}. \quad (12.43)$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ