ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. СЕМИНАРЫ

ВОЛКОВ
ВЛАДИМИР ТАРАСОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1.

Классификация интегральных уравнений

1) Уравнение Фредгольма 2-го рода неоднородное:

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(xs)\, y(s)\, ds + f(x) \quad (a \leqslant xs \leqslant b) \tag{1.1}$$

2) Уравнение Фредгольма 2-го рода однородное ($f = 0$):

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(xs)\, \varphi(s)\, ds \quad (a \leqslant xs \leqslant b) \tag{1.2}$$

3) Уравнение Вольтерра:

$$y(x) = \lambda \int_a^x k(xs)\, y(s)\, ds + f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \quad (a \leqslant s \leqslant x) \tag{1.3}$$

4) Уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b k(xs)\, y(s)\, ds = f(x) \quad (c \leqslant x \leqslant d) \quad (a \leqslant s \leqslant b) \tag{1.4}$$

Введем оператор для (1.2):

$$A_y = \int_a^b k(xs)\, y(s)\, ds$$

Таким образом, введя данный оператор, получаем следующие задачи:

Для (1.1): $y = \lambda A_y + f$

Для (1.2): $\varphi = \lambda A_\varphi$

Пространства. Свойства операторов

Определение 1.1. *Пространством $C[a;b]$ называется линейное нормированное пространство, состоящее из непрерывных функций на отрезке (a,b) и введена норма следующим образом:*

$$\|y\|_{C[a;b]} = \max_{[a,b]}(y(x))$$

Проверим выполнимость аксиом нормы:

1) $\|y\| \leqslant 0 \;\; \forall y \in N;\;\; \|y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \Theta$

2) $\|\lambda y\| = |\lambda| \cdot \|y\| \;\; \forall y \in N,\;\; \forall \lambda$

3) $\|y+z\| \geqslant \|y\| + \|z\| \;\; \forall y, z \in N$

Проверим сходимость числовой последовательности в пространстве $C[a;b]$:

$$y_n \to y_0 \in C[a;b] \Leftrightarrow \|y_n - y_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где

$$\|y_n - y_0\| \xrightarrow[C]{n\to\infty} 0 \;=\; \max_{[a;b]} |y_n(x) - y_0(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 1.2. *y_n является фундаментальной последовательностью в конкретном нормированном пространстве. Это означает, что:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \|y_m - y_n\| < \varepsilon$$

В данном пространстве любая фундаментальная последовательность обязательно сходится и, соответственно, это пространство является полным.

Определение 1.3. *Пространством h[a; b] называется линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции. Любой элемент этих функций тождественно равен 0.*

Скалярное произведение:

$$y, z \in h[a;b] \to (y,z) = \int_a^b y(x)z(x)dx$$

Обычно, такое скалярное произведение порождает следующую норму:

$$\|y\|_h = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx}$$

$$(y, z) \leqslant |(y, z)| \leqslant \sqrt{(y, y)}\sqrt{(z, z)} = \|y\|\|z\|$$

Проверим сходимость числовой последовательности в пространстве $h[a; b]$:

$$y_n \to y_0 \in h[a; b] \Leftrightarrow \|y_n - y_0\|_h \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где

$$\sqrt{\int\limits_a^b (y_n(x) - y_0(x))^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 1.4. *Пространством $C^{(1)}[a; b]$ называется линейное пространство, состоящее из непрерывных не дифференцированных функций на отрезке $(a : b)$ и введена норма следующим образом:*

$$\|y\|_{C^{(1)}} = \max_{[a;b]} |y(x)| + \max_{[a;b]} |y'(x)|$$

Определение 1.5. *Пространством $C^{(p)}[a; b]$ называется линейное пространство, состоящее из функций, имеющих производные до порядка p непрерывные на отрезке $[a; b]$. Норма введена следующим образом:*

$$\|y\|_{C^{(p)}} = \sum_0^p \max_{[a;b]} |y^{(p)}(x)|$$

Определение 1.6. *Оператор A называется линейным, когда:*

$$\forall y, z \in L \quad \forall \alpha, \beta \quad A(\alpha y + \beta z) = \alpha Ay + \beta Az$$

Операторы Фредгольма

Введем операторы для (1.1) и (1.2):

1) $A : h[a;b] \to h[a;b]$ (скалярное произведение)
2) $A : C[a;b] \to C[a;b]$ (полнота пространства)
3) $A : h[a;b] \to C[a;b]$
4) $A : C[a;b] \to h[a;b]$

Последовательности

При $y_n \in N$:

1) $y_n \to y_0 \in N: \quad \|y_n - y_0\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Если сходится последовательность элементов, то и сходится следующая последовательность элементов нормы: $\|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y_0\|$.

   Пример:
   $y_n = (-1)^n \overrightarrow{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{a} \quad |\overrightarrow{a}| \neq 0$
   $y_n = (-1)^n \overrightarrow{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{-a} \quad |\overrightarrow{a}| \neq 0$

   $\|y_n\| = |\overrightarrow{a}| \xrightarrow[n\to\infty]{} \overrightarrow{a}$

   Следовательно, последовательность норм сходится, а последовательность элементов не сходится.

2) y_n - ограниченная: $\exists M \quad \forall n \quad \|y_n\|_N \leqslant M$
3) y_n - неограниченная: $\forall M \quad \exists n \quad \|y_n\|_N > M$

4) y_n - бесконечно большая: $\|y_n\|_N \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

5) y_n - фундаментальная: критерий Коши

Определение 1.7. *Пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность пространства сходится в этом пространстве.*

Рассчитаем норму для $y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \in h[0;\pi]$:

$$\|y_n\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{\int\limits_0^\pi \frac{2}{\pi} \sin^2 nx\, dx} = 1$$

Теперь докажем, что из данной последовательности нельзя выводить ни одну сходящуюся последовательность:

$$\forall n \neq m \quad \|y_n - y_m\|^2_{h[0;\pi]} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi (\sin nx - \sin mx)^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} - 0 \right) = 2$$

Рассчитаем норму:

$$\|y_n - y_m\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{2}$$

Таким образом, эта последовательность не является фундаментальной в $h[0;\pi]$, хотя она ограниченная. Более того, из нее нельзя выделить ни одной сходящейся последовательности.

Определение 1.8. *Последовательность называется компактной, если из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся последовательность.*

Лекция 2. Уравнения с вырожденными ядрами. Нахождение собственных значений. Часть 1

Однородные и неоднородные уравнения

Пусть есть следующее уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds + f(x)$$

Соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,s)\varphi(s)ds \to \lambda_k \to \varphi$$

Однородное союзное уравнение:

$$\Psi(x) = \lambda \int_a^b k(s,x)\Psi(s)ds$$

Эти уравнения рассматриваются в трех ситуациях:

1)

$$k(x,s) = k(s,x)$$

Оператор Фредгольма записывается в следующем виде:

$$Ay = \int_a^b k(x,s)y(s)ds$$

Оператор Фредгольма является вполне непрерывным и самосопряженным. За вполне непрерывность отвечает непрерывность ядра, а за само-сопряженность отвечает то, что ядро симметрическое. В этом случае доказано существование конечной и бесконечной последовательности характеристических чисел:

$$(|\lambda_k| \underset{k\to\infty}{\to} \infty)$$

Ранг каждого характеристического числа конечный.

2) Ядро является вырожденным:

$$k(x,s) = \sum_{1}^{n} a_1(x) \cdot b_1 \times (s)$$

В этом случае функция считается непрерывной. Симметричность не требуется. Существует конечная последовательность характеристических чисел.

3)

$$k_0 = \max|k(x,s)| > 0 \quad a \leqslant x,s \leqslant c$$
$$|\lambda| < \frac{1}{k_o(b-a)}$$

Получается единственное решение при любой непрерывной функции $f(x)$.

Характеристическое число — это такой λ, при котором существует нетривиальное решение однородного уравнения. Соответствующие решения — это собственные функции.

Уравнения с вырожденными ядрами. Нахождение собственных значений

Пример 2.1. *Необходимо найти характеристические числа и собственные функции. Ядро симметрическое и вырожденное. Таким образом, характеристических чисел должны быть максимум 2.*

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xs + x^2 s^2)\varphi(s)ds =$$

$$= \lambda x \int_{-1}^{1} s\varphi(s)ds + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} s^2\varphi(s)ds = \lambda x C_1 + \lambda x^2 C_2$$

$$C_1^2 + C_2^2 \neq 0$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1} s \cdot \varphi(s)ds = \int_{-1}^{1} s(\lambda s C_1 + \lambda s^2 C_2)ds = \frac{2}{3}\lambda C_1 + 0 \cdot C_2$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} s^2\varphi(s)ds = \int_{-1}^{1} s^2(\lambda s C_1 + \lambda s^2 C_2)ds = 0 \cdot C_1 + \frac{2}{5}\lambda C_2$$

$$\begin{cases} C_1\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)+0\cdot C_2=0 \\ C_1\cdot 0+C_2\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=0 \end{cases}$$

$$\left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)=0$$

$$\lambda_1=\frac{3}{2}\to C_1-\forall,\ C_2=0_1\to\varphi_1(x)=Cx\quad(C\neq 0)$$

$$\lambda_2=\frac{5}{2}\to C_1=0,\ C_2-\forall\ to\varphi_2(x)=Cx^2$$

Пример 2.2. *Необходимо получить собственные значения. Ядро симметрическое.*

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^\pi \sin(x+s)\varpi(s)ds=$$

$$=\lambda\sin x\cdot\int\limits_0^\pi\cos s\cdot\varphi(s)ds+\lambda\cos x\int\limits_0^\pi\sin s\cdot\varphi(s)ds=$$

$$=\lambda C_1\sin x+\lambda C_2\cos x$$

$$C_1=\int\limits_0^\pi\cos s\cdot\varphi(s)ds=\int\limits_0^\pi\cos s(\lambda C_1\sin s+\lambda C_2\cos s)ds=$$

$$=0\cdot C_1+\lambda C_2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$C_2=\int\limits_0^\pi\sin s\varphi(s)ds=\int\limits_0^\pi\sin s(\lambda C_1\sin s+\lambda C_2\cos s)ds=$$

$$=\lambda C_1\cdot\frac{\pi}{2}+0\cdot C_2$$

Таким образом, система нахождения записывается следующим образом:

$$C_1^2+C_2^2\neq 0$$

$$\begin{cases} C_1-\lambda\frac{\pi}{2}C_2=0 \\ \lambda\frac{\pi}{2}C_1-C_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} \\ \frac{\lambda\pi}{2}-1 \end{Bmatrix}=-1+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2=0$$

Следовательно:

$$\lambda_1=\frac{2}{\pi}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \quad \to C_1 = C_2$$

$$\Big\{ C_1 + C_2 = 0 - C_1 - C_2 = 0 \quad \to C_2 = -C_1$$

Таким образом, нормированные собственные значения записываются следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}$$

Норма считается следующим образом:

$$||\varphi_i|| = 1$$

$$||\varphi_i||^2 = \int\limits_0^{\pi} \varphi^2 - i(x)dx = \pi$$

Пример 2.3. *Пусть ядро не симметрическое.*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - xs)\varphi(s)ds =$$

$$= \lambda x^2 \int\limits_{-1}^{1} \varphi(s)ds - \lambda x \int\limits_{-1}^{1} s\varphi(s)ds = \lambda C_1 x^2 - \lambda C_2 x$$

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(s)ds = \frac{2}{3}\lambda C_1 + 0 \cdot C_2$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s\varphi(s)ds = 0 \cdot C_1 - \frac{2}{3}\lambda C_2$$

Получается следующая система:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) + 0 \times C_2 = 0 \\ C_1 \times 0 + \left(1 + \frac{2}{3}\lambda\right) C_2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, характеристические числа записываются в следующем виде:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \to C_1 - \forall,\ C_2 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} \to C_1 = 0,\ C_2 - \forall$$

Собственный функции имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \to \varphi_1(x) = x^2$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} \to \varphi_2(x) = x$$

Союзное уравнение записывается следующим образом:

$$\Psi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (s^2 - xs) \times \varphi(s)ds = \lambda \int\limits_{-1}^{1} s^2\psi(s)ds - \lambda x \int\limits_{-1}^{1} s\psi(s)ds = \lambda C_1 - \lambda C_2 x$$

Характеристические числа союзного уравнения следующие:

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} s^2\psi(s)ds = \frac{2}{3}\lambda C_1 + 0 \cdot C_2$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s\psi(s)ds = 0 \cdot C_1 - \frac{2}{3}\lambda C_2$$

Следовательно, получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) = 0 \\ C_2\left(1 + \frac{2}{3}\lambda\right) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \to \Psi_1(x) = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} \to \Psi_2(x) = x$$

Пример 2.4. *Пусть есть следующая функция:*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (3x - s)\varphi(s)ds = 3\lambda x \int\limits_{-1}^{1} \varphi(s)ds - \lambda \int\limits_{-1}^{1} s\varphi(s)ds = 3\lambda C_1 x - \lambda C_2$$

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(s)ds = \int\limits_{-1}^{1} (3\lambda C_1 s - \lambda C_2)ds = -2\lambda C_2 + 0 \cdot C_1$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} s\varphi(s)ds = \int\limits_{-1}^{1} s(3\lambda C_1 s - \lambda C_2)ds = 2\lambda C_1 + 0 \cdot C_2$$

Следовательно, получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + 2\lambda C_2 = 0 \\ 2\lambda C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

Определителем является:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & -1 \end{Bmatrix} = -1 - 4\lambda^2 = 0$$

$$1 + 4\lambda^2 = 0$$

Решениями функции являются:

$$\lambda_1 = \frac{i}{2} \to \begin{cases} C_1 + iC_2 = 0 \\ iC_1C_2 = 0 \end{cases} \qquad C_1 = 1 \quad iC_2 = i$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{2} \to \begin{cases} C_1 - iC_2 = 0 \\ -iC_1 - C_2 = 0 \end{cases} \qquad C_1 = 1 \quad iC_2 = -i$$

Таким образом, собственные функции записываются следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \frac{3}{2}ix + \frac{1}{2} = C(3ix + 1)$$

$$\varphi_2(x) = C(-3ix + 1)$$

Пример 2.5. *Рассматриваются неоднородные уравнения:*

$$y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - sx)y(s)ds + x^2 =$$

$$= \lambda x^2 \int\limits_{-1}^{1} y(s)ds - \lambda x \int\limits_{-1}^{1} sy(s)ds + x^2 = x^2 + \lambda C_1 x^2 - \lambda C_2 x$$

$$C_1 = \int_{-1}^{1} y(s)ds = \int_{-1}^{1} (s^2 + \lambda C_1 s^2 - \lambda C_2 s)ds = \frac{2}{3}\lambda C_1 + \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} sy(s)ds = \int_{-1}^{1} s(s^2 + \lambda C_1 s^2 - \lambda C_2 s)ds = -\frac{2}{3}\lambda C_2$$

Таким образом, получается неоднородная система:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) = \frac{2}{3} \\ C_2\left(1 + \frac{2}{3}\lambda\right) = 0 \end{cases}$$

При первой ситуации если не характеристические числа:

$$\lambda \neq \frac{3}{2};\ \lambda \neq -\frac{3}{2} \to C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}\lambda} = \frac{2}{3 - 2\lambda}$$

Следовательно, получается единственное решение:

$$y(x) = x^2 + \frac{2x^2}{3 - 2\lambda} \cdot \lambda$$

При второй ситуации решения нет:

$$\lambda = \frac{3}{2} (= \lambda_1)$$

При третьей ситуации получается следующее решение:

$$\lambda = -\frac{3}{2} \to C_2 = C - \forall, \quad C_1 = \frac{1}{3}$$

$$y(x) = Cx + x^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2 + Cx$$

Решение получается не единственным.

Пример 2.6. *Пусть есть следующая функция:*

$$y(x) = -2\int_{0}^{1} (x-1)y(s)ds + x - \frac{1}{2} =$$

$$= -2 \cdot (x-1)\int_{0}^{1} y(s)ds + x - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} - 2c(x-1)$$

$$c = \int_0^1 y(s)ds = \int_0^1 \left(s - \frac{1}{2} - 2C(s-1)\right) ds = -c + 2c = c \to c - \forall$$

Таким образом, решение записывается следующим образом:

$$y(x) = x - \frac{1}{2} + C(x-1)$$

Характеристические числа записываются следующим образом:

$$\Psi(x) = \lambda \int_0^1 (s-1)\psi(s)ds = \lambda C$$

$$C = \int_0^1 (s-1)\lambda C ds = -\frac{1}{2}\lambda C$$

$$C\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

Следовательно, собственная функция имеет следующий вид:

$$\Psi_1(x) = C(+0)$$

Проверяется ортогональность:

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) C dx = 0 \quad \forall C$$

Лекция 3. Уравнения с вырожденными ядрами. Нахождение собственных значений. Часть 2

Уравнения с вырожденными ядрами. Нахождение собственных значений

Пусть есть следующее уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)y(s)ds + 1 = \lambda Ay + f$$

Характеристические числа для этого уравнения записывается следующим образом:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)\varphi(s)ds \to \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{\pi} \leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}} \\ \lambda_2 = -\frac{2}{\pi} \leftrightarrow \varphi_2 = \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{pi}} \end{cases}$$

Необходимо решить это уравнение и построить резольвенту, пользуясь тем, что ядро симметрическое.

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} i \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$$

$$\lambda \neq \lambda_k$$

Решение, полученное с помощью резольвенты, записывается следующим образом:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)ds$$

Необходимо получить следующую формулу для резольвенты через повторные ядра:

$$R(x,s,\lambda) = k(x,s) \sum_2^{\infty} i \lambda^{m-1} k_m(x,s)$$

k_m — повторные ядра.

$$k_1(x,s) \equiv k(x,s)$$

$$k_m = \int_a^b k(x,t)k_{m-1}(t,s)dt$$

Необходимо решить эту задачу методом последовательных приближений. Построить следующую последовательность:

$$y_0 = f(x) \quad y_{n+1} = \lambda A y_n + f \quad y_n \to y(x)$$

Решение записывается в следующем виде:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} (\sin x \cos s + \cos x \sin s) y(s) ds + 1 =$$

$$= 1 + \lambda \sin x \int\limits_0^{\pi} \cos y(s) ds + \lambda \cos x \int\limits_0^{\pi} \sin s y(s) ds$$

$$y(x) = 1 + \lambda C_1 \sin x + \lambda C_2 \cos x$$

$$C_1 = \int\limits_0^{\pi} \cos s y(s) ds = \int\limits_0^{\pi} \cos s (1 + \lambda C_1 \sin s + \lambda C_2 \cos s) ds = \lambda C_2 \frac{\pi}{2}$$

$$C_2 = \int\limits_0^{\pi} \sin s y(s) ds = \int\limits_0^{\pi} \sin s (1 + \lambda C_1 \sin s + \lambda C_2 \cos s) ds = 2 + \lambda \frac{\pi}{2} C_1$$

Получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - \lambda \frac{\pi}{2} C_2 = 0 \\ -\lambda \frac{\pi}{2} C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$

Определителем является:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -\lambda \frac{\pi}{2} \\ -\lambda \frac{\pi}{2} & 1 \end{Bmatrix} \neq 0 \to \lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$$

$$C_1 = \frac{\lambda \pi}{1 - \left(\frac{\lambda \pi}{2}\right)^2}$$

$$C_2 = \frac{2}{1 - \left(\frac{\lambda \pi}{2}\right)^2}$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$y(x) = 1 + \lambda C_1 \sin x + \lambda C_2 \cos x = 1 + \lambda \frac{2 \cos x + \lambda \pi \sin x}{1 - \left(\frac{\lambda \pi}{2}\right)^2}$$

Резольвента для симметрического ядра строится следующим образом:

$$R(x,s,\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin s+\cos s)}{\frac{2}{\pi}-\lambda} - \frac{1}{\pi}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin s-\cos s)}{\frac{2}{\pi}+\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x+s)+\cos(x-s)}{\frac{2}{\pi}-\lambda} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x+s)-\cos(x-s)}{\frac{2}{\pi}+\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\frac{4}{\pi}\sin(x+s)+2\lambda\cos(x-s)}{\frac{4}{\pi^2}-\lambda^2} = \frac{\sin(x+s)+\frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2}$$

Следовательно, решение может быть получено в следующем виде:

$$y(x) = 1+\lambda\int\limits_0^\pi \frac{\sin(x+s)+\frac{\pi\lambda}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2}\cdot 1ds =$$

$$= 1+\lambda\frac{2\cos x+\pi\lambda\sin x}{1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2}$$

Случай малого λ

Рассматривается случай малого λ:

$$|\lambda|\cdot k_0(b-a) < 1$$

$$k_0 = \underset{0\leqslant x,s\leqslant\pi}{max}|\sin(x+s)| = 1$$

Условие, которое обеспечивает сходимость метода последовательных приближений, записывается в следующем виде:

$$|\lambda| < \frac{1}{\pi}$$

$$k_1(x,s) \equiv k(x,s) = \sin(x+s)$$

$$k_2(x,s) = \int\limits_0^\pi \sin(x+t)\cdot\sin(t+s)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (\cos(x-s)-\cos(2t+x+s))dt = \frac{\pi}{2}\cos(x-s)$$

$$k_3(x,s) = \int\limits_0^\pi \sin(x+t)\frac{\pi}{2}\cos(t-s)dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\pi}(\sin(2t+x-s)+\sin(x+s))dt = \frac{\pi^2}{4}\sin(x+s)$$

$$k_4 = \int\limits_0^{\pi}\sin(x+t)\frac{\pi^2}{4}\sin(t+s)dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\frac{\pi}{2}\cos(x-s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos(x-s)$$

$$k_5 = \int\limits_0^{\pi}\sin(x+t)\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos(t-s)dt =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{\pi}{2}\sin(x+s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sin(x+s)$$

Таким образом, резольвента записывается в следующем виде:

$$R(x,s,\lambda) = \sin(x+s)+\sum^{\infty}\lambda^{2l-1}k_{2l}+\sum^{\infty}\lambda^{2l}k_{2l+1} =$$

$$= \sin(x+s)+\lambda\frac{\pi}{2}\cos(x-s)\left(1+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4+\dots\right)+$$

$$+\lambda^2\frac{\pi^2}{4}\sin(x+s)\left(1+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4+\dots\right) =$$

$$= \sin(x+s)+\frac{\lambda\frac{\pi}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2\sin(x+s)}{1-\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2}$$

Ряд сходится при:

$$\left|\frac{\lambda\pi}{2}\right| < 1 \quad |\lambda| < \frac{2}{\pi}$$

Строится последовательность:

$$y_0 = f(x) = 1$$

$$y_1 = \lambda A y_0 + f = \lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x+s)\cdot 1ds+1 = 1+2\lambda\cos x$$

$$y_2 = \lambda A y_1 + f = \lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x+s)\cdot 2\lambda\cos s ds+1 = 1+2\lambda\sin x+\lambda^2\pi\sin x$$

$$y_3 = \lambda A y_2 + f = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)(1 + 2\lambda\cos s + \lambda^2\pi\sin s)ds =$$

$$= 1 + 2\lambda\cos x + \lambda^2\pi\sin x + \frac{\lambda^3\pi^2}{2}\cos x$$

$$y_4 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\left(1 + 2\lambda\cos s + \lambda^2\pi\sin s + \frac{\lambda^3\pi^2}{2}\cos s\right)ds + 1 =$$

$$= 1 + 2\lambda\cos x + \lambda^2\pi\sin x + \frac{\lambda^3\pi^2}{2}\cos x + \frac{\lambda^4\pi^3}{4}\sin x$$

$$y_n \overset{n\to\infty}{\to} 1 + 2\lambda\cos x\left(1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 + \ldots\right) +$$

$$+\lambda^2\pi\sin x\left(1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 + \ldots\right)$$

Пусть есть следующее уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_a^x k(x,s)y(s)ds + f(x) = \lambda By + f$$

$$a \leqslant x \leqslant b$$

$$a \leqslant s \leqslant x$$

Ядро непрерывное. Это уравнение имеет единственное решение при любом λ любой непрерывной функции $f(x)$. Соответственно, характеристических чисел нет. Используется метод последовательных приближений.

$$y_0 = f(x)$$

$$y_{n+1} = \lambda A y_1 + f$$

$$y_n \overset{n\to\infty}{\to} y(x)$$

Решение можно построить через повторные ядра.

$$k_1(x,s) = k(x,s)$$

$$k_m(x,s) = \int_s^x k(x,t)\cdot k_{m-1}(t,s)dt$$

Пусть есть следующее уравнение:

$$y(x) = \int\limits_0^x (s-x)y(s)ds + x$$

$$y(0) = 0$$

Используется метод последовательных приближений:

$$y_0 = x$$

$$y_1 = \int\limits_0^x (s-x)sds + x$$

$$y_2 = \int\limits_0^x (s-x)\cdot y_1(s)ds + x$$

Решение получается следующим образом:

$$y' = (x-x)\cdot y(x) - \int\limits_0^x y(s)ds + 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'' = -y$$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow y(x) = \sin x$$

Преобразование Лапласа свертки записывается в следующем виде:

$$g(x) = -x \rightarrow -\frac{1}{p^2}$$

Для образа получается следующее уравнение:

$$Y = -\frac{1}{p^2}\cdot Y + \frac{1}{p^2}$$

$$Y\left(1+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \rightarrow y(x) = \sin x$$

Лекция 4. Задача Штурма-Лиувилля

Задача Штурма-Лиувилля

Необходимо найти такие λ, при которых существует нетривиальное решение задачи и $y \neq 0$. Таким образом, λ имеет собственное значение.

$$L(y) + \lambda\rho(x)y \equiv \frac{d}{dx} = \left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad x \in (a;b)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{4.1}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0 \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

На функции наложены следующие условия:

$$p(x) > 0 \in C^{(1)}[a;b]$$

$$q(x) \geqslant 0 \in C[a;b]$$

$$\rho(x) > 0 \in C[a;b]$$

Частный случай этой общей задачи записывается следующим образом:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ \text{гр. усл} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x) \equiv 1 \\ q(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Самосопряженность оператора

Оператор $L(y)$ является самосопряженным на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих одному из условий (4.1), (4.2), (4.3). Необходимо доказать, что оператор $L(y)$ самосопряженный. Отсюда следует, что все собственные значения вещественные.

Доказательство.

Пусть есть следующие условия:

$$Ly \equiv y'' \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(a) - \gamma_1 y'(a) = 0 \\ y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(Ly, z) \stackrel{?}{=} (y, Lz)$$

$$(Ly, z) = \int_a^b y'' \cdot z dx = y'z\Big|_a^b - \int_a^b y'z' dx$$

$$y'z\Big|_a^b = -y'(b)\gamma_2 z'(b) - y'(a)\gamma_1 z'(a)$$

$$(y, Lz) = \int_a^b yz'' dx = z'y\Big|_a^b - \int_a^b y'z' dx$$

$$z'y\Big|_a^b = -z'(b)\gamma_2 y'(b) - z'(a)\gamma_1 y'(a)$$

Выражения совпадают. Таким образом, $L(y)$ самосопряженный оператор. ■

Не отрицательность собственных значений

Можно доказать, что собственные значения для (4.1) положительные. Собственные значения для кривой (4.3) тоже положительные , если константы больше 0. Собственные значения для кривой (4.2) не отрицательные, если $q = 0$. Необходимо доказать, что собственные значения для выше написанной задачи положительные.

$$Ly \equiv y'' \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(a) - \gamma_1 y'(a) = 0 \\ y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x) \equiv 1 \\ q(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Однако, необходимо добавить следующее условие:

$$\gamma_1, \gamma_2 > 0$$

Пусть λ — собственное значение, $y \neq 0$ — собственная функция.

$$\int_a^b y(x)dxy'' + \lambda y = 0$$

$$0 = \int_a^b (y'' + \lambda y) \cdot y dx = yy'\Big|_a^b - \lambda \int_a^b y^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{\gamma_2}y^2(b) - \frac{1}{\gamma_1}y^2(a) - \int_a^b y'^2 dx + \lambda \int_a^b y^2 dx$$

$$\lambda \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{\gamma_2}y^2(b) + \frac{1}{\gamma_1}y^2(a) + \int_a^b y'^2 dx$$

Таким образом, во всех ситуациях:

$$\lambda_{1,2},\ \beta_{1,2} > 0$$

Сведение к интегральному уравнению

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} y'' + \lambda(1+x^2)y = 0 \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Требуется свести задачи к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Сначала необходимо доказать, что $L(y)$ имеет нетривиальное решение.

$$y \equiv 0$$

Условия следующие:

$$p(x) > 0 \in C^{(1)}[a;b]$$

$$q(x) \geqslant 0 \in C[a;b]$$

$$\rho(x) > 0 \in C[a;b]$$

Следовательно:

$$L[y] = f(x)$$

Решение записывается следующим образом:

$$y(x)=\int\limits_a^b G(x,s)f(s)ds$$

Задача записывается следующим образом:

$$\begin{cases} L[y]=-\lambda\rho(x)y \\ \text{кр. усл}=0 \end{cases}$$

Эквивалентное уравнение записывается как:

$$\sqrt{\rho(s)}y=\lambda\int\limits_a^b -\sqrt{\rho(s)}G((x,s)\sqrt{\rho(s)}\sqrt{\rho(s)}\rho(s)\cdot y(s)ds$$

Таким образом, получается уравнение с ядром $K(x,s)$.

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

Эта задача эквивалентна следующему уравнению:

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

$$\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}y(x)$$

$$K(x,s)=-\sqrt{1+x^2}G(x,s)\sqrt{1+s^2}$$

Требуется построить функцию Грина, которая строится на операторе:

$$L(y)=y''$$

Сначала необходимо доказать, что однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

$$\begin{cases} y''=0\leftrightarrow y\equiv 0 \\ y(0)=0;\ y(1)=0 \end{cases}$$

$$G(x,s)=\begin{cases} \alpha y_1(x) & 0\leqslant x\leqslant s \\ \beta y_2(x) & s\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

Условие следующее:

$$y_1(x);\ y_1(0) = 0$$

$$y_2(x);\ y_2(1) = 0$$

Следовательно:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha x; & 0 \leqslant x \leqslant s \\ \beta(x-1); & s \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Условие непрерывности записывается следующим образом:

$$\beta(s-1) - \alpha s = 0$$

Скачок производной записывается следующим образом:

$$\beta - \alpha = \frac{1}{p(s)} = 1$$

Таким образом:

$$\beta = s$$

$$\alpha = s - 1$$

Следовательно, функция Грина имеет следующее выражение:

$$G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leqslant x \leqslant s \\ s(x-1), & s \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Вторая краевая задача

Пусть записаны следующие условие:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y''(0) = 0; \qquad y'(l) = 0 \end{cases}$$

Необходимо найти собственные значения и собственные функции. Сначала надо найти знак λ, так как существуют несколько решений этой задачи:

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x \quad \lambda > 0$$

$$y = C_1 x_1 e \quad \lambda = 0$$

Пусть λ — собственное значение, $y \equiv 0$ — собственная функция.

$$y'' + \lambda y = 0 \cdot y \int_a^b dx$$

$$0 = \int_a^b (y'' + \lambda y) \cdot y dx = y' \cdot y \Big|_a^b - \int_a^b y'^2 dx + \lambda \int_a^b y^2 dx = 0$$

$$\lambda \int_a^b y^2 dx = \int_a^b y'^2 dx \to \lambda \geqslant 0$$

При первой ситуации:

$$\lambda = 0$$

$$y'' = 0$$

$$y = C_2 x + C_2$$

$$y'(a) = 0$$

$$y'(b) = 0$$

$$C_1 = 0$$

Тогда, собственное значение и собственная функция записываются как:

$$\lambda_0 = 0$$

$$y_0 = 1 \quad (y_0(x) = C)$$

Квадрат нормы этой собственной функции записывается следующим образом:

$$||y_0||^2 = l$$

При второй ситуации:

$$\lambda > 0$$

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda} x + C_2 \cos\sqrt{\lambda} x$$

$$y' = C_1 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} x - C_2 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} x$$

$$\sqrt{\lambda} l = \pi n$$

Таким образом, собственные значения, собственная функция и квадрат нормы записываются в следующем виде:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

$$y_n = \cos\frac{\pi n}{l}x$$

$$||y_n||^2 = \int\limits_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}xdx =$$

Периодические граничные условия

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

Необходимо найти λ, при которых существуют тривиальные решения этой задачи.

$$\int\limits_0^{2\pi} (y'' + \lambda y)ydx$$

Пусть λ — собственное значение, $y \neq 0$ — собственная функция.

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} (y'' + \lambda y)ydx = y'y\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} y'^2dx + \lambda\int\limits_0^{2\pi} y^2dx \to$$

$$\to \lambda\int\limits_0^{2\pi} y^2dx = \int\limits_0^{2\pi} y'^2dx \to \lambda \geqslant 0$$

Необходимо найти собственные функции. При первой ситуации:

$$y = 0 \to y = C_1x + C_2$$

$$C_2 = C_1 \cdot 2\pi + C_2 \to C_1 = 0$$

$$C_1 = C_1$$

Собственная функция:

$$\lambda_0 = 0 \to y_0 = 1$$

Квадрат нормы:

$$||y_0||^2 = 2\pi$$

При второй ситуации:

$$\lambda > 0 \to y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

$$y' = C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$C_2 = C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\cos\sqrt{\lambda}2\pi$$

$$C_1 \sin\sqrt{\lambda}2\pi + C_2(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) = 0$$

Второе условие дает следующее:

$$C_1\sqrt{\lambda} = C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}2\pi - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}2\pi$$

$$C_1\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}2\pi$$

Таким образом:

$$\sin^2\sqrt{\lambda}2\pi + (\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1)^2 = 0$$

$$\cos\sqrt{\lambda}2\pi = 1$$

$$\sqrt{\lambda}2\pi = 2\pi n, \quad n \in Z$$

Собственные значения:

$$\lambda_n = n^2 \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Собственные функции:

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 + 0\cdot C_2 = 0 \\ 0\cdot C_1 + 0\cdot C_2 = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_n^1 = \sin n\ x$$

$$y_n^{(2)} = \cos n\ x$$

Квадрат нормы:

$$||y_n^{1,2}||^2 = \pi$$

Условия смешанного типа

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 \end{cases}$$

Необходимо доказать, что λ положительное. Пусть λ — собственное значение, $y \neq 0$ — собственная функция.

$$0 = \int\limits_0^l (y'' + \lambda y) \cdot y dx = y'y\Big|_0^l - \int\limits_0^l y'^2 dx + \lambda \int\limits_0^l y^2 dx$$

$$\lambda \int\limits_0^l y^2 dx = \int\limits_0^l y'^2 dx + y^2(l)$$

Общее решение записывается следующим образом:

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

Производные получаются следующие:

$$y' = C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$$

Собственная функция:

$$y(0) = 0 \to 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 0$$

$$C_1(\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) + C_2(\cos\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Определитель:

$$-(\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Таким образом, собственное значение:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda}$$

Лекция 5. Метод разделения переменных

Собственные значения смешанной задачи

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(l) + y'(l) = 0 \end{cases}$$

Было доказано, что $\lambda > 0$. И общее решение этой задачи записывается следующим образом:

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

Из условий было получено следующее выражение:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = -\sqrt{\lambda} \to \lambda_n$$

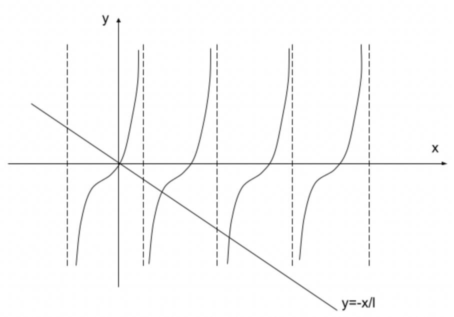

Рис. 5.1. Собственные значения смешанной задачи

$$n \to \infty \quad \sqrt{\lambda_n}l \sim \frac{\pi}{2}(2n-1)$$
$$\lambda_n \sim \left(\frac{\pi}{2l}(2n-\nu)\right)^2$$

$$C_2 = 0$$
$$C_1 \sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

Собственная функция записывается следующим образом:

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x$$

Нормы собственных функций

$$||y_n||^2 = \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1 - \cos 2\sqrt{\lambda} x) dx =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} x}{2\sqrt{\lambda_n} x}\Bigg|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n} l}{2\sqrt{\lambda_n}} =$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n} l}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \cos^2 \sqrt{\lambda_n} l = \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_n + 1}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 0 \\ C_1(\sin\sqrt{\lambda} l + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} l) + C_2(\cos\sqrt{\lambda} l - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases}$$

Стандартные типы граничных условий

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0; \qquad y'(l) = 0 \end{cases}$$

Доказывается, что $\lambda > 0$.

$$y = C_1 \sin\sqrt{\lambda} x + C_2 \cos\sqrt{\lambda} x$$

$$y(0) = 0 \to C_2 = 0$$

$$y'(l) = 0 \to C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} l = 0$$

Таким образом, собственное значение записывается следующим образом:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2l}(2n-1)\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Собственная функция записывается в следующем виде:

$$y_n = \sin\frac{\pi}{2l}(2n-1)x$$

Пример задачи для уравнения теплопроводности

Пусть есть следующая задача:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\sin t \sin x \\ u|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin 3x \end{cases} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Неизвестным является $u(x,t)$. Сначала необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} y_{xx} + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0; \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Решением задачи является следующее собственное значение:

$$\lambda_n = (2n-1)^2$$

Собственная функция:

$$y_n = \sin(2n-1)x$$

Квадрат формы:

$$||y_n||^2 = \frac{\pi}{4}$$

Собственные функции используют, чтобы раскладывать другие функции по этой системе. Если функция $f(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемым на отрезке и удовлетворяет граничным условиям, то она может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям.

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} i f_n y_n(x)$$

$$f_n = \frac{1}{||y_n||^2} \int\limits_{a=0}^{b=\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot y_n(x) \rho(x) dx$$

$$||y_n||^2 = \int\limits_{a=0}^{b=\frac{\pi}{2}} y_n^2(x) \rho(x) dx$$

Разделение переменных

Необходимо найти решение в следующем виде:

$$u(x,t) = \sum_1^\infty iT_n(t) \cdot y_n(x) = \sum_1^\infty iT_n(t) \cdot \sin(2n-1)x$$

$$f(x,t) = \sum_1^\infty if_n(t) y_n(x) = \sum_1^\infty if_n(t) \sin(2n-1)x$$

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \sin x \sin(2n-1)x dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} 2\sin t \int_0^{\frac{\pi}{2} \sin x \sin(2n-1)x dx} = \begin{cases} 0, & n = 2,3,4,\ldots \\ 2\sin t, & n = 1 \end{cases}$$

Система ортогональная.

$$h(x) = \sum_1^\infty ih_n y_n(x) = \sum_1^\infty ih_n \sin(2n-1)x$$

$$h_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin(2n-1)x dx = \begin{cases} 0, & n = 1,3,4,\ldots \\ 1, & n = 2 \end{cases}$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$\sum_1^\infty iT_n'(t) \cdot \sin(2n-1)x = \sum_1^\infty iT_n(t) y_n''(x) =$$

$$= -\sum_1^\infty iT_n(t)(2n-1)^2 \sin(2n-1)x + \sum_1^\infty if_n(t) + \sin(2n-1)x$$

$$y_n''(x) = -\lambda_n y_n$$

$$\sum_1^\infty iT_n(0) \sin(2n-1)x = \sum_1^\infty ih_n \sin(2n-1)x$$

$$\Big\{ T_n' + (2n-1)^2 T_n = f_n(t) T_n(0) = H_n$$

Таким образом, получается уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом.

$$n = 1 \to \begin{cases} T_1' + T_1 = 2\sin t \\ T_1(0) = 0 \end{cases}$$

Решение выглядит следующим образом:

$$T_1 = Ce^{-t} + \overline{T}_1$$

$$T_1 = e^{-t} + \sin t - \cos t$$

$$n = 2 \to \begin{cases} T_2' + 9T_2 = 0 \\ T_2(0) = 1 \end{cases}$$

Решение выглядит следующим образом:

$$T_2(t) = e^{-9t}$$

Общее решение записывается следующим образом:

$$T_n(t) \equiv 0 \quad \forall n = 3, 4, 5, \dots$$

$$T_n = Ce^{-(2n-1)^2 t}$$

Следовательно, решение задачи записывается в следующем виде:

$$u(x,t) = \left(e^{-t} + \sin t - \cos t\right)\sin x + e^{-9t}\sin 3x$$

Лекция 6. Вариации функционалов

Функционалы и вариации

Пусть задан функционал на множестве:

$$\forall y \in M \to V[y]$$

Происходит замена:

$$y \to y(x) + h(x)$$

Рассматривается следующее приращение:

$$\Delta V = V[y+h] - V[y] = L[y,h] + \overline{o}(||h||)$$

Вариация функционала обозначается следующим образом:

$$L[y,h] = dV$$

При втором определении вариации функционала рассматривается следующая функция:

$$\Phi(t) = V[y+th]$$

$$y(x) + h(x)\cdot t$$

$$\left.\frac{d}{dt}\Phi(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}V[y+th]\right|_{t=0} = \delta V$$

Пример вычисления вариации

Пусть есть следующий функционал:

$$V[y] = y^2(0) + \int\limits_0^1 (xy + y'^2)dx$$

$$y \in C[0;1] \quad x \in [0;1]$$

Необходимо посчитать вариацию. По первому определению вариацию можно посчитать следующим образом:

$$y \to y + h(x)$$

$$\Delta V = V[y+h] - V[y] = (y(0)+h(0))^2 - y^2(0) + \int\limits_0^1 (x(y+h) + (y'+h')^2)dx - \int\limits_0^1 (xy + y'^2)dx =$$

$$= 2y(0)\cdot h(0) + \int\limits_0^1 (xh(x) - 2y'h')dx + h^2(0) + \int\limits_0^1 h'^2 dx$$

Таким образом, линейная часть записывается следующим образом:

$$L[y,h] = dV = 2y(0)\cdot h(0) + \int\limits_0^1 (xh(x) - 2y'h')dx$$

По второму определению вариация записывается следующим образом:

$$\delta V = \frac{d}{dt} V[y+th]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}(y(0)+th(0))^2\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (x(y+th) + (y'+th')^2)dx\Big|_{t=0} =$$

$$= 2y(0)\cdot h(0) + \int\limits_0^1 (x\cdot h + 2y'h)$$

$$\frac{d}{dt}(y'+th')^2 = 2(y'+th')h'$$

Задача поиска экстремума

Функция $y_0(x)$ образует максимум функционала, если существует такая окрестность:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall y : ||y - y_0|| \leqslant \varepsilon$$

$$V[y] \geqslant V[y_0] \quad (min)$$

$$V[y] \leqslant V[y_0] \quad (max)$$

Рассматривается следующая задача:

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')dx$$

Заданы следующие условия:

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases}$$

Сильный экстремум записывается следующим образом:

$$||y-y_0|| = \max_{[a,b]}|y(x)-y_0(x)| \leqslant \varepsilon$$

Слабый экстремум записывается следующим образом:

$$||y-y_0|| = \max_{[a,b]}|y(x)-y_0(x)| + \max_{[a,b]}|y'(x)-y_0'(x)| \leqslant \varepsilon$$

Необходимы условия экстремума функционала. Если функция y_0 образует экстремум функционала, то существует вариация функционала в этой точке, которая равна 0.

$$\delta V[y_0,h] \to \delta V = 0$$

Уравнение Эйлера

h непрерывная дифференцируемая функция.

$$h(a) = h(b) = 0$$

$$\delta V = \frac{d}{dt}V[y+th(x)]\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b F(x,y+th,y'+th')dx\bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b F_y(x,y+th,y'+th')hdx + \int_a^b F_{y'}(x,y+th,y'+th')h'dx\bigg|_{t=0}$$

Второе слагаемое интегрируется по частям:

$$h(x)\cdot F_{y'}(x,y,y')\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\cdot hdx$$

Вариация принимает следующую форму:

$$\delta V = \int_a^b \left(F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right)h(x)dx = 0$$

Лемма 6.1. *Если:*

$$\int_a^b \varphi(x)h(x)dx = 0 \quad \forall h(x)$$

Тогда:

$$\varphi(x) \equiv 0$$

Теорема необходимых условий записывается следующим образом. Пусть функция $y(x)$ образует экстремум функционала и является дважды дифференцируемым на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (уравнение второго порядка):

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ y(a) = A; \qquad y(b) = B \end{cases}$$

Любое решение уравнения Эйлера называется экстремалем.

Пример поиска стационарных точек

Не каждая стационарная точка дает экстремум. Рассматривается следующая задача:

$$V[y] = \int\limits_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx$$

$$y(-1) = 1; \quad y(0) = 0$$

Необходимо написать уравнение Эйлера и найти стационарные точки.

$$12x + \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$\begin{cases} y'' = -6x \\ y(-1) = 1; \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Общее решение записывается следующим образом:

$$y = -x^3 + C_1x + C_2$$

Получается следующая стационарная точка:

$$\overline{y}(x) = -x^3$$

Необходимо посчитать приращение функционала, чтобы узнать, дает ли эта стационарная точка экстремум.

$$h(-1) = h(0) = 0$$

$$\Delta V = V[\overline{y} + h] - V[\overline{y}] =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (12x(\overline{y} + h) - (\overline{y}' + h')^2)dx - \int\limits_{-1}^{0} (12x\overline{y} - \overline{y}')^2dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{0}(12xh-2\overline{y}'h')dx-\int\limits_{-1}^{0}h'^2dx=\int\limits_{-1}^{1}(12x+2\overline{y}'')hdx-\int\limits_{-1}^{0}h'^2dx\leqslant 0$$

Таким образом, функция $\overline{y}(x)$ реализует сильный максимум.

Теорема о достаточном условии экстремума

Теорема 6.1. *Если функция $\overline{y}(x)$:*

- *есть стационарная точка этого функционала*
- *выполнены все условия теоремы необходимых условий экстремума функционала*
- *эта функция может быть включена в поле экстремалей (достаточное условие)*
- *функция Вейерштрасса сохраняет знак в окрестности стационарной точки (необходимое условие):*

$$E(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\begin{cases}\geqslant 0 & min\\ \leqslant 0 & max\end{cases}$$

То соответствующая стационарная точка реализует экстремум.

Пример определения экстремума

Функция Вейерштрасса для выше написанной задачи записывается следующим образом:

$$E(x,y,y',p)=(12xy-y'^2)-(12xy-p^2)-(y'-p)\cdot(-2p)=$$

$$=-y'^2+p^2+(y'-p)\cdot 2p=-y'^2-p^2+2py'=-(y'-p)^2\leqslant 0\quad\forall y,y'$$

Функцию Вейерштрасса можно упростить и получить следующее условие:

$$F_{y'y'}\begin{cases}\leqslant 0\\ \geqslant 0\end{cases}$$

Если сохраняется знак второй производной в сильной окрестности, то будет сильный экстремум, а если в слабой окрестности, то — слабый экстремум. Из условия Лежандра получается сильный максимум.

Пример с полным дифференциалом

Пусть есть следующая задача:

$$V[y] = \int_a^b (2xy + (x^2 + e^y) \cdot y')dx =$$

$$= \int_a^b 2xydx + (x^2 + e^y)dy = U(a,A) - U(b,B)$$

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$

Уравнение Эйлера для этой задачи записывается следующим образом:

$$2x + e^y \cdot y' - \frac{d}{dx}\left(x^2 + e^y\right) = 0$$

$$2x + e^y \cdot y' - 2x - e^y \cdot y' \equiv 0$$

Под интегралом стоит полный дифференциал.

Необходимо решить следующую задачу:

$$V[y] = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2}y'^2\right) dx$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = e$$

Пример с функцией Вейерштрасса

Пусть задана следующая задача:

$$V[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx$$

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

Уравнение Эйлера записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx} 2\left(\frac{x^3}{y'^3}\right) = 0$$

$$\frac{x^3}{y'^3} = C$$

$$y' = 2Cx$$

Решение уравнения Эйлера записывается следующим образом:

$$y = Cx^2 + C_1$$

Стационарная точка получается следующая:

$$\overline{y}(x) = x^2$$

Поле экстремалей получается следующее:

$$y = x^2 + C$$

$$F_{y'y'} = 6\frac{x^3}{y'^4}$$

$$F_{y'y'}\Big|_{\overline{y}=x^2} = 6\frac{x^3}{16x^4} > 0$$

Записывается функция Вейерштрасса:

$$E = \frac{x^3}{y'^2} - \frac{x^3}{p^2} + 2(y'-p)\cdot\frac{x^3}{p^3} =$$

$$= \frac{2x^3}{p^3y'^2}(y'-p)^2\cdot(2y'+p)$$

Таким образом, есть только слабый экстремум.

Задачи на зачет

Пример 6.1. *Необходимо найти экстремали:*

$$V[y] = \int\limits_0^a (6y'^2 - y'^4 + yy')dx$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$$

Пример 6.2. *Необходимо найти стационарную точку и экстремум, который стационарная точка реализует.*

$$V[y] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3)dx$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Лекция 7.

Задача на условный экстремум

Минимальная постановка для задачи на условный экстремум записывается следующим образом:

$$V[g,z]=\int_a^b F(x,y,y',z,z')dx \tag{7.1}$$

$$y(a)=y_1 \quad y(b)=y_2 \tag{7.2}$$

$$z(a)=z_1 \quad z(b)=z_2 \tag{7.3}$$

$$\Phi(x,y,y',z,z')=0 \quad (\Phi(x,y,z,)=0) \tag{7.4}$$

Среди всех пар функций необходимо найти те, которые удовлетворяют условиям (7.3), (7.4) и реализуют экстремум функционала (7.1).

Теорема 7.1. *Рассматривается теорема необходимой условии. Пусть пара функций y и z реализуют экстремум функционала* (7.1) *и удовлетворяют условиям* (7.3), (7.4). *Дополнительные условия следующие:*

$$\Phi_{z'}\neq 0 \quad (\Phi_{y'})\neq 0$$

$$\Phi_y\neq 0 \quad (\Phi_z\neq 0)$$

Если эти условия выполнены, то имеет место быть следующее. Существует такая функция $\lambda(x)$, которая удовлетворяет уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0\\ H_z-\frac{d}{dx}H_{z'}=0\end{cases}$$

$$H=F(x,y,y',z,z')+\lambda(x)\Phi(x,y,y',z,z')$$

Необходимо найти кривую на поверхности:

$$\Phi(x,y,z)=15x-7y+z-22=0$$

Пусть кривая соединяет две заданные точки с координатами:

$$A(1;-1;0) \quad B(2;1;-1)$$

Функционал этой задачи записывается следующим образом:

$$V[y,z] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}dx$$

Условия задачи следующие:

$$\begin{cases} y(1) = -1 \quad y(2) = 1 \\ z(1) = 0 \qquad z(2) = -1 \end{cases}$$

Записывается уравнение Эйлера:

$$H = \sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)(15x-7y+z-22)$$

$$\begin{cases} -7\lambda - \frac{d^2}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \\ \lambda - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \\ 15x-7y+z-22 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{7z'+y'}{\sqrt{1+y''+z'^2}} = 0$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$(7z'+y')^2 = C(1+y''+z^{'2)}$$

$$15-7y'+z' = 0$$

Следовательно, получается следующее:

$$15x-7y+z-22 = 0 \to 15-7y'+z' = 0 \quad z'' = 7y''$$

$$(y''+7z'')(1+y''+z'^2) - y''(y'^2+7y'z') - z''(y'z'+7z'^2)$$

$$y''(50+(7y'-z')^2) = 0 \to \begin{cases} y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$y = C_1x+C_2$$

$$z = i3x+C_4$$

$$y = 2x-3$$

$$z = 1 - x$$

Таким образом, получается следующий ответ

$$V[y,z] = \int_1^2 \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Задача

Пусть функционал имеет следующий вид:

$$V(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4^2}{2} - 2x^2 z^2 \right) dx$$

Условия записывается следующим образом:

$$z(0) = 0$$

$$z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$z' = 2y - 4xz$$

Уравнение Эйлера записывается в следующем виде:

$$H = \frac{4^2}{2} - 2x^2z^2 + \lambda(x)(z' - 2y - 4xz)$$

$$\begin{cases} y - 2\lambda = 0 \\ -4x^2z + 4\lambda x - \lambda' = 0 \to \lambda' = x(4\lambda - 4xz) \\ z' = 2y - 4xz \to z' = 4\lambda - 4xz \end{cases}$$

Таким образом, получается следующая конструкция:

$$\lambda' = xz'$$

$$z' = 4\lambda - 4xz$$

$$z'' = 4\lambda' - 4z - 4xz'$$

$$z'' + 4z = 0$$

$$z = \sin 2x$$

$$y = 2\lambda = \frac{1}{2}z' + 2xz$$

$$y(x) = \cos 2x + 2x \sin 2x$$

Задача

Пусть есть следующий функционал:

$$V[y] = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

Условия записываются в следующем виде:

$$y(a) = A; \quad y(b) = B$$

$$\int_a^b G(x,y,y')dx = l$$

Необходимо найти λ, который удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} = 0$$

$$H = F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')$$

Записывается классическая задача:

$$V(y) = \int_0^2 y dx$$

$$y(0) = 0; \quad y(2) = 0$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+y'^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Вспомогательная функция записывается в следующем виде:

$$H = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

Таким образом, записывается уравнение Эйлера:

$$1 - \lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{4+y'^2}} = 0$$

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - C_1$$

Происходит замена переменных:

$$y' = \operatorname{tg} t$$

Тогда:

$$\frac{1}{\cos y'^2} = \cos^2 t$$

$$\lambda \sin t = x - C_1$$

$$dy = \operatorname{tg} t dx$$

$$dy = \lambda \sin t dt$$

$$dx = \lambda \cos t dt$$

$$-\lambda \cos t = y - C_2$$

Происходит исключение t и получается следующее выражение:

$$(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2$$

$$C_1^2 + C_2^2 = \lambda^2$$

$$(2-C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2 \to C_1 = 1$$

$$y = C_2 + \sqrt{\lambda^2 - (x-1)^2}$$

$$y' = \frac{-(x-1)}{\sqrt{\lambda^2 - (x-1)^2}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{\lambda^2 - (x-1)^2}} dx = \int_0^2 \frac{\lambda dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x-1)^2}} =$$

$$= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^2}} = 2\lambda \arcsin \frac{1}{\lambda}$$

$$\arccos \frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{2\lambda\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \sin \frac{\pi}{2\lambda\sqrt{2}}$$

Таким образом, решением этой задачи является:

$$\lambda = \sqrt{2}$$

$$\lambda = -\sqrt{2}$$

$$C_2 = 1 \quad C_2 = -1$$

Задача

Пусть есть следующий функционал:

$$V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$\int_0^1 y dx = 1$$

$$\int_0^1 xy dx = 0$$

Вспомогательная функция записывается в следующем виде:

$$H = y'^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 xy$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\lambda_1 + \lambda_2 x - \frac{d}{dx} 2y' = 0 \to y'' = \frac{\lambda_2}{2} x + \frac{\lambda_1}{2}$$

$$y = \frac{\lambda_2}{12} x^3 + \frac{\lambda_1}{4} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$C_1 = -\frac{\lambda_2}{12} - \frac{\lambda_1}{4}$$

Задача

Пусть есть следующий функционал:

$$V[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$$

Условия записываются следующие:

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

$$\int_0^1 y^2 dx = 1$$

Вспомогательная функция записывается в следующем виде:

$$H = y^1 2 + x^2 + \lambda y^2$$

Соответственно, уравнение Эйлера:

$$2\lambda y - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \to \begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0; \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Происходит следующая замена:

$$\lambda = -\mu$$

Таким образом, получается следующее решение:

$$\mu_n = (\pi n)^2 \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$y_n = C \sin \pi n x$$

$$C = \pm 1$$

Экстремумами этой задачи являются собственные функции задачи Штурма-Луивилля.

Задача: подвижные границы

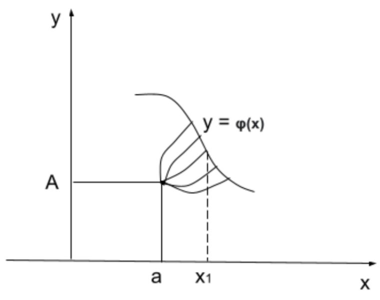

Рис. 7.1. Подвижные границы

Пусть есть функционал:

$$V[y] = \int\limits_a^{x_1 = B(y)} F(x, y, y')dx$$

$$y(a) = A; \quad y(x_1) = \varphi(x_1)$$

Необходимо найти экстремумы этой задачи. Теорема необходимых условий звучит следующим образом: пусть функция $y(x)$ реализует экстремум функционала и пересекает соответствующую прямую в точке x_1. Тогда эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$y(a) = A$$

$$y(x_1) = \varphi(x_1)$$

$$F(x,y,y') + (\varphi' - y')F'_y(x,y,y')|_{x=x-1} = 0$$

Необходимо найти кратчайшее расстояние от точки до кривой. Функционал, который отображает это расстояние записывается в следующем виде:

$$V[y] = \int\limits_a^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$$

$$\sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x=x_1} = 0$$

Таким образом, кратчайшее расстояние от кривой до точки:

$$\varphi' y'|_{x=x_1} = -1$$

Пусть есть следующая функция.

$$y = x^2 = \varphi(x)$$

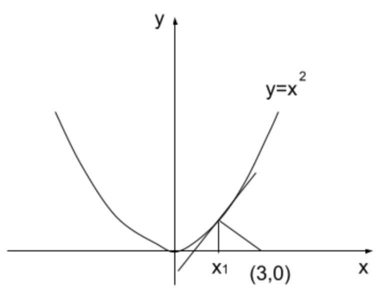

Рис. 7.2. Минимальное расстояние

Необходимо найти минимальное расстояние от точки до параболы:

$$V[y] = \int\limits_{x_1}^{3} \sqrt{1+y'^2}dx$$

$$y(3) = 0 \quad y(x_1) = x_1^2$$

Уравнение Эйлера записывается в следующем виде:

$$-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

$$y' \cdot 2x|_{x=x_1} = -1$$

$$y'' = 0 \to y = C_1x + C_2$$

$$\begin{cases} C_2 + 3C_1 = 0 \\ C_1x_1 + C_2 = x_1^2 \to C_1x_1 - 3C_1 = x_1^2 \\ 2x_1 \cdot C_1 = -1 \to C_1 = -\frac{1}{2x_1} \end{cases}$$

$$2x_1^3 + x_1 - 3 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{3}{2}$$

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Таким образом, минимальное расстояние имеет следующий вид:

$$l = \int\limits_{1}^{3} \sqrt{a + \frac{1}{4}}dx = \sqrt{5}$$

Задача со свободным концом

Пусть вместо кривой задана стенка.

Задан следующий функционал:

$$V[y] = \int\limits_{a}^{b} F(x,y,y')dx$$

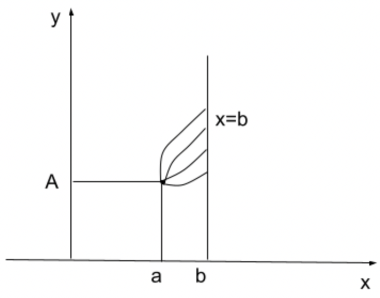

Рис. 7.3. Свободный конец

$$y(a) = A$$
$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$
$$F_{y'}|_{x=b} = 0$$

Пусть есть следующий функционал:

$$V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2)dx$$
$$y(0) = 1$$

Необходимо найти экстремали этой задачи. Записывается уравнение Эйлера:

$$-2y - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \to y'' + y = 0$$
$$y(0) = 1$$
$$\neq y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$
$$C_2 = 1$$

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$
$$C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - C_2\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$C_1 = C_2 = 1$$

Таким образом, экстремалью является:

$$y = \sin x + \cos x$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ