ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ИНФРАКРАСНЫЕ МОДИФИКАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ТЕОРИЙ

ВОЛКОВ
МИХАИЛ СТАНИСЛАВОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1. Понятие модифицированной гравитации

Общая теория относительности.

Обычная стандартная теория гравитации общей теории относительности, созданная Эйнштейном в 1915 году — это теория гравитационного взаимодействия, переносимого гравитонами. Гравитоны – это безмассовая частица спина 2. Поскольку они безмассовые, гравитоны имеют 2 степени поляризации, что отвечает двум степеням свободы гравитационного поля. 2 степени свободы поля означают, что начальные условия для уравнения Эйнштейна требуют пару: 4 числа – 2 координаты и 2 импульса в каждой точке пространства.

Задача Коши – задача, в которой вводятся начальные условия. Начальный момент приравнивается 0 – это определяет поверхность в пространстве времени, и в каждой точке этой гиперповерхности нужно задать 4 числа. И можно решать динамическую эволюцию в будущее или прошлое.

Поскольку гравитоны безмассовые, радиус действия гравитационной силы бесконечен. Это выражается в том, что потенциал взаимодействия простирается до бесконечности при каких угодно расстояниях, но засекается по закону Гаусса, поскольку поток поля через любую поверхность не равен 0. Потенциал Ньютона спадает медленно:

$$U = -\frac{GM}{V}$$

Теория относительности после её создания в прошлом веке была проверена всеми способами и доказана. Потенциал зависит от расстояния взаимодействия, так сила гравитации была проверена на шкале расстояний (Рис. 1.1). В области слева считается, что работает планковская гравитация. Неизвестно, теория какая работает там, где её поправки сильны.

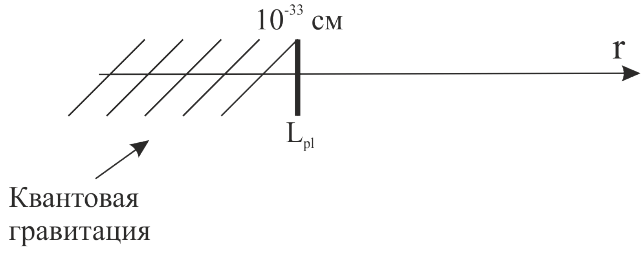

Рис. 1.1. Шкала расстояний

Здесь может быть ультрафиолетовая модификация гравитации. В действительности, никто не проверял до таких расстояний, гравитация проверялась до расстояния примерно 10^{-2} мм. Закон Ньютона был проверен до огромных расстояний порядка

10^9 световых лет. Это режим применимости общей теории относительности — расстояние, которое покрывает нашу Солнечную систему, Галактику, скопление галактик и космологию. В этом интервале расстояния общая теория относительности прекрасно описывает всё, начиная с классической теории относительности – отклонение света в луче солнца, смещение перигелия Меркурия, красное смещение, что было подтверждено с огромной степенью точности.

Большие расстояния – наша Галактика, которая населена всякими экзотическими объектами. Чёрные дыры, нейтронные звёзды – прекрасно описываются в общей теории относительности. Гравитационные волны были обнаружены в 2018. Это было последним неподтверждённым предсказанием. Гравитационные волны происходят от слияния чёрных дыр. Их существование прекрасно описывается в общей теории относительности.

Модификации нужны из-за того, что возникает проблема, когда АТО применяется ко Вселенной в целом. Проблем нет, пока описываем вселенную в целом, которая расширяется, что было обнаружено Хаблом по красному смещению в 1930г. Было обнаружено, что чем быстрее Галактика, тем быстрее она от нас удаляется.

Космология в контексте ОТО

Закон Хаббла

$$V = H \cdot r \tag{1.1}$$

где V - скорость удаления, H - постоянная Хаббла, r - растояние до космического объекта. Закон Хаббла описывается простым решением уравнения Эйнштейна. Уравнения Энштейна — это космология в контексте общей теории относительности.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu} = 8\pi G T_{\mu}$$

Это импульсы, которые описывают распределение материи. Предположим, что материя во Вселенной — это то, что видим — звёзды, пыль, галактики, электроны, межгалактический водород. Описываем всё это, используя сигнатуру Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. $(-+++)$

$$T_{\mu} = (\rho, p, p, p)$$

При однородном изотропном распределении материи тензор энергии импульса – это диагональная матрица.

$$T_{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix}$$

Метрика пространства и времени ищется в виде

$$ds^2 - dt^2 + a^2(t) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

где $a(t)$ - неизвестная функция, которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна для $a(t)$ выглядит так:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \tag{1.2}$$

Уравнение Фридмана (следствие):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} = \dfrac{8\pi G}{3} \cdot \rho \\ \\ \dfrac{\ddot{a}}{a} = -\dfrac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) \end{cases}$$

где ρ – это плотность материи, описывает распределение материи, заполняющей вселенную, — плотность звёзд, пыли, газов. Если решить эти уравнения, то для масштабного фактора функция, начинающаяся с 0, быстро возрастает, а потом несколько замедляется: (Рис. 1.2)

$a \sim t^{\frac{2}{3}}$

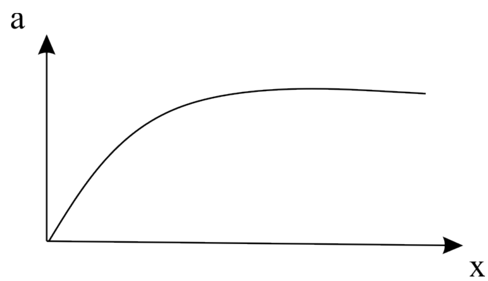

Рис. 1.2. Масштабный фактор

Это решение правильно описывает нашу Вселенную: она расширяется, а её радиус был 0. Изначально была *космологическая сингулярность*, потом *большой взрыв.*

Сол Перлмуттер, Брайан Шмидт и Адам Рисс доказали, что Вселенная расширяется с ускорением

Эта модель успешно исследовалась в течение десятков лет и не было никаких сомнений в её правильности вплоть до недавнего времени. В 1998 году были опубликованы результаты двух американских групп, которые измерили функцию закона Хаббла на порядке 10^9 световых лет. Они наблюдали *сверхновые звёзды* — звезды, которые взрываются и выбрасывают огромное количество энергии в течение нескольких недель. Чтобы узнать расстояние, измеряют их наблюдаемую светимость. *Наблюдаемая светимость*:

$$\frac{L_{abs}}{R^2} = L_{vis}$$

где L_{abs} – реальная светимость звезды, L_{vis} – наблюдаемая светимость, R – расстояние до звезды. Зная R, можно определить скорость убегания по эффекту Доплера, измеряя положение спектральных линий. Знаем R и V. Определяем постоянную Хаббла. Получаем, что наша Вселенная расширяется (Рис. 1.3).

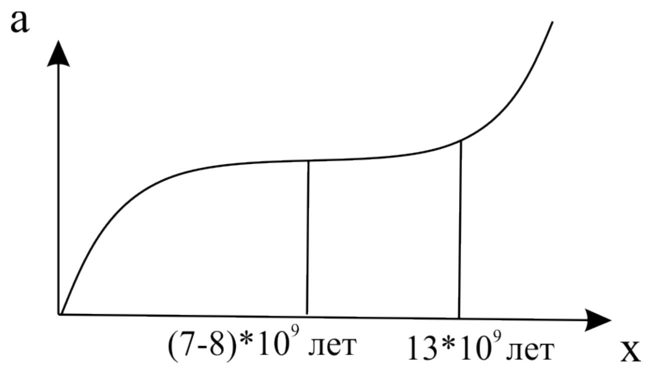

Рис. 1.3. Современная модель расширения Вселенной

Рассматривая (Рис. 1.2), функция выгнута вверх с $\ddot{a} < 0$. Вселенная расширяется, но скорость убывает – это расширение с замедлением. Этот факт объясняется вторым уравнением Энштейна (ур. (1.2)). $\rho + 3p > 0$ всегда, а правая часть отрицательна. Вторая производная отрицательная, и Вселенная должна замедляться. Но видим, что Вселенная сначала замедлялась, и примерно 6 млрд лет назад она прошла через точку перегиба и начала ускоряться. По (Рис. 1.3) мы на ~ 13 млрд лет, а ускоряться Вселенная начала примерно на 7-8 миллиардах лет. В этот момент что-то произошло и Вселенная, которая сначала тормозилась, стала разгоняться.

Возникла необходимость либо подтвердить, либо опровергнуть данную гипотезу. В течение 10 лет тысячи людей работали над этим. Ее не удалось опровергнуть. Большие коллективы людей работали на телескопах, так как всегда есть вероятность, что такого рода наблюдения могут содержать систематические погрешности, которые привели к фальсификации результатов. Поиски ни к чему не привели, и люди признали, что результат верен. Была присуждена Нобелевская премия 2011.

Получается, наша Вселенная разгоняется. Но ведь рассуждения показывают, что она не должна разгоняться. Считается, что разгон Вселенной можно объяснить, если ввести в уравнении Энштейна дополнительную материю.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T^{vis}_{\mu\nu}$$

модифицируем его следующим образом:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = 8\pi G(T^{vis}_{\mu\nu} + T^{TM}_{\mu\nu}), \tag{1.4}$$

где - $T^{vis}_{\mu\nu}$ - что видим, $T^{TM}_{\mu\nu}$ - что не видим (темная материя).

Теория о темной материи считается правильной: о космологической постоянной писал Энштейн вскоре после открытия своей теории. Он искал космологические решения, и считал, что космология статична, а мир всегда был таким, какой он есть. Если убрать этот дополнительный член, то Вселенная всегда будет раздуваться, а если его добавить, то существует решение Де-Ситтера. В рамках наблюдений этот член необходим.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(-\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} + T^{vis}_{\mu\nu} + T^{nov}_{\mu\nu})$$

где $-\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}$ – тензор энергии и импульса ($T^{vak}_{\mu\nu}$)

Так как $\rho = (-,+,+,+)$

$$T^{vak}_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}(+,-,-,-) = (\rho^v, p^v, p, p)$$

Вакумная энергия:

$$\rho^v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$
$$p^v = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Давление становится отрицательным, поэтому $\rho + 3p = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$

Из этого следует:

$$\rho + 3p = -\frac{\Lambda}{8\pi G} + \rho^{vis} + 3p^{vis} + \rho^{nov} + 3p^{nov} < 0$$

где Λ достаточно велико, будут справедливы такие тождества

Для обычной материи:

$$\rho^{vis} + 3p^{vis} > 0$$

Для невидимой материи:

$$\rho^{nov} + 3p^{nov} > 0$$

Считается, что во Вселенной существует некая невидимая пыль.

Модель Lambda-Cold Dark Matter

Вселенная начинает разгоняться. Если модифицировать уравнение Энштейна (ур. 1.4), оно позволяет описать измеряемые явления. Это приводит к модели космологии, которая называется *Lambda-Cold Dark Matter*.

Lambda-CDM (холодная темная материя) = космологическая постоянная + холодная темная материя. Это *стандартная космологическая модель*. После открытия расширения Вселенной люди поняли, что если модифицировать так, то экспериментальные данные сходятся с теорией лучше. Это уравнение описывает: первичную инфляцию, образования химических элементов бария, образование Галактики с перечнем плазмы, возникновения флуктуации, реликтовое излучение и т.д.

Крупные космические программы, которые сейчас функционируют — орбитальные спутники, которые измеряют свойства реликтового излучения, выдают данные, которые полностью подтверждаются этой моделью с огромной степенью точности.

Соотношение обычной материи, невидимой материи и тёмной энергии

Есть проблема в процентной доле этих членов:

$$\Lambda \cdot g_{\mu\nu} \qquad T_{\mu\nu}^{vis} \qquad T_{\mu\nu}^{TM}$$

если напишем полную плотность вещества во Вселенной, то

$$\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G} + \rho^{vid} + \rho^{nevid}$$

где ρ^{vid}— видимая материя, ρ^{nevid}— невидимая материя.

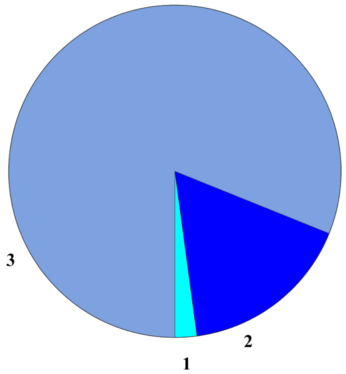

Рис. 1.4. Диаграмма соотношения обычной материи, невидимой материи и тёмной энергии, где 1-5% обычная материя; 2-22% темная материя; 3-73% темная энергия (Λ)

Чтобы все хорошо работало, нужно сделать следующий выбор на (Рис. 1.4). Примерно 5% – это обычная материя. Различия между темной энергией и темной материей заключается в структуре тензора энергии-импульса. Для темной энергии

$$T_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu}$$

Если поднять один индекс, то получим единичную матрицу, а для темной материи пишем $T^{DM}_{\mu\nu} = (\rho, p, p, p)$, где p= 0 поэтому $T^{DM}_{\mu\nu} = (\rho, 0, 0, 0)$

По экспериментальным данным это вещество имеет энергию, но не имеет давления. Пыль, которая имеет свойство гравитировать, собираться в облака, кластеры, сжиматься. Вещество с единичным тензором энергии-импульса не сжимается. Представляет нечто похожее на жидкость, которая везде пластеризуется, имеет тенденцию образовывать скопления, а это характеризует два разных типа материй.

Из всего энергетического баланса Вселенной человечеству понятно только 5 %. Наиболее популярной теорией о тёмной материи считают элементарные частицы, которые не описываются стандартной моделью. Устойчивые тяжелые элементарные частицы, которые называются *аксиомами* или *глюонами*. Это не электроны, не барионы, не кварки. Это что-то проявляет себя только гравитационным образом. Но если это элементарные частицы, то они должны взаимодействовать с обычным веществом. Поэтому ведётся активный поиск отклонений, в частности, на большом коллайдере. Ученые ищут реакции, которые показали бы существования хоть чего-нибудь, что не вписывается в стандартную модель, но до сих пор не нашли ничего. Некоторые люди говорят, что это какие-то первичные черные дыры, которых настолько много, что их можно описывать как пыль. Другие считают, что это не черные дыры, а какие-то маленькие компактные объекты как Юпитер, так как он тяжелый, но не светится. Если взять много-много Юпитеров, то они образуют некую массу, которую не видно – это и есть темная материя.

Наша галактика окружена облаком темной материи, который примерно в 20 раз превышает массу самой галактики. Это облако фиксируется по гравитационному взаимодействию. Детектировать присутствие этой массы можно измеряя скорость орбитального вращение удаленных звезд.

Космологическая постоянная

Чтобы теоретические расчеты совпали с наблюдениями, нужна очень маленькая космологическая постоянная.

$$\rho^{vak} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \sim 10^{-29} \sim [0{,}003eV]^4 \tag{1.5}$$

Такая вакуумная энергия. Темная энергия занимает 73 %.

С точки зрения квантовой теории поля, энергия вакуума должна быть вакуумной средней, например, скалярного поля. Можно сказать, что вакуумная средняя скалярного поля

$$\Lambda = < \Phi >$$

поскольку оно не имеет никаких выделенных направлений. Чтобы иметь такую структуру единичного тензора энергии-импульса, необходимо скалярное поле. Векторные спинормы не пойдут. Проблема в том, что в квантовой теории поля бесконечные и они расходятся. Их необходимо перенормировать. С точки зрения квантовой теории поля:

$$\Lambda = \Lambda_0 - \Lambda_{rad}$$

где Λ_0 – некая затравочная величина, Λ_{rad} – радиационная поправка. Затравочная величина, так как речь идёт о квантовой гравитации, должна быть энергией квантовой гравитации:

$$\frac{\Lambda_0}{8\pi G} \sim [10^{19} GeV]^4$$

Это дает параметр на обрезание. После перенормировки обрезаем некий интеграл, расходящийся на внешнем пределе. Обрезанием может быть только планковский импульс. Выведем соотношение:

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0} = \frac{(0,003eV)^4}{(10^{10}GeV)^2} = 10^{-122}$$

Имеем 2 огромные величины, между которыми разница в относительном выражении 10^{-122}. Это *проблема космологической постоянной* – непонятное сокращение огромных величин.

Резюме (модифицированная гравитация)

Чтобы объяснить наблюдение расширения вселенной, можно ввести в уравнение Эйнштейна космологическую постоянную, темную материю. Но непонятно, откуда берутся эти дополнительные члены, это не укладывается ни в какую физическую теорию. До сих пор никому не удалось это объяснить, и поэтому возникает следующее предположение.

Допустим, что никакой не темной материи нет. Вместо этого уравнения Эйнштейна должны быть подправлены. Предположим, что гравитация – это не теория чистого спина, скрывает в себе дополнительные степени свободы, которые в нормальных условиях невидны, но проявляются только на космологических расстояниях. Такая идея позволяет сразу избавиться от непонятных вкладов скрытой материи.

Идея модифицированной гравитации: нет ни темной энергии, ни темной материи, но уравнения Энштейна (уравнения общей теории относительности) должны быть изменены на больших расстояниях. Пусть гравитация содержит не 2 степени свободы, а больше (3), но дополнительные степени свободы невидны на малых расстояниях по каким-то причинам.

Альтернативные теории гравитации

Это привело к созданию различных теорий:

1) скалярно-тензорной теории

2) Нарушение Лоренц-инвариантности или теория Хорава-Лившица

3) Гравитация на баранах

Идея заключается в том, пространство и время многомерно, и в этом объемлющем пространстве существует четырехмерное многообразие как поверхности D-брана (мы живем на ней). Мы не можем распространиться в перпендикулярном направлении, но можем перемещаться вдоль браны. Классический пример – это *теория Рэндалл Сундрума (DGP Model)*.

Теорий много, как и проблем. Все эти теории содержат лишние степени свободы, и нужно, чтобы эти свободы были невидны в обычной жизни. Нужен механизм, чтобы поле Φ не распространялась. Это трудно сделать, так как стоит добавить скалярное поле, как они тут же начинают обмениваться между источниками, и это приводит к появлению дополнительного притяжения. Модифицировать общую теорию относительности тяжело.

Теория массивной гравитации

Теория массивной гравитации крайне стара, ей уже более 100 лет. Предположим, что гравитоны не безмассовые, а имеют маленькую массу (m). Это приведет к тому, что потенциал Ньютона должен быть заменен потенциалом Юкавы:

$$-\frac{GM}{r} \to -\frac{GM}{r}e^{-mr}$$

Предположим, что масса гравитона очень мала, порядка обратного радиуса Вселенной, порядка размера космологического горизонта (хаббловского радиуса).

$$m \sim \frac{1}{R_H} \sim 10^{-34} eV$$

– в численном выражении радиуса Хаббла. *Радиус Хаббла* — это расстояние, которое пробегает свет за 13,8 миллиарда лет. Возраст нашей Вселенной 13,8 миллиардов лет.

На расстояниях если $r << \frac{1}{m} = R_H = 13 \cdot 10^9$, $e^{-mr} \sim 1$ – обычная гравитация.

Если $r << \frac{1}{m}$, тогда экспонента начинает работать и обрезает взаимодействие. Это означает, что на больших расстояниях силы гравитации спадают быстрее, чем у нормальной теории. Если она спадает быстрее, то очень удаленные части Вселенной притягивают друг друга слабее, чем в обычной теории, а так как притяжение слабее, то Вселенная разлетается быстрее. Не расширяется, Юковское обрезание ослабляет взаимное притяжение удаленных частей Вселенной. Из этого следует что Вселенная расширяется быстрее.

История теории массивной гравитации

Много раз теория массивной гравитации была объявлена мертвой, так как люди систематически находили проблемы и говорили, что теория такого типа не нужна и ничего общего с физикой иметь не может.

Это породило идеи, которые легли в основу всех модифицированных теорий гравитации. В 1939 году Фирц и Пауле впервые рассмотрели теорию свободных невзаимодействующих массивных гравитонов в плоском пространстве Минковского. В 1965 году в Дубне Огиевицкий и Полубаринов построили первые нелинейные обобщения. Общая теория относительности нелинейная, поэтому и теория безмассового гравитона тоже должна быть нелинейной. Построили первое нелинейное обобщение теории Фирца-Паули. Сейчас нелинейных обобщений существует бесконечно много.

В 1970 году было замечено, что теория Фирца-Паули не имеет правильного безмассового предела: если устремим массу гравитона к 0, то не получаем общую теорию относительности. Этот феномен получил название *скачок Ван-Дама-Вельзимана-Захарова*. Дело в разнице степеней свободы: у массивной гравитации степеней свободы 5. Поскольку массивные частицы со спином 2 имеют $2s+1$ степеней свободы, а безмассовые только 2.

Закон Ньютона дает неправильное решение данных уравнений и неправильное предсказание даже внутри Солнечной системы. Нельзя сказать, что если масса гравитонов не 0, а очень-очень маленькая, то получим неправильный закон Ньютона, неправильное отклонение лучей света в поле Солнца, неправильное красное смещение. Будет конфликт с самыми простыми вычислениями. Все заключили, что теория мертва. Однако в 1972 году Аркадий Вайнштейн нашел выход. Ученый предполагал, что первый результат был получен в рамках линейной теории, общая теории относительности становится линейной на расстоянии гораздо больше радиуса Шварцшильда. Для Солнца радиус Шварцшильда – это 3км. Если отойти от Солнца на тысячи километров, то уже можно использовать линейную теорию.

Аркадий заметил, что с массивной гравитацией это не работает, потому что теория содержит 2 размерных параметра, а не 1. В безмассовой гравитации имеется только G, а в массивной имеется G и m. Из этого можно сделать нетривиальные безразмерные параметры, их которых получается, что линейный режим, в котором возникает проблема Ван-Дама-Вельзимана-Захарова, возможна, только если оправданно пренебречь нелинейными поправками, нелинейными членами, что возможно лишь на расстояниях, превышающих радиус Вайнштейна:

$$r_{van} = (\frac{r_{sh}}{m^4})^{\frac{1}{5}} \sim 0,4 \cdot 10^6 \textit{ световых лет}$$

– где r_{sh}-радиус Шварцшильда, m-масса гравитона эта величина порядка $\sim 0,4 \cdot 10^6$ световых лет – это примерно на полпути к туманности Андромеды

Лекция 2. Теория свободных гравитонов

Массивная гравитация

Вайнштейн сказал, что лишние степени свободы нелинейно связаны, а при $r << r_v$ не связаны и скачок ВДВЗ не страшен. Казалось, что он снова возродил массивную гравитацию, но в том же 1972 году была опубликована статья **Бульвара-Дезера**, что стало причиной разногласий.

По мнению Вайнштейна, эта проблема решается включением нелинейных членов, поэтому не страшна в нелинейной теории. В то время как Бульвар и Дезер заметили, что в нелинейной теории количество степеней свободы не 5, а 6, и наличие дополнительной степени свободы («дух») с отрицательной кинетической энергией. Значит, если имеется мода с отрицательной кинетической энергией, то все становится неустойчивым, любая конфигурация распадается, и с учетом этой информации теория вообще не имеет никакого смысла.

1972 год: включение нелинейных членов порождает «дух» - шестая степень свободы с отрицательной кинетической энергией. Вывод Бульвара-Дезера говорит о том, что теория Вайнштейна мертва, а любое решение становится неустойчивым = катастрофическая неустойчивость. Это стало настолько сильным ударом, что последующие 40 лет никто даже не пытался разобраться в теории, считалось, что это вердикт. Но в 2010 году **Де Рамм**, **Габададзе** и **Таллер** заметили, что аргумент Бульвара-Дезера не является универсальным, и что его можно обойти путем тщательного подбора массового члена. «Дух» может быть исключен путем подбора потенциала (подбором массового члена). Это было создание так называемой *бездуховой массивной гравитации.* Открытие имело огромный резонанс, были написаны тысячи работ на эту тему, это был порыв. Много результатов было получено в 2011 году – была написана *массивная бездуховая бигравитация* (Хасона и Резен).

Массивная гравитация допускает предел, в котором одновременно обращаются в 0 масса гравитона и постоянная Ньютона, но их отношение остается постоянным. В этом пределе возникает эффективная теория, которая описывает только одну скалярную моду гравитона: массивный гравитон имеет 5 степеней свободы: 2 тензорных, 2 векторных и 1 скалярная. Массивная гравитация допускает предел, в котором она сводится к сложной нестандартной теории скалярного поля в узком пространстве – предел, описывающий скалярную поляризацию гравитона. Эта теория содержит члены

$$Z = (\delta\phi)^2 + \phi \cdot D \cdot \phi$$

Считается, что такого рода члены в лагранжиане недопустимым, потому что он должен содержать только поля их первой производной – нельзя включать вторые производные полей, потому что если лагранжиан проварьировать, то получится уравнение 4-го порядка. Но если проверять такой лагранжан, получается уравнение 2-го порядка. лагранжианы такого типа описывают теории, которые называется *Галелионами.*

Изначально это были некие эффективные теории, которые получаются из массивной гравитации в специальном пределе отщепления. Все получилось из-за того, что части теории отделились и стали существовать сами по себе. Люди стали рассматривать их как нестандартные теории скалярного поля, которые также связаны с гравитацией. Позже задались вопросом, каковым является самый общий лагранжиан, описывающий скалярное поле, взаимодействующее с гравитацией таким образом, чтобы уравнения движения были 2-го порядка. Этот вопрос возник при анализе предела отщепления. Ответ сначала был получен в 2011году (позже выяснилось, что уже в 1974). Его нашёл канадский учёный **Вальтер Хорндески**, студент **Лавлока**, но тогда так и не удалось развить теорию. Лавлок на тот момент занимался обобщением гравитации с высшими производными. Данная теория была похоронена в промежутке с 1974 по 2011 года. В 2011 году теорию Хорндески переоткрыли. Теории с реальными полями известны, до сих пор люди рассматривают очень простые теории с лагранжианом типа:

$$z = \frac{R}{16\phi g} + (\delta\phi)^2 - V_{poten}$$

Это очень частый случай общего семейства Хорндески. Сейчас является одним из основных направлений, в которых работает много людей, это одна из **инфракрасных модификаций гравитации**.

Рекомендуемая литература

1. Рубаков, В.А. Тиняков, П.Г. Успехи физических наук. выпуск: 178(2008) стр 785-822 Это большой обзор. Он был написан до открытия бездуховой гравитации.

2. Hinterbichler, K. Reviews of Modern Physics, выпуск: 84(2011) стр 681 Первый обзор вышедший после открытия, бездуховой теории

3. Claudia de Rham. Living Reviews in Relativity выпуск: 17(2014) стр 7 Автор бездуховой теории

4. Собственный обзор лектора по решениям 2013

5. Langlua nternational Journal of Modern Physics 28(2019) 194(2006)

Используемые обозначения

Будем использовать сигнатуру $(-+++)$ – это **Ч.Мизнер**, **К.Торн**, **Дж.Уилер**. В России обычно используют **Ландау-Лифшица**, но при работе с гравитацией нужно уметь переходить из одной в другую. Система Кристоффеля – это

$$\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_\mu g_\alpha + \delta_\nu g_{\mu\alpha} - \delta_\alpha g_\mu)$$

$$\Gamma^\sigma_\mu = g^{\sigma\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}$$

Тензор кривизны строится по закону:

$$R^\alpha_{\beta\mu} = \delta_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} - (\mu\nu)$$

это можно понять, если считаем, что это матрица с компонентами

$$\Gamma_\mu = \Gamma^\alpha_{\beta\mu}$$

где α, β – матричные индексы, а μ — это Лоренцова связность

$$\Rightarrow\ R_\mu = \delta_\mu \Gamma_\mu - \delta_\mu \Gamma_\mu + (\Gamma_\mu \Gamma_\mu)$$

где R_μ - строящаяся кривизна:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$$

И тензор Риччи:

$$R = g^\mu R_{\mu\nu}$$

Теория свободных гравитонов

Рассмотрим действия Общей Теории Относительности :

$$S = \frac{1}{2\varkappa}\int R\sqrt{-g}\cdot d^4x + S_{mat}$$

где S_{mat} действие материи, $\varkappa = 8\phi$, $g = \frac{1}{M^2_{pl}}$, M_{pl} - масса Планка.

Варьируем это действие

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}$$

Нужно иметь ввиду, что возникает «-». $\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta g^{\mu\nu}$ — это не обратная матрица, а просто поднятые вверх индексы.

Вариация Энштейна-Гилберта.

$$S = \frac{1}{2\varkappa}\int (R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^2x - \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^4x$$

$$\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^4x$$

— так определяется **тензор энергии** и **импульса**.

Исходя из Вариации Энштейна-Гилберта.

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S^{\mu\nu}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

В то время как

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\mu\nu}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Поскольку вариация действия должна быть равной 0, $\delta S = 0$, так как

$$(-\frac{R}{2}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^2x + (-\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^4x) = 0$$

Из этого следует, что

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu}$$

— это **тензор Эйнштейна**.

Уравнение Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

Теперь давайте рассмотрим предел слабого поля.

Рассмотрим случай, когда $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ – метрика Минковского, а $h_{\mu\nu}$ – маленькая поправка, малое возбуждение в метрике Минковского.

Из этого вытекает,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)$$

что может превращаться в бесконечный ряд, но рассматриваем только линейные члены

$$\eta^{\mu\nu} \text{ и } h^{\mu\nu}$$

Затем считаем, во что превращаются эти уравнения:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta h_\mu + \delta h_\nu - \delta h_k)$$

Далее поднимаем индекс α, для этого необходимо умножить на обратную матрицу, в результате чего возникает бесконечно много членов, но это исправляется благодаря тому, что выдерживаем только линейные члены. Поэтому:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta h^\alpha_\mu + \delta h^\alpha_\nu - \delta h^\alpha_k + O(h^2)$$

где $O(h^2)$ – систематически пренебрегаем.

Для вычисления кривизны

$$R^{\alpha}_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \dots$$

Далее вычисляем тензор Ричи, скаляр Ричи и тензор Эйнштейна.

Задача (Следствие второй теоремы Нётер)

Упражнение 2.1. *Проверить, что*

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu\delta^\alpha h_{\alpha\mu} - \delta_\nu\delta^\alpha h_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\nu}(\delta^\alpha\delta^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h) + \delta^2_\mu h\right) + O(h^2) = \varkappa T_{\mu\nu}$$

где $\Box$ — это оператор Даламбера.

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\delta_\mu\delta_\nu = -\delta^2_{tt} + \Delta$$

где Δ-оператор Лапласса, скорость света равна единице, постоянная Планка равна 1, η-метрика Минковского, h (без индексов) – это след матрицы $h_{\mu\nu}$:

$$h = \eta^{\mu\nu}h^{\mu\nu}$$

Умножаем это уравнение на -2 и получаем:

$$\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu\delta^\alpha h_{\mu\nu} + \dots = -2\varkappa T_{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta}$$

Вынесенные члены, которые были внутри скобок, называют *линеаризованным оператором Эйнштейна.*

$$\varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} = \Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu\delta^\alpha h_{\alpha\mu} - \delta_\nu\delta^\alpha h_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\nu}(\delta^\alpha\delta^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h) + \delta^2_\mu h \tag{2.2}$$

Это определение линеаризованного оператора Эйнштейна. Из этого следует:

$$\varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Возьмем дивергенцию этого оператора по δ_μ. δ_μ, ударяя по δ_μ порождает $\Box$, а $\delta_\nu\delta^\alpha h_{\alpha\mu}$ порождает $\delta_\nu\delta^\alpha\delta_\mu h_{\alpha\mu}$. Далее получается $\delta_\nu\delta^\alpha\delta^\beta h_{\nu\mu}$ и так далее.

В результате получим:

$$\Box\delta^\mu h_\mu - \Box\delta^\alpha h_{\mu\nu} - \delta_\nu\delta^\alpha\delta^\mu h_{\alpha\mu} + \delta_\nu\delta^\alpha\delta^\beta h_{\alpha\beta} - \delta_\nu\Box h + \Box\delta_\nu h = 0$$

Всё сокращается и дивергенция $\equiv 0$. Также это равно дивергенции энергии и импульса.

$$\delta^\mu\varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}h_{\alpha\beta} \equiv 0 = -2\varkappa\delta^\mu T_{\mu\nu}$$

Дивергенция тензора энергии и импульса тоже $\equiv 0$ благодаря закону его сохранения. В итоге получаем $0 = 0$. Но $\delta^\mu T_{\mu\nu}$ — это материя, которая записывается своими уравнениями, у неё есть свои поля. Эта дивергенция обращается в 0 только на больших поверхностях, только когда выполнены уравнения движения.

Тензор-нулевая мода оператора Эйнштейна

Линеаризованный оператор Эйнштейна является тождественно равным 0. Тождественное зануление в теории поля является следствием 2-й теоремы Ньютона. Она гласит, что если действия инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований, то это приводит к появлению тождеств. Приходим к выводу, что теорема должна заключать в себе калибровочные инвариантности относительно неких калибровочных преобразований. Напишем эти преобразования $h_{\mu\nu}$:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — это произвольная величина. Такая добавка ничего не изменит, так как не меняет ни правую, ни левую части уравнения движения. Не меняет правую, так как не имеет $h_{\mu\nu}$. Чтобы не менял левую часть, этот тензор такого вида является нулевой модой оператора Эйнштейна.

$$h^0_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$$

– это нулевая мода оператора Эйнштейна. Проверим это. Если возьмем:

$$\Box \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu - \delta_\mu \delta^\alpha(\delta_\alpha \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\alpha) - \delta_\nu \delta^\alpha(\delta_\alpha \varepsilon_\mu + \delta_\mu \varepsilon_\alpha)$$

Если $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$, то:

$$\varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}$$

Упростим выражение путем введения вместо h его линейной комбинации. Определим

$$\widetilde{h} = h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$$

Обратное преобразование это:

$$h = \widetilde{h}_{\mu\nu} - \frac{\widetilde{h}}{2}\eta_{\mu\nu}$$

и подставляем его в уравнение.

Упражнение 2.2. *Проверить, что если $h = \widetilde{h}_{\mu\nu} - \frac{\widetilde{h}}{2}\eta_{\mu\nu}$, то уравнения стновятся проще.*

$$\Box \widetilde{h}_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta^\alpha \widetilde{h}_{\alpha\nu} - \delta_\nu \delta^{\alpha^{h_{\alpha\mu}}} + \eta_{\mu\nu} \delta^\alpha \delta^\beta \widetilde{h}_{\alpha\beta} = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

2 члена уравнения сворачиваются, когда делаем калибровочные преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to \widetilde{h}_{\mu\nu} + \delta_\mu \xi_\nu + \delta_\nu \xi_\mu$$

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} \to \widetilde{h}_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\mu \varepsilon_\nu - \eta_{\mu\nu} \delta^\alpha \varepsilon_\alpha$$

Эти преобразования могут быть использованы для проверки количества степеней свободы. Предполагаем, что

$$\delta_\mu \widetilde{h}_{\mu\nu} \to \delta_\mu \widetilde{h}_{\mu\nu} + \Box\varepsilon_\nu$$

Такое распределение позволяет наложить некие калибровочные условия на дивергенцию. Можно потребовать, чтобы дивергенция обращалась в 0 или была чему-то равна, например:

$$\delta^\mu \widetilde{h}_{\mu\nu} = f\nu$$

$$\delta^\mu \widetilde{h}'_{\mu\nu} = f + \Box\varepsilon_\nu + 0$$

Можем потребовать, чтобы данное уравнение было равно 0, в результате чего получается диференциальное уравнение и поле ε_ν. Для этого обращаем оператор и находим решение. Иначе говоря, можно наложить условия, что $\delta^\mu \widetilde{h}_{\mu\nu} = 0$ – это *калибровочное условие* или *калибровка Лоренца.*

Можно наложить 4 калибровочных условия Лоренца $\delta^\mu \widetilde{h}_{\mu\nu} = 0$, которые не содержат вторых производных, только первые ($\Rightarrow$ 4 связи). Тензор симметричный $\Rightarrow$ симметричная матрица имеет 10 компонентов. Налагаем 4 связи, остаётся всего 6. После наложения связей обнаруживаем, что члены с дивергенцией выпадают – все обращаются в 0. В результате, уравнение упрощается до простого гармонического:

$$\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, тогда $\Box\widetilde{h}_{\mu\nu} = 0$ и являются гармоническими функциями.

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} \to \widetilde{h}_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$$

где $\Box\varepsilon_\mu = 0$

Если выбираем вместо ε_μ гармоническую функцию, то она остаётся гармонической. Можно сделать дополнительные калибровочные преобразования, порождаемые гармоническими функциями, и можно устранить ещё 4 функции. Сначала спустились с 10 до 6, а из 6 можно спуститься в 2. Это означает, что можно наложить ещё 4 условия.

Остаточные преобразования

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} \to \widetilde{h}_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \delta_\alpha \varepsilon^\alpha$$

где $\Box\varepsilon_\mu = 0$ не меняет условие Лоренца $\delta_\alpha \widetilde{h}_\alpha = 0$ и позволяет наложить 4 дополнительных условия на компоненты $h_{\mu\nu}$.

Благодаря чему можно потребовать

$$\widetilde{h} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$$

Чтобы след обращался в 0:

$$h_{\mu\nu} = \widetilde{h}_{\mu\nu}$$

Чтобы пространственновременные компоненты обращались в 0:

$$h_{OK} = \widetilde{h}_{OK} = 0$$

Чтобы нулевая компонента из условия Лоренца была равна 0:

$$\delta^{\mu} h_0 = 0 \text{ *или* } \delta^0 h_{00} + \delta^k h_{0k} = 0$$

В этом случае производная по времени равна 0. В этом случае h_{00} зависит не от времени, а от расстояния, функция только пространственных координат. В этом случае Ньютоновский потенциал должен быть 0, потому что рассматриваем случай, когда тензор энергии-импульса обращается в 0.

В результате всех этих вычислений имеем, что $h_{00} = 0$, $h_{0k} = 0$. След четырехмерного пространства $\widetilde{h}$ становится совпадающим со следом трехмерного пространства

$$\widetilde{h} = h_{OK} = 0$$

И последнее: $\delta^k h_{ki} = 0$. Все эти выражения называются *поперечные бесследовые калибровки (T T)*.

Упражнение 2.3. *Проверить, что решения $\Box h = 0$ в TT калибровке для волны вдоль оси Z есть:*

$$h_{\mu\nu}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos\omega(t-z))$$

В результате должны получиться 2 вещественных числа h_+ и h_x, которые соответствуют двум поляризациям (вещественным числам) безмассового гравитона.

Запишем метрику:

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}) =$$

$$= -dt^2 + dz^2 + [\Delta + h_+ \cos(\omega(t-z))]dx^2 + [1 - h_+ \cos(\omega(t-z))]dy^2 + 2h_+ \cos(\omega(t-z))dxdy$$

В результате, когда приходит гравитационная волна, она изменяет расстояния в плоскости x и y.

Рассмотрим эффект 2х поляризаций. Представим себе кольцо с бусинками на плоскости x и y, и приходит волна. На рис. 2.1: изображено излучение, фаза и поведение этого кольца. ωt *– это время, а* h_+ *и* h_x *- поляризации. При* $\omega t = 0$ *кольцо было без деформаций. В момент фазы* $\frac{\phi}{2}$ *кольцо превращается в эллипс, деформированный под углом 45 градусов. При* ϕ *оно снова превратится в кольцо.*

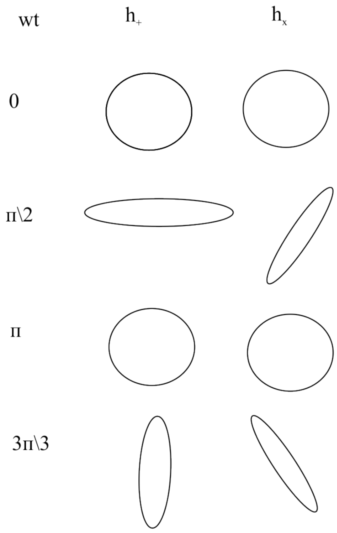

Рис. 2.1. Эффект 2х поляризаций

Задача (Получение уравнения линеаризованной гравитации)

ЗАДАЧА: Показать, что уравнения линеаризованной гравитации могут быть получены из действия линейного оператора, который является интегралом Лагранжа:

$$S_L = \int Z_L d^4x$$

где

$$Z_L = \frac{1}{\varkappa} Z_2 + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$Z_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\delta_\alpha h_{\mu\nu}\delta^\alpha h^{\mu\nu} + \delta_\mu h_{\nu\alpha}\delta^\nu h^{\mu\alpha} - \delta_\mu h^{\mu\nu}\delta_\nu h + \frac{1}{2}\delta_\mu h \delta^\mu h\right)$$

Показать, что Z_2 есть квадратичная часть от $\frac{R}{2}\sqrt{-g}$.

Напишем соотношения, которые работают в квадратичной области. Когда идем до второго члена, можно использовать такие соотношения:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^\mu_\alpha h^{\alpha\nu} + \sqrt{-g} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} - \frac{1}{4}h^2_{\mu\nu}$$

Лекция 3. Теория Фирца-Паули

Разбор задачи из домашнего задания (ур. линеаризованной гравитации)

Упражнение 3.1. *Имеется уравнение линеаризованной гравитации, которое записывается следующим образом:*

$$D^{\mu\nu} + 2\varkappa = T_{\mu\nu} = 0$$

$$D^{\mu\nu}_{=}\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu h_\nu - \delta_\nu h_\mu + \delta^2_{\mu\nu} h + \eta_\mu(\delta^\alpha h\alpha\Box h)$$

$$\delta^\alpha h_{\alpha\ mu} \equiv h_{\ mu}$$

$$h = h^\alpha_\alpha \text{ – след тензора}$$

Требуется написать действвия для этих тензоров и уравнений. Необходимо показать, что они являются квадратичной частью уравнения Эйнштейна-Гилберта.

Для написания действия приведем пример из скалярного поля. Предположим наличие следующего скалярного поля:

$$\Box\Phi = J \text{ — это источник}$$

$$\Rightarrow\ \Box\Phi - J = 0$$

$$S = \int L d^4x$$

$$L = \frac{1}{2}\Phi\Box\Phi - \Phi J$$

Поскольку в уравнении присутствует интеграл, разрешено интегрировать по частям, где

$$\Box = \Phi\delta_\alpha\delta^\alpha\Phi$$

Мы можем перекинуть производную на первое Φ и сменить знак, в результате чего получим лагранжиан.

$$L = \frac{1}{2}\Phi\Box\Phi - \Phi J = -\frac{1}{2}(\delta\Phi)^2 - \Phi J$$

При варьировании $\frac{1}{2}$ пропадает и получаем:

$$L = -\frac{1}{2}\delta_\alpha\Phi\delta^\alpha\Phi - \Phi J$$

$$\delta L = -\delta_\alpha \sigma \Phi \delta^\alpha \Phi - \sigma \Phi J \Rightarrow$$

Потом опять интегрируем по частям, и получаем:

$$\Rightarrow (+\delta^\alpha \delta_\alpha \Phi - J) \cdot \delta \Phi = 0$$

По итогу приходим к изначальному уравнению.

$$\Box \Phi - J = 0$$

Получить квадратичное действие несложно – достаточно умножить на поле и проинтегрировать. Давайте проделаем это упражнение для гравитационного поля. Утверждение такое, что действие для гравитации — это:

$$S = \int L d^4 x$$

$$L = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \cdot d_{\mu\nu} + 2\varkappa T_{\mu\nu} \cdot h^{\mu\nu}$$

Далее необходимо расписать формулу и представить всё в компактном виде. Пишем лагранжиан L:

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \cdot \Box h_{\mu\nu}}_{1} \underbrace{\overbrace{-\frac{1}{2}(\delta_\mu h_\nu + \delta_\nu h_\mu)}^{h^{\mu\nu}\delta_\mu h_\nu}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{2} h^{\mu\nu} d^2_{\mu\nu} h}_{3} + \underbrace{\frac{h}{2}(\delta^\alpha h_\alpha - \Box h)}_{4} + \underbrace{2\varkappa \cdot T_{\mu\nu} \cdot h^{\mu\nu}}_{5} \tag{3.1}$$

Теперь, можно перебросить производную на первый член, тогда (ур. 3.1) становится:

$$-\frac{1}{2} \delta_\alpha h_{\mu\nu} \delta^\alpha h^{\mu\nu}$$

Далее член (2) (ур. 3.1) равен

$$+\delta h \mu\nu \cdot h_\nu,$$

а (3-й) член (ур. 3.1) становится:

$$-\frac{1}{2} \delta h \mu\nu \cdot \delta h$$

В (4-ом) члене (ур.3.1) тоже перекидываем и получаем:

$$-\frac{1}{2} \delta_\alpha h \cdot h^\alpha + \frac{1}{2} \delta_\alpha h \cdot \delta^\alpha h$$

(5-й) член (ур. 3.1)

$$+2\varkappa \cdot T_{\mu\nu} \cdot h^{\mu\nu}$$

$$\delta h \mu \nu = h^{\nu}$$

$$L = -\frac{1}{2}(\delta_{\alpha} h_{\mu\nu})^2 + (h^{\nu})^2 - \delta_{\alpha} h \cdot h^{\alpha} + \frac{1}{2}(\delta h)^2 + 2\varkappa \cdot T_{\mu\nu} \cdot h^{\mu\nu}$$

Это правильный ответ. В задаче он ещё нормируется. Если его умножить на общий множитель и выделить такое обозначение:

$$L_{\nu} = \frac{1}{4\varkappa} L$$

то варьирование этого лагранжиана даёт правильные уравнения движения. Теперь запишем это в виде:

$$L_{\nu} = \frac{1}{4\varkappa} L = \frac{1}{\varkappa} L^2 + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Если поделим (ур. 3.2) на $4\varkappa$, то получим в 5-м члене уравнения (ур. 3.1) $\frac{1}{2}$, а L^2 будет равнятся

$$L^2 = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}(\delta_{\alpha} h^2_{\mu\nu}) + (h_{\nu})^2 - \delta_{\alpha} h \cdot h^{\alpha} + \frac{1}{2}(\delta h)^2) \tag{3.3}$$

Это первая часть упражнения. Вторая часть упражнения заключалась в том, чтобы показать, что (ур. 3.3) является квадратичной частью от Энштейна-Гилберта, и равняется:

$$L^2 = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}(\delta_{\alpha} h^2_{\mu\nu}) + (h_{\nu})^2 - \delta_{\alpha} h \cdot h^{\alpha} + \frac{1}{2}(\delta h)^2) = \text{квадратичная чать от} \frac{1}{2} R\sqrt{-g}$$

Необходимо разложить полученную величину до квадратичных членов, а также разложить метрику, детерминант. Определение Римана

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \delta_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \delta_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

Свернем полученную формулу и получим Ричи:

$$R\sqrt{-g} = g^{\beta\nu}(\underbrace{\delta_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}_{1} - \underbrace{\delta_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}}_{2} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}}_{3} - \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}}_{4}) \cdot \sqrt{-g} \tag{3.4}$$

1. Сначала сворачиваем по α и по μ
2. Затем свернем по β и по ν Это Энштейн-Гилберт, переписанный через Γ.

Далее необходимо отбросить неполную производную. Данная величина содержит вторые производные от метрики. Но все вторые производные от метрики преобразуются в поверхностный член и могут быть опущены.

Можно переписать (1) и (2) (ур. 3.4) с производными, как:

$$(1) = \delta_{\alpha}(g^{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \cdot \sqrt{-g}) - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\delta_{\alpha}(g^{\beta\nu} \cdot \sqrt{-g})$$

Перепишем второй член (ур. 3.4) со знаком $-$ и получим:

$$(2) = -\delta_\nu(g^{\beta\nu}\cdot\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\cdot\sqrt{-g}) + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\cdot\delta_\nu(g^{\beta\nu}\sqrt{-g})$$

(3) и (4) члены (ур. 3.4) - квадратичное выражение остается:

$$(3)\text{и}(4) + g^{\beta\nu}(\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha})\cdot\sqrt{-g}$$

Видим полные производные, которые при интеграции преобразуются в поверхностные интегралы и исчезают.

$$(1) = \delta_\alpha(g^{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\cdot\sqrt{-g}) - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\delta_\alpha(g^{\beta\nu}\cdot\sqrt{-g}) \tag{3.5}$$

$$(2) = -\delta_\nu(g^{\beta\nu}\cdot\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\cdot\sqrt{-g}) + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\cdot\delta_\nu(g^{\beta\nu}\sqrt{-g}) \tag{3.6}$$

$$(3)\text{и}(4) + g^{\beta\nu}(\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\alpha})\cdot\sqrt{-g} \tag{3.7}$$

Оставшиеся члены необходимо продиференцировать. Используем стандартное выражение:

$$\delta^\alpha_\beta = g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\beta}$$

Затем диференцируем по δ_ρ Поскольку, δ — это константа, производная $= 0$, то

$$0 = \delta_\rho g^{\alpha\sigma}\cdot g_{\sigma\beta} + g^{\alpha\sigma}\delta_\rho g_{\sigma\beta} \tag{3.8}$$

Домножим (ур. 3.8) на обратную матрицу $g^{\beta\mu}$:

$$0 = \delta_\rho g^{\alpha\sigma}\delta^\mu_\Sigma + g^{\alpha\sigma}g^{\beta\mu}\cdot\delta_\rho g_{\sigma\beta}$$

Эта свёртка вместо σ даст μ. Утверждение:

$$\delta_\rho g^{\alpha\mu} = -g^{\alpha\sigma}g^{\beta\mu}\delta_\rho g_{\beta\sigma} \tag{3.9}$$

Дифференцируется компонента обратной метрики. Эту формулу используем, чтобы вычислить производные оставшихся членов из (ур. 3.5 и 3.6). Далее необходимо дифференцировать детерминант от метрики, используем обозначения:

$$\delta_\alpha\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} \tag{3.10}$$

Далее используем (ур. 3.9) и (ур. 3.10), чтобы вычислить производные из (ур. 3.5, 3.6). И последнюю производную от метрики можно выразить так:

$$\delta_\rho g_{\beta\sigma} = \Gamma_{\beta\sigma\rho} + \Gamma_{\sigma\beta\rho} \tag{3.11}$$

Упражнение 3.2. *Когда используем (ур. 3.9, 3.10 и 3.11), то после некоторых вычислений получаем следующий ответ:*

$$R\sqrt{-g} = (\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}g^{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}g^{\beta\nu} - 2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

Это оставшиеся члены из (ур. 3.5, 3.6), к ним нужно ещё добавить(ур. 3.7),

$$+g^{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\sqrt{-g}$$

Возникает сокращение членов. Большинство членов сокращаются друг с другом.

$$R\sqrt{-g} = (\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}g^{\nu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}g^{\beta\nu} - 2\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - g^{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\sqrt{-g}$$

По итогу получаем компактную формулу:

$$R\sqrt{-g} = (\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\sqrt{-g} + \text{полная производная} \tag{3.12}$$

С этой формулой очень легко вычислить квадратичную часть. Чтобы посчитать квадратичную часть, необходимо удержать линейную часть Γ. Нужно взять нулевой член $g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}$ и линейную часть от Γ.

Линейная часть от Γ:

$$\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}(\delta_{\sigma}h^{\alpha}_{\mu} + \delta_{\mu}h^{\alpha} - \delta^{\alpha}h_{\sigma\mu}) \tag{3.13}$$

Это уравнение нужно подставить в (ур. 3.12).

Подставим (ур. 3.13) в (ур. 3.12) и получим:

$$\frac{1}{2}R\sqrt{-g} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}(\delta_{\alpha}h_{\mu\nu})^2 + (h_{\alpha})^2 + \dots)$$

Теория Фирца-Паули

Рассмотрели безмассовые гравитоны, сделаем их массивными. Это впервые было сделано Фирцем и Паули. Предположим, имеется уравнение безмассового скалярного поля:

$$\Box\Phi = 0$$

Чтобы сделать это поле массивным, нужно заменить 0 на $m^2\Phi$ Получим:

$$\Box\Phi = m^2\Phi \tag{3.14}$$

Если ищем в виде:

$$\Phi = \exp^{-i\omega t + ikx} \tag{3.15}$$

Подставив ур.3.15 в ур.3.14 получим дисперсионное соотношение для ω:

$$\omega = \sqrt{m^2 + k^2}$$

– это дисперсионное соотношение для массивной частицы. Гравитоны описываются следующими уравнениями:

$$\Box h_{\mu\nu} + \ldots = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Для увеличения массивности необходимо добавить в правую часть линейные члены по полю гравитонов. Линейных членов может быть два: Либо $h_{\mu\nu}$ – это поле гравитона само по себе, либо $h \cdot \eta_{\mu\nu}$:

$$C_1 \cdot h_{\mu\nu} + C_2 \cdot h\eta_{\mu\nu}$$

Вместо C_1 и C_2 можно написать, что:

$$C_1 = m^2,$$

$$C_2 = -\alpha m^2$$

Такое обозначение $-\alpha m^2$ сложилось исторически.

Вместо C_1 и C_2 использовали: m^2 и α

И приходим к уравнениям Фирца-Паули:

$$\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta^\alpha h_{\mu\nu} - \delta_\nu \delta^2_{\mu\nu} h + \eta_{mu} \cdot (\delta^\alpha \delta^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h) = m^2(h_{\mu\nu} - \alpha h \eta_{\mu\nu}) - 2\varkappa T_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

Безмассовые гравитоны обладают двумя степенями свободы (имееется 2 поляризации безмассового гравитона), массивные же частицы со спином 2 должны иметь $2S+1$ степеней свободы, если $S = 2$, то выражение $2S+1$ будет равно 5-ти:

$$2S + 1 = 5$$

Уравнение должно описывать частицы с 5 степенями свободы. $h_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонентов

$$h_{\mu\nu} = 10 \text{ функций}$$

5 из них лишние, нужно их убрать — нужно найти 5 связей на 10 функций. Связи — это соотношения, которые включают вторые производные, функции и их первые производные. Возьмем дивергенцию ур. 3.16 δ^μ.

Дивергенция этого оператора тождественно равна 0. Массовый член m^2 разрушает калибровочную инвариантность. Левая часть уравнения инвариантна относительно калибровочных преобразований:

$$h_\mu \to h_\mu + \delta_\mu \xi_\nu + \delta_\nu \xi \tag{3.17}$$

Действие оператора Эйнштейна на такой член дает 0, но массовый член неинвариантен относительно таких преобразований, если приведем преобразования, то массовый член изменится. Массовый член нарушает калибровочную инвариантность. Теперь ищем связи:

$$h_\mu(\Box h_{\mu\nu} + \ldots) \equiv 0 \tag{3.18}$$

в ур. 3.17, потому что правая часть инвариантна. С другой стороны ур. 3.19

$$= m^2(\delta^\mu h_{\mu\nu} - \alpha\delta^\nu h) - 2\varkappa\delta^\mu T_{\mu\nu}$$

По итогу уравнение выглядит так:

$$h_\mu(\Box h_{\mu\nu} + \ldots)0 = m^2(\delta^\mu h_{\mu\nu} - \alpha\delta^\nu h) - 2\varkappa\delta^\mu T_{\mu\nu}$$

Мы знаем, что дивергенция тензора энергии и импульса тоже равняется 0

$$h_\mu(\Box h_{\mu\nu} + \ldots)0 = m^2(\underbrace{\delta^\mu h_{\mu\nu}}_{1} - \underbrace{\alpha\delta^\nu h}_{2}) - 2\varkappa\underbrace{\delta^\mu T_{\mu\nu}}_{=0} \tag{3.19}$$

Величины (1) и (2) ур. 3.20 тоже обращаются в 0. Следовательно:

$$(1)\text{и}(2)\delta^\mu h_{\mu\nu} - \alpha\delta^\nu h = 0 \tag{3.20}$$

это 4 связи, 4 уравнения, поскольку внешний индекс ν принимает 4 значениия. Эти 4 связи не содержат вторых производных. Важно помнить, что 4 связи уменьшают число степеней свободы с 10 до 6. Необходимо наличие еще одной связи (для получения 5). Чтобы получить ещё одну связь, следует взять след от ур. 3.16. Если берём свёртку по μ и ν, то получаем:

$$\Box h - 2\delta_\mu\delta^\alpha h_{\alpha\mu} + \Box h + 4(\delta^\alpha\delta^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h) = -2\Box h + 2\overbrace{\underbrace{\delta^\alpha\delta^\beta h_{\alpha\beta}}_{1}}^{\alpha\Box h} =$$

$=\mathrm{m}^2(h - 4\alpha h) = -2\varkappa T(3.21)$

В этом соотношении будем использовать ур. 3.20. Таким образом, (1) из ур. 3.2 становится: α, $\Box$, h. Поскольку

$$\delta^\mu h_{\mu\nu} = \alpha\delta^\nu h$$

Если взять вторую дивергенцию, то получим:

$$\delta^\mu \delta^\nu h_{\mu\nu} = \alpha \delta^\nu \delta_\nu h = \alpha \Box h$$

Если взять след:

$$2(\alpha - 1) \cdot \Box h = m^2(1 - 4\alpha) \cdot h - 2\varkappa T$$

Получили уравнение, которое содержит вторые производные, однако если $\alpha = 1$, то этот коэффициент обращается в 0:

$$\text{если} \alpha = 1 \Rightarrow 0 = m^2(-3) \cdot h - 2\varkappa T$$

Иначе говоря:

$$h = -\frac{2}{3}\frac{\varkappa}{m^2} \cdot T \tag{3.22}$$

Получили дополнительную связь(ур. 3.22), которая уничтожает дополнительную степень свободы, спускаемся с 6 до 5. Уравнение 3.22 — это пятая связь.

$$\delta^\mu h_{\mu\nu} = \delta^\nu h \tag{3.23}$$

Ещё раз запишем уравнение Фирца-Паули:

$$\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta^\alpha h_{\mu\nu} - \delta_\nu \delta^2_{\mu\nu} h + \eta_{mu} \cdot (\delta^\alpha \delta^\beta h_{\alpha\beta} - \Box h) = m^2(h_{\mu\nu} - \alpha h \eta_{\mu\nu}) - 2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Это уравнение получается варьированием действия:

$$S_{FP} = \int L_{FP} d^4x,$$

где S_{FP} - действие Фирца-Паули, L_{FP} - лагранжиан Фирца-Паули, который равен:

$$L_{FP} = \frac{1}{\varkappa}(L_2 - m^2 \cdot U) + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \cdot T^{\mu\nu},$$

где $L_2 = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}(\delta_\alpha h_{\mu\nu})^2 (h_\alpha)^2 - h^\alpha \delta_\alpha h + \frac{1}{2}(\delta h)^2)$

Массовый член получается варьированием потенциала, а потенциал распишем, как:

$$U = \frac{1}{8}(h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2)$$

Проверим массовый член. Связи, которые есть (ур. 3.22 и ур. 3.23) можем использовать, чтобы упростить уравнение Фирца-Паули. И получим:

$$\Box h_{\mu\nu} - 2\delta_\mu \delta_\nu h + \delta_\mu \delta_\nu h - \eta_\mu \cdot (0) = \Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta_\nu h = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Это и есть уравнение Фирца-Паули:

$$\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta_\nu h = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2\varkappa T_{\mu\nu} \tag{3.24}$$

Уравнение Фирца-Паули (3.16) эквивалентно (3.22), (3.23) и (3.24). Рассмотрим случай, когда источник обращается в 0.

Если $T_{\mu\nu} = 0$, тогда его след тоже 0, h обращается в 0, он выпадает из (3.24), получим:

$$\begin{cases} (\Box - m^2) \cdot h_{\mu\nu} = 0 \\ \delta_{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

— уравнения Фирца-Паули в пустоте. Они описывают, в частности, массивные гравитационные волны в плоском пространстве (уравнения для массивных гравитационных волн).

Задача (показать, что массивный гравитон описывается заданным решением)

Упражнение 3.3. *В качестве задачи показать, что массивный гравитон, который летит вдоль оси z описывается решением:*

$$h_{\mu\nu}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos\omega(t - kz)$$

Это 2 поляризации, которые были, но сейчас их 5. Поэтому есть дополнительный член:

$$h_{\mu\nu}(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz) + \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & 0 \\ V_1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz) +$$

$$\begin{pmatrix} 2S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

где $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Первый член — это тензорная часть поля, второй – векторная, а третий – скалярная часть. Все уравнения удовлетворяются, так как $\cos(\omega t - kz)$ — это гармоническая функция, которая сокращается оператором Клейна-Гордона. След каждой из этих матриц равен 0. Дивергенция тензора — это умножение на волновой вектор, который идёт вдоль оси z.

Если умножим $k^\mu = (\omega, 0, 0, k)$, то получим 0. Интерпретация такая: гравитационная волна превращает волну в кольцо и сжимает его. В данном случае будет сложнее, потому что есть ещё векторная и скалярная части. Фирс и Пауль в 1939г выдвинули теорию, а уравнения были написаны позже.

Поля Штюкельберга

$$\Box h_{\mu\nu} + \ldots = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2a\varphi T_{\mu\nu}$$

Уравнение Фирса-Паули неинвариантно относительно калибровочных преобразований. Левая часть уравнения инвариантна, правая – нет. Массовый член разрушает симметрию уравнений по отношению

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$$

Штюкельберг придумал метод: можно эту инвариантность вернуть путём искусственного введения искусственных полей.

Введем:

$$h_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu} + \delta_\mu A_\nu + \delta_\nu A_\mu$$

Вместо 10 полей используем 14. $\chi_{\mu\nu}$ содержит 10 полей и $\delta_\mu A_\nu + \delta_\nu A_\mu$ ещё 4. Такое представление инвариантно относительно преобразований.

$$\chi_{\mu\nu} \to \chi_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu - \varepsilon_\mu$$

Если проделаем такой сдвиг, то это не меняет систему. Благодаря этим искусственным сдвигам можем наложить калибровочные условия и что-то потребовать от поля $\chi_{\mu\nu}$. Соответственно, $\chi_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ называются **полями Штюкельберга**. Это искусственное разбиение позволяет наложить некие условия на $\chi_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu}$ на поля.

Скачок Ван Дама-Вельтмана-Захарова

Интересное замечание было сделано в 1970 году Ван Дамом-Вельтманом-Захаровым (ВДВЗ). Рассмотрим уравнение для массивных гравитонов:

$$\Box h_{\mu\nu} + \ldots = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2a\varphi T_{\mu\nu}$$

Если возьмём массу и устремим её к 0, то член $m^2 h_{\mu\nu}$ пропадает. Оставшееся соответствует безмассовым гравитонам. Будто они получаются из массивных гравитонов в пределе малых масс. Может быть масса гравитона не равна 0, но очень-очень маленькая. Поэтому можно ввести экспериментальные ограничения.

Ван Дам, Вельтман и Захаров стали первыми, кто вывел, что предсказания теории Фирса-Паули для очень маленьких масс не близки к предсказаниям обычной линейной гравитации (ОТО) в пределе слабого поля. Оказывается, что если используем уравнение Фирса-Паули, чтобы вычислить силу гравитационного притяжения между двумя неподвижными телами, и потом возьмём предел, когда масса обращается в 0, то не получаем Ньютоновский потенциал, потому что уравнения Фирса-Паули эквивалетны системе:

$$\begin{cases} \Box h_{\mu\nu} + \delta_\nu \delta_\nu h = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2a\varphi T_{\mu\nu}, \\ \delta^\mu h_{\mu\nu} = \delta_\nu h, \\ h = -\frac{2}{3}\frac{\varphi}{m^2} T. \end{cases}$$

Появилась неприятность в знаменателе: $m^2 \to 0$. С точки зрения физики, плавный предел совершенно не гарантирован. Потому что у массивных гравитонов 5 степеней свободы, безмассовых 2. Меняется число степеней свободы и нужно как-то избавиться от 3 лишних. Обычно от них не удаётся избавиться плавным способом. Чтобы удалось понять, что происходит, можно использовать представление Штюкельберга:

$$h_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu} + \frac{1}{m}(\delta_\mu A_\nu + \delta_\nu A_\mu) + \frac{1}{m^2}\delta^2_{\mu\nu}\Phi$$

Идея заключается в том, что разбиваем 5 на 2 + 2 +1: 2 тензорные моды, 2 векторные моды и 1 скалярная. Преобразования:

$$\begin{cases} \chi_{\mu\nu} \to \chi_{\mu\nu} + \delta_\mu \varepsilon_\nu + \delta_\nu \varepsilon_\mu, \\ A_\mu \to A_\mu - \varepsilon_\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_\mu \to A_\mu \delta_\mu \chi, \\ \Phi \to \Phi - \chi \end{cases}$$

Эти преобразования могут быть использованы, чтобы наложить калибровочные условия. Можно потребовать:

$$\delta^\mu \chi_\mu = 0$$

$\delta^\mu A i_\mu = 0$

Налагаем условие Лоренца в каждом секторе. Затем подставляем их в систему, эквивалентную уравнению Фирса-Паули. Из условий видно, что $\delta^{\mu}\chi_{\mu\nu}$ и $\delta^{\mu}\delta_{\nu}A^{\mu}$ зануляются, тогда

$$\delta^{\mu}h_{\mu\nu} = \delta^{\mu}\chi_{\mu\nu} + \frac{1}{m}(\Box A_{\nu} + \delta^{\mu}\delta_{\nu}A^{\mu}) + \frac{1}{m^2}\delta_{\nu}^2\Box\Phi = \frac{1}{m}(\Box A_{\nu} + \frac{1}{m^2}\delta_{\nu}\Box\Phi$$

Далее вычисляем след:

$$h = \chi + \frac{2}{m}\delta_{\mu}A^{\mu} + \frac{1}{m^2}\Box\Phi$$

Берём производную от этого уравнения. Также эти уравнения должны быть пропорциональны:

$$\frac{1}{m}(\Box A_{\nu} + \frac{1}{m^2}\delta_{\nu}\Box\Phi = \delta_{\nu}\chi + \frac{1}{m^2}\delta_{\nu}\Box\Phi$$
$$\Box A_{\nu} = m\delta_{\nu}\chi$$

Это первое уравнение. Получается, что из

$$\delta^{\mu}h_{\mu\nu} = \delta_{\nu}h \rightarrow \Box A_{\nu} = m\delta_{\nu}\chi$$

h должно быть пропорционально T:

$$h = -\frac{2}{3}\frac{\varphi}{m^2}Th \rightarrow \Box\Phi = -\frac{2}{3}\varphi T - m^2\chi$$

Это второе уравнение. Самое большое уравнение сводится:

$$\Box h_{\mu\nu} + \delta_{\nu}\delta_{\nu}h = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2a\varphi T_{\mu\nu} \rightarrow (\Box - m^2)\chi_{\mu\nu} +$$

$$+\delta_{\mu\nu}(\chi - \Phi) - m(\delta_{\mu}A_{\nu} + \delta_{\nu}A_{\mu}) = -\varphi T_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\varphi T\eta_{\mu\nu}$$

Это третье уравнение. В результате получили во такие 3 уравнения:

$$\begin{cases} (\Box - m^2)\chi_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}(\chi - \Phi) - m(\delta_{\mu}A_{\nu} + \delta_{\nu}A_{\mu}) = -\varphi T_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\varphi T\eta_{\mu\nu}, \\ \Box A_{\nu} = m\delta_{\nu}\chi, \\ \Box\Phi = -\frac{2}{3}\varphi T - m^2\chi. \end{cases}$$

Теперь можем взять предел $m \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \Box\chi_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}(\chi - \Phi) = -\varphi T_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\varphi T\eta_{\mu\nu}, \\ \Box A_{\nu} = 0 \rightarrow A_{\mu} = 0, \\ \Box\Phi = -\frac{2}{3}\varphi T. \end{cases}$$

Источник векторных мод пропадает. Векторные моды не связаны с материей, поэтому можем их представить 0. Скалярная мода остаётся связанной с источником. В пределе $m \to 0$ остаётся 3 степени свободы. Так как это не уравнение для безмассового гравитона, мы испортили уравнения для тензорной части. К тому же сюда ещё вошёл скалярный гравитон. Суть в том, что в безмассовом пределе отщепляются векторные моды, но скалярная часть гравитона остаётся и он остаётся связанным со следом тензора энергии-импульса.

Если берём обыкновенный массивный источник, например, тяжёлую частицу или тяжёлое тело, то у него след тензора не равен 0. Поэтому это будет возбуждать скалярной гравитон, и он приводит к дополнительному притяжения между телами. В безмассовом пределе остаётся 3 степени свободы: 2 тензорные и 1 скалярная.

Лекция 4. Взаимодействие статических источников

Допустим, имеется какая-то теория поля, хотим посчитать простейшую диаграмму и с помощью этой диаграммы посчитать силу. Разберем простейший пример скалярного поля. Напишем лагранжиан:

$$Z = -\frac{1}{2}\delta_\mu \Phi \delta^\mu \Phi - \frac{m^2}{2}\Phi^2 + g\Phi T(\varkappa)$$

Уравнения поля такие:

$$(\Box - m^2)\Phi = -gT,$$

где T играет роль статического внешнего источника, g — это константа связи. Переходим в импульсное представление.

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \Phi(x)e^{ikx}d^4x$$

$$\Phi(x) = \int \Phi(x)e^{-ikx}dx$$

Пишем такое же представление для T:

$$T(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int T(k)e^{ikx}d^4k$$

Затем подставляем уравнения в уравнение поля:

$$(-k^2 - m^2)\Phi(k) = -gT(k)$$

Отсюда получаем:

$$\Phi(k) = g\frac{1}{k^2+m^2}T(k)$$

где $\frac{1}{k^2+m^2} = D(x)$ – пронагатор.

Переходим в координатное представление и получаем:

$$\Phi(x) = \frac{g}{(2\pi)^4}\int \frac{T(k)}{k^2+m^2}e^{ikx}d^4k$$

В результате, получили решение уравнений. Теперь предположим, что есть другой источник:

$$\widetilde{T}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \widetilde{T}(p)e^{ipx}d^4p$$

В результате получаем, что $\Phi(x)$ – это уравнение первого источника, $\widetilde{T}(x)$ - второго источника.

Чтобы посчитать взаимодействие источников, необходимо перемножить $\Phi(x)$ и $\widetilde{T}(x)$ и проинтегрировать по всему пространству и времени.

$$g\int \widetilde{T}(x)\Phi(x)d^4x = \frac{g^2}{(2\pi)^8}\int\int \frac{T(k)\widetilde{T}(p)}{k^2+m^2}e^{i(k+p)x}dxdkdp =$$

Когда интегрируем по $d^4(x)$, это порождает δ функцию

$$= \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int\int \frac{T(k)\widetilde{T}(p)}{k^2+m^2}\delta(k+p)d^4kd^4p = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int\int \frac{T(k)\widetilde{T}(-k)}{k^2+m^2}d^4k = \frac{1}{(2\pi)^4}\int M_{fi}(k)d^4k$$

Амплитуда взаимодействия

Эта комбинация называется *амплитудой рассеяния.* Амплитуда взаимодействия:

$$M_{fi} = g^2\frac{T(k)\widetilde{T}(p)}{k^2+m^2}$$

Так как это пропагатор, то более общее уравнение имеет вид:

$$M_{fi} = g^2T_1(k)D(k)T_2(-k)$$

Фурье образ от амплитуды даёт потенциал взаимодействия, но он имеет смысл только в энергетическом пределе. Если рассмотрим два неподвижных источника, между которыми происходит обмен

$$T_1(x) = g_1\delta(\bar{x}-\bar{x}_1)$$

$$T_2(x) = g_2\delta(\bar{x}-\bar{x}_2)$$

Переданные 4-импульс частицы, которые обмениваются $k^\mu = (0,\vec{k})$, и этот квант не имеет временной части. Тогда потенциал взаимодействия вычисляется с помощью:

$$V_{12} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}M_{12}(\vec{k})$$

Возьмем Фурье образ от T_1 и T_2.

$$T_1\vec{k} = \int e^{i\vec{k}\vec{x}}T_1(x)d^3x = q_1\int e^{i\vec{k}\vec{x}}\delta(\bar{x}-\bar{x}_1)d^3x = q_1e^{i\vec{k}\vec{x}_1}$$

$$T_2\vec{-k} = q_2e^{-i\vec{k}\vec{x}_2}$$

Подставляем эти образы в общее уравнение амплитуды взаимодействия.

$$V = -g^2\frac{g_1g_2}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}}{\vec{k}^2+m^2}$$

Если обозначим $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{r}$ и используем формулу

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\vec{k}^2+m^2} = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}$$

Подставляем и получаем:

$$V = -\frac{g^2}{4\pi}q_1 q_2 \frac{e^{-mr}}{r}$$

Это потенциал взаимодействия скалярной теории за счёт обмена массивным скалярным квантом. Действует «-», значит, действуют силы притяжения. Следовательно q_1 и q_2 имеют одинаковый знак, так как заряды одного знака притягиваются. Притяжение характерно для взаимодействия, переносимого частицами с чётными спинами (например, со спинами 0 и 2). В то время, как спин нечётный (1), они отталкиваются. В теории электромагнитного векторного поля получаем $+$.

Упражнение 4.1. *Посчитать потенциал взаимодействия для векторного поля.*

Притяжение безмассовой гравитации

Рассмотрим притяжение в безмассовой гравитации, уравнения которой после фиксации калибровки такие:

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

$$\widetilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$$

Из этого следует:

$$\Box h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

Посчитаем след:

$$-\Box h = -2\varkappa T$$

$$\Box h = +2\varkappa T$$

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h = -2\varkappa T_{\mu\nu} + \varkappa\eta_{\mu\nu}T$$

$$Z_2 = \frac{1}{4\varkappa}[-\frac{1}{2}(\delta_\alpha h_{\mu\nu})^2 + (h_\alpha)^2 - h^\alpha\delta_\alpha h + \frac{1}{2}(\delta_\alpha h_{\mu\nu})^2] + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

Проблема в том, что константа связи появляется в неправильном месте. Необходимо, чтобы она появлялась за скобками.

$$Z = -\frac{1}{2}(\delta\Phi)^2 - \frac{m^2}{2}\Phi^2 + g\Phi T$$

Константа связи должна появляться там, где стоит взаимодействие - $g\Phi T$. Чтобы эта $\varkappa$ появилась в нужной части уравнения, необходимо поглотить, рескоировать h.

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{4\varkappa}\widetilde{h}_{\mu\nu} = 2\sqrt{\varkappa}\widetilde{h}_{\mu\nu}$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2}(\delta_\alpha \widetilde{h}_\mu)^2 + \ldots + \frac{1}{2}(\delta_\alpha \widetilde{h})^2 + \sqrt{\varkappa}\widetilde{h}_{\mu\nu}T^\mu$$

$\sqrt{\varkappa} = g$ имеет смысл константы связи:

$$2\sqrt{\varkappa}\Box(h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}) = -2\varkappa T_{\mu\nu}$$

$$\Box(h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}) = -\sqrt{\varkappa}T_{\mu\nu}$$

$$-\Box h = -\sqrt{\varkappa}T_{\mu\nu}$$

Подставляем:

$$\Box h_{\mu\nu} = -\sqrt{\varkappa}T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta\sqrt{\varkappa}T$$

$$\Box h_{\mu\nu} = -\sqrt{\varkappa}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta T)$$

Это – **уравнение безмассовых гравитонов**. Переходим в Фурье представление: $\Box \to -k^2$ и получаем:

$$h_{\mu\nu}(k) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{k^2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}) = \sqrt{\varkappa}\frac{1}{K^2}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta} =$$

Поскольку $T^{\alpha\beta}$ являются симметричным тензором, то можно сделать симметризацию:

$$\sqrt{\varkappa}\frac{1}{2k^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta},$$

где пропагатор:

$$\frac{1}{2k^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) = D_{\mu\alpha\nu\beta}(k)$$

Теперь рассчитаем диаграмму. Первый источник:

$$T^{(1)}_{\mu\nu}(x) = M_1\delta^0_\mu\delta^0_\nu\delta(x - x_1)$$

Фурье образ от него:

$$T^{(1)}_{\mu\nu}(k) = M_1\delta^0_\mu\delta^0_\nu e^{i\vec{k}\vec{x}_1}$$

Для второго источника:

$$T^{(2)}_{\alpha\beta}(x) = M_2 \delta^0_\alpha \delta^0_\beta \delta(x - x_2)$$

Фурье образ второго источника:

$$T^{(2)}_{\alpha\beta}(-k) = M_1 \delta^0_\alpha \delta^0_\beta e^{-i\vec{k}\vec{x}_2}$$

Теперь необходимо посчитать амплитуду, свёртку двух пропагаторов.

$$M_{12} = (\sqrt{\varkappa})^2 T^{(1)}_{\mu\nu}(k) D_{\mu\nu\alpha\beta} T^{(2)}_{\alpha\beta}(-k) =$$

Поскольку стоят δ-функции, то считаем тензор энергии и импульса просто массивной частицей, которая движется по мировой линии.

$$= \varkappa M_1 M_2 e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} D_{00,00}(k)$$

И последнее, что такое $D_{00,00}(k)$:

$$D_{00,00}(k) = \varkappa M_1 M_2 e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \frac{1}{2k^2}$$

Теперь вычислим Фурье образ:

$$V_{12} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k M_{12}(k) = -\frac{\varkappa M_1 M_2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{\vec{k}^2} = -\frac{\varkappa M_1 M_2}{8\pi r},$$

где

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{\vec{k}^2} = 2\pi r$$

$$\varkappa = 8\pi G$$

Теперь подставляем и считаем:

$$V_{12} = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

Массовые гравитоны

Рассмотрим массивные гравитоны:

$$\Box h_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta_\nu h = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) - 2\varkappa T_{\mu\nu},$$

$$h = -\frac{2\varkappa}{3m^2} T$$

$$(\Box - m^2)h_{\mu\nu} = -2\varkappa T_{\mu\nu} - \frac{2\varkappa}{3m^2}\delta_\mu\delta_\nu T + \frac{2\varkappa}{3}T\eta_{\mu\nu}$$

$h_{\mu\nu} = 2\sqrt{\varkappa}h_{\mu\nu}$:

$$(\Box - m^2)\widetilde{h}_{\mu\nu} = -\sqrt{\varkappa}T_{\mu\nu} - \frac{\sqrt{\varkappa}}{3m^2}\delta_\mu\delta_\nu T + \frac{\sqrt{\varkappa}}{3}T\eta_{\mu\nu} =$$

$$= -\sqrt{\varkappa}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T + \frac{1}{3m^2}\delta_\mu\delta_\nu T)$$

Из этого можно получить пропагатор, так как получается, что в импульсном представлении получим:

$$-(k^2+m^2)h_{\mu\nu}(k) = -\sqrt{\varkappa}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T - \frac{k_\mu k_\nu}{3m^2}T)$$

Тогда,

$$h_{\mu\nu}(k) = \sqrt{\varkappa}\frac{1}{k^2+m^2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T - \frac{k_\mu k_\nu}{3m^2}T) =$$

$$= \sqrt{\varkappa}\frac{1}{k^2-m^2}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}T - \frac{k_\mu k_\nu}{3m^2}\eta_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta}$$

Дифференцирование следа эквивалентно умножению на k. Появляется другой пропагатор:

$$\frac{1}{k^2+m^2}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}T - \frac{k_\mu k_\nu}{3m^2}\eta_{\alpha\beta}) = D_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$D_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{1}{k^2+m^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}T - \frac{2}{3m^2}k_1k_2\eta_{\alpha\beta})$$

Самое важное отличие этого пропагатора в коэффициенте. В предыдущем примере он был равен 1, здесь $\frac{2}{3}$ (в $\frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}T$).

$-\frac{2}{3m^2}k_1k_2\eta_{\alpha\beta}$ исчезнет, когда свернем два источника, так как дивергенция равна 0. Этот член можно назвать безопасным, несмотря на наличие m в знаменателе, так как он выпадает из амплитуды.

Посчитаем амплитуду:

$$M_{12} = \varkappa T^{(1)\mu\nu}(k)D_{\mu\nu\alpha\beta}(k)T^{(2)\alpha\beta}(-k) =$$

Так как те же источники, то вычисления не меняются (формулы):

$$= \varkappa M_1M_2e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}D_{00,00} =$$

$$D_{00,00} = \frac{1}{2(k^2+m^2)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{2\varkappa M_1M_2}{3(k^2+m^2)}e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}$$

Последним делаем Фурье преобразования:

$$\int MD^3k = -\frac{2}{3}\varkappa M_1M_2\int\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2+m^2}d^3k = \frac{1}{4\pi r}e^{-mr}$$

$$V = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int MD^3k = -\frac{2}{3}\varkappa M_1M_2\int\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2+m^2}d^3k =$$
$$= -\frac{4}{3}\frac{\varkappa M_1M_2}{8\pi r}e^{-mr} = -\frac{4}{3}\frac{GM_1M_2}{r}e^{-mr}$$

Это результат Ван Дама-Вельтмана-Захарова. Если базы стремятся к 0, то уравнение не сводится к закону Ньютона, получаем его с коэффициентом $\frac{4}{3}$. Данный коэффициент > 1, так как присутствует скалярные гравитоны. Векторный и скалярный вклад дают $\frac{4}{3}$.

Потенциал взаимодействия V массивный равняется:

$$V = -\frac{4}{3}\frac{GM_1M_2}{r}e^{-mr} \to \frac{4}{3}V_{newton}, m \to 0$$

В пределе $m \to 0$ сила связывается на треть больше, чем Ньютоновская теория. Дополнительные притяжения возникают из-за обмена скалярными гравитонами.

Можно говорить, что G везде разное. Допустим, если поглотить $\frac{4}{3}$, то могли бы найти более правильный закон Ньютона, но тогда будет неправильное отклонение света. Когда лучи света распространяются, то тоже отклоняются, а для света тензор энергии-импульса равен 0.

Поэтому свет нечувствителен к скалярному гравитону. Если подправим G, то испортим распространение света. Иначе, если исправить закон распространения света, то этим испортим закон Ньютона, но свет будет распростряться правильно. Закон Ньютона для массивных тел оказывается неправильным в пределе $m \to 0$, но лучи света движутся правильно, как в ОТО, поскольку для них $T = 0 \to$ и они не взаимодействуют со скалярным гравитоном.

Вывод: невозможно достигнуть одновременного выполнения закона Ньютона и правильного распространения света. Иначе говоря, невозможно добиться правильного выполнения классических тестов общей теории относительности. А поскольку эти тесты проверены экспериментально с огромной степенью точности внутри солнечной системы, в результате был сделан вывод, что теория массивной гравитации совершенно не согласуется с наблюдениями и поэтому должна быть отвергнута.

Рекомендуемая литература

Список литературы с оригинальными статьями, на которые можно опираться при подготовке:

1) H. Van Dam and M. Veltman, Nucl. Phys B22 (1970) 397

2) В.И. Захаров, Письма в Жетв 12(1970) 447

3) Y. Iwasiki Phys.Pa D10 (1970) 2255

4) H. Magjiove, Gvavitatio and waves. Vol1 Theory and Expariment, Oxford 2008

Решение ВДВЗ (Скачок Ван Дама-Вельтмана-Захарова)

Безмассовые гравитоны являются пределом нелинейной теории. Статическое, сферическое, симметричное гравитационное поле в общей теории относительности описывается метрикой Шварцшильда.

$$ds^2 = -(1-\frac{r_g}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2(d\sigma^3 + \sin^2\sigma d\phi^2)$$

где $r_g = 2GM$ — это радиус Шварцшильда.

На расстояниях много больших, чем радиус Шварцшильда r_g, $r >> r_g$, $1-\frac{r_g}{r}$ поправку можно рассматривать как малые возмущения к плоской метрике.

$$g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\begin{pmatrix} f_{\mu\nu} = -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

– метрика Минковского, переписанная в сферических координатах.

$$h_{00} = h_{\mu\nu} = \frac{r_g}{r}$$

– малые возмущения с ненулевыми компонентами. Поскольку это малые возмущения, они должны удовлетворять уравнениям линеаризованной гравитации.

$$\nabla_\alpha\nabla^\alpha h_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla^\alpha h_{\alpha\nu} - \nabla_\nu\nabla^\alpha h_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\nabla_\nu h +$$
$$+ f_{\mu\nu}(\nabla^\alpha\nabla^\beta h + \nabla^\alpha\nabla_\alpha h) = 0$$

Здесь сделали обобщение – раньше писали просто обычные частные производные, но поскольку работаем в сферических координатах, пишем ковариантные производные, где есть ковариантные производные по отношению к метрике $f_{\mu\nu}$. Метрика плоская, а координаты кривые.

$$h = f^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

Сейчас все индексы движутся с помощью с метрики $f_{\mu\nu}$.

Лекция 5. Решение ВДВЗ (скачок Ван Дама-Вельтмана-Захарова) на уровне метрик

Решение задачи на взаимодействие двух источников, переносимое массивным векторным полем

Задача состояла в том, чтобы посчитать взаимодействие двух источников, переносимых массивным векторным полем. В этом случае принципиальная разница в том, что вместо притяжения должны получить отталкивание. Поскольку в теории векторного поля заряды одинакового знака отталкиваются, поэтому потенциал взаимодействия должен быть положительным, неотрицательным:

$$S = \int d^u x(-\frac{1}{4}(\delta_\mu A_\nu - \delta_\nu A_\mu)(^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\nu) - \frac{m^2}{2}A^\mu g_\mu A^\nu + gL_\mu A^\mu) =$$

$$= \int d^u x(\frac{1}{2}A^\mu(g_\mu \delta^2 - \delta_\mu \delta_\nu - m^2 g_{\mu\nu})A^\nu + I_\mu A^\mu$$

$$D_{\mu\nu} = Ak_\mu k_\nu + Bg_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu}(k^2 - m^2) - k_\mu k_\nu D^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda(-g)$$

Нужно записать квадратичное действие и найти в виде оператора во вкладках полей, и найти обратный оператор к этому – это правильный способ вычисления пропагаторов. Дело в том, что когда меняем сигнатуры, меняется знак тензора поля, потому что базовым объектом считается a^μ, который одинок в обеих сигнатурах, и, когда опускаем индекс, меняется знак.

$$(k^2 - m^2)A\delta_u^\lambda + (k^2 - m^2)B - Ak_\mu k^\lambda - Bk_\mu k^\lambda k^2 = -g\delta_\mu^\lambda$$

$$A = \frac{-g}{k^2 - m^2}$$

$$B = \frac{A}{m^2} = \frac{g}{m^2(k^2 - m^2)}$$

$$D_{\mu\nu} = -g(\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2(k^2 - m^2)}$$

$$M_{1,2} = -gq_1 q_2 e^{ik(x_1 - x_2)}\frac{1}{(k^2 - m^2)}$$

$$V = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d)^3 kge^{i\bar{k}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}\frac{1}{\bar{k} + m^2} = g^2 q_1 q_2 \frac{e^{-mr}}{r}$$

Если изменить сигнатуру метрики, появится «-»:

$$\lim_{n\to 0} = \frac{1}{r}$$

Теория массивного векторного поля

Теория массивного векторного поля называется *полем Прока*. Пропагатор не нужен, поскольку при его сворачивании с сохраняющимся током свертка равна 0. Если берем теорию массивного векторного поля (поле Прока), когда варьируем, получаем классическое уравнение движения:

$$\delta_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = -gG^\nu \tag{5.1}$$

Когда возьмём вторую дивергенцию ур. 5.1 по индексу ν, дивергенция первого члена тождественно равняется 0, дивергенция тока равна 0, поэтому дивергенция A^ν равняется 0. Это условие Лоренца, которое автоматически вытекает из

$$\delta_\nu A^\nu = 0, \tag{5.2}$$

$$\delta_\mu F^{\mu\nu} = \delta^\mu(\delta_\mu A^\nu - \delta_\nu A^\mu)\Box A_\nu - \delta_\nu \delta^\mu A_\mu \tag{5.3}$$

Производная от дивергенции, поскольку дивергенция равняется 0, то ур. 5.3 равно бокс A_ν :

$$\delta_\mu F^{\mu\nu} = \delta^\mu(\delta_\mu A^\nu - \delta_\nu A^\mu)\Box A_\nu - \delta_\nu \delta^\mu A_\mu = \Box A_\nu$$

Поэтому ур. 5.1 будет:

$$(\Box - m^2)A_\nu = -gG_\nu$$

В сигнатуре выражение будет иметь вид:

$$(k^2 + m^2)A_\nu = gG_\nu$$

$$A_\nu = \frac{g}{k^2 + m^2} G_\nu$$

Данное выражение можно представить в виде:

$$A_\nu = \frac{g}{k^2 + m^2} G_\nu = g\frac{g_{\nu\alpha}}{k^2 + m^2} \cdot G^\alpha$$

Это тот же самый пропагатор без хвоста, зависящего от k, который не нужен

$$\frac{g_{\nu\alpha}}{k^2 + m^2} = D_{\alpha\nu}$$

Пишем амплитуду взаимодействия:

$$M_{1,2} = g^2 \frac{g_k^{(1)\mu} g_{\mu\nu} G_{-k}^{(2)\nu}}{k^2 + m^2}$$

И потом от этого считается Фурье, и поскольку здесь стоит $g_{00} = -1$, получаем:

$$-\frac{g^2}{k^2+m^2} q_1 q_2 e^{i\bar{k}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}$$

Этот «-» важен, так как именно из-за метрики потенциал получается положительным, $g_{00} = -1$.

$$V = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int M_{12}$$

Это обуславливает отталкивание из-за положительного потенциала. Видим, что нет никакого скачка или разрыва, всё происходит плавно. В пределе массивное векторное поле имеет 3 степени свободы, не 2, а 3. Это вытекает из факта, что потенциал имеет 4 функции и одну связь (ур. 5.2), остаются 3 степени свободы, которые соответствуют двум поперечным фотонам и одному продольному. Они поперечны и продольны всегда, но в пределе $(m, m = 0)$ продольный фотон отщепляется от источника.

Если записать уравнение Фирца-Паули:

$$\Box h_{\mu\nu} = m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu})$$

в данном уравнении они как будто бы отщеплятся. Когда решим связи, то m^2 оказывается в знаменателе, поэтому она не отщепляется от источника, в отличие от продольного фотона. Везде происходит изменение числа степеней свободы, но лишняя степень свободы становится несвязанной вообще ни с чем, и поэтому её можно считать невозбужденной, в то время как для гравитона она возбуждена.

Решение задачи из домашнего задания (взаимодействие двух источников, переносимое массивным векторным полем)

Гравитон действует:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} eik\mu x^{\mu}$$

Очевидно, что дисперсионное соотношение будет из уравнения:

$$\omega^2 = k^2 + m^2$$

а дальше налагаем связи, и получается:

$$\delta_{\mu} h^{\mu\nu} = \omega h 0\nu - k_z h_{h3\nu} = 0$$

Мы можем переходить в систему отсчёта, где $k_z = 0$

$$e_{0\nu} = \frac{k_z}{\omega} e_{3\nu}$$

Выпишем:

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(k_z)^2}{(\omega)^2}e_{3,3} & \frac{k_z}{\omega}e_{1,3} & \frac{k_z}{\omega}e_{2,3} & \frac{k_z}{\omega}e3,3 \\ -//- & e_{1,1} & e_{2,1} & e_{1,3} \\ -//- & e_{1,2} & e_{2,2} & e_{2,3} \\ -//- & -//- & -//- & e_{3,3} \end{pmatrix} =$$

Из условий можем выразить $e_{1,1}$ через все оставшиеся компоненты, поэтому определяем динамические переменные. Вот эти 5 компонент:

$$e_{2,1}, e_{1,3}, e_{2,2}, e_{2,3}, e_{3,3}$$

эта матрица будет разбиваться на скалярную часть:

$$\frac{m \to 0}{=} \begin{pmatrix} e_{3,3} & 0 & 0 & e_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{3,3} & 0 & 0 & e_{3,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e_{1,3} & e_{2,3} & 0 \\ -//- & 0 & 0 & e_{1,3} \\ -//- & 0 & 0 & e_{2,3} \\ -//- & -//- & -//- & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{1,1} & e_{1,2} & 0 \\ 0 & e_{2,1} & -e_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это преобразуется относительно SO_2 , т.е если взять $e_{1,1} + ie_{1,2}$, то получится $e^{i2\Theta}$. Две матрицы в этом пределе сводятся к:

$$\delta_\mu \xi_\nu + \delta_\nu \xi_\mu$$

Гравитационные волны открыты были недавно, их измеряют. В частности, когда приходит импульс, способны измерить вклад различных поляризаций в сигнал, и возникает вопрос — поляризаций всего 2, не больше? По отклику детектора можно установить верхний предел на лишние поляризации: 2 поляризации точно есть, но может быть их 5. Как раз по отклику знаем, что 2 поляризации соответствуют определенной деформации (например, кресту). В то время, как эти дополнительные 3 поляризации соответствуют другим типам деформации.

$$dS^2 = 1 + \cos dx^2 + 1 \cos dy^2$$

Это длина вдоль x, при этом частица сама не движется. Если решить уравнение геодезического линейного приближения, то частица не движется, сила равна 0. Поэтому 2 частички как были, так и есть, но расстояние между ними, которое измеряется лазером, меняется. Поэтому расстояние вдоль оси x осциллируют по горизонтали, а вдоль оси y по вертикали, это как раз и приводит к такой деформации как показано на 2.1. Это в безмассовом случае. Скалярная мода не толкает «туда-сюда», она приводит к дилатациям, объем увеличивается и уменьшается. Вероятно, векторные моды приводят к смещению. Геодезическое уравнение:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$$

Когда частица покоится, у неё

$$\dot{x}^\alpha = \delta_0^\alpha,$$

– это траектория покоящейся частицы. Если делать малые возмущения, получим

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{0,0} = 0$$

Достаточно посчитать $\Gamma^\mu_{0,0}$. Для тензорных мод $\Gamma^\mu_{0,0} = 0$, поэтому частицы не движутся. Посчитаем для векторных мод, если есть компоненты метрики $h_{0,k} \neq 0$. Проверим это:

$$\Gamma^\mu_{0,0} = (\delta_0 h_0^\mu - \frac{1}{2}^\mu h_{0,0})$$

Если $-\delta^\mu, h_{0,0}$, они возникают. Если есть $h_{0,0}$, которая зависит от z, то возникает сила вдоль оси z. И если есть компонента из матриц h_0^k, то они должны привести к появлению силы. Частица будет менять свои координаты. Возможно, кольцо как целое будет ездить «туда-сюда», но это необходимо проверить.

Дилатация – когда метрика умножается на множитель. Поскольку след метрики равен 0 и скалярная мода:

$$\begin{pmatrix} 2S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Массивные гравитоны экспериментально определяются по их поляризациям, по тому, как они влияют на прибор.

Решение ВДВЗ (Скачок Ван Дама-Вельтмана-Захарова) на уровне метрик

Если напишем решение Шварцшильда:

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\omega^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

то $g_{\mu\nu}$ можно представить как плоскую метрику и поправки:

$$g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$f_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

в то время как h имеет 2 компоненты:

$$h_{0,0} = h_{r,r} = \frac{r_g}{r}$$

все остальные нули, матрица такая:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку эта метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, $G_{\mu\nu} = 0$. Этому возмущению удовлетворяет линейная часть уравнения Эйнштейна. $G_{\mu\nu}$ – это линейная часть:

$$-2G^{linea}_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} + \ldots = 0 \tag{5.4}$$

Более детально это выглядит как

$$\Delta^{\alpha}\Delta_{\alpha}h_{\mu\nu} - \Delta_{\mu}\Delta^{\alpha}h_{\alpha\nu} - \Delta_{\nu}\Delta^{\alpha}h_{\alpha\mu} + f_{\mu}(\Delta^{\alpha}\Delta^{\beta}h_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha}\Delta^{\alpha}h) + \Delta_{\mu}\Delta_{\nu}h = 0, \tag{5.5}$$

где Δ_{μ} есть ковариантная производная по отношению к $f_{\mu\nu}$. Необязательно работать всегда в плоской фоновой метрике, она плоская, но не обязательно использовать Лоренцевы координаты.

Эта система ур. 5.5 достаточно сложна. Возьмем уже готовое решение, разложим его, что даст такое решение:

$$h_{0,0} = h_{r,r} = \frac{r_g}{r}$$

Эта величина должна быть малой, уравнение выше должно быть много меньше единицы:

$$h_{0,0} = h_{r,r} = \frac{r_g}{r} \ll 1 \Rightarrow$$

это означает, что r должен быть много больше чем r_g:

$$\Rightarrow r \gg r_g$$

Это решение применимо на расстоянии гораздо больше, чем гравитационный радиус системы. Если возьмем Солнце, гравитационный радиус Солнца (радиус Шварцшильда)– 3 километра, а радиус Солнца порядка миллиона километров. Мы находимся на расстоянии 150 миллионов километров от Солнца. Можем считать, что поле слабое.

$$\text{Для Солнца} = r_g = 3km$$

Везде внутри Солнечной системы можем с большим успехом применять линейную теорию гравитации, ур. 5.5 Линейная теория ур. 5.4 применима везде внутри Солнечной системы. Раз какие-то отклонения могут проявиться только для Меркурия, они ничтожны. Смещение перигелия Меркурия = 43 секунды за столетия. Малость этого отношения

$$h_{0,0} = h_{r,r} = \frac{r_g}{r} \ll 1$$

подразумевает, что внутри Солнечной системы релятивистские поправки ничтожно малы, существуют три классических теста:

1. Смещение перигелия Меркурия.

2. Отклонение луча света. Отклонение луча света измеряется по самому краю (когда имеется звезда и Солнце). Солнце затмевает звезду, когда подходит к самому краю, можно измерить смещение в видимом положении звезды на небе – это ничтожно малый эффект.

3. Красное смещение. Красное смещение уже современное — это смещение луча радара. Именно в рамках Общей Теории Относительности (ОТО) параметр:

$$\frac{r_g}{r}$$

если этот параметр мал, то можем забыть про все нелинейные эффекты и с успехом применять линейную теорию. Для массивной гравитации это не так. Считаем, что изначально есть какая-то метрика, но не метрика Шварцшильда. Не знаем, что является аналогом метрики в случае массивной гравитации, пусть:

$$dS^2 = -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2 d\omega^2 = (f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \tag{5.6}$$

Будем считать ν и λ функкции от R. Совершим преобразования:

$$R = R(r) = r \cdot e^{\frac{\mu(\nu)}{2}} \tag{5.7}$$

Подставляем ур. 5.7 в ур. 5.6, получим:

$$dS^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}(\frac{dR}{dr})^2 dr^2 + r^2 e^{\mu} d\omega^2 \tag{5.8}$$

В общей теории относительности эти метрики совершенно эквивалентны (ур. 5.6 и 5.8). В массивной гравитации они разные. Потому что в массивной гравитации нельзя делать преобразование координат. Потому что инвариантность относительно

$$h_{\mu\nu} \Rightarrow h_{\mu\nu} + \Delta_\mu \xi_\nu + \Delta_\nu \xi_\mu$$

нарушена массовым членом, поэтому ур. 5.6 не то же самое, что ур. 5.8. В метрике 5.6 содержатся две функции ν и λ, а в метрике 5.8 три: ν, λ и μ, Когда делаем массивную гравитацию, нужно использовать метрику 5.8, потому что нужна лишняя степень свободы. Когда решаем сферическую симметричную задачу, ожидаем, что ответ будет такой же, как в Общей Теории Относительности (ОТО). И дополнительная мода, потому что массивный гравитон распространяется в сферически симметричном секторе. Безмассовый гравитон удовлетворяет теореме Биркгофа.

По теореме Биркгофа не существует динамики в сферически симметричном случае, не существует сферически симметричных гравитационных. Если имеется звезда, которая пульсирует, внутри неё гравитационное поле меняется со временем, там газ пульсирует, но снаружи метрикой будет Шварцшильд. Пульсации не распространяются наружу, они останавливаются там, где границы звезды. Снаружи есть чистый Шварцшильд, это теорема Биркгофа. Она справедлива только в рамках Общей Теории Относительности (ОТО), а в массивной гравитации это уже не так, поскольку имеется скалярная поляризация гравитона, которая ведет себя как скалярное поле, а оно может распространяться. Есть правило: если поле имеет спин S, то мультиполис l меньше чем S :

$$l < S$$

В электродинамике тоже нет сферически симметричных электромагнитных волн. Излучение начнется с диполя. Если диполь осциллирует, то это порождает волну, а если монополь осциллирует, то это ничего не порождает.

Теорема Гаусса для статики. Если записать уравнение Максвелла и решить в случае чистой физической симметрии, тогда:

$$A_\mu = \delta^0_\mu f(t,r) \tag{5.9}$$

Из уравнения Максвелла находится нетривиальное решение для f, которое окажется чистой калибровкой, потому что ур. 5.9 всегда можно представить в виде:

$$A_\mu dx^\mu = A_0 dt + Ardr = \delta_\mu \alpha dx^\mu$$

В случае уравнения Максвелла, чистая калибровка – это то же самое в гравитации, но не в массивной. В массивной гравитации сферически симметричная мода является динамической в строгом смысле, она переносит энергию, а эта мода никакой энергии не переносит (это чистая калибровка). Перепишем ур. 5.6

$$dS^2 = -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2 d\omega^2 = (f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu =$$

$$= e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda+\mu}(1+\frac{r\mu'}{2})^2 dr^2 + r^2 e^\mu d\omega^2$$

Это метрика, которая содержит 3 функции ν, μ, $\lambda+\mu$. Представим ее в виде метрики Минковского:

$$dS^2 = -e^{\nu(R)}dt^2 + e^{\lambda(R)}dR^2 + R^2d\omega^2 = (f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu = e^{\nu(R)}dt^2 +$$

$$+e^{\lambda+\mu}(1+\frac{r\mu'}{2})^2dr^2 + r^2e^\mu d\omega^2 = f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$h_{\mu\nu}$: разлагаем метрику по малости ν, λ, μ вычисляем h и получаем такие компоненты:

$$h_{0,0} = -\nu$$

$$e^\nu = 1+\nu$$

Учтем «-» и получим:

$$-e^\nu = -1-\nu,$$

где -1 соответствует фоновой метрике, а ν соответствует $h_{0,0} = -\nu$.

$$h_{r,r} = \lambda + (r\mu)'$$

$$h_{\theta,\theta} = \mu r^2$$

$$h_{\phi\phi} = \mu\nu^2\sin^2\theta$$

Получили уравнения сферического симметричного массивного гравитона. Выражения содержат 3 функции ν,λ,μ. Эти функции должны определяться из решения уравнения Фирса-Паули. В это уравнение вместо 0 в правой части пишем:

$$\Delta^\alpha\Delta_\alpha h_{\mu\nu} - \Delta_\mu\Delta^\alpha h_{\alpha\nu} - \Delta_\nu\Delta^\alpha h_{\alpha\mu} + f_\mu(\Delta^\alpha\Delta^\beta h_{\alpha\beta} + \Delta_\alpha\Delta^\alpha h) + \Delta_\mu\Delta_\nu h = m^2(h_{\mu\nu} - hf_{\mu\nu}), \tag{5.10}$$

Подставим эти функции в ур. 5.10. Градиентные преобразования запрещены. Они проходят через левую часть уравнения, но не через правую. Если меняем:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

В тоже время не меняем метрику:

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu}$$

У нас есть фоновая метрика и гравитонное поле. Они описываются тензором. Фоновая метрика описывается тензором Минковского, а гравитонное поле описывается:

$$h_{0,0} = -\nu$$

$$h_{\mu\nu} = \lambda + (\mu\nu)\prime,$$

$$h_{00} = \mu r^2$$

$$h_{\phi\phi} = \mu\nu^2 \sin^2\sigma$$

Такая симметрия невозможна. Однако, поскольку уравнения тензорные, то существует другая симметрия:

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

Можно одновременно преобразовать обе метрики, и тогда это становится симметрией. Можно сделать преобразования не только бесконечно малые, а любые, поскольку это уравнение записано в ковариантном виде. Можно использовать уравнения Фирса - Паули, которые неинвариантны по отношению к

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu}$$

Однако инвариантны по отношению к

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

Можно делать произвольное преобразование координат:

$$f_{\mu\nu} \to \widetilde{f}_{\alpha\beta} = \frac{dx^\mu}{d\widetilde{x}^\alpha}\frac{dx^\nu}{d\widetilde{x}^\beta} f_{\mu\nu}$$

И для $h_{\mu\nu}$ это просто закон преобразования тензора второго ранга

$$h_{\mu\nu} \to \widetilde{h}_{\alpha\beta} = \frac{dx^\mu}{d\widetilde{x}^\alpha}\frac{dx^\nu}{d\widetilde{x}^\beta} h_{\mu\nu}$$

Эти уравнения ковариантны. Когда рассматриваем бесконечно малое преобразование координат, возвращаемся к этим уравнениям:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta_{\nu\mu}$$

Считаем, что

$$x^\mu = \widetilde{x}^\mu + \varepsilon\xi^\mu$$

Предположим, что преобразование инфинитизимальное (бесконечно малое), 2 корня той системы очень близки, отличаются они только на векторное поле, которое пропорционально ε. ε – маленькое число, и при разложении инвариантов получим:

$$\widetilde{f}_{\alpha\beta} = (x+)\frac{dx^{\mu}}{d\widetilde{x}^{\alpha}}\frac{dx^{\nu}}{d\widetilde{x}^{\beta}}f_{\mu\nu}(x) \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow\ x = x + \varepsilon\xi$$

разлагаем по ε аргумент ур. 5.11 и 2 матрицы из этого уравнения в линейном приближении. (Рассмотреть самостоятельно)

Возвращаемся к задаче:

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{m^2}{2}\cdot(\lambda + 3\mu + r\mu') \\ \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = +m^2(\mu + \frac{\nu}{2}) \\ m^2\cdot(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda}{r)=0} \end{cases}$$

Эти уравнения нетрудно проверить на математике. Рассмотрим сначала случай $m = 0$. В безмассовом случае все 3 уравнения будут равны 0:

$$\begin{cases} \frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = \underbrace{-\frac{m^2}{2}\cdot(\lambda + 3\mu + r\mu')}_{=0} \\ \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = \underbrace{+m^2(\mu + \frac{\nu}{2})}_{=0} \\ \underbrace{m^2\cdot(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda}{r)}}_{=0} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай, где $m = 0$, безмассовый случай. Подставляем значение в систему:

$$\frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = 0$$

$$\frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow\ -\nu = \lambda = \frac{C}{r}, \qquad C = R_g \tag{5.12}$$

Это решение безмассовой гравитации. Теперь рассмотрим массивный случай. В массивном случае не 2, а появляется 3 амплитуды. Так как есть масса, можем решить эти уравнения.

$$\nu = -\frac{2C}{r}e^{-mr}$$

$$\lambda = \frac{C}{r}(1+mr)^{-mr}$$

$$\mu = C\frac{1+mr+(mr)^2}{m^2r^2}e^{-mr}$$

Эти решения называются *потенциалом ВДВЗ*. Это массивный аналог линеаризованного линейного решения Шварцшильда, где – константа интегрирования, которая будет так или иначе связана. Замечаем, что m входит в знаменатель.

Имеется Юкаевская экспонента, решения подавлены по Юкаве, но если

$$r \ll \frac{1}{m},$$

где $\frac{1}{m}$ — это комптоновская длина волны гравитона, которая должна быть порядка радиуса вселенной. Тогда экспонентой можно пренебречь и будет $rm \ll 1$. Решение становится:

$$\nu = -\frac{2C}{R}$$

$$\lambda = \frac{C}{R}$$

$$\mu = -\frac{C}{m^2r^3}$$

В этом решении масса гравитона не играет роли. Но неприятно соотношение ур. 5.12 в линейной теории. В безмассовой теории:

$$\lambda + \nu = 0$$

но теперь $\lambda + \nu \neq 0$. Это именно то, что портит закон Ньютона и проявляется на урове пропагатора.

Была метрика, в которой

$$R = re^{\frac{\mu}{2}} = r(1+\frac{\mu}{2}) \Rightarrow$$

и поскольку в этом уравнении μ должно быть мало,а если μ - мало, то r достаточно велико. Это позволяет выразить r через R, получаем что:

$$\Rightarrow r = R(1-\frac{\mu}{2}+\dots)$$

Поэтому:

$$\nu = \frac{2C}{r} = \frac{2C}{R}\dots$$

$$\lambda = \frac{C}{R}+\dots$$

Вернемся к изначальной записи метрики через R:

$$dS^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dR^2 + R^2 d\omega^2 \tag{5.13}$$

где ν и λ малы:

$$\nu = \frac{2C}{r} = \frac{2C}{R} + \ll 1$$

$$\lambda = \frac{C}{R} + \ll 1$$

Возвращаемся к геометрии пространства-времени. Раньше была метрика, и её писали либо через координату r, либо через R. Хотим посчитать геодезические в такой метрике. Метрика, которую решили:

$$dS^2 = e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda+\mu}(1 + \frac{r\mu'}{2})^2 dr^2 + r^2 e^{\mu} d\omega^2$$

Эти функции уже определили, знаем их и хотим решать уравнение

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0$$

оно ковариантно, и поэтому удобнее перейти обратно к координатам, в которых функция перед элементом метрики сферы является радиусом:

$$dS^2 = e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda+\mu}(1 + \frac{r\mu'}{2})^2 dr^2 + \underbrace{r^2 e^{\mu}}_{R^2} d\omega^2$$

Обсудим нелинейную теорию Фирса-Паули – это нелинейная теория с двумя метриками, одна метрика динамическая $g_{\mu\nu}$ и друга метрика фоновая $f_{\mu\nu}$ их 2, необходимо ввести 2 метрики, и, если заменим динамическую метрику, запишем в виде:

$$ds_g^2 = g_{\mu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dR^2 + R^2 d\omega^2 \tag{5.14}$$

это одна метрика. Вторая метрика должна быть плоской, и ее можем записать так:

$$dS_f^2 = f_{\mu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega^2, \tag{5.15}$$

где r не тоже самое, что R:

$$dS^2 = -dt^2 + dR^2 + R^2 d\omega^2$$

Для релятивистской теории гравитации, это частный случай массивной гравитации.

$$dS_g^2 = g_{\mu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -\underbrace{e^{\nu}}_{1}dt^2 + \underbrace{e^{\lambda}}_{2}dR^2 + R^2 d\omega^2$$

$$dS_f^2 = f_\mu dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\underbrace{r^2}_{3} + r^2 d\omega^2$$

(1) – это одна амплитуда (2) – это вторая амплитуда, а третья (3) – это малая r и поэтому в ур. 5.15 нужно писать:

$$dS_f^2 = f_\mu dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega^2$$

где $r = r(R)$. Третья функция получается из-за того, что опорная метрика плоская и содержит свободу введения дополнительных функций. Поэтому можем использовать в качестве независимых переменных либо R, либо r. Мы берем 2 метрики: метрика 5.15 - плоская, метрика 5.14 - кривая. Функций три: ν, λ и r. Можем в качестве радиальной координаты выбирать либо r, либо R. Решили задачу, используя r, а потом возвращаемся к R. Считаем уравнение геодезической:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

и поскольку в фоновой метрике гравитации никакой нет, по теории возмущений считаем, что:

$$\dot{x}^\alpha = \delta_0^\alpha$$

Таким образом:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{0,0} \tag{5.16}$$

Если возьмем метрику 5.13 и посчитаем для неё $\Gamma_{0,0}$, то окажется что:

$$\Gamma^R_{0,0} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \approx \frac{\nu'}{2}$$

Подставляя в ур. 5.16, получим:

$$\ddot{R} = -\frac{\nu'}{2} = -\frac{C}{R^2}$$

Это закон Ньютона в этой метрике.

Вычисление движения луча света

Удобно считать движение луча света методом Гамильтона - Якоби:

$$g^{\mu\nu}\delta_\mu S \delta_\nu S = 0$$

где S в безмассовом случае функция эйконала.

$$-e^{-\nu}(\delta_t S)^2 + e^{-\lambda}(\delta_R S)^2 + \frac{1}{R^2}(\delta_\sigma S)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2\sigma}(\delta_\phi S)^2 = 0$$

Поскольку в этом уравнении коэффициенты не зависят от времени и от ϕ, так как это циклические координаты. Ищем решение в виде

$$S = -Et + L\phi + \Psi(R)$$

где E и L- константы, $\sigma = \frac{\pi}{2}$, движение происходит в экваториальной плоскости.

Когда подставляем такую форму решения в уравнение Гамильтона - Якоби, то получаем уравнение:

$$-e^{-\nu}E^2 + e^{-\lambda}\Psi\prime_R^2 + \frac{L^2}{R^2} = 0$$

Отсюда определяется функция Ψ:

$$\Psi = \int e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}\sqrt{E^2 - \frac{L^2}{R^2}e^{\nu}}dR$$

Найдем уравнение траектории:

$$\frac{\delta S}{\delta L} = const$$

Дифференцируем по L и получим

$$\phi - \phi_0 = L\int \frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}dR}{R^2\sqrt{E^2 - \frac{L^2}{R^2}e^{\nu}}} = \phi(R)$$

По этой функции можем посчитать отклонение света. Введём прицельное расстояние: $\rho = \frac{L}{E}$, E - полная энергия, L - угловой момент.

Введем радиальную координату $x = \frac{\rho}{r}$ Если рассмотрим плоскость, в центре которой находится звезда, то луч света немного притягивается к центу (дуга к центру 5.1). Угол $\phi = \infty$ асимптотический. Перпендикуляр от звезды к лучу — это ρ.

Подставим переменные:

$$\phi_\infty = \int_0^{x_{max}} \frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}dx}{\sqrt{1 - x^2e^{\nu}}}$$

Верхний предел интеграла x_{max} определяется трансцендентным уравнением:

$$1 = x_{max}^2 e^{\nu x_{max}}$$

Если $\nu = \lambda = 0$, тогда $\phi_\infty = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Если звезды никакой нет, то путь света будет проходить параллельно оси y, и на бесконечности этот угол стремится к $\frac{\pi}{2}$.

Если $\nu_1 x \neq$, то

$$\phi_\infty = \frac{\pi}{2} + \delta\phi$$

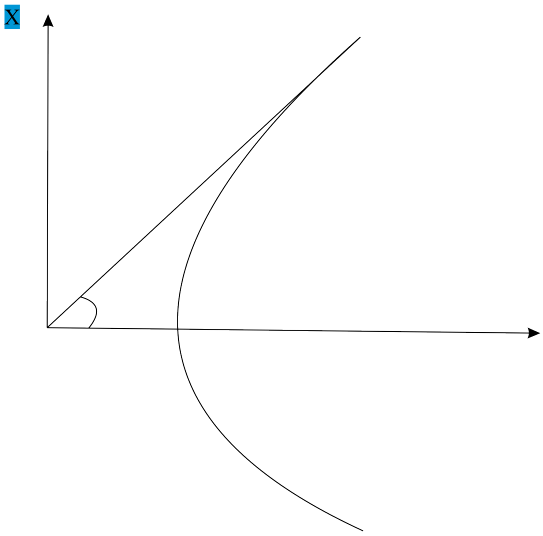

Рис. 5.1. Шкала расстояний

Разлагая интеграл по малости ν и λ, получаем, что $\nu = \frac{A}{R}$ и $\lambda = \frac{B}{R}$, где A и B некие числа. Угол отклонения света звездой:

$$2\delta\phi = \frac{B-A}{\rho}$$

В общей теории относительности

$$A = -V_g$$

$$B = +V_g$$

$$\Rightarrow\ 2\delta\phi = \frac{4V_g}{\rho} = \frac{4GM}{\rho}$$

Этот результат проверен экспериментом. В массивной гравитации он должен быть такой же, потому что лучи света двигаются как в безмассовой гравитации. Поскольку скалярный гравитон в этом смысле невозбужден и связывается со следом тензора энергии-импульса, то для света след равен 0. Поэтому в массивной гравитации нужно получить то же самое.

Для массивной гравитации: $A = -2C$ $B = C$, где C константа, которую пока что не знаем.

$$\Rightarrow\ 2\delta\phi = \frac{3}{\rho} = \frac{4GM}{\rho} \Rightarrow\ C = \frac{4}{3}GM$$

Теперь подставляем это в закон Ньютона.

$$R = -\frac{GM}{R^2}$$

Сила гравитации получается на 3 сильнее, потому что в данном случае действует скалярный гравитон:

$$F = \frac{4}{3}\frac{GM_1M_2}{R^2}$$

Лекция 6. Нелинейная теория Фирца-Паули

Расстояния, на которых справедливо решение ВДВЗ

ВДВЗ справедливо, если рассматривать как решение линейных уравнений Фирса-Паули на любых расстояниях. Если решение является разложением чего-то нелинейного, то все функции должны быть малы.

$$\nu = -\frac{2c}{R} \ll 1, \quad \lambda = \frac{c}{R} \ll 1, \quad \mu = \frac{c}{m^2 r^3} \ll 1, \quad c = \frac{4}{3} r_g \tag{6.1}$$

Это верно при

$$r \ll \frac{1}{m} = R_{\text{H}},$$

– это радиус Комптона. Это должен быть радиус Хаббла R_{H} нашей Вселенной. Первые 2 функции из (6.1) будут малы, достаточно потребовать $r \gg r_g$, то же самое, что и в общей теории относительности.

Но с μ возникает проблема. Должно выполняться условие:

$$\frac{r_g}{m^2 r^3} \ll 1 \Rightarrow \frac{r_g}{r_{m^2}} \ll r^3,$$

$$\Rightarrow \; r \gg \sqrt[3]{\frac{r_g}{m^2}} = \sqrt[3]{R_{\text{H}}^2 r_g} = \left(\frac{r_g}{R_{\text{H}}}\right)^{1/3} R_{\text{H}}$$

Таким образом, получаем:

$$R_H \gg r \geqslant \left(\frac{r_g}{R_H}\right)^{1/3} R_H \tag{6.2}$$

где:

$$L = 3 \cdot 10^8 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 10^{16} \text{ м}$$

$3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света.

$$R_H = 13,8 \cdot 10^9 L = 10^{26} \text{ м}$$

$$r_g = 3 \cdot 10^3 \text{ м} \Rightarrow \left(\frac{r_g}{R_H}\right)^{1/3} R_H = \left(3 \cdot 10^{-23}\right)^{1/3} R_H = 1500L$$

Таким образом, интервал не пустой. В (6.2) получаем:

$$R_H = 13 \cdot 10^9 L \quad \left(\frac{r_g}{R_H}\right)^{1/3} R_H = 1500L$$

1500 световых лет — это много. Если рассматривать Солнце, то вокруг Солнца образуется гигантская сфера (Рис. 6.1) и решение ВДВЗ справедливо только вне сферы, а то, что внутри сферы и Солнечной системы, несправедливо. Внутри Солнечной системы не можем использовать ВДВЗ и поэтому не можем утверждать, что массивная гравитация не согласуется с экспериментами, потому что линейная массивная гравитация неприменима.

Рис. 6.1. Сфера, образованная вокруг Солнца. Желтый круг – Солнечная система.

Вероятно, ВДВЗ считали, что их решения применимы на расстояниях гораздо больших, чем радиус Вашингтона, как и в ОТО. Они не обсудили m^2r^3 из (6.1).

На (Рис. 6.1) функции являются большими и поэтому, если считать, что они получаются разложением нелинейных решений, то нужно использовать нелинейные решения. Линейное решение ВДВЗ неприменимо на расстояниях $r < 1500Ly$. Нужно рассматривать нелинейную теорию.

Нелинейная теория Фирца-Паули

Линейная теория получается ФП получается из квадратичного действия

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\kappa}\left(\mathscr{L}_2 - m^2U\right) + \frac{1}{2}h_\mu T^{\mu\nu}, \tag{6.3}$$

где $\mathscr{L}$ — квадратичная часть от $\frac{1}{2}\sqrt{-q}R$,

$$U = \frac{1}{8}\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right)$$

Достроим это квадратичное действие до полностью нелинейного действия. Первая часть (6.3) кинетическая. Можно вернуться к полностью ковариантному уравнению.

В линейной теории имеется $h_{\mu\nu}$ и метрика Минковского $\eta_{\mu\nu}$. Тогда:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu}$$

Больше это разбиение не нужно, вместо двух метрик можем использовать одну и возвращаемся к метрике $g_{\mu\nu}$.

Нелинейное обобщение

$$\frac{1}{\kappa}\mathscr{L}_2 = \frac{1}{2\kappa}R(g)\sqrt{-g}$$

из (6.3) и нелинейное обобщение

$$\frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \mathscr{L}_{\text{mat}}\sqrt{-g}$$

из (6.3) лагранжиан материи, потому что используем определение тензора энергии импульса:

$$\sqrt{-g}\overset{\text{mat}}{T^{\mu\nu}} = 2\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial g_{\mu\eta}} - g^{\mu\lambda}\mathscr{L}_{\text{mat}}$$

Теперь возникает идея, что:

$$\mathscr{L} = \left(\frac{1}{2\kappa}R(g) - m^2\underbrace{U}_{(\text{A})}(g,t) + L_{\text{mat}}\right)\sqrt{-g} \tag{6.4}$$

В качестве аналога потенциала из (6.3) должна быть скалярная функция метрики (A) из (6.4).Если имеем метрику $g_{\mu\nu}T$ (T – тензор), как из неё построить скалярную функцию?

Скалярные функции от матрицы это либо её след, либо след от степени. Если имеем матрицу $A = A^{\alpha}_{\beta}$, можем взять след, это будет скаляр или какая-то степень скаляра. Теперь нужно сделать то же самое с метрикой. Если в метрике поднять один индекс:

$$g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

Если взять след или любую степень, а потом след, то получится число 4. Можно умножить это число на константу связи λ, это дает *космологическую постоянную*. На этом пути получаем гравитацию с космологической постоянной и больше ничего не получаем.

Постулируется существование опорной нединамической метрики $f_{\mu\nu}$.

Если имеется $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$, вводим тензор S^{μ}_{ν}:

$$g_{\mu\nu},\, f_{\mu\nu} \to S^{\mu}_{\nu} = g^{\mu a}f_{\alpha\nu} \equiv \hat{S}$$

Скалярами будет след, обозначаемый $\left[\hat{S}\right] = S^{\alpha}_{\alpha}$, $\left[\hat{S}^2\right]$, $\left[\hat{S}^3\right]$. Можем взять и нецелые степени. Массивный потенциал будет

$$U = U\left(g, f\right) = U\left(\left[\hat{S}\right], \left[\hat{S}^2\right], \left[\hat{S}^3\right], \det[S]\right) \tag{6.5}$$

– функция от метрики и опорной метрики. Берем произвольную функцию (6.5). Это называется *нелинейной массивной гравитацией.*

Нелинейное обобщение Фирца-Паули

Нелинейное обобщение Фирца-Паули есть биметрическая теория, содержащая динамическую метрику $g_{\mu\nu}$ и не динамическую метрику $f_{\mu\nu}$ с лагаржаном (6.4), где потенциал U есть функция от следов степеней тензора

$$S^{\mu}_{\alpha} = g^{\mu\alpha} = f_{\alpha\nu}$$

Как выбрать U? Например, можно сказать, что

$$U = a_0 + a_1\left[S\right] + a_2\left[S^2\right] + a_3[S]^2 + \ldots$$

$f_{\mu\nu}$ выбирается произвольно. Но самый естественный выбор – это метрика Минковского. Единственное ограничение: нужно, чтобы в пределе слабой связи это сводилось к теории Фирца-Паули.

Линейная теория ФП получается, если определить

$$H^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - S^{\mu}_{\nu}$$

и выбрать потенциал как

$$U = \frac{1}{8}\left(H^{\alpha}_{\beta}H^{\beta}_{\nu} - (H^{\alpha}_{\alpha})^2\right) + O\left(H^{\beta}\right) \tag{6.6}$$

В пределе слабого поля

$$g_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \text{ обратная матрица дается } g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O\left(n^2\right) \tag{6.7}$$

Поэтому тензор

$$\begin{aligned} H^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - (f^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha} + \ldots)\, f_{\alpha\nu} = \\ = \delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu\nu}_{\eta} + h^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

Таким образом, они совпадают:

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma}H^{\sigma}_{\mu} = f_{\mu\sigma}h^{\mu\sigma}f_{\alpha\mu} = h_{\mu\nu}$$

Нужно обратить внимание на то, что все индексы двигаются при помощи $g_{\mu\nu}$.

Имеются метрики $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu}$, а обратную метрику $f^{\mu\nu}$ никогда не приходится рассматривать (редко). В пределах слабого поля $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$ – это одно и то же.

Поэтому, в этом пределе тензор H совпадает с h, и потенциал U становится такой же, как потенциал в теории Фирца-Паули, а кинетический член по определению тот же самый. Таким образом, линейная теория ФП получается из нелинейной теории. Нужно выбрать (6.7) и потребовать, чтобы потенциал был (6.6):

$$S_{\text{нФП}} \underset{\substack{g_{\mu\nu}=f_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \\ h_{\mu\nu}\ll 1}}{\rightarrow} S_{\text{ФП}}$$

Условие (6.6) очень слабое потому, что здесь можно добавить что угодно. Разные теории массивной гравитации, в частности теория Лагунова, отличаются только выбором члена $(H^{\alpha}_{\alpha})^2$ из (6.6).

Уравнение движения

Напишем уравнение движения. Статья НФП: *Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В.*

Выберем действие

$$S(g) = \frac{1}{\kappa}\int \left(\frac{R(g)}{2} - m^2 U(g,f)\right)\sqrt{-g}d^4x$$

Выберем потенциал, не добавляя никаких членов:

$$U = \frac{1}{8}\left(H^{\beta}_{\alpha}H^{\alpha}_{\beta} - \left(H^{\alpha}_{\beta}\right)^2\right)$$

Теперь будем это действие варьировать. Отметим, что

$$\delta\left(R\sqrt{-g}\right) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}$$

Это тензор Эйнштейна.

Преобразование координат

Действие инвариантно по отношению к

$$g_{\mu\nu} \to \widetilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu\nu}}{\partial\widetilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\widetilde{x}^{\beta}}g_{\mu\nu}$$

$$f_{\mu\nu} \to \widetilde{f}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial\widetilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\widetilde{x}^{\beta}} = f_{\alpha\beta}$$

Это преобразование координат, которое позволило в рассмотренном примере записать

$$dS_g^2 = e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dR^2 + R^2 d\Omega^2 \tag{6.8}$$

$$dS_f^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{6.9}$$

Можно использовать в качестве независимой переменной либо R, либо r, при этом обе метрики преобразуются одновременно, делаем одновременное преобразование координат. Используя R в качестве независимой координаты, обязаны переписать (6.9) как:

$$(6.9) = -dt^2 + \left(\frac{dr}{dR}\right)^2 dR^2 + R^2(r)\, d\Omega^2 \tag{6.10}$$

Можно использовать (6.8) и (6.10), либо использовать в качестве опорной (6.9), тогда обязаны (6.8) записать через r:

$$(6.8) = -e^{\mu} dt^2 + e^{\lambda} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 dr^2 + R^2(r)\, \Omega^2 \tag{6.11}$$

Метрики (6.8) и (6.11) тождественны, но записаны в разных координатах. Аналогично, метрики (6.9) и (6.10). Нужно выбирать либо (6.8) и (6.11), либо (6.9) и (6.10). Обе метрики одновременно преобразуются, используем единую координатную систему для обеих метрик. Изначально R и r разные функции. Но когда пишем так, гарантируем, что метрики плоские. f – это плоская метрика.

Если $\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}$, то

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \overset{(g)}{\nabla}_{\mu} \xi_{\nu} + \overset{(g)}{\nabla}_{\nu} \xi_{\mu} \tag{6.12}$$

$$f_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu} + \overset{(f)}{\nabla}_{\mu} \xi_{\nu} + \overset{(f)}{\nabla}_{\nu} \xi_{\mu} \tag{6.13}$$

Упражнение 6.1. *Проверить, что верно* (6.12), (6.13), *если* $\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}$.

Мы считаем, что метрика f плоская. Плоская $f_{\mu\nu}$ может быть представлена как

$$f_{\mu\nu} = \eta_{AB} \partial_{\mu} \Phi^{A} \partial_{\nu} \Phi^{B} \tag{6.14}$$

Это всегда возможно. Если метрику представляем в виде (6.14), где

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

— тензор Минковского, то метрика автоматически оказывается плоской.

В (6.14) функции $\Phi^{A}(x)$ — поля Штукельберга. Можно эти поля интерпретировать как координаты на внутреннем пространстве.

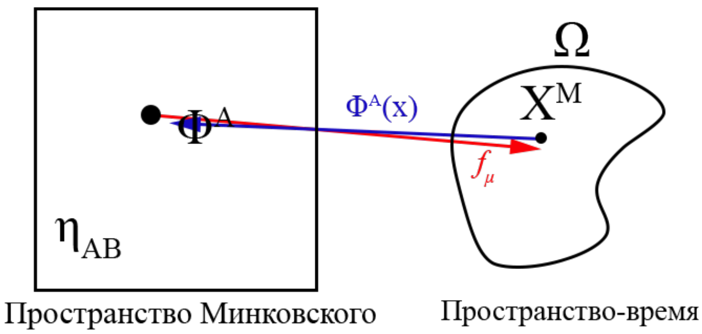

Рис. 6.2. Пространство Минковского и пространство-время

Представим, что имеется плоское пространство Минковского, где Φ^A — это координаты в пространстве Минковского (Рис. 6.2), левая часть.

В то же время имеется пространство-время Ω, где точки обозначаются X^M (Рис. 6.2), правая часть. Также имеется отображение из одного пространства в другое $\Phi^A(x)$: $X^M \to \Phi^A$. Также имеется обратное отображение дает метрика f_μ.

Возвращаемся к проблеме вариации. Вспомним, что

$$U = \frac{1}{8}\left(H^\alpha_\beta H^\beta_\alpha - (H^\alpha_\alpha)^2\right), \quad H^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta - g^{\alpha\sigma} f_{\sigma\beta}$$

Будем варьировать обе метрики f и g. Метрика f нединамическая.

$$\delta H^\alpha_\beta = -\delta g^{\alpha\sigma} \cdot f_{\sigma\beta} - g^{\alpha\sigma}\delta f_{\sigma\beta}$$

$$\delta U = \frac{1}{4} H^\beta_\alpha \left(-f_{\sigma\alpha}\delta g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\sigma}\delta f_{\sigma\beta}\right) + \frac{1}{4} H^\alpha_\alpha \left(f_{\sigma\beta}\delta g^{\sigma\beta} + g^{\sigma\beta}\delta f_{\sigma\beta}\right)$$

Мы варьировали U. Вспомним, что

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{R}{2} - m^2 U\right)\sqrt{-g}$$

Вариация:

$$\delta U\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\left(\delta U - \frac{1}{2} U g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}$$

Вариация по метрике дает тензор энергии импульса. По второй метрике получится еще один тензор энергии импульса, который не совпадает с предыдущим. Они оба сохраняются.

Запишем полную вариацию этого действия

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g} G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{6.15}$$

Это вариация кинетического члена.

$$-\frac{m^2}{\kappa}\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}H^{\beta}_{\mu}f_{\nu\beta}+\frac{1}{4}H^{\alpha}_{\alpha}f_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Ug_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}-\frac{m^2}{\kappa}\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{4}H^{\beta}_{\alpha}g^{\alpha\sigma}+\frac{1}{4}H^{\alpha}_{\alpha}g^{\sigma\beta}\right)\delta f_{\sigma\beta} \tag{6.16}$$

В конечном счете представим как тензорную энергию импульса:

$$\delta\mathscr{L}=\sqrt{-g}\frac{1}{2\kappa}\left(G_{\mu\nu}-m^2T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{6.17}$$

$$-\frac{m^2}{2\kappa}\sqrt{-f}\tau^{\mu\nu}\delta f_{\mu\nu} \tag{6.18}$$

(6.16) представляем в виде (6.18). Таким образом

$$T_{\mu\nu}=2\frac{\partial U}{\partial g^{\mu\nu}}-Ug_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(H^{\alpha}_{\alpha}f_{\mu\nu}-H^{\alpha}_{\mu}f_{\nu\alpha}\right)-Ug_{\mu\nu} \tag{6.19}$$

В то время, как тензор $\tau_{\mu\nu}$ определяется так:

$$\tau_{\mu\nu}=2\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-f}}\frac{\partial U}{\partial f_{\mu\nu}}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-f}}\left(H^{\alpha}_{\alpha}g^{\mu\nu}-H^{\mu\nu}\right)$$

Таким образом, возникает уравнение Эйнштейна.

Действие стационарно при $g_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$, а $f_{\mu\nu}\to f_{\mu\nu}\Rightarrow$ $f_{\mu\nu}$ не меняется, не варьируется. В этом случае (6.18) пропадает, а (6.17) дает уравнение Эйнштейна

$$G_{\mu}=m^2T_{\mu\nu} \tag{6.20}$$

Следствие которого

$$\nabla^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=0 \tag{6.21}$$

Когда берем дивергенцию, то дивергенция правой части (6.20) $=0$ в следствии тождества Бианки, поэтому дивергенция тензора равна нулю (6.19).

Задача. Показать, что варьирование действия по полям Штукельберга дает (6.21).

$$f_{\mu\nu}=\eta_{AB}\partial_{\mu}\Phi^{A}\partial_{\nu}\Phi^{B} \tag{6.22}$$

Можно думать, что действие содержит не только $g_{\mu\nu}$, но и поля (6.22). Эти поля отражаются в ходе преобразования координат и по ним можно проварьировать. Когда проварьируем, получим (6.21).

Эта задача вытекает из следующего. Пусть

$$\delta g_{\mu\nu}=\overset{g}{\nabla}_{\mu}\xi_{\nu}+\overset{g}{\nabla}_{\nu}\xi_{\mu} \tag{6.23}$$

$$\partial f_{\mu}=\overset{f}{\nabla}_{\mu}\xi_{\nu}+\overset{f}{\nabla}_{\nu}\xi_{\nu} \tag{6.24}$$

Рассмотрим вариации такого типа. При таких вариациях с действием ничего не должно произойти, вариация должна тождественно обратиться в нуль, потому что это скаляр, он инвариантен при преобразовании координат. Следовательно, если возьмем (6.23), (6.24) и подставим в (6.15), то должны получить тождественный нуль.

Таким образом, получаем:

$$\delta\mathscr{G} = \int\left(\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\left(G_{\mu\nu}\overset{(g)}{\nabla^{\mu}}\xi^{\nu} - m^2 T_{\mu}\overset{(g)}{\nabla^{\mu}}\xi^{\nu}\right) - \frac{m^2}{\kappa}\sqrt{-f}\mathrm{T}^{\mu\nu}\overset{(f)}{\nabla_{\mu}}\xi_{\nu}\right)\boxed{=}$$

По теореме Гаусса можем перекинуть производные:

$$\boxed{=}\frac{1}{\kappa}\int\sqrt{-g}\left(\nabla^{\mu}G\nabla_{\mu} - m^2\nabla^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right)\xi^{\nu}d^4x + \frac{m^2}{\kappa}\int\sqrt{-f}\nabla_{\mu}\mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{\nu}d^4x$$

Дивергенция $-\nabla^{\mu}G\nabla_{\mu}$ выпадает (из Бианки). Получаем утверждение:

$$\delta S = \frac{m^2}{\kappa}\int\underbrace{\left(-\overset{(g)}{\nabla_{\mu}}\mathrm{T}_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \overset{(f)}{\nabla^{\mu}}\tau_{\mu\nu}\sqrt{-f}\right)}_{0}\xi^{\nu} \equiv 0$$

Таким образом, выясняем, что

$$-\overset{(g)}{\nabla_{\mu}}\mathrm{T}_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \overset{(f)}{\nabla^{\mu}}\tau_{\mu\nu}\sqrt{-f} = 0$$

Величина $-\overset{(g)}{\nabla_{\mu}}\mathrm{T}_{\mu\nu}\sqrt{-g} = 0$ из уравнения поля (6.21). Следовательно, должна равняться нулю величина $\overset{(f)}{\nabla^{\mu}}\tau_{\mu\nu}\sqrt{-f}$. Получаем два закона сохранения:

$$\overset{(f)\mu}{\nabla}\tau_m = 0 \Leftarrow \nabla^{\mu}\mathrm{T}_{\mu} = 0 \tag{6.25}$$

То есть, имеются два тензора и они сохраняются. Только один из них участвует в физических уравнениях движения. Физические уравнения движения:

$$G_{\mu\nu}(g) = m^2 T_{\mu\nu}(g, f) \tag{6.26}$$

Резюме сделанного — это (6.26) и (6.25).

Теоретико-полевая трактовка В. И. Огиевецкого, И. В. Полубаринова (1965 г.)

В линейной теории имеется плоское пространство, в котором распространяются гравитоны. В нелинейной теории метрика $f_{\mu\nu}$ – опорная метрика, а пространство искривлено. $G_{\mu\nu}$ описывает кривое многообразие, значит геометрический подход существенен. В. И. Огиевецкий и И. В. Полубаринов пытались развить теоретико-полевой подход. Они сказали, что есть метрика Минковского $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, и тензорное поле $h_{\mu\nu}$.

Уравнение движения в линейной теории

$$\begin{cases} \left(-\square + m^2\right) h_{\mu\nu} = 0 \\ \partial^{\mu} h_{\mu\nu} = 0 \\ h = 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

Они искали нелинейное пополнение, говорили, что должна быть нелинейная теория (6.27) + «нелинейный член».

Известно, что в ОТО существует представление уровня Эйнштейна:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

Потом строится тензор

$$H^{\mu\nu\alpha\beta} = \mathfrak{g}^{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\beta} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}$$

Уравнение Эйнштейна записывается в виде

$$\partial_{\mu}\partial_{\alpha}H^{\mu\nu\alpha\beta} =< \text{члены, квадратичные по } \gamma_x > \text{ нелинейные}\ldots$$

Левая часть выглядит как совершенно линейная. Слева линейная часть, а справа — нелинейное взаимодействие. Они искали что-то подобное. В ту пору было неизвестно, как достроить нелинейную часть по линейной части.

У них был совершенно уникальный подход. Они считали, что гравитоны движутся в плоском пространстве, что метрика $f_{\mu\nu}$ — это в буквальном смысле метрика плоского пространства. Дифиоморфизмы преобразования координат рассматривали как внутренние симметрии, так же, как цветные симметрии в теории Янга-Миллса. Преобразование координат – это сдвиги во внутреннем пространстве.

Они наложили инвариантность внутренних преобразований, посчитали алгебру этих преобразований и потребовали, чтобы она замыкалась во всех порядках теории возмущений. Они однозначно восстановили кинетический член Эйнштейна-Гильберта очень странным способом. Метрика пространства-времени $g_{\mu\nu}$ для них не первичная, как обычно, а вторичная. Первичными считали $f_{\mu\nu}$ и h_{μ}. Они взяли

$$\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu}=\left(\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-f}}\right)^{S+1}\left(\left(\hat{g}^{-1}\right)^{n}\right)^{\mu\nu}$$

Для них $g_{\mu\nu}$ была функцией от $h^{\mu\nu}$, определенная соотношением $\left(\left(\hat{g}^{-1}\right)^{n}\right)^{\mu\nu}$. Это эффективная метрика. Такое определение возникло в результате их манипуляций. В конце концов нелинейная теория, которую они написали

$$\mathscr{L}=\frac{1}{\kappa}R(g)-m^2U$$

и U, которое у них возникло, представляет:

$$U=\frac{1}{4n^2}\left(\det\hat{S}\right)^{-S/2}\left[\hat{S}^{n}\right]$$

где $S,n\in Z$, не целые, вещественные числа; $S=\hat{g}^{-1}\hat{f}$.

Они впервые смогли восстановить из теоретико-полевых соображений кинетические члены Гильберта. После этого была хорошо известная статья Дезера. Они считали, что первичный объект — поле гравитонов:

$$\partial_\mu h^\mu-q\partial^\nu h=0 \tag{6.28}$$

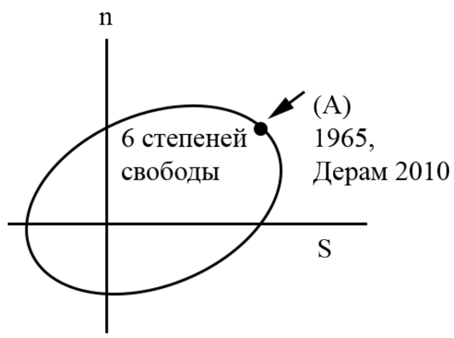

Рис. 6.3. Бездуховая теория Дерама

Требовали на каждом этапе вычисления выполнения тождества (6.28) связи, где производная — это обычная частная производная. И это есть (6.25), закон сохранения второго тензора. Этот закон взяли в качестве краеугольного камня своего построения. У теории нет предела ФП и 6 степеней свободы. Она содержит подмножество теорий.

Если представим S и n (Рис. 6.3), в пространстве имеется эллипс, который соответствует пределу ФП и на этом эллипсе есть точка (A), которая соответствует бездуховой теории Дерама. Одну точку они нашли совершенно точно. Внутри эллипса 6 степеней свободы, дух Бульвара-Дезера. Они этим не интересовались. Они построили кинетический член. А массовый член — это побочный продукт их построения.

Это была первая работа по массивной гравитации, а всё остальное (что делал Лагунов) — это деформация этой работы. Лагунов манипулировал этими выражениями, у него тоже 6 степеней свободы. Теория Лагунова является частным случаем нелинейной теории ФП, соответствующая определенному выбору потенциала.

Лекция 7. Механизм Вайнштейна

Решение задачи из домашнего задания (инфинитезимальное преобразование координат)

Упражнение 7.1. *Есть тензор, который преобразуется по тензорному закону произвольным преобразованием. Что будет, если это преобразование становится бесконечно малым? Как оно выглядит? Как выглядит преобразование тензора в этом случае?*

Бесконечно малое преобразование тензора, генерируемое векторным полем — это производная Ли этого тензора вдоль векторного поля.

$$\mathfrak{Li}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}\partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\beta}\partial_\beta J^\mu \boxed{=} \tag{7.1}$$

Формула (7.1) берется из того, что:

$$g'_{\alpha\beta}\left(\widetilde{x}\right) = \frac{\partial x'}{\partial \widetilde{x}^\alpha}\,\frac{\partial x'}{\partial \widetilde{y}^\beta} g_{\mu\nu}(x), \tag{7.2}$$

где

$$\widetilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{7.3}$$

Получается:

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}\left(x\right) + J^\mu \partial_\mu g_\mu\left(x\right) = g_{\mu\nu}\left(x\right)\left(\delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \tag{7.4}$$

Теперь, когда свернем и $J^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta}\left(x\right)$ перенесем в правую часть (7.4), получится

$$g + \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta}$$

продолжим вычисление (7.1):

$$\boxed{=}\quad \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\left(g_{\alpha\beta}\xi^\mu\right) + \partial_\beta\left(g + \xi^\mu\right) - -\xi^\mu \partial_\alpha\left(g_{\mu\beta}\right) - -\xi^\mu \partial_\beta\left(g_{\mu\alpha}\right)$$

Левая часть формулы (7.1) — это то же самое, что

$$\nabla_\mu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\mu$$

Производная Ли — это изменение тензора, генерируемое векторным полем. Векторное поле действует так: вместо старой координаты x^μ записывается новая координата = старая + векторное поле (7.3). Векторное поле предполагается малым.

(7.2) – изменение тензорного поля, генерируемого таким преобразованием. Это общее ковариантное преобразование тензора второго рода метрики. В этой формуле (7.2) слева стоит новое $\widetilde{g}(\widetilde{x})$, а справа стоит старое $g(x)$, умноженное на матрицу преобразования $\frac{\partial x'}{\partial \widetilde{x}} \frac{\partial x'}{\partial \widetilde{x}}$.

Берем аргумент $\widetilde{x}$, сдвинутый (7.3) и разлагаем это выражение в ряд Тейлора с точностью до первого порядка. Получаем, что

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) = g(x) + J^{\mu}\partial_{\mu} g_{\alpha\beta}(x)$$

Таким образом, это член, который стоит слева (7.2). Справа имеем производные:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \widetilde{x}_{\alpha}} = \frac{(\partial \widetilde{x}^{\mu} - \xi^{\mu})}{\partial \widetilde{x}^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} - \partial_{\alpha}\xi^{\mu} \tag{7.5}$$

Возникает $\left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)$ и $\left(\delta - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$. Затем всё это разлагаем в ряд, пренебрегая квадратичным членом и переносим правую часть (7.4) $\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x) + J^{\mu}\partial_{\mu} g_{\mu}(x)$:

$$\delta g_{\mu} = \widetilde{g}_{\mu}(x) - g_{\mu}(x) = -L_{\xi} g_{\mu},$$

где $L_{\xi} = (7.1)$.

Знак $-L_{\xi}$ или $+L_{\xi}$ зависит от того, какой знак писать в (7.3). Если в правой части «-», то будет «$+L_{\xi}$».

Последняя часть работы заключается в том, чтобы показать, что

$$J_{\xi} g_{\mu} = \nabla_{\mu}\xi + \nabla_{r}\xi_{\mu}$$

$$\nabla_{\mu}\xi + \nabla_{r}\xi_{\mu} = \partial_{\mu}\xi + \Gamma^{\psi}_{\nu}\psi_{\alpha} + \partial_{\alpha}\psi_{\alpha} + \Gamma^{\psi}_{\alpha}\psi_{\alpha}$$

Таким образом, это производная Ли. Когда имеем 2 метрики, как в биометрической теории имеем метрики f и g, можем произвести преобразование координат одновременно обеих метрик, генерируемое некоторым полем ξ. Метрика g_{μ} заменяется на:

$$g_{\mu} \to g_{\mu} + \overset{q}{\underset{\mu}{\nabla}}\xi_{\mu} + \overset{q}{\underset{\mu}{\nabla}}\xi_{\mu} \quad \text{и} \quad f_{\mu} \to f_{\mu} + \overset{f}{\underset{\mu}{\nabla}}\xi_{\mu} + \overset{f}{\underset{\mu}{\nabla}}\xi_{\mu}$$

В этом случае ковариантая производная вычисляется по метрике f.

Поля Штукельберга

Что будет, если проварьировать действие эффекта Пауля по полям Штукельберга? Есть лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}R(g) - m^{2}U(g,f)\right]\sqrt{-g} \tag{7.6}$$

и есть выражение для метрики f в Штукельберге:

$$f_\mu = \eta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_m\phi^B. \tag{7.7}$$

Когда варьируем Штукельберге, варьируем метрику f (7.7) и не трогаем метрику g (7.6). Варьируем метрику f (7.7). Поскольку, если:

$$f_\mu \to f_\mu + \delta f_\mu,$$

то лагранжиан (7.6) становится:

$$\mathfrak{L} \to \mathfrak{L} + \delta L,$$

где

$$\delta L = -\frac{m^2}{2a}\tau^\mu\delta f_\mu\sqrt{-f}$$

После интегрирования:

$$\delta f_\mu = 2\eta_{AB}\partial_\mu\delta\phi^A\cdot\partial\phi^B \tag{7.8}$$

Теперь в (7.5) подставляем (7.8):

$$\delta L = -\frac{m^2}{2a}\tau^\mu\delta f_\mu\sqrt{-f} = -\frac{m^2}{a}\tau^\mu\eta_{AB}\partial_\mu\delta\phi^A\delta_\nu\phi^B$$

Теперь нужно перекинуть производную:

$$\begin{aligned}\delta L = -\frac{m^2}{2a}\tau^\mu\delta f_\mu\sqrt{-f} = -\frac{m^2}{a}\tau^\mu\eta_{AB}\partial_\mu\delta\phi^A\delta_\nu\phi^B = \\ = +\frac{m^2}{\kappa}\eta_{AB}\partial_\mu\left(\mathrm{T}^\mu\partial_\mu\phi^B\right)\delta\phi^A\partial^{-f}\end{aligned}$$

Поскольку эта вариация должна быть нулем, получается:

$$\eta_{AB}\partial_\mu\left(\mathrm{T}^\mu\partial_\mu\phi^B\right)\delta\phi^A = 0$$

Так как:

$$\sqrt{-f}\eta_{AB}\partial\tau^\mu\partial\phi^B + \eta_{AB}\eta^\mu\partial\left(\sqrt{-f}\partial\phi^B\right) = 0 \tag{7.9}$$

есть тождество, которое вывели в прошлый раз:

$$\sqrt{-g}\overset{(o)}{\underset{\mu}{\nabla}}T^\mu + \sqrt{-f}\overset{(\mu)}{\underset{\mu}{\nabla}}\eta^\mu = 0$$

(7.9) должно свестись к условию, что $\overset{(\mu)}{\underset{\mu}{\nabla}}\eta^\mu = 0$. (7.9) должно быть эквивалентно $\overset{f}{\underset{\mu}{\nabla}}\eta^\mu = 0$.

Механизм Вайнштейна

Говорили о явлении Видивизи и построили явное решение в линейном приближении для функции

$$\eta, \lambda, \mu \tag{7.10}$$

вокруг какого-то сферически симметричного источника. Для того, чтобы это решение являлось приближением к чему-то нелинейному, нужно чтобы эти функции (7.10) были малы. И сразу получили сильное ограничение на расстояние. Они малы лишь на расстоянии

$$r \gg \left(\frac{r_\eta}{m^2}\right)^{1/3} \tag{7.11}$$

Это большая величина. Вайнштейн рассмотрел нелинейную модель Фирса-Паули, разложил ее в ряд и посчитал нелинейные поправки. У него получилось: если считать, что можно пренебречь нелинейными поправками, то получается еще более сильное ограничение на расстояние.

$$r \gg r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5}, \tag{7.12}$$

где r_V — радиус Вайштейна. Это (7.12) гораздо больше, чем (7.11).

Таким образом, идея такая, что имеется источник (скажем Солнце), (рис. (7.1)) и внутри сферы Вайнштейна на огромном расстоянии от Солнца. Это расстояние от Солнца порядка полумиллиона световых лет.

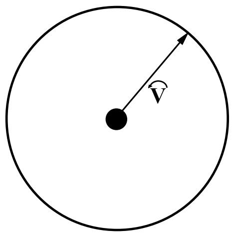

Рис. 7.1. Источник внутри сферы Вайнштейна

$$r \gg r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} = 400000 \text{ св. лет.}$$

Нельзя применять линейную теорию. Поэтому линейная теория возникает лишь здесь: $BDB\xi$. А внутри физика должна быть существенно нелинейна и нужно использовать нелинейную теорию Фирса-Паули. И поэтому аргумент ($BDB\xi$) неприменим.

Чтобы это показать, рассмотрим простейший случай нелинейной теории Фирса-Паули

$$S = \frac{1}{u}\int\left[\frac{1}{2}R(g) - m^2 U(g,f)\right]\sqrt{-g}d^4x + S_{\mathrm{mat}}, \tag{7.13}$$

где S_{mat} — материя. Предположим, Солнце, которое тоже искривляет пространство.

Потенциал

$$U = \frac{1}{8}\left(\left[H^2\right] - [H]^2\right),$$

где $H^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - g^{\mu\sigma} f_{\sigma\nu}$.

Если проварьировать это действие, получится уравнение движения:

$$G_\mu = m^2 \mathrm{T}_\mu + \kappa \mathrm{T}^{\mathrm{mat}}_\mu.$$

Считаем, что система статически и сферически симметрична. Рассмотрим статически и сферически симметричные случаи. Это означает, что

$$g_\mu s x^\mu \lambda_x \nu = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 t + r^2 d\Omega^2 \tag{7.14}$$

Это плоская метрика:

$$f_\mu d_\mu x dx^\nu = -dt^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2, \tag{7.15}$$

где R — это не то же самое, что r из (7.14). Это функция от r:

$$R = R(\nu) = re^{-\mu(r)/2} \tag{7.16}$$

Если возьмем «-», получим те же самые формулы. 3 функции: одна — (7.14), вторая — (7.15), третья — (7.16).

Если считаем, что r из (7.14) — это независимая координата, тогда третья функция (7.15) будет в метрике f. Можно считать, что R из (7.15) — это независимая координата, тогда r из (7.14) должна быть выражена через R.

S_{mat} (7.13). Материя — это звезда. А звезды, считается, состоят из идеальной жидкости. Предположим, Солнце — это газовый шар.

Определение 7.1. *Материя есть идеальная жидкость.*

С тензорами энергии импульса

$$\overset{(\mathrm{Mat})}{\mathrm{T}^\mu_\nu} = (\rho + \eta) U^\lambda U_\nu - p\delta^\lambda_\eta,$$

где U — это четырехмерная скорость для жидкости. В статически сферическом случае это:

$$\overset{(\mathrm{Mat})}{\mathrm{T}^\mu_\nu} = (\rho + \eta) U^\lambda U_\nu - p\delta^\lambda_\eta, = \begin{pmatrix} -\rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix},$$

где «–» соответствует выбору сигнатуры (- + + +). Таким образом, уравнения движения можно записать в виде

$$G^{\mu}_{L} - m^2\Phi^{\mu}_{L} + \kappa \overset{\mathrm{Mat}}{T^{\mu}_{L}} \tag{7.17}$$

Существует закон сохранения этих тензоров, которые вытекают из уравнения (7.17). Есть условие, что дивергенция от тензора энергии по метрике g равна нулю:

$$\overset{g}{\nabla^{\mu}} T_{\mu_L} = 0 \tag{7.18}$$

Точно такое же уравнение для материального:

$$\nabla^{\mu} T^{\mu_L}_{r} = 0 \tag{7.19}$$

$$\begin{cases} G^{\mu}_{L} - m^2\Phi^{\mu}_{L} + \kappa \overset{\mathrm{Mat}}{T^{\mu}_{L}} \\ \overset{g}{\nabla^{\mu}} T_{\mu_L} = 0 \\ \nabla^{\mu} T^{\mu_L}_{r} = 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

Эти уравнения легко выписать в явном виде в статическом и сферическом случаях. В явном виде получаем 4 независимых уравнения.

Если посчитаем G^0_0 для нашей метрики, получим

$$G^0_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = m^2 \mathrm{T}^0_0 - \kappa\rho \tag{7.21}$$

Это первое уравнение Эйнштейна. Затем:

$$G^r_r = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = m^2 \mathrm{T}^r_r + \kappa \mathrm{P} \tag{7.22}$$

Уравнений Эйнштейна три: G^0_0, G^r_r и G^{θ}_{θ}. Эти 3 уравнения эквивалентны двум первым: (7.17), (7.18) + закон о сохранении.

В системе (7.20) на самом деле 4 уравнения, потому что индекс μ принимает значения $0, 1, 2, 3, 4$, ненулевое всего одно.

$$\nabla^{\mu} \mathrm{T}_{\mu r} = (\mathrm{T}^r_r)' + \frac{\mu'}{2}\left(\mathrm{T}^0_0 + \mathrm{T}^r_r\right) + \frac{2}{r}\left(T^r_r + T^q_{\theta}\right) \tag{7.23}$$

Это уравнение (7.19). А уравнение (7.19) — это частный случай уравнения (7.23):

$$\mathrm{P'} + \frac{\nu'}{2}\left(\mathrm{P} + \rho\right) = 0$$

Определим компоненты T_0^0 и T_r^r:

$$\mathrm{T}_\mu = 2\frac{\partial U}{\partial g_\mu} - U g_\mu .$$

Результат:

$$\mathrm{T}_{0/r}^{0/\nu} = -\frac{1}{4}e^{-r\lambda}r'^2 \pm \left(e^{-\lambda}r'^2 - e^{-\mu}\right)\left(\frac{r^2}{2r^2} - \frac{t}{4}\right) + \frac{3}{2} - \frac{3R}{2r^2} + \frac{R^4}{4r^4} \qquad (7.24)$$

Если берем T_0^0, то вместо знака $\pm$ нужно писать знак «+». Если берем T_r^r, то — «-». Поэтому пишем одновременно (7.24).

$$\mathrm{T}_\theta^\theta = \mathrm{T}_\varphi^\varphi = \frac{1}{4}e^{-\mu-\lambda}R'^2 - \frac{3}{4}e^{-\lambda}R'^2 + \frac{3}{4}e^{-u} + \frac{3}{2} + \frac{R^4}{4R^4} \qquad (7.25)$$

Это явный пример системы уравнений, которая возникает в нелинейной теореме Кюрта-Пауля. Тензор энергии импульсов массивных гравитонов (7.24) определяется тремя функциями: μ, λ и R. Здесь явные выражения (7.24), (7.25). Тензор имеет структуру:

$$\mathrm{T}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_0^0 & & & 0 \\ & \mathrm{T}_\nu^\mu & & \\ & & \mathrm{T}_\theta^\theta & \\ 0 & & & \mathrm{T}_\theta^\theta \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathrm{T}_\theta^\theta = \mathrm{T}_\varphi^\varphi$ (7.25).

Рассмотрим случай, когда масса гравитона равняется нулю. Если масса гравитона равняется нулю, тогда правая часть (7.21) и (7.22) пропадает.

Если $m = 0$, то уравнения сводятся к трем:

$$\begin{cases} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \kappa\rho \\ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = \kappa \mathrm{P} \\ \mathrm{P'} + \frac{\nu'}{2}(\rho + \mathrm{P}) = 0 \end{cases} \qquad (7.26)$$

Эти уравнения допускают точное решение. Допустим, есть звезда радиуса r_* (рис. 7.2) и предположим, что плотность энергии:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & v \in V_* \\ 0 & v > V_* \end{cases}$$

где $\rho_0 = \mathrm{const}$.

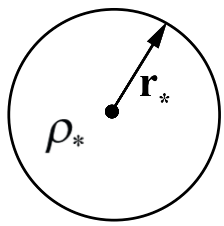

Рис. 7.2. Звезда радиуса r_*

Звезда, которая состоит, скажем, из воды, из несжимаемой жидкости, пузырь. Всё содержится здесь (рис. 7.2), ρ_*) и ничего снаружи.

Для интегрирования уравнений удобно выразить экспоненту от λ через новую функцию:

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2G}{r}} M(r) \tag{7.27}$$

Если (7.27) подставить в первое уравнение системы (7.26), то получится:

$$\frac{2G}{r^2} M' = \kappa \rho$$

Правая часть не меняется, а левая сводится к такому значению:

$$\left(1 - \frac{2GR}{r}\right)$$

$\kappa = 8\pi G$. Таким образом, получаем:

$$M' = 4\pi r^2 \rho = \begin{cases} 4\pi r^2 p_0 & r < R_* \\ 0 & r > R_* \end{cases}$$

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 & r < R_* \\ \frac{4}{3}\pi r_*^3 \rho_0 = M_* & r > R_* \end{cases} \tag{7.28}$$

Здесь $M_* = \mathrm{const}$. Таким образом получили функцию λ. График этой функции представлен на (рис. 7.3). Функция $M(r)$ начинается с нуля, в центре звезды. Потом она возрастает до перпендикулярности, а потом остается постоянной. Снаружи звезды нужно получить обычное решение Шварцшильда – метрику Шварцшильда. А внутри звезды получается *внутреннее решение Шварцшильда*, которое генерируется материальным источником.

Точно таким же образом можно получить решение для других функций: для P и для ν. Предлагается их получить самостоятельно – ответ:

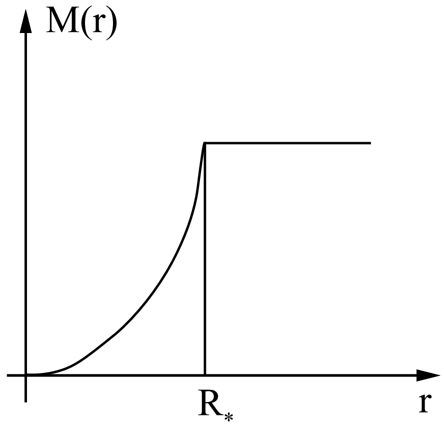

Рис. 7.3. График функции λ

Упражнение 7.2. *Показать что*

$$P(r) = \rho_0 \frac{\sqrt{\frac{1-2GM_* r^2}{r_*^3}} - \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_*}}}{3\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_*}} - \sqrt{1 - \frac{2GM_* r^2}{r_*^3}}}, \tag{7.29}$$

если $r < r_*$, $P = 0$, *если* $r > r_*$.

Давление ведет себя так, как на (рис. 7.4). Начинается с некоторого значения и падает к нулю на поверхности звезды.

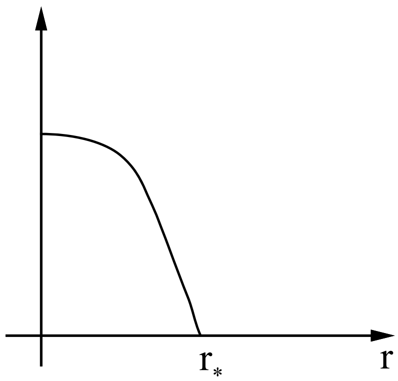

Рис. 7.4. Давление

Есть еще функция ν — метрическая функция:

$$e^{\frac{\nu}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{2} 1 - \frac{2GM}{v_*} - \frac{1}{r} - \frac{2GM_\nu v^2}{v_{\nu 3}} & r < V_* \\ \sqrt{1 - \frac{2GM_*}{r}} & r > V_* \end{cases} \tag{7.30}$$

Вне звезды — это в точности совпадает с Шварцшильдским выражением. И (7.28) также совпадает. Для Шварцшильда эта функция (7.27) является константой.

Это дает метрику звезды. Имеется звезда, что-то внутри и точность Вашингтона снаружи. Внутренняя материя даже может пульсировать. Можно рассмотреть случаи, когда P является функциями времени, звезда претерпевает радиальные пульсации. Но снаружи всегда будет чистый Шварцшильда по теореме Биркгофа. Потому что в пустоте единственное решение уравнения Эйнштейна — это Шварцшильд. Что ни делай, вне звезды пустота. Нужно получить Шварцшильд, который плавно соединяется с внутренним решением.

Внутреннее решение внутри звезды при $r < v_*$ непрерывно сшивается на поверхности звезды с метрикой Шварцшильда.

Метрика Шварцшильда:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM_*}{v}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2CM_*}{v}} + r^2 d\Omega^2.$$

Комбинация

$$GM_* = r_g$$

называется *радиусом Шварцшильда.*

Написали простейшее уравнение состояния, в котором $\rho = \text{const}$, а на P есть дифференциальное уравнение. Мы его проинтегрировали и получили решение (7.4): P начинается с некоторого значения в нуле и падает до нуля на поверхности звезды. И это значение в нуле расходится. В (7.29) и (7.30) знаменатели обращаются в нуль. P_0 расходится, если $\frac{2GM_*}{V_*} \to \frac{1}{9}$.

Если начинаем увеличивать плотность звезды или держим плотность постоянной, но начинаем уменьшать радиус, то давление в центре достигает бесконечности и после этого звезды существовать не могут. Это является аналогией примера Чадра-Секана в астрофизике. Есть верхний предел, получаем как раз из этого соображения, что давление в центре звезды должно быть конечным. Это давление должно противостоять силе тяжести. Если это давление становится бесконечным, то звезда схлопывается и получается черная дыра.

Мы получили решение внутри и вне звезды. Если отойдем от звезды достаточно далеко, если считать, что $\frac{r_g}{v} \ll 1$, то можем реализовать эту метрику и использовать решение в пределе $\frac{V_q}{r} \ll 1$ есть $v = -\lambda = -\frac{r_g}{r}$.

Всё это стандартная общая теория относительности. Теперь предположим, что включаем снова массу гравитона:

$$F(v, \mathrm{P}, \rho) = 0$$

— известная функция. Мы можем переинтегрировать те же самые уравнения, но учитывая, что есть связь $\rho \neq \text{const}$.

Если $m = 0$, имеется звезда и метрика.

Если $m \neq 0$, тогда уравнение несколько меняется:

$$G^{\varphi}_{\nu} = \kappa \overset{\text{Mat}}{\mathrm{T}^{\mu}_{\nu}} + m^2 \mathrm{T}^{\mu}_{\nu}$$

Появляется новый член $m^2\mathrm{T}^{\mu}_{\nu}$, и вне звезды он является доминирующим, потому что $\kappa \overset{\text{Mat}}{\mathrm{T}^{\mu}_{\nu}}$ обращается в нуль, только $m^2\mathrm{T}^{\mu}_{\nu}$ остается.

Таким образом, если $m \neq 0$, то вне звезды имеем $G^{\mu}_{\nu} = m^2\mathrm{T}^{\mu}_{\nu}$.

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = m^2\mathrm{T}^0_0 \tag{7.31}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \mu^2\mathrm{T}^r_r \tag{7.32}$$

$$(\mathrm{T}^r_r)' + \frac{\mu'}{2}\left(\mathrm{T}^0_0 + \mathrm{T}^r_r\right) + \frac{2}{\nu}\left(T^r_r - T^{\theta}_{\theta}\right) = 0 \tag{7.33}$$

где компоненты T^0_0, T^r_r и $\mathrm{T}^{\theta}_{\theta}$ были написаны раньше.

(7.31), (7.32), (7.33) – довольно сложные. Но можно эти уравнения упростить, если их линеиризовать. Считаем, что функции ν, λ и μ — маленькие:

$$\nu,\ \lambda,\ \mu \ll 1, \quad R = e^{-\mu/2}$$

Первые два уравнения (7.31) и (7.32) получаются

$$\begin{cases} -\dfrac{\lambda'}{r} - \dfrac{\lambda}{r^2} = \dfrac{m^2}{2}\left(\lambda + 3\mu + r\mu'\right) \\ \dfrac{r'}{r} - \dfrac{\lambda}{r^2} = m^2\left(\mu\dfrac{\nu}{2}\right) \\ \text{а уравнение (7.33) сохранение дает:} \\ \dfrac{\nu'}{2} - \dfrac{\lambda}{r} = 0 \end{cases} \tag{7.34}$$

Это в точности ВДВЗ-уравнение, которое писали ранее. Линейная теория Фирса-Паули получается из нелинейной в пределе смыслового поля. Должны получить те же самые уравнения:

$$\begin{aligned} \nu &\equiv \nu_1 = -\frac{2C}{r} \\ \lambda &\equiv \lambda_1 = +\frac{C}{r} \\ \mu &= \mu_1 = \frac{C}{m^2 r^3} \end{aligned} \tag{7.35}$$

В предположении, что $r \ll \frac{1}{m}$. Решение (7.35) есть решение ВДВЗ.

Поскольку имеем полную нелинейную систему, можем её дальше разлагать. Если посчитаем первый нелинейный член, то получим следующее:

$$\nu_1 = -\frac{2C}{\nu}, \quad \lambda_1 = \frac{c}{\nu}, \quad \mu_1 = \frac{C}{m'\nu}.$$

Если начинаем разлагать дальше, то первый нелинейный член вот какой:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = \frac{m^2}{2}\left(\lambda + 3\mu + r\mu'\right) + \frac{mr^2}{8}\mu'^2 + \frac{3}{4}m^2\mu^2 + \ldots\ldots \\ \frac{r'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = m^2\left(\mu\frac{\nu}{2}\right) \\ \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda}{r} - \frac{r}{2}\mu\mu'' - \frac{\nu}{r}\mu' - 2\mu\mu' + \ldots = 0 \end{cases} \tag{7.36}$$

Здесь самые главные нелинейные члены, которые квадратичны по μ.

При решении получаем:

$$\nu = -\frac{2c}{r}\left(1 + \alpha_1\frac{C}{m^4r^5} + \ldots\right)$$

$$\lambda = \frac{C}{r}\left(1 + \alpha_2\frac{C}{m^4r^5} + \ldots\right)$$

Наконец, последнее выражение для μ.

$$\mu = \frac{C}{m^3}\left(1 + \alpha_3\frac{C}{m^4r}\right)$$

Константы α_1, α_2, α_3, $C \sim r_g$ (получается из решения ВДВЗ) можно определить. Везде $m, r \ll 1$. В противном случае нужно добавлять экспоненту.

Мы видим, что нелинейные поправки будут малы. Нелинейные поправки малы, если $r \gg r_V$, где $r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} \Rightarrow r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} \ll 1$. Таким образом, величина $r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5}$ много больше, чем считали раньше.

$$r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} \gg \left(\frac{r_g}{m^2}\right)^{1/3}$$

Для нашего Солнца величина:

$$r_V = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} \sim 400\,000 \text{ св. лет}$$

Это примерно четверть расстояния до туманности Андромеды. Это радиус сферы Вайнштейна. Имеется сфера Вайнштейна, ВДВЗ, а внутри нелинейный режим (рис. (7.5)).

Рис. 7.5. Сфера Вайнштейна, ВДВЗ, а внутри нелинейный режим

Для нелинейного режима Вайнштейн предложил аргумент: «Давайте будем использовать другое разложение», а именно:

$$\begin{cases} \nu = \nu_0 + m^2\nu_2 + m^4\nu_4 \\ \lambda = \lambda_0 + m^2\lambda_2 + \ldots \\ \mu = \mu_0 + m^2\mu_2 + \ldots \end{cases} \tag{7.37}$$

Когда это сделаем и начнём разлагать, то уравнение на ν_0 и λ_0 из (7.37) получается, если правую часть уравнений (7.34) уберем. Получаем такие же уравнения, как в общей теории относительности: (7.37) $\Rightarrow$

$$\nu_0 = \lambda_0 = -\frac{r_g}{r}. \tag{7.38}$$

Сразу возникает проблема. Это решение не проходит через третье уравнение системы (7.36). Потому что в этом уравнении комбинация в левой части

$$\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda}{r} \tag{7.39}$$

не нуль. Так как:

$$\frac{\nu_0'}{2} = \frac{r_g}{2r^2}, \quad \frac{\lambda}{r} = \frac{r_g}{r^2}$$

Тогда комбинация (7.39) равна $-\frac{r_g}{2r^2}$.

Здесь логика Вайнштейна. Он говорит, что член $-\frac{r_g}{2r^2}$ компенсируется нелинейными членами. Уравнение для μ нелинейно существенно. Хотя уравнение для ν, λ (7.37) линейно, уравнение для μ нелинейно. μ описывает скалярную поляризацию гравитона, и внутри сферы Вайнштейна скалярный гравитон находится в нелинейном режиме. Он описывается дифференциальным уравнением (7.36), третье уравнение. Получается простое решение:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{8}{9}\,\frac{r_g}{r}}$$

Дальше поправки. Таким образом получается, что внутри сферы Вайнштейна работает это:

$$\nu = -\frac{r_g}{r}\left(1+\beta\mu(mr)^2\sqrt{\frac{r}{r_g}}+\dots\right) \tag{7.40}$$

$$\lambda = \frac{r_g}{r}\left(1+\beta_2(mr)^2\sqrt{\frac{r}{r_g}}\right)+\dots \tag{7.41}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{r_g}{r}}\left(1+\beta_3(mr)^2\sqrt{\frac{r_m}{g_m}}\right)$$

Логика заключается в следующем (рис. 7.6): есть шкала расстояния, имеется радиус Вайнштейна r_V. (7.40) работает в правой части (A), (7.41) работает в левой части (B). Имеется промежуточная зона, где они должны сшиваться (на рис. 7.6 закрашена градиентом). Но Вайнштейн этого не сделал. Он решил на больших расстояниях и на маленьких расстояниях. Самая главная его идея в том, что на маленьких рас-

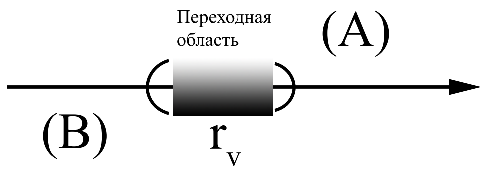

Рис. 7.6. Промежуточная зона

стояниях в точности восстанавливается общая теория относительности (7.38) из-за того, что сильно связан скалярный гравитон. Он удовлетворяет нелинейному уравнению (7.36), третье уравнение и коэффициент при старшой производной стремиться к нулю. Поскольку μ мало на малых расстояниях, то коэффициент при второй производной – это нуль. Такой феномен называется *сильной связью.*

Скалярный гравитон не распространяется из-за того, что сильно связан. Поскольку он не распространяется, то, что остается – это чистая теория относительности.

Суть механизма Вайнштейна.

ОТО восстанавливается внутри сферы Вайнштейна, поскольку лишние степени свободы массивного гравитона нелинейно связаны. «Сильно связаны» – это эффект вымораживания лишних степеней свободы за счет сильного самодействия. Математически это проявляется в том, что эти степени свободы описываются уравнениями, коэффициент при старших производных которых стремится к нулю. Это называется *сильной связью.*

Предположим, имеется реальное гравитационное излучение – *пульсар*. Двойной пульсар излучает гравитационные волны. Предположим, эти волны массивные. Лишняя степень свободы будет замораживаться в реальности. Но это трудно показывается.

Даже в случае статики Вайнштейн решил в зоне (B), (рис. 7.6), решил в зоне (A), (рис. 7.6). Нужно было показать, что одно другому соответствует, эти зоны сшиваются. Чтобы показать, что они сшиваются, нужно вернуться к системе уравнений и её решать точно, численно. Такое решение было получено совсем недавно. Вайнштейн — это 1972 год. В 2009 году было получено решение численными методами. Оказалось, что эта «переходная область» (рис. 7.6) существует.

На (рис. 7.7) $r_* - r$ звезды, то функция μ ведет себя как синий график, функция λ — как красный. У функции λ есть излом, но она непрерывна.

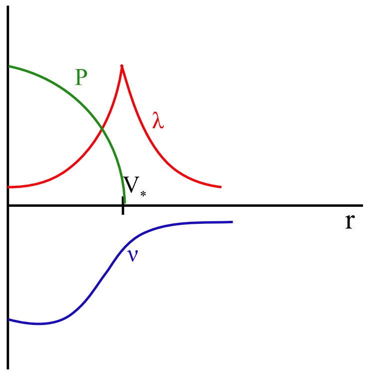

Рис. 7.7. Давление

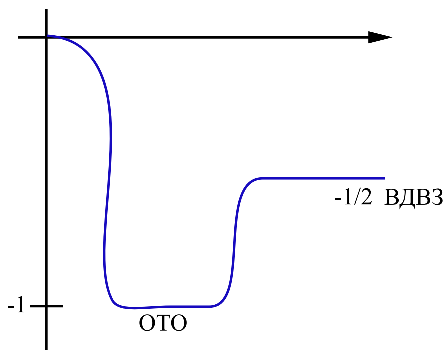

Рис. 7.8. ВДВЗ

Давление примерно как зеленый график на (рис. 7.7) (P).

Отношение $\frac{\lambda}{\nu(1+m_r)}$ начинается с нуля, затем быстро спадает к -1, которое соответствует значению в ОТО, потом асимптотически стремится к $-\frac{1}{2}$, что соответствует ВДВЗ (рис. 7.8).

ОТО (рис. 7.8) действительно есть. Функция $\frac{\ln \mu}{\ln r}$, которая описывала скалярный гравитон, ведет себя сложно (рис. 7.9). На (рис. 7.9) (A): $\mu = \frac{1}{\sqrt{r}}$. И это в точности решение Вайнштейна ОТО. В точке (B) оно становится $\frac{1}{r^3}$, это ВДВЗ.

А потом она падает по экспоненте по Юкава, когда выходим из-под комптоновского радиуса. Это довольно сложное решение, его получить нелегко даже численно, но оно полностью подтверждает механизм Эйнштейна.

Выражение «механизм Вайнштейна» стало расхожим. Всем, кто делает модифицированную гравитацию, нужно связать лишние степени свободы. Иначе это сразу войдет в противоречие с экспериментом. Существует класс теорий, в которых

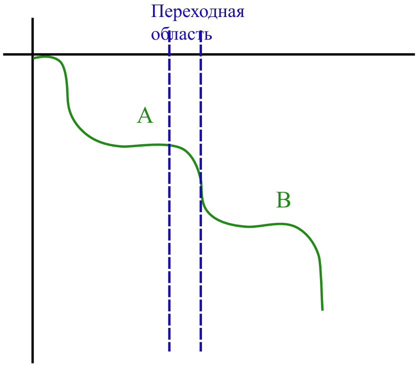

Рис. 7.9. Функция $\frac{\ln \mu}{\ln r}$

применим механизм Вайнштейна, где лишние степени свободы нелинейно связаны. Каждый раз нужно делать сложные разложения в ряды или интегрировать численно. Важно, что линейная общая теория относительности восстанавливается за счет нелинейных эффектов массивной гравитации.

Лекция 8. Гамильтонова формулировка

Дух в массивной гравитации

Утверждение 8.1. *Заключение Вайнштейна: ОТО восстанавливается путем учета нелинейных членов в массивной гравитации. (1972)*

Утверждение 8.2. *Бульвар и Дзер: учет этих нелинейных членов порождает дух.*

Определение 8.1. *Дух — это не физическая мода с отрицательной кинетической энергией.*

Можно написать нелинейные члены, но эта теория неприменима из-за духа (1970 год). До 2010 года считалась, что массивная гравитация мертва. Выход был найден.

Линейная теория Фирса-Пауля. (ФП) уравнение:

$$\begin{aligned} &\Box h_{\mu} - \partial_{\mu} h_{\nu} - \partial_{\nu} h_{\mu} + \overset{2}{\underset{\mu}{\partial}} h + \eta_{\mu} \left(\partial h_{\eta} - \Box h\right) = \\ &= m^2 \left(h_{\mu} - \alpha h \eta\right) - 2\kappa \mathrm{T}_{\mu} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Массовый член должен быть линейным по полю гравитона, содержать h_{μ} или $\alpha h \eta$ с коэффициентами: m^2 и αm^2, где $\alpha = 1$. В (8.1):

$$h_{\mu} = \partial^{\alpha} h_{\alpha\mu}, \quad h = h_{\mu} n^{r} \tag{8.2}$$

Возьмем дивергенцию уравнения (8.1):

$$\partial^{\mu} \left| \begin{aligned} &\Box h_{\mu} - \partial_{\mu} h_{\nu} - \partial_{\nu} h_{\mu} + \overset{2}{\underset{\mu}{\partial}} h + \eta_{\mu} \left(\partial h_{\eta} - \Box h\right) = \\ &= m^2 \left(h_{\mu} - \alpha h \eta\right) - 2\kappa \mathrm{T}_{\mu} \end{aligned} \right. \tag{8.3}$$

Дивергенция оператора Эйнштейна $\Box h_{\mu} = 0$.

Получаем: $0 = m^2 \left(\partial^{\mu} h_{\mu} - \alpha \partial \mu\right)$. Дивергенция $\mathrm{T}_{\mu} = 0$. Получаем условие:

$$h_{\nu} = \alpha \partial_{\nu} h, \tag{8.4}$$

Используя определение (8.2).

Возьмем след (8.3):

$$\Box h - 2\partial^{\mu} h_{\mu} + \Box h + 4\left(\partial_{\alpha} - \Box h\right) = 2\partial^{\alpha}_{h_{\alpha}} - 2 \Box h \quad \boxed{=}$$

Подставив (8.4), получаем:

$$\boxed{=} 2\alpha \Box h - 2 \Box h = 2\left(\alpha - 1\right) \Box h = m^2 \left(1 - 4\alpha h\right) - 2\kappa \mathrm{T}$$

Выпишем условие:

$$2(\alpha-1)\,\Box h = m^2(1-4\alpha)h - 2\kappa\mathrm{T} \tag{8.5}$$

Это дифференциальное уравнение на h, описывающее моду. Если $\alpha = 1$, то $\Rightarrow$ связь

$$h = -\frac{2\kappa}{m^2}\mathrm{T} \tag{8.6}$$

Связи (8.6) и (8.4) понижают степени свободы с 10 до 5: 5 поляризаций массивного гравитона с массой m.

Если $\alpha \neq 1$, то имеем всего 4 связи и число степеней свободы становится $6 = 10-4$. 10 — это число компонент тензора h_μ.

6 степеней свободы – это 5 поляризаций гравитона плюс h.

Исследование свойств моды

Напишем пропагатор на уравнение (8.5). Перенормируем поле

$$h = \sqrt{4\kappa}\widetilde{h}$$

Таким образом:

$$2(\alpha-1)\,\Box\widetilde{h} = m^2(1-4\alpha)\widetilde{h} - \sqrt{\kappa}\mathrm{T}$$

Переходим в импульсное представление

$$\left[-2(\alpha-1)k^2 - m^2(1-4\alpha)\right]\widetilde{h} = -\sqrt{\kappa}\mathrm{T}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(k) &= \frac{1}{2(\alpha-1)^2 + m^2(1-4\alpha)}\sqrt{\kappa}\mathrm{T} = \\ &= \frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{k^2+\frac{1-4\alpha}{2(\alpha-1)}m^2}\sqrt{\kappa}\mathrm{T}\end{aligned}$$

Получили пропагатор нашей частицы:

$$\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{k^2+\frac{1-4\alpha}{2(\alpha-1)}m^2}$$

$$D = \frac{1}{\eta(\alpha-1)}\,\frac{1}{k^2+m^2\frac{1-4\alpha}{2(\alpha-1)}} \tag{8.7}$$

Это пропагатор массивной частицы с массой

$$m_s^2 = \frac{1-4\alpha}{2(\alpha-1)}m^2$$

Если $\alpha \to 1$, то $m_s \to \infty$, частица (мода) становится бесконечно тяжелой и больше не распространяется. Если $\alpha = 1$, мода вымирает, замораживается.

Если $\alpha \neq 1$, то мода распространяется. m_s^2 модет быть положительна, отрицательна и нуль. При $m_s^2 < 0$ частица — тахион. *Тахиономода*, присутствие которых означает некоторую неустойчивость.

Коэффициент η в (8.7) определяет *вычет в полюсе*:

$$D = \frac{1}{\eta\,(\alpha-1)}\,\frac{1}{k^2+m^2\frac{1-4\alpha}{2(\alpha-1)}} = \frac{1}{2\,(\alpha-1)}\,\frac{1}{k^2+m_s^2}$$

Имеется полюс $k^2 = m_s^2$. Евклидов коэффициент $\frac{1}{2(\alpha-1)}$ определяет вычет. При $\alpha > 1$ коэффициент положителен, нормальная мода; если $\alpha < 0$, то это сосуд духовой моды.

Нормальная мода происходит из члена $-(\partial h)^2$, что производит положительную кинетическую энергию.

Для духовой моды $+(\partial h)^2$ энергия меняет знак. Кинетическая энергия становится отрицательной, что означает разрушение чего угодно путем быстрого движения. Духи приводят к катастрофической неустойчивости всех конфигураций.

Устойчивость определяется рисунком. На (Рис. 8.1) частица (A) в потенциальное время устойчива. При смещении она будет колебаться в положении равновесия. Частичка (B) на (Рис. 8.2), падает вниз, но до ограничения энергии снизу.

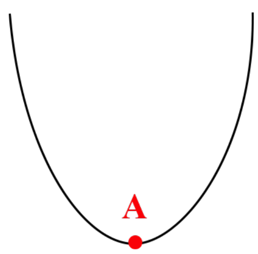

Рис. 8.1. Устойчивая частица

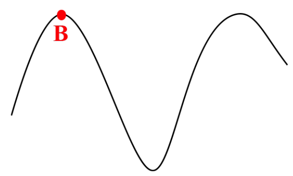

Рис. 8.2. Неустойчивая частица

Если имеется ситуация, когда энергия неограничена, всё будет распадаться. Особенно опасно это в теории поля, так как тогда нужно всё это умножить на объём, потом проинтегрировать. Получается бесконечный спад.

Лишняя мода уничтожается в линейной теории ФП путем выбора $\alpha = 1$, однако даже в этом случае она снова появляется при учете нелинейных членов, что было обнаружено Бульваром и Дезом при проведении гамильтонова анализа Кюри.

Примечание. В решении ВДВЗ

$$\mu = \frac{c}{m^2 r^3}\, e^{-mr} \dots\,, \tag{8.8}$$

где c — константа движения. Линеаризуем уравнение и находим решение (8.8). При учете нелинейных членов возникает еще одна константа интегрирования A и дополнительная мода

$$\frac{Ae^{-mr}}{r^{\alpha}} - \partial yx$$

При правильном решении уравнения (8.7) имеется дополнительное решение, невидимое в линейном режиме.

Сферическая система в единичном случае имеет скалярный гравитон и скалярный дух.

Гамильтонова формулировка

Вспомним, что

$$S = \frac{1}{\kappa}\int Ld^4x,$$

лагранжиан

$$L = \left[\frac{1}{2}R(g) - m^2 U(g, f)\right]\sqrt{-g}, \tag{8.9}$$

где $g = g_{\mu}$ — метрика пространства-времени, $f = f_{\mu}$ — метрика Минковского. Можно записать:

$$f_{\mu} = d_x^{\mu} d_x^{\nu} = -dt^2 + \delta_{ik} dx^i dx^k$$

Это стандартная плоская метрика. Можно выбрать функции или систему координат. Это называется *унитарной калибровкой.*

Метрика g_{μ} — это самая общая метрика пространства времени, содержащая 10 функций, которую можно выбрать в виде:

$$g_{\mu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -N^2 dt^2 + \gamma_{ik}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^t + N^t dt\right)$$

Таким образом вводится трехмерная метрика γ_{ik} — матрица 3×3, которая имеет 6 компонентов, 7-я компонента — N^2, 3 оставшиеся — N^i. Функции $N^2 dt^2$ называются *функциями хода (laps)*, а функции $N^t dt$ – *функции сдвига (shift).*

$$N,\ N^k \text{ и } \gamma_{ik} \text{ зависят от } t, x^k.$$

Такое представление метрики называется *параметризацией АДМ*, в которой 10 компонент g_{μ} выражается через 3-метрики γ_{ik}, через функцию хода N и через функции сдвига N^k.

Детерминант метрики:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\mu}$$

Задача (пример)

Задача. Проверить, что

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{\gamma}N\left(K_mK^{mn} - K^2 + R^{(3)}\right) + \text{ полная дивергенция,}$$

где $R^{(3)}$ — скаляр Фичи для γ_{ik}.

K — это *вторая фундаментальная форма пространства.*

Первая фундаментальная форма — это индустрированная метрика.

Вторая — это вторая производная вектора нормали, спроецированная на нормаль. Если имеется какая-то поверхность (Рис. 8.3), то $K_{ab} = \partial_{ab}\vec{n}\cdot\vec{n}$.

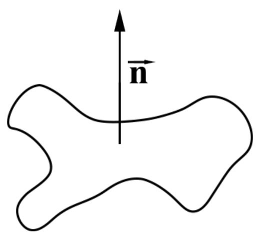

Рис. 8.3. Вторая фундаметальная форма

В этом случае это:

$$\mathrm{K}_{mn} = \frac{1}{2N}\left(\partial_t\gamma_{mn} - \overset{(\gamma)}{\nabla}_m N_n - \overset{(\gamma)}{\nabla}_n N_m\right), \quad \mathrm{K} = \gamma^{mn}\mathrm{K}_{mn} \tag{8.10}$$

Это *вторая фундаментальная форма гиперповерхности* $t = \mathrm{const}$. Используя это, перепишем лагранжиан в виде:

$$(8.9) = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}N\left\{K_{mn}K^{mn} - K^{\eta} + R^{(3)}\right\} - m^2 - \mathrm{V}\left(N^{\mu},\ \gamma_{\eta}\right) + \text{полная производная,}$$

где $V = \sqrt{-g}U$ и $N^{\mu} = \left(N,\ N^k\right)$. Будем считать все эти функции координатами нашей системы, лагранжиан:

$$L = L\left(q_s,\ \mathrm{T}'_s\right), \tag{8.11}$$

$$q_s = \left(N^{\mu},\ \gamma_{it}\right)$$

Лагранжиан (8.11) содержит только функцию хода и сдвига метрики $N^{\mu} = \left(N,\ N^k\right)$, трехмерную и их первую производную по времени. А все вторые производные, присутствующие изначально, содержатся в полной дивергенции, которая нас не интересует.

Построение гамильтониана

Чтобы построить гамильтониан, вычисляем импульсы, канонически сопряженные к координатам q_s:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \Rightarrow \underset{s}{\dot{q}} = \underset{s}{\dot{q}}(p_s)$$

Записываем соотношения и обращаем их для выражения скорости через импульсы. Гамильтониан становится:

$$H = \sum_s p_s \dot{q}_s - L$$

$$\gamma_{iL} \Rightarrow \pi^{ik} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ik}} \boxed{=}$$

$\dot{\gamma}_{ik}$ появляется в (8.10), $\partial_t \gamma_{mn}$.

$$\boxed{=} \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\left(K^{ik} - K\gamma^{ik}\right)$$

Если продолжим процедуру дальше, увидим что для N^μ никаких импульсов нет, потому что производная N не входит в лагранжиан, а входит только алгебраически.

$$\mathrm{P}_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mu}\,\nu} = \eta$$

$\Rightarrow$ 4 первичных связи.

$P_\mu = 0 \Rightarrow$ переменные N^M нединамические. Динамическими переменными являются 6 γ_{ik} и 6 π_{ik} $\Rightarrow$ они определяют 12-мерное фазовое пространство.

Гамильтониан:

$$\mathrm{H} = \mathrm{P}_\mu \dot{N}^\mu + \pi^{ik}\dot{\gamma}_{ik} - L = \pi^{ik}\underset{ik}{\dot{\gamma}} - L \boxed{=}$$

Задание. Проверить

$$\boxed{=} N^\mu \mathscr{H}_\mu + m^2 \mathrm{V},$$

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(2\pi_{ik}\pi^{ik} - \left(\pi_k^{k^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,\overset{(3)}{\mathrm{R}}$$

$$\mathscr{H}_k = -2\overset{(\gamma)}{\nabla}_s \pi_k^s$$

Имеем:

$$\mathrm{H} = N^\mu \mathscr{H}_\mu\left(\gamma_{ik}\kappa^{ik}\right) + m^2 \mathrm{V}\left(N^\mu,\ \gamma_{ik}\right)$$

Это прилагается к целому классу теории гравитации, включая общую теорию относительности.

Имеем связи

$$\mathrm{P}_\mu = 0 \Rightarrow \overset{\bullet}{\underset{\mu}{\mathrm{P}}} \boxed{=} \tag{8.12}$$

Эти связи должны быть устойчивы по времени.

Производная по времени в гамильтоновом формализме дается скобками Пуассона:

$$\boxed{=} \left\{ P_\mu,\, H \right\} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial N^\mu} \tag{8.13}$$

в простейшем случае, исходя из уравнения $\overset{\bullet}{\mathrm{p}} = \frac{\partial h}{\partial q}$.

Связи (8.12), (8.13) предполагают нетривиальные условия, они требуют

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial N^\mu} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial N^\mu} = \mathscr{H}_\mu + m^2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial N^\mu} = 0$$

Это *условие устойчивости связи*. Эти условия являются вторичными связями.

Безмассовый случай

Рассмотрим случай, когда $m = 0$.

Вторичные связи становятся

$$\mathscr{H}_\mu \left(\gamma_{ik}, \pi^{ik} \right) = 0$$

Это 4 условия, наложенные на γ и на π, являются 4 ограничениями, наложенными на фазовое пространство, что уменьшает его размерность.

Они образуют алгебру по отношение к скобкам Пуассона:

$$\left\{ \mathrm{H}_\mu,\, \mathrm{H}_\nu \right\} = \frac{\partial \mathscr{H}_\mu}{\partial \gamma_{ik}} \frac{\partial H_\nu}{\partial \pi^k} - \frac{\partial \mathscr{H}_\nu}{\partial \gamma_{ik}} \frac{\partial \mathscr{H}_\mu}{\partial \pi^{ik}} \boxed{=} \tag{8.14}$$

Посчитав скобку (8.14), получим

$$\boxed{=} C^\alpha_\mu \mathscr{H}_\alpha = 0$$

Таким образом, если все H обращаются в нуль, то и их коммутатор также обращается в нуль, они образуют замкнутую алгебру.

Гамильтониан

$$\mathrm{H} = N^\mu \mathscr{H}_\mu$$

обращается в нуль на связях. Энергия теории относительности равна нулю с точностью до поверхностных членов. Тот факт, что эти связи образуют алгебру, подразумевает, что они устойчивые. Когда считаем их производные по времени

$$\overset{\bullet}{\underset{\mu}{\mathscr{H}}} = \left\{ \mathrm{H}, \mathrm{H}_\mu \right\} = \{ N^\alpha \mathscr{H}_a,\, \mathscr{H}_\alpha \} = N^\alpha \left\{ \mathscr{H}_\alpha,\, \mathscr{H}_\mu \right\} = 0 \tag{8.15}$$

Если связи образуют алгебру, то они называются *связями первого рода*, если не образуют, то это *связи второго рода*. Есть связи первичные, вторичные, третичные, четвертичные и так далее, а есть связи первого и второго рода. $\mathscr{H}_\mu$ — связи первого рода.

$$\mathrm{P}_\mu \Leftrightarrow \mathscr{H}_\mu$$

Процедура генерации связей обрывается, не давая никаких условий на функции N^μ. Эти функции остаются произвольными и являются калибровочными параметрами, отражающими выбор 4 координат.

Эти функции входят в гамильтоново уравнение.

$$\underset{ik}{\dot{\gamma}} = \{\gamma_{ik}, \mathrm{H}\} = \{\gamma_{ik},\, \mathscr{H}_m\} N^\mu \tag{8.16}$$

$$\dot{\pi}^{ik} = \left\{\pi^{ik},\, \mathscr{H}_\mu\right\} N^\mu \tag{8.17}$$

Разный выбор N соотвествует разным эволюциям, что означает различное выражение одной и той же эволюции в разных координатах.

Можно выбрать N^μ в зависимости от вкуса, например выбор $N = 1$, $N^k = 0$ дает синхронную систему координат. Любой выбор N^α налагает 4 дополнительных координатных условия на функции (8.16) и (8.17). Плюс имеется 4 связи (8.15). Таким образом, условий всего 8, которые уменьшают размер фазового пространства с 12 до 4, что означает 2 степени свободы. 2 степени свободы отвечают 2 поляризациям безмассового гравитона.

Есть функции $\mathscr{H}_\mu\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right)$. Это 4 функции от γ и π, 4 ограничения на фазовое пространство. И возникает 4 координатных ограничения, когда выбираем N^μ, что автоматически налагает 4 дополнительных условия. Это видно при рассмотрении уравнений (8.16) и (8.17). Таким образом, условий оказывается 8, размер фазового пространства становится 4.

В теории систем со связью «связи первого рода нужно учитывать два раза». Каждая связь первого рода является генератором некоторой симметрии (связи являются генераторами дифеоморфизмов).

Лекция 9. Инфракрасные модели гравитационных теорий

Введение

В прошлый раз начали обсуждение гамильтоновых методов для гравитации и написали несколько формул. Поэтому приведем пример, показывающий как раскладывается простая классическая электродинамика в гамильтоновом формализме, как возникают связи, подсчет степеней свободы.

Электродинамика

Рассмотрим стандартный лагранжиан электродинамики:

$$L = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\mu}\boxed{=}, \tag{9.1}$$

где $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ — квадрат от тензора электромагнитного поля; $J^{\mu}A_{\mu}$ — внешний ток, свернутый с потенциалом поля. Всё это в пространстве Минковского с сигнатурой $(- + + +)$ и $\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$.

Распишем лагранжиан (9.1):

$$\boxed{=} -\frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} - \frac{1}{4}F_{ik}F^{ik} + J^0A_0 + J^{ik}A_k\boxed{=}$$

используем метрику $(- + + +)$:

$$\boxed{=} +\frac{1}{2}(F_{0k})^2 - \frac{1}{4}(F_{ik})^2 + J^0A_0 + J^kA_k\boxed{=}$$

вспоминая определение тензора электромагнитного поля:

$$\boxed{=}\frac{1}{2}\left(\dot{A}_k - \partial_k A_0\right)^2 - \frac{1}{4}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)^2 + J^0A_0 + J^kA_k \tag{9.2}$$

Также вспомним, что

$$A^{\mu} = \left(\varphi,\, A^k\right) \quad A_{\mu} = \left(-\varphi,\, A^k\right)$$

Конечный лагранжиан (9.2) используем для определения канонических импульсов.

Замечаем, что

$$\pi_0 = \frac{\partial L}{\dot{A}_0} = 0$$

потому что лагранжиан не зависит от $\dot{A}_0$.

Сопряженный канонический импульс

$$\pi^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k} = \dot{A}^k - \partial^k A_0 = \dot{A}^k + \partial^k \varphi = -\varepsilon^k, \tag{9.3}$$

— электрическое поле с обратным знаком. Магнитное поле

$$B_s = \varepsilon_{sik} \partial_i A_k, \tag{9.4}$$

где ε — антисимметричный тензор.

$$\frac{1}{4}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)^2 = \frac{1}{2}\vec{B}^2$$

$$\left(\dot{A}_k - \partial_k A_0\right)^2$$

Из (9.2) $= \frac{1}{2}$ электрического поля. Получаем, что лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}\left(\vec{\varepsilon}^2 - \vec{B}^2\right) + J^0 A_0 + J^k A_k$$

Вычисляем гамильтониан.

$$\mathrm{H} = \int \mathscr{H}(x)\, d^3x,$$

$$\mathscr{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - L = \pi^k \dot{A}_k - L \boxed{=}$$

$\dot{A}_k$ определяется из (9.3):

$$\dot{A}_k = \pi_k + \partial_k A_0$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \boxed{=} \pi^k (\pi_k + \partial_k A_0) - \frac{1}{2}\pi_k^2 + \frac{1}{2}B^2 - J^0 A_0 - J^k A_k = \\ = \frac{1}{2}\pi_k^2 + \frac{1}{2}B_k^2 + \pi^k \partial_k A_0 - J^0 A_0 - J^k A_k \end{aligned} \tag{9.5}$$

Перекидывая производную A_k на π в (9.5), получаем:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\pi_k^2 + \frac{1}{2}B_k^2 + \left(-\partial_k \pi_k - J^0\right) A_0 - J^k A_k \tag{9.6}$$

Глядя на гамильтон (9.6), определим связи и уравнения движения.

$\pi^0 = 0$ — первичная связь. Эта связь должна быть устойчивой, сохраняться во времени:

$$\dot{\pi}^0 = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_0} = \partial_k \pi_k + J^0 \equiv C = 0 \tag{9.7}$$

Это связь, налагаемая на поля. Поскольку импульс совпадает с электрическим полем с обратным знаком, связь утверждает:

$$C = -\partial_k \varepsilon_k + J^0 = 0$$

$\Rightarrow$ *закон Гаусса* — это связь, возникающая в гамильтоновой теории.

Уравнение движения

Гамильтоново уравнение движения:

$$\dot{A}_k = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi^k}, \quad \dot{\pi}^k = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_k}. \tag{9.8}$$

Для вычисления производной в правой части (9.8) удобно проварьировать плотность гамильтониана $\mathscr{H}$ (9.6) по полям. Получим:

$$\partial \mathscr{H} = \pi_k \delta \pi_k + B_k \delta B_k - \partial_k \partial \pi_k \cdot A_0 - J^k \delta A_k \boxed{=} \tag{9.9}$$

Используя выражение для электромагнитного поля (9.4), видим:

$$B_k \delta B_k (9.9) = (\mathrm{rot} B)_k \delta A_k$$

$$\partial_k \partial \pi_k \cdot A_0 (9.9) = +\partial_k A_0$$

Таким образом, получаем:

$$\boxed{=} (\pi_k + \partial_k A_0)\, \delta \pi_k + \left((\mathrm{rot} B)_k - J^k\right) \delta A_k$$

Член $(\pi_k + \partial_k A_0)\, \delta \pi_k$ дает производную гамильтониана по π_k, а $\left((\mathrm{rot} B)_k - J^k\right)$ — производную гамильтониана по A_k. Записываем:

$$\begin{cases} \dot{A}_k = \pi_k + \partial_k A_0 \\ \dot{\pi}^k = -(\mathrm{rot} B)_k + J^k \end{cases} \tag{9.10}$$

Это гамильтоново уравнение движения ($\pi_k = -\varepsilon_k$). Переносим налево, получаем:

$$\varepsilon_k = -\partial_k \varphi - \dot{A}_k \tag{9.11}$$

Теперь гамильтоново уравнение это определение электрического поля.

Второе гамильтоново уравнение из (9.11) ($\dot{\pi}^k = -\varepsilon_k$):

$$\dot{\varepsilon}_k = (\mathrm{rot} B)_k - J_k$$

Это одно из уравнений Максвелла.

Таким образом, получили гамильтоново уравнение:

$$\begin{cases} \varepsilon_k = -\partial_k \varphi - \dot{A}_k \\ \dot{\varepsilon}_k = (\mathrm{rot} B)_k - J_k \end{cases}$$

В векторном виде:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon} = -\bar{\nabla}_\varphi - \dot{\vec{A}} \Rightarrow \\ \mathrm{rot} \vec{B} = \dot{\vec{\varepsilon}} + \vec{J} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \mathrm{rot} \vec{\varepsilon} = -\dot{\vec{B}} \\ \mathrm{rot} \dot{\vec{B}} = \dot{\vec{\varepsilon}} + \bar{J} \end{cases}$$

Получили пару уравнений Максвелла, к которым добавляем гамильтонову связь. Из определения магнитного поля получаем:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{\varepsilon} = J^0 = \rho \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаются правильные уравнения Максвелла.

Это вторичная связь. Первичная связь — $\pi_0 = 0$. Гамильтон (9.6), (9.7) — вторичная связь, которая должна быть также устойчива.

Считаем условия устойчивости, ее производную.

$$\dot{C} = -\partial_k \dot{\varepsilon}_k + \dot{J}^0 \overbrace{=}^{\mathrm{rot}\vec{B}} -\partial_k \left(\mathrm{rot}\vec{B}_k - J_k\right) - \partial_k J^k = 0$$

Таким образом, вторичная связь устойчивая. На этом генерация связей обрывается и определяем всё, кроме A_0, которая остается неопределенной функцией, нет никакого уравнения. Но A_0 входит в уравнение движения (9.10). A_0 выбираем произвольное и получаем разные решения уравнения движения. Существование неопределенной величины A_0 отражает факт, что теория калибровочная инвариантна.

Если совершим градиентное преобразование

$$A_\mu \to \widetilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \tag{9.12}$$

то при этом лагранжиан не меняется. В частности,

$$A_0 \to \widetilde{A}_0 = A_0 + \dot{\alpha} \tag{9.13}$$

$$A_k \to \widetilde{A}_k = A_k + \partial_k \alpha \tag{9.14}$$

При замене в уравнении Максвелла (9.10) A_k и A_0 на $\widetilde{A}_k$, то ничего не меняется:

$$\dot{\widetilde{A}}_k = \pi_k + \partial_k \widetilde{A}_0$$

Используя определения (9.12), (9.13), (9.14), получаем:

$$\dot{A}_k + \partial_k \dot{\alpha} = \pi_k + \partial_k A_0 + \partial_k \dot{\alpha} \dot{A}_k + \partial_k \dot{\alpha} = \pi_k + \partial_k A_0 + \partial_k \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{A}_k = \pi_k + \partial_k A_0$$

A_0 не определена, разные выборы A_0 отвечают разным калибровкам. Существование калибровочной свободы означает, что можем наложить еще одну связь. Решение первого уравнения относительно A_0 (9.15) означает, что оно не меняется. Это связь, наложенная на фазовое пространство. Получаем:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \pi_1 + \partial_1 A_0 = 0 \\ C = \partial_k \pi_k + J^0 = 0 \end{cases} \tag{9.15}$$

Две связи, налагаемые на фазовое пространство, которое изначально шестимерное, покрывается компонентами A_k (=3) и π_k (=3). Две связи, вытекающие из закона Гаусса (9.15) — второе уравнение и первое уравнение из наложения калибровки (9.15), устраняют 2 степени свободы, оставляя 4, что соответствует $6-2=4=2\times 2$, что отвечает 2 поляризациям фотона.

Связь $C(x) = \partial_k \pi_k + J^0$ генерирует калибровочные преобразования. Пусть есть параметр калибровочного преобразования — функция пространственно-временных точек:

$$\Lambda = \int \alpha(y)\, C(y)\, d^3y --- \ \textit{функционал}$$

Если вычислить скобку Пуассона, получим:

$$\delta A_k(x) = \{\Lambda,\, A_k(x)\} = \partial_k \alpha = \int d^3y\, \alpha(y)\, \{C(y)\,,\, A_k(x)\} \boxed{=}$$

Связь содержит канонические переменные $\partial_k \pi_k$ и функцию, которая коммутирует со всеми функциями J^0.

$$\boxed{=} \int d^3y, \quad \alpha(y)\, \{\partial_s \pi_s(y)\,,\, A_k(x)\}$$

Мы хотим посчитать в явном виде скобку Пуассона

$$\{\partial_s \pi_s(y)\,,\, A_k(x)\}$$

Тонкость вычисления состоит в наличии производной $\partial_s \pi_s(y)$.

Введем сглаживающую функцию. Вместо $\partial_s \pi_s(y)$ введем оператор:

$$\Pi = \int f(y)\, \partial_s \pi_s(y)\, d^3y \tag{9.16}$$

Считается, что функция $f(y)$ очень быстро спадает при больших y, чтобы можно было интегрировать по частям для избавления от производной.

Также введем:

$$\mathscr{A}_k = \int g(x)\, A_k(x)\, d^3x \tag{9.17}$$

Скобка Пуассона (9.16) и (9.17):

$$\begin{aligned}
&\{\Pi,\, \mathscr{A}_k\} = \int f(y)\, g(x)\, \partial_s \{\pi_s(y)\,,\, A_k(x)\}\, d^3x d^3y = \\
&= -\int \frac{df(y)}{d_y s}\cdot g(x)\{\pi_s(y)\,, A_k(x)\} d^3x d^3y = \\
&= -\int d^3z\, (\delta_{sm}\delta(y-z)\,\delta_k^m\delta(x-z)) = -\delta_{sk}\delta(x-y) \\
&\pi_s(y)\,, A_k(x) = \int d^3z \left(\frac{\partial \pi_s(y)}{\partial A_m(z)}\,\frac{\partial A_k(x)}{\partial \pi^m(z)} - \frac{\partial \pi_s(y)}{\partial \pi^m(z)}\,\frac{\partial A_k(x)}{\partial A_m(z)}\right)
\end{aligned} \tag{9.18}$$

Получили *фундаментальную скобку Пуассона*:

$$\{\pi_s(y)\,,\, A_k(x)\} = -\delta_{sk}\delta(x-y)$$

Мы хотели получить с использованием сглаживающих функций:

$$(9.18) = \{\partial_s \pi_s(y)\,,\, A_k(x)\} = -\frac{\partial}{\partial y_k}\delta(x-y) \tag{9.19}$$

С использованием (9.19):

$$\begin{aligned}
&\delta A_k = \{\Lambda,\, A_k(x)\} = \int \alpha(y)\, \{\partial_s \pi_s,\, A_k\}\, d^3x d^3y = \\
&= -\int \alpha(y)\, \frac{\partial}{\partial y^4}\delta(x-y)\, d^3y = +\partial_k \alpha(y)
\end{aligned}$$

Ссылка: Khoury, J., Miller, G.E. and Tolley, A.J., 2012. Spatially covariant theories of a transverse, traceless graviton: Formalism. Physical Review D, 85(8), p.084002.

$$C = \partial_k \pi_k + J^0$$

есть связь-генератор калибровочных преобразований в электродинамике.

Массивная гравитация

Рассмотрим массивную гравитацию. лагранжиан:

$$L = \left[\frac{1}{2}R(g) - m^2 \mathrm{U}(g,f)\right]\sqrt{-g} \tag{9.20}$$

Выбираем физическую метрику:

$$g_\mu d_y \eta dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ik}\left(dx^i + N^i df\right)\left(dx^\mu + N^\mu df\right)$$

То есть, 10 компонент метрики параметризуются через 6 компонент пространства и метрики (N — функция хода):

$$g_\mu \leftrightarrow \gamma_{ik}, \mathrm{N}, \mathrm{N}_k \equiv (\gamma_{ik}, N^\mu) = 6+4,$$

где всё зависит от всех 4 координат.

Метрика записывается:

$$f_\mu = -dt^2 + \delta_{ik} dx dy^k$$

Тогда лагранжиан (9.20):

$$(9.20) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} N \left(K_{ik}K^{ik} - K^2 + \overset{(3)}{R} \right) - m^2 \overbrace{\mathrm{V}\left(N^\mu,\, \gamma\right)}^{\sqrt{-g}\mathrm{U}} + \ldots$$

где K_{ik} — вторая фундаментальная форма гиперповерхности, $t = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{K}_{ik} = \frac{1}{2N} \left(\dot{\gamma}_{ik} - \overset{(\gamma)}{\nabla}_i N_k - \overset{(\gamma)}{\nabla}_k N_i \right)$$

имеется 10 переменных: 4 N^μ и 6 γ_{ik}. Также видим, что N входит в лагранжиан без производных. Поэтому при подсчете канонических импульсов

$$\mathrm{P}_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_\mu} = 0 \ \textit{– это 4 первичные связи}$$

Оставшиеся вычисляются:

$$\pi^{ik} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ik}} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\left(\mathrm{K}_{ik} - \mathrm{K}\gamma^{ik} \right)$$

Считаем гамильтониан стандартным способом:

$$\mathscr{H} = \pi^{ik}\dot{\gamma}_{ik} - L = N^\mu \mathscr{H}_\mu \left(\pi^{ik},\, \gamma_{ik} \right) + m^2 \mathrm{V}\left(N^\mu,\, \gamma_{ik}\right)$$

Это структура гамильтониана в теории. Распишем:

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(2(\pi_{ik})^2 - \left(\pi_k^k\right)^2 \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma} R^{(3)}$$

$$\mathscr{H}_k - 2\overset{(\gamma)}{\nabla}_s \pi_k^s$$

Дальше делаем то же самое, что в электродинамике. Есть первичные связи, которые должны быть устойчивы. Устойчивость этих связей порождает условия:

$$-\dot{\mathrm{P}}_\mu = +\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial N^\mu} = \mathscr{H}_\mu\left(\gamma, \gamma_i\right) + m^2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial N^\mu} = 0 \tag{9.21}$$

Рассматривали случай, когда $m = 0$:

$$\mathscr{H}_\mu\left(\gamma, \gamma_i\right) = 0 \ \textit{— это 4 вторичные связи}$$

Эти 4 связи являются генераторами калибровочных преобразований в теории, *диффеоморфизмы*. Эти условия образуют алгебру:

$$\left\{\mathscr{H}_\mu,\, \mathscr{H}_\nu\right\} = C^\alpha_\mu \mathscr{H}_\alpha$$

Этот факт гарантирует, что связи устойчивы:

$$\dot{\mathscr{H}}_\mu = 0$$

Каждая из таких связей порождает калибровочные условия. Таким образом, имеются 4 связи, каждая из них может быть использована для того, чтобы наложить калибровочные условия:

$$\dot{\gamma}_{ik} = \{\gamma_{ik},\, \mathscr{H}\} = \left\{\gamma_{ik},\, \mathscr{H}_\mu\right\} N^\mu$$

Нет никаких ограничений на функции хода и сдвига. Это калибровочные параметры, подобно A_0 в электродинамике. Для каждого конкретного выбранного N^μ получается свое решение уравнения движения. Мы можем использовать свободу выбора для того, чтобы наложить 4 калибровочных условия на фазовое пространство. Таким образом, возникают 4 связи + 4 калибровочных условия. Получается 8 условий, наложенных на фазовое пространство. Фазовое пространство 12-мерное. Потому что имеется:

$$\gamma_{ik} + \pi^{ik} = 6 + 6 = 12 - 8 = 4 = 2 \times 2.$$

Это 2 степени свободы безмассового гравитона. Это вытекает из того, что имеются 4 связи первого рода, которые порождают калибровочные преобразования, каждое из которых позволяет наложить калибровочные условия. Таким образом, получается всего 8 условий и размерность фазового пространства уменьшается с 12 до 4. Это безмассовый случай.

Если $m \neq 0$, то 4 условия (9.21) представляют из себя 4 алгебраических уравнения на 4 функции N^μ. Решения которых:

$$N^\mu = N^\mu\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right)$$

Плохо, что не возникает связей – без связей фазовое пространство остается 12-мерным, все эти переменные являются независимыми. Хуже всего то, что:

$$\mathscr{H} = N^\mu \mathscr{H}_\mu + m^\mu \mathrm{V}\left(N^\mu,\, \gamma_\mu\right) = \mathscr{H}\left(\gamma_\mu,\, \pi^{ik}\right) = -(\pi_{ik})^\mu + \ldots$$

Эта функция не ограничена снизу, по отношению к импульсу π^{ik} — это квадратичная форма или форма высшего порядка. Это неположительно определенное по отношению к импульсу выражение. Это означает, что теория кинетической энергии неположительно определена, теория содержит *дух*.

Это было заключение Бульвара и Дезера, которые сказали, что можно рассмотреть нелинейную теорию массивной гравитации, но это теория содержит не 5 степеней свободы, а 6, и лишняя степень свободы несет кинетическую энергию и является *духом Бульвара – Дезера*. Их вердикт, который затормозил развитие теории на 40 лет.

Решение было найдено: нужно повторить всё вышеописанное выражение в линейной теории ФП. В линейной теории духа нет. В линейной вместо 6 степеней только 5. Это вычисление дает идею о том, что можно поправить ситуацию. Для того, чтобы перейти в линейную теорию, нужно взять формулы и разложить их по малости отклонения от плоского пространства.

Гамильтонов анализ линейной теории

Полагаем в общих формулах

$$N = 1 + \nu, \quad N^k = \nu^k, \quad \gamma_{ik} = \delta_{ik} + h_{ik} \tag{9.22}$$

где ν, ν^k, h_{ik} малые.

Выберем потенциал, который должен сводиться к теории ФП:

$$U = \frac{1}{8}\left(H^{\beta}_{\alpha} - (H^{\alpha}_{\alpha})^2\right),$$

где $\mathrm{H}^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - g^{\alpha\sigma} f_{\sigma\beta}$.

$$g_{\mu} d_x \mu dx^{\nu} = -N^2 dt^2 + \gamma_{ik}\left(dv' + N' dv\right)\left(dx^{\mu} + N^{\mu}\gamma\lambda\right)$$

То же самое выражение Армавита-Дезера-Мизера, но с учетом малости отклонения (9.22).

Имеется общее выражение:

$$\mathscr{H} = N^{\mu}\mathscr{H}_{\mu} + m^2 V,$$

где

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(2(\pi_{ik})^2 - (\pi_{ik})^2\right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\overset{(3)}{R} \tag{9.23}$$

$$\mathscr{H}_k = -2\nabla_s \pi^s_k$$

Первым делом разлагаем член $-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\overset{(3)}{R}$ из (9.23):

$$-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\overset{(3)}{R} = V_1 + V_2 + \ldots,$$

где

$$V_1 = \frac{1}{2}\left(\partial^k\partial_k h - \partial^i\partial^k h_{ik}\right)$$

$$V_2 = \frac{1}{4}h^{ik}\left(-\frac{1}{2}\partial^s\partial_s h_{ik} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\partial^s\partial_s h - \partial_i\partial_k h + \partial_i\partial^s h_{sk}\right)$$

Далее разложим потенциал.

$$\mathrm{H}^0_0 = 2\nu + \ldots,\ \mathrm{H}^0_k = -\nu_k + \ldots \quad \mathrm{H}^k_0 = +\nu^k,\ \mathrm{H}^i_k = h^i_k.$$

С учетом этих выражений оказывается:

$$U = \frac{1}{8}\left(h_{ik}h^{ik} - h^2 - 2\nu_k\nu^k - 4h\nu\right)$$

Самое главное, что здесь возникает функция хода, ν входит в потенциал линейным. Это важнейшее свойство теории. Когда подсчитаем полный гамильтониан, подставим всё в (9.23):

$$\begin{gathered}\mathscr{H} = 2(\pi_{ik})^2 - (\pi^s_s)^2 + V_2 + \frac{m^2}{8}\left((h_{ik})^2 - h^2 - 2(\nu_k)^2\right) - \\ -2\partial^k\pi_{ks}\cdot\nu^k + \nu\left(V_1 - \frac{m^2}{2}h\right) = \mathscr{H}\left(\nu,\ \nu^k,\ h_{ik},\ \pi^{ik}\right)\end{gathered} \tag{9.24}$$

Этот гамильтониан генерирует вторичные связи, такие же как в общей теории. То есть импульсы, сопряженные с функцией хода, равны нулю.

Вторичные связи:

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\nu_k} = -\frac{m^2}{2}\nu_k - 2\partial^s\pi_{sk} = 0 \Rightarrow \nu_k = -\frac{4}{m^2}\partial^s\pi_{sk} \tag{9.25}$$

Когда продифференцируем по ν, по функции хода, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = V_1 - \frac{m^2}{2}h = 0 = C(h).$$

потому что функция хода входит в дифференциал линейно. Это уже не уравнение, а вторичная связь.

Далее подставляем (9.25) в гамильтониан (9.24) и преобразуем гамильтониан к новому виду. После исключения функции хода гамильтониан:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(h_{ik}) + \mathscr{H}(\pi_{ik}) + \nu C(h_{ik})$$

где

$$\mathscr{H}(\pi_{ik}) = 2(\pi_{ik})^2 - \left(\pi\frac{s}{s}\right)^2 + \frac{4}{m^2}(\partial^s\pi_{sk})^2$$

Другой выглядит посложнее:

$$\mathscr{H}\left(h_{ik}\right)=\frac{1}{8}(\partial_m h_{ik})^2-\frac{1}{8}(\partial_k h)^2+\frac{1}{4}\partial^s h_{sk}\partial^k h-\frac{1}{4}(\partial^s h_{sk})^2+\frac{m^2}{8}\left(h_{ik}^2-h^2\right)$$

Вторичная связь должна быть устойчива. Условие её устойчивости:

$$\dot{C}=\{C,\mathrm{H}\}=S=m^2\pi_{kk}+2\partial^i\partial^k\pi_{ik}=0 \tag{9.26}$$

порождает третичную связь.

Таким образом, есть 2 связи. Имеется вторичная и третичная связи. Третичная связь должна быть также устойчива. Её условие устойчивости:

$$\dot{S}=\{S,\,\mathrm{H}\}=\frac{3}{4}m^4\left(h-\nu\right)+\frac{3}{2}m^2\partial_{kk}^2 h+\left(\partial_{kk}^2\right)h=0 \tag{9.27}$$

Выражение (9.27) не является связью, так как содержит ν. Это алгебраическое уравнение на ν. Решаем это уравнение, получаем выражение для ν:

$$\nu=\left(1+\frac{2}{m^2}\Delta+\frac{4}{3m^4}\Delta^2\right)h$$

На этом процедура генерации связи обрывается. Можно проверить, что связи (9.26) и (9.27) — связи второго рода:

$$\{C,S\}\neq\alpha C+\beta S$$

Таким образом, связи второго рода не генерируют калибровочные преобразования. Фазовое пространство становится 10-мерным (отнимаем C и S), отвечает 5 поляризациям гравитонов.

Лекция 10. Бездуховая массивная гравитация

Линейный случай

Напомним основные формулы.
лагранжиан:

$$L = \left[\frac{1}{2}R(g) - m^2 U\right]\sqrt{-g}$$

$$f_\mu dx^\mu dx^2 = -t^2 + \delta_{ik} dx^i dx^k$$

гамильтониан

$$\mathscr{H} = N^\mu \mathscr{H}_\mu + m^2 \underbrace{V\left(N^\mu,\, \gamma_k\right)}_{\sqrt{-g}U = N\sqrt{\gamma}U}$$

Также выражаемое через вторые фундаментальные формы

$$\mathscr{H}_\mu\left(\gamma_\mu,\, \pi^{ik}\right), \quad \pi^{ik} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\left(K_{ik} - K\gamma_{ik}\right),$$

Имеется 4 первичные связи

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial N^\mu} = 0,$$

порождающие вторичные связи

$$-\dot{P}_\mu = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial N^\mu} = \mathscr{H}_\mu\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right) + m^2 \frac{\partial V}{\partial N^\mu} = 0 = F_\mu\left(N^\alpha,\, \gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right)$$

В общем случае, это 4 условия для определения 4 функций N^μ, решения которых:

$$N^\mu\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right)$$

Не находим никаких связей, никаких ограничений на размерности фазового пространства. Следовательно, размерность фазового пространства 12 = 6 степеней свободы. 4 функции определяются, только если все 4 уравнения независимы. Если ранг матрицы

$$\mathrm{rank}\frac{\partial^2 V}{\partial N^\mu \partial N^\nu} = 3,$$

тогда только 3 уравнения независимы и они определяют 3 функции сдвига.

$$N^k = N^k\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right)$$

Функция хода N не определяется уравнениями, и четвертое из уравнений

$$\mathscr{H}_\mu + m^2 \frac{\partial V}{\partial N^\mu}$$

оказывается связью:

$$C\left(\gamma_{ik},\, \pi^{ik}\right) = 0$$

Это то, что происходит в линейной теории ФП. В нелинейной ищем то же самое. Устойчивость этой связи порождает еще одну, третичную, связь.

$$\dot{C} = S\left(\pi_{ik},\, \gamma^{ik}\right) = 0 \tag{10.1}$$

а устойчивость третичной связи порождает уравнение:

$$\dot{S} = 0 = F\left(N,\, \gamma_{ik},\, \pi^{il}\right). \tag{10.2}$$

Устойчивость третичной связи определяет функция N и схема генерации связей на этом замыкается. Таким образом, размерность фазового пространства понижается с 12 до 10 за счет существования связей (10.1) и (10.2).

Можно ли провести то же самое в нелинейном случае? В линейной теории ФП схема сработала потому что потенциал содержал функцию ν линейно:

$$N = 1+\nu,\, N^k = \nu^k \Rightarrow U = \frac{1}{8}\left(h_\mu h^\mu - h^2\right) = \frac{1}{8}\left(h_{ik}h^{ik} - h^2 - 2\nu_k\nu^k - \underbrace{4h\nu}_{(\mathrm{A})}\right) \tag{10.3}$$

Решающим был член (A) (10.3), что ν появляется линейным образом в потенциале U и в кинетическом члене. Поэтому, когда варьируем по ν, ν выпадает из результата. Остается только связь. Сделаем то же самое в нелинейной теории.

Нелинейный случай

Нужно найти полный нелинейный потенциал, который линеен по полной функции хода. Ищем потенциал, линейный по N. Такой потенциал существует и строится он однозначно следующим образом. Вспомним параметры метрики

$$g_\mu = dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_k\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^k + N^k dt\right)$$

Здесь матрица γ_{ik} невырожденная и положительно определена. Это означает, что всегда можно представить

$$\gamma_{ik} = \delta_{ab} e^a_i e^b_k$$

То есть, разложить по триаде — *триадное представление*. Это 3 вектора.

Таким образом, метрика

$$ds_g^2 = -N^2 dt^2 + \delta_{ab} e^a_i e^b_k \left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^k + N^k dt\right) \boxed{=}$$

Эту метрику можно представить

$$\boxed{=}\eta_{AB}E^A_\mu E^A_\nu dx^\mu dx^\nu$$

где η_{AB} — тензор Минковского, $E^A_\mu dx^\mu$ — *базисные 1-формы*. Они выглядят так:

$$E^0_\mu dx^\mu = Ndt \tag{10.4}$$

$$E^a_\mu dx^\mu = e^a_i N^i dt + e^a_i dx^i \tag{10.5}$$

Функция хода появляется только здесь (10.4), больше нигде. Только в нулевой базисной форме. Аналогичным образом представим вторую метрику, f-метрику.

$$ds^2_f = -dt^2 + \delta_{ik}dx^i dx^k = \eta_{AB}\mathscr{O}^A_\mu \mathscr{O}^B_L dx^\mu dx^\nu = \eta\,\mathscr{O}^A_\mu \mathscr{O}^B_\nu dx^\mu dx^\nu,$$

где $\mathscr{O}$ — базисные 1-формы, но уже другие:

$$\mathscr{O}^0_\mu dx^\mu = dt, \quad \mathscr{O}^a_\mu dx^\mu = dx^a$$

Но это только один из простейших выборов, это *метрика f в унитарной калибровке.*

Можно также выбрать

$$\mathscr{O}^A_\mu \to \widetilde{\mathscr{O}}^A_\mu(x) = L^A_B(x)\,\mathscr{O}^B_\mu, \tag{10.6}$$

где $L^B_A \in SO(A,B)$ (принадлежит группе Лоренца):

$$\eta_{AB} = \eta_{MN}L^M_A L^N_B$$

— условия принадлежности к группе Лоренца.

Расщепляем обе метрики по базисным 1-формам:

$$ds^2_g = \eta_{AB}E^A_\mu E^B_\nu dx^\mu dx^\mu dx^\nu \tag{10.7}$$

$$ds^2_f = \eta_{AB}\mathscr{O}^A_\mu \mathscr{O}^B_\nu dx^\mu dx^\nu,$$

где формы $\boldsymbol{E}$ задаются выражениями (10.4) и (10.5), а формы $\mathscr{O}$ что-то вроде этого типа (10.6). Либо в унитарной калибровке, либо что-то более общее.

Можно ввести дуальные векторы:

$$E^\mu_A : E^\mu_A E^B_\mu = \delta^A_B$$

$$\mathscr{O}_A^\mu : \mathscr{O}_A^\mu \mathscr{O}_\mu^B = \delta_B^A$$

То есть, вводим базисные формы и вводим базисные векторы. 4 1-формы и 4 вектора для каждой метрики.

Используем тот факт, что детерминант метрики — это:

$$\sqrt{-g} = N\left|e_i^a\right| \equiv Ne$$

Мы ищем потенциал, который был бы линеен по функции хода. А функции хода возникают только здесь (10.4), (10.5). Идея такая, что в распоряжении имеется базисная форма (10.7) и дуальные векторы. Используем E_μ^A, $\mathscr{O}_\mu^A$ и им обратные для того, чтобы построить потенциал

$$V = \sqrt{-g}U = NeU = \alpha N + \beta,$$

который был бы линеен по функции N: αN.

Есть еще одно условие: этот потенциал не является скаляром. Скаляром является U, а $U\sqrt{-g}$ является *псевдоскаляром.* Это важное условие.

V есть псевдоскаляр:

$$\widetilde{V}\left(\widetilde{x}\right) = \left|\frac{\partial x}{\partial \widetilde{x}}\right| V\left(x\right)$$

Не можем брать свертки векторов E_μ^A и $\mathscr{O}_\mu^A$ друг с другом. Если возьмем свертку одного вектора с другим вектором, получим скаляр. А нужен *псевдоскаляр.*

Используем тот факт, что тензор $\varepsilon^{\alpha\beta\mu}$, который является абсолютно антисимметричным, где можно положить $\varepsilon^{0,1,2,3} = 1$ и потом по антисимметрии. Это является *псевдотензором*, а не тензором. Потому что тензором является

$$E^{\alpha\beta\mu} = \frac{\alpha\beta\mu}{\sqrt{-g}}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu} = \sqrt{-g}E^{\alpha\beta\mu} \text{ — \textit{псевдотензор}} \tag{10.8}$$

Его свертки с векторами будут *псевдоскалярами.* Идея в том, что берем псевдотензор (10.8) и начинаем сворачивать его с векторами (10.4) и (10.5). Возникает несколько возможностей:

$$V_0 = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E_\mu^0 E_\nu^1 E_\alpha^2 E_\beta^3 \boxed{=} \tag{10.9}$$

Используем все четыре 1-формы. (10.9) может быть записано в более эквивалентном виде:

$$\boxed{=} \frac{1}{4!} \varepsilon_{ABCD} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E_\mu^A E_\nu^B E_\alpha^C E_\beta^D \boxed{=}$$

Это ни что иное, как детерминант матрицы E, а это есть $\sqrt{-g}$.

$$\boxed{=}\left|E^A_\mu\right| = \sqrt{-g} = N\left|e^a_i\right| \tag{10.10}$$

Функция хода (10.4) входит только в нулевую форму. Нулевая форма появлется только один раз, в (10.9). Здесь имеется определение 4 форм и в произведении только один раз присутствует нулевая форма. Таким образом, это выражение автоматически линейно по функции хода, потому что это функция хода, умноженная на детерминант трехмерного ряда (10.10).

Следующая возможность

$$V_1 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ABCD}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}E^A_\mu E^B_\nu E^C_\alpha \mathscr{O}^D_\beta \boxed{=} \tag{10.11}$$

Комбинация из (10.11)

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{ABCD}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}E^A_\mu E^B_\nu E^C_\alpha = \left|E^A_\mu\right| E^\beta_D \tag{10.12}$$

Тогда

$$\boxed{=}\left|E^A_\mu\right| E^\beta_D \mathscr{O}^D_\beta = \sqrt{-g}E^\beta_D \mathscr{O}^D_\beta \tag{10.13}$$

Важно то, что это выражение также линейно по функции N, потому что функция N появляется только в нулевой форме. Нулевая форма входит в уравнение (10.13) не более одного раза. То есть, это произведение является суммой членов; каждый член есть произведение 4 факторов. Нулевой фактор присутствует только раз в силу антисимметрии. Таким образом, автоматически (10.12) линейно по N.

Можно записать:

$$(10.13) = \sqrt{-g}\gamma^\alpha_\alpha.$$

Введем:

$$\gamma^\alpha_\beta = E^\alpha_D \mathscr{O}^D_\beta \tag{10.14}$$

Эта матрица играет фундаментальную роль во всей «бездуховой» науке, потому что она обладает следующими свойствами. У матрицы (10.14) опустим индекс. Напишем:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\gamma^\alpha_\nu = \underbrace{\eta_{AB}E^A_\mu E^B_\alpha}_{g_{\mu\alpha}} \underbrace{E^\alpha_D \mathscr{O}^D_\nu}_{\gamma^\alpha_\nu} = \underbrace{\eta_{AD}E^A_\mu}_{E_{D_\mu}} \mathscr{O}^D_\nu = E_{D_\mu}\mathscr{O}^D_\mu \tag{10.15}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = E_{D_\mu}\mathscr{O}^D_\nu = E_{D_\nu}\mathscr{O}^D_\mu = \gamma_{\nu\mu}$$

Потребуем, чтобы матрица γ была симметричной. Это условие автоматически не гарантируется. Однако, оно может быть достигнуто путем вращения Лоренца. Потому что антисимметричная часть $\gamma_{[\mu\nu)}$ содержит 6 компонентов.

$$\mathscr{O}^A_\mu \to L^A_B \mathscr{O}^A_\mu \tag{10.16}$$

Когда делаем переход (10.16), получаем матрицу $L^A_B \mathscr{O}^A_\mu$, которая тоже содержит 6 компонентов. Эти 6 компонент могут быть использованы так, чтобы уничтожить 6 $\gamma\ _{[\mu\nu)}$. Таким образом, матрица γ становится симметричной. Это называется *калибровкой Дезера-Невенхойзена.* Изначально это было открыто изобретено в рамках супергравитации.

Если матрица симметрична, то имеется следствие. Умножим обе части условия (10.15) на $E^\mu_A E^\nu_B$. Получаем:

$$E_{D_\mu} \mathscr{O}^D_L \cdot E^\mu_A E^\nu_B = E_{D\nu} \mathscr{O}^D_\mu \cdot E^A_\mu E^B_\nu$$

$$\eta_{DA} \mathscr{O}^\pi_\nu E^\nu_B = \mathscr{O}_{AV} E^\nu_B = \mathscr{O}_{B\nu} E^\nu_A$$

Мы используем условие симметричности матрицы с внешними лоренцами:

$$\mathscr{O}_{A\alpha} E^\alpha_B = \mathscr{O}_{B\alpha} E^\alpha_A$$

Используя это определение, вычисляем квадрат матрицы γ:

$$\left(\gamma^2\right)^\mu_\nu = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\alpha_\nu = \underbrace{E^\mu_A \mathscr{O}^A_\alpha}_{E^{A\mu} \mathscr{O}_{A\alpha} E^\alpha_B \mathscr{O}^B_\nu = (\mathrm{A})} \cdot E^\alpha_B \mathscr{O}^B_\nu = \tag{10.17}$$

Заменим A и B:

$$(10.17)\ (\mathrm{A}) = E^{A\mu} \mathscr{O}_{B\alpha} E^\alpha_A \mathscr{O}^B_\nu$$

Когда поменяли, таким образом, индекс A и B:

$$E^{A\mu} \mathscr{O}_{B\alpha} E^\alpha_A \mathscr{O}^B_\nu = \underbrace{E^{A\mu} E^\alpha_A}_{g^{\mu\alpha}} \cdot \underbrace{\mathscr{O}_{B\alpha} \mathscr{O}^B_\nu}_{f_{\alpha\nu}} = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$$

Получается, что:

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\alpha_\nu = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu} \Rightarrow$$

если пишем в матричных обозначениях

$$\Rightarrow \hat{\gamma}^2 = \hat{g}^{-1} \cdot \hat{f}$$

или

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{g}^{-1} \cdot \hat{f}} \tag{10.18}$$

После этого говорим, что

$$V_1 = \sqrt{-g} U_1, \quad U_1 = \gamma^\alpha_\alpha$$

Это было фундаментальным изобретением Драм и коллег. Они обнаружили, что можно взять матрицу, которая является квадратным корнем из произведения двух других матриц (10.18). В их представлении было совершенно непонятно, откуда это берется. Таким образом автоматически обеспечивается тот факт, что V_1 линейно по функциям хода.

Это *простейший потенциал бездуховой теории.*

Повторим этот потенциал:

$$V_1 = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ABCD} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E^A_\mu E^B_\nu E^C_\gamma \mathscr{O}^D_\beta$$

Можно заменить второе E на $\mathscr{O}$, откуда получим:

$$V_2 = \frac{1}{2!2!} \varepsilon_{ABCD} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E^A_\mu E^B_\nu \mathscr{O}^C_\alpha \mathscr{O}^D_\beta = \frac{1}{2} |E| \left(E^\alpha_C E^\beta_D - E^\beta_C E^\alpha_D \right) \mathscr{O}^C_\alpha \mathscr{O}^D_\beta =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(\left[\gamma^2\right] - \left[\gamma\right]^2 \right) = \sqrt{-g} U_2$$

Вот еще одна возможность выбрать потенциал. Отметим, что $U_1 = \sum\limits_A \lambda_A$.

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\gamma^2\right) - (\gamma)^2 \right) = \sum_{A<B} \lambda_A \lambda_B = \lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \ldots$$

Далее продолжаем эту процедуру и получаем:

$$V_3 = \sqrt{-g} U_3 = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ABCD} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} E^A_\mu \mathscr{O}^B_\nu \mathscr{O}^C_\alpha \mathscr{O}^D_\beta =$$
$$= \left| \mathscr{O}^A_\mu \right| E^A_\mu \mathscr{O}^\mu_A = \sqrt{-f} \left[\gamma^{-1}\right]$$

В этом случае получаем:

$$U_3 = \frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}} \left[\gamma^{-1}\right] = \sum_{A<B<C} \lambda_A \lambda_B \lambda_C = \frac{1}{3!} \left([\gamma]^3 - 3[\gamma]\left[\gamma^2\right] + 2\left[\gamma^3\right] \right)$$

Последняя возможность:

$$V_4 = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\hat{\gamma})$$

Таким образом, появляется 5 возможностей и потенциал, который возникает, в самом общем виде является их суммой.

Бездуховая массивная гравитация Де Рам – Габададзе – Толли

(De Rham, Gahadadze, Tolley, PRL 2010)

Вот, что это такое:

$$S=\frac{1}{\kappa}\int\left(\frac{1}{2}R\left(g\right)-m^2U\right)\sqrt{-g}d^4x$$

$$U=\beta_0U_0+\beta_1U_1+\beta_2U_2+\beta_3U_3+\beta_4U_4$$

$$U_0=1=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu f\delta}\varepsilon^{\mu\nu f\delta}$$

$$U_1=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\alpha}\gamma^{\sigma}_{\alpha}=[\gamma]=\sum_{A}\lambda_A$$

$$U_2=\frac{1}{2!2!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\alpha}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\delta}_{\alpha}\gamma^{\alpha}_{\beta}\boxed{=}$$

Это все равно, что симметричный полином по собственным значениям второго порядка.

$$\boxed{=}\sum_{A<B}\lambda_A\lambda_B=\frac{1}{2}\left(\left[\lambda^2\right]-\left[\lambda\right)^2\right)$$

Последние два члена:

$$U_3=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\gamma^{\nu}_{\alpha}\gamma^{\rho}_{\beta}\gamma^{\sigma}_{\gamma}=\sum_{A<B<C}\lambda_A\lambda_B\lambda_C$$

$$U_4=\frac{1}{4!}\ldots=\det\left(\gamma\right)=\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Можно то же самое записать в элегантной форме:

$$S=\frac{1}{\kappa}\int\left\{\frac{1}{4}\varepsilon_{ABCD}R^{AB}\wedge E^C\wedge E^D,\ -m^2\varepsilon_{ABCD}\left(\frac{\beta_0}{4!}E^A\wedge E^B\wedge E^C\wedge E^D+\frac{\beta_1}{3!}E^A\wedge\right.\right.$$
$$\wedge E^B\wedge E^C\wedge\mathcal{O}^D+\frac{\beta_2}{2!2!}E^A\wedge E^B\wedge\mathcal{O}^C\wedge\mathcal{O}^D+$$
$$\left.\left.+\frac{\beta_3}{3!}E^A\wedge\mathcal{O}^B\wedge\mathcal{O}^C\wedge\mathcal{O}^D+\frac{\beta_4}{4}\mathcal{O}^A\wedge\mathcal{O}^B\wedge\mathcal{O}^C\wedge\mathcal{O}^D\right)\right\}$$

Лекция 11. Теория бездуховой массивной гравитации

Свойства теории бездуховой массивной гравитации

Существует специальная теория массивной гравитации.

Общая теория массивной гравитации:

$$S = \frac{1}{\kappa}\int\left[\frac{1}{2}R(g) - U\right]\sqrt{-g}d^4x$$

Потенциал U здесь выбран очень специальным образом. Потенцияал U должен быть линейной комбинацией

$$U = \beta_0 U_0 + \beta_1 U_1 + \ldots + \beta_4 U_4,$$

где β — произвольные вещественные коэффициенты: $\beta_k \in \mathbb{R}$, а U определяются следующим образом: они выражаются через матрицу

$$\gamma^\mu_\nu = \sqrt{g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}}\boxed{=}$$

Это выражение не вполне удовлетворительно, грамотнее писать:

$$\boxed{=}E^\mu_A \mathscr{O}^A_\nu,$$

где E, $\mathscr{O}$ — тетрады, через которые выражается физическая метрика и опорная метрика. То есть, имеем:

$$g_\mu = \underbrace{\eta_{AB}}_{\text{тензор Минковского}} E^A_\mu E^B_\nu$$

Точно такое же выражение имеется для опорной метрики:

$$f_{\mu\nu} = \eta_{AB}\mathscr{O}^A_\mu \mathscr{O}^B_\nu$$

Таким образом, имеется 2 тетрады: одна тетрада E, которая расщепляет физическую метрику и вторая тетрада $\mathscr{O}$, которая расщепляет метрику отчета. Когда эта матрица известна, потенциалы $U_1, \ldots$ вычисляются следующим образом:

$$U_0 = 1 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{0123} = \varepsilon^{0123} = 1 \tag{11.1}$$

Это соглашение. В большинстве книг говорится, что $\varepsilon_{0123} = -1$, а $\varepsilon^{0123} = 1$. Если опустить индексы, то меняется знак. Можно также использовать и определение (11.1). Это U_0.

U_1 — это след матрицы γ, а след любой матрицы — это сумма ее собственных значений:

$$U_1 = [\gamma] = \sum_A \lambda_A \boxed{=} \tag{11.2}$$

(11.2) можно описать с помощью комбинации двух ε (11.1), сворачивая с гаммами:

$$\boxed{=} \underbrace{\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}}_{\delta^\sigma_\beta}\gamma^\beta_\sigma$$

Если свернем δ^σ_β и γ^β_σ, то получается след.

Следующий потенциал U_2:

$$U_2 = \frac{1}{2!}\frac{1}{2!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\rho_\alpha\gamma^\sigma_\beta = \frac{1}{2}\left([\gamma]^2 - \left[\gamma^2\right)\right) = \sum_{A,B\lambda}\lambda_A\lambda_B\boxed{=} \tag{11.3}$$

В этом убедиться просто. Отметим, что:

$$[\gamma] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \tag{11.4}$$

$$\left[\gamma^2\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \tag{11.5}$$

Подставив (11.4) и (11.5) в (11.3), получим:

$$\boxed{=}\lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_3\lambda_4.$$

Третий член в потенциале

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\gamma^\nu_\alpha\gamma^\rho_\beta\gamma^\nu_\gamma = \sum_{A<B<C}\lambda_A\lambda_B\lambda_C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots = \\ &= \frac{1}{3!}\left([\gamma]^3 - 3[\gamma]\left[\gamma^2\right] + 2\left[\gamma^3\right]\right) = \frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}\left[\gamma^-\right]\boxed{=} \end{aligned} \tag{11.6}$$

Это то же самое, что

$$\boxed{=}\left[\gamma^{-1}\right] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = \frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \sum\frac{\lambda\lambda\lambda}{\det\lambda}$$

Мы вспоминаем, что

$$\gamma = \sqrt{g^{-1}f} : \det\gamma = \frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}$$

Из этой формулы получаем $\frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}\left[\gamma^-\right]$ из (11.6).

Последний член:

$$U_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}\gamma^\alpha_\rho\ldots\gamma^\beta_\tau = \det(\gamma) = \sqrt{\frac{-f}{-g}} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

Так выражаются потенциал и его отдельные части через γ.

Задача (из домашнего задания)

Задача. *Нужно, чтобы матрица γ с нижним индексом была симметрична.* То есть:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g \gamma^{\alpha}_{\nu} = E_{A_\mu} \mathscr{O}^A_\nu = E_{A\nu} \mathscr{O}^A_\mu.$$

Нужно, чтобы эта матрица была симметрична. Это важное условие. Условие симметрии может быть достигнуто лоренцевыми вращениями:

$$\mathscr{O}^A_\mu \to \widetilde{\mathscr{O}^A_\mu} = L^A_B(\nu)\,\mathscr{O}^B_\mu \tag{11.7}$$

$L^A_B(\nu)$ это элемент группы $SO(1,3)$. Такое преобразование обеспечивает переход в калибровку Дезера-Мевинхольда. Покажем напрямую, что такое всегда возможно. В принципе, даже не надо делать никакие преобразования Лоренца. Мы используем тот факт, что, поскольку метрика f плоская, то

$$\mathscr{O}^A_\mu = \partial_\mu \Phi^A$$

Это производная от поля Штюкельберга. Такого рода (11.7) преобразования координат меняют поля Штюкельберга. Координаты выбраны так, что налагается калибровка Дезера-Мевинхольда (11.7). В простейшем случае поле Штюкельберга A совпадает с пространственно-временными координатами:

$$\Phi^A = X^A \tag{11.8}$$

Это называется *унитарная калибровка.* В этом случае метрика

$$f_\mu = \eta_{AB}\partial_\mu \Phi^A \partial_\nu \Phi^B = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если изменим поля Штюкельберга, перейдем от (11.8) к

$$\Phi^A(x^\mu),$$

это всегда соответствует преобразованию координат. Выбор координат эквивалентен выбору полей Штюкельберга. Покажем, что это возможно.

Метрика пространства-времени в самом общем виде, в экстремальном общем виде записывается в виде АДМ

$$g_\mu dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt + \underbrace{\delta_{ab} e^a_i e^b_k}_{\gamma_{ik}} \left(dx^i + N^i dt\right) \left(dx^k + N^k dt\right) =$$
$$= \eta_{\hat{A}\hat{B}} E^{\hat{A}}_\mu E^{\hat{B}}_\nu \Rightarrow E^{\hat{0}}_\mu dx^\mu = N dt = -E_{\hat{0}\mu} dx^\mu$$

Индексы с «шапочкой» — тетрадные индексы. Когда опускаем тетрадный индекс, умножаем на $\eta_{00} = -1$.

$$E^{\hat{a}}_{\mu} dx^{\mu} = e^{\hat{a}}_{i} N^i dt + e^{\hat{a}}_{i} dx^i = E_{\hat{a}\mu}$$

Когда опускаем трехмерный индекс, знак не меняется. Таким образом, можем написать табличку:

$$\begin{aligned} E_{\hat{0}0} = -N, \quad E_{\hat{0}k} = 0 \\ E_{\hat{a}0} = E_{\hat{a}i} N_i, \quad E_{\hat{a}i} = e_{\hat{a}i} \end{aligned} \tag{11.9}$$

— получаем компоненты тетрады, которые определяют метрику пространства-времени. Имеем:

$$f_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{AB} \partial_{\mu} \Phi^A \partial_{\nu} \Phi^B dx^{\mu} dx^{\nu} = -\left(d\Phi^0\right)^2 + \sum_k (d\Phi k)^2$$

$$\mathscr{O}^A_{\mu} = \partial_{\mu} \Phi^A \tag{11.10}$$

Нужно подобрать такие функции Φ, чтобы удовлетворилась калибровка Дезера-Мевинхольда. В компонентах (11.9) скаляр $-N$, вектор N_i и еще один вектор $e_{\hat{a}i}$. Функции Φ^A из (11.10) должны состоять из них же.

Выберем

$$\Phi^0 = \alpha(t) + x^k V_k(k), \quad \Phi^a = x^a + N^a(x), \tag{11.11}$$

где $\alpha(t)$ функция от 4 координат; N — то же самое N из (11.9), это функции сдвига. Из выражений рода (11.11) пытаемся извлечь пользу. Получаем 4 компоненты::

$$\begin{aligned} &\mathscr{O}^{\hat{0}}_{0} \overset{(11.10)}{=} \partial_0 \Phi^0 = \dot{\alpha} + x^k \dot{V}_k, \quad &&\mathscr{O}^{\hat{0}}_{k} = \partial_k \Phi^k = V_k = V^k \\ &\mathscr{O}^{\hat{a}}_{k} = \partial_0 \Phi^a = \dot{N}^a, &&\mathscr{O}^{\hat{a}}_{k} = \partial_k = \Phi^a = \delta^a_k \end{aligned}$$

Теперь считаем компоненты γ:

$$\gamma_{\mu\nu} = E_{A\mu} \mathscr{O}^A_{\nu} = E_{\hat{0}\mu} \mathscr{O}^{\hat{0}}_{\nu} + E_{\hat{a}\mu} R^{\hat{a}\nu} \tag{11.12}$$

Нужно считать не диагональные компоненты, чтобы матрица $\gamma_{\mu\eta}$ была симметрична.

$$\gamma_{0k} = E_{\hat{0}0} \mathscr{O}^{\hat{0}}_{k} + E_{\hat{a}0} \mathscr{O}^{\hat{a}k} \overbrace{=}^{(11.12),\,(11.9)} -NV_k + e_{\hat{a}i} N^i \delta^a_k \tag{11.13}$$

$$\gamma_{k0} \overbrace{=}^{(11.12),\,(11.9)} e_{\hat{a}k} \dot{N}^a \tag{11.14}$$

Из (11.13) = (11.14) получаем алгебраическое уравнение для вектора V_k.

Замечание. Вычисления верны, если всё зависит только от t.

$$\gamma_{\hat{k}m} = e_{\hat{k}m}$$

Эти величины всегда могут быть сделаны симметричными ортогональными преобразованиями. Это доказательство работает только тогда, когда всё зависит только от t. Надо его обобщить на случай, когда всё зависит и от других переменных тоже.

Уравнение движения

Мы хотим написать для действия уравнение движения, проварьировать его. Есть действие S:

$$S = \frac{1}{\kappa} \int \left[\frac{R(g)}{2} - m^2 U \right] \sqrt{-g} d^4x$$

Мы варьируем метрику.

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu} + \delta g_{\mu}^{\nu}, \quad \delta\left(R\sqrt{-g}\right) = \underbrace{G_{\mu\nu}}_{\substack{\text{тензор} \\ \text{Эйнштейна}}} \sqrt{-g}\delta^{\mu\nu}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu} \delta g^{\mu\nu}$$

Теперь нужно проварьировать потенциал U.

$$U = \beta_0 + \beta_1 [\gamma] + \beta_2 \frac{[\gamma]^2 - [\gamma^2]}{2} + \ldots$$

Теперь нужно получить нечто подобное:

$$\delta U = \Sigma_{\mu} \delta g^{\mu\nu},$$

то есть хотим проварьировать по $g^{\mu\nu}$. Для этого приходится варьировать γ. Варьирование γ сложно, так как γ определяется уравнением:

$$\gamma^2 = g^{-1} f = g^{\mu\nu} f_{\nu\alpha} \Rightarrow \tag{11.15}$$

Проварьируем (11.15)

$$\delta\hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma} + \hat{\gamma}\delta\hat{\gamma} = \delta g^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \tag{11.16}$$

Как из (11.16) выразить $\delta\gamma$? Дело в том, что $\delta\gamma$ не коммутирует с γ. Имеется уравнение

$$AB + BA = C \Rightarrow A(B, C)$$

Это *задача Сильвестра*. Она имеет громоздкое решение. Нужно считать характеристические матрицы. Нужно проварьировать не γ, а след γ. Везде присутствуют следы: от γ и от степеней γ. Для этого умножим:

$$(11.16)\left|\gamma^{-1}\right|\gamma^{-1} \Rightarrow \delta\hat{\gamma} + \hat{\gamma}\delta\hat{\gamma}\hat{\gamma}^{-1} \tag{11.17}$$

Теперь берем след от (11.17). Мы используем тот факт, что под знаком следа можем делать циклические перестановки. Отсюда:

$$[\delta\hat{\gamma}] + \left[\delta\gamma\hat{\delta}\gamma^{-1}\right] = 2[\delta\hat{\gamma}] = \left[\delta\hat{g}^{-1}\hat{f}\hat{\gamma}^{-1}\right] \tag{11.18}$$

Далее получаем:

$$(11.18) = \left[\delta g^{-1} g \underbrace{g^{-1} f}_{\gamma^2} \gamma^{-1}\right] = \left[\delta g^{-1} \cdot g\gamma\right]$$

Перепишем все это в компонентах. Таким образом,

$$2\delta\gamma^{\alpha}_{\alpha} = \delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma}\gamma^{\alpha}_{\sigma} = \delta g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}$$

Отсюда получаем формулу:

$$\delta[\gamma] = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}$$

Это простейшая форма. Теперь нужно сделать то же самое для степеней. Есть матричная алгебра:

$$\delta[\gamma^n] = \delta\left(\underbrace{\gamma\cdot\gamma\cdot\ldots\cdot\gamma}_{n}\right) = \left[\delta\gamma\cdot\gamma^{n-1} + \gamma\cdot\delta\gamma\cdot\gamma^{n-2} + \ldots + \gamma^{n-1}\delta\gamma\right] = n\delta\left[\gamma\cdot\gamma^{n-1}\right]$$

Используем следующим образом.

$$\delta\hat{\gamma} + \hat{\gamma}\delta\hat{\gamma}^{-1} = \delta g^{-1}\hat{g}\hat{\gamma}\big|\,\hat{\gamma}^{n-1}$$

$$\left[\delta\hat{\gamma}\hat{\gamma}^{-1}\right] + \left[\hat{\gamma}\cdot\gamma\delta\hat{\gamma}^{-1}\gamma^{n-1}\right] = 2\left[\delta\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}^{n-1}\right] = \left[\sigma g^{-1}\hat{g}\hat{\gamma}^{n}\right]$$

Сравним $2\left[\delta\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma}^{n-1}\right]$ и $n\delta\left[\gamma\cdot\gamma^{n-1}\right]$. Получаем:

$$\delta[\gamma^n] = \frac{n}{2}\left[\delta g^{-1}\hat{g}\hat{g}^{n-1}\right] = \frac{n}{2}\delta g^{\mu\nu}(g^{\mu})_{\rho\nu}$$

Таким образом, можем обобщить формулу:

$$\delta\left[\gamma^n\right]=\frac{n}{2}\delta\gamma^{\alpha\beta}\cdot\gamma^n_{n\beta}$$

Эта формула нужна для того, чтобы варьировать потенциал. Матрица γ симметрична, но будет ли ее степень симметрична? Степень —это

$$\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}=g_{\alpha\sigma}\gamma^{\sigma}_{\sigma_1}\gamma^{\sigma_1}_{\sigma_2}\dots\gamma^{\sigma_n}_{\beta}=\hat{g}\cdot\hat{\gamma}^n$$

Показажем, что матрица $\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}$ симметрична.

$$\gamma_{\alpha\beta}=\hat{g}\hat{\gamma}$$

симметрична, то это еще не означает симметричность $\hat{g}\cdot\hat{\gamma}^n$.

Берется определение. Допустим, что n — целое число. Тогда:

$$g\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^n g^{-1}=\left(\sqrt{fg^{-1}}\right)^n \tag{11.19}$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости (11.19) берем квадрат этого выражения:

$$\underbrace{g\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^n g^{-1}g\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^n g^{-1}}_{g\left(g^{-1}f\right)^n g^{-1}=\left(fg^{-1}\right)^n}$$

Потом это выражение проверяется. Скажем, для $n=1$:

$$gg^{-1}fg^{-1}=fg^{-1}\Rightarrow fg^{-1}=fg^{-1}$$

Если $n=2$:

$$gg^{-1}fg^{-1}fg^{-1}=fg^{-1}fg^{-1}\Rightarrow fg^{-1}fg^{-1}=fg^{-1}fg^{-1}$$

И так далее. Таким образом, утверждение (11.19) верное. Умножим его на $\hat{g}$, что дает:

$$g\underbrace{\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^n}_{g\gamma^n}=\left(\sqrt{fg^{-1}}g\right)$$

Вычисляем ее транспонирование. Говорим, что:

$$\left(g\gamma^n\right)^{\mathrm{tr}}=\left[\left(\sqrt{fg^{-1}}\right)^n g\right]^{\mathrm{tr}}=g^{\mathrm{tr}}\left(\sqrt{\left(g^{-1}\right)^{\mathrm{tr}}f^{\mathrm{tr}}}\right)^n=g\left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^n=g\gamma^n$$

Таким образом,

$$\left(g\gamma^n\right)^{\mathrm{tr}}=g\gamma^n$$

Теперь можем применять формулы для того, чтобы варьировать потенциал.

$$\left[f\gamma^{n\eta} = \frac{n}{2}\delta g^{\mu}\gamma^{n}_{\mu^n}\right] \Rightarrow$$

$$\delta U = \delta\left(\beta_0 + \beta_1(\gamma) + \beta_2\frac{(\gamma)^2 - (\gamma^2)}{2} + \ldots\right) = \beta_1\frac{1}{2}\gamma_\mu\delta g^{\mu\eta} + \frac{\beta_2}{2}\left(2[\gamma]\frac{1}{2}\gamma_\mu\delta g^{\mu} + \ldots\right)$$

Напишем результат:

$$\delta S = \frac{1}{\kappa}\delta\int\left(\frac{R}{2} - m^2U\right)\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{2\kappa}\int\left(G_\mu - m^2T_\mu\right)\delta g^{\mu}\sqrt{-g}f^4x$$

$$G_\mu = m^2T_\mu,\ \text{где } T_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} - Ug_{\mu\nu}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} = (\beta_1U_0 + \beta_2U_1 + \beta_3U_2 + \beta_4U_3)\gamma_{\mu\nu} + ()\gamma^2_\mu + ()\gamma^3_{\mu\nu} + ()\gamma^4_{\mu\nu}$$

$$\Sigma_{\mu\nu} = (\beta_1U_0 + \beta_2U_1 + \beta_3U_2 + \beta_4U_3)\gamma_{\mu\nu} - (\beta_2U_0 + \beta_3U_1 + \beta_4U_2)\gamma^2_{\mu\nu} +$$
$$+ (\beta_3U_0 + \beta_4U_1)\gamma^3_{\mu\nu} - \beta_4U_0\gamma^4_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} - Ug_{\mu\nu} \tag{11.20}$$

Это тензор энергии импульса нашей теории.

Можно упростить это выражение, используя теорему Гамильтона-Кэли.

Теорема Гамильтона-Кэли

Рассматривается проблема собственных значений для матрицы γ:

$$\gamma^\beta_\alpha\xi^\beta = \lambda\xi^\alpha \Rightarrow \left(\gamma^\beta_\alpha - \lambda\delta^\alpha_\beta\right)\xi^\beta = 0$$

Подобное линейное уравнение будет иметь нетривиальное решение при условии, если детерминант матрицы $\left(\gamma^\beta_\alpha - \lambda\delta^\alpha_\beta\right) = 0$. Таким образом,

$$0 = \det\left(\hat{\gamma} - \lambda\hat{I}\right) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)(\lambda_4 - \lambda)\boxed{=} \tag{11.21}$$

Раскроем скобки из правой части (11.21):

$$\boxed{=}\lambda^4 - \lambda^3\underbrace{\Sigma\lambda_A}_{U_1} + \lambda^2\underbrace{\Sigma\lambda_A\lambda_B}_{U_2} - \lambda\Sigma\underbrace{\lambda_A\lambda_B\lambda_C}_{U_3} + \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}_{U_4}\boxed{=}$$

Это симметричные по собственным значениям λ полиномы.

$$\boxed{=}\lambda^4 - U_1\lambda^3 + U_2\lambda^2 - U_3\lambda + U_4 = 0 \tag{11.22}$$

Это характеристические уравнения на собственные значения λ.

Теорема 11.1 (Теорема Гамильтона-Кэли). *В уравнении* (11.22) *можно заменить:*

$$\hat{\gamma}^4 - U_1\hat{\gamma}^3 + U_2\hat{\gamma}^2 - U_3\hat{\gamma} + U_4 = 0 \tag{11.23}$$

Это совершенно очевидно, если перейдем в базис, в котором матрица γ диагональна.

Соотношение (11.23) говорит о том, что γ^4 является линейной комбинацией γ^3, γ^2, γ и просто члена. Таким образом, можно исключить γ^4, которая появляется в (11.20). Это слегка упрощает результат:

$$T_{\mu\nu} = (\beta_1 U_0 + \beta_2 U_1 + \beta_3 U_2)\,\gamma_{\mu\nu} - (\beta_2 U_0 + \beta_3 U_1)\,\gamma_\mu^2 +$$
$$+\beta_3\gamma_\mu^3 - \left(\sum_{k=0}^{3}\beta_k U_k\right) g_{\mu\nu}$$

Это еще одна формула тензора энергии импульса. Доказательство формулы самостоятельно.

Задача. *Показать, что*

$$T_{\mu\nu} = -\beta_0 g_{\mu\nu} + \beta_1\left(\gamma_{\mu\nu} - [\gamma]\,g_{\mu\nu}\right) + \beta_2\sqrt{\frac{-f}{-g}}\left[\left(\gamma_{\mu\nu}^{-2} - \left[\gamma^{-1}\right]\right)\gamma_{\mu\nu}^{-1}\right] - \beta_3\sqrt{\frac{-f}{-g}}\left(\gamma^{\mu\nu}\right)_{\mu\nu}$$

Это выражение простое – здесь 4 члена, согласно коэффициентам β_0, β_1, β_2, β_3. Пятый выпадает, потому что имели в лагранжиане:

$$\beta_4\gamma\sqrt{-g} = \beta_4\frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g} = \beta_4\sqrt{-f} \tag{11.24}$$

Таким образом, g выпадает из этого члена и остается только f, которая является нединамической переменной. Это константа с точки зрения вариационного исчисления. Таким образом, последний член β_4 не дает вкладов в теорию. Это только в том случае, когда метрика f нединамическая.

Уравнения теории бездуховой гравитации

$$G_{\mu\nu} = m^2 T_{\mu\nu}(g,f), \quad \gamma = \sqrt{g^{-1}f}, \tag{11.25}$$

где $T_{\mu\nu} =$ (11.24). Здесь повлется опорная, нефизическая метрика f.

Если применим ковариантную переменную, то левая часть уравнения (11.25) обращается в нуль потому что:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 = m^2\nabla^\mu T_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Сохранение этого тензора есть уравнение на скаляры Штюкельберга. Теория зависит от 4 вещественных параметров β_0, β_1, β_2, β_3 и от метрики $f_{\mu\nu}$, которая вообще-то произвольна, плоская.

Лекция 12. Замечания к теориям

Замечание 1. Область применимости классической теории.

Массивная гравитация — это теория гравитации, а любая теория гравитации является эффективной теорией. Ни одна из известных не является фундаментальной. Теория гравитации работает в некотором диапазоне энергий при некотором диапазоне расстояний, в том диапазоне, в котором малы квантовые поправки. Когда энергии становятся слишком большими, выходим из этого диапазона, квантовые поправки квантовые поправки становятся большими и классическая теория уже не работает. Она должна быть заменена более общей фундаментальной теорией, которая называется *ультрафиолетовым пополнением*.

В некоторых случаях, например в физике частиц, такие пополнения известны. Классический пример — это теория слабых взаимодействий, которые неперенормируемы. Однако, у неё есть пополнение в виде теории Янга-Милса, которая перенормируема и имеет смысл при высоких энергиях.

Для гравитации такое пополнение неизвестно. Может быть, такая теория существует, ее активно ищут. Может быть, это теория струн или какая-то версия теории струн. Это означает, что классическая теория имеет смысл только при энергиях меньших, чем максимальная энергия:

$$E < E_{\max} = \text{energy cutuff} = \text{параметр обрезания}$$

Эта максимальная энергия называется *параметром обрезания*. В общей теории относительности этот параметр очень высок: В ОТО:

$$E_{\max} = M_{\text{pl}}$$

Это Планковская, очень высокая, энергия. Это означает, что теория справедлива везде при энергиях

$$E < E_{\text{pl}},$$

что эквивалентно при расстояниях r много больше, чем Планковская длина l_{pl} (M_l — Планковская масса):

$$r \gg l_{\text{pl}} = \frac{1}{M_l} = 10^{-33}\ \text{см} \tag{12.1}$$

Выражение (12.1) задает *область применимости ОТО.*

Эти оценки получаются из разложения действия. Мы имеем в ОТО действие Эйнштейна-Гильберта:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}d^4x\boxed{=}, \quad \kappa = 8\pi G = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2}$$

Таким образом, имеем:

$$\boxed{=}\frac{M_{\rm pl}^2}{2}\int R\sqrt{-g}d^4x \tag{12.2}$$

Теперь разложим это действие в окрестностях плоского пространства. Будем считать:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},$$

Изменим нормировку $h_\mu \to \sqrt{\kappa}h_\mu$:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{M_{\rm pl}}h_{\mu\nu} \tag{12.3}$$

(12.3) подставляем в (12.2) и разлагаем в ряд по малости h. Получаем:

$$\frac{M_{\rm pl}^2}{2}R\sqrt{-g}=\underbrace{\frac{1}{8}\left(-\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}+\dots\right)}_{L_0(h)=\text{классическая часть}}+\frac{1}{M_{\rm pl}}O\left(h^3_{\alpha\beta}\right) \tag{12.4}$$

$L_0(h)$ — классическая часть действия, которая определяет динамику свободных гравитонов:

$$\Box h_{\mu\nu}+\dots=\sqrt{\kappa}T_\mu$$

Мы считали пропагаторы – 2 степени свободы. (12.4) — это нелинейное выражение, включает не только квадратичные члены, но и высшие порядки. Высшие порядки начинаются с куба $O\left(h^3_{\alpha\beta}\right)$ из (12.4) и это члены взаимодействия. Они описывают взаимодействие гравитонов друг с другом. Взаимодействие $\frac{1}{M_{\rm pl}}O\left(h^3_{\alpha\beta}\right)$ из (12.4) — это *поправки.*

В обычных условиях эти поправки подавлены фактором $\frac{1}{M_{\rm pl}}$, где M — это большая величина, поэтому при невысоких энергиях поправки порядка $\frac{E}{M_{\rm pl}}$.

Когда энергия возрастает и эти нелинейные члены начинают становиться важными, то классическая теория не работает.

$$\frac{1}{8}\left(-\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}+\dots\right) \text{ – \textit{древесные приближения}}$$

$\frac{1}{M_{\rm pl}}O\left(h^3_{\alpha\beta}\right)$ — *вершины* – означают, что начинается контрмеханика. В ОТО квантовые эффекты малы при $E \ll M_{\rm pl}$

Замечание 1. Область применимости теории массивной гравитации

Теперь проделаем то же самое для массивной гравитации. В массивной гравитации действие сложнее.

$$S = M_{\mathrm{pl}}^2 \int \left[\frac{1}{2} R(g) - m^2 U(g,f)\right] \sqrt{-g} d^4 x \tag{12.5}$$

Рассмотрим общую нелинейную теорию ФП, например:

$$U = \frac{1}{8}\left(H^{\alpha}_{\beta} H^{\beta}_{\alpha} - (H^{\alpha}_{\alpha})^2\right), \quad H^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - g^{\alpha\sigma} f_{\sigma\beta},$$

где $f_{\sigma\beta} = \eta_{AB} \partial_\sigma \Phi^A \partial_\beta \Phi^B$.

Эта теория (12.5) содержит не только метрику $g_{\mu\nu}$, но и поля Штюкельберга. Это теория для $g_{\mu\nu}$ и для Φ.

$g_{\mu\nu}$ уже разлагали, теперь разложим (12.5):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M_{\mathrm{pl}}} h_{\mu\nu} \tag{12.6}$$

$$\partial_\mu \Phi^A = \delta^A_\mu + \frac{1}{m M_{\mathrm{pl}}} \partial_\mu A^A + \frac{1}{m^2 M_{\mathrm{pl}}^2} \partial_\mu \partial^A \Phi \tag{12.7}$$

Дополнительные степени свободы массивного гравитона содержатся в полях Штюкельберга, из чего следует коэффициент

$$\frac{1}{m M_{\mathrm{pl}}} \partial_\mu A^A$$

, $\partial_\mu A^A - -$; (12.7).

Подставляем разложения (12.6) и (12.7) в (12.5):

$$M_{pl}^2 m^2 U \sqrt{-g} = (\delta\Phi)^2 + \frac{1}{(\Lambda_5)^5}\left((\Box\Phi)^2 + \dots\right) + \frac{1}{(\Lambda_3)^3}\left((\partial\Phi)^2 \Box \Phi + \dots\right) \tag{12.8}$$

Выражение Пади распадается на 2 части: первая часть (12.8) $(\delta\Phi)^2$ — это классическое взаимодействие, переносимое скалярным гравитоном; вторая часть – это квантовые поправки. Определение параметров Λ:

$$\Lambda_5 = \left(M_{\mathrm{pl}} \cdot m^4\right)^{1/5} \sim \frac{1}{10^{11}} \text{ км} \tag{12.9}$$

Этот плохой результат означает, что классическая теория становится применимой только на расстояниях $r > 10^{11}$ км. На меньших расстояниях квантовые поправки

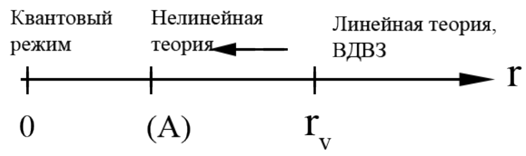

Рис. 12.1. Радиус Вайнштейна

настолько сильны, что члены $\left((\Box\Phi)^2+\ldots\right)$ становятся доминантными и вся классическая теория становится непригодной.

(12.9) напоминает радиус Вайнштейна (Рис. 12.1)

$$r_v=\left(\frac{r_M}{m^4}\right)^{1/5} - \textit{гравитационный радиус}$$

При $r>r_v$ можно использовать линейную теорию, возникает ВДВЗ; при $r<r_v$ используем нелинейную теорию. Рассчитывали, что нелинейная теория позволяет избежать ВДВЗ и таким образом устанавливать порядок в Солнечной системе, но это продолжается только до расстояния $(A)=1/\Lambda_5=10^{11}$ km, а это больше радиуса Солнечной системы. Вся Солнечная система попадает в квантовую область, где ничего нельзя посчитать. Это относится к общей массивной гравитации, которую нельзя применять для описания сложных систем.

Замечание 1. Область применимости бездуховой теории массивной гравитации

В случае бездуховой теории, если потенциал U выбран правильно, комбинация $\left((\Box\Phi)^2+\ldots\right)$ из (12.8) становится полной производной. Поскольку она полная производная, то не дает вклада. Остается другой член $\left((\partial\Phi)^2\,\Box\,\Phi+\ldots\right)$ из (12.8), который становится существенным на энергиях порядка

$$\Lambda_3=\left(M_{\text{pl}}m^2\right)^{1/3}=\frac{1}{5\,000\ \text{км}}$$

5 000 км — это меньше, чем радиус Земли. Таким образом, классическая бездуховая теория имеет смысл нашей планеты. Тем более, она работает внутри Солнечной системы, для системы Земля – Луна и т.д. Таким образом, мало построить классическую теорию, нужно чтобы она была не слишком квантовой.

Замечание 2. Предел отщепления (decapment limit)

Теории бездуховых гравитаций довольно сложны. Нужно найти упрощенное для них описание, не точное, но в определенных пределах. Самое важное в этой теории —

это скалярный гравитон, которого нет в ОТО. Есть еще векторная часть, но она считается неважной.

Пишется выражение для метрики:

$$g_{\mu\nu} = \eta_\mu + \frac{1}{M_{\text{pl}}} h_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \Phi^A = \delta^A_\mu + \frac{1}{mM_\Phi}, \quad A^A_\mu + \frac{1}{m^2 M^2_\Phi}, \quad \partial_\mu \partial^A = \Phi$$

Можно всё это подставить в действие и разложить. Если это делать напрямую, получаются сложные выражения. Для m записываем: $m = \frac{1}{R_H}$, где R_H — радиус нашей Вселенной. Таким образом:

$$r_v = \left(\frac{r_g}{m^4}\right)^{1/5} = \left(r_g R^4_H\right)^{1/5} = \left(\frac{r_g}{R_4}\right) R_H$$

$r_g = 3$ км; $R_H = 10$ миллиардов световых лет. Когда подсчитаем степень 1/5, получится около полумиллиона световых лет.

Возьмем предел

$$M_{pl} \to \infty, \quad m \to 0, \quad \Lambda_3 = \left(M_{\text{pl}} m^2\right)^{1/3} = \text{const}.$$

Такое условие называется *decapment limit*. В этом пределе отщепляются векторные моды, а действие упрощается и принимает примерно такую структуру (Если величина $M_{pl} \to \infty$, это означает $G_{\mu\nu} = \kappa T_\mu \to 0$, таким образом метрика становится плоской и можем её выбрать плоской):

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \left(h_\mu\right) + \mathscr{L}_{G_{al}} (\Phi) + \frac{q}{(\Lambda_3)^6} h^{\mu\nu} X_{\mu\nu} (\Phi) \tag{12.10}$$

динамика двух полей в плоском пространстве; $\mathscr{L}_0$ — лагранжиан свободных гравитонов; q — константа, которая сворачивается из β: $q = \beta_1 \beta_2 \ldots$.

Этот лагранжиан (12.10) описывает линейное поле гравитона $h_{\mu\nu}$, взаимодействующее с нелинейным полем Φ. Если проварьируем по h, получим:

$$\Box h_\mu + \ldots = \frac{q}{(\Lambda_3)^2} X_{\mu\nu}.$$

лагранжиан для поля $\mathscr{L}_{G_{al}} (\Phi)$ из (12.10) имеет странную структуру, которая впервые була обнаружена в контексте этого анализа:

$$\mathscr{L}_{G_{al}} (\Phi) = \sum_{n=2}^{5} \frac{d_n}{\Lambda_3^{3(n-2)}} \mathscr{L}_{(n)} (\Phi)$$

Эти 4 члена выглядят так:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{(2)} = (\partial\Phi)^2, \quad \mathscr{L}_{(3)} = (\partial\Phi)^2 \,\Box\, \Phi,\\
&\mathscr{L}_{(4)} = (\partial\Phi)^2 \left((\Box\Phi) - \partial_{\mu\nu}\Phi\partial^{\mu\nu}\Phi\right),\\
&\mathscr{L}_{(5)} = (\partial\Phi)^2 \left\{(\Box\Phi)^3 - 3\,\Box\,\Phi\partial_{\mu\nu}\Phi\partial^{\mu\nu}\Phi + 3\partial_{\mu\nu}\Phi\partial^{\nu\alpha}\Phi\partial^{\mu}_{\alpha}\Phi\right\}, \quad X_{\mu\nu}(\Phi)
\end{aligned} \tag{12.11}$$

В этом лагранжиане необычно то, что он содержит вторые производные. «Нормальные» лагранжианы содержат только первые производные. Когда варьируем эти лагранжианы, получаем уравнение движения второго порядка. Если лагранжиан содержит вторые производные, то после проварьирования получаем уравнение четвертого порядка. Рассмотрим пример – действие

$$S = \frac{1}{2}\int (\Box\Phi)^2 d^4x \Rightarrow$$

которое содержит вторые производные. Мы его варьируем.

$$\Rightarrow dS = \int \Box\Phi \cdot \Box\delta\Phi d^4x = \int \Box\,\Box\,\Phi \cdot \delta\Phi d^4x = 0 \Rightarrow \Box^2\Phi = 0$$

Квадрат бокса содержит четвертые производные. Это происходит в обыкновенной массивной гравитации, потому что существование четвертой производной означает наличие 2 степеней свободы.

Если производных всего две, скажем

$$\Box\Phi = 0 \Rightarrow \text{ задача Коши решается заданием двух функций}$$
$$\Phi(t=0,\,x), \quad \dot{\Phi}(t=0,\,x)$$

т.е. можно задать начальные координаты и начальные импульсы, что определяет одну степень свободы.

Если же имеется $\Box^2$, можно задать Φ, первую производную, а также дополнительно 2 функции: вторую и третью производную. Число функций удваивается: становится не две, а 4. Это означает, что имеется вторая частица и после подсчета пропагатора выясняется, что частиц две: «нормальная» и дух.

Если подобный анализ проделать в обыкновенной, не бездуховой гравитации, то возникают подобные члены (12.11), но с простыми боксами. Анализ такого бокса говорит, что в скалярном секторе содержится не одна частица, а две — скалярный гравитон и дух Бульвара-Дезера.

В бездуховой гравитации, если проварьировать лагранжианы (12.11), то вторых производных не возникает. Проверим это в простейшем случае.

Для $\mathscr{L}_{(2)}$ это очевидно. Проверим для $\mathscr{L}_{(3)}$.

$$
\begin{aligned}
&\delta\int(\partial\Phi)^2\,\Box\,\Phi d^4x=\int\left\{2\partial_\mu\Phi\partial^\mu\delta\Phi\,\Box\,\Phi+(\partial\Phi)^2\,\Box\,\delta\Phi\right\}d^4x=\\
&=\int\left\{\underbrace{-2\partial^\mu\left(\partial_\mu\Phi\cdot\Box\Phi\right)+\Box(\partial\Phi)^2}_{0}\right\}\delta\Phi d^4x
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

Выясним, производная какого порядка содержится в выражении (12.12). Продифференцируем.

$$
\begin{aligned}
&-2\,\Box\,\Phi\,\Box\,\Phi-2\partial_\mu\Phi\partial^\mu\,\Box\,\Phi+\underbrace{2\partial_\alpha\left(\partial^\alpha\partial_\mu\Phi\cdot\partial^\mu\Phi\right)}_{+\underbrace{2\partial_\alpha\partial^\alpha\partial_\mu\Phi}_{2\Box\partial_k\Phi}+2\partial^\alpha\partial_\mu\Phi\partial_\mu\partial^\alpha\Phi}=\\
&=-2(\Box\Phi)^2+2\partial^\alpha\partial_\mu\Phi\partial_\alpha\partial^\mu\Phi=0
\end{aligned}
$$

Как видим, нет высших производных. Получаем, что уравнение поля:

$$
(\Box\Phi)^2=\left(\partial_\mu\partial_\nu\Phi\right)^2
$$

В этом уравнении производных всего 2 и поэтому степень свободы одна. Задача Коши для такой проблемы определяется двумя функциями: нужно задать поле и его первую производную.

Домашнее задание. Проверить $\mathscr{L}_{(4)}$ и $\mathscr{L}_{(5)}$.

Такие поля Φ называются *Галилеоны*, потому что теория инвариантна относительно

$$
\Phi\to\Phi+c_\mu x^\mu+\Phi_0
$$

где $c_\mu=\text{const}$. Это следует из:

$$
\partial_\mu\Phi\to\partial_\mu\Phi+c_\mu \tag{12.13}
$$

Отсюда понятно, что

$$
\mathscr{L}_2=(\partial\Phi)^2\to(\partial\Phi)^2+\underbrace{2c^\mu\partial_\mu\Phi+c^2}_{\partial_\mu(2c^\mu\Phi+x^\mu c^\nu)}
$$

В простейшем случае это очевидно. Для члена с $\mathscr{L}_3$ тоже верно:

$$
\mathscr{L}^{(3)}=(\partial\Phi)^2\,\Box\,\Phi\boxed{=}
$$

Когда совершим преобразование Галилея (12.13), получим:

$$\boxed{=}(\partial\Phi)^2 \Box\Phi + \underbrace{2c^\mu \partial_\mu \Phi \Box \Phi}_{=2\partial^\alpha\left[\left(\partial_\alpha\Phi\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}(\partial\Phi)^2\right)c^\mu\right]} + \underbrace{c^2 \Box \Phi}_{=\partial_\mu(\partial^\mu\Phi)} \tag{12.14}$$

Члены $\mathscr{L}_4$, $\mathscr{L}_5$ тоже инвариантны относительно этих преобразований Галилея. Теория галилеонов вылилась в самостоятельную науку. Изначально она возникла при анализе бездуховой гравитации при этом пределе. Но потом стали исследовать теорию нестандартных скалярных полей. Это изобретение примерно 10-летней давности.

Из идеи предела все галилеоны лежат в пространстве Минковского. Потом говорим, что забываем о пределе, о мотивации и берем такие скалярные поля (12.14) и смотрим, будут ли уравнения все еще второго порядка. Вытекает теория Хардемски. В частности, этот подход использовался, чтобы описать механизм Вайнштейна простым способом.

Можно использовать Галилеон для описания механизма Вайнштена. Когда рассматривали механизм Вайнштейна, там были сложные разложения. Взяли:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(2)} + \mathscr{L}_{(3)} = -\frac{1}{2}(d\Phi)^2 - \frac{1}{\Lambda_3}(\partial\Phi)^2 \Box \Phi + \Phi T$$

где ΦT — привязка.

В качестве источника взяли:

$$T = -4\pi M \delta^3(\vec{r}) = -M\frac{\delta(r)}{r^2}$$

Дальше утверждается, что

$$\frac{\Phi'}{r} + \frac{1}{\Lambda_3^2}\left(\frac{\Phi'}{v}\right)^2 = \frac{M}{r^3} \tag{12.15}$$

Это, очевидно, в каком-то приближении, потому что уравнения:

$$\Box\Phi - \frac{1}{\Lambda}\left((\Box\Phi)^2 - \left(\partial_{\mu\nu}\Phi\right)^2\right) = T$$

Пренебрегается второй аргумент. Нужно делать как (12.15), а решение этого алгебраического уравнения относительно первых производных такое:

$$\frac{M}{r_v^{3/2}\sqrt{r}} \underset{r\ll r_v}{\leftarrow} \Phi' \underset{r\gg r_v}{\rightarrow} \frac{M}{r^2}, \tag{12.16}$$

(12.16) – Ньютоновская сила, Ньютон. Радиус Вайнштейна определяется так:

$$r_v = \frac{M^{1/3}}{\Lambda}$$

Получаем:

$$\frac{\Phi'}{\text{Ньютон}} = \left(\frac{r}{r_v}\right)^{3/2} \ll 1$$

Таким образом, дополнительное притяжение, переносимое скалярным произведением, гораздо меньше, чем стандартное ньютоновское определение.

Замечание 3. Другие бездуховые теории

При подсчете степеней свободы в гамильтоновом анализе использовали гамильтонов формализм, который дает первичные связи:

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}^\mu} = 0 \Rightarrow -\dot{P}_\mu = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial N^\mu} = \mathscr{H}_\mu + \frac{\partial V\left(N^\alpha,\ \gamma_{\mu\nu}\right)}{\partial N^\mu} = 0 \tag{12.17}$$

В общем случае, это 4 уравнения для определения 4 функций хода и сдвига. Эти уравнения решаются, определяются функции хода и сдвига, на этом процедура обрывается получаются 6 степеней свободы. Особый случай, когда не все уравнения (12.17) являются независимыми:

$$\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial N^\mu \partial N^\nu}\right) = 0 \tag{12.18}$$

Тогда какие-то из N определяются, а другие остаются неопределенными. Соответствующие уравнения не содержат N и становятся связями. Эти связи уменьшают число степеней свободы в теории. Проведем анализ уравнения (12.18) – это *уравнение Монжа-Ампера.*

Была произведена детальная классификация решений этого уравнения — это функции $V\left(N, N^k, \gamma_{ik}\right)$. Решение Деранга-Берадзе-Толя не является единственным. Только ***dRGT*** сводится в пределе слабого поля, релятивистски инвариантен и сводится в пределе слабого поля к члену ФП:

$$U = \frac{1}{8}\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right)$$

Есть другие решения, которые в пределе слабой связи дают выражение такого типа:

$$U = \frac{1}{8}\left(a h_{00}^2 + b(h_{0k})^2 + c(h_{ik})^2 + d(h_{kk})^2 + \ldots\right), \tag{12.19}$$

где a, b, c, d — произвольные коэффициенты. Такого рода выражения неинвариантны относительно преобразований Лоренца. В лучшем случае, они инвариантны при вращении пространственных координат.

С одной стороны, можно настаивать, что лоренцевская симметрия является фундаментальной; с другой стороны, относительно этой симметрии инвариантно только пространство Минковского. Всегда можно сказать, что не живем в пространстве Минковского, а живем в краевом пространстве, в космологической метрике Фридмана или Де-Ситтера, где нет лоренцевской инвариантности. Т.е. метрика пространства не плоская, она плоская только локально, когда можем пренебречь глобальными параметрами.

Если она не плоская, нет необходимости настаивать на симметрии Лоренца. Откажемся рассматривать и теории (12.19) тоже. Это было еще до изобретения теории Де-Рама, но такие теории (12.19) уже были известны в ту пору. Уже было известно, что число степеней свободы 5 (может и 3, и 2).

Имеется дополнительный интерес к таким теориям, потому что отказ от лоренцевской инвариантности позволяет сильно поднять параметры обрезания. В этом случае оказывается, что:

$$E < \Lambda_2 = \sqrt{mM_{\mathrm{pl}}} = \frac{1}{1\ \text{мм}}$$

На растоянии 1 мм это всё работает за счет отказа от лоренцевской инвариантности.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ