МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ. ЧАСТЬ 2

ШАМАРОВ
НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Содержание

Лекция 1. Алгебраическое тензорное произведение пространств. Часть 1 5

Алгебраическое тензорное произведение двух пространств (определение) ... 5

Следствие 1. Критерий алгебраического тензорного произведения ... 5

Следствие 2. О существовании и единственности тензорного произведения ... 6

Примеры других тензорных произведений ... 7

Лекция 2. Алгебраическое тензорное произведение пространств. Часть 2 ... 12

Критерий алгебраического тензорного произведения ... 12

Пример (конструкция тензорного произведения) ... 14

Лекция 3. Подходы к описанию пространства состояний материальной точки ... 18

Алгебраическое тензорное произведение двух пространств (повторение изученного материала) ... 18

Лагранжев подход к описанию пространства состояний материальной точки ... 20

Гамильтонов подход к описанию пространства состояний материальной точки ... 21

Дифференцирование в локально-выпуклых пространствах. Теорема Хана-Банаха ... 21

Лекция 4. Дифференцирование функций в бесконечномерных пространствах ... 25

Определения дифференцируемости ... 25

Дифференцирование функции по Гато ... 26

Пример ... 28

Общая схема дифференцируемости ... 29

Лекция 5. Примеры дифференцирования функций. Часть 1 ... 31

Многократное и бесконечное дифференцирование ... 31

Пример 1 (дифференцирование линейного оператора) ... 33

Пример 2 (дифференцирование квадратичной формы) 33

Пример 3 (дифференцирование двух линейных операторов) 35

Обобщение примера 2 36

Лекция 6. Примеры дифференцирования функций. Часть 2 37

Обобщение примера 2 из предыдущей лекции (дифференцирование квадратичной формы) 37

Билинейный оператор, соответствующий второй производной (пример 3 из предыдущей лекции) 39

Проверка критерия дифференцируемости по Фреше 40

Лекция 7. Интегрирование 42

Замечание (всякое векторное пространство изоморфно некоторому пространству функций) 42

Понятие меры 42

Системы множеств, подходящие для теоретико-множественных мер. Теоретико-множественное кольцо 43

Аддитивная мера на системе множеств. Мера на системе множеств. Значение меры 44

Примеры 44

Лекция 8. Типы интегралов. Часть 1 47

Функция множества $l1$.. Свойство аддитивности. Интеграл 47

Схема интеграла Лебега 49

Простейшие интегрируемые функции и их свойства 50

Интеграл от неотрицательной простой функции 51

Лекция 9. Типы интегралов. Часть 2 54

Повторение материала предыдущей лекции 54

Построение интегралов от неотрицательных функций 55

Интегралы в случае пополнения σ-алгебр 55

Интегралы от неограниченных функций 55

Интеграл от комплексных функций 56

Свойства интеграла 57

Теорема о замене переменной ... 58
Лекция 10. Квантование наблюдаемых величин ... 60
Наблюдаемая на стандартном фазовом пространстве. Квантование наблюдаемой величины (пример) ... 60
Стандартное квантование по Шредингеру (с помощью псевдодифференциальных операторов с символом Вейля) ... 60
Теорема Планшереля ... 63
Лекция 11. Квантование по Шредингеру. Часть 1 ... 65
Симплектическое локально выпуклое пространство ... 65
Гамильтонова система на симплектическом локально выпуклом пространстве ... 65
Скобка Пуассона ... 66
Квантование по Шредингеру ... 67
Обобщённая мера ... 69
Лекция 12. Квантование по Шредингеру. Часть 2 ... 71
Ортогональный проектор ... 71
Скалярное произведение ... 73
Преобразование Фурье ... 74
Лекция 13. Пространство Шварца ... 76
Необходимые понятия и обозначения ... 76
Рассмотрение пространства Шварца ... 76
Скалярное произведение ... 77
Вложенные подпространства ... 77
Связь норм вложенных подпространств ... 78
Лекция 14. Квантование бесконечномерных гамильтоновых систем ... 81
Построение аналога пространства Шварца ... 81
Теорема (о квантовании бесконечномерных гамильтоновых систем) . 82
Основы квантовой механики. Суперпозиции векторов ... 85

Лекция 15. Комментарии к квантовомеханическим аксиомам и парадоксам 86

Суперпозиции векторов 86

Неравенство Белла для парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена ... 86

Лекция 1. Алгебраическое тензорное произведение пространств. Часть 1

Алгебраическое тензорное произведение двух пространств (определение)

Определение. Алгебраическим тензорным произведением двух линейных пространств E_1 и E_2 над общим полем $\mathbb{K}$ называется всякие пространство E_3 и билинейное отображение

$$b: E_1 \times E_2 \to E_3,$$

такие что

1) Если $\left(\overrightarrow{e_{1j}}\right)_{j \in J}$ и $(\overrightarrow{e_{2k}})_{k \in K}$ – базисы в пространствах E_1 и E_2 соответственно, то векторы системы образов $\left(b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\right)_{(j,k) \in J \times K}$ являются линейно независимыми в E_3 (для любой функции $c: J \times K \to \mathbb{K}: (j,k) \mapsto c_{j,k}$ со свойством

$$\big(1)\ card\big\{(j,k): c_{j,k} \neq 0\big\} < \infty\ \&\ 2)\ \exists\ (j_0, k_0) \in J \times K : c_{j_0,k_0} \neq 0\big)$$

$$\sum_{(j,k) \in J \times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right) \neq \vec{0}_{E_3}$$

2) Векторы системы образов $\left(b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\right)_{(j,k) \in J \times K}$образовывают базис в E_3.

Следствие 1. Критерий алгебраического тензорного произведения

Следствие 1. (Критерий алгебраического тензорного произведения): «свойство универсальности».

Для любого линейного пространства E_4 над $\mathbb{K}$ и для любого билинейного отображения

$$\beta: E_1 \times E_2 \to E_3$$

существует единственное линейное отображение

$$\lambda: E_3 \to E_4,$$

такое что

$$\lambda \circ b = \beta$$

На рис. 1.1 это изображено графически.

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "\beta"'] & & E_3 \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\
& E_4 &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1.1

Следствие 2. О существовании и единственности тензорного произведения

Следствие 2. (О существовании и единственности тензорного произведения).

Пусть билинейный оператор задается формулой

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{b} L(E_1^{\#}, E_2),$$

где

$$E_1^{\#} = \{f: E_2 \to \mathbb{K}\},$$

такой что

$$\left(b(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})\right)\left(\overleftarrow{f_1}\right) = \overleftarrow{f_1}(\overrightarrow{x_0}) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

и пусть $L(E_1^{\#}, E_2)$ – линейная оболочка образа отображения b.

Тогда пространство $L_0(E_1^{\#}, E_2)$ вместе с оператором $b: E_1 \times E_2 \xrightarrow{b} L_0(E_1^{\#}, E_2)$ является алгебраическим тензорным произведением.

Доказательство:

Проверим выполнение условий:

Пусть

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k}\cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}},\overrightarrow{e_{2k}}\right)\left(\overleftarrow{l}\right)=\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k}\cdot f\left(\overrightarrow{e_{1j}}\right)\cdot\overrightarrow{e_{2k}}=0$$

для любого $\overleftarrow{R}\in E_1^{\#}$, причем существует

$$(j_0,k_0)\in J\times K : c_{j_0,k_0}\neq 0$$

Пусть $\overleftarrow{f_0}\in E_1^{\#}$, такой что

$$f_0\left(e_{1,j_0}\right)=1,$$

$$\forall j\in J\backslash\{j_0\}$$

$$f_0\left(e_{1,j}\right)=0$$

Тогда в формуле

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k}\cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}},\overrightarrow{e_{2k}}\right)\left(\overleftarrow{l}\right)=\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k}\cdot f\left(\overrightarrow{e_{1j}}\right)\cdot\overrightarrow{e_{2k}}$$

при $\overrightarrow{e_{2k_0}}$ коэффициент равен

$$c_{j_0,k_0}\cdot 1\neq 0$$

Но тогда и вся линейная комбинация отлична от нуля. Получаем противоречие.

Примеры других тензорных произведений

Пример 1

$$E_1\times E_2\overset{\beta_0}{\to}B(E_1^{\#}\times E_2^{\#},K),$$

где

$$(\beta_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}))\left(\overleftarrow{f_1},\overleftarrow{f_2}\right)=\overleftarrow{f_1}(\overrightarrow{x_0})\overleftarrow{f_2}(\overrightarrow{y_0})$$

Пусть B_0 – линейная оболочка образа оператора β_0.

Тогда пространство B_0 с оператором

$$\beta_0\colon E_1\times E_2\overset{\beta_0}{\to}B_0$$

является тензорным произведением.

Доказательство:

Пусть

$$\forall \overleftarrow{f_1} \in E_1^{\#} \text{ и } \forall \overleftarrow{f_2} \in E_2^{\#}$$

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\left(\overleftarrow{f_1}, \overleftarrow{f_2}\right) = 0$$

Мы знаем, что

$$c_{j_0,k_0} \neq 0,$$

$$f_{1,0}\colon \begin{cases} \overrightarrow{e_{1j_0}} \longmapsto 1 \\ \overrightarrow{e_{1j}} \longmapsto 0, \qquad \forall j \neq j_0 \end{cases}$$

$$f_{2,0}\colon \begin{cases} \overrightarrow{e_{1k_0}} \longmapsto 1 \\ \overrightarrow{e_{1k}} \longmapsto 0, \qquad \forall k \neq k_0 \end{cases}$$

Значит

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot f_1(e_{1k}) f_2(e_{2k}) = \sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\left(\overleftarrow{f_1}, \overleftarrow{f_2}\right)$$

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot f_{1,0}(e_{1k}) f_{2,0}(e_{2k}) = \sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\left(\overleftarrow{f_{1,0}}, \overleftarrow{f_{2,0}}\right)$$

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot f_{1,0}(e_{1k}) f_{2,0}(e_{2k}) = \sum_k c_{j,k} \cdot f_{2,0}(e_{2k})$$

$$\sum_k c_{j,k} \cdot f_{2,0}(e_{2k}) = c_{j_0,k_0}$$

$$c_{j_0,k_0} \neq 0$$

Получили противоречие.

<u>Пример 2</u>

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{\tilde{b}} L(E_2^{\#}, E_1),$$

где

$$\left(\tilde{b}(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})\right)\left(\overleftarrow{f_2}\right) = \left(\overleftarrow{f_2}(\overrightarrow{x_0})\right) \cdot \overrightarrow{y_0} \quad \forall \overleftarrow{f_2} \in E_2^{\#}$$

$L_0(E_2^{\#}, E_1)$ – линейная оболочка образа оператора $\tilde{b}$.

$$E_1 \longrightarrow (E_1^{\#})^{\#}$$

$$x_0 \longmapsto \Phi_{x_0},$$

$$\Phi_{x_0}(\overleftarrow{f_1}) = \overleftarrow{f_1}(\overrightarrow{x_0})$$

Пусть в условиях следствия 2 (E_4, β) – тоже тензорное произведение.

Тогда существует единственный оператор, который переводит базис E_3 в E_4 (см. рис. 1.2).

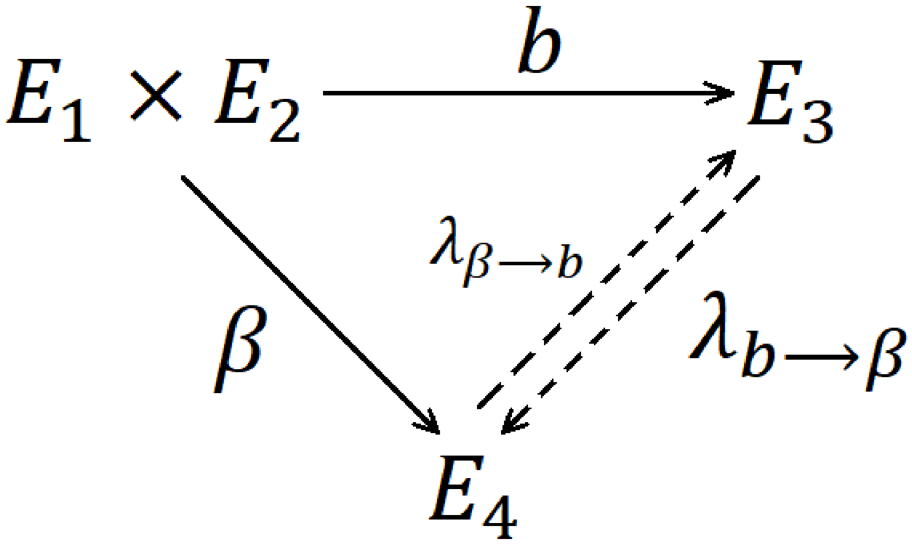

Рис. 1.2

Рассмотрим композицию:

$$\lambda_{\beta\longrightarrow b} \circ \lambda_{b\longrightarrow\beta} \colon E_3 \times E_3$$

Так как

$$\lambda_{b\longrightarrow\beta} \circ \beta = b,$$

То

$$(\lambda_{\beta\longrightarrow b} \circ \lambda_{b\longrightarrow\beta}) \circ b = \left(\lambda_{\beta\longrightarrow b} \circ (\lambda_{b\longrightarrow\beta} \circ b)\right)$$

$$\left(\lambda_{\beta\longrightarrow b} \circ (\lambda_{b\longrightarrow\beta} \circ b)\right) = \lambda_{b\longrightarrow\beta} \circ \beta$$

$$\lambda_{b\to\beta} \circ \beta = b$$

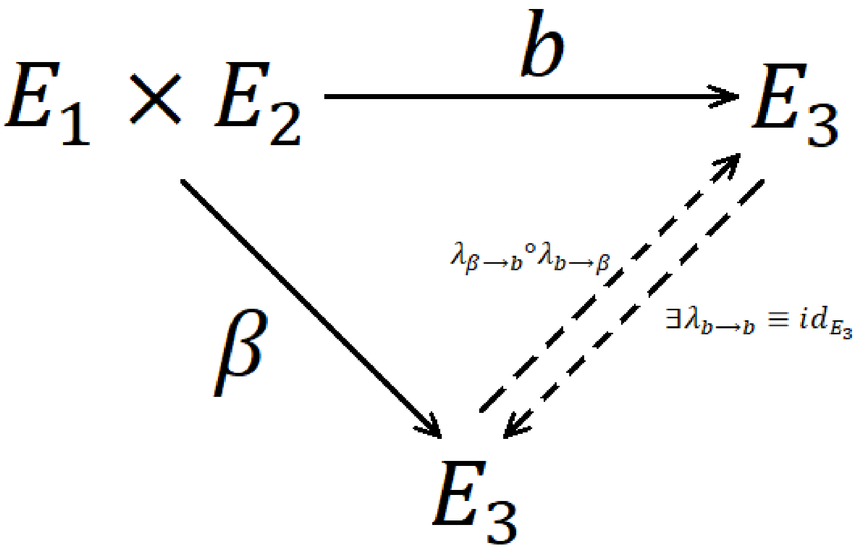

Рис. 1.3

Аналогичные рассуждения можно привести и для

$$\lambda_{b\to\beta} \circ \lambda_{\beta\to b} \colon E_4 \times E_4$$

В этом смысле у нас имеется единственность векторного произведения.

Можно ввести обозначение для образов:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \otimes \vec{y}$$

$$\vec{x} \in E_1$$

$$\vec{y} \in E_2$$

Пусть имеется векторное пространство V и даны линейные отображения L_3 и L_4 (см. рис. 1.4).

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "\beta"'] & E_3 \arrow[r, "L_3"] \arrow[d, dashed, shift left, "\lambda_{b\to\beta}"] & V \\
 & E_4 \arrow[u, dashed, shift left, "\lambda_{\beta\to b}"] \arrow[ur, "L_4"'] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1.4

Можем записать:

$$L_3\big(b(\vec{x},\vec{y})\big) = L_3\left(\lambda_{\beta\to b}\big(b(\vec{x},\vec{y})\big)\right)$$

$$L_3\left(\lambda\big(b(\vec{x},\vec{y})\big)\right) = (L_3 \circ \lambda)\big(b(\vec{x},\vec{y})\big)$$

$$(L_3 \circ \lambda)\big(b(\vec{x},\vec{y})\big) = L_3\big(b(\vec{x},\vec{y})\big)$$

$$L_3\big(b(\vec{x},\vec{y})\big) = L_3(\vec{x} \otimes \vec{y})$$

$$L_3(\vec{x} \otimes \vec{y}) = L_4(\vec{x} \otimes \vec{y})$$

Лекция 2. Алгебраическое тензорное произведение пространств. Часть 2

Критерий алгебраического тензорного произведения

Докажем следующий критерий:

Следствие 1. (Критерий алгебраического тензорного произведения): «свойство универсальности».

Для любого линейного пространства E_4 над $\mathbb{K}$ и для любого билинейного отображения

$$\beta : E_1 \times E_2 \to E_3$$

существует единственное линейное отображение

$$\lambda : E_3 \to E_4,$$

такое что

$$\lambda \circ b = \beta$$

Доказательство:

Сначала проверим достаточность.

Если бы E_3 не равнялось линейной оболочке образа $\big(b(E_1 \times E_2)\big)$. Обозначим эту линейную оболочку как L. Известно, что

$$L \subset E_3$$

$$L \neq E_3$$

Пусть $\mathcal{E}$ - базис в L.

$$span\,\mathcal{E} = L \neq E_3$$

Пусть $\tilde{\mathcal{E}}$ - базис в E_3, содержащий $\mathcal{E}$.

$$\exists \overrightarrow{e_0} \in \tilde{\mathcal{E}} \backslash \mathcal{E}$$

Пусть

$$E_4 = \mathbb{K}, \{1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}\}$$

$$\beta \equiv 0$$

Тогда

$$\lambda_{\beta\to b} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_0} \longmapsto 1 \\ \overrightarrow{e_0} \longmapsto 0 \end{bmatrix}$$

Но $\lambda_{\beta\to b}$ должно быть единственным. Мы получили противоречие.

Теперь докажем линейную зависимость (от противного).

Пусть выполняется условие универсальности. Допустим, что нарушается условие базисности. Базисность означает, что

$$span\left(b(E_1 \times E_2)\right) = E_3$$

Тогда существует c, такое что выполнены условия:

$$1)\ card\left\{(j,k): c_{j,k} \neq 0\right\} < \infty$$

$$2)\ \exists\ (j_0, k_0) \in J \times K : c_{j_0,k_0} \neq 0$$

Причём,

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right) = \vec{0}_{E_3}$$

Помножим это тождество на обратный элемент и получим:

$$b\left(\overrightarrow{e_{1j_0}}, \overrightarrow{e_{2k_0}}\right) + \sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j_0,k_0}^{-1} \cdot c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right) = 0$$

В итоге получаем:

$$b\left(\overrightarrow{e_{1j_0}}, \overrightarrow{e_{2k_0}}\right) = \sum_{\substack{(j,k)\in J\times K \\ (j,k)\neq(j_0,k_0)}} \widetilde{c_{j,k}} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)$$

Здесь введено обозначение:

$$-\left(c_{j_0,k_0}^{-1}\right) \cdot c_{j,k} = \widetilde{c_{j,k}}$$

Тогда возьмём в качестве (E_4, β) пример из примера 2:

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{\tilde{b}} L(E_2^{\#}, E_1),$$

где

$$\left(\tilde{b}(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})\right)\left(\overleftarrow{f_2}\right) = \left(\overleftarrow{f_2}(\overrightarrow{x_0})\right) \cdot \overrightarrow{y_0} \quad \forall \overleftarrow{f_2} \in E_2^{\#}$$

$L_0(E_2^{\#}, E_1)$ – линейная оболочка образа оператора $\tilde{b}$.

Приходим к противоречию с существованием

$$\lambda: E_3 \to E_4,$$

такого что

$$\lambda \circ b = \beta = \tilde{b}$$

Тогда

$$\tilde{b}\left(\overrightarrow{e_{1j_0}}, \overrightarrow{e_{2k_0}}\right) = \sum_{\substack{(j,k)\in J\times K \\ (j,k)\neq(j_0,k_0)}} \widetilde{c_{j,k}} \cdot \tilde{b}\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)$$

Пример (конструкция тензорного произведения)

Пример 3

Построим вспомогательное пространство E_0:

$$E_0 = \{\varphi \in \mathbb{K}^{E_1\times E_2} |: card\{(x,y) \in E_1 \times E_2 : f(x,y) \neq 0\} < \infty\}$$

$$\{\varphi \in \mathbb{K}^{E_1\times E_2} |: card\{(x,y) \in E_1 \times E_2 : f(x,y) \neq 0\} < \infty\} = span_{\mathbb{K}}\left\{\delta_{(x,y)} : (x,y) \in E_1 \times E_2\right\}$$

$$E_0 = span_{\mathbb{K}}\left\{\delta_{(x,y)} : (x,y) \in E_1 \times E_2\right\},$$

где

$$\delta_{(x_0,y_0)}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_0,y_0) = (x,y) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим подпространство E_{00} в пространстве E_0:

$$E_{00} = span(\left\{\left(\delta_{(\alpha x+\alpha' x', \gamma y+\gamma' y')} - \alpha\gamma\delta_{(x,y)} - \alpha'\gamma\delta_{(x',y)} - \alpha\gamma'\delta_{(x,y')} - \alpha'\gamma'\delta_{(x',y')}\right)\right|:$$

$$(\alpha, \alpha', \gamma, \gamma') \in \mathbb{K}^4, (x,x') \in E_1 \times E_1, (y,y') \in E_2 \times E_2\})$$

Введём отношение эквивалентности:

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in E_{00}$$

$$E_0 \ni \varphi \longmapsto (\tilde{\varphi} \equiv \{\psi \in E_0 |: \varphi \sim \psi\})$$

$$E_3 \coloneqq E_0/\sim$$

$$E_3 = E_0/E_{00}$$

Построим оператор b:

$$b(x,y) \coloneqq \widetilde{\delta_{x,y}}$$

$$\widetilde{\delta_{x,y}} = \pi\big(\delta_{(x,y)}\big)$$

$\pi\big(\delta_{(x,y)}\big)$ – линейный оператор.

Проверим линейность $\pi\big(\delta_{(x,y)}\big)$. Для начала нужно проверить условие аддитивности:

$$\pi(\varphi_1 + \varphi_2) = \pi(\varphi_1) + \pi(\varphi_2)$$

$$\pi(\alpha\varphi) = \alpha\pi(\varphi)$$

$$0_{\mathbb{K}} = \pi\left(\delta_{(\alpha x+\alpha' x', \gamma y+\gamma' y')}\right) - \alpha\gamma\pi\big(\delta_{(x,y)}\big) - \alpha'\gamma\pi\left(\delta_{(x',y)}\right) - \alpha\gamma'\pi\left(\delta_{(x,y')}\right) - \alpha'\gamma'\pi\left(\delta_{(x',y')}\right)$$

$$b(\alpha x + \alpha' x', \gamma y + \gamma' y') = \alpha\gamma b(x,y) + \alpha'\gamma b(x',y) + \alpha\gamma' b(x,y') + \alpha'\gamma' b(x',y')$$

То есть оператор $\pi\big(\delta_{(x,y)}\big)$ действительно линейный.

Возьмём любой элемент φ из класса эквивалентности:

$$\pi\left(\varphi = \sum c_{(x,y)}\delta_{(x,y)}\right) = \sum c_{(x,y)} b(x,y)$$

Докажем свойство универсальности.

$$b\colon E_1 \times E_2 \to E_3 = E_0/E_{00}$$

Введём обозначение:

$$\Delta\colon E_1 \times E_2 \ni (x,y) \in \delta_{(x,y)} \in E_0$$

$$\delta_{(x,y)} \equiv \Delta(x,y) \Longrightarrow b = \pi\Delta$$

$$\delta_{(x,y)} = \mathbb{1}_{\{(x,y)\}} \subset E_1 \times E_2$$

Существует ли такое λ, которое замыкает диаграмму на рис. 2.1 до коммутативной?

$$\beta(x,y) = \lambda\big(b(x,y)\big)$$

$$\lambda\big(b(x,y)\big) = \lambda\left(\pi\big(\delta_{(x,y)}\big)\right)$$

$$\beta(x,y) = \lambda\big(\widetilde{\delta_{(x,y)}}\big)$$

λ_0 построено на базисе пространства E_0:

$$\lambda_0 \colon \delta_{(x,y)} \longmapsto \beta(x,y)$$

λ_0 единственным образом можно достроить до линейного отображения.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend left, "b"] \arrow[dr, "\beta"'] & E_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\lambda_0"] & E_3 = E_0/E_{00} \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\
& E_4 &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.1

Убедимся, что пространство E_{00} является ядром оператора λ_0.

В силу линейности:

$$\begin{aligned}
\lambda_0\left(\delta_{(\alpha x+\alpha' x', \gamma y+\gamma' y')}\right) - \alpha\gamma\lambda_0\left(\delta_{(x,y)}\right) - \alpha'\gamma\lambda_0\left(\delta_{(x',y)}\right) - \alpha\gamma'\lambda_0\left(\delta_{(x,y')}\right) \\
- \alpha'\gamma'\lambda_0\left(\delta_{(x',y')}\right) \\
= \beta\left(\delta_{(\alpha x+\alpha' x', \gamma y+\gamma' y')}\right) - \alpha\gamma\beta\left(\delta_{(x,y)}\right) - \alpha'\gamma\beta\left(\delta_{(x',y)}\right) - \alpha\gamma'\beta\left(\delta_{(x,y')}\right) \\
- \alpha'\gamma'\beta\left(\delta_{(x',y')}\right)
\end{aligned}$$

$$\beta\left(\delta_{(\alpha x+\alpha' x',\gamma y+\gamma' y')}\right)-\alpha\gamma\beta\left(\delta_{(x,y)}\right)-\alpha'\gamma\beta\left(\delta_{(x',y)}\right)-\alpha\gamma'\beta\left(\delta_{(x,y')}\right)-\alpha'\gamma'\beta\left(\delta_{(x',y')}\right)=0$$

Таким образом, у нас имеется единственный оператор λ, который согласуется с диаграммой на рис. 2.1.

$$\lambda\circ\pi\left(\delta_{(x,y)}\right)=\lambda_0\left(\delta_{(x,y)}\right)$$

$$\lambda_0\left(\delta_{(x,y)}\right)=\beta(x,y)$$

$$\lambda\circ\pi\left(\delta_{(x,y)}\right)=\beta(x,y)$$

Мы доказали свойство универсальности.

Таким образом мы построили четыре разные конструкции, реализующие тензорные произведения.

Лекция 3. Подходы к описанию пространства состояний материальной точки

Алгебраическое тензорное произведение двух пространств (повторение изученного материала)

Алгебраическим тензорным произведением двух линейных пространств E_1 и E_2 над общим полем $\mathbb{K}$ называется всякие пространство E_3 и билинейное отображение

$$b: E_1 \times E_2 \to E_3,$$

такие что

1) Если $\left(\overrightarrow{e_{1j}}\right)_{j\in J}$ и $(\overrightarrow{e_{2k}})_{k\in K}$ – базисы в пространствах E_1 и E_2 соответственно, то векторы системы образов $\left(b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\right)_{(j,k)\in J\times K}$ являются линейно независимыми в E_3 (для любой функции $c: J \times K \to \mathbb{K}: (j,k) \mapsto c_{j,k}$ со свойством

$$\big(1)\ card\big\{(j,k): c_{j,k} \neq 0\big\} < \infty \ \&\ 2)\ \exists\ (j_0, k_0) \in J \times K : c_{j_0,k_0} \neq 0\big)$$

$$\sum_{(j,k)\in J\times K} c_{j,k} \cdot b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right) \neq \vec{0}_{E_3}$$

2) Векторы системы образов $\left(b\left(\overrightarrow{e_{1j}}, \overrightarrow{e_{2k}}\right)\right)_{(j,k)\in J\times K}$образовывают базис в E_3.

$$span_{\mathbb{K}}\big(b(E_1 \times E_2)\big) = E_3$$

Тензорное произведение обозначается как

$$E_1 \otimes E_2$$

Также иногда обозначают:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \otimes \vec{y}$$

<u>Замечание.</u>

Пара (E_3, b) реализует тензорное произведение

$$E_1 \otimes E_2$$

в том и только в том случае, когда для любого линейного пространства E_4 и для любого билинейного отображения

$$\beta: E_1 \times E_2 \to E_4$$

существует единственное линейное отображение

$$\lambda: E_3 \to E_4,$$

такое что

$$\beta = \lambda \circ b$$

и в том и только том случае, когда для любого билинейного функционала

$$\beta: E_1 \times E_2 \to \mathbb{K}$$

существует единственный линейный функционал

$$\lambda: E_3 \to \mathbb{K},$$

такой что

$$\beta = \lambda \circ b.$$

Пример.

Пусть E – линейное пространство над полем $\mathbb{K}$,

$$E' \subset E^{\#} \equiv \{l: E \longrightarrow \mathbb{K}_{\text{лин}}\}$$

$E^{\#}$ - пространство всех линейных функционалов,

E' - линейное подпространство.

Рассмотрим каноническое отображение β_{can}

$$E \times E' \ni (x, l) \xrightarrow{\beta_{can}} l(x) \in \mathbb{K} \cong$$

$$\begin{tikzcd}
E \times E' \arrow[rr] \arrow[dr, "\beta_{can}"'] & & E \bigotimes E' \arrow[dl, dashed, "\lambda_{can}"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.1

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "\beta"'] & & E_3 \cong E_1 \otimes E_2 \arrow[dl, dashed, "\lambda_{b\to\beta}"] \\ & E_4 & \end{tikzcd}$$

Рис. 3.2

Существует единственное λ_{can} (см. рис. 3.1):

$$\lambda_{can} = tr(E \times E')$$

Лагранжев подход к описанию пространства состояний материальной точки

Пространство состояний материальной точки – декартово произведение пространства возможных координат (в геометрическом пространстве), занимаемых этой точкой на пространство скоростей.

Лагранжев подход:

$$Q \times V,$$

Q – локально выпуклое пространство («конфигурационное пространство»),

V изоморфно Q:

$$V \cong Q$$

$$\mathcal{L}: Q \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\mathcal{L}$ - функция Лагранжа.

Гамильтонов подход к описанию пространства состояний материальной точки

Гамильтонов подход:

Пространство состояний – фазовое пространство.

$$Q \times P,$$

Q – локально выпуклое пространство («конфигурационное пространство»),

P – пространство импульсов:

$$P \cong Q'$$

Дифференцирование в локально-выпуклых пространствах. Теорема Хана-Банаха

Теорема (Хана-Банаха).

Алгебраический вариант:

Если E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ l_0 – линейный непрерывный функционал:

$$l_0 : E_0 \longrightarrow \mathbb{K},$$

$$E_0 \subset E,$$

то существует

$$l \in E',$$

такое что

$$l|_{E_0} = l_0.$$

Геометрический вариант:

Если A и B – непустые вещественновыпуклые подмножества вещественного хаусдорфово локально выпуклого пространства E, причем A открыто и B замкнуто, то найдется линейный непрерывный функционал

$$l \in E'$$

И найдется

$$c \in \mathbb{R},$$

такое что

$$A \subset l^{-1}((-\infty, c)_{\mathbb{R}})$$

$$B \subset l^{-1}([c, +\infty)_{\mathbb{R}})$$

Следствие.

$$\forall \vec{x} \in E \ \exists l \in E',$$

такое что

$$l(\vec{x}) = 1$$

Определение. Билинейным функционалом, приводящим в двойственность линейные пространства E_1 и E_2 над общим полем $\mathbb{K}$ называется билинейный функционал

$$\beta: E_1 \times E_2 \to \mathbb{K},$$

такой что «β разделяет точки в E_1 и E_2 взаимно», то есть

$$\forall \overrightarrow{x_1} \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\} \ \exists \overrightarrow{x_2} \in E_2,$$

такой что

$$\beta(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \neq 0_{\mathbb{K}}$$

и

$$\forall \overrightarrow{x_2} \in E_2 \setminus \{0_{E_2}\} \ \exists \overrightarrow{x_1} \in E_1,$$

такой что

$$\beta(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \neq 0_{\mathbb{K}}$$

Определение. Канонический след относительно функционала двойственности

$$\beta: E_1 \times E_2 \to \mathbb{K}$$

это тот единственный линейный функционал

$$\lambda_{\otimes,\beta}: E_1 \otimes E_2 \to \mathbb{K}$$

такой что

$$\beta = \lambda_{\otimes.\beta} \circ \otimes$$

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\beta"'] & & E_1 \otimes E_2 \arrow[dl, dashed, "tr_\beta = \lambda_{\otimes,\beta}"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.3

Заметим, что

$$E_1 \otimes E_2 \cong L_0(E_1', E_2)$$

$$L_0(E_1', E_2) \cong L_0(E_2', E_1)$$

$$L_0(E_2', E_1) \cong B_0(E_1', E_2')$$

$$E_1 \otimes E_2 \cong B_0(E_1', E_2')$$

<u>Определение.</u> Базисы e_α^1 и e_γ^2 называются взаимными, если

$$\beta\left(e_\alpha^1, e_\gamma^2\right) = \delta_{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1, \alpha = \gamma \\ 0, \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

<u>Следствие.</u>

Для любого хаусдорфова локально выпуклого пространства функционал

$$Eval: E \times E' \ni (x, l) \longmapsto l(x)$$

переводит пару пространств (E, E') в двойственность.

<u>Определение.</u> Пусть β – функционал двойственности между E_1 и E_2, то слабая топология относительно двойственности β в E_1:

$$\sigma_\beta(E_1) \equiv \sigma_\beta(E_1, E_2) := \sigma(E_1\{\beta(\cdot, x_2): x_2 \in E_2\}),$$

где для

$$\widetilde{E_2} \subset E_1^{\#}$$

$$\sigma\left(E_1, \widetilde{E_2}\right) = \tau_{\{|l(\cdot)|: l \in \widetilde{E_2}\}}$$

И аналогично:

$$\sigma_\beta(E_2) \equiv \sigma_\beta(E_2, E_1) := \sigma(E_2\{\beta(x_1,\cdot): x_1 \in E_1\})$$

<u>Следствие из теоремы Хана-Банаха:</u>

$$\Big(E_1, \sigma_\beta(E_1, E_2)\Big)' = \{\beta(\cdot, x_2): x_2 \in E_2\}$$

$$\Big(E_2, \sigma_\beta(E_2, E_1)\Big)' = \{\beta(x_1,\cdot): x_1 \in E_1\}$$

Лекция 4. Дифференцирование функций в бесконечномерных пространствах

Определения дифференцируемости

Пусть топология τ в локально выпуклом пространстве E задаётся системой подмножеств

$$S \subset \mathcal{P}(E')$$

так, что

$$\tau = \tau_{\mathcal{P}_S},$$

где система полунорм

$$\mathcal{P}_S = \{(E \ni x \longmapsto \sup\{|Eval(x,l): l \in M|\}): M \in S\}$$

Обычно накладывают дополнительные ограничения, такие как:

1) Пространство E' совпадает с системой объединения S:

$$E' \subset \bigcup S$$

2) Объединение любых двух элементов из системы S также лежит в множестве, принадлежащем этой системе S:

$$\forall (M_1, M_2) \in S \times S\ \exists M_3 \in S,$$

такое что

$$M_1 \cup M_2 \subset M_3$$

Тогда говорим, что в E топология τ является топологией сходимости на системе S.

Пусть E_1 и E_2 – локально выпуклые вещественные пространства, приводимые в двойственность билинейным функционалом

$$\beta: E_1 \times E_2 \to \mathbb{R},$$

$$S \subset \mathcal{P}(E_2),$$

такое что

$$E_2 \subset \bigcup S$$

$$\forall (M_1, M_2) \in S \times S\ \exists M_3 \in S,$$

такое что

$$M_1 \cup M_2 \subset M_3$$

Тогда

$$\tau_S(E_1, E_2)_\beta = \tau_{\mathcal{P}_{S,\beta}},$$

где

$$\mathcal{P}_{S,\beta} = \left\{ \left(E_1 \ni x_1 \longmapsto \sup_{x_2 \in S} |\beta(x_1, x_2)| \right) : M \in S \right\}$$

$\tau_S(E_1, E_2)_\beta$ называется топологией сходимости на системе S относительно β.

Определение. Говорят, что локально выпуклая топология τ на пространстве E_1 согласуется с двойственностью β, если пространство линейных непрерывных функционалов совпадает с множеством тех линейных непрерывных функционалов, которые получаются фиксацией второго аргумента:

$$(E_1, \tau)' = \{\beta(\cdot, x_2) : x_2 \in E_2\}$$

Замечание.

Топология сходимости на системе S относительно β $\tau_S(E_1, E_2)_\beta$ согласуется с двойственностью β в том и только в том случае, когда S состоит из подмножеств $M \subset E_2$, таких что M^{OO} является компактом относительно слабой топологии $\sigma_\beta(E_2, E_1)$.

Если в двойственности β

$$\{E_1, E_2\} = \{E_i, E_j\}, i \neq j,$$

то для

$$M \subset E_i$$

$$M^O = \left\{ x_j : \sup_{x_i \in M} \left| \langle x_i, x_j \rangle_\beta \right| \leq 1 \right\},$$

где

$$\langle x_1, x_2 \rangle_\beta = \langle x_2, x_1 \rangle_\beta = \beta(x_1, x_2)$$

M^O – поляр множества M.

Дифференцирование функции по Гато

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство,

$$U \in \tau_E$$

Пусть G – хаусдорфово локально выпуклое пространство и

$$f\colon U \to G$$

$$\overrightarrow{x_0} \in U$$

Функция f называется дифференцируемой по Гато в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists A \in L\big((E,\tau_E),G\big),$$

такой что

$$\forall \vec{h} \in E \text{ при } \mathbb{R} \ni t \to 0_{\mathbb{R}}$$

$$f\big(\vec{x} + t\vec{h}\big) - f(\vec{x}) - tA\vec{h} = \bar{\bar{o}}(t)$$

Это равносильно тому, что

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\left(f\big(\vec{x} + t\vec{h}\big) - f(\vec{x})\right) = A\vec{h}$$

При этом оператор A обозначается как $f'(x_0)$.

В частности,

$$f'(\overrightarrow{x_0})h \equiv df(\overrightarrow{x_0}, h) \equiv \lim_{t\to 0} t^{-1}\left(f\big(\overrightarrow{x_0} + t\vec{h}\big) - f(\overrightarrow{x_0})\right)$$

В частности, если f дифференцируема по Гато в каждой точке $x_0 \in U$, то

$$\left\{U \ni x_0 \longmapsto f'(x_0) \in L\big((E,\tau_E),G\big)\right\}$$

Если E – хаусдорфово локально выпуклое пространство,

$$U \in \tau_E$$

G – хаусдорфово локально выпуклое пространство и

$$f\colon U \to G$$

$$\overrightarrow{x_0} \in U$$

E_0 линейное топологическое подпространство:

$$E_0 \subset E,$$

то функция f называется дифференцируемой по Гато в $\overrightarrow{x_0}$ по направлениям из (иногда говорят вдоль) E_0 тогда и только тогда, когда

$$\exists A \in L\left(\left(E_0, \tau_{E_0}\right), G\right),$$

такой что

$$\forall h \in E_0 \ \lim_{t\to 0} t^{-1}\left(f\left(\overrightarrow{x_0} + t\vec{h}\right) - f\left(\overrightarrow{x_0}\right)\right) = A\vec{h}$$

В этих терминах:

$$A =: f'_{E_0}(x_0)$$

Пример

Пусть Q – локально выпуклое пространство, Q' – локально выпуклое пространство,

$$P = Q',$$

τ_P согласуется с канонической двойственностью

$$Eval: Q \times Q' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((P, \tau_P)' = \{(P \ni p \longmapsto \langle q, p\rangle) : q \in Q\})$$

Отождествляем P' с Q, тогда стандартным симплектическим называется линейный оператор

$$I: P \times Q \longrightarrow Q \times P,$$

такой что

$$I\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$$

$$I' = -I$$

Если E_1 и E_2 – локально выпуклые пространства,

$$A \in L(E_1, E_2),$$

то оператор A' определяется как

$$A' \equiv A^* \in L(E_2' \to E_1'),$$

такой что

$$\forall x_1 \in E_1 \ \langle A^*(l_2), x_1\rangle = \langle l_2, Ax_1\rangle$$

Кроме того, тогда $(Q \times P, I)$ называется стандартной симплитической структурой на фазовом пространстве $Q \times Q'$.

Функцией Гамильтона на стандартном симплитическом пространстве называется дифференцируемая по Гато функция

$$\mathcal{H}: Q \times P \to \mathbb{R}$$

и траектории физической системы, управляемой функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ — это функции

$$Z: \mathbb{R} \to Q \times P,$$

такие что

$$\forall t \in \mathbb{R}\ Z'(t) = I\left(\mathcal{H}'\big(Z(t)\big)\right),$$

то есть, если

$$Z(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix},$$

то уравнение

$$Z'(t) = I\left(\mathcal{H}'\big(Z(t)\big)\right)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} q'(t) = \mathcal{H}'_P\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \\ p'(t) = -\mathcal{H}'_Q\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Эта система называется канонической системой Гамильтона, порождаемой функцией Гамильтона $\mathcal{H}$

Общая схема дифференцируемости

$$f'_{E_0}: E \to L(E_0, G)$$

Пусть E и G – хаусдорфовы локально выпуклые пространства и

$$S \subset \mathcal{P}(E),$$

причем $\forall M \in S\ M$ ограничена в E и

$$\bigcup_{M\in S} M = E$$

Тогда топология сходимости на системе S в пространстве $L(E,G)$ задаётся системой всех полунорм вида

$$P_{M,\pi}(\vec{x}) = \sup_{x\in M}\{\pi(Ax)\},$$

где $M \in S, \pi$ – непрерывная полунорма на G (из той системы полунорм $\mathcal{P}_G$, для которой $\tau_G = \tau_{\mathcal{P}_G}$).

Если $G = \mathbb{R}$ и S – система ограниченных подмножеств:

$$S \subset \mathcal{P}(E_0),$$

причем $\forall M \in S$ M ограничена в E и

$$\bigcup_{M\in S} M = E,$$

то при определении дифференцируемости по Гато для f'_{E_0} рассматривают S, состоящих из одноточечных или конечных подмножеств в E.

$$f'_{E_0}: E \to L(E_0, G)$$

$$f''_{E_0}: E \to L\big(E_0, (L(E_0,G),\tau_S)\big)$$

Если S состоит из всех ограниченных подмножеств E_0, то f' называется производной по Фреше.

Лекция 5. Примеры дифференцирования функций. Часть 1

Многократное и бесконечное дифференцирование

Пусть U – открытое подмножество хаусдорфова локально выпуклого пространства E_1:

$$U_{\text{откр}} \subset E_1$$

$$U_{\text{откр}} \underset{f}{\to} E_2$$

E_2 также является хаусдорфовым локально выпуклым пространством.

n-кратная дифференцируемость на U функции f по системе S ограниченных в E_1 подмножеств:

$$f \in D_S(U_0)$$

тогда и только тогда, когда

$$\exists A: E_1 \to E_2$$

A – линейный непрерывный оператор, такой что

$$r_{f,U_0}(\vec{h}) \coloneqq f(\overrightarrow{u_0} + \vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0}) - A\vec{h}$$

Эта функция обладает свойством:

$$\forall M \in S \;\; t^{-1} r_{f,\overrightarrow{u_0}}(t\vec{h}) \rightrightarrows 0 \;\left(t \to 0, \vec{h} \in M\right)$$

Назовём это свойство S-малость остаточного члена функции r_{f,U_0}.

S-малость может быть переформулирована так:

$$\forall M \in S \;\; \forall (t_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\})_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \;\; \forall \left(\overrightarrow{h_n} \in M\right)_{n\in\mathbb{N}} \;\; t^{-1} r_{f,\overrightarrow{u_0}}\left(t_n \overrightarrow{h_n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Если в качестве S берем систему всех ограниченных в E_1 подмножеств, тогда дифференцируемость в S называется дифференцируемостью по Фреше.

Если в качестве S берем систему всех конечных в E_1 подмножеств, тогда дифференцируемость в S называется дифференцируемостью по Гато.

Если в качестве S берем систему всех компактных в E_1 подмножеств, тогда дифференцируемость в S называется дифференцируемостью по Адамару.

Если в качестве S берем систему всех секвентных компактов в E_1, тогда дифференцируемость в S называется дифференцируемостью по Адамару.

Если в качестве S берем сходящуюся в E_1 последовательность, тогда дифференцируемость в S называется дифференцируемостью по Адамару.

Все эти случаи представлены в таблице 5.1

В качестве $\boldsymbol{S}$ берем	**Дифференцируемость**
систему всех ограниченных в $\boldsymbol{E_1}$ подмножеств	По Фреше
систему всех конечных в $\boldsymbol{E_1}$ подмножеств	По Гато
берем систему всех компактных в $\boldsymbol{E_1}$ подмножеств	По Адамару
систему всех секвентных компактов в $\boldsymbol{E_1}$	По Адамару
сходящуюся в $\boldsymbol{E_1}$ последовательность $\{\boldsymbol{S_n}\}$	По Адамару

Таблица 5.1

$$\big(f'(u_0)\big)\vec{h} \equiv Df(u_0, h)$$

$$Df(u_0, h) \equiv df(u_0, h)$$

В конечномерном случае этот оператор может быть задан матрицей в базисе. Матрица оператора A называется матрицей Якоби.

Если для любого $u \in U$ существует

$$f'(u) \in L(E_1, E_2)$$

для дифференцирования функции

$$U \ni u \longmapsto f'(u) \in L(E_1, E_2)$$

задаем в $L(E_1, E_2)$ топологию τ_S равномерной сходимости на элементах из S, например системой полунорм

$$\mathcal{P}_{S,E_2} = \{P_{M,q} \colon M \in S\},$$

q – непрерывная в E_2 полунорма (q из системы полунорм, задающей топологию пространства E_2), где

$$P_{M,q}(A) = \sup_{\vec{h} \in M} \{q(A\vec{h})\}$$

Старшие производные обозначаются как

$$(f')'(\overrightarrow{u_0}) = f''(\overrightarrow{u_0})$$

$$f''(\overrightarrow{u_0}) = D^2 f(\overrightarrow{u_0},\cdot)$$

$$D^2 f(\overrightarrow{u_0},\cdot) = d^2 f(\overrightarrow{u_0},\cdot)$$

$$\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$$

Пример бесконечно дифференцируемой функции в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$e^{-\|x\|^2}$$

Пример 1 (дифференцирование линейного оператора)

Рассмотрим оператор

$$A \in L(E_1, E_2)$$

В предыдущих терминах это означает, что

$$f(\vec{x}) \equiv A\vec{x}$$

$$\vec{x} \in E_1$$

Составим остаточный член:

$$r_{f,U_0}(\vec{h}) = A(\overrightarrow{u_0} + \vec{h}) - A(\overrightarrow{u_0}) - A\vec{h}$$

$$A(\overrightarrow{u_0} + \vec{h}) - A(\overrightarrow{u_0}) - A\vec{h} \equiv 0$$

Тогда производная:

$$f'(u_0) \equiv A$$

Пример 2 (дифференцирование квадратичной формы)

Пусть

$$A \in L(H, H)$$

Квадратичная форма оператора A:

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})_H$$

Остаточный член:

$$r_{f,U_0}(\vec{h}) = \left(A_0(\overrightarrow{u_0} + \vec{h}), (\overrightarrow{u_0} + \vec{h})\right)_H - \left(A_0(\overrightarrow{u_0}), (\overrightarrow{u_0})\right)_H - A\vec{h}$$

$$r_{f,U_0}(t\vec{h}) = \left(A_0(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}), (\overrightarrow{u_0} + t\vec{h})\right)_H - \left(A_0(\overrightarrow{u_0}), (\overrightarrow{u_0})\right)_H - At\vec{h}$$

Напишем алгоритм того, как определить $A\vec{h}$:

$$t^{-1}\left(f(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0}) - A(t\vec{h})\right) = t^{-1}\left(f(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0})\right) - A\vec{h}$$

$$t^{-1}\left(f(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0})\right) - A\vec{h} \rightrightarrows 0$$

Получаем, что

$$t^{-1}\left(f(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0})\right) \rightrightarrows A\vec{h}$$

Для фиксированного $\vec{h}$:

$$t^{-1}\left(f(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}) - f(\overrightarrow{u_0})\right) \longrightarrow A\vec{h}$$

Тогда для нашего случая:

$$A\vec{h} = \lim_{t\to 0} t^{-1}\left(\left(A_0(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}), (\overrightarrow{u_0} + t\vec{h})\right)_H - \left(A_0(\overrightarrow{u_0}), (\overrightarrow{u_0})\right)_H - At\vec{h}\right)$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\left(\left(A_0(\overrightarrow{u_0} + t\vec{h}), (\overrightarrow{u_0} + t\vec{h})\right)_H - \left(A_0(\overrightarrow{u_0}), (\overrightarrow{u_0})\right)_H - At\vec{h}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0} t^{-1}((A_0u_0 + tA_0h, u_0 + th)_H - (Au_0, u_0)_H)$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}((A_0u_0 + tA_0h, u_0 + th)_H - (Au_0, u_0)_H)$$
$$\equiv \lim_{t\to 0} t^{-1}(t(A_0u_0, h)_H + t(A_0h, u_0)_H + t(A_0h, th)_H)$$

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(t(A_0u_0, h)_H + t(A_0h, u_0)_H + t(A_0h, th)_H)$$
$$= \lim_{t\to 0}((A_0u_0, h)_H + (A_0h, u_0)_H + t(A_0h, h)_H)$$

$$\lim_{t\to 0}((A_0u_0, h)_H + (A_0h, u_0)_H + t(A_0h, h)_H) = f'(u_0)h$$

Получаем, что

$$A\vec{h} = f'(u_0)h$$

$$f'(u_0)h = (A_0u_0, h)_H + (h, A_0^*u_0)$$

В случае, когда H – вещественное:

$$f'(u_0)h = (A_0u_0, h)_H + (A_0^*u_0, h)$$

$$(A_0 u_0, h)_H + (A_0^* u_0, h) \equiv \big((A_0 + A^*)u_0, h\big)$$

Можно написать так:

$$\vec{\nabla} f(u_0) = (A_0 + A^*)u_0$$

Производная квадратичной формы оказалась линейным оператором. Вторая производная квадратичной формы была бы постоянным оператором.

$$\big(\vec{\nabla} f\big)' = A_0 + A^*$$

Тогда третья производная будет тождественным нулём:

$$\big(\vec{\nabla} f\big)'' \equiv 0$$

Пример 3 (дифференцирование двух линейных операторов)

Пусть

$$E_1 = L(H, H) \times L(H, H)$$

$$E_2 = L(H, H)$$

$$f: (A, B) \longmapsto A \cdot B$$

Вычислим производную

$$t^{-1}\big(f(u_0 + th) - f(u_0)\big) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f(u_0)h,$$

где

$$u_0 = (A_0, B_0)$$

$$h = (\alpha, \beta)$$

Тогда

$$u_0 + th = (A_0 + t\alpha, B_0 + t\beta)$$

Вычисляем:

$$\big(f'(A_0, B_0)\big)(\alpha, \beta) = \lim_{t \to 0}\big[t^{-1}\big((A_0 + t\alpha)(B_0 + t\beta) - A_0 B_0\big)\big]$$

$$\lim_{t \to 0}\big[t^{-1}\big((A_0 + t\alpha)(B_0 + t\beta) - A_0 B_0\big)\big] = \lim_{t \to 0}[t(\alpha B_0 + A_0 \beta) + t^2 \alpha\beta]$$

$$\lim_{t \to 0}[t(\alpha B_0 + A_0 \beta) + t^2 \alpha\beta] = \alpha B_0 + A_0 \beta$$

Тогда производная:

$$\big(f'(A_0, B_0)\big)(\alpha, \beta) = \alpha B_0 + A_0\beta$$

В случае вещественного H для $f(x) \equiv (Ax, x)_H$ с $A \in L(H, H)$,

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = (A_0 + A^*)\vec{x}$$

Если оператор A самосопряжённый, то

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = 2A\vec{x}$$

Для дифференцируемой функции

$$f: H \to \mathbb{R}$$

$$f'(\vec{x})\vec{h} = \big(\vec{\nabla} f(\vec{x}), \vec{h}\big)$$

Обобщение примера 2

Найдём вторую производную для квадратичной формы.

$$\forall u \in E_1 = H$$

$$f''(u) = (f')'(u)$$

$$f''(u) \in L\big(E_1, L(E_1, E_2)\big)$$

$$(f')'(u)h_1 \in L(E_1, E_2)$$

$$((f')'(u)h_1) \in E_2$$

Лекция 6. Примеры дифференцирования функций. Часть 2

Обобщение примера 2 из предыдущей лекции (дифференцирование квадратичной формы)

Мы рассмотрели пространство значений второй производной (см. в предыдущей лекции):

$$f''(u) \in L\big(E_1, L(E_1, E_2)\big)$$

Пространство билинейных раздельно непрерывных операторов из пространства $E_1 \times E_1$ в пространство E_2

$$L_2(E_1 \times E_1, E_2) = \\ = \begin{Bmatrix} b: E_1 \times E_1 \to E_2 | : \forall x_1 \in E_1 \text{ функция } \big(E_1 \ni x_1 \longmapsto b(x_1, x_2)\big) \in L(E_1, E_2) \text{ и} \\ \forall x_2 \in E_1 \text{ функция } \big(E_1 \ni x_1 \longmapsto b(x_1, x_2)\big) \in L(E_1, E_2) \end{Bmatrix}$$

Пространство билинейных раздельно непрерывных операторов отождествим с пространством

$$L\big(E_1, L(E_1, E_2)\big)$$

<u>Замечание.</u>

Отображение

$$L\big(E_1, L(E_1, E_2)\big) \ni \lambda \longmapsto b_\lambda \in L_2(E_1 \times E_1, E_2),$$

такое что

$$b_\lambda(x_1, x_2) = \big(\lambda(x_1)\big)(x_2)$$

$b_\lambda(x_1, x_2)$ является линейной биекцией.

При этом,

$$b_{f''(u_0)} \equiv D^2 f(u_0)$$

Вычислим:

$$D^2 f(u_0; h_1, h_2) = \left(\left(f^{'}\right)^{'}(u_0) h_1\right) h_2$$

$$((f')'(u_0)h_1)h_2 = \left(\lim_{t \to 0}\left(t^{-1}\big(f'(u_0 + th_1) - f'(u_0)\big)\right)\right) h_2$$

$$\left(\lim_{t\to 0}\left(t^{-1}\big(f'(u_0+th_1)-f'(u_0)\big)\right)\right)h_2=\lim_{t\to 0}\left(\left(\left(t^{-1}\big(f'(u_0+th_1)-f'(u_0)\big)\right)\right)\cdot(h_2)\right)$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\left(\left(t^{-1}\big(f'(u_0+th_1)-f'(u_0)\big)\right)\right)\cdot(h_2)\right)=\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(f'(u_0+th_1)h_2-f'(u_0)h_2)\big)$$

$$\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(f'(u_0+th_1)h_2-f'(u_0)h_2)\big)\equiv\lim_{t\to 0}t^{-1}(2(A(u_0+th_1),h_2)_H-2(Au_0,h_2)_H)$$

$$\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(2(A(u_0+th_1),h_2)_H-2(Au_0,h_2)_H)\big)$$
$$=\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(2(Au_0+th_1,h_2)_H-2(Au_0,h_2)_H)\big)$$

$$\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(2(Au_0+th_1,h_2)_H-2(Au_0,h_2)_H)\big)$$
$$=\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(2((Au_0,h_2)_H+t(Ah_1,h_2)_H)-2(Au_0,h_2)_H)\big)$$

$$\lim_{t\to 0}\big(t^{-1}(2((Au_0,h_2)_H+t(Ah_1,h_2)_H)-2(Au_0,h_2)_H)\big)=\lim_{t\to 0}2(Ah_1,h_2)$$

После всех вычислений получаем ответ:

$$D^2f(u_0;h_1,h_2)=\left(\left(f'\right)'(u_0)h_1\right)h_2=2(Ah_1,h_2)$$

$$d^3f=0$$

Введём обозначение:

$$d^2f(u_0;h)=D^2h(x_0;h,h)$$

Для $f(x)=(Ax,x)$:

$$d^2f(u_0;h)=2(Ah,h)$$

$$2(Ah,h)=2f(h)$$

$$d^2f(u_0;h)=2f(h)$$

Результат:

Если

$$f(x)=(Ax,x),$$

то A – самосопряженный в вещественном гильбертовом пространстве. Тогда

$$f'(x)h=D^1(x;h)=2(Ax,h)$$

$$(f''(x)h_1)h_2=D^2(x;h_1,h_2)=2(Ah_1,h_2)$$

$$f''' = 0$$

Билинейный оператор, соответствующий второй производной (пример 3 из предыдущей лекции)

Для первой производной:

$$f'(A_0, B_0)(\alpha, \beta) \equiv D^1 f\left(\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$$

$$D^1 f\left(\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = A_0\beta + \alpha B_0$$

Для второй производной:

$$D^2 f\left(\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}\right) \equiv Eval((f')'(u_0)h_1; h_2)$$

$$Eval((f')'(u_0)h_1; h_2) = Eval\left(\lim_{t\to 0}\left(t^{-1}\big(f'(u_0 + th_1) - f'(u_0)\big)\right), h_2\right)$$

$$Eval\left(\lim_{t\to 0}\left(t^{-1}\big(f'(u_0 + th_1) - f'(u_0)\big)\right), h_2\right) = \lim_{t\to 0}\left(Eval\left(t^{-1}\big(f'(u_0 + th_1) - f'(u_0)\big)\right), h_2\right)$$

$$\lim_{t\to 0}\left(Eval\left(t^{-1}\big(f'(u_0 + th_1) - f'(u_0)\big)\right), h_2\right) = \lim_{t\to 0}\left(Eval\left(t^{-1}\big((A_0 + t\alpha_1)\beta_2 + \alpha_2(B_0 + t\beta_1) - (A_0\beta_2 + \alpha_2 B_0)\big)\right), h_2\right)$$

$$\lim_{t\to 0}\left(Eval\left(t^{-1}\big((A_0 + t\alpha_1)\beta_2 + \alpha_2(B_0 + t\beta_1) - (A_0\beta_2 + \alpha_2 B_0)\big)\right), h_2\right) = \lim_{t\to 0}\big(Eval\big(t^{-1}(t\alpha_1\beta_2 + t\alpha_2\beta_1)\big)\big)$$

$$\lim_{t\to 0}\big(Eval\big(t^{-1}(t\alpha_1\beta_2 + t\alpha_2\beta_1)\big)\big) = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$

В результате:

$$D^2 f\left(\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$

Тогда третья производная:

$$D^3 f\left(\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}\right) \equiv 0_{L(H,H)}$$

Следовательно, для примера 3:

$$d^2f\left(\begin{pmatrix}A_0\\B_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\right)=2\alpha\beta=2f\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

Проверка критерия дифференцируемости по Фреше

Проверим, являются ли полученные нами производные в гильбертовом пространстве производными по Фреше.

Напомним, что дифференцируемость по Фреше означает

$$\forall M\in S\ \ t^{-1}r_{f,\overrightarrow{u_0}}(t\vec{h})\rightrightarrows 0\ (t\to 0,\vec{h}\in M)$$

Это равносильно тому, что

$$\forall M\in S,\forall(t_n)\to 0,\forall(\overrightarrow{h_n}\in M):$$

$$\left(\mathbb{N}\ni n\longmapsto t_n^{-1}r_{f,\overrightarrow{u_0}}(t_n\overrightarrow{h_n})\right)\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Проверка дифференцируемости по Фреше для второго примера:

Для любой ограниченной последовательности h_n и для любой $(t_n)\to 0$ возьмём выражение:

$$t_n^{-1}\big((A(u_0+t_nh_n),u_0+t_nh_n)_H-(Au_0,u_0)-2(Au_0,t_nh_n)\big)$$

И проверим сходимость к нулю:

$$t_n^{-1}\big((A(u_0+t_nh_n),u_0+t_nh_n)_H-(Au_0,u_0)-2(Au_0,t_nh_n)\big)\overset{?}{\to}0$$

Проверяем:

$$(A(u_0+t_nh_n),u_0+t_nh_n)_H=(Au_0+t_nAh_n,u_0+t_nh_n)_H$$

$$(Au_0+t_nAh_n,u_0+t_nh_n)_H\\=(Au_0,u_0)_H+(Au_0,t_nh_n)_H+t_n((Ah_n,u_0)_H+(Ah_n,t_nh_n)_H)$$

$$(Au_0,u_0)_H+(Au_0,t_nh_n)_H+t_n((Ah_n,u_0)_H+(Ah_n,t_nh_n)_H)\\=(Au_0,u_0)_H+(Au_0,t_nh_n)_H+t_n(Ah_n,u_0)_H+t_n(Ah_n,t_nh_n)_H$$

$$t_n^{-1}\big((A(u_0+t_nh_n),u_0+t_nh_n)_H-(Au_0,u_0)-2(Au_0,t_nh_n)\big)\\=t_n^{-1}\big((Au_0,u_0)_H+(Au_0,t_nh_n)_H+t_n(Ah_n,u_0)_H+t_n(Ah_n,t_nh_n)_H\\-(Au_0,u_0)-2(Au_0,t_nh_n)\big)$$

$$t_n^{-1}\big((Au_0,u_0)_H+(Au_0,t_nh_n)_H+t_n(Ah_n,u_0)_H+t_n(Ah_n,t_nh_n)_H-(Au_0,u_0)\\-2(Au_0,t_nh_n)\big)=t_n(Ah_n,h_n)$$

Модуль скалярного произведения не превосходит произведения длин перемножаемых векторов:

$$|t_n(Ah_n, h_n)| \leq t_n\|Ah_n\|\|h_n\|$$

$$t_n\|Ah_n\|\|h_n\| \to 0$$

Мы доказали, что

$$t_n^{-1}\big((A(u_0 + t_n h_n), u_0 + t_n h_n)_H - (Au_0, u_0) - 2(Au_0, t_n h_n)\big) \to 0$$

По аналогии можно расписать и пример 3.

Лекция 7. Интегрирование

Замечание (всякое векторное пространство изоморфно некоторому пространству функций)

Замечание 1.

Всякое векторное пространство изоморфно (то есть линейно биективно) некоторому пространству функций.

Если V – векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, тогда существует линейный базис $B \subset V$, то есть

$$\forall \vec{v} \in V \ \exists! \, c^{\vec{v}}: B \to \mathbb{K}$$

Вектор $\vec{v}$ можно расписать как сумму:

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in B} c^{\vec{v}}(\vec{b}) \vec{b}$$

Понятие меры

Определение. Под обобщённой мерой на множестве M со значениями в поле $\mathbb{K}$ следует понимать линейный функционал, определённый на некотором пространстве функций, заданных на M и принимающих значения в том же поле $\mathbb{K}$.

Рассмотрим частный случай:

Обобщённую меру μ назовём теоретико-множественной, если то пространство F, на котором μ является функционалом, наделено некоторой топологией τ_F, такой что подмножество в F, состоящее из индикаторных функций является тотальным в F (тотальность означает, что линейная оболочка этих индикаторных функций в пространстве F является всюду плотной в смысле этой топологии):

$$\overline{span_{\mathbb{K}}\{f \in F : f \text{ индикаторная функция}\}} = F$$

И μ является непрерывной:

$$\mu: (F, \tau_F) \xrightarrow[\text{непрерывн.}]{} \mathbb{K}$$

Значение обобщённой меры μ на индикаторной функции $1_{A \subset M}$ обозначается

$$m_\mu(A) \equiv \mu(A) := \mu(1_{A \subset M})$$

Линейные комбинации индикарторных функций (индикаторов) называют простыми функциями.

Системы множеств, подходящие для теоретико-множественных мер. Теоретико-множественное кольцо

Рассмотрим класс подмножеств A, такой что

$$\{A: A \subset M, 1_{A\subset M} \in F\}$$

Введём обозначение:

$$\mathcal{m}_F = \{A: A \subset M, 1_{A\subset M}\}$$

Это класс множеств, измеримых относительно μ или относительно m_μ.

Будем называть

$$m_\mu: \mathcal{m}_F \to \mathbb{K}$$

аддитивной функцией множества, отвечающей μ или аддитивной мерой.

Если

$$A, B \in \mathcal{m}_F$$

$$A \cap B = \emptyset$$

То индикатор их объединения равен сумме индикаторов:

$$1_{A\cap B} = 1_A + 1_B$$

Тогда

$$m_\mu(A \cap B) = \mu(1_{A\cap B})$$

$$\mu(1_{A\cap B}) = \mu(1_A + 1_B)$$

$$\mu(1_A + 1_B) = \mu(1_A) + \mu(1_B)$$

$$\mu(1_A) + \mu(1_B) = m_\mu(A) + m_\mu(B)$$

Рассмотрим случай, когда

$$A \in \mathcal{m}_F \ni B \subset A$$

Тогда

$$1_{A\setminus B} = 1_A - 1_B$$

$$m_\mu(A\setminus B) = m_\mu(A) - m_\mu(B)$$

Если F замкнуто относительно поточечного умножения пар функций,

$$1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B,$$

то

m_F замкнуто относительно пересечения.

Определение. Система множеств называется теоретико-множественным кольцом, или кольцом множеств, если она содержит пустое множество и замкнута относительно бинарных операций взятия разности и объединения. Тогда автоматически

$$A \cap B = (A \cup B) \backslash \big((A \backslash B) \cup (B \backslash A) \big)$$

Аддитивная мера на системе множеств. Мера на системе множеств. Значение меры

Пусть S – система множеств и

$$m: S \to \mathbb{K}$$

Тогда m называется аддитивной мерой на S, если

$$\forall A \in S \;\; \forall (n,k,j) \in \mathbb{N} \, \forall (A_1, \dots, A_n) \in S^n$$

$$\left(\big(1 \le k < j \le n \Rightarrow A_j \cap A_k = \emptyset\big) \& \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \right) \right) \Rightarrow$$

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)$$

Мерой на системе множеств назовём любую функцию, определенную на этой системе.

Значения меры принимаются: $\mathbb{K}$, $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{C}$, линейные пространства, линейные локально выпуклые пространства, аддитивные полугруппы

Примеры

Пусть

$$S = \{(a,b] : -\infty < a \le b < +\infty\}$$

$$m\big((a,b]\big) = b - a$$

$m\big((a,b]\big)$ – аддитивная мера.

Пусть S – кольцо. Множество M:

$$M \supset \bigcup S$$

$$m: S \ni A \longmapsto 1_{A\subset M} \in \mathbb{K}^M$$

m – аддитивная мера.

<u>Замечание.</u>

Пусть S – теоретико-множественное кольцо.

Если m – аддитивное отображение из теоретико-множественного кольца в поле:

$$m: S \to \mathbb{K}$$

Тогда существует обобщённая мера μ, такая что

$$m_\mu = m$$

Рассмотрим

$$M: \supset \cup S$$

$$span_{\mathbb{K}}\{1_{A\subset M}: A \in S\} = F$$

$$m_F = S$$

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}\right) := \sum c_k m(A_k)$$

В этом случае:

$$m_\mu(A) = \mu(1_A)$$

$$\mu(1_A) = mA$$

Значение функционала

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}\right) := \sum c_k m(A_k)$$

называется интегралом:

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} c_k 1_{A_k}\right) = \int_M \left(\sum c_k 1_{A_k}\right)(x) m(dx)$$

$$\sum c_k m(A_k) = \int_M \left(\sum c_k 1_{A_k}\right)(x) m(dx)$$

Для любой простой f

$$\mu(f) = \int_M f(x) m(dx)$$

Лекция 8. Типы интегралов. Часть 1

Функция множества $l(1.)$. Свойство аддитивности. Интеграл

Любой линейный функционал представляет из себя интеграл, рассмотрим некоторые из них, в частности, интеграл Лебега.

Рассмотрим линейные функционалы, определённые в пространстве функций.

Пример.

Если F – некоторое пространство функций на множестве M, содержащее индикаторные функции вида:

$$\{1_{A\subset M}, \qquad A \in K\}$$

И L – линейный функционал на F, тогда, если

$$A_1, A_2 \in K,$$

так что

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

то:

$$1_{A_1 \cup A_2} \in F,$$

$$l\left(1_{A_1 \sqcup A_2}\right) = l\left(1_{A_1}\right) + l\left(1_{A_2}\right)$$

Доказательство следует из того, что индикатор объединение есть сумма индикаторов, а также из линейности линейного функционала.

Дополнение: если, к тому же,

$$1_{M\subset M} \in F,$$

то:

$$\exists l\left(1_{M\setminus A}\right) = l(1_M) - l(1_A)$$

Следствие.

Функция множества:

$$l(1.):\ \{A \subset M:\ 1_A \in F\} \ni A \to l(1_A) \equiv \mu_L(A)$$

Она обладает свойством аддитивности.

Определение. Если S – семейство множеств μ:

$$M \to [0, +\infty]_{\ddot{R}} \text{ или абелевой полугруппе } (P, +)$$

При этом, μ такая, что:

$$((\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (A_1, \dots, A_n) \in S \times S \times \dots \times S:$$

$$\forall A \in S, \text{т.ч.}\, A_j \cap A_k = \emptyset, \text{при } j \neq k \text{ и } A = \coprod_{j=1}^{n} A_j) \Rightarrow \mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)), \text{то}$$

μ называется аддитивной мерой на S, причём в случае $P = [0, +\infty]$ также называется неотрицательной.

Если в системе множеств $S \ni \bigcup S$ определены операции:

$$\cup : S \times S \to S$$

$$\backslash : S \times S \to S$$

То есть S – алгебра с единицей E_S, то $\forall$ аддитивной меры $\mu: S \to \mathbb{K}$(поле): на линейной оболочке индикаторных функций $\{1_{A \subset E_S} : A \in S\}$ $\exists!$ Линейный функционал, такой, что:

$$l(1_A) = \mu(A)$$

Оказывается, что по значениям меры μ можно восстановить линейный функционал или линейную оболочку индикаторных функций. Такой линейный функционал называется интегралом.

Следствие.

Если имеется аддитивная мера, аналогичной формулой можно породить линейный функционал по значениям аддитивной меры.

Отметим два главных свойства интегралов:

1) Интегрирование должно быть определено на линейном пространстве функций и задавать функционал.

2) Если интегрирование, как линейный функционал, имеет индикаторную функцию в области какого-то подмножества, то на индикаторной функции линейный функционал должен совпасть со значением меры, по которой считается рассматриваемое интегрирование.

Схема интеграла Лебега

Пусть S – σ-алгебра с единицей - 1_{E_S} (то есть S – алгебра, $\cup S = E_S$ и $\forall (A_1, A_2, \dots) \in S^{\mathbb{N}}$ $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S$), а также:

$$\mu\colon\ S \xrightarrow{\text{адд}} [0, +\infty],$$

причём σ-аддитивная, счётно-аддитивная.

Помимо этого:

$$\forall (A_1, A_2, \dots) \in S^{\mathbb{N}},$$

таких что

$$A_j \cap A_k = \emptyset,$$

$$\text{при } k \neq j\colon\ \mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Тогда простейшими интегрируемыми функциями назовём индикаторные функции (для тех $A \in S$, для которых $\mu(A) < \infty$):

$$1_{A \subset E_S}\colon\ E_S \to \mathbb{R}$$

И линейный функционал l_μ, такой что

$$l_\mu(1_{A \subset E_S}) = \mu(A)$$

называется интегралом от 1_A от μ и обозначают его, как:

$$l_\mu(1_A) \equiv \int 1_A(x)\, \mu(dx)$$

В некоторых источниках также обозначается, как:

$$l_\mu(1_A) \equiv \int 1_A(x)\, d\mu(x)$$

Однако, последнее обозначение конфликтует с рядом других и использовать его мы не будем. Вообще говоря, интеграл в данном случае рассматривается определённый на области E_S, неопределённый интеграл Лебега также существует, его рассмотрение будет позже.

<u>Определение</u>: если в системе множеств определены операции: бинарная “\”, счётного пересечения и бинарное объединение, то такая система называется δ-кольцо множеств.

Простейшие интегрируемые функции и их свойства

Линейные комбинации простейших интегрируемых функций назовём простыми интегрируемыми функциями, и на таких функциях f:

$$l_\mu(f) = \int\limits_{E_S} f(x)\ \mu(dx)$$

$$\int\limits_{E_S} f(x)\ \mu(dx) = \int f\mu$$

$$\int f\mu =< \mu, f >=< f, \mu >=< l_\mu, f >=< f, l_\mu >= (\mu, f)^{**}$$

<u>Замечание</u>: $f: E_S \to \mathbb{R}$ является простой интегрируемой $\Leftrightarrow$

$$\big((\forall a \in \mathbb{R}\ \ f^{-1}(-\infty, a] \in S)^* \ \&\ (f(E_S) = Ran\, f - \text{конечно})\ \&\ (\mu(f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < +\infty)\big)$$

$\forall$ системы множеств $S \subset \mathcal{T}(E)$ $\exists$ наименьшая среди алгебр - a с единицей E, такая что $a \supset S$ и $\exists$ наименьшая среди σ-алгебр – Σ ($\alpha_E(S)$ и $\mathcal{I}_E$(S) соответственно)

<u>Замечание</u>: из свойства * вытекает, что

$$\forall B \in \sigma_{\mathbb{R}}(\{(-\infty, a]:\ a \in \mathbb{R}\}) \equiv \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\tau_{\mathbb{R}}):$$

$$f^{-1}(B) \in S$$

Вместо $\sigma_{\cup S}(S)$ будем писать $\sigma(S)$.

<u>Определение</u>. Если S_1 и S_2 – σ-алгебры с единицами, соответственно, E_1, E_2, то:

$$\forall f: E_1 \to E_2,$$

таких что

$$\forall B_2 \in S_2\ \ f^{-1}(B_2) \equiv \{x \in E_1: f(x) \in B_2\} \in S_1$$

Такая f называется (S_1, S_2)-измеримой.

Сформулируем ещё одно свойство измеримых функций:

<u>Замечание</u>.

Если f_1, f_2 $(S, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$- измеримые функции $E_S \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f_1 + \beta f_2$ также измерима и, если

$$\forall x \in E_S$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x) \in \mathbb{R},$$

то f_∞ также измерима.

Интеграл от неотрицательной простой функции

Введём следующее обобщение. Рассмотрим неотрицательные простые функции.

Замечание.

Так как μ – неотрицательна, то $\forall$ простой f:

$$E_S \to [0, \infty)_{\mathbb{R}}$$

$$\int f\mu \geq 0$$

Следствие: f_1, f_2 простые и

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow f_2 - f_1 \geq 0 - \text{простая} \Rightarrow$$

$$\int (f_2 - f_1)\mu \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int f_2\mu \geq \int f_1\mu$$

(“монотонность интеграла”)

Определение. Неотрицательной интегрируемой функцией называется

$$\forall f: E_S \to [0, \infty),$$

такая что $\exists$ последовательность $f_1, f_2, \dots$ простых неотрицательных $(E_S \to \mathbb{R})$ таких, что

$$\text{а) } \forall x \in E_S \;\; f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

$$\text{б) } \forall x \in E_S \;\; f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$$

$$\text{в) } \sup_n \int f_n\mu = I < +\infty$$

При этом,

$$I = \int f\mu$$

Замечание.

Если f является $(S, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-измеримой, то

$$f_+(x) = \max(f(x), 0)$$

так же измеримая функция,

$$f_-(x) \coloneqq \big(-f(x)\big)_+$$

$$\big(-f(x)\big)_+ = \max(-f(x), 0)$$

так же измеримая функция

$$f = f_+ - f_-,$$

$$f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|_{\mathbb{R}}$$

Замечание.

Определение свойства быть неотрицательной интегрируемой функцией – корректно, как и определение интеграла от такой функции по неотрицательной σ-аддитивной мере.

Определение. Вещественной интегрируемой функцией называется разность неотрицательных интегрируемых функций. Если f_+ и f_- интегрируемые неотрицательные функции, то

$$\int (f_+ - f_-)\mu \coloneqq \left(\int f_+\mu\right) - \left(\int f_-\mu\right)$$

Следствие.

Определение свойства быть вещественной интегрируемой функцией корректно, причём и определение интеграла $\int f\mu$ для таких функций также корректно, и, продолжая использовать цепочку обозначений (**) имеем линейность функционала:

$$l_\mu(f) \equiv \int f\mu$$

на множестве всех линейных интегрируемых функций, которое является линейным пространством, причём l_μ – непрерывный функционал относительно полунормы:

$$p_\mu(f) = \int |f(x)|\mu(dx)$$

Если f, g – вещественные интегрируемые по μ функции, то $f + ig$ назовём $\mathbb{C}$-значной интегрируемой по μ функцией:

$$\int (f + ig)\mu \coloneqq \left(\int f\mu\right) + i\left(\int g\mu\right)$$

Следствие.

На пространстве всех $\mathbb{C}$-значных интегрируемых по μ функций функционал $\int f\mu$ является комплексно-линейным и непрерывным относительно нормы:

$$q_\mu(f) = \int |f(x)|_{\mathbb{C}}\, \mu(dx)$$

Лекция 9. Типы интегралов. Часть 2

Повторение материала предыдущей лекции

На предыдущей лекции было введено понятие интеграла по мере, которая принимает конечные неотрицательные значения или бесконечно большие, то есть:

$$S - \sigma - \text{алгебра},$$

$$\mu: S \to [0, +\infty]_{\bar{R}_+} (*)$$

Также было введено определение простейшей функции:

$$f - \text{простейшая по мере } \mu \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in S,$$

такая что

$$\mu A < \infty$$

$$f \equiv 1_{A \subset \cup S}: x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in (\cup S) \backslash A \end{cases}$$

И следующее утверждение:

$$f - \text{простые} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \text{простейшие относительно } \mu\ f_1, \dots, f_n \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n:$$

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \Rightarrow$$

$$l_\mu(f) \equiv \left(\int_{\cup S} f(x)\mu(dx) = \int f\mu =< l_\mu, f > = < \mu, f > \right) =$$

$$= \sum c_k \int f_k \mu,$$

Здесь

$$\int f_{A \subset \cup S} \mu = \mu(A)$$

При этом, пока все функции подразумеваются вещественнозначными:

$$1: \cup S \to \mathbb{R},$$

$$E_S \equiv \cup S$$

Построение интегралов от неотрицательных функций

Напомним соответствующее определение:

$$f - \text{неотрицательна } \mu - \text{интегрируемая} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{последовательность простейших } 0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \underset{p.w.}{\uparrow} f$$

$$\text{и } \int f\mu \coloneqq \lim_n \int f_n\mu$$

$$\lim_n \int f_n\mu = \sup_n \left(\int f_n\mu\right) < \infty$$

Для простых интегрируемых:

$$f - \mu - \text{интегрируема } \big(\Leftrightarrow f \in L_{1a}(\mu)\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f = f_+ - f_-,$$

$$\text{где } f_+, f_- - \mu - \text{интегрируемы}$$

Интегралы в случае пополнения σ-алгебр

Напомним определение полноты:

$$S \text{ называется полной по } \mu, \text{если}$$

$$\big((\forall A \in S, \mu A = 0, B \subset A) \Rightarrow B \in S\big)$$

В случае пополнения σ-алгебр интегралы от измеримых интегрируемых функций относительно ещё не пополненной меры μ сохранят своё значение, то есть, при пополнении от старых функций по новой мере интегралы останутся прежними.

Интегралы от неограниченных функций

Интеграл по измеримому множеству A определяется следующим образом:

$$\int\limits_A f\mu \coloneqq \int \left(1_{A\subset E_S} f\right)\mu,$$

$$\text{если } f \in L_{1a}(\mu) \text{ и } A \in S$$

$$\text{Если } (f(A) \subset \{-\infty, +\infty\},\ \ \mu A = 0) \Rightarrow$$

$$\int\limits_A f\mu = 0$$

$$\text{Если } f: E_S \setminus A \to \bar{R}, \mu A = 0,$$

такая что

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_S \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases} \text{ интегрируема,}$$

то

$$\int f\mu = \int \tilde{f}\mu$$

Интеграл от комплексных функций

Также произведём следующее обобщение:

$$\int (f_1 + if_2)\mu = \left(\int f_1\mu\right) + i\left(\int f_2\mu\right)$$

После обобщения имеем:

$$\int f\mu = l_\mu(f): L_{1a}(\mu) \to \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}$$

$$f \in L_{1a}(\mu; \mathbb{C}) \text{ или } L_{1a}(\mu; \mathbb{R})$$

Для произведения Лебега имеем:

$$f\mu \equiv f(x)\mu(dx):\ S \ni A \to \int_A f\mu$$

Для данной новой функции имеем свойства:

$$f\mu\ \sigma - \text{аддитивная}$$

$$\mu A = 0 \Rightarrow$$

$$(f\mu)(A) = 0$$

Для меры имеем следующее определение:

$$\text{Вещественная мера } \nu: S \to \mathbb{R} \text{ является абсолютно непрервной относительно } \mu$$

$$(\text{обозначение } \nu \ll \mu), \text{если } \exists f \in L_{1a}(\mu), \text{т. ч. } \nu = f\mu$$

Теорема: $(\nu \ll \mu) \Leftrightarrow \forall A \in S\ \mu A = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

Также справедливо:

$$\mu A_n \to 0 \Rightarrow \nu A_n \to 0$$

Таким образом, получили функции множества, которые, вообще говоря, знакопеременны. Сформулируем полезные факты, вытекающие из введённого выше.

Заметим, что введённое ранее разложение $f = f_+ - f_-$ - не единственно, однако можем ввести:

$$f_{+\min}(x) = \max(f(x), 0),$$

$$f_{-\min}(x) = \max(-f(x), 0),$$

$$f_{-\min} = (-f)_{+min}$$

При этом:

$$f = f_{+\min} - f_{-min},$$

$$|f| = f_{+min} - f_{-min}$$

<u>Теорема</u>: $f \in L_{1a}(\mu; \mathbb{R}) \Rightarrow f_{+min} \in L_1(\mu; \mathbb{R})$.

Аналогичное замечание справедливо также и для f_{-min}.

Рассмотрим разложение меры. Пусть ν – σ-аддитивная S → ℝ ⇒

1) $\nu(S)$ ограничена в $\mathbb{R}$ и $\|\nu\| \coloneqq \{|\nu A_1| + |\nu A_2|: A_1 \in S \ni A_2,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset\}$ (полная) вариация

2) $\exists A_{+\nu} \in S, \exists A_{-\nu} \in S,$ т. ч.

$$a)\ (A \in S, A \subset A_{+\nu}) \Rightarrow \nu A \geq 0$$

$$б)\ (A \in S, A \subset A_{+\nu}) \Rightarrow \nu A \leq 0$$

$$в)\ A_{+\nu} \cap A_{-\nu} = \emptyset,$$

$$A_{+\nu} \cup A_{-\nu} = E_S$$

Свойства интеграла

Сформулируем две наиболее используемые теоремы интеграла Лебега.

<u>Теорема (Беппо Леви)</u>. Если

$$f_1 \underset{p.w.}{\leq} f_2 \underset{p.w.}{\leq} f_3 \leq \cdots$$

такие что

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in L_{1a}(\mu)$$

$$\sup_n \left(\int f_n \mu \right) < \infty,$$

то

$$\exists A \in S\ \mu A = 0$$

такой что $\forall x \in (E_S \backslash A)$ ($\mu -$ полная мера)

$$\lim_n f_n(x) = f_\infty(x) \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}_\infty \in L_{1a}$$

$$\int f_\infty \mu = \lim \int f_n \mu$$

Теорема (Лебега) “о мажорируемой сходимости”, Для (*), если

$$\forall n\ f_n \in L_{1a}(\mu), \exists g \in L_{1a}(\mu),$$

такой что для множества почти всех x

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

и

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R},$$

то

$$\int \left(\lim_n f_n(x) \right) \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \mu \right)$$

Теорема о замене переменной

Определение. Если в ситуации (*)

$$\mu E_S = 1,$$

то μ называется вероятностной мерой.

Теорема. Если в ситуации (*)

$$\phi: E_S \to E_2,$$

S_2 – σ-алгебра с единицей E_2, ϕ измерима:

$$\forall B \in S_2 \; \phi^{-1}(B) \in S, \mu_2 = \mu \cdot \phi^{-1},$$

то

$$\forall g_2 \in L_{1a}(\mu_2) \int_{E_2} g_2(y)\,\mu_2(dy) = \int_{E_1} g_2\big(f(x)\big)\,\mu(dx)$$

$$(\text{"}y \equiv f(x), \qquad \phi^{-1}(dy) \equiv dx\text{"})$$

Если Ω множество $\Omega = \mathfrak{A}$ σ-алгебра, $\mathbb{P}\colon \mathfrak{A} \to [0,1]$ – вероятностная мера, измеримое отображение – $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (случайная величина) $\Rightarrow \mathbb{P} \cdot \xi^{-1}\colon B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ (мера распределения значений случайной величины ξ).

Лекция 10. Квантование наблюдаемых величин

Наблюдаемая на стандартном фазовом пространстве. Квантование наблюдаемой величины (пример)

Наблюдаемая на стандартном фазовом пространстве

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = Q \times P$$

– это функция $E \to \mathbb{R}$ класса $C^{(\infty)}$.

Это пространство будем рассматривать как евклидово пространство.

Q – множество координат,

P – множество импульсов.

Пример.

Рассмотрим частицу в трёхмерном пространстве:

$$V(\vec{q}) + \frac{\vec{p}}{2m} = f(\vec{q}, \vec{p})$$

$V(\vec{q})$ – потенциал.

Это уравнение описывает движение материальной точки с импульсом $\vec{p}$ в потенциальном поле $V(\vec{q})$.

Стандартное квантование по Шредингеру (с помощью псевдодифференциальных операторов с символом Вейля)

$\hat{f}$ - обозначение квантовой наблюдаемой величины, отвечающей классической величине f.

Оператор $\hat{f}$ действует в пространстве

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{Leb}^n, \mathbb{C}) =: H$$

В $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \prod_{j=1}^{n} \left(a_j, b_j\right] \quad (-\infty < a \leq b < +\infty)$$

$$\mathcal{Leb}^n\left(\prod_{j=1}^{n} \left(a_j, b_j\right]\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(b_j - a_j\right)$$

$$B(\mathbb{R}^n) = \sigma_{\mathbb{R}^n}\left(\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(a_j, b_j\right] : \forall j \in \{1, \dots, n\} \;\; \forall \prod_{j=1}^{n}\left(a_j, b_j\right] \;\; (-\infty < a \leq b < +\infty)\; \mathcal{Leb}^n\left(\prod_{j=1}^{n}\left(a_j, b_j\right]\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(b_j - a_j\right)\right\}\right)$$

Рассмотрим внешнюю меру дополнения для ограниченных множеств.

Зафиксируем параллелепипед P и рассмотрим в нём подмножество M (рис. 10.1).

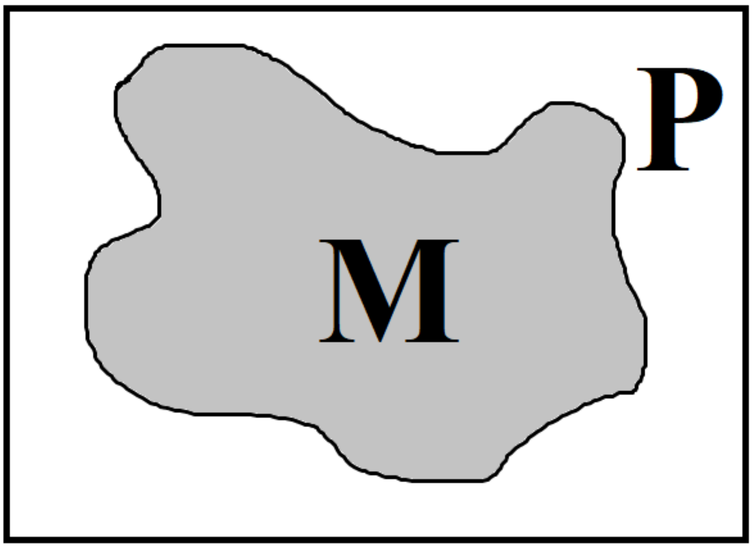

Рис. 10.1

Тогда

$$\mathcal{Leb}^{n*} M \leq \mathcal{Leb}^n P$$

$$\mathcal{Leb}^n_{*P} M = \mathcal{Leb}^n P - \mathcal{Leb}^{n*}(P \setminus M)$$

Если множество N неограниченно, то

$$\sup_K \mathcal{Leb}^n\left(N \cap \left(\prod_{j=1}^{n}(-K, K)\right)\right)$$

Класс множеств, измеримых относительно меры Лебега обозначим как $\mathcal{m}^n$.

$$Dom(\mathcal{Leb}^n) = \mathcal{m}^n$$

Будем рассматривать функции

$$\left\{\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \text{такие что } \begin{matrix} 1)\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\ \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{m}^n \\ 2)\ \text{функция } \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \longmapsto |\varphi(\vec{x})|^2_{\mathbb{C}} \text{ интегрируема по } \mathcal{Leb}^n \end{matrix}\right\}$$

$$\varphi^{-1}(B) \equiv \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\vec{x}) \in B\}$$

Факторизация:

$$\left\{\varphi_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \text{такие что } \begin{matrix} 1)\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\ \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{m}^n \\ 2_0)\ \text{функция } \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \longmapsto |\varphi_0(\vec{x})|^2_{\mathbb{C}} \text{ интегр. по } \mathcal{Leb}^n,\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_0(\vec{x})|^2_{\mathbb{C}}\, \mathcal{Leb}^n(dx) = 0 \end{matrix}\right\}$$

Будем обозначать класс эквивалентности как $\widetilde{\varphi_\iota}$.

Пусть

$$(\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2})_H := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi_1(\vec{x}), \overline{\varphi_2(\vec{x})}\right) \mathcal{Leb}^n(dx)$$

В обозначениях Дирака:

$$(\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2})_H := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi_1(\vec{x}), \overline{\varphi_2(\vec{x})}\right) \mathcal{Leb}^n(dx)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi_1(\vec{x}), \overline{\varphi_2(\vec{x})}\right) \mathcal{Leb}^n(dx) = \langle \widetilde{\varphi_2} | \widetilde{\varphi_1} \rangle$$

Сложение классов эквивалентности:

$$\widetilde{\varphi_1} + \widetilde{\varphi_2} = \varphi_1 \widetilde{+ \varphi_2}$$

$$\widetilde{\varphi_1} + \lambda\widetilde{\varphi_2} = \varphi_1 \widetilde{+ \lambda}\varphi_2$$

Теорема Планшереля

Пространство Шварца комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \{\varphi_1 + i\varphi_2 : \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \forall N \in \mathbb{N}\ \forall K \in \mathbb{N}_0\ \forall \vec{j} = (j_1, \dots, j_k) \right.$$

$$\left. \in (\{1, \dots, n\})^K \ \left(\dots \left(\left(\varphi'_{\overrightarrow{e_{J_1}}} \right)'_{\overrightarrow{e_{J_2}}} \right)' \dots \right)_{\overrightarrow{e_{J_k}}} (\vec{x})(1 + \|\vec{x}\|^{2N}) \right\}$$

Обозначим:

$$\left(\dots \left(\left(\varphi'_{\overrightarrow{e_{J_1}}} \right)'_{\overrightarrow{e_{J_2}}} \right)' \dots \right)_{\overrightarrow{e_{J_k}}} = \varphi^{(\vec{j})}$$

Эта функция ограничена по переменной x.

Стандартный оператор преобразования Фурье для таких функций:

$$\mathcal{F}^{\pm}_{\vec{q} \to \vec{p}} : \mathcal{S}(Q, \mathbb{C}) \to \mathcal{S}(P, \mathbb{C})$$

$$\left(\mathcal{F}^{\pm}_{\vec{q} \to \vec{p}} \big(\varphi(\vec{q}) \big) \right)(\vec{p}) = \int_Q e^{2\pi i (\vec{q}, \vec{p})_{\mathbb{R}^n}} \varphi(\vec{q}) \mathcal{Leb}^n(d\vec{q})$$

Оба эти преобразования задают биекцию.

Все такие функции класса $\mathcal{S}$ не только абсолютно интегрируемы по мере Лебега, но и квадратично интегрируемы.

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\left\|\widetilde{\mathcal{F}^{\pm}\varphi}\right\|_H = \|\varphi\|_H$$

Если f – многочлен на $E \cong \mathbb{R}^{2n}$ и $\varphi \in \mathcal{S}$, тогда

$$\big(\hat{f}\varphi\big)(\vec{x}) = \left(\mathcal{F}^{+}_{\vec{p}\to x}\left(\mathcal{F}^{-}_{\vec{q}\to\vec{p}}\big(f(\vec{q},\vec{p})\varphi(\vec{q})\big)\right)\right)(\vec{x})$$

Лекция 11. Квантование по Шредингеру. Часть 1

Симплектическое локально выпуклое пространство

Определение (О. Г. Смолянов). Симплектическое локально выпуклое пространство – это вещественное локально выпуклое пространство E вместе с некоторым линейным непрерывным оператором

$$I: E' \to E,$$

где E' наделено топологией $\tau(E', E)$ и

$$I^*: E' \to E'' \equiv E$$

(I^* - оператор, сопряженный оператору I).

Также должны выполняться условия

$$\forall l \in E \;\; \big(J(x)\big)(l) = l(x)$$

$$I^* = J \circ I$$

Гамильтонова система на симплектическом локально выпуклом пространстве

Гамильтонова система на симплектическом локально выпуклом пространстве (E, I) задаётся функцией

$$\mathcal{H} \in C^{(\infty)}(E, \mathbb{R})$$

$$E := Q \times P,$$

где $Q \cong P$ – гильбертово сепарабельное пространство,

Q – конфигурационное пространство,

P – пространство импульсов.

Q' будет отождествляться с P, а P' будет отожествляться с Q:

$$Q' \cong P$$

$$P' \cong Q$$

Отображение I определяется выражением

$$I: P \times Q \to Q \times P: (p, q) \longmapsto (q, -p)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_Q \\ -1_P & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$$

Классическая динамика, порождаемая гамильтоновой системой $(E, I, \mathcal{H})$ – это множество траекторий

$$z: \mathbb{R} \to E$$

Эти траектории дифференцируемы и

$$z'(t) = I\mathcal{H}'\big(z(t)\big)$$

E называется фазовым пространством.

Уравнением Гамильтона для такой системы называется уравнение

$$z'(t) = I\mathcal{H}'\big(z(t)\big)$$

относительно функции z, определенной на отрезке вещественной прямой и принимающей значения в E.

Классическое уравнение Шрёдингера является уравнением Гамильтона некоторой гамильтоновой системы; роль фазового пространства здесь играет овеществление гильбертова пространства чистых состояний квантовой системы.

Скобка Пуассона

Приведенная константа Планка:

$$\hbar > 0$$

$\forall \hbar > 0$ скобка Пуассона на (E, I) – это отображение

$$C^{(\infty)}(E) \times C^{(\infty)}(E) \to C^{(\infty)}(E)$$

Это пространство гладких классических наблюдаемых.

Скобки Пуассона:

$$(f, g) \mapsto \Big(\{f, g\}_{I,\hbar}(\vec{z}) = \hbar f'(\vec{z})\left(I\big(g'(\vec{z})\big)\right)\Big)$$

$$\forall z \in E$$

Если мы снабжаем наше пространство скобками Пуассона, то

$$\mathcal{P} := \big(C^{(\infty)}(E), \{\,,\}_{I,h}\big)$$

$\mathcal{P}$ – алгебра Пуассона гладкой классической наблюдаемой.

Алгеброй Пуассона с параметром $\hbar$ на симплектическом пространстве называется векторное пространство $\mathcal{P}$ всех комплекснозначных непрерывных цилиндрических полиномов f на E, наделенное билинейной операцией умножения $\{\,,\}_{I,h}$.

Алгеброй Гейзенберга называется подалгебра алгебры Пуассона, порождаемая всеми линейными функционалами из этой алгебры.

Квантование по Шредингеру

Определение. Квантованием по Шредингеру с параметром $\hbar$ симплектического пространства $(Q \times P, I_{Q\times P})$ называется комплексно линейное отображение $\mathbb{C}$ пространства $\mathcal{P}(E,\mathbb{C})$ в пространство нормальных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H над $\mathbb{C}$ (пространство чистых состояний квантового аналога исходного фазового пространства), плотное подпространство в H состоит из комплекснозначных функций на Q, которое обладает следующими свойствами:

1) вещественные полиномы переходят в самосопряженные операторы:

$$f \longmapsto \hat{f}$$

2) существует некоторое пространство $S(Q)$ всюду бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Q, инвариантное относительно умножения на цилиндрические непрерывные полиномы и относительно изометрических в Q замен переменных, является плотным в пространстве H

$$S(Q) \subset H \cap C^{(\infty)}(Q,\mathbb{C})$$

Если $j: Q \to Q$ – изометрическое, то

$$\forall \varphi \in S(Q) \;\; \varphi \circ j \in S(Q)$$

Это есть свойство инвариантности относительно изометрических в Q замен переменных.

Инвариантность относительно умножения на цилиндрические непрерывные полиномы:

$$\forall \varphi \in S(Q)$$

$$\forall m \; (m - \text{ многочлен на} \mathbb{R}^n)$$

$$\forall l_1, \dots, l_n \in Q^{\wedge\prime}$$

функция

$$\left(Q \ni q \mapsto \varphi(q) \times m\big(l_1(q), \dots, l_n(q)\big)\right)$$

является элементом $S(Q)$

3) сужение скалярного произведения пространства H на $S(Q) \times S(Q)$ является инвариантным относительно изометрических в Q замен переменных:

$$\forall \varphi, \psi \in S(Q)\ \forall \text{ изометр. } j: Q \xrightarrow{m} Q$$

$$(\varphi \circ j, \psi \circ j)_H = (\varphi, \psi)_H$$

4) если $f \in \mathcal{P}$, причем

$$\forall (q, p) \in Q \times P$$

$$f(q, p) = m(q)$$

и m – комплекснозначный полином на Q, то

$$(\hat{f}\psi)(q) = m(q)\psi(q)$$

для всех $q \in Q$ и $\psi \in S(Q)$

$$\forall f \in \mathcal{P}(Q \times P, \mathbb{C})$$

$$\overline{\hat{f}|_{S(Q)}} = \hat{f}$$

5) если

$$f(q, p) = \prod_{j=1}^{n} p(q_j)$$

для всех $(q, p) \in Q \times P$, где $n \in N$ и $q_j \in Q$, то

$$(\hat{f}\psi)(q) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n D^n\psi(q; q_1, \dots, q_n)$$

для всех $\psi \in S(Q)$.

Здесь $D^n\psi(q)$ – производная n-го порядка функции ψ в точке q.

Определение. Если A – линейный оператор из $D(A) \subset H$ в H, $D(A)$ – плотное комплексное линейное подпространство в H, то

$$\forall \vec{h} \in H \ \left(\vec{h} \in D(A^*) \Leftrightarrow \text{линейный функционал } D(A) \ni \vec{x} \longmapsto \left(A\vec{x}, \vec{h}\right)_H \text{ непрерывный}\right),$$

При этом

$$\left(A\vec{x}, \vec{h}\right)_H = \left(\vec{x}, A^*\vec{h}\right)_H$$

A называется нормальным, когда

$$D(A^*) = D(A)$$

$$D(A) \subset A\big(D(A)\big)$$

$$A\big(D(A)\big) = A^*\big(D(A)\big)$$

$$A^*A = AA^*$$

Обобщённая мера

Пусть M – непустое множество, обобщённой мерой на M называется произвольный линейный функционал на некотором пространстве над $\mathbb{C}$ заданных на M комплекснозначных функций.

Если F – пространство таких пробных функций, $\varphi \in F$ и $\mu: F \to C$ – обобщенная мера, то вместо $\mu(\varphi)$ будут использоваться символы

$$\int M\varphi(x)\mu(dx)$$

$$\int \varphi(x)\mu(dx)$$

$$\int \varphi\mu$$

Обобщенная мера μ называется неотрицательной, если она принимает неотрицательные значения на неотрицательных пробных функциях.

Пусть

$$g_1: Q \to \mathbb{R},$$

такая что

$$\forall q \ \ g_1(q) = e^{-\pi\cdot\|q\|^2} = e^{-(2\pi)\frac{\|q\|^2}{2}}$$

Пусть

$$\mathcal{K} = \{K \subset Q, K - \text{линейное подпространство}, \dim_{\mathbb{R}} K < \infty\}$$

Пусть $\mathcal{Leb}_K$ – стандартная полная мера Лебега на евклидовом пространстве K.

Лекция 12. Квантование по Шредингеру. Часть 2

Ортогональный проектор

На прошлой лекции было сформулировано несколько условий:

Пусть

$$g_1 : Q \to \mathbb{R},$$

такая что

$$\forall q \;\; g_1(q) = e^{-\pi \cdot \|q\|^2} = e^{-(2\pi)\frac{\|q\|^2}{2}}$$

Пусть

$$\mathcal{K} = \{K \subset Q, K - \text{линейное подпространство}, \dim_{\mathbb{R}} K < \infty\}$$

Пусть $\mathcal{Leb}_K$ – стандартная полная мера Лебега на евклидовом пространстве K.

В дополнение к ним: пусть P_K – ортогональный проектор $Q \to K$ на K, то есть для любого ортонормированного базиса $\{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}\}$ в K

$$P_K(\vec{q}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\vec{q}, \overrightarrow{e_j}\right) \cdot \overrightarrow{e_j}$$

Операция ортогонального проектирования на ортогональное дополнение к K:

$$P_{K^\perp} = id_Q - P_K,$$

где

$$K^\perp = \left\{\vec{q} \in Q : \forall \vec{x} \in K \;\; (\vec{q}, \vec{x})_Q = 0\right\}$$

Для каждого такого K определяем пространство $C_1(K, \mathbb{C})$ - пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на K.

$$C_1(K, \mathbb{C}) = \{\mathcal{k} \in C(K, \mathbb{C}) : \forall \text{ многочлена } m : K \to \mathbb{C} \;\; k \cdot m \text{ ограничена}\}$$

Введём пространство:

$$C_{1,K}(Q) := \{(\mathcal{k} \circ P_K)(g_1 \circ P_{K^\perp}) : \mathcal{k} \in C_1(K, \mathbb{C})\}$$

$$C_1(Q) = \bigcup_{K \subset \mathcal{K}} C_{1,K}(Q)$$

Пусть еще λ_Q – это линейный функционал на $C_1(Q)$, определяемый так: если

$$f = (\psi \circ P_K)(g \circ P_{K^\perp}),$$

где $\psi \in C_1(K, C)$ (ψ является сужением f на K), то

$$\int Qf(q)\lambda Q(dq) = \int K\psi(x)\lambda(K)(dx)$$

$$\lambda_Q(\psi) \equiv \int \psi\lambda_Q$$

$$\int \psi\lambda_Q = \int_K \psi(x)\, \mathcal{Leb}_K(dx)$$

Для любого ортонормированного базиса:

$$\int_K \psi(x)\, \mathcal{Leb}_K(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{span\{\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}\}} \psi(x)\, \mathcal{Leb}_{span\{\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}\}}(dx)$$

Пусть M_1 и M_2 – непустые множества, J – биективное отображение M_1 на M_2, и μ_1 – обобщенная мера на M_1 с пространством F_1 пробных функций.

Образом меры μ_1 относительно отображения J называется линейный функционал $\mu_1 \circ J^{-1}$ на комплексном линейном пространстве F_2 всех функций вида $\varphi \circ J^{-1}$ ($\varphi \in F_1$), определяемый равенством

$$\int M_2\varphi\big(J^{-1}(y)\big)\mu_1 \circ J^{-1}(dy) = \int M_1\varphi(x)\mu_1(dx)(= \mu_1(\varphi))$$

Обозначения:

$$\mu_2 = \varphi(\mu_1) = \mu_1 \circ J^{-1}$$

Пример.

В частности, λ_P – образ меры λ_Q относительно гильбертова изоморфизма между Q и P ($C_1(P)$ – пространство пробных функций для λ_P).

Определение. Мера μ_1 называется инвариантной относительно J, если

$$M_2 = M_1,$$
$$F_2 = F_1,$$
$$\mu_1 \circ J^{-1} = \mu_1$$

Пример.

В частности, мера λ_Q инвариантна относительно изометрий в Q – сдвигов и ортогональных операторов.

Введём постоянную Планка:

$$h = 2\pi\hbar$$

Введём функцию

$$g_h(q) = \left(g_1(q)\right)^{\frac{1}{\hbar}}$$

$$\left(g_1(q)\right)^{\frac{1}{\hbar}} = e^{-\frac{\pi}{h}\|q\|^2}$$

$$e^{-\frac{\pi}{h}\|q\|^2} = e^{-\frac{1}{2\hbar}\|q\|^2}$$

$$e^{-\frac{1}{2\hbar}\|q\|^2} = e^{-\frac{\frac{2\pi}{h}\|q\|^2}{2}}$$

Введём биекцию

$$J_h(\vec{q}) = \sqrt{h}\vec{q}$$

Тогда

$$g_h := g_1 \circ (J_h^{-1})$$

$$C_h(Q) := Dom\left(\lambda_Q \circ (J_h^{-1})\right)$$

$C_h(Q)$ инвариантны относительно умножения на непрерывные ограниченные цилиндрические комплекснозначные функции и относительно операции комплексного сопряжения.

$$\forall \varphi, \psi \in C_h \ \ \varphi\overline{\psi} \in C_{\frac{h}{2}}$$

Скалярное произведение

Скалярное произведение в пространстве C_h:

$$(\varphi, \psi)_{C_h} := \int\limits_Q \varphi(x)\overline{\psi(x)}\left(\lambda_Q \circ (J_h^{-1})\right)(dx)$$

Обозначим $H_\hbar$ как пополнение $C_h(Q)$ относительно скалярного произведения.

Пополнение пространства $C_h(Q)$ относительно нормы, порожденной этим скалярным произведением, обозначается символом $H_\hbar$, так что

$$H_\hbar = L_2\left(\lambda_Q \circ \left(J_{h/2}^{-1}\right)\right)$$

Пусть $S_h(Q)$ – подпространство в $C_h(Q)$, состоящее из всех таких функций

$$f \in C_h(Q),$$

в представлении которых вида

$$f \ = \ (f_K \circ P_K)(g_h \circ P_{K^\perp}) \in C_h(Q)$$

с конечномерным подпространством $K \subset Q$ функция

$$f_K \equiv f|_K$$

принадлежит обычному комплексному пространству $S(K;\mathbb{C})$ Шварца на K.

Таким образом, подпространство $S_h(Q)$ в $C_h(Q)$ состоит из всех таких функций, сужение каждой из которых на каждое конечномерное подпространство K в Q принадлежит пространству Шварца $S(K;\mathbb{C})$.

Отметим, что если Q сепарабельно, то пространство $H_\hbar$ также сепарабельно (а его подпространство $S_h(Q)$ плотно).

Скалярное произведение в пространстве $H_\hbar$ является инвариантным относительно изометрий пространства Q; это вытекает из инвариантности мер $\lambda_Q \circ \left(J_{h/2}^{-1}\right)$ и поляризационного тождества.

Стоит отметить, что элементы пространства $S_1(Q)$ могут считаться обобщенными плотностями цилиндрических мер, а также – в естественном смысле – плотностями этих цилиндрических мер относительно обобщенной меры λ_Q.

Преобразование Фурье

Для каждого

$$c \in R_1 \setminus \{0\}$$

c-преобразованием Фурье называется отображение пространства $S_h(Q)$ в пространство функций на P, обозначаемое символом F_{p-q}^c и определяемое равенством

$$(F_{p-q}^c \psi)(p) = \int_Q e^{\frac{i}{c}p(q)} \cdot \psi(q) \left(\lambda_Q \circ (J_h^{-1})\right) dq$$

Теорема.

При каждом $\hbar > 0$ оператор $F_{p-q}^\hbar$ отображает пространство $S_h(Q)$ в $S_h(P)$ биективно, причем

$$\left(F_{p-q}^\hbar\right)^{-1} = F_{p-q}^{-\hbar}$$

После отождествления пространств Q и P функция g_h переводится этой биекцией в себя, а сама биекция продолжается до унитарного оператора в $H_\hbar$.

Для любого $\psi \in S_h(Q)$:

$$\left(\hat{f}\psi\right)(q) = F_{p-q}^\hbar\left(F_{p-q}^{-\hbar}\left(f\left(\frac{\tilde{q}+q}{2}, p\right) \cdot \psi(\tilde{q})\right)\right)$$

В интегральном виде:

$$F_{p-q}^{\hbar}\left(F_{p-q}^{-\hbar}\left(f\left(\frac{\tilde{q}+q}{2},p\right)\cdot\psi(\tilde{q})\right)\right)$$

$$=\int\limits_{P}\left(e^{\frac{2\pi i p(q)}{h}}\cdot\int\limits_{Q}e^{-\frac{2\pi i p(\tilde{q})}{h}}f\left(\frac{\tilde{q}+q}{2},p\right)\cdot\psi(\tilde{q})\left(\lambda_Q\circ\left(J_h^{-1}\right)\right)dq\right)\lambda_P$$
$$\circ J_h^{-1}\,(dp)$$

Лекция 13. Пространство Шварца

Необходимые понятия и обозначения

Рассмотрим пространство, введённое ранее – S.

Введём следующее обозначения:

(E – Евклидово (над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением, линейно), $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$)

$$\Rightarrow g^{\pi}: E \to \mathbb{R}_{+},$$

$$g^{\pi}(\vec{x}) = e^{-\pi(\vec{x},\vec{x})} > 0,$$

$$g^{\pi}(x) - \text{непрерывная}$$

По отношению к мере Лебега имеем:

$$\int\limits_{E} \left(g^{\pi}(\vec{x})\right)^2 \mathcal{Leb}_E(d\vec{x}) = 1,$$

$$g^{\pi} \in \mathcal{L}_2(E, \mathcal{Leb}; \mathbb{C})$$

При этом, рассмотренная функция бесконечно дифференцируемая.

Рассмотрение пространства Шварца

Рассмотрим пространство, содержащее рассмотренные функции:

$S(E,\mathbb{C})$ – пространство Шварца быстро убывающих (вместе со всеми своими производными) функций.

Рассмотрим аналогичное пространство, но с бесконечной областью определения:

H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство.

Определим семейство его конечных подпространств, как:

$$\mathcal{K} = \{K_{\text{лин}} \subset H: \dim_{\mathbb{R}} K < \infty\}$$

Для каждого из них введём следующие обозначения:

$$\forall K \in \mathcal{K} \;\; S_K^{\pi}(H) \coloneqq \left\{(f \cdot Pr_K)(g^{\pi} \cdot Pr_{K^{\perp H}}) = \phi_{k,f}:\; f \in S(K;\mathbb{C})\right\} \; (1)$$

В более явном виде:

$$n_k \coloneqq \dim_{\mathbb{R}} K \;\; \exists(\vec{e}_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ОНБ в } H,$$

$$\text{т. ч. } (\vec{e}_n)_{n=1}^{n_k} - \text{ОНБ в } K$$

$$f \equiv \phi_{k,f}\big|_K$$

$$\forall \vec{x} \in H\ x_k \coloneqq (\vec{x}, \vec{e}_k)$$

$$\vec{x} = \sum x_k \vec{e}_k$$

$$\Rightarrow \phi_{k,f}(\vec{x}) \equiv f\left(\sum_{n=1}^{n_k} x_n \vec{e}_n\right) g^{\pi}\left(\sum_{n>n_k} x_n \vec{e}_n\right)$$

Скалярное произведение

Скалярное произведение введём следующим образом:

$$f_1 f_2 \in S(E, \mathbb{C}),$$

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{L}_2} \coloneqq \int f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x}) \cdot \mathcal{Leb}_E(d\vec{x})$$

В нашем случае:

$$\left(\phi_{k,f_1}, \phi_{k,f_2}\right)_{\mathcal{L}_2} \coloneqq (f_1, f_2)_{\mathcal{L}_2(K)}\ \ (2)$$

Вложенные подпространства

Рассмотрим вложенные подпространства:

$$K_1 \subset K_2 \subset H,$$

$$K_j \in \mathcal{K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \phi = \phi_{K_1,f_1}$$

$$\phi_{K_1,f_1} \in S_{K_1}^{\pi}(H)$$

$$\exists f_2 \in S(K_2, \mathbb{C}) \colon \phi_{K_1,f_1} = \phi_{K_2,f_2}$$

$$n_{K_j} = \dim_{\mathbb{R}} K_j,$$

$$n_{K_1} < n_{K_2}$$

$$\phi_{K_1,f_1} = f_1\left(\sum_{n=1}^{n_{K_1}} x_n \vec{e}_n\right) \exp\left(-\pi \sum_{n_{K_1} < n \le n_{K_2}} x_n^2\right) \exp\left(-\pi \sum_{n>n_{K_2}} x_n\right)$$

Заметим, что:

$$f_2\left(\sum_{n=1}^{n_{K_2}} x_n\vec{e}_n\right) = f\left(\sum_{n=1}^{n_{K_1}} x_n\vec{e}_n\right)\exp\left(-\pi \sum_{n_{K_1}< n \le n_{K_2}} x_n^2\right)$$

Используя краткую запись:

$$f_2 = \left(f_1 \cdot Pr_{K_1}\right)\left(g^\pi \cdot P_{K_1^{\perp K_2}}\right) \quad (3)$$

Можем назвать полученное произведение тензором.

Таким образом, утверждение доказано:

$$\phi_{K_2,f_2} \in S_{K_2}^\pi(H)$$

$$S_{K_2}^\pi(H) \supset S_{K_1}^\pi(H)$$

<u>Следствие</u>:

$$S_{K_1}^\pi(H) \cup S_{K_2}^\pi(H)$$

$$S_{K_2}^\pi(H) \subset S_{K_1+K_2}^\pi(H)$$

$$S_{K_1}^\pi(H) + S_{K_2}^\pi(H) \subset S_{K_1+K_2}^\pi(H) \quad (4)$$

Связь норм вложенных подпространств

Введём следующие обозначения из (2):

$$K \equiv K_1$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \mathcal{K}$$

$$\phi_1, \phi_2 \in S_K^\pi(H)$$

$$S_K^\pi(H) \subset S_{K_2}^\pi(H)$$

Однако, заметим, что теперь норма и скалярное произведение для введённых функций вычисляются по-разному.

Из формулы (3) имеем:

$$\phi_j = \phi_{K,f_j}$$

$$\phi_{K,f_j} = \phi_{K_2,\left(f_j \cdot P_{K_1}\right)\left(g^\pi P_{K_1^{\perp K_2}}\right)}$$

Увидим, что скалярные произведения одинаковы, то есть:

$$(f_1, f_2) = \left(f_1 \cdot P_{K_1} \cdot g^{\pi} P_{K_1^{\perp K_2}}\ , f_2 \cdot K \cdot g^{\pi} \cdot P_{K^{\perp K_2}}\right)_{\mathcal{L}_2(K_2)}$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся известным разложением по базису:

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{K_2} f_1(P_K\vec{x}) \cdot \exp\left(-\pi \sum_{n=n_{K_1}+1}^{n_{K_2}} x_n^2\right) \cdot \bar{f}_2(P_K\vec{x}) \cdot \exp\left(-\pi \sum_{n=n_{K_1}+1}^{n_{K_2}} x_n^2\right) \mathcal{Leb}_{K_2}(d\vec{x})$$

$$\int\limits_{K_2} f_1(P_K\vec{x}) \cdot \exp\left(-\pi \sum_{n=n_{K_1}+1}^{n_{K_2}} x_n^2\right) \cdot \bar{f}_2(P_K\vec{x}) \cdot \exp\left(-\pi \sum_{n=n_{K_1}+1}^{n_{K_2}} x_n^2\right) \mathcal{Leb}_{K_2}(d\vec{x})$$
$$= \int\limits_{K\times K^{\perp K_2}} f_1(\vec{x}_1)\overline{f_2}(\vec{x}_2) \cdot \exp\big(-2\pi(\vec{x}_2, \vec{x}_2)\big)\, \mathcal{Leb}_K(d\vec{x}_1) \otimes \mathcal{Leb}_{K^{\perp K_2}}(d\vec{x}_2)$$

$$\int\limits_{K\times K^{\perp K_2}} f_1(\vec{x}_1)\overline{f_2}(\vec{x}_2) \cdot \exp\big(-2\pi(\vec{x}_2, \vec{x}_2)\big)\, \mathcal{Leb}_K(d\vec{x}_1) \otimes \mathcal{Leb}_{K^{\perp K_2}}(d\vec{x}_2)$$
$$= \int\limits_{K} f_1(\vec{x}_1)\bar{f}_2(\vec{x}_2) \cdot \left(\int\limits_{K^{\perp K_2}} \exp\big(-2\pi(\vec{x}_2, \vec{x}_2)\big)\, \mathcal{Leb}_{K^{\perp K_2}}(d\vec{x}_2)\right) \otimes \mathcal{Leb}_K(d\vec{x}_1)$$

Так как

$$\int\limits_{K^{\perp K_2}} \exp\big(-2\pi(\vec{x}_2, \vec{x}_2)\big)\, \mathcal{Leb}_{K^{\perp K_2}}(d\vec{x}_2) = 1$$

Получаем, что и требовалось доказать:

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{K} f_1(\vec{x}_1)\bar{f}_2(\vec{x}_2)\, \mathcal{Leb}_K(d\vec{x}_1)$$

<u>Следствие</u>.

Так как скалярные произведения согласуются, можем пространство вводить следующим образом:

$$S^{\pi}(H) \coloneqq \bigcup_{K\in\mathcal{K}} S_K^{\pi}(H)$$

В котором скалярное произведение вводится, как:

$$\phi_j \in S_{K_j}^{\pi} \;\; j = 1,2$$

Из формулы (4) имеем:

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{L}_2(H)} \coloneqq \left(\phi_1|_{K_1+K_2}, \phi_2|_{K_1+K_2}\right)_{\mathcal{L}_2(K_1+K_2)}$$

Лекция 14. Квантование бесконечномерных гамильтоновых систем

Построение аналога пространства Шварца

Пусть

H - сепарабельное вещественное бесконечномерное пространство,

$$\mathcal{K} = \{K: K \text{ линейное вещественное} \subset H\}$$

$$g^{\frac{\pi}{2}}: H \to \mathbb{R}$$

$$g^{\frac{\pi}{2}}(x) = e^{\frac{-\pi x^2}{2}}$$

$$S_K^{\frac{\pi}{2}}(H) = \left\{(f \circ P_K)\left(g^{\frac{\pi}{2}} \circ P_{H\ominus K}\right): f \in S(K, \mathbb{C})\right\}$$

$g^{\frac{\pi}{2}}$ называется вакуумным вектором.

$$S_K^{\frac{\pi}{2}}(H) \subset S_{K_2}^{\frac{\pi}{2}}(H) \text{ если } K \subset K_2$$

Скалярное произведение:

$$\left((f_1 \circ P_K)\left(g^{\frac{\pi}{2}} \circ P_{H\ominus K}\right), (f_2 \circ P_K)\left(g^{\frac{\pi}{2}} \circ P_{H\ominus K}\right)\right)_{L_2} := (f_1, f_2)_{L_2(K)}$$

$$(f_1, f_2)_{L_2(K)} = \int\limits_K f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

Аналог пространства Шварца:

$$S^{\frac{\pi}{2}}(H) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} S_K^{\frac{\pi}{2}}(H)$$

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}} S_K^{\frac{\pi}{2}}(H) \ni F \Longrightarrow$$

$$\|F\|_{L_2(H)} = \sqrt{(F, F)_{L_2(H)}}$$

Теорема (о квантовании бесконечномерных гамильтоновых систем)

Теорема. Пространство $S^{\frac{\pi}{2}}(H)$ сепарабельно относительно нормы $\|\cdot\|_{L_2(H)}$.

Доказательство:

Зафиксируем некоторый ортонормированный базис в H

$$\mathcal{E} = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$$

И проверим, что множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S^{\frac{\pi}{2}}_{span(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})}$$

плотно в $S^{\frac{\pi}{2}}(H)$.

Проверим, что

$$\rho_{\|\cdot\|_{L_2(H)}}\left(F, S^{\frac{\pi}{2}}_{span(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

По определению:

$$\rho_{\|\cdot\|_{L_2(H)}}\left(F, S^{\frac{\pi}{2}}_{span(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})}\right) = \inf_{G_n \in S^{\frac{\pi}{2}}_{K_n}(H)} \|F - G_n\|^2$$

Без ограничения общности мы можем считать, что функция $F(\vec{x})$ имеет вид

$$F(\vec{x}) = \left(\overrightarrow{h_1}, \vec{x}\right)^{S_1} \cdot \dots \cdot \left(\overrightarrow{h_k}, \vec{x}\right)^{S_k} \cdot g^{\frac{\pi}{2}}(x),$$

где $\overrightarrow{h_1}, \dots, \overrightarrow{h_k}$ – ортонормированный базис в K.

Тогда

$$\|F - G\|^2_{L_2(H)} \leq \|F - G_n\|^2_{L_2(H)},$$

где

$$G_n(\vec{x}) = \left(\prod_{j=1}^{k}\left(\vec{x}, P_{K_n}(h_j)\right)^{S_j}\right) g^{\frac{\pi}{2}}(x)$$

Пусть

$$L_n = span\left(\overrightarrow{h_1}, \dots, \overrightarrow{h_k}, P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_1}\right), \dots, P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_k}\right)\right) \subset (K + K_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \dim L_n = l$$

Введем обозначение:

$$P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(\vec{x}) = \left(\overrightarrow{h_1}, \vec{x}\right)^{S_1} \cdot \dots \cdot \left(\overrightarrow{h_k}, \vec{x}\right)^{S_k}$$

Тогда

$$\|F - G_n\|^2_{L_2(H)} = \int\limits_{K+K_n} |F(x) - G_n(x)|^2 dx$$

$$\int\limits_{K+K_n} |F(x) - G_n(x)|^2 dx = \int\limits_{K+K_n} \left(g^{\frac{\pi}{2}}(x)\right)^2 \left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(\vec{x}) - P_{P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_1}\right),\dots,P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_k}\right)}(\vec{x})\right|^2 dx$$

$$\left(x, P_{L_n} h_j\right)_H = \left(P_{L_n} x, h_j\right)_H$$

$$\left(x, P_{K_n}\left(h_j\right)\right)_H = \left(P_{L_n} x, P_{K_n}\left(h_j\right)\right)_H$$

Введём подпространство

$$L_n' = (K + K_n) \ominus L_n$$

$$\int\limits_{K+K_n} \left(g^{\frac{\pi}{2}}(x)\right)^2 \left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(\vec{x}) - P_{P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_1}\right),\dots,P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_k}\right)}(\vec{x})\right|^2 dx$$

$$= \int\limits_{K+K_n = L_n \oplus L_n'} e^{-\pi x^2} \left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}\left(P_{L_n} x\right) - P_{P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_1}\right),\dots,P_{K_n}\left(\overrightarrow{h_k}\right)}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dx$$

$$\int\limits_{K+K_n=L_n\oplus L_n'} e^{-\pi x^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dx$$

$$=\int\limits_{L_n} e^{-\pi\|P_{L_n}x\|^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)\right.$$

$$\left.-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dP_{L_n}x\int\limits_{L_n} e^{-\pi\left\|P_{L_n'}x\right\|^2}dP_{L_n'}x$$

$$\int\limits_{L_n} e^{-\pi\left\|P_{L_n'}x\right\|^2}dP_{L_n'}x=1$$

$$\int\limits_{L_n} e^{-\pi\|P_{L_n}x\|^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dP_{L_n}x\int\limits_{L_n} e^{-\pi\left\|P_{L_n'}x\right\|^2}dP_{L_n'}x$$

$$=\int\limits_{L_n} e^{-\pi x^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dx$$

Итого,

$$\|F-G_n\|^2_{L_2(H)}=\int\limits_{L_n} e^{-\pi x^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dx$$

$$\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2\longrightarrow 0$$

Обозначим как J_n изоморфизм L_n на $\mathbb{R}^{l_n}$, такой что

$$\overrightarrow{h_j}\to\overrightarrow{e_j}, j=1,\dots,k$$

Начиная с некоторого номера n

$$\int\limits_{L_n} e^{-\pi x^2}\left|P_{\overrightarrow{h_1},\dots,\overrightarrow{h_k}}(P_{L_n}x)-P_{P_{K_n}(\overrightarrow{h_1}),\dots,P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})}\left(P_{L_n}(x)\right)\right|^2 dx$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^l} e^{-\pi x^2}\left|P_{\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}}(J_n(x))-P_{J\left(P_{K_n}(\overrightarrow{h_1})\right),\dots,J\left(P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})\right)}(J_n(x))\right|^2 dx$$

$$e^{-x^2}\left|P_{\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}}\big(J_n(x)\big)-P_{J\left(P_{K_n}(\overrightarrow{h_1})\right),\dots,J\left(P_{K_n}(\overrightarrow{h_k})\right)}\big(J_n(x)\big)\right|^2\leq e^{-\pi x^2}2^2\|x\|^{\sum_{i=1}^n s_i}$$

Основы квантовой механики. Суперпозиции векторов

Всякое описание квантово-механической системы начинается с указания пространства чистых состояний H (гильбертово над комплексным полем).

$+: H\times H\to H$ называется суперпозицией этих состояний.

Лекция 15. Комментарии к квантовомеханическим аксиомам и парадоксам

Суперпозиции векторов

Всякое описание квантово-механической системы начинается с указания пространства чистых состояний H (гильбертово над комплексным полем).

$+: H \times H \to H$ называется суперпозицией векторов.

Линейные комбинации также называются суперпозицией векторов.

$$\vec{h} \in H \setminus\{0\}, z\vec{h} \ \ \forall x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$\vec{h} \perp \vec{g}, \vec{g} \in H \setminus\{0\}$$

$$\overrightarrow{e_h} = \frac{1}{\|h\|}\vec{h}$$

$$\overrightarrow{e_g} = \frac{1}{\|g\|}\vec{g}$$

Составим два новых вектора:

$$\left\|\overrightarrow{e_g} + \overrightarrow{e_h}\right\| = \sqrt{2}$$

$$\left\|\overrightarrow{e_g} + (-\overrightarrow{e_h})\right\| = \sqrt{2}$$

Докажем, что эти два состояния экспериментально различимы.

Запишем скалярное произведение:

$$\left(\overrightarrow{e_g} + \overrightarrow{e_h}, \overrightarrow{e_g} + (-\overrightarrow{e_h})\right)_H = \left(\overrightarrow{e_g}, \overrightarrow{e_g}\right) + \left(-(\overrightarrow{e_h}, \overrightarrow{e_h})\right)$$

$$\left(\overrightarrow{e_g}, \overrightarrow{e_g}\right) + \left(-(\overrightarrow{e_h}, \overrightarrow{e_h})\right) = 0$$

Неравенство Белла для парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена

Классическая статистика экспериментальной ситуации начинается в математическом описании с единого вероятностного пространства $(\Omega, F, \mathbb{P})$ в колмогоровской подстановке.

Случайные вещественные величины

$$|\xi|, |\eta|, |\zeta| \equiv 1$$

Математические ожидания их произведения:

$$M(\xi\eta) = \langle \xi\eta \rangle$$

Рассмотрим модуль их разности:

$$|\langle \xi\eta \rangle - \langle \eta\zeta \rangle| = |\langle (\xi - \zeta)\eta \rangle|$$

$$|\langle (\xi - \zeta)\eta \rangle| = |\langle (1 - \zeta\xi)(\xi\eta) \rangle|$$

$$|\langle (1 - \zeta\xi)(\xi\eta) \rangle| \leq \langle (1 - \zeta\xi)|\xi||\eta| \rangle$$

$$\langle (1 - \zeta\xi)|\xi||\eta| \rangle = \langle (1 - \zeta\xi) \rangle$$

$$\langle (1 - \zeta\xi) \rangle = 1 - \langle (\zeta\xi) \rangle$$

Рассмотрим модуль их суммы:

$$|\langle \xi\eta \rangle + \langle \eta\zeta \rangle| \leq 1 + \langle (\zeta\xi) \rangle$$

Это неравенство называется неравенством Белла.

Рассмотрим позитрон e^+ и электрон e^-.

Пространство, в котором описывается эта система должно быть тензорным произведением пространств, в которых описывается каждая частица по отдельности:

$$H_{e^+, e^-} = H_{e^+} \otimes H_{e^-}$$

$$H_{e^+} \cong H_{e^-} \cong \mathbb{C}^2$$

Скалярное произведение в этом пространстве:

$$\left(\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} = z_+ \overline{w_+} + z_- \overline{w_-}$$

Возьмём два базисных вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

Рассмотрим

$$\frac{|\uparrow\rangle_+ |\downarrow\rangle_- - |\downarrow\rangle_+ |\uparrow\rangle_-}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{e_{l_+}} \in H_{l_+}$$

$$\overrightarrow{e_{l_+}} \cong \overrightarrow{e_{l_-}}$$

$$\overrightarrow{e_{l_-}} \in H_{l_-}$$

$$S_{l_+}\overrightarrow{h_+} = \langle e_{l_+} | h_+ \rangle \overrightarrow{e_l}$$

Оператор наблюдаемой во всем пространстве:

$$\mathbb{S}_{l_+} = S_{l_+} \otimes I_{d_{H_{l_-}}}$$

e_{l_+}, h_{l_+} - ортонормированный базис в H_{l_+}.

Тогда инвариантами останутся векторы (с собственным числом, равным единице)

$$e_{l_+} \otimes |\uparrow\rangle_-$$

$$e_{l_+} \otimes |\downarrow\rangle_-$$

И векторы (с собственным числом, равным минус единице)

$$f_{l_+} \otimes |\uparrow\rangle_-$$

$$f_{l_+} \otimes |\downarrow\rangle_-$$

Обозначим

$$\frac{|\uparrow\rangle_+|\downarrow\rangle_- - |\downarrow\rangle_+|\uparrow\rangle_-}{\sqrt{2}} = h_i$$

$$\left\| P_{Ker(\mathbb{S}-\mathbb{1})} h_i \right\| = \left|\left(h_i, e_{l_+} \otimes |\uparrow\rangle_-\right)\right|^2 + \left|\left(h_i, e_{l_+} \otimes |\downarrow\rangle_-\right)\right|^2$$

$$h_i = \frac{1}{2}\left(\left|e_{l_+}, |\downarrow\rangle_-\right|^2 + \left|e_{l_+} \otimes |\uparrow\rangle_-\right|^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|e_{l_+}, |\downarrow\rangle_-\right|^2 + \left|e_{l_+} \otimes |\uparrow\rangle_-\right|^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\langle \xi\eta \rangle = \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle \eta\zeta \rangle = \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle \zeta\xi \rangle = \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогда неравенство Белла нарушается:

$$\sqrt{3} \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Парадокс возникает из-за того, что мы пытаемся квантовую вероятность описать классической статистикой.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ