МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

ШАМАРОВ
НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА

СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

АНДРЕЕВУ АННУ СЕРГЕЕВНУ

Содержание

Лекция 1

Знакомство с бесконечной размерностью....7

Логические символы....7

Аксиомы теории множеств....8

Пример задачи....13

Лекция 2

Бесконечномерные пространства....15

Отношения....15

Отношения со специальными свойствами....17

Представления....20

Лекция 3

Мощность множества. Кардинальные числа....22

Канонический ординал....22

Кардинальные числа....25

Континуум гипотеза....26

Направленные множества и базис фильтра....26

Лекция 4

Алгебраические структуры....28

Полугруппы....28

Группы....31

Структуры с двумя операциями, кольца 32

Лекция 5

Линейное пространство 34

Кольца (продолжение) 34

Линейное пространство 34

Линейная зависимость и независимость 35

Линейный базис 36

Лекция 6

Представление линейных пространств. Метрические прстранства 39

Представление линейных пространств 39

Метрические пространства 40

Норма и её свойства 43

Лекция 7

Нормированное пространство 45

Нормированное пространство 45

Терминология, связанная со сходимостью 46

Лекция 8

Метрические пространства. База окрестностей 49

Непрерывность и окрестности 49

Базисная система окрестностей и база фильтра 54

Лекция 9

Фильтр окрестностей. База фильтра 56

База фильтра и фильтр 56

Непрерывность и сходимость в терминах фильтра 57

Лекция 10

Топология в терминах без окрестностей 61

Топология в терминах направленностей 61

Хаусдорфовые топологии 62

Лекция 11

Топологическое векторное и локально выпуклое пространства 66

Топологическое векторное и локально выпуклое пространства 66

Полнота и пополнение 68

Теорема Хана и Банаха и ее следствия 71

Лекция 12

Полнота и пополнение 75

Понятие полноты в терминах последовательностей 75

Пополнение в узком и широком смыслах 79

Лекция 13

Топологии в терминах сходимости 82

Переход от пополнения в узком смысле к пополнению в широком смысле 82

Топологии в терминах сходимости 83

Лекция 14

Гильбертовы пространства, вещественные и комплексные 86

Скалярное произведение.. 86

Классификация гильбертовых пространств 86

Связь базиса и структуры гильбертова пространства 87

Аналогия с теорией интегрирования 88

Гильбертовы тензорные произведения гильбертовых пространств 89

Лекция 15

Тензорное произведение 90

Свойства тензорного произведения... 90

Гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств 93

Лекция 16

Тензорные произведения конечномерных пространств 95

Свойство универсальности 95

Тензорное произведение пространств 96

Единственность тензорного произведения с точностью до изоморфизма 98

1. Знакомство с бесконечной размерностью

Курс посвящен обобщению классического метода квантования (квантования по Шрёдингеру) бесконечномерных систем. Квантовая теория началась с бесконечномерных пространств, потому что открытия Планка состоящее в том, что можно рассматривать излучение абсолютно черного тела как дискретное, хотя оно описывается непрерывными волнами, допускало бесконечное число излучаемых частиц. Каждая частица описывается своим пространством состояний, пусть даже конечномерным для одной частицы, однако неограниченное число частиц требует для своего описания бесконечномерного анализа.

Математическая теория как точная наука, описывающая бесконечные множества, сформировалась около 100 лет назад, то есть является недавним открытием. Такой математический язык универсален, язык аксиоматической теории множеств, в существенных основах открыт еще в конце 19-го века Георгом Кантором, доказавшим не равномощность количества натуральных чисел количеству точек на отрезке. Открытие математического языка как языка теории предикатов первого порядка с одним нелогическим символом (знаком принадлежности элемента множеству $\in$) позволило поставить на прочную основу все рассуждения о бесконечных множествах.

Логические символы

$\exists$ - квантор существования;

$\forall$ - квантор всеобщности;

x_i - переменные, которые пробегают изучаемые в теории объекты, их можно использовать неограниченное количество;

( ) – скобки;

$P_{i,j}$ - переменные для высказываний с нумерацией, которые называются предикатами, их может быть бесконечное число, причем нумерация может быть разной, а свойства могут зависеть от нескольких переменных (для каждого фиксированного числа i переменных свойств может быть сколько угодно – нумеруются индексом j.

$=>$ - связка-импликация (следствие);

$\neg$ - отрицание…

Логические символы образуют логический язык. Добавляя нелогические символы и связанные с ними аксиомы, получаем специализированный язык. К аксиомам необходимо добавить правила вывода (способы познаются на практике).

Аксиомы теории множеств

1. Аксиома *существования пустого множества*:

$\{x_1 : x_1 \neq x_1\} = \emptyset$ или в исходном языке $\exists x_2\ \forall x_1\ \neg(x_1 \in x_2)$.

2. Аксиома *равенства*:

$$x_1 \subset x_2 \equiv \Big(\forall x_3\ \big((x_3 \in x_1) => (x_3 \in x_2)\big)\Big).$$

Определение равенства множеств: $x_1 = x_2 \equiv (x_1 \subset x_2\ \&\ x_2 \subset x_1)$.

Из определения равенства множеств можно доказать теорему единственности пустого множества.

3. *Разрешительная* аксиома или аксиома *множества степени*:

$$\forall x_1\ \exists x_2\ \Big(\forall x_3\ \big((x_3 \in x_2) <=> (x_3 \subset x_1)\big)\Big).$$

Можно доказать, что множество x_2 с указанным свойством, которое по отношению к x_1 называется множеством степени или мощностью (power), единственным образом определяется по x_1. Можно ввести обозначение, указывающее зависимость x_2 от x_1:

$$\mathcal{P}(x_1) = x_2, \text{где}$$

x_1 – произвольное множество;

$\mathcal{P}(x_1)$ – единственное x_2, элементы которого являются подмножествами множества x_1.

Можно проверить, что пустое множество является своим подмножеством. Таким образом, пустое множество является -элементом от пустого множества (множеством степени), и значит, множество степени уже непустое:

$$\mathcal{P}(\emptyset) \ni \emptyset.$$

Таким образом, из разрешительной аксиомы множества степени получено непустое множество. Далее можем брать $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ и получать большие множества.

Явное отличие от школьного подхода: множество, состоящее из одного элемента не совпадает с этим элементом (в школе точка и одноточечное множество не различимы):

$$\{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) \ni \emptyset.$$

4. Аксиома *регулярности*:
$$\forall x\ \Big((\neg x = \emptyset) => \Big(\exists y\ \big((y \in x)\ \&\ (y \cap x = 0)\big)\Big)\Big).$$
Эта аксиома позволяет доказать, что никакое множество не является себе элементом:
$$\forall x\ (x \notin x).$$
Эта же аксиома полезна для построения множества натуральных чисел.

5. Аксиома *пересечение* множеств x_1, x_2:
$$\forall x_1, \forall x_2\ \exists x_3\ \forall x_4\ \big(x_4 \in x_3 <=> (x_4 \in x_1\ \&\ x_4 \in x_2)\big).$$

6. Аксиома о*бъединение* множеств x_1, x_2:
$$\forall x_1, \forall x_2\ \exists x_3\ \forall x_4\ \big(x_4 \in x_3 <=> (x_4 \in x_1\ \vee\ x_4 \in x_2)\big).$$

Теория множеств позволяет дать на ответ на вопрос что такое число, предъявить объект, который разумно считать содержанием понятия число: ноль – пустое множество, 1 – множество с единственным элементом, являющимся пустым множеством:

$$\begin{array}{cc} \emptyset & 0 \\ \{\emptyset\} & 1 \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & 2 \end{array} => n' = n \cup \{n\}$$

7. Аксиома *бесконечности*, которая разрешает бесконечное множество:
$$\exists \mathrm{x}\ (\emptyset \in \mathrm{x}\ \&\ \big(\forall \mathrm{y}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{x} => \mathrm{y}' \in \mathrm{x})\big).$$
Аксиома регулярности позволяет показать, что оно действительно конечным быть не может.

Опишем множество натуральных чисел с нуля, которое мы начали строить. Для этого необходимы еще разрешительные аксиомы.

8. *Разрешение рассматривать пересечение множества, состоящего из множеств*:

$$\forall x \ \Big((x \neq \emptyset) => \ \exists y \ \Big(\forall z \left(z \in y <=> \ \forall u \left(u \in x => z \in u\right)\right)\Big)\Big).$$

Обычно такой y обозначают следующим образом:

$$y = \cap\, x = \bigcap_{u \in x} u = \cap\, \{u : u \in x\}.$$

Сделаем замечание, которое позволит нам описать множество натуральных чисел.

9. Аксиома *выделения* (схема аксиом):

$$P_{1,1}(x_1), \ \ \forall x_2 \ \exists x_3 \ \forall x_1 \ \Big(x_1 \in x_3 \ \le> \Big(x_1 \in x_2 \ \& \ P_{1,1}(x_1)\Big)\Big).$$

В множестве, удовлетворяющем аксиоме 7 оставим только натуральные числа с нулем $\aleph_0$.

$$\mathrm{x}\ (\emptyset \in \mathrm{x} \ \& \ \big(\forall \mathrm{y}\ (\mathrm{y} \in \mathrm{x} => \mathrm{y}' \in \mathrm{x})\big) = \text{ȴ}(x) - \text{ свойство индуктивности.}$$

Чтобы построить $\aleph_0$ как множество только натуральных чисел, мы должны взять хотя бы одно индуктивное множество *x*. В этом индуктивном множестве есть индуктивные подмножества, например, оно само. Значит, есть запас индуктивных подмножеств. $\aleph_0$ - пересечение всех индуктивных подмножеств в некотором произвольным образом выбранном индуктивном множестве. Таким образом, мы получаем минимальное индуктивное множество, можем доказывать, что оно единственно, ввести обозначения:

$$\mathbb{N} = \{x \in \aleph_0 : \mathrm{x} \neq \emptyset\}.$$

Далее можно строить функции, которые можно определить через графики (с функцией связано множество точек ее графика). У точек как правило 2 координаты: аргумент и значение функции на данном значении аргумента, - причем пара должна быть упорядоченной.

Множество определяется только тем, вошли в него те или иные объекты или нет. При этом никаких связей между объектами не предполагается, пока мы их не назначим внешним образом. Это означает, что упорядоченные пары надо попробовать определить через наши, вообще говоря, неупорядоченные множества. Такая возможность есть. Мы уже рассматривали обозначение множества, содержащего один элемент x как $\{x\}$. Можно дать определение и, более того, специальной аксиомой ввести одноэлементные множества.

10. Аксиома, *разрешающая одноэлементные множества*:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y <=> (z = x)\big).$$

Далее можно доказывать, что для любого x такой y находится единственным образом, исходя из аксиомы равенства.

Неупорядоченная пара: $\{x\} \cup \{y\} =: \{x, y\} = \{y, x\}$.

Упорядоченная пара: $(x; y) := \big\{\{x; y\}, \{x\}\big\}$.

В качестве упражнения можно проверить: $(x; y) = (u; v) <=> (x = u \,\&\, y = v)$.

Таким образом, внутри теории множеств получили упорядоченные пары, после чего можно говорить о том, что такое график функции.

Функция f из множества A в множество B означает, что функция отображает множество A в множество B. Значит, зададим следующий график: f является частью множества пар $A \times B = \{(x; y) : x \in A \,\&\, y \in B\}$ - декартово произведение, где первая координата берется из области определения, вторая из расширенной области значений (мы не требуем, чтобы все элементы из B были значениями функции f на каких-то точках из A), и обладает следующим свойством: $\forall x\ \Big(x \in A => \exists y\ \Big(y \in B \,\&\, \big((x; y) \in f\big) \& \ (\forall z\ (z \in B \,\&\, (x; z) \in f) => z = y)\Big)\Big)$.

Таким образом: $f: A \to B <=> (f \subset A \times B \,\&\, \forall x\ \Big(x \in A => \exists y\ \Big(y \in B \,\&\, \big((x; y) \in f\big) \& \ (\forall z\ (z \in B \,\&\, (x; z) \in f) => z = y)\Big)\Big)$.

Из *натуральных чисел* получим *целые числа* путем добавления отрицательных (минус натуральные), чтобы можно было вычитать без ограничений. Вычитание - действие функции (вычесть константу из x). Таким образом, с помощью графиков функций можно построить модель целых чисел. Чтобы говорить о вычитании построим сначала сложение.

11. Аксиомы *сложения:*

$$x + 0 = x;$$
$$x + y' := (x + y)'.$$

12. Аксиомы *умножения:*

$$x \cdot 0 \coloneqq 0;$$
$$x \cdot y' \coloneqq x \cdot y + x.$$

Изобразим действия операций на графике (рис. 1.1).

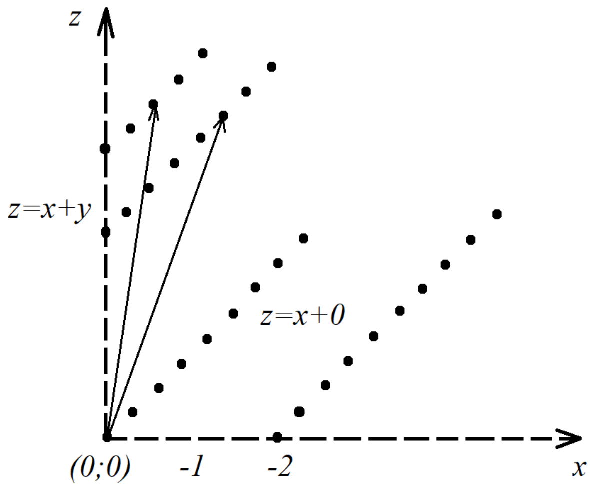


Рис.1.1

При фиксированном y и вертикальной переменной z график будет состоять из пар, где каждая ордината ровно на y больше чем абсцисса. Прибавление нуля даст диагональ z=x. Если мы заметим соответствие между числами y и диагоналями, задающими функцию прибавления такого y, можем пронаблюдать свойство. Если взять два произвольных натуральных числа y_1, y_2 , взять по точке из двух разных графиков, отвечающих y_1, y_2, то $z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$. Сложим покомпонентно упорядоченные пары (x_1, z_1) и (x_2, z_2) (аналогично сложению векторов) и получим: $x_1 + x_2, z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$. Значит, если по правилам векторного сложения, известным из школы, прибавим к вектору, оканчивающемуся в точке одного графика, вектор, оканчивающийся в точке другого графика, окажется, что суммарный вектор будет лежать на той диагонали, которая будет результатом прибавления $(y_1 + y_2)$. Получается, что сложению параметров y отвечает сложение графиков, как точек, являющихся концами векторов, выходящих из начала координат. С каждым натуральным числом, расположенным на вертикальной оси мы отождествили график, и это отождествление оказывается согласовано с операцией сложения. То есть поточечное сложение двух графиков отвечает поточечному сложению параметров у этих графиков.

После этого мы можем рассмотреть оставшиеся диагонали, начинающиеся не с вертикальной, а с горизонтальной оси и под биссектрисой нашего первого координатного угла будут диагонали, отвечающие тому, что мы со школы привыкли обозначать как -1, -2 и т.д. Так с помощью графиков функций мы ввели отрицательные числа. Причем оказывается, свойство сложения параметров по-прежнему работают.

Итак, чтобы построить целые числа, нам оказались полезны функции, а именно множества, состоящие из пар.

Аналогичным образом можно построить числа рациональные, рассмотрев пропорциональные пары числитель-знаменатель, которые можно записать как упорядоченные пары: $\frac{m}{n} \sim (m; n)$, но теперь они будут считаться лежащими на одном графике, если одна пара из другой получается умножением на некоторое число обеих координат (km; kn). Таким образом, построены рациональные числа $\mathbb{Q}$.

Как построить вещественные числа? Вещественные числа, известные как бесконечные десятичные дроби, являются (как бесконечная последовательность) функциями натурального аргумента:

$$\begin{array}{ccc} \text{цел} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Таким образом, получим функцию, определенную на множестве натуральных чисел, принимающую целые значения.

Значит, понятие функции)дало нам описание всех действительных чисел. Упорядоченной парой действительных (вещественных) чисел описывается комплексное число:

$$(x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 + ix_2, \textit{где } i^2 = -1 - \textit{мнимая единица}.$$

Пример задачи

С точками плоскости предложили связывать векторы. Существует теорема о том, что на плоскости столько же точек, сколько на прямой. Вопрос: можно ли устроить между точками прямой и плоскости такое соответствие z, чтобы имело место свойство:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad z(x_1 + x_2) = z(x_1) + z(x_2).$$

Одно из решений:

Действительно, такое соответствие существует, но его очень не просто построить. Одна из конструкций использует соотношения, связанные с бесконечномерным анализом.

Сформулируем некоторые понятия:

Взаимно однозначное соответствие, которое каждой точке одного множества сопоставляет точку другого множества, называется *биекцией*, если каждая точка второго множества состоит в соответствии с некоторой точкой исходного множества. Причем разным точкам исходного множества должны сопоставляться разные точки второго множества. Если эта биекция согласованна написанной формулой с операцией сложения, то говорят, что мы имеем *гомоморфизм* по сложению.

Заметим, что точки x_1, x_2 - произвольные точки прямой, z_1, z_2 – точки плоскости, которые мы отождествляем с векторами, выходящими из начала координат и заканчивающимися в этих точках (рис. 1.2).

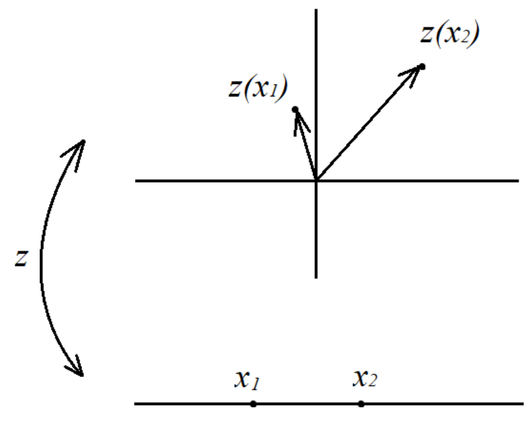


Рис. 1.2

Свойство гомоморфизма используется в линейных операциях над векторами.

2. Бесконечномерные пространства

Отношения

В прошлой лекции мы говорили о том, как в теории, призванной описать математическую физику, появляются бесконечные множества. В рамках теории множеств мы уже построили как минимум одно бесконечное множество и кроме этого была введена операция образования множества всех подмножеств. Если M – множество, то $\mathcal{P}(M)$ - множество всех подмножеств:

$$(\mathcal{P}(M) \ni x) :<=> (x \subset M).$$

Из первого курса известно, что в множестве всех подмножеств элементов больше чем в множестве M. Сформулируем такие определения.

Сопоставив натуральным числам, начиная с нуля, различные множества, в которых указанное число – число элементов, мы получили общую формулу:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \leftrightarrow & 0 \\ \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) & \leftrightarrow & 1 \\ \{0; 1\} & \leftrightarrow & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ \{0; 1; \dots; n-1\} & \leftrightarrow & n \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Таким образом, отношение неравенства между числами может быть выражено с помощью отношения эквивалентности.

$$n < m <=> n \in m.$$

Отношение – свойство, зависящее от двух переменных.

Таким образом, мы можем говорить о том, что такое конечное количество элементов и можно дать определение. Множество M *конечно*, если есть его биективное отображение на одно из множеств, представленных в списке (допускает биекцию на одно из натуральных чисел).

Биективное отображение – функция из одного множества в другое, такая, что разные точки одного множества переходят в разные точки другого множества (инъективность) и каждый элемент из второго множества является образом какого-то элемента первого множества (селективность):

$$f: M \to N$$

$$m_1 \neq m_2 \; => \; f(m_1) \neq f(m_2)$$

$$\forall n \in N \quad \exists m \in M \quad f(m) = n.$$

Два множества имеют *одинаковые мощности* или одинаковое число элементов, если между ними существует биекция. Имея понятие равномощности, можем сравнивать и бесконечные множества. Возникает вопрос: чем выражается мощность бесконечного множества?

Гипотеза: так же, как для конечных мощностей, есть специальные множества, выражающие собой конечное количество элементов, для бесконечных мощностей могут существовать специальные множества, которые будут выражать собой указанную мощность.

Действительно, мы укажем такие специальные множества, они называются каноническими кардиналами. Но чтобы развить теорию, необходим еще ряд понятий.

Мы уже сказали, что свойства двух элементов выражают отношения между ними. Отношение может быть функциональным: $f(m) = n$. Значит можно рассмотреть пары (m; f(n)), которые входят в график функции f (в прошлый раз мы связали функцию с ее графиком). Иногда к информации о функции добавляется отдельно информация об области определения, которая может быть получена из графика, но иногда область определения понимается в расширенном смысле, как множество, содержащее точную область определения функции. Аналогично с областью значений. Поэтому, имея множество упорядоченных пар, которое график функции, введем понятие точной области определения.

$D_f =$ (Точная область определения для функции f, выражаемой ее графиком) $\coloneqq \{x\colon \exists(x; y) \in f\}$;

$E_f =$ (Точная область значений для функции f, выражаемой ее графиком) $\coloneqq \{y\colon \exists(x; y) \in f\}$.

Кроме того есть категорный подход, который заключается в рассмотрении не точной области значений, а троек (A, f, B), где A содержит точную область определений f, а B содержит точную область значений: $A \supset D_f, B \supset E_f$.

Часто вместо «функции» говорят «отображение». f функция <=> отображение <=> оператор.

Если (A, f, B) – функция в расширенном смысле, то в частности $f \subset A \times B$ (график f содержится в декартовом произведении множества A на множество B). И вообще, любое подмножество декартового произведения двух множеств можно назвать бинарными *теоретико-множественным отношением* (теоретико-множественное часто опускается). Договоримся, что любое подмножество декартового произведения множеств будет называться отношением между элементами множества A и элементами множества B.

Разные свойства отношений понадобятся, чтобы сформулировать, что мы хотим от специальных множеств, называющихся каноническими кардиналами и которые позволяют выражать мощность множества, чтобы говорить не только об объективных друг другу множествах, но и о том, сколько в них элементов.

Рекомендуемая литература:

1) Теория множеств:
   - «Справочная книга по математической логике», т.т.1-4.
   - Колмогоров, Фомин (поздние издания) «Элементы теории функций и функционального анализа», гл.1.
2) Алгебраические системы:
   - Келли (поздние издания) «Общая топология», гл. 0.

Парадокс Рассела: не существует множества всех множеств. Этот парадокс приводит к тому, что есть некоторые свойства множеств, которые выполняются на семействе объектов, которые сами множествами не являются. Если отношение это свойство пар аргументов, то признак – свойство одного аргумента $P_{1,j}(x)$, и не всегда существует множество, для которого выполняется это свойство. Теперь мы говорим о классах элементов, к которым, вообще говоря, неприменимы аксиомы, касающиеся множеств. Удобно использовать расширение теории множеств. Объектами расширенной теории множеств являются классы, а среди них различными аксиомами выделяются множества. Объект называется множеством, если он является элементом какого-нибудь класса.

Отношения со специальными свойствами

Рассмотрим отношения со специальными свойствами, например, отношение быть подмножеством (отношение включения). Чтобы это отношение было теоретико-множественным, нужно рассматривать его в пределах некоторого множества:

$$\subset_M = \{(A; B) : A \subset B \subset M\} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M).$$

Если A и B совпадают, то теоретико-множественное отношение называется *отношением в множестве* A:

$$(\text{отн. в } A) \equiv (\text{отн. между элементами в } A \text{ и элементами } A).$$

Так же отношение включения приводит и к другим терминам. Например, такое отношение обладает свойством антисимметричности:

$$A \subset B \subset A \;=>\; A = B.$$

Обобщим это свойство аксиоматически. Однако для отношений в A сначала нужно развить некоторый язык. Если R является подмножеством в декартовом квадрате, то можно ввести более краткое обозначение для пары:

$$R \subset A \times A$$

$$(a_1; a_2) \in R$$

$$\wedge$$
$$\parallel$$
$$\vee$$

$$a_1 R a_1$$

Свойство 1

Отношение $R \subset A \times A$ назовем *нестрого антисимметричным*, если $(a_1 R a_2) \& (a_2 R a_1) => a_1 = a_2$.

Отношение $R \subset A \times A$ назовем *строго антисимметричным*, если невозможно одновременное выполнение обоих свойств $(a_1 R a_2) \& (a_2 R a_1)$.

Каждое подмножество в М – подмножество себе $M \supset A \subset A$. По определению подмножества равенство не исключается.

Можно заметить, что отношение равенство на множестве М можно описать как пары равных подмножеств:

$$=_M \;<=>\; \{(A; A) : A \subset M\}.$$

Пары, состоящие из одинаковых элементов можно назвать диагональными (если для конечного числа элементов составить матрицу, то на диагонали окажутся равные друг другу элементы):

$$Diag_{N\times N} = \{(x,x) : x \in N\} \subset N \times N.$$

Таким образом: $=_M \;<=>\; \{(A;A) : A \subset M\} = Diag_{\mathcal{P}(M)\times\mathcal{P}(M)}$.

Такую систему обозначений необходимо развить, чтобы сравнивать между собой бесконечные множества, что требует развития подробной терминологии.

Определим аналог свойства $M \supset A \subset A$ в качестве аксиомы для произвольных отношений.

Свойство 2

Отношение $R \subset A \times A$ называют *рефлексивным, если диагональ в этом декартовом квадрате является частью этого отношения:* $Diag_{A\times A} \subset R$.

В частности рефлексивны равенство и включение подмножества.

Свойство 3

$A \subset B \subset C \;=>\; A \subset C$.

Обобщая это свойство, получим *свойство транзитивности.*

Отношение $R \subset A \times A$ называется *транзитивным*, если $\forall (a_1, a_2, a_3) \in A \times A \times A \quad (a_1Ra_2 \& a_2Ra_3) => (a_1Ra_3)$.

Частичным порядком (упорядочением) на некотором множестве A называется рефлексивное, нестрого антисимметричное и транзитивное отношение на этом множестве.

В классе подмножеств некоторого множества М отношение включения обладает всеми тремя свойствами.

Представления

Представление – разновидность биекции на свой точный образ, которое сохраняет какие-то свойства.

Изоморфизм частичных порядков $R_1 \subset A_1 \times A_1$ и $R_2 \subset A_2 \times A_2$ это произвольная биекция $\varphi\colon A_1 \overset{\text{на}}{\to} A_2$ такая, что из $(a_1', a_1'') \in R_1$ вытекает $\left(\varphi(a_1'), \varphi(a_1'')\right) \in R_2$, и обратно, из $(a_2', a_2'') \in R_2$ вытекает $\left(\varphi^{-1}(a_2'), \varphi^{-1}(a_2'')\right) \in R_1$.

Точное представление частичного порядка $R_1 \subset A_1 \times A_1$ в частичном порядке $R_2 \subset A_2 \times A_2$ - это произвольное инъективное отображение $\varphi\colon A_1 \to A_2$ такое, что φ является изоморфизмом частичных порядков R_1 на A_1 и $R_2 \cap \left(\varphi(A_1) \times \varphi(A_1)\right)$ (подразумеваем, что $A_1 = D_\varphi$, тогда $\varphi(A_1) = E_\varphi$).

Пример 1 *(частичного порядка):* $\subset_{\mathrm{M}} \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$.

Оказывается, что какой бы ни был частичный порядок на множестве, он допускает точное представление в частичном порядке такого вида.

Пример 2 *(точного представления):* Если $R \subset A \times A$ (частичный порядок в A) и если $\forall a \in A\ L_a := \{\alpha \in A\colon\ \alpha R a\}$ ($\ni a, L_a$ не пусто) $\subset A$, то $\varphi\colon A \to \mathcal{P}(A)$, такая что $\varphi(a) = L_a$.

В качестве упражнения можно доказать, что отображение φ является точным представлением частичного порядка R в $\subset_A$ (дома).

Таким образом, мы можем интерпретировать приведенный пример как иллюстрацию того, что не бывает частичных порядков, кроме таких, которые являются частями порядка включения подмножеств.

Если множество A рассматривается в контексте вместе с некоторым частичным порядком $R \subset A \times A$, то A называют *частично упорядоченным множеством* с упорядочением R, говорят при этом, что R вносит частичное упорядочение в A.

Частный случай частичного порядка – *линейный порядок*.

Линейным называется такой частичный порядок $R \subset A \times A$, что $\forall\left((a,b) \in R\ \vee\ (b,a) \in R\right)$ (элементы a и b сравнимы между собой относительно порядка R).

Среди линейных порядков выделяется полное упорядочение.

Полным порядком или вполне упорядочением называется такой линейный порядок R в A, что $\forall\ B \subset A$ такого что $B \neq \emptyset$ имеет самый первый относительно R элемент, где элемент $b_- \in B$ называется самым первым или наименьшим в B, если:

1) $\forall b \in B \quad b_- R b$ и
2) если $b \in B$ и bRb_-, то $b = b_-$.

Те левые лучи, которые мы вводили, можно назвать замкнутыми левыми лучами. Введем понятие обобщенного или открытого левого луча (все это мы строим, чтобы описать понятие количества, если оно бесконечное).

Обобщенный или нестрогий левый луч в линейно упорядоченном множестве A с порядком $R \subset A \times A$ - это всякое подмножество $\Lambda \subset A$, такое что $\forall \lambda \in \Lambda\ \forall a \in A \quad (aR\lambda) \Rightarrow\ a \in \Lambda$ (то есть левым лучом называется такое подмножество, которое вместе с каждым элементом содержит и все более левые по отношению к нему).

В частности, если взять в качестве упорядоченного множества прямую, а в качестве порядка отношение между числами $\leq$, тогда вся прямая не является левым лучом, и пустое подмножество не будет левым лучом, потому то лучи определялись с вершиной, где вершина – самый правый элемент. Однако пустое подмножество и вся прямая являются в этой же прямой левыми лучами.

Теперь мы можем сделать следующий шаг для определения того, что такое канонические кардиналы.

***Теорема (можно найти в книге Колмогорова и Фомина)*:**

Если A_1 и A_2 - вполне упорядоченные множества с их порядками соответственно R_1 и R_2, то оказываются возможны три случая:

1) $\exists!$ изоморфизм между вполне упорядоченными множествами (A_1, R_1) и (A_2, R_2).
2) $\exists!$ изоморфизм на образ или представление φ: (A_1, R_1)в (A_2, R_2), такое что $\varphi(A_1)$ является обобщенным левым лучом в (A_2, R_2), отличающимся от (A_2, R_2), $\varphi(A_1)$ - левый луч без вершины, все элементы в A_2, которые с точки зрения порядка R_2 строго меньше некоторого элемента в A_2 $(L_b \backslash \{b\})$.
3) $\exists!$ представление φ: (A_2, R_2)в (A_1, R_1) такое, что образ $\varphi(A_2)$ является обобщенным левым лучом в (A_1, R_1) вида $L_b \backslash \{b\}$.

3. Мощность множества. Кардинальные числа.

Канонический ординал

Некоторые аксиоматически вводимые объекты оказываются копиями хорошо известных. Так, например, была рассмотрена система подмножеств, как пример исходного частично нелинейно упорядоченного множества. Оказалось, что такой системе изоморфны и произвольные частично упорядоченные аксиоматически определяемые множества.

Дадим определение *ординалам* или порядковым числам. Существует 3 подхода:

Ординал – это

1) вполне упорядоченное множество;
2) класс изоморфных вполне упорядоченных множеств;
3) канонические ординалы.

В первом варианте рассматривается одно вполне упорядоченное множество, во втором случае с помощью одного множества рассматриваем все, которые ему изоморфны. В третьем случае из этих изоморфных множеств выделяем специальное, которое будет обобщением тех множеств. В дальнейшем будем придерживаться третьего понимания, потому как все остальные ординалы будут изоморфны каноническому. Ординалы используются для построения объектов по трансфинитной рекурсии.

Аксиома вполне упорядочения:

На каждом, сколь угодно большом множестве, существует вполне упорядочение.

Определим способ построения канонического ординала. Способ является расширением обычной математической индукции на бесконечные числа шагов.

Отождествляем натуральные числа с множествами, как мы делали в предыдущих семинарах.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \leftrightarrow & 0 \\ \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) & \leftrightarrow & 1 \\ \{0; 1\} & \leftrightarrow & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ \{0; 1; \dots; n-1\} & \leftrightarrow & n \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

После мысленного прохождения всех натуральных чисел, рассмотрим следующее за всеми порядковое число, являющееся множеством всех натуральных чисел, начиная с нуля:

$$\aleph_0 = \{0, 1, \dots, n, \dots\}.$$

Это первый бесконечный ординал, потому как натуральные числа вполне упорядочены, а значит, в любом конечном подмножестве есть первый элемент. Далее можем продвигаться по такой же формуле, переходя к следующему: $\aleph_0 + 1 = (\aleph_0)'$. И так по шагам мы можем продвинуться далее: $\aleph_0 + n' = (\aleph_0 + n)'$. Заметим:

$$\begin{gathered}
\aleph_0 + 1 = (\aleph_0)' \\
\vdots \\
\aleph_0 + n' = (\aleph_0 + n)' \\
\vdots \\
\bigcup_{n \in \aleph_0} (\aleph_0 + n) \equiv \aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 \\
\vdots \\
n\aleph_0 \\
\vdots \\
\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2 = \bigcup_{n \in \aleph_0} (n \cdot \aleph_0) \\
\vdots \\
\aleph_0^n \\
\vdots \\
\aleph_0^{\aleph_0} \\
\vdots
\end{gathered}$$

В соответствии с конструкцией это все еще будут счетные множества (можно установить взаимооднозначное соответствие между натуральными числами и каждым множеством, однако порядок соответствия не сохраняется). Возникает вопрос. Можно ли вполне упорядочить несчетное множество? Да, можно. Об этом говорит аксиома.

Получим несчетное множество путем наращивания количества шагов существующей конструкции. Установим, что каждое вполне упорядоченное множество изоморфно одному из канонических ординалов.

Рассмотрим конструкциию класса вполне упорядоченных канонических ординалов. Применим принцип индукции, опирающийся на вполне упорядочение. Пусть дано произвольное вполне упорядоченное множество (M, $\preccurlyeq$). Получим изоморфный ему канонический ординал. Пусть первый элемент $m_0 = \min(M)$. m_0 сопоставляем пустое множество $\emptyset$. С пустым началом любого другого ординала сопоставим пустое начало M: $L_{m_0} \leftrightarrow \emptyset$. Получаем один из канонических ординалов. Предположим, что найдется элемент $n \in M \quad L_{\prec n} = \{m \in M : m \prec n\}$, с каждым n можем сопоставить луч, и если предположим, что каждому числу m, которое было меньше n сопоставлено ординальное число ($L_{\prec n} \ni m \mapsto \alpha_m$). $L_{\prec m}$ изоморфно началу α_m ($L_{\prec m} \leftrightarrow \alpha_m$). То есть для некоторого n мы уже умеем сопоставлять элементу левого луча с вершиной n соответствующий канонический ординал. Сопоставление такое, чтобы между начальным открытым лучом с вершиной m и ординалом , как упорядоченным множеством с номером m, существовал изоморфизм. Этот изоморфизм по теореме из прошлой лекции единственен. Тогда рассматриваем 2 случая:

1) $\exists m \in M => \alpha_n$ которые находятся непосредственно перед *n,* это означает, что $n = min\{k: m \prec k\}\&\{k: m \prec k \prec n\} = \emptyset$. $\alpha_n = (\alpha_m)'$.
2) N не имеет непосредственного предшественника. $\forall m \prec n \ \{k: m \prec k \prec n\} \neq \emptyset$. Такой случай называют *предельным, n* называют *предельным элементом упорядоченного множества*

   **между предельным элементом и любым меньшим есть промежуточные. Среди натуральных чисел такого эффекта нет. Это эффект бесконечности, теорию которой мы и развиваем.*

   В этом случае $\alpha_n = \bigcup_{m \prec n} \alpha_m$.

Таким образом, каждому элементу из *M* мы сопоставили некоторый ординал. Самому множеству *M* сопоставляем объединение всех ординалов:

$$M \updownarrow \bigcup_{m \in M} \alpha_m$$

Данная конструкция корректна. Предположим противное: $\exists m_- \in M$, для которого не удалось сопоставить α_{m_-}. Элемент m_- не может быть первым (предыдущим элементам сопоставлено пустое множество, соответственно и пустой ординал). $(M, \preccurlyeq) \supset \{m \in M : m \nrightarrow \alpha\} \neq \emptyset$, $m_{-1} = min\{m \in M : m \nrightarrow \alpha\}$, *всем элементам до* m_{-1} сопоставлены α. Значит для m_{-1} можем рассмотреть 2 случая, такие же, как для произвольного *n*. Тогда можем перейти к n и на основании прошлого рассмотрения сопоставить этому элементу α_n. Получаем противоречие.

Таким образом, произвольному вполне упорядоченному множеству можно сопоставить новое вполне упорядоченное множество, канонический ординал: $M \leftrightarrow$

$\bigcup_{m \in M} \alpha_m$. По определению все ординалы, полученные таким объединением канонических ординалов – канонический ординал.

Кардинальные числа

Рассмотрим часть в классе вполне упорядоченных ординалов. Можно доказать (доказательство приведено в рекомендованной литературе):

$$\{\alpha : \alpha \text{ биективен } \alpha_0\} - \text{множество.}$$

Назовем мощностью α_0, или $Card\,\alpha_0$ наименьшее среди канонических ординалов, которой биективен α_0. Каждому множеству можем сопоставить его мощность.

Введем обозначение канонических ординалов: CO.

Класс всех возможных кардинальных чисел: С$\mathbb{C}$.

$$C\mathbb{C} \subset CO$$

Если рассматриваем два произвольных ординала α, β в классе CO, то есть 2 случая:

1) α и β изоморфны, тогда $\alpha = \beta$;
2) $\alpha \neq \beta$, тогда один изоморфен левому лучу другого: $\exists x \in \beta$ α изоморфен $L^{\beta}_{<x}$, причем внутри канонических ординалов неравенство означает принадлежность как элементов ($\prec <=> \in$), тогда $\alpha \underset{\in}{\overset{\subset}{}} \beta$.

Каждому множеству можно сопоставить кардинал. Для этого необходимо вполне упорядочить множество, ему сопоставить изоморфный канонический ординал, которому сопоставляем кардинальное число. Кардинальное число может быть не натуральным числом, а бесконечным множеством, тогда оно называется кардинальным числом или количеством.

Таким образом, мы описали обобщение понятия порядкового числа, включая бесконечные (трансфинитные) числа с помощью ординалов.

$$\underset{C\mathbb{C}}{\text{колич.}} \;\subset\; \underset{CO}{\text{порядк.}}$$

Континуум гипотеза

$\mathcal{P}(M) \equiv \{A : A \subset M\}$

$2^{Card\,(M)} := Card(\mathcal{P}(M)) > Card\,(M)$ – теорема для конечных и бесконечных множеств.

В частности $\aleph_0$ - канонический кардинал, кардинальное число, выражающее счетную мощность. $\aleph_0 \prec 2^{\aleph_0}$, где $2^{\aleph_0}$ - континуальный канонический кардинал или континуум. Континуум гипотеза гласит, что между счетным каноническим кардиналом и континуальным не существует других кардиналов.

Ко всем известным аксиомам можно добавить предположение, что промежуточных мощностей нет, и получится непротиворечивая теория. Можно предположить, что промежуточные мощности есть и тоже получить непротиворечивую теорию. Теории не возможно различить по их следствиям для прикладной математики, поэтому для экономии принято считать, что промежуточных мощностей нет. Если считать, что они есть, то оказывается, что между счетной мощностью и континуальной может быть континуум попарно различных промежуточных мощностей ($2^{\aleph_0}$). В данном курсе будем считать, что промежуточных мощностей нет.

Направленные множества и базис фильтра

Еще один важный класс упорядоченных множеств – направленные множества.

Частично упорядоченное множество M с порядком R (M, R) называем *направленным*, если $\forall (m_1, m_2) \in M \times M \;\; \exists m_3 \in M \left((m_1 R m_3) \& (m_2 R m_3)\right)$.

Рассмотрим систему конечных подмножеств элементов N с порядком $\subseteq$: $\left(\mathcal{P}_{<\infty}(N) = \left\{A \subset N : CardA \in \begin{matrix} \aleph_0 \\ < \infty \end{matrix}\right\}, \subseteq\right)$. Тогда два конечных подмножества содержатся в их объединении.

Направленные множества определяют один из способов описать наиболее общее понятие предела по системе множеств.

Пределы бывают двух типов:

1) По системе множеств ← кратные;

2) Повторные пределы.

Рассмотрим первый случай (второй – последовательное применение первого).

База (базис) фильтра – система множеств S, такая что

$$\begin{cases} \emptyset \neq S \not\ni \emptyset \\ \forall (A, B) \in S \times S \;\; \exists C \in S (C \subset A \cap B) \end{cases}$$

Замечание: базис фильтра направлен отношением обратного включения подмножества $\supseteq$ (аксиома направленного множества).

Пусть дано непустое направленное множество. Построим по такому множеству базис фильтры.

Замечание: Если (M, R)$\neq \emptyset$ направленное частично упорядоченное множество, то $\forall m \in M$ правый луч, содержащий свою вершину m $R_m = \{x \in M : mRx\} \neq \emptyset$ тогда система всех правых лучей $\{R_m : m \in M\}$ является базой фильтра: $R_a \cap R_b \supset R_c$, где c такой, что aRc, bRc, тогда всякий элемент x, который правее c по условию транзитивности будет правее b и правее a. Тогда весь луч с вершиной c - правый луч R_c тех элементов, которые правее c будет содержаться в $R_a \cap R_b$. Не пустота семейства вытекает из не пустоты M: по построению каждый элемент семейства не пуст, в пересечении двух элементов мы нашли третий и нашли базу фильтра. Таким образом, стремление к бесконечности можно описывать с помощью правых лучей в направленном множестве.

Подведем итоги. Мы закончили обсуждение того, как определить количество элементов в множестве. Теперь мы можем говорить о том, какие бывают бесконечные размерности. Можем сравнивать любые два множества с помощью их кардинальных чисел:

Теорема:

Все множества сравнимы по мощности (кардинальным числам).

4. Алгебраические структуры

Полугруппы

Алгебраические операции обладают свойствами, которые часто аксиоматизируют (например, коммутативность или перестановочный закон, ассоциативность или сочетательный закон для операции сложения и умножения). Из свойств натуральных чисел выводятся свойства операций на натуральных числах, множество натуральных чисел расширяется до множества целых и так далее до вещественных чисел. При этом оказывается, что свойство ассоциативности сложения предшествует свойству коммутативности (при выводе из определения свойства перестановочности слагаемых необходимо использовать ассоциативность). Таким образом, в некотором смысле ассоциативность более важное свойство. В алгебре есть понятие, описывающее множество с ассоциативным свойством - полугруппа.

Полугруппой называется множество M с некоторой операцией $\cdot(m_1, m_2) = m_1 \cdot m_2$ на нем, которая обладает свойством ассоциативности (M, ·), $\cdot : M \times M \to M$, $\forall (m_1, m_2, m_3) \in M \times M \times M \quad (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$.

В курсе дифференциальных уравнений появляются разрешающие полугруппы для автономных уравнений на полупрямой, иногда даже группы преобразований пространств, связанных с дифференциальным уравнением - однопараметрические полугруппы. В данном случае полугруппы от параметра не зависят, а являются алгебраической структурой.

Алгебраическая структура – заданы множества и операции, произведения этих множеств в некотором количестве принимают значения в других комбинаций этих множеств.

Проведем параллель с частичным порядком.

Было сказано, что типичным представителем частично упорядоченных множеств являются системы подмножеств с отношение быть подмножеством. Позже был сформулирован факт, что какое бы мы не взяли частично упорядоченное множество, оно будет обладать копией среди некоторого набора подмножеств. В этом и состояло представление любого частично упорядоченного множества системой подмножеств с отношением включения.

Для операции со свойством ассоциативности, для полугрупп, есть такой типичный пример.

Такое свойство отображения можно получить для *композиции функций*. Введем стандартное обозначение:

($A^B = \{f: B \to A\}$) - множество всех функций из B в A, у которых B точная область определения, A содержит значения, не обязано быть точной областью значений функции, главное, чтобы образ функции f содержался в A.

Рассмотрим в качестве M множество отображений из A в себя: $M_A = A^A$. Эти функции хороши тем, что к результату применения функции можно опять применять функцию из этого же множества. На таком множестве функций определена операция композиции для произвольной точки a: $(fog)(a) = f\big(g(a)\big)$. Как хорошо известно, композиция функций удовлетворяет свойству ассоциативности. Таким образом, пример универсален. Любая полугруппа может быть вложена в полугруппу M_A с операцией композиции $(A^A, \circ)$. любые другие полугруппы имеют в этой полугруппе свою точную копию, то есть такой инъективный образ, что при этом операция над двумя элементами в полугруппе будет отвечать композиции соответствующих функций.

Отметим еще одно свойство этой полугруппы. *Тождественное отображение* $id_A: a \mapsto a$ при композиции с любой функцией с обеих сторон дает снова эту функцию $f \circ id_A = id_A \circ f = f$. Это свойство позволяет назвать тождественное отображение нейтральным элементом.

Двусторонний нейтральный элемент в полугруппе M с операцией $\cdot$ $(M,\cdot)$ – такой элемент $e \in M$, что $\forall m \in M \;\; m \cdot e = e \cdot m = m$.

Нейтрального элемента может не быть. Например, если возьмем множество натуральных чисел, начинающееся с 1, а в качестве операции возьмем сложение, нейтрального элемента не будет.

Полугруппа, обладающая нейтральным элементом, называется *моноидом*.

Легко показать, что нейтральный элемент, если он есть, может быть только один. Если их 2, то $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$.

Замечание: если в полугруппе M с ассоциативной операцией $\cdot$ $(M,\cdot)$ нет нейтрального элемента, то $\exists$ полугруппа M_1 с операцией $\cdot_1$ $(M_1,\cdot_1)$ и инъективное отображение $M \underset{J}{\hookrightarrow} M_1$ которое сохраняет операцию $\forall (m_1, m_2) \in M \times M$: $J(m_1 \cdot m_2) = J\,(m_1) \cdot J(m_2)$, причем новая полугруппа будет являться моноидом.

$\{e_1\} \cup M = M_1$;

$e_1 \notin M, J(m) = m$;

$\forall m \in M \quad e_1 \cdot_1 m = m \cdot_1 e_1 = m$;

$e_1 \cdot_1 e_1 = e_1$ – *идемпотентность степени 2;*

$\forall (m_1, m_2) \in M \times M$: $\quad J(m_1 \cdot m_2) = J\,(m_1) \cdot J(m_2)$ – *гомоморфизм* (частный случай представления);

Замечание: $\forall$ полугруппы $(M,\cdot)$ $\exists$ инъективный гомоморфизм J_3 этой полугруппы в моноид вида $(A^A, \circ)$.

$$(M,\cdot) \underset{J_1}{\hookrightarrow} (M_1,\cdot_1) \underset{J_2}{\hookrightarrow} (M_1^{M_1}, \circ);$$

$$J_3 = J_2 \circ J_1, \ \ \big(J_2(m_1)\big)(m_2) = m_1 \cdot_1 m_2;$$

Проверим гомоморфность. $\big(J_3(m_1 \cdot m_2)\big)(m_3) = \big((m_1 \cdot_1 m_2) \cdot_1 m_3\big) = \big(m_1 \cdot_1 (m_2 \cdot_1 m_3)\big) = \Big(m_1 \cdot_1 \Big(\big(J_3(m_2)\big)(m_3)\Big)\Big) = \big(J_3(m_1)\big)\Big(\big(J_3(m_2)\big)(m_3)\Big) = \Big(\big(J_3(m_1)\big) \circ \big(J_3(m_2)\big)\Big)(m_3)$.

Проиллюстрируем инъективность. Допустим, образы двух элементов совпали:

$$J_3(m_1) = J_3(m_2).$$

Тогда две функции одинаковы, в каждой точке области определения они принимают одинаковые значения. В качестве точки определения в моноиде $(M_1,\cdot_1)$ необходимо взять нейтральный элемент e_1:

$$m_1 \cdot_1 e_1 = \big(J_3(m_1)\big)(e_1) = \big(J_3(m_2)\big)(m_1) = m_2 \cdot_1 e_1 \quad => \quad m_1 = m_2.$$

Не смотря на то, что мы рассмотрели только сочетательный закон для сложения и умножения натуральных чисел и аксиоматизировали его, рассмотрели все множества, на которых зафиксирована операция с таким свойством, оказалось, что не только представителями таких полугрупп являются полугруппы отображения, но и ничего более сложного возникнуть не может.

Группы

Частным случаем полугрупп и моноидов являются *группы*, где для каждого элемента есть обратный.

Группа – произвольный моноид $(M,\cdot,e)$ такой, что $\forall m \in M \quad \exists!\, m^{-1} \qquad m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = e$.

m^{-1} – *обратный элемент* элементу m.

$(A^A)_b = \{f: A \ \to A, f - \text{биекция } A \text{ на } A\}$, легко показать, что мы получили моноид, потому что композиция биекций – биекция, ассоциативность по-прежнему выполняется, тождественный элемент является биекцией, у каждой функции есть единственная обратная.

В квантовой теории группы играют важнейшую роль. Элементарные частицы, которые подчиняются законам квантовой механики, состояния атомов часто классифицируются по представлениям некоторых групп. Теория представлений групп развивалась вместе с квантовой механикой, являющейся частью квантовой теории.

Замечание (обобщение теоремы Келли о представлении конечных групп перестановками): Если в обозначениях и терминологии предыдущего замечания полугруппа $(M,\cdot)$ уже была моноидом = $(M_1,\cdot_1)$ и даже группой, то $J_3 \equiv J_2$ является инъективным гомоморфизмом (мономорфизмом или точным представлением) группы $(M,\cdot)$ в группе $((M^M)_b,\circ)$.

Обратимся к свойству перестановочности элементов. Оно крайне важно, потому что квантовая механика начинается с гильбертовых пространств, которые являются векторными, в которых операция сложения должна быть перестановочной. Каждое векторное пространство должно быть группой по сложению векторов.

Если выполнено свойство для любых двух элементов из полугруппы $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$, то она называется *коммутативной (абелевой)*.

Если полугруппа рассматривается в аддитивной записи, то + вместо $\cdot$ обозначает операцию, нейтральный элемент часто обозначается нулем 0. В векторном пространстве нейтральный по сложению вектор называется нулевым. Поскольку нейтральный элемент единственный, а мы часто рассматриваем разные пространства, разные группы, то к 0 можно приписывать в качестве индекса обозначение группы.

Примеры коммутативных групп: группа целых чисел по сложению, группа ненулевых рациональных/вещественных/комплексных чисел по умножению. Так же можно привести универсальный пример для коммутативных групп в качестве групп отображений.

Структуры с двумя операциями, кольца

Рассмотрим структуры, в которых есть 2 операции.

Пусть задана абелева группа с нейтральным элементом $(A, +, 0)$, тогда возникает богатая структура гомоморфизмов. Можем рассматривать гомоморфизмы $Hom\big((A,+,),(A,+)\big) \subset (A^A, \circ)$ из A в себя - эндоморфизмы $End(A,+)$, которые снова образуют *подполугруппы* (подмножества в множестве всех отображений).

Подмножество M_0 в полугруппе $(M,\cdot)$ называется *подполугруппой*, если $M_0 \cdot M_0 \subset M_0$ или $(M_0, \cdot\restriction_{M_0 \times M_0})$ является полугруппой.

Таким образом, в полугруппе всех отображений абелевой группы в себя можем выделить подполугруппу эндоморфизмов. И так как тождественное отображение является эндоморфизмом, то это будет *подмоноид*. Если подполугруппа в некотором моноиде является моноидом с прежней единицей, то меньший моноид называется *подмоноидом*.

Если x – произвольное множество, а M – полугруппа M^X, то возникает операция на множестве функций $(M^x, \cdot_x), (f_1 \cdot_x f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ – *поточечные операции* (в каждой точке перемножаем значения функций).

Поскольку в эндоморфизмах группы A в себя $End(A,+)$ образ лежит в группе (моноиде), мы можем рассмотреть поточечные операции. В эндоморфизмах есть более богатая структура: есть операция композиции, есть нейтральный элемент относительно композиции (тождественное отображений на множестве A), кроме того есть операция поточечного сложения эндоморфизмов, обладающая своим нейтральным элементом – $\big(End(A,+);\ \circ, id_A;\ +_E, 0_E\big)$. В этой структуре можем наблюдать новые тождества, связывающие две операции - *дистрибутивные (распределительные) законы*.

$\big((f+_E g)\cdot h\big)(a) = (f+_E g)\big(h(a)\big) = f\big(h(a)\big) +_E g\big(h(a)\big) = \big(f\circ g\big)(a) + \big(g\circ h\big)(a) = \big(f\circ h +_E f\circ h\big)(a)$ $\forall a$ => $(f+_E g)\cdot h = f\circ h +_E g\circ h$, причем коммутативности дистрибутивного закона мы ожидать не можем.

$\big(f\circ(g+_E h)\big)(a) = f\big((g+_E h)(a)\big) = f\big(g(a)+h(a)\big)f\big(g(a)\big) + f\big(h(a)\big) = \big(f\circ g\big)(a) + \big(f\circ h\big)(a) = \big(f\circ g +_E f\circ h\big)(a) \;\; => \;\; f\circ(g+_E h) = f\circ g +_E f\circ h.$

Иначе говоря, операция умножения переводит сумму в сумму. Если операция сохраняет сумму, то ее можно называть аддитивной => умножение на h – *аддитивная* операция в группе эндоморфизмов с обеих сторон – *биаддитивная* операция.

$$\left.\begin{array}{l}(f+_E g)\cdot h = f\circ h +_E g\circ h\\ f\circ(g+_E h) = f\circ g +_E f\circ h\end{array}\right\}$$

– биаддитивность композиции в пространстве эндоморфизмов.

Таким образом, перечислим полученные свойства структур, имеющих 2 операции:

1) являются коммутативными группами по сложению эндоморфизмов $+_E$;
2) полугруппа относительно композиции биаддитивна по отношению к операции сложения абелевой группы.

Такие структуры называются *ассоциативными кольцами* (все эпитеты к кольцам относятся к операции умножения).

Алгебраическим кольцом называется множество с двумя операциями $(A,+,\cdot)$, такое что $(A,+)$ – абелева группа и умножение является биаддитивным
$(f+g)\cdot h = f\cdot h + g\cdot h$
$f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h$

Как раз на множество функций на фазовом пространстве гамильтоновой системы, где фиксирована операция скобки Пуассона (коммутатор) $[\mathrm{A},B] = A\cdot B - B\cdot A$, будет поточечное сложение функций. Скобка Пуассона будет биаддитивной по отношению к сложению, но не будет ассоциативной (будет тождество Якоби) – *неассоциативное кольцо*.

Аналогично можно сказать про множество эндоморфизмов линейных операторов из некоторого векторного пространства в себя.

По аналогии с предыдущими замечаниями о представлениях можно сказать про ассоциативные кольца.

Замечание: ассоциативное кольцо с единицей $(K,+,\cdot)$ имеет инъективный гомоморфизм по обеим операциям в кольцо эндоморфизмов (End(K, +), ∘, $+_E$).

$$K \ni k \mapsto J(k), \qquad \big(J(k)\big)(a) = k\cdot a$$

5. Линейное пространство

Кольца (продолжение)

Кольцо К называется *унитальным*, если есть нейтральный элемент по умножению, который обычно обозначается единицей.

Кольцо К называется *коммутативным*, если операция умножения коммутативна.

Замечание: если кольцо $(K;\ +_E, 0_K; \cdot_K, 1_K)$ унитарное и ассоциативное, то отображение $J_K: K \to End(K, +_K, \cdot_K)$, такое что $\big(J_K(k)\big)(k_1) = k \cdot_K k_1$, является инъективным гомоморфизмом унитальных колец.

Модулем (левым) над произвольным ассоциативным кольцом К $(K;\ +, 0; \cdot)$ (индексы подразумеваются) называется некоторая абелева группа со своей операцией, с которой (в контексте рассуждения), связан кольцевой гомоморфизм (представление) $J: K \to End(A)$.

Каждое кольцо является левым модулем над собственной нижележащей абелевой группой.

Частным случаем модуля является *линейное пространство*.

Линейное пространство

Кольцо с единицей $(K;\ +_E, 0_K; \cdot_K, 1_K)$ называется *полем*, если оно по отношению к умножению ассоциативно, коммутативно, причем $\big(K\backslash\{0\}, \cdot\restriction_{(K\backslash\{0\})^2}, 1_K\big)$ является абелевой группой относительно умножения.

Линейное пространство есть унитальный модуль над полем. Здесь модуль относится к абелевой группе, тогда элементы этой абелевой группы называются векторами линейного пространства. Унитальность относится ко второй части понятия модуля. С группой связано некоторое представление, которое должно единицу переводить единицу (тождественный гомоморфизм абелевой группы). Другими словами, *линейное пространство* – унитальное представление поля эндоморфизмами некоторой абелевой группы по обеим операциям. Абелева группа по сложению называется *множеством векторов* линейного пространства. Векторное и линейное пространства – синонимы.

Обсудим решение задачи о том, изоморфны ли группы вещественных чисел по сложению $(\mathbb{R}, +)$ и комплексных чисел по сложению $(\mathbb{C}, +)$. Можем рассмотреть каждую из этих групп как линейные пространства, в качестве поля возьмем поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по сложению и умножению. Идея решения заключается в следующем: если мы рассмотрим задачу над полем рациональных чисел, то будет наблюдаться изоморфизм линейных пространств над $\mathbb{Q}$, потому что будут равномощные базисы над полем рациональных чисел в одном и другом множествах чисел. Прокомментируем встречающиеся в рассуждении термины.

Пусть абелева группа по сложению $(V, +_V, \vec{0}_V)$ - векторное пространство над некоторым полем скаляров для векторного пространства $(K;\ +_K, 0_K; \cdot_K, 1_K)$ с гомоморфизмом $\big(J(k)\big)(\vec{v}) \equiv k \cdot_V \vec{v},\ \ \cdot_V : K \times V \to V.$

$(+_V,\ \cdot_V)$ называются *линейными операциями* векторного пространства V над K.

Линейная зависимость и независимость

Существует два подхода к определению понятия линейной независимости. Бывает линейная независимость множества векторов, бывает линейная независимости индексированного множества векторов. Сформулируем оба понятия для конечного набора векторов.

Если $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ попарно разные *векторы*, то множество этих векторов $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ называется *линейно зависимым*, если существует набор коэффициентов $(k_1, \dots, k_n) \in (K \times \dots \times K)\backslash\{(0_K, \dots, 0_K)\}$, такой что $\sum_{j=1}^{n} k_j \cdot \vec{v}_j = \overrightarrow{0_v}$.

Подмножество $S \subset V$ называется *линейно зависимым*, если $\exists n \in \mathbb{N}$, если $\exists$ линейно зависимые векторы $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Если множество не является линейно зависимым, то оно *линейно независимо*.

Пустое подмножество следует считать линейно независимым.

Обратимся к определению линейной независимости индексированных семейств.

Индексированное (с помощью множества индексов $j \in I$) *множество элементов* из некоторого множества M – функция $I \to M$. Если эта произвольная функция обозначается f, то вместо f(j) пишут f_j, и вместо f пишут $(f_j)_{j \in I}$.

Часто удобно нумеровать линейно независимые семейства векторов и говорить о зависимости или независимости индексированного набора векторов. Пусть $(\vec{f_j})_{j\in I}$ индексированное множество элементов векторного пространства V над полем K. Это *индексированное множество называется линейно зависимым*, если $\exists n \in \mathbb{N}$ и попарно различные индексы $j_1, \dots, j_n$, такие что существует $(k_1, \dots, k_n) \in (K \times \dots \times K) \setminus \{(0_K, \dots, 0_K)\}$ такой что $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \vec{f_i} = \overrightarrow{0_v}$.

Понятия линейной зависимости для множеств векторов и для индексированных семейств векторов фактически равносильны.

Подмножество $S \subset V$ является линейно независимым тогда и только тогда, когда при некоторой индексации (сюрективное отображение $I \underset{\text{на}}{\to} S$) $(S_j)_{j\in I}$ является линейно независимым.

Линейный базис

Введем понятие базиса, как максимального относительно включения линейно независимого подмножества в векторном пространстве.

Замечание: если в непустом множестве векторов есть непустой вектор, тогда такое множество обязательно линейно зависимое. Векторное пространство – пример линейно зависимой системы, поскольку обязательно содержит ноль.

Максимальное относительно включения $\subset$ линейно независимое подмножество векторного пространства называется *линейным базисом (базисом Гамеля)*.

Рекомендуемая литература:

1) Существование базиса
   - Колмогоров, Фомин (поздние издания), «Элементы теории функций и функционального анализа»;
   - Райков, «Векторные пространства»;

Замечание 1: базис Гамеля всегда существует.

Существование базиса доказывается с использованием факта, опирающегося на аксиому выбора. И более того существование базисов в любом векторном пространстве можно принимать в качестве аксиомы, равносильной аксиоме выбора.

Замечание 2: все базисы в произвольном векторном пространстве V над K имеют одну и ту же мощность, которая называется размерностью пространства V и обозначается dim V.

Мы можем рассматривать векторное пространство как группу над разными полями. Множество вещественных чисел со стандартными операциями сложения и умножения можем рассмотреть как векторное пространство над собой, группу вещественных чисел по сложению $(\mathbb{R}, +)$ можем рассмотреть как векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Относительно разных полей будут разные базисы. В частности, абелеву группу произвольного поля можно рассмотреть как пространство над этим полем со стандартными линейными операциями (сложение, умножение), которые берутся из этого же поля. Тогда будет размерность единица. Если рассмотрим группу вещественных чисел по сложению как векторное пространство над полем рациональных чисел, то размерность будет континуум. Доказать это можно в предположении континуум гипотезы, которая не зависит от остальных аксиом аксиоматической теории множеств (континуум гипотеза выполнена всегда). В данном случае базис $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не более чем континуальный, потому что это подмножество континуального множества вещественных чисел. Он не может быть конечным, потому что тогда всех линейных комбинаций конечного числа векторов было бы конечное число. Размерность не может быть счетной, поскольку если бы базис был счетный, тогда конечных комбинаций над $\mathbb{Q}$ было бы счетное число, что противоречит факту , который будет сформулирован позднее (о групповом изоморфизме множеств вещественных и комплексных чисел по сложению). Таким образом, размерности относительно разных полей будут разными, поэтому вводят индексы: $\dim V = dim_K V$.

Поле скаляров K для векторного пространства V называется *основным полем* векторного пространства.

Замечание 3: если $B(\subset V)$ является базисом Гамеля в векторном пространстве V с основным полем K, то $\forall \vec{x} \in V \quad \exists!$ коэффициентная функция $k^{\vec{x}}: B \to K,$ такая что :

1) $\{\vec{b} \in B: k^{\vec{x}}(\vec{b}) \neq 0_K\}$ конечно;
2) $\vec{x} = \sum_{b \in B} k^{\vec{x}}(\vec{b}) \cdot \vec{b}$ (если $(b_j)_{j \in I}$ биекция I на B, то можно записать равенство в терминах индексов более удобным способом, заменив $k^{\vec{x}}(b_j)$ на $k_j^{\vec{x}}$: $\vec{x} = \sum_{j \in I} k_j^{\vec{x}} \cdot \vec{b}_j$, в частности $b_j = j = \vec{b},\ \ \vec{x} = \sum_{\vec{b} \in B} k_{\vec{b}}^{\vec{x}} \cdot \vec{b}$).

Кроме того уместно вспомнить, что любое множество, например, множество индексов можно линейно упорядочить и даже вполне упорядочить. Этот факт равносилен аксиоме выбора.

Иногда на индексах выгодно иметь упорядоченность, потому что, когда мы имеем упорядоченное множество индексов, обсуждая линейную независимость этой системы, мы должны взять произвольное конечное подмножество по увеличению (расположить так, чтобы индексы j строго возрастали), что эквивалентно попарной различности элементов.

Закончим обсуждение задачи. Теперь мы имеем понятие мощности базиса, у нас есть две континуальные группы. И получается, что если бы размерность $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ была бы не более чем счетной, то есть мы могли бы найти не более чем счетный базис. Тогда конечных линейных комбинаций (хотя бы один элемент не нулевой) было бы возможно не более чем счетное число. Таким образом, рассматривая $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ и зная, что $\mathbb{R}$ континуально, мы понимаем, что базис не может быть счетен. Тогда в силу континуум гипотезы он обязан быть как минимум континуальным, а больше чем континуум он быть не может в обоих случаях. Таким образом, имеем два континуальных базиса. Если мы имеем одинаковые мощности базисов, то по формулам мы видим, что векторы находятся во взаимном однозначном соответствии между собой.

Пусть роль V играет вещественное пространство $\mathbb{R}$, W – векторное пространство $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$, $W \ni \vec{z} = \sum_{b \in B'} k_{b'}^{\vec{z}} \cdot \vec{b}'$. Тогда имея биекцию между базисами мы сопоставили бы биекцию между их линейными комбинациями. Такое сопоставление между векторами будет биективным гомоморфизмом этих двух абелевых групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{C}, +)$.

6. Представление линейных пространств. Метрические пространства

Представление линейных пространств

Пусть E – некоторое множество, $S \subset \mathcal{P}(E) \equiv \{A: A \subset E\}$ - система его подмножеств. Этим подмножествам мы можем биективно сопоставить функции, которые называются *индикаторными* $1_{A\subset E}: E \to \{0; 1\}$.

Функцию $1_{A\subset E}: E \to \{0; 1\}$ будем называть *индикаторной* для A в E, если она задается формулой $\forall x \quad 1_{A\subset E}(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in E\backslash A \end{cases}$.

Рассмотрим соответствие между всеми подмножествами $\mathcal{P}(E)$ множества A и индикаторными функциями $\mathcal{P}(E) \ni A \mapsto 1_{A\subset E} \in \{0; 1\}^E$. Это соответствие является не только взаимооднозначным, но и биекцией.

Таким образом, на пространстве функций вводится частичный порядок и можно проверить, что включение множеств $A \subset B \subset E$ бывает тогда и только тогда, когда индикаторная функция подмножества A не превосходит во всех точках области определения индикаторную функцию подмножества B $1_{A\subset E} \leq 1_{B\subset E}$.

Таким образом, мы унифицировали метод представлений. Не только алгебраическим системам мы можем сопоставлять функции, но и упорядоченным множествам мы можем сопоставлять упорядоченные множества функции.

Замечание: $\forall$ частично упорядоченное множество $(O, \preccurlyeq)$ $\exists$ монотонная биекция на множество функций $(O, \preccurlyeq) \to (F, \leq)$, где F – некоторое множество индикаторных функций, определенное на общем множестве.

n-мерное евклидово пространство состоит из упорядоченных наборов вещественных чисел $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_j \in \mathbb{R}\}$. При этом множество $\mathbb{R}$ можно заменить на произвольное поле K и обратить внимание на то, что выполнены некоторые общие свойства, которые позволяют элементы таких пространств называть векторами (аксиомы векторного пространства). Представление поля гомоморфизмами абелевой группы по отношению к сложению мы реализуем следующим образом:

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_2)$;

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_2)$;

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$;

$\lambda\cdot\vec{x}=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_2),\ \ \lambda\in\mathbb{R}$;

Так, мы обобщили операции, которые производятся над координатами трехмерного пространства на случай трехмерного пространства. Можно заметить, что все аксиомы выполняются, когда каждому $\lambda\mapsto(\mathbb{R}^n\ni\vec{x}\mapsto\lambda\cdot\vec{x})$. Такое представление поля задает структуру векторного пространства на абелевой группе $\mathbb{R}^n$, которая в аддитивной записи определяется сложением по компонентам.

С полученной алгебраической структурой свяжем функцию. Заметим, что само обозначение пространства мы можем понимать как пространство функций со значениями в множестве из n элементов $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{\{1,\dots,n\}}$. С каждым вектором $\vec{x}$ можем связать функцию $\vec{x}=(x_1,\dots,x_2)\mapsto(f_{\vec{x}}=\big(\{1,\dots,n\}\ni k\mapsto x_k\equiv f_{\vec{x}}(k)\big)$. Так n-мерное пространство является копией некоторого пространства функций. Причем отношения между функциями рассматривались поточечно, так же можно рассматривать и линейные пространства.

Замечание: $\forall$ векторного пространства V над полем K $\exists\ B\subset V\quad\exists$ инъективное отображение $J: V\hookrightarrow K^B$, такое что $\forall\vec{x}\in V,\forall\vec{y}\in V,\forall\lambda\in K$:

$\begin{cases}J(\vec{x}+\vec{y})=J(\vec{x})+J(\vec{y})\\ J(\lambda\vec{x})=\lambda\cdot J(x)\end{cases}$,где операции в пространстве функций подразумеваются поточечными.

В качестве $J(\vec{x})$ можно взять отображение, сопоставляющее элементу $b\in B$ однозначно определяемый коэффициент вектора $\vec{x}$ в базисе B при базисном векторе b, $\vec{x}=\sum\big(J(\vec{x})\big)(\vec{b})\cdot\vec{b}$, B – базис V.

Метрические пространства

Стоит упомянуть факт существования *расстояния*, поскольку мы затронули тему евклидова пространства. С этим фактом связаны факты и понятия, которые в дальнейшем мы будем использовать. Перейдем к напоминанию об общих свойствах функции расстояния. Рассмотрим расстояния на $\mathbb{R}^n\qquad X=\mathbb{R}^n$. Расстояние между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ обычно евклидово, если зададим расстояние формулой: $\rho_2(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$, $(\vec{x},\vec{y}\in X)$. Для такой функции можем записать некоторые свойства.

Свойства функции расстояния $\rho: X \times X \to [0;\ \infty)_{\mathbb{R}}$:

1) Невырожденность $\forall x, y \in X \times X \quad \rho(x, y) = 0 <=> \quad x = y$ (стрелки и индексы опустим);
2) Симметричность $\forall x, y \in X \times X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) Неравенство треугольника $\forall x, y, z \in X \times X \times X \quad \rho(x, z) < \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Аксиома

Если для множества X указана $\rho: X \times X \to [0;\ \infty)_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая указанным свойствам, то такая функция называется *метрикой (функция расстояния)* на X.

Если на X задана метрика, говорят, что задано *метрическое пространство* (X, ρ). Под точками метрического пространства понимаются элементы X.

Покажем, что метрические пространства ничуть не более общие чем пространства функций. Введем понятия метрического подпространства и понятие изометрического отображения (изоморфизма метрических пространств).

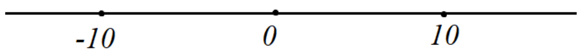
Если X - метрическое пространство с метрикой ρ, $X_0 \subset X$, $\rho_0 = \restriction_{X_0 \times X_0}$, то (X_0, ρ_0) – тоже метрическое пространство, которое называется *метрическим подпространством* в (X, ρ).

Если A - область определения функции f, $f: A \to B$, $A_0 \subset A$, то *сужением* функции f на подмножество A_0 называется новая функция с областью определения A_0 $f \restriction_{A_0}: A_0 \to B$ так что $\forall x_0 \in A_0 \quad \left(f \restriction_{A_0}\right)(x_0) = f(x_0)$. Разница в том, что мы ограничили область определения и в качестве элементов графика f не стали рассматривать такие пары, у которых первые компоненты не являются элементами A_0. Поэтому часто полезно отделять понятие функции от понятия графика. Полезно, например, в понятие функции кроме самого графика включать указание на область определения и на множество, в котором ищем значения. Так делается в категорном подходе.

$\Gamma_{f \restriction_{A_0}} = \Gamma_f \cap (A_0 \times B)$ – формула, задающая график сужения функции на подмножество.

Пример

$X = \mathbb{R}$, ρ - обычное, $X_0 = \{-10, 0, 10\}$



Чтобы обсудить свойства этого трехточечного множества, введем понятие шара в произвольном метрическом пространстве.

Открытый шар радиуса r>0 вокруг точки $x_0 \in X$: $B_r^\rho(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$

Замкнутый шар радиуса r>0 вокруг точки $x_0 \in X$: $\bar{B}_r^\rho(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le r\}$

Рассмотрим шар меньшего радиуса $B_{11}^{\rho_0}(0)$. Он включает в себя все три точки.

Рассмотрим шар большего радиуса $B_{15}^{\rho_0}(-10)$. Точка 10 в этот шар не войдет .

Так, $B_{11}^{\rho_0}(0) \underset{\neq}{\supset} B_{15}^{\rho_0}(-10)$ - в некоторых метрических пространствах шар большего радиуса может быть *собственной частью* шара меньшего радиуса.

Собственная часть – подмножество, которое не совпадает со всем множеством.

Если (X, ρ) и (Y, d) - метрические пространства, φ - биекция X на Y, т.ч. $\forall (x_1, x_2) \in X \times X \ \rho(x_1, x_2) = d\big(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\big)$, то говорят, что φ осуществляет *метрический изоморфизм* или *изометрию* между (X, ρ) и (Y, d).

Введем специальный тип пространства функций, которые будут метрическими пространствами и будут универсальным классом.

Пространство вещественнозначных *ограниченных* функций $B(X; \mathbb{R}) = \left\{f \in \mathbb{R}^X : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\right\}$, $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ – *равномерная метрика* на $B(X; \mathbb{R})$.

Два метрических пространства (X, ρ) и (Y, d) называются *изометричными* между собой, если между ними существует хотя бы одна изометрия.

Замечание: $\forall$ метрического пространства (X, ρ) $\exists$ изометрия φ этого пространства на некоторое метрическое подпространство в пространстве ограниченных функций, определенных на X $\quad (B(X; \mathbb{R});\ \rho_\infty)$.

Пока формально мы не требовали от X даже свойства непустоты. Можно проверить, что если X пусто, то декартов квадрат пуст. Множество таких функций непусто, но график пуст. Таким образом, метрика есть даже на пустом множестве, но она не принимает никакие значения за счет пустоты области определения. Если метрическое пространство пустое, то и изометрия может содержать пустой график. Нельзя доказать, что пустое отображение не является изоморфизмом, поэтому приходится пустое отображение φ тоже считать изоморфизмом.

Рассмотрим непустой случай: $X \neq \emptyset, x^* \in X$:

$$\forall x \in X \ \ \Big(\forall x_0 \in x \ \ \big(\varphi(x)\big)(x_0) = \rho(x_0, x) - \rho(x_0, x^*)\Big).$$

Норма и её свойства

Длина вектора часто обозначается *нормой*, в частности в евклидовом пространстве расстояние до начала координат называют нормой. В формулах с $\sup\limits_{x \in X} |f(x)| < \infty$, выражающим ограниченность функции, означает, что конечно расстояние до нулевой функции. С другой стороны, поскольку в пространстве ограниченных функций мы можем эти ограниченные функции вычитать, и при этом разность снова является ограниченной, называя $\sup\limits_{x \in X} |f(x)| < \infty$ нормой, можем сказать, что $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ - норма разности. Для двух типичных метрик рассмотрим свойства расстояния до нулевых элементов пространств.

в $B(X; \mathbb{R}) \quad \rho_\infty(f, 0) = \big||f|\big|$;

$||\vec{x}||_{\mathbb{R}^n} = \rho_2\big(\vec{x}, \vec{0}\big)$;

Свойства функции нормы $||\cdot||$, $\forall f, g \ \in F$:

1) Неотрицательность;
2) Конечность: $< +\infty$;
3) Невырожденность: $\big||f|\big| = 0 <=> f = 0$;
4) $\forall \lambda \in K, \ \ \big||\lambda \cdot f|\big| = |\lambda| \cdot \big||f|\big|$;
5) $\big||f + g|\big| \leq \big||f|\big| + \big||g|\big|$.

Аксиома:

Пусть F – векторное пространство над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $||f||: F \to [0, +\infty)$ т.ч. выполненв свойства 3, 4, 5, тогда говорят, что функция $||\cdot||$ является нормой на пространстве F.

Векторное пространство над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, с которым связана норма на нем, называется *нормированным пространством*.

7. Нормированное пространство

Нормированное пространство

Норма (или нормирование) на поле K – это функция $p: K \to [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, такая что выполняются следующие свойства:

1) $p(x) = 0 <=> x = 0$ – невырожденность;
2) $p(1) = 1 = p\big((-1)(-1)\big) = p(-1)p(-1)$ - унитальность;
3) $p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y)$ – мультипликативность;
4) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Примеры:

1) модуль на $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
2) $p(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x \neq 0 \end{cases}$, $(\forall K)$;
3) на $\mathbb{Q}$ пусть q – простое $\in \mathbb{N}$ ($q \in \{2, 3, 5, \dots\}$, тогда можно ввести норму с индексом q от рационального числа, представленного в несократимой записи, и воспользовавшись единственностью разложения на простые множители,можем вынести из числителя или знаменателя какую-то степень q, тогда q-адическая норма $p_q\left(\frac{m\text{–цел.}}{n\text{–натур.}} \cdot q^{\gamma}\right) = q^{-\gamma}$. По аналогии с тем, что стандартная норма на числовых полях $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ модули, так же и q-адическая норма обозначается следующим образом $p_q(x) = \big||x|\big|_q = |x|_q$. Поведение белковых молекул протеинов в рабочем, не денатурированном состоянии, описывается такими нормами.

Норма на векторном пространстве V над нормированным полем $(K, |\cdot|)$ - функция $N: V \to [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, такая что выполняются следующие свойства:

1) $N(0) = 0, N(\vec{x}) = 0 => \vec{x} = 0$ - невырожденность;
2) $\forall \lambda \in K \quad \forall \vec{x} \in V \;\; N(\lambda \cdot \vec{x}) = |\lambda|_K \cdot N(\vec{x})$;
3) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in V \times V \quad N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$;

С нормой обязательно связана метрика: $\rho_N(\vec{x}, \vec{y}) = N(\vec{x} - \vec{y}) = N(\vec{y} - \vec{x})$. Не каждая метрика в векторном пространстве может задаваться некоторой нормой. Как только размерность векторного пространства ненулевая, а поле K нормировано – $\dim_{\mathrm{K}} N > 0$, тогда обязательно существуют метрики, которые не задаются нормой. При существовании вектора с ненулевой нормой за счет свойства 2 мы можем выбирать λ, сколь угодно большие по абсолютной величине, и будем получать сколь угодно большие значения нормы. Так, норма на ненулевом пространстве принимает неограниченные значения.

Если с векторным пространством V связана некоторая норма, то такое пространство называется *нормированным пространством* (V, N).

Далее будем рассматривать поля $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, в качестве нормы на поле будем брать модуль $|\cdot|$. Вещественными пространствами описывались все физические системы до появления квантовой механики. После появления квантовой механики. Такие доквантовые системы стали называться классическими. Комплексные пространства, которые описывают чистые состояния квантовых систем, не позволяют выделить вещественные части физическим образом в комплексных координатах.

Терминология, связанная со сходимостью

Обратимся к гензелевым числам. Норма на поле точно так же как норма на векторном пространстве может породить метрику как норму разности двух элементов поля. По этой метрике можно будет пополнить поле, то есть рассмотреть такое поле, в котором фундаментальные последовательности сходятся (имеют предел). В результате пополнения поля рациональных чисел по q-адической норме получится новое поле, на котором будет определена норма, являющаяся продолжением нормы p_q, пополненное поле будет обозначаться $\mathbb{Q}_q$, элементы такого поля называют гензелевыми числами.

Если (X, ρ) - метрическое пространство, рассмотрим последовательность элементов метрического пространства $x \in X^{\mathbb{N}},\ x(n) = x_n,\ x \equiv (x_1, x_2, \dots),\ \ x_0 \in X$,

то $\underset{(n \to \infty)}{x_n \to x_0} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq M_\varepsilon\ \ \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$, тогда говорят, что вся *последовательность x сходится* к x_0 $(x \downarrow x_0)$.

Применяя аналогичное определение к случаю вещественных чисел, можно сказать, что $\underset{(n \to \infty)}{x_n \to x_0}$ в метрическом пространстве равносильна тому, последовательность расстояний $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Введем терминологию, связанную со сходимостью. Сходимость – важнейшее свойство последовательностей метрических пространств. Все, что относится к математическому анализу, опирается на понятие сходимости.

Точкой бесконечного накопления (или предельной точкой) подмножества X_0 в метрическом пространстве (X,ρ) называется всякая такая точка $x_0 \in X$, что $\exists$ инъективн. $x \in (X_0)^{\mathbb{N}}$, такая что $x \downarrow x_0$.

Подмножество X_0 метрического пространства (X,ρ) называется *замкнутым*, если X_0 содержит все свои предельные точки.

Множество U в метрическом пространстве (X,ρ) называется *с-открытым (стар.)*, если X\U замкнуто.

$\tau_{(X,\rho)} \equiv \tau_\rho$ – *«топологией метрического пространства* (X,ρ)*»* называем множество всех открытых подмножеств: $\{U \subset X\colon\ U$ является открытым относительно $\rho\}$.

Открытым шаром в метрическом пространстве (X,ρ) с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r \geq 0$, называется $\{x \in X|_{:}\ \rho(x,x_0) < R\} = B_R^\rho(x_0)$.

Множество $U \subset X$ называется *н-открытым (нов.),* если U является объединением некоторого множества шаров.

Замечание: множество U н-открытое <=> $\left(\forall x \in U\ \ \exists r_x > 0\ \ B_{r_x}(x) \subset U\right)$ *(условие н$'$-открытости)*

Доказательство:

1) $U \subset \bigcup_{x\in U}\{x\} \subset \bigcup_{x\in U} B_{r_x}(x) \underset{=}{\subset} U$.
2) Начнем с пустого множества шаров, $U\emptyset = \emptyset$. Предположим противное замечанию: $\exists x \in \emptyset\ \ \forall r_x > 0\ \ \ B_{r_x}(x) \not\subset U$ – противоречие.
   Рассмотрим множество, состоящее из одного шара. $R > 0, U = B_R(x_0)$. Ищем $r_x > 0$ т.ч. $B_{r_x}(x) \subset B_R(x_0)$ (рис. 7.1), $r_x = R - \rho(x,x_0) > 0$.
   Проверим неравенство $B_{r_x}(x) \subset B_R(x_0)$. Пусть $\forall y \in B_{r_x}(x)$ => $\rho(y,x) < r_x = R - \rho(x,x_0)$, выясним, справедливо ли неравенство $R > \rho(y,x_0)$. $R > \rho(y,x_0) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_0) < R - \rho(x,x_0) + \rho(x,x_0) = R$. Так, каждый открытый шар с фиксированным центром и радиусов оказался н-открытым. Проверим, что объединение н$'$-открытых множеств является н$'$-открытым

множеством. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \ni x \quad x \in U_{\alpha_x} \;\; => \;\; x \in B_{r_x}(x) \subset U_{\alpha_x} \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Так, свойство н$'$-открытости устойчиво относительно объединений.

Замечание доказано в обе стороны.

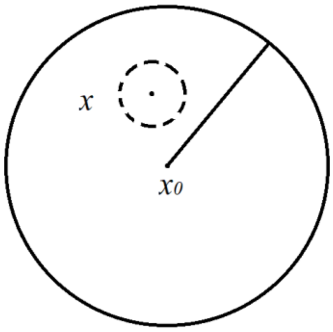


Рис. 7.1

Замечание: с-открытость и н-открытость эквивалентны.

Доказательство:

1) Пусть множество U является с-открытым, $x_0 \in U$, пусть $\forall r > 0 \; \exists x_r \in B_r(x_0)\backslash U = B_r(x_0) \cap \underbrace{(X\backslash U)}_{F}$. Дополнение до с-открытого множества – замкнутое множество.

   Рассмотрим последовательность $r_n = \frac{1}{n}, n_0 = 1$, которая стремится к нулю. Тогда $\rho(x_{r_n}, x_0) < r_n$, $x_{r_n} \in F$. Из того, что $r_n \to 0$, имеем по определению сходимость последовательности $x_{r_n} \to x_0$.

   Последовательно найдем точку n_1. Пусть $r_1 = 1$, $x_{r_1}, \rho(x_{r_1}, x_0) < 1$. Заметим, что не может получиться так, что точка x_{r_1} попадает в x_0, соответственно $0 < \rho(x_{r_1}, x_0)$, тогда рассматривая расстояние в качестве положительного ε, можем найти $n_1 \colon \frac{1}{n_1} < \rho(x_{r_1}, x_0)$.

   $r_2 = \frac{1}{n_1}$, тогда x_{r_2} строго ближе к точке x_0, чем была предыдущая точка x_{r_1}.

   Если построено $x_{r_k}\colon 0 < \rho(x_{r_k}, x_0) < r_k \quad => \quad \exists n_k \colon \frac{1}{n_k} < \rho(x_{r_k}, x_0)$, $r_{k+1} = \frac{1}{n_k}$. Следовательно, $F \ni x_{r_k}, \rho(x_{r_k}, x_0) = \frac{1}{n_k}$; $\frac{1}{n_k} \to 0 \quad => \quad x_{r_k} \to x_0 \;\; =>$ в силу замкнутости F: $x_0 \in F$.

   Так, из открытости по старому определению следует открытость по новому.

8. Метрические пространства. База окрестностей

Продолжим доказательство последнего замечания лекции 7.

Доказательство:

2) Предположим U открыто во втором смысле, докажем, что (X\U) замкнуто. x_0 - предельная точка для X\U в X, $x_0 \in X(X\backslash U) = U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Тогда $\exists \alpha_0$, $x_0 \in B_{\alpha_0}$ => $\exists r > 0,\ x_0 \in B_r(x) \subset B_{\alpha_0} \subset U$, Из чего вытекает противоречие: x_0 не может быть точкой бесконечного накопления для точек дополнения к множеству U, потому что шар вокруг x_0 не содержит ни одной точки, а должно быть бесконечное число точке из дополнения.

Эквивалентность определений доказана.

Непрерывность и окрестности

Пусть есть 2 метрических пространства и отображение $f\colon\ (X,\rho) \to (Y,d)$. Такая *функция* называется *секвенциально непрерывной в точке* $x_0 \in X$ <=> если $\forall$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ => $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$ или, что аналогично, $f\left({}^{\rho}\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) = {}^{d}\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ – *понятие предела*. Нам интересны функции, непрерывные в каждой точке. Такую функцию мы можем найти, например, метрику.

Второе неравенство треугольника для (X,ρ): $\forall x,y,z \in X \times X \times X$ $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y)$ <=> $\begin{cases} \rho(x,z) - \rho(y,z) \le \rho(x,y) \\ \rho(x,z) - \rho(y,z) \ge -\rho(x,y) \end{cases}$ =>

$$\begin{cases} \rho(x,z) - \rho(y,z) + \rho(y,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \\ \rho(x,z) - \rho(y,z) + \rho(y,z) + \rho(x,y) \ge -\rho(x,y) + \rho(y,z) + \rho(x,y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \\ \rho(x,z) + \rho(x,y) \ge \rho(y,z) \end{cases}$$

Из второго неравенства треугольника получим непрерывность функции $f_{\rho,z}\colon X \to \mathbb{R}$, такая что $\forall x \in X\ f_{\rho,z}(x) = \rho(x,z)$.

Если функция f непрерывна во всех точках области определения и отображает ее в другое метрическое пространство, то $f \in C\big((X,\rho);(Y,d)\big)$.

Замечание: $f \in C\big((X,\rho);(Y,d)\big) \Leftarrow\Rightarrow\ \forall\, d -$ замкнутого множества $F \subset Y$ можем рассмотреть прообраз $\overset{-1}{f}(F)(=\{x \in X: f(x) \in F\})$ является -замкнутым в (X,ρ).

Доказательство:

1) Предположим, что $\forall \varepsilon > 0\ \ |B_\varepsilon^\rho(x_0) \cap \overset{-1}{f}(F)|_{\geq \aleph_0}^{\in \infty}$.

   $\varepsilon_n = n^{-1},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ \exists x_n \in \left(B_\varepsilon^\rho(x_0) \cap \overset{-1}{f}(F)\right) \backslash x_0\ \ => \ 0 < \rho(x_n, x_0) < \varepsilon_n =$

   $1/_n, \min\limits_{k<n} \rho(x_k, x_0),\ 1/_n \to 0\ \ =>\ \ x_n \to x_0\ \ =>\ \ f(x_n)\genfrac{}{}{0pt}{}{\in F}{\to f(x_0) \in F}$. В частности $f(x_0)$ - предельная точка последовательности $f(x_n)$. x_0 не может не принадлежать прообразу, потому что замкнутое множество F содержит пределы последовательностей. Следовательно, $x_0 \in \overset{-1}{f}(F)$.

2) Пусть прообраз любого d-замкнутого множества оказывается -замкнутым.

   Предположим противное: $\exists x_0\ \ \exists x_n \overset{\rho}{\to} x_0\ \ f(x_n) \overset{d}{\nrightarrow} f(x_0)\ \ =>\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall N\ \exists n_N > N\ \ d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon_0\ \ \Big(f(x_n) \in Y \backslash B_{\varepsilon_0}^d\big(f(x_0)\big)\Big)$. Другими словами, мы можем выбрать подпоследовательность n_N, причем каждый следующий раз можно выбирать N больше предыдущих.

   $N_1 = 1 => \ n_{N_1} = m_1;$

   $N_2 = m_1 => \ n_{N_2} > N_2 = m_1 = n_{N_1};$

   $n_{N_j} = m_j;$

   Каждый раз x с выбранным номером будет принадлежать дополнению до открытого шара, тогда $Y \backslash B_{\varepsilon_0}^d\big(f(x_0)\big)$ - замкнутое множество, соответственно его прообраз будет замкнутым.

   В последовательности рассуждений проведем индукцию. Если мы построили m_k, который больше всех предыдущих, то можем построить $N_{k+1} = m_k$ и $\exists n_{N_{k+1}} > N_{k+1} = m_k, n_{N_{k+1}} = m_{k+1},\ m_{k+1} > m_k$ => последовательность m_j строго возрастает, и подпоследовательность $f\left(x_{m_j}\right) \in Y \backslash B_{\varepsilon_0}^d\big(f(x_0)\big)$, тогда его прообраз должен быть замкнут. Тогда $\overset{-1}{f}(F) \ni x_{m_k} \to x_0 \in \overset{-1}{f}(F)$. Возникает противоречие. Прообраз сходящейся последовательности F - дополнение до шара, соответственно прообраз шара - открытое множество, содержащее точку x_0. Тогда: $\overset{-1}{f}(F) \ni x_{m_k} \to x_0 \in \overset{-1}{f}(F) \cap B^{\rho}_{\delta_0}(x_0)$. Следовательно, обязательно найдется x_{m_k}, который попадет в прообраз шара радиуса ε_0 с центром в точке x_0: $\exists \delta_0 > 0 \ \overset{-1}{f}\left(B^d_{\varepsilon_0}\big(f(x_0)\big)\right) \supset B^{\rho}_{\delta_0}(x_0)$. То есть $f\big(x_{m_k}\big) \in B^d_{\varepsilon}\big(f(x_0)\big)$ – достигнуто противоречие.

Выводы:

1) По свойству прообразов прообраз дополнения является дополнением прообраза: $\overset{-1}{f}(Y \backslash F) \equiv X \backslash \overset{-1}{f}(F)$.

2) Прообраз открытого множества открыт: $\forall U \in \tau_d \quad \overset{-1}{f}(U) \in \tau_\rho$. В таком виде понятие непрерывности обобщается на произвольные топологические пространства.

Топологией на множестве X называется семейство подмножеств $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, такое что $X \in \tau \ni \emptyset$, и выполнено свойство замкнутости операции $\forall U_1, \forall U_2 \in \tau \ => U_1 \cap U_2 \in \tau \quad S \subset \tau \ => \bigcup_{U \in S} U \in \tau$. Так, семейство открытых относительно метрики множеств называется *топологией, порожденной метрикой*, и для нее выполняются описанные выше свойства.

Предположим $(X, \tau_X) \xrightarrow{f} (Y, \tau_Y)$. В этой ситуации говорим, что *функция f непрерывна* во всех точках, если выполняется соотношение $\forall U \in \tau_Y \quad \overset{-1}{f}(U) \in \tau_X$. И соответственно для множества всех непрерывных отображений $C\big((X, \tau_X), (Y, \tau_Y)\big) \ni f$ (по аналогии с непрерывностью метрических пространств).

Метриками описываются не все необходимые в математике структуры, рассматриваемые для сходимости, метрических пространств оказывается мало. В рассматриваемом курсе достаточно топологических, но скажем пару слов о более общих пространствах. Оказывается, существуют примеры, когда не каждая секвенциально непрерывная функция оказывается непрерывной. Этот факт заставляет выделять класс секвенциально непрерывных отображений отдельно. Мы еще не дали определение секвенциальной непрерывности в точке в смысле открытых подмножеств. По аналогии можем сформулировать понятие непрерывности в точке так, чтобы непрерывность во всех точках соответствовала тому, что прообраз открытого множества открыт. Для этого мы должны рассмотреть понятие окрестности. В метрических пространствах обычно рассматривают шаровые окрестности – шары вокруг точки называют окрестностями. Причем не всегда только открытые шары рассматриваются в качестве окрестностей. С точкизрения теории топологических векторных пространств полезно рассматривать не только открытые окрестности. В силу важности понятия окрестности переформулируем понятие непрерывности в точке в терминах прообразов.

Рассмотрим случай, когда выполняется свойство непрерывности, и проверим, обязательно ли $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \overset{-1}{f}\left(B_\varepsilon^d\big(f(x_0)\big)\right) \supset B_{\delta_\varepsilon}^\rho(x_0)$? Докажем от противного, что такое δ найдется.

Доказательство:

Предположим, что не найдется никакая положительная δ, чтобы было выполнено указанное включение:$\forall \delta > 0 \;\; \exists x_\delta \in B_\delta^\rho(x_0) \setminus \overset{-1}{f}\left(B_\varepsilon^d\big(f(x_0)\big)\right)$.

$\delta_n = {}^1/_n \;\; => \;\; y_n = x_{\delta_n} \xrightarrow{\rho} x_0,\; f(y_n) \xrightarrow{d} f(x_0) \;\; => \;\; \exists n\; f\big(x_{\delta_n}\big) \in B_\varepsilon^d\big(f(x_0)\big)$, что

противоречит выбору (все x предполагались с индексами δ не принадлежащими прообразу шара $B_\varepsilon^d\big(f(x_0)\big)$.

То есть $f\left(B_{\delta_\varepsilon}^\rho(x_0)\right) \subset B_\varepsilon^d\big(f(x_0)\big)$. Прообраз вообще говоря не является шаром , но содержит шар вокруг x_0. Поэтому различают шаровые окрестности и просто открытые окрестности точек.

Каждый шар положительного радиуса с центром в данной точке, если он открыт, называют *открытой окрестностью*. Замкнутый шар называют *замкнутой окрестностью*.

Открытой окрестностью точки x_0 называют произвольное открытое множество, содержащее x_0. *Окрестностью точки* x_0 называют любое множество, содержащее открытую окрестность точки x_0. Это означает, что окрестностью точки x_0 называется произвольное множество, содержащее открытую шаровую окрестность точки x_0.

Простым следствием из только что доказанного является свойство для метрических пространств:

Функция f непрерывна в x_0 <=> $\forall$ окрестности точки $f(x_0)$ ее прообраз относительно f является окрестностью точки x_0.

Такое определение непрерывности в точке позволяет перейти к случаю топологических пространств.

Если $U \in \tau$, то элемент топологии τ называется τ-*открытым или открытым в топологии* τ.

Открытой окрестностью точки x_0 *в топологическом пространстве* (X,τ) называется любое $U \in \tau$, такое что $U \ni x_0$.

Произвольное множество A называется *окрестностью точки* x_0, если A содержит открытую окрестность точки x_0.

Пусть функция $f\colon (X,\tau_X)\xrightarrow{f}(Y,\tau_Y)$, $x_0 \in X$. Скажем, что $f \in C(x_0) <=> \forall$ окрестности $f(x_0)$ $\overset{-1}{f}(V)$ – окрестность точки x_0. Такое определение непрерывности в точке в терминах окрестности обобщает непрерывность в метрическом смысле с шарами. И легко проверить, что непрерывность в каждой точке равносильна непрерывности в том смысле, что прообраз любого открытого множества открыт. Для этого стоит упомянуть факт: $U \in \tau_X$ <=> в (X,τ_X) U является окрестностью каждой своей точки – *критерий открытости относительно* τ_X.

Базисная система окрестностей и база фильтра

Важность понятия окрестностей мы рассмотрели. Свяжем построение метрической топологии с более общим понятием. Метрическая топология состояла из таких множеств, которые являются объединениями открытых шаров.

На одномерной прямой есть понятие расстояния между точками открытыми шарами являются конечные открытые интервалы относительно своей середины. Середина интервала – центр шара. Можно доказать, что любое не пустое открытое множество на прямой относительно стандартной топологии, которая порождена расстоянием на прямой, метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, тогда $\left(\tau_\rho \backslash \{\emptyset\}\right) \ni U \ \ => $ конечное или счетное объединение интервалов (α_j, b_j), причем концы могут быть бесконечны. Причем можно потребовать, чтобы эти интервалы были попарно непересекающимися.

В двумерном случае такого простого описания всех открытых множеств мы не дадим, но шары в таком случае обычные круги. Шары можно описать, а любое открытое множество это объединение шаров.

Эту ситуации математики решили аксиоматизировать и ввести понятие *база топологии* – запас открытых множеств, по которому восстанавливаются все остальные открытые множества.

Базой топологии τ называется $\forall \beta \subset \tau$, такая что $\{\bigcup \beta_0 : \ \beta_0 \subset \beta\} = \tau$.

Это свойство можно сформулировать в терминах открытых окрестностей точек.

Базисной системой окрестностей точки x_0 топологического пространства X называется такая система B окрестностей, что $\forall$ окрестности V точки x_0 $\exists U \in B$, такое что $U \subset V$. Такую базисную систему окрестностей еще называют локальной базой окрестностей точки x_0. Базу всех окрестностей называют фильтром.

Рассмотрим множество всех окрестностей точки x_0 и параллельно базисной системе окрестностей.

Множество всех окрестностей: $\Phi_{x_0}^{\tau}$.

Базу обозначили как B.

Базисная система окрестностей точки x_0 не пуста $\emptyset \neq B$, кроме того она состоит из окрестностей точки x_0, а каждая открытая окрестность точки x_0 содержит открытую окрестность этой точки, а эта открытая окрестность содержит точку x_0. Таким образом:

1) $\emptyset \neq B \not\ni \emptyset;$

Если рассмотрим две базисные окрестности, в их пересечении есть пересечение соответствующих открытых окрестностей, тогда их пересечение также содержит x_0 *и* является открытым. Таким образом:

2) $\forall V_1 \in B \quad \forall V_2 \in B \quad \exists V_3 \in B,$ такая что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

Аксиома

Любую систему множеств, обладающую свойствами 1 и 2, называют *базой множества или базой фильтра*.

Перечислим свойства, которые приведут нас к понятию фильтра.

0) $\emptyset \notin \Phi$
1) $X \in \Phi$;.
2) $\Phi^{\tau}_{x_0} \ni V \subset W \subset X \quad => \quad W \in \Phi^{\tau}_{x_0};$
3) $\forall V_1 \in \Phi^{\tau}_{x_0} \quad \forall V_2 \in \Phi^{\tau}_{x_0} \quad V_1 \cap V_2 \in \Phi^{\tau}_{x_0}.$

Аксиома

Фильтром на множестве X называется любое такое семейство его подмножеств *Ф,* для которого выполняются свойства 0-3.

9. Фильтр окрестностей. База фильтра

База фильтра и фильтр

Определения базы фильтра и фильтра см. в лекции 8.

Базу называют базисом фильтра потому что по каждой базе мы можем построить много фильтров.

Замечание: если B – база и $B \subset \mathcal{P}(M)$, тогда $\{M_1 \subset M\colon \exists b \in B, \text{т.ч. } b \subset M_1\}$ - *фильтр на M_1, «породженный» базой B.*

Проверка этого замечания оставлена в качестве домашнего задания.

В начале курса высшей математики обязательно есть понятие предела, которое использует окрестности точек. Наиболее общее понятие предела использует ….

В наиболее общей постановке существует два аспекта понятия предела. Бывают пределы по базам, однократные, - обобщение понятия предела, выраженного в терминах окрестностей. Это понятие эквивалентно понятию предела по фильтру. А также бывают пределы по направленным системам. К эквивалентности понятий пределов мы придем. Все три эквивалентных между собой типа пределов относятся к однократному пределу. Кроме того можно брать повторные пределы по разным аргументам.

Можно увидеть, что относительно обратного включения $\supset$ (множество больше относительно этого отношения, если оно меньше по запасу точек). Фильтр или база образуют направленную систему, потому что за любыми двумя элементами мы найдем третий, который в смысле обратного включения больше чем каждый из двух наперед заданных.

Если B_1, B_2 – базы, то B_1 *тоньше* B_2 $\overset{\prec}{\iff}$ $\forall b_2 \in B_2 \quad \exists b_1 \in B_1 \quad b_1 \subset b_2$.

B_2 *грубее* если $B_1 \prec B_2$.

В упомянутом случае открытых окрестностей система открытых окрестностей тоньше системы всех окрестностей. С другой стороны обратное тоже верно, поскольку произвольная открытая окрестность является одной из всех окрестностей. То есть система всех окрестностей тоньше системы открытых окрестностей.

Когда $(B_1 \prec B_2) \& (B_2 \prec B_1)$ $\iff$ B_1 *эквивалентна* B_2.

Так, можно сказать, что построенный фильтр, порожденный базой B $\Phi_B(M)$ единственный фильтр на M, который эквивалентен базе B.

Доказательство:

1) По построению база B тоньше, чем построенный по ней фильтр. С другой стороны, так как включение рассматривается нестрогим, то в качестве M_1 можем брать элементы базы. Таким образом, база является частью фильтра и тоньше него. Фильтр тоньше базы, потому что он эту базу содержит. Так $B \underset{\prec}{\subset} \Phi_B(M) \prec B$.
   Таким образом, фильтр эквивалентен.

2) Проверим единственность. Пусть ψ - фильтр, эквивалентный базе B на $M \supset (\bigcup B)$. Для того чтобы доказать эквивалентность необходимо доказать 2 включения: $\psi \underset{1}{\subset} \Phi_B(M) \underset{2}{\subset} \psi$.
   $\forall M_1 \in \psi$:
   - $M_1 \subset M$;
   - $\exists b \in B$ т.ч. $b \subset M_1$;
   - Из первых двух вытекает третье: $M_1 \subset \Phi_B(M)$.

   Так, первое включение проверено.
   Проверим второе включение.
   $\forall M_2 \in \Phi_B(M)$:
   - $M_2 \subset M$;
   - $\exists b \in B$ т.ч. $b \subset M_2$;
   - $\exists F \in \psi \quad F \subset b \subset M_2 \subset M \quad => \quad M_2 \in \psi$.

   Так второе включение доказано, а, следовательно, доказана эквивалентность, то есть равенство фильтров $\Phi_B(M)$ и ψ. Таким образом, существует единственный фильтр, эквивалентный базе.

Непрерывность и сходимость в терминах фильтра

Пространство сходимости в широком смысле – множество M, с каждой точкой m которого связана система фильтров ψ_m, называемых *сходящимися* к точке m.

В математическом анализе рассматривают системы проколотых окрестностей. Система проколотых окрестностей образует базу фильтра, при этом база фильтра не обязана содержать точку m.

Если $\left(M_1, \{\tilde{\psi}_{m_1}: m_1 \in M_1\}\right)$ и $\left(M_2, \left\{\tilde{\tilde{\psi}}_{m_2}: m_2 \in M_1\right\}\right)$ - пространства сходимости, $f\colon M_1 \to M_2$, то функция f называется *непрерывной* в точке $m_1 \in M_1$, если $\forall \Phi \in \tilde{\psi}_{m_1}$ $\Phi_{f(\Phi)}(\in M_2) \in \tilde{\tilde{\psi}}_{f(M_1)}$.

Образ системы множеств S: $f(S) = \{f(A) : A \in S\}$.

Образ множества A (точный образ): $f(A) = \{f(a) :\ a \in A\}$.

Образ базы множеств всегда база множеств (если $f\colon M_1 \to M_2, B_{\text{база}} \in \mathcal{P}(M_1)$).

Доказательство:

1) $\{f(B) : b \in B\} \equiv f(B)$, так система всех образов непустая, кроме того среди этих образов нет пустых множеств (образ непустого множества непуст).
2) $f(b_1) \cap f(b_2) \supset f(b_1 \cap b_2) \supset f(b_3)$.

Свяжем с обычными топологическими пространствами пространства сходимости так, чтобы свойство непрерывности сохранилось.

Пространство сходимости, порожденное топологическим пространством (X, τ): $(X, \{\psi_x^\tau : x \in X\})$, $\psi_x^\tau \ni \Phi$ <=> $\Phi \prec (U_x^\tau \equiv$фильтр всех τ-окрестностей точки x в $(X, \tau))$.

Приведем пример. Рассмотрим базу правых полу окрестностей нуля, рассмотрим интервала от 0 до $1/n$ (рис. 9.1). Множество этих интервалов образует базу. Она должна считаться сходящейся к точке 0. Проверим этот факт, то есть в любой окрестности более грубого фильтра надо найти элемент базы.

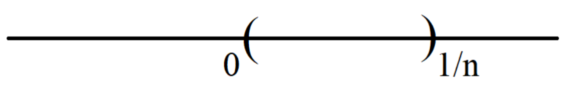


Рис. 9.1

Произвольная окрестность точки 0 содержит некоторую симметричную окрестность этой точки. В этой симметричной окрестности при достаточно большом n найдется полу окрестность (рис. 9.2).

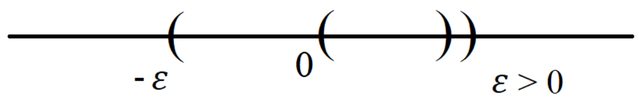


Рис. 9.2

Если теперь базой правых полу окрестностей мы породим любой фильтр, то мы доказываем, что этот фильтр должен считаться сходящимся к точке x, потому что в качестве элемента этого фильтра можем выбрать элемент, порождающий этот фильтр базы. Так, в произвольной окрестности мы должны найти элемент фильтра, порожденного этой базой. При достаточно больших n первоначальный интервал будет подходить.

Проверим *соответствие критерия непрерывности отображения в терминах окрестностей и в терминах фильтров*.

Если $f \in C^{\tau}\big(x_0, (Y, \sigma)\big)$, $\big(y_0 = f(x_0)\big)$ $\forall V \in U^{\sigma}_{y_0}$ $\exists u \in U^{\tau}_{x_0}$ $f(u) \subset V$, так, образ фильтра окрестностей оказывается тоньше $f\big(U^{\tau}_{x_0}\big) \prec U^{\sigma}_{y_0 = f(x_0)}$ => $\Phi_{f(U^{\tau}_{x_0})}(Y) \in \psi^{\sigma}_{f(x_0)}$. Итак, из непрерывности в смысле топологии в терминах окрестностей, переходя к фильтру окрестностей, мы получили факт, что образ сходящегося фильтра к точке x_0 будет фильтром, сходящимся к точке y_0.

$(X, \{\psi^{\tau}_{x} : x \in X\}), \big(Y, \{\psi^{\sigma}_{y} : y \in Y\}\big)$ – два пространства сходимости, порожденные топологией. Пусть для этих пространств сходимости справедливо свойство непрерывности в точке: $\forall \Phi \prec U^{\tau}_{x_0}$, $\Phi_{f(\Phi)}(Y) \prec \psi^{\sigma}_{f(x_0)}$. Тогда $\forall V \in U^{\sigma}_{f(x_0)}$ $\exists W \in \Phi_{f(\Phi)}(Y)$ $W \subset V$ $\exists W' = f(u_V) \subset W$ => $\forall \Phi \prec U^{\tau}_{x_0} \ni u_V$.

Рассмотрим новое понятие сходимости, которое окажется эквивалентным тому, что было рассмотрено ранее. Обсудим понятие обобщенных последовательностей и их сходимости. Сравним с топологической сходимостью.

Отношение R в частично упорядоченном множестве (I, R) называется *направленным*, если $\forall(a, b) \in I \times I \quad \exists c \in I \quad (aRc \ \& \ bRc)$.

Направлением в множестве X называется отображение произвольного направленного множества (множества с отношением направленности) (I, R) в X (*обобщенная последовательность элементов множества X*).

В топологическом пространстве (X, τ) R-направление $\varphi\colon I \to X$ будет называться сходящимся к точке x_0 <=> $\forall u \in U_{x_0}^{\tau} \quad \exists i_0 \in I \quad \forall i \in I \quad i_0 R i \ => \ \varphi(i) \in u$.

Заметим, что образы правых лучей $\left\{R_{i_0}^R = \{i \in I\colon \ i_0 R i\}\colon \ i_0 \in \mathrm{I}\right\}$ – база фильтра. И ее образ при отображении φ тоже база фильтра. Написанная сходимость равносильна тому, что образ $\varphi\left(\left\{R_{i_0}^R = \{i \in I\colon \ i_0 R i\}\colon \ i_0 \in \mathrm{I}\right\}\right)$ тоньше фильтра системы окрестностей $U_{x_0}^{\tau}$.

10. Топология в терминах баз окрестностей

Топология в терминах направленностей

Опишем способ аппроксимации точки топологического пространства в терминах направленностей.

Точка прикосновения (замыкания) для подмножества А в топологическом пространстве (X, τ) – произвольная такая точка $x \in X$, что $\forall u \in \tau \quad x \in u \quad => \quad u \cap A \neq \emptyset$.

$\{u \cap A\colon\ x \in u \in \tau\}$ – база $\subset \mathcal{P}(A)$. По отношению к обратному включению $\supset$ эта база является *направленным множеством*. Применим аксиому выбора.

Аксиома выбора (эквивалентные формы записи)

1) $\forall S \quad \emptyset \notin S \neq \emptyset \quad \exists$ функция $\varphi\colon S \to (\bigcup S)$, такая что $\forall A \in S \quad \varphi(A) \in A$. Такая функция называется *функцией выбора*.
2) $\forall S \ \big((\emptyset \notin S \neq \emptyset) \ \& \ (\forall A \in S \ \forall b \in S \ \ A \cap b = \emptyset)\big) \quad => \quad (\exists s \subset (\bigcup S)$ $\forall A \in S \ \ |s \cap A| = 1)$. $\varphi(S) = s = \{\varphi(A)\colon\ A \in S\}$, где φ - *функция выбора*.
3) (в виде принципа максимальной цепи) $\forall$ частично упорядоченного множества (X, R) существует максимальная цепь (подмножество в X, сужение на квадрат которое дает линейный порядок), то есть $\exists C \subset X \quad (C \times C \cap R$ – линейно упорядоченное (цепь) и $\forall$ цепи $D \subset X$, такая что $C \subset D \subset X$ $C = D$.
4) (в виде принципа максимального элемента Хаусдорфа) $\forall$ частично упорядоченного множества (X, R) $\ (\forall\, R$-цепь С имеет мажоранту $(\exists x_C \in X \ \ \forall a \in C \ \ aRx_C)) \ => \ (\exists x_0 \in X \ \ \forall a \in X \ \ (a \neq x_0 => \neg(x_0 R a)\,)\,)\,)$.

Пусть $B_{\tau,x,A} = \{u \cap A\colon\ x \in u \in \tau\}$, φ - функция выбора для $B_{\tau,x,A}$ => $B_{\tau,x,A} \xrightarrow{\varphi} \bigcup B_{\tau,x,A} \begin{matrix} \subset X \\ \subset A \end{matrix}$ и $\varphi(A \cap u) \in A \cap u$. φ определена на направленном семействе множеств обратным включением. Проверим $\varphi \xrightarrow{\tau} x$. То есть $\forall V \in U_x$ ищем $b \in B_{\tau,x,A}$, такой что найдется правый луч $R_{\supset b}$ такой, чей образ $\varphi(R_{\supset b}) \in V$, $\varphi\big(B_{\tau,x,A}\big) \subset A$.

Доказательство:

Пусть $\exists U \in \tau \quad V \supset u \ni x \quad b \coloneqq A \cap u$. Проверим, что элементы правого луча переходят в V. $\forall b' \in R_{\supset b} \quad \varphi(b') \in b' = A \cap u' \subset b = A \cap u \subset u \subset V$. Так, точки замыкания множества A в топологическом пространстве достигаются на обобщенных последовательностях, принимающих значения в множестве A.

Хаусдорфовые топологии

Если X – множество, то функция $\rho: X \times X \to [0, \infty)$ называется *полуметрикой* на X, если выполнены следующие свойства:

1) $\forall x \quad \rho(x, x) = 0$;
2) $\forall x, y \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\forall x, y, z \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Система шаров: $\forall r \in (0, +\infty) \quad B_r^\rho(x) = \{y \in X\colon\ \rho(x, y) < r\}$.

Топология может быть порождена шарами. τ_ρ – единственная топология в X, базой которой является множество всех шаров $\left\{B_r^\rho(x)\colon x \in X, r \in (0, +\infty)\right\}$.

Эту же топологию можно задать с помощью другого описания. При непрерывных отображениях из одного топологического пространства в другое прообраз открытого пространства открыт. Можно проверить, что функция, задающая расстояние от фиксированного центра до других точек, является непрерывной функцией. τ_ρ наименьшая по запасу открытых множеств топология.

Наименьшая среди всех тех топологий на множестве X , относительно которой непрерывны все функции $\varphi_x: X \to R$ такие, что $\forall y \in X \quad \varphi_x = \rho(x, y)$.

Пусть $\mathscr{R}$ - множество полуметрик на множестве X.

$\tau_{\mathcal{R}} \coloneqq$ *наименьшая топология* $\supset \bigcup_{\rho \in \mathcal{R}} \tau_\rho$.

Заметим, что сумма двух полуметрик является полуметрикой. И макимум нескольких полуметрик - полуметрика.

Базой для топологии $\tau_{\mathcal{R}}$ является $\left\{B_r^{\max\limits_{k \text{ от } 1 \text{ до } n} \rho_k}(x)\colon\ n \in \mathbb{N}, x \in X, r \in (0, +\infty), \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \rho_k \in \mathcal{R}\right\}$.

Говорят, что топологии $\tau_{\mathcal{R}}$ являются равномерностями (равномерными) на множестве X. Такие топологии задают равномерную сходимость.

Топология τ называется *Хаусдорфовой*, если $\forall (x,y) \in (\bigcup \tau) \times (\bigcup \tau) \quad \exists (U,V) \in \tau \times \tau \quad (x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset)$.

Критерий Хаусдорфовости: $\tau_{\mathcal{R}}$ является Хаусдорфовой <=> $\forall (x,y) \in (\bigcup \tau_{\mathcal{R}}, \bigcup \tau_{\mathcal{R}}) \quad \exists \rho \in \mathcal{R} \quad \rho(x,y) \neq 0$. При этом говорят, что метрика ρ разделяет точки.

Доказательство:

1) Предположим, что такая $\rho(x,y)$ существует. $U = B^{\rho}_{\frac{\rho(x,y)}{2}}(x),\ V = B^{\rho}_{\frac{\rho(x,y)}{2}}(y)$.
2) Пусть $\tau_{\mathcal{R}}$- Хаусдорфова. U – окрестность x, покажем, что U не содержит y. окрестности U точки x по определению базы топологии должна найтись окрестность радиуса r, если y не входит в окрестность положительного радиуса, значит максимум из нескольких метрик больше в точке y чем r. Значит одна из них на паре (x, y) принимает положительное значение.

Критерий Хаусдорфовости для равномерных топологий: $\tau_{\mathcal{R}}$ является Хаусдорфовой <=> все одноточечные множества замкнуты.

Доказательство:

1) Пусть все одноточечные множества замкнуты. Рассмотрим пару точек x и y. Одноточечное множество $\{y\}$ – замкнуто => $(X \equiv \bigcup \tau_{\mathcal{R}})$ => $X \backslash \{y\} \supset B_r^{\max\limits_{k \text{ от } 1 \text{ до } n} \rho_k}(x)$. Таким образом, максимум полуметрик на паре (x, y) дает значение больше r. Так, мы нашли полуметрику, которая различает или разделяет точки x и y.
2) Проверим замкнутость одноточечного множества. Шар $B_r^{\max\limits_{k \text{ от } 1 \text{ до } n} \rho_k}(x)$ можно записать в другом виде: $\bigcap_{k=1}^{n} B_r^{\rho_k}(x)$. Если $\tau_{\mathcal{R}}$ является Хаусдорфовой, то $\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{R} \\ r>0}} \bar{B}_r^{\rho}(y) = \{y\}$. В таком пересечении останется только точка y, потому что какую бы точку x мы не взяли бы, найдется пара не перескающихся окрестностей, в частности даже найдутся открытые шары.

Докажем еще одно равенство: $\bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{R} \\ r>0}} B_r^{\rho}(y) \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} \bigcap_{\substack{\rho \in \mathcal{R} \\ r'>0}} \bar{B}_{r'}^{\rho}(y) \overset{\subset}{\underset{\supset}{=}} \overline{\{y\}}^{\tau_{\mathcal{R}}}$ - *замыкание одноточечного множества* $\{y\}$ *относительно топологии* $\tau_{\mathcal{R}}$.

Доказательство:

Предположим, что точка x принадлежит замыканию. Проверим, что все точки прикосновения должны лежать в каждом шаре (вытекает из симметричности полуметрики).

1) (для нижнего включения) замкнутые шары – замкнутые множества, пересечение замкнутых множеств – замкнутое множество. Замыкание – наименьшее среди замкнутых множеств или пересечение всех замкнутых множеств, содержащих замыкаемое множество. Так, нижнее включение проверяется тривиально.
2) (для верхнего включения) Возьмем точку x, принадлежащую всем шарам: $x \in \bigcap_{\substack{\rho\in\mathcal{R} \\ r>0}} B_r^{\rho}(y)$. Проверим, является ли точка x точкой прикосновения. Для проверки мы должны взять произвольную окрестность точки x . В произвольной окрестности лежит базисная.

   $V \ni x \in \bigcap_{k=1}^{n} B_{r_0}^{\rho_k}(x) \subset V$

   $x \in \bigcap_{k=1}^{n} B_{r_0}^{\rho_k}(y) \quad <=> \quad \max_{k \text{ от } 1 \text{ до } n} \rho(x,y) < r_0 \quad => \quad y \in \bigcap_{k=1}^{n} B_{r_0}^{\rho_k}(y)$

   В частности, одноточечное множество $\{y\}$ попало в любую окрестность точки x. Таким образом, доказано включение в обратную сторону.

Другими словами можно замыкание точки y определить как некоторый класс *эквивалентностей*. Введем отношение эквивалентности, которое разобьет пространство X на классы эквивалентностей.

Отношение $R \subset X \times X$ называется *отношением эквивалентности*, если выполняются следующие свойства:

1) Рефлективность $(x,x) \in R$;
2) Симметричность $(x,y) \in R \; => \; (y,x) \in R$;
3) Транзитивность $xRyRz \; => \; (x,z) \in R$.

В случае, когда на множестве X задана топология $\tau_{\mathcal{R}}$, порожденная семейством полуметрик (равномерная топология), то в качестве отношения эквивалентности введем такое: $x \underset{\mathcal{R}}{\sim} y \; <=> \; x \in \overline{\{y\}}^{\tau_{\mathcal{R}}}$. В более явно симметричном виде отношение эквивалентности можно определить следующим образом: $(\forall \rho \in \mathcal{R} \quad \rho(x,y) = 0)$.

В силу последнего свойства мы сможем задать метрики на классах эквивалентностей $X/_{\tilde{\mathcal{R}}}$. По определению полагаем $\forall \rho \in \mathcal{R}$ $\tilde{\rho}\colon \left(X/_{\tilde{\mathcal{R}}} \times X/_{\tilde{\mathcal{R}}}\right) \to [0,\infty)$ $\tilde{\rho}\left(\overline{\{x\}}, \overline{\{y\}}\right) = \rho(x,y)$. Не сложно проверить, что на классах эквивалентностей новое пространство Хаусдорфовой $\tau_{\{\tilde{\rho}:\, \rho\in\mathcal{R}\}}$.

11. Топологические векторные и локально выпуклое пространства

Топологическое векторное и локально выпуклое пространства

Продолжим рассматривать математические структуры, полезные для математической модели квантовой теории.

Если τ_X и τ_Y топологии на соответственно множествах X и Y, то *произведением топологических пространств* (X, τ_X) и (Y, τ_Y) называется топологическое пространство $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$, где топология $\tau_X \otimes \tau_Y$ обладает своей базой вида: $\{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ или, что то же самое, предбазой $\{U \times Y : U \in \tau_X\} \cup \{X \times V : V \in \tau_Y\}$.

Аналогично, если $X_1, \dots, X_n$ - множества и τ_{X_j} – топологии на соответственных X_j $(j = 1, \dots, n)$, то на $X_1 \times \dots \times X_n$ *топологией произведения* называется $\tau_{X_1} \otimes \dots \otimes \tau_{X_n} = \bigotimes_{j=1}^{n} \tau_{X_j}$ с базой $\left\{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n : \ \forall j \in \{1, \dots, n\} \ U_j \in \tau_{X_j}\right\}$.

Если j пробегает бесконечное множество J индексов и $\forall j \in J \ \tau_j$ – топология на X_j, то $\bigotimes_{j \in J} \tau_j$ - *тензорная топология* на $\prod_{j \in J} X_j = \times_{j \in J} X_j = \left\{f : J \to \bigcup_{j \in J} X_j \,|: \forall j \in J \ f(j) \in X_j\right\}$ с предбазой $\left\{\prod_{j \in J} U_j \,|: \exists j_0 \in J \quad \forall j \in J \setminus \{j_0\} \quad U_j = X_j; \ U_{j_0} \in \tau_{j_0}\right\}$.

Эту топологию можно описать иначе. Для этого понадобятся проекции, которые вычисляют значения функции выбора f в точке j.

j, X_j – координаты, индекс j нумерует независимые друг от друга координаты. Отображение π_{j_0} будем называть *проекцией:* $\left(\prod_{j \in J} X_j\right) \to X_{j_0} : \ f \mapsto f(j_0) \equiv f_{j_0}$.

Например, (x_1, x_2, x_3): $x(j) = x_j \quad j \in \{1, 2, 3\}$.

Замечание: $\bigotimes_{j \in J} \tau_j$ является *наименьшей (или слабейшей)* топологией на $\prod_{j \in J} X_j$ среди тех топологий на всем произведении, относительно которых каждая «проекция» π_{j_0} непрерывна $\forall j_0 \in J$.

Пусть К – нормированное поле $\in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Топология τ на векторном пространстве V над K называется согласованной со структурой векторного пространства V, ели непрерывны отображения: $(V \times V, \tau \otimes \tau) \xrightarrow{+} (V, \tau)$ и $(K \times V, \tau_K \otimes \tau) \xrightarrow{\cdot} (V, \tau)$.

При этом говорят, что топология τ задает на векторном пространстве V структуру топологического векторного пространства Т.В.П.

Рекомендуемая литература:

1) Т.В.П.:
   - Богачов, …, Смолянов «Топологические векторные пространства и…»;
   - Н. Бурбаки.

Норма или полунорма $p: V \to [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ обладают следующими общими свойствами (кванторы всеобщности подразумеваются):

1) $p(\vec{x} + \vec{y}) \leq p(\vec{x}) + p(\vec{y})$;
2) $p(\alpha \cdot \vec{x}) = |\alpha|_{\mathbb{C}} \cdot p(\vec{x})$.

Для нормы:

3) (невырожденность) $p(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Норма или полунорма порождает соответственно полуметрику $\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{x} - \vec{y})$. Соответственно полуметрика породит топологию. И какова бы ни была полунорма, можно проверить, что отображения будут непрерывны (одна норма или полунорма задает структуру векторного топологического пространства). Равномерная топология задается системой полуметрик. Система полуметрик получится из системы полунорм.

Если $\mathcal{P}$ - множество полунорм на векторном пространстве V, $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \{\rho_p : p \in \mathcal{P}\}$ задает на V структуру топологического пространства $\left(V, \tau_{\mathcal{R}_{\mathcal{P}}} = \tau_{\mathcal{P}}\right)$, Обладающего базой выпуклых окрестностей нуля.

Удобство использования полунорм состоит еще и в том, что шары соответствующих полуметрик (шары соответствующих полунорм) оказываются выпуклыми, и их конечное пресечение выпуклое, то есть каждая точка имеет базу из выпуклых множеств в этом случае.

Если Т.В.П. обладает базой выпуклых окрестностей для каждой точки и общей базы, состоящей из выпуклых окрестностей, то такое Т.В.П. называют локально выпуклым – Л.В.П. или Л.В.Т.В.П.

Сформулируем критерий того, что Л.В.П. является отделимым. В этом случае оно сразу будет Хаусдорфовым, то есть любые две точки получат непересекающиеся окрестности.

Критерий отделимости (Хаусдорфовости) Т.В.П. $(V, \tau_{\mathcal{P}})$: $\forall \vec{x} \in V \ \exists p \in \mathcal{P} \ \ p(\vec{x}) \neq 0$.

Если пространство не Хаусдорфово, то замыкание нуля – замкнутое подпространство, которое в частном случае является подгруппой.

Рассмотрим классы эквивалентности.

Если Л.В.П., топология которого задается семейством полунорм $(V, \tau_{\mathcal{P}})$, [(не Хаусдорофово) <=> $\left(\overline{\{\vec{0}\}} \neq \{\vec{0}\}\right)$], то $\vec{x} \underset{\tau}{\sim} \vec{y}$ <=> $\vec{x} - \vec{y} \in \overline{\{\vec{0}\}}$, $\vec{x} \in \left(\vec{y} + \overline{\{\vec{0}\}}\right) = \tilde{\vec{y}}$. В этом случае классы эквивалентности образуют новое пространство $\left(V/_{\sim}, \tau_{\mathcal{P}_/}\right)$, где $\mathcal{P}_/ = \left\{p_/ : V/_{\sim} \to [0, \infty) | : p_/(\tilde{\vec{x}}) = p(\vec{x})\right\}$.

Можно проверить, что соответствующая топология новой системы полунорм Хаусдорфова.

Напомним про физические идеи. Вещественное поле важно, потому что все приборы показывают значения из вещественной оси, распространено для определения областей значения функций, потому что областями определения являются множества состояний разных систем. Таким образом, подмножество вещественных векторных пространств задают пространство состояний классических физических систем. Оказалось, что из описания состояний квантовых систем невозможно истребить комплексную структуру.

Полнота и пополнение

Рассмотрим условие полноты.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{R})$ называется ф-полным в терминах фильтров, если всякий фильтр Коши в X сходится к некоторой точке их X, где фильтр Ф на X называется фильтром Коши <=> $\forall \rho \in \mathcal{R}$ направленность $(\Phi, \supset) \ni U \to diam_\rho U = \sup\limits_{(u,v)\in U\times U} \rho(u,v)$ сходится к $0_{\mathbb{R}}$.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{R})$ называется н-полным в терминах направленностей, если всякая направленность Коши сходится к некоторой тоске из X, где направленность $\left(A, \sigma_{\text{частичный порядок,задающий направление}}\right) \xrightarrow{\varphi} X$ называется направленность Коши, если база φ −образов правых лучей в направленном множестве (A, σ) является базой фильтра Коши на *(X, $\mathcal{R}$)*.

Замечание: н-полнота <=> ф-полноте.

Доказательство:

=> Пусть фильтр Ф является фильтром Коши, но не сходится. $(A \equiv \Phi, \sigma \equiv \supset) \xrightarrow{\varphi - \text{функция выбора для } \Phi} X$ - направленность Коши, действительно ли так?

Правые лучи состоят из элементов фильтра $\{\psi : \psi \in \Phi,\ \psi \subset ф\}$. Образы будут лежать в ф, а поскольку элементы фильтра могут быть сколь угодно маленького диаметра, образы меньших множеств будут меньше. Вся система будет лежать в окрестности нуля, задаваемой диаметром элемента ф. Таким образом, мы получим стремящуюся к нулю направленность. Фильтр образов правых лучей является фильтром Коши => направленность Коши => сходится к некоторой точке $x_0 \in X$.

Проверим, что фильтр так же сходится к точке $x_0 \in X$. Малые окрестности x_0 порождаются тем, что относительно разных метрик берутся шары, пересекается конечное число шаров по разным метрикам. Базисная окрестность будет состоять из точек, которые на ε близки относительно конечного числа полуметрик. x_0 предел фильтра Коши, построенного по фильтру Ф. В этом фильтре есть сколь угодно малые множества, эти множества имеют точки, сколь угодно близкие к x_0. Значит в эту окрестность попадет правый луч направленности и в этой окрестности можем взять новую полуметрику и для нее так же выполняется неравенство треугольника $\{\, x\colon \max\left(\rho_1(x, x_0), \ldots, \rho_n(x, x_0)\right) < \varepsilon/2 \,\} \ni x = \varphi(ф) \ni \varphi(\psi) = x_\psi$.

Относительно этой полуметрики в силу фундаментальности можем выбрать элементы фильтра малых диаметров. Все элементы фильтра ψ содержаться в нашей окрестности. Значит исходный фильтр Φ окажется тоньше фильтра окрестностей. Фильтр сходится.

<= Пусть все фильтры Коши оказываются сходящимися. При рассмотрении направленности Коши по определению образы правых лучей $\varphi(L_a)$ - база фильтра Коши, фильтр Коши сходится. Значит правые лучи сходятся (образуют более тонкую базу, чем база окрестностей), следовательно, для любой окрестности предельной точки. В любой окрестности найдется элемент из фильтра $B = \varphi(L_a)$, а фильтр, порожденный базой, состоит из надмножеств элементов базы. Так, направленность сходится.

В топологическом пространстве (Y, τ_Y) подмножество $X \subset Y$ называется *всюду плотным*, если $\bar{X} = Y$.

(Y, τ_Y) называется *сепарабельным*, если ∃ не более чем счетное всюду плотное в (Y, τ_Y) подмножество.

Каждое равномерное пространство можно считать частью Л.В.П. Хаусдорфово равномерное пространство можно вложить в пространство функций с топологией, которая на пространстве функций задает структуру Л.В.П. через полунормы. Так, вопрос о пополнении сводится к вопросу о пополнению Л.В.П.

$p_{x_0}(f) = |f(x_0)|$

Пополнением равномерного пространства $(X, \mathcal{R})$ называется равномерное пространство $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{R}})$, такое что:

1) X является всюду плотным в порожденном топологическом пространстве $(\tilde{X}, \tau_{\tilde{R}})$;
2) $R = \{\tilde{\rho} \restriction_{X\times X} |: \tilde{\rho} \in \tilde{\mathcal{R}}\}$, причем $\tilde{R} = \{\tilde{\rho}|: \rho \in \mathcal{R}$ и $\tilde{\rho}$ является продолжением ρ на $\tilde{X} \times \tilde{X}$ по непрерывности$\}$.

Конструкция пополнения: $(X, \mathcal{R}) \to$ Л.В.П. $V \to \tilde{V}$.

Пополнение Л.В.П. опишем отдельно.

Пополнением Л.В.П. $(V, \mathcal{P})$ называется полное Л.В.П. $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{P}})$ относительно системы полуметрик, порождаемых полуметриками $R_{\tilde{\mathcal{P}}}$, такое что:

1) $\mathcal{P} = \{\tilde{p} \restriction_V: \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$;

2) $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}|\colon\ \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{p} -$ продолжение функции p по непрерывности на пространство $(\tilde{V}, \tau_{\tilde{\mathcal{P}}})$ };
3) $(\tilde{V}, R_{\tilde{\mathcal{P}}})$ является пополнением равномерного пространства $(V, \mathcal{R}_{\mathcal{P}})$.

Таким образом, всегда есть большее пространство.

Теорема Хана и Банаха и ее следствия

Теорема (Хан, Банах) для Л.В.П.

Формулировка 1: Если $(V, \mathcal{P})$ - Л.В.П. и φ_0 - линейный непрерывный функционала $V_0 \to K$, где V_0 - линейное подпространство, то $\exists$ линейно непрерывный функционал $\varphi: V \to K$, т. ч. $\varphi \restriction_{V_0} = \varphi_0$.

A – *выпуклое подмножество* в векторном пространстве V, $\forall (a, b) \in A \times A$ весь отрезок $\{ta + (1-t)b: t \in [0; 1]\} \subset A$.

{ Множество всех линейных (однородных) непрерывных функционалов на векторном пространстве V } $=$ V' *(сопряженное пространство)*.

Формулировка 2: Если $U \neq \emptyset$ – открытое выпуклое множество в Л.В.П. $(V, \mathcal{P})$ над полем $\mathbb{R}$ и $W \neq \emptyset$ - замкнутое выпуклое подмножество в $(V, \mathcal{P})$, причем $U \cap W = \emptyset$, то $\exists$ линейный непрерывный функционал $l \in V'$, т.ч. $U \subset$
$$\overset{-1}{l}\left(\left(-\infty;\ \sup_{x \in U} l(x)\right)_{\mathbb{R}}\right),\quad W \subset \overset{-1}{l}\left(\left(\sup_{x \in U} l(x);\ +\infty\right)\right).$$

Естественные структуры, связанные с теоремой:

Критерий Хаусдорфовости:

Замечание: Л.В.П. $(V, \mathcal{P})$ является Хаусдорфовым <=> $\forall \vec{x}_0 \in V \backslash \{0\}$ $\exists l \in V'$,

такое что $l(\vec{x}_0) \underset{= 1}{\neq} 0$.

Доказательство:

=> (используем теорему Хана и Банаха) Рассмотрим прямую, изображенную на рисунке 11.1.

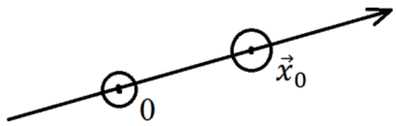


Рис. 11.1

Если исходное пространство Хаусдорфово, то есть непересекающиеся окрестности. В базисной системе окрестностей есть максимум из нескольких полунорм меньший ε окрестности нуля, а x в нее не входит. Значит, какая-то полунорма из конечного числа полунорм, входящих в максимум $\max(p_1(\vec{x}_0), \dots, p_n(\vec{x}_0)) > 0$, ненулевая $p_1(\vec{x}_0)$>0. $\frac{p_1(\vec{x})}{p_1(\vec{x}_0)}$ так же полунорма, в точке $\vec{x}_0$ принимает значение 1. Если взять шары радиуса 1/3, то будут открытые шары, открытые выпуклые непересекающиеся множества. Соответственно на прямой будет индуцирована обычная топология. Так, на прямой мы можем задать функционал, вычисляющий координату в базисе $\vec{x}_0$. Этот функционал будет непрерывным в силу линейности на конечномерном пространстве. $l_0(x_0) = 1$ на одномерном подпространстве $K \cdot \vec{x}_0$.

<= если значение какого-то линейного функционала в точке не ноль, $|l(x_0)| > 0$. Тогда можем рассмотреть прообраз $\overset{-1}{l}\left(U^K_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)\right) \ni \vec{0}_V$ - открытое множество (прообраз открытого множества открыт при непрерывном отображении). Получили окрестность нуля, содержащую базисную окрестность вида $\delta > \max(p_1(\vec{x}\,), \dots, p_n(\vec{x}\,)) > 0$. Точка x_0 не будет входить в базисную окрестность, значит, какая-то из полунорм будет большей или равной $\delta > 0$ и как одна из полунорм будет не нулевая. Так, Хаусдорфовость доказана.

Чтобы описать пополнение, опишем эквивалентные системы полунорм. Две системы полунорм называются эквивалентными, если они задают одну и ту же топологию:

Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ - системы полунорм на Л.В.П. $(V, \mathcal{P})$, задающие свои топологии. $\mathcal{P}_1 \sim \mathcal{P}_2 \iff \tau_{\mathcal{P}_1} = \tau_{\mathcal{P}_2}$.

Замечание: если $\mathcal{P}_2$ состоит из непрерывных в топологии $\tau_{\mathcal{P}_1}$ полунорм, то топология, порожденная объединением, $\tau_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} = \tau_{\mathcal{P}_1} \iff \mathcal{P}_1 \sim (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$.

Пусть τ - топология Л.В.П. $(V,\mathcal{P})$. Как найти эквивалентную систему полунорм $\mathcal{P}$ по топологии? Это будет топология равномерной сходимости. Полунормы явно укажем.

Если M – подмножество векторного топологического Л.В.П. V над K $M \subset V$, то *полярами* назовем подмножество линейных функционалов, обладающих свойством $M^0 = \{l \in V^*\colon \ \forall x \in M \quad |l(x)| \le 1\}$, аналогично, если $L \subset V'$, тогда $L^0 = \{\vec{x} \in V\colon \ \forall l \in L \quad |l(\vec{x})| \le 1\}$ можем назвать *антиполярой*.

Строим $\tilde{\mathcal{P}} \sim \mathcal{P}$ $\quad \tilde{\mathcal{P}} = \{p_V\colon \ V \in$ базису окрестностей нуля$\}$, V^{00} – биполяр, выпуклая замкнутая окрестность нуля, $V \subset V^{00}$, $\forall x \in V \quad p_V(x) = \inf\{C > 0\colon \ x \in C \cdot V^{00}\}$.

Следствие из теоремы Хана и Банаха: если $(X,\mathcal{P})$ Хаусдорфово Л.В.П., то имеет место вложение пространства во второе сопряженное, линейный оператор $X \xrightarrow{I} (X', \{|\pi_x(\cdot)|\colon x \in X\})'$, где $\pi_x(l) = l(x)$, инъективен, если $I(x) = \pi_x$.

Таким образом, мы вложили векторное пространство в новое более широкое векторное пространство. Оператор инъективен. При каких топологиях этот оператор будет непрерывен? Хочется ввести такую топологию, чтобы при вложении получился гомоморфизм. Воспользуемся полунормами на втором сопряженном.

Топология, порожденная полунормами $\tau_{\{|\pi_x(\cdot)|\colon x \in X\}} = \sigma(X',X)$, называется *слабой топологией* сопряженного относительно исходного.

Продолжение следствия из теоремы: $\forall \varphi \in \big(X', \sigma(X',X)\big)' \ \ \exists x \in X \quad \varphi = \pi_x$.

Непрерывный линейный функционал φ имеет прообраз $\vec{0}_{V'} \in \overset{-1}{\varphi}\big(U_1^K(0_K)\big) \supset \left\{l\colon \ \max\limits_{j=1\ldots n} |l(x_j)| < \varepsilon\right\} = \bigcap_{j=1}^n \pi_{x_j}^{-1}\big(U_\varepsilon^K(0)\big) \supset \bigcap_{j=1}^n Ker\,\pi_{x_j}$ ($\exists \varepsilon > 0$, полунормы задаются точками $x_1, \dots, x_n$). Пересечение ядер – линейное подпространство, то есть если есть точка из этого линейного подпространства, то все кратные ей точки принадлежат тому же линейному подпространству, и значит, значение φ на этих кратных точках все еще меньше 1. Это говорит о том, что на рассматриваемых точках φ равно нулю. $\bigcap_{j=1}^{n} Ker\,\pi_{x_j} \subset Ker\,\varphi$.

Лемма: пусть есть функционал φ на пространстве

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\begin{pmatrix}\pi_{x_1}\\ \vdots \\ \pi_{x_n}\end{pmatrix}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & K^n \\ & K \end{tikzcd}$$

, причем ядро верхнего оператора содержится в ядре нижнего, соответственно если факторизовать по ядру на классах эквивалентности будет определен фактор по ядру, который изоморфно вкладывается в образ, соответственно, в этом образе есть корректно определенный линейный оператор, который замыкает тройку: $\exists L: \varphi(l) = L\begin{pmatrix}\pi_{x_1}(l)\\ \vdots \\ \pi_{x_n}(l)\end{pmatrix}$. Так, на фактор-пространстве корректно определено сужение φ, фактор отображения. Кроме того $\exists c_k$: $L\begin{pmatrix}\pi_{x_1}(l)\\ \vdots \\ \pi_{x_n}(l)\end{pmatrix} = \sum c_k l(x_k) = \pi_{\sum c_k x_k}(l)$.

12.Полнота и пополнение

Понятие полноты в терминах последовательностей

Ранее были рассмотрены понятия полноты в терминах фильтров и в терминах направленностей. Для метрических пространств можно сформулировать понятие полноты в терминах последовательностей.

Обычно пополняют пространства состояний, которые во всех моделях физических систем являются Хаусдорфовыми. Мы уже говорили, что естественное представление пространства состояний физической системы – задание ее функции на множестве индексов, нумерующих приборы, используемые для измерения этой системы. Топология, которая вводится в пространстве функций обычно Хаусдорфова. Можно рассмотреть систему как некоторый черный ящик, на который мы воздействуем и получаем отклик. Каждое воздействие можно назвать прибором, а отклик ассоциировать с показанием прибора. Если отклики одинаковы, то можно считать состояния идентичными. Таким образом, для различия функций в точках, представляющих состояния, хватает неоднократно рассмотренных полунорм (модулей значения функции в точке). Поэтому в применении математической физики, квантовой теории естественно говорить о пополнениях Хаусдорфовых пространств.

Начнем рассмотрение со случая метрического пространства.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *п-полным*, если каждая последовательность Коши имеет предел в (X, ρ).

ф-полнота и н-полнота эквивалентны, значит из можно считать единым свойством. Проверим эквивалентность п-полноты этому свойству:

Замечание: $\text{п} - \text{полнота} <=> \begin{cases} \text{ф} - \text{полнота} \\ \text{н} - \text{полнота} \end{cases}.$

Последовательность $(x_n)_{n\in N} \equiv (x_n)_{n=1}^{\infty} \equiv (x_n) : (\mathbb{N}, \leq) \to X$ называется последовательностью Коши, если $\rho - diam((x_{k+n})_{n=1}^{\infty}) \to 0$ при $k \to \infty$, где $(x_{k+n})_{n=1}^{\infty}$ - хвост (окончание) последовательности.

Доказательство:

<= Последовательность Коши – частный случай направленности Коши (вытекает из определения). Тогда последовательность как направленность должна иметь предел. Если точка x_0 – предел последовательности, то окончание последовательности при каком-то k содержится в наперед заданной окрестности нашей точки.

=> Пусть дано полное метрическое пространство, последовательность Коши сходится. Возьмем произвольный фильтр Коши и проверим его сходимость.

Пусть $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$ – фильтр Коши в (X, ρ), $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists A_m \in \Phi$ $diam(A_m) < \frac{1}{2^m}$. Воспользуемся тем, что фильтр состоит из непустых множеств, замкнут относительно пересечений и построим из A_m новую систему множеств, которая тоже принадлежит фильтру. $\forall l \in \mathbb{N}$ $B_l := \bigcap_{m=1}^{l} A_m \supset B_{l+1}$ $(B_1 = A_1,\ B_2 = A_1 \cap A_2,\ B_1 \supset B_2 \supset B_3 \dots)$, B_l – монотонно убывающая система подмножеств. $\Phi \ni B_l := \bigcap_{m=1}^{l} A_m \supset B_{l+1} \in \Phi$ - фильтр замкнут относительно пересечения => $diamB_m < \frac{1}{2^m}$.

В силу непустоты можем взять индексированную функцию выбора, которая сопоставляет точку из B_m номеру, тогда получим некоторую последовательность. Пусть $x_n \in B_n$ для всех номеров.

Так как $B_l \supset B_{l+1}$, весть хвост последовательности $(x_{k+n})_{n=1}^{\infty} \supset B_{k+1}$, $diam((x_{k+n})_{n=1}^{\infty}) \le diamB_k$ => $diam((x_{k+n})_{n=1}^{\infty}) \to 0$. Следовательно, (x_n) - последовательности Коши в (X, ρ) => $\exists x_0 \in X$ $\rho(x_n, x_0) \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Покажем, что весь фильтр сходится к точке x_0, то есть в каждом шаре нужно найти элемент фильтра.

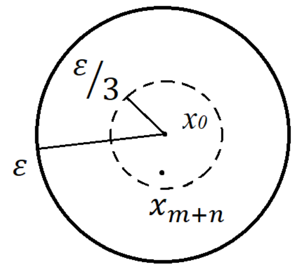


Рис. 12.1

$\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим шар радиуса ε вокруг точки x_0 (рис. 12.1), внутри этого шара возьмем шар радиуса ${}^{\varepsilon}/_{3}$, найдем $m_{\varepsilon/3} \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2^{m_{\varepsilon/3}}} < {}^{\varepsilon}/_{3}$, тогда $\exists B_m$: $diamB_m < {}^{\varepsilon}/_{3} \ni x_m, x_{m+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Исходя из сходимости $\rho(x_n, x_0)$ выбираем такое большое $m+n$, что $\rho(x_{m+n}, x_0) < {}^{\varepsilon}/_3$. $\forall y \in B_m \quad \rho(y, x_{m+n}) < {}^{\varepsilon}/_3$ => по неравенству треугольника $\rho(y, x_0) < {}^{2\varepsilon}/_3$. Так любая точка y будет лежать в -шаре.

Таким образом, для любого шара вокруг точки x_0 мы нашли элемент фильтра, содержащийся в этом шаре. Следовательно, наш фильтр тоньше, чем фильтр окрестностей точки x_0, что и означает сходимость фильтра к точке x_0. Значит, x_0 - предел фильтра Коши.

Замечание: если равномерное пространство $(X, \mathcal{R})$ Хаусдорфово, и $card\, \mathcal{R} \le \aleph_0$, то $\exists$ метрика ρ на X, такая что $\rho \sim \mathcal{R} \quad <=> \quad \tau_\rho = \tau_{\mathcal{R}}$.

Если $card\, \mathcal{R} < \aleph_0$, то пронумеруем метрики, и топологию, порожденную всеми этими метриками, задаст $\rho = \max\left(\rho_1, \dots, \rho_{card\, \mathcal{R} \le \aleph_0}\right)$ на $X \times X$ (случай 1).

Если $card\, \mathcal{R} = \aleph_0$, тогда $\rho(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \min\left(1,\ \rho_n(x_1, x_2)\right)$ (случай 2).

Теперь можно проверять, что в каждой базисной окрестности любой точки найдется некоторый шар метрики ρ и наоборот. Реализуем идею.

Поскольку топологии полностью описываются системами окрестностей точек, то справедливо ***замечание:*** для всех точек топологии на множестве X $\tau_1 = \tau_2$ <=> $\forall x \in X$ совпадают фильтры произвольных окрестностей (фильтры произвольных окрестностей – множества, содержащие открытую окрестность), $U_x^{\tau_1} = U_x^{\tau_2}$. Докажем, что каждый из фильтров тоньше другого.

Доказательство (для случая 1):

$\subset$ Рассмотрим окрестность $u \in U_x^{\tau_\rho}$. По определению вокруг точки x есть -шар $B_{\varepsilon>0}^{\rho}(x) \subset u$. Проверим $B_{\varepsilon>0}^{\rho}(x) \in U_x^{\tau_{\mathcal{R}}}$. Для того, чтобы множество было окрестностью в топологии $\tau_{\mathcal{R}}$, необходимо и достаточно чтобы она содержала некоторую базисную окрестность. По построению $B_{\varepsilon>0}^{\rho}(x)$ - одна из базисных окрестностей топологии $\tau_{\mathcal{R}}$ точки x, поэтому принадлежит фильтру окрестностей.

$\supset$ Пусть $V \in U_x^{\tau_{\mathcal{R}}}$. Так как V является окрестностью общего вида, то в нем содержится базисная окрестность точки x относительно топологии $\tau_{\mathcal{R}}$, $U_x^{\tau_\rho} \ni B_{\delta>0}^{\rho}(x) \subset V \in U_x^{\tau_{\mathcal{R}}}$.

Проведем более общее рассуждение. Выберем конечное число метрик $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq card\, \mathcal{R}$. $\rho = \max\big(\rho_1, \dots, \rho_{card\, \mathcal{R} \leq \aleph_0}\big) \quad => \quad \rho \geq \max\big(\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_k}\big)$.

Тогда, $B_\delta^\rho(x) \subset B_{\delta>0}^{\max\left(\rho_{i_1}, \dots, \rho_{i_k}\right)}(x) \quad => \quad B_\delta^\rho(x) \in U_x^{\tau_\rho}$.

ρ могли быть полуметриками, покажем, что если именно они задают равномерную топологию, и эта топология оказалась Хаусдорфовой, то ρ на самом деле метрика, даже если ρ с номерами были полуметриками.

Доказательство (для случай 1):

То, что такой максимум задает полуметрику, мы уже говорили. Осталось проверить невырожденность (на двух разных точках ρ должно принять разные значения). Критерий Хаусдорфовости заключается в том, что на любой паре точек (x_1, x_2) в множестве X хотя бы одна из пронумерованных полуметрик принимает на этой паре ненулевое значение, тогда максимум строго больше нуля. Таким образом, невырожденность проверяется по определению.

Доказательство (для случая 2):

Проводится аналогично доказательству для случая 1.

Доказательство (для случая 2):

$\subset$ Рассмотрим произвольную окрестность общего вида относительно метрики ρ $u \in U_x^{\tau_\rho}$ (рис. 12.2). Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, что внутри окрестности будет лежать целый шар, являющийся суммой, $B_{\varepsilon_0}^\rho(x) \subset u \in U_x^{\tau_\rho}$.

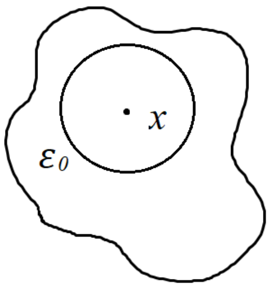


Рис. 12.2

Внутри шара найдем стандартную окрестность в равномерной топологии, задаваемой $\mathcal{R}$. Пусть $\frac{1}{2^n}\min\big(1,\ \rho_n(x_1,x_2)\big) = r_n(x_1,x_2) \le \frac{1}{2^n}$ => $\sum_{n>k_0} r_n(x_1,x_2) \le \frac{1}{2^{k_0}}$.

Пусть $\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда в сумме остаток ряда меньше чем $\frac{\varepsilon_0}{2}$.

Рассмотрим базисную полуметрику, задающую шар $B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^{\max(\rho_1,\dots,\rho_{k_0})}(x)$. Пусть $\forall y \in B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^{\max(\rho_1,\dots,\rho_{k_0})}(x),\quad 1 \le n \le k_0 \quad => \quad \rho_n(y,x) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда $\min(1,\rho_n(y,x)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ => $r_n(y,x) < \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\varepsilon_0}{2}$ => $\sum_{n=1}^{k_0} r_n(y,x) < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Так, суммы начала и конца ряда дают в сумме строго меньше чем $\frac{\varepsilon_0}{2}$, соответственно вся сумма меньше чем ε_0, $\rho(y,x) < \varepsilon_0 \quad => \quad \forall y \in B_{\varepsilon_0}^{\rho}(x)$, значит, нашлась стандартная базисная окрестность из базы фильтра $U_x^{\tau_{\mathcal{R}}}$, $U_x^{\tau_{\mathcal{R}}} \ni B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^{\max(\rho_1,\dots,\rho_{k_0})}(x) \subset B_{\varepsilon_0}^{\rho}(x) \subset u \in U_x^{\tau_\rho}$. Значит, найдется элемент второго фильтра, который содержится в элементе первого фильтра. Таким образом, этот элемент первого фильтра принадлежит как надмножество элементов второго фильтра второму фильтру. Так, мы доказали совпадение окрестностей. Объединениями окрестностей получаются любые открытые множества, значит, топологии совпадают.

Пополнения в узком и широком смыслах

Рассмотрим пополнения метрического пространства.

Метрическое пространство (Y,d) назовем *пополнением в узком смысле* для метрического пространства (X,ρ), если:

1) (Y,d) полно;
2) $X \subset Y,\ \ d\restriction_{X\times X} = \rho$;
3) $\bar{X}^d = Y$.

Теорема: $\forall$ метрического пространства (X,ρ) существует его пополнение в узком смысле, причем, если (Y_1,d_1) и (Y_2,d_2) - два таких пополнения, то найдется на

единственная изометрия $\varphi\colon (Y_1, d_1) \to (Y_2, d_2)$ (биекция и $\forall (a_1, b_1) \in Y_1 \times Y_1 \quad d_1(a_1, b_1) = d_2\big(\varphi(a_1), \varphi(b_1)\big)$), такая что $\forall x \in X \ \ \varphi(x) = x \quad <=> \quad \varphi \restriction_X = id_X$.

Изобразим исходное пространство X сплошной линией, пунктирные линии – два его пополнения (рис. 12.3). $(x_n) \xrightarrow{d_1} a_1 \in Y_1$, последовательность фундаментальная, так как она сходится. Тогда в полном пространстве Y_2 она тоже сойдется $(x_n) \xrightarrow{d_2} a_2 = \varphi(a_1)$.

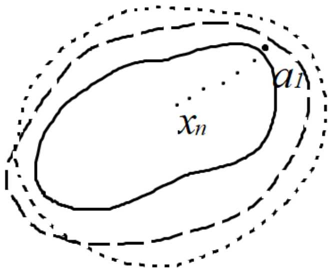


Рис. 12.3

Сами пополнения можно строить по-разному.

Способы построения пополнения:

1) Построить пополнение в узком смысле;
2) Построить пополнение в более широком смысле (проще строить).

Пополнением метрического пространства (X, ρ) *в широком смысле* называется тройка $((Z, r), J)$, такая что:

1) (Z, r) – полное метрическое пространство;
2) $J\colon (X, \rho) \to (Z, r)$ является изометрическим вложением (изометрия на образ, $\forall (a, b) \in X \times X \quad \rho(a, b) = r\big(J(a), J(b)\big)$);
3) $\overline{J(X)}^r = Z;$

Допустим, мы построили $((Z, r), J)$.

$Y = \big(Z \backslash J(X)\big) \cup X.$

Строим d. Возможны 4 варианта (3 в силу симметрии):

1) $d(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$;
2) $d(x_1, z) = r(J(x_1), z), \quad z \in Y \backslash X$;
3) $d(z_1, z_2) = r(z_1, z_2), \ z_1, z_2 \in Y \backslash X$.

13. Топологии в терминах сходимости

Переход от пополнения в узком смысле к пополнению в широком смысле

В прошлой лекции был рассмотрен переход от пополнения в широком смысле к пополнению в узком смысле. Переход от пополнения в узком смысле к пополнению в широком смысле проще. Назначаем в качестве Z - Y, в качестве метрики r – d метрику, в качестве J – сохраняющее точки отображение X в Y.

Поскольку каждое пополнение в узком смысле приводит к пополнению в широком смысле, то мы получаем теорему существования пополнения в широком смысле. Сформулируем единственность.

Теорема: если $\big((Z_1, r_1), J_1\big)$ и $\big((Z_2, r_2), J_2\big)$ - пополнения одного и того же метрического пространства (X, ρ) в широком смысле, то ∃! изометрия (Z_1, r_1) на (Z_2, r_2), такая что $\forall x \in X \quad \varphi\big(J_1(x)\big) = J_2(x) \quad (\varphi \cdot J_1 = J_2)$ (рис. 13.1).

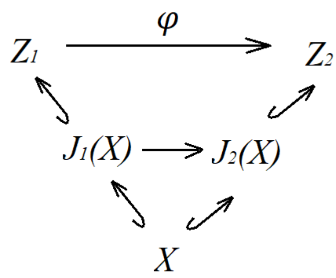


Рис. 13.1

Если $X \neq \emptyset,\ x_0 \in X, \quad f_0(x) = \rho(x, x_0)$.

$$Z_0 = B_{f_0}(X, \mathbb{R}) = \{f_0 + b:\ b \in B(X, \mathbb{R})\}, \quad \sup_{x \in X} |b(x)| = \|b\|_{B(X,\mathbb{R})}.$$

Добавление фиксированной функции f_0, которая может быть неограниченной, это биекция между B и B_{f_0}. С помощью биекции мы перенесем метрику, порождаемую нормой из B в B_{f_0}, получим метрику на Z_0: $r_0(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_{B(X,\mathbb{R})}$, которая является ограниченной функцией $\big((z_1 - f_0) - (z_2 - f_0)\big)$.

$J_0: X \to Z_0, \quad \big(J_0(x_1)\big)(x_2) = \rho(x_2, x_1), \quad Z = \overline{J_0(X)}.$

$J\colon X \to Z, \; J(x) = J_0(x), \; r = r_0|_{Z\times Z}$, так построено отображение в пополнение.

$\sup\limits_{x \in X} |b(x)| = \|b\|_{B(X,\mathbb{R})}$, поскольку эта норма называется *равномерной*, говорят, что она задает *топологию равномерной сходимости* на X.

Топологии в терминах сходимости

Опишем в этих терминах локально выпуклые топологии.

Пусть X – Л.В.П. Его топология задается семейством полунорм. Можно построить систему полунорм, эквивалентную исходной по топологии: $(X, \mathcal{P}) \equiv (X, \tau_{\mathcal{P}})$. Способ восстановления полунорм с помощью *поляр* приведет к понятию равномерной сходимости на полярах.

Топология в X задает пространство непрерывных линейных функционалов X', в котором есть поляры окрестностей нуля.

Новая система: $\mathcal{P}' = \{p_{u^{00}}\colon u \in U_0^{\tau_{\mathcal{P}}}\}$. Возьмем произвольное подмножество $M \subset X'$. Рассмотрим его поляру $M^0 = \{x \in X\colon \forall l \in M, \; |l(x)| \le 1\}$, $X' \ni l => l(x) = \pi_x(l)$, такой функционал называется *функционалом вычисления*, его можно применять не только к линейным функциям.

Подмножество $U \subset X$ называется *уравновешенным* относительно поля $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, если $\forall u \in U \;\; \forall k \in K \quad |k|_{\mathbb{C}} \le 1 \;\; => \;\; k \cdot u \in U,$ то есть произведение диска k на множество u продолжает оставаться в поле U <=> $B_1^K(0_K) \cdot U \subset U$.

Для уравновешенных множеств поляра уравновешенная и выпуклая.

Если U – выпуклая уравновешенная окрестность, $x \in X$, то в силу непрерывности операции умножения в нуле $\forall x \; \exists C > 0 \quad p_u(x) = inf\{C > 0\colon x \in C \cdot U\}$, такое свойство для выпуклого уравновешенного множества называется свойством быть *поглощающим*.

Уравновешенное множество U в пространстве X называется *поглощающим*, если$\forall x \; \exists C > 0 \;\; x \in C \cdot U \equiv \{Cu\colon u \in U\}$.

Одна полунорма p_u для поглощающего множества задаст топологию равномерной сходимости на поляре. Возьмем в качестве u все пространство X. Полярой всего пространства будет только нулевой функционал, потому что только нулевой функционал ограничен на всем пространстве: $X^0 = \{0_{x'}\}$. Поляра нулевого подпространства: $\{0_{x'}\}^0 = X$.

Замечание: Если $M \subset X'$, такое что его поляра M^0 поглощающая, то топология $\tau_{p_{M^0}}$ называется *топологией равномерной* сходимости на M^0 функционалов π_x, так как

$$\left(x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\tau_{p_{M^0}}}{\to}} x_0 \right) \overset{1}{<=>} \left(p_{M^0}(x_n - x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \right) \overset{2}{<=>} \pi_{x_n}\upharpoonright_M - \pi_{x_0}\upharpoonright_M$$

Заметим, что по определению поляры M^0 $\forall l \in M,\ |\pi_x(l)| \le 1$, то есть $\left\| |\pi_{x_n}\upharpoonright_M - \pi_{x_0}\upharpoonright_M |_{\mathbb{C}} \right\|_{B(M,\mathbb{R})} \to 0$ - сужения оказываются сходящимися по норме, $\left\| |\pi_{x_n}\upharpoonright_M - \pi_{x_0}\upharpoonright_M |_{\mathbb{C}} \right\|_{B(M,\mathbb{R})} \equiv \left\| \pi_{x_n}\upharpoonright_M - \pi_{x_0}\upharpoonright_M \right\|_{B(M,\mathbb{C})}$.

Равносильность 1 выполнена по определению. Для доказательства равносильности 2 сформулируем лемму в условиях замечания, после доказательства которой, равносильность 2 будет тривиальной.

Лемма: $p_{M^0}(x) \underset{\le}{\overset{\ge}{=}} \|\pi_x\upharpoonright_M\|_{B(M,\mathbb{C})}$.

Доказательство:

$\ge$ проверим, что $\forall C > 0$ т.ч. $x \in C\cdot M^0 => \frac{x}{C} \in M^0 <=> \forall l \in M \quad |l(x)| \le 1$

$$=> \pi_x(l) = l(x) \le C \quad => \sup_{l \in M} \pi_x(l) \le C.$$

Интерпретируем sup как нижнюю грань всех C.

$\|\pi_x\upharpoonright_M\|_{B(M,\mathbb{C})}$ - нижняя грань для $\{C > 0 : x \in C\cdot M^0\}$.

$p_{M^0}(x) \ge \|\pi_x\upharpoonright_M\|_{B(M,\mathbb{C})}$ – точная нижняя грань всех C.

$\le$ докажем от противного.

Пусть $p_{M^0}(x) > \sup\limits_{l \in M} |l(x)|_{\mathbb{C}}$.

$p_{M^0}(x) = inf\{C > 0: \ \forall l \in M \ \ |l(x)| \leq C\} = inf\left\{C > 0: \sup\limits_{l \in M} |l(x)|_{\mathbb{C}} \leq C\right\}$ => противоречие.

$\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{P}'}$

Говорят, что топология задается теми полунормами, которые определяют равномерную сходимость на полярах окрестности нуля, $p_{u^{00}}$ - полунорма равномерной сходимости на u^0.

Замечание: направленность ν или фильтр Ф в X сходится в топологии к x_0 в $\tau_{\mathcal{P}}$

<=> $\forall p \in \mathcal{P}$ направленность ν (фильтр Ф) сходятся в топологии к x_0 в τ_p <=> $\forall p \in \mathcal{P}'$ направленность ν (фильтр Ф) сходится к точке x_0 в τ_p <=> $\forall u \in U_0^{\tau_{\mathcal{P}}}$ $\nu(\Phi) \downarrow_{x_0}^{\tau_{p_{(u^0)^0}}}$ <=> $\forall u \in U_0^{\tau_{\mathcal{P}}}$ $\nu(\Phi)$ сходятся к x_0 в топологии равномерной сходимости на поляре окрестностей u^0.

Когда есть запас каких-то множеств (в данном случае поляры), то в сопряженном пространстве можно рассматривать топологию равномерной сходимости на системе подмножеств. Тогда $\tau_{\mathcal{P}}$ - топология равномерной сходимости на системе $\{u^0 : u \in U_0^{\tau_{\mathcal{P}}}\}$.

Следствие: Всякая локально выпуклая топология является топологией сходимости на некоторой системе подмножеств сопряженного пространства.

Выпуклое уравновешенное множество называется *абсолютно выпуклым*.

$\forall M \subset X \quad M^0$ является поглощающей в X <=> $\forall x \in X \quad \pi_x|_M \in B(M, \mathbb{C})$. Такие множества M в сопряженном пространстве, что все функционалы вычисления на этих множествах ограничены, называются *слабо ограниченными*.

14.Гильбертовы пространства, вещественные и комплексные

Скалярное произведение

Вещественные пространства описывают классические пространства состояний. Комплексные пространства могут описывать пространство квантовых состояний квантовой физической системы.

Предскалярное произведение в векторном пространстве X над полем $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ - это функция $s: X \times X \to K$, такая что

1) $\forall x \in X \quad s(x,x) \geq 0, \quad s(0,x) = s(x,0) = 0;$
2) $\forall \alpha \in K \quad \forall (x,y,z) \in X \times X \times X \quad s(\alpha x + y, z) = \alpha s(x,z) + s(y,z);$
3) $s(y,x) = \overline{s(x,y)}^{\mathbb{C}} = s(x,y)^{\dagger}.$

Можно проверить, что $p_s(x,x) = \sqrt{s(x,x)} \geq 0$ - полунорма.

Скалярное произведение это предскалярное произведение с дополнительным условием невырожденности: $s(x,x) = 0 \iff x = 0, \;\; p_s -$ норма, $s(x,y) = (x,y)_H$.

Гильбертово пространство над полек K – полное относительно топологии, задаваемой нормой, пространство со скалярным произведением над полем K.

Классификация гильбертовых пространств

Подмножество $S \subset H$ называется *ортонормированным*, если $\forall s_1 \in S \;\; \forall s_2 \in S \backslash \{s_1\} \quad s(s_1, s_2) = 0, \; s(s_1, s_2) = 1.$

Подмножество называется *ортогональным*, если $\forall s_1 \in S \;\; \forall s_2 \in S \backslash \{s_1\} \quad s(s_1, s_2) = 0.$

Теорема: в гильбертовом пространстве всегда $\exists$ максимальная ортонормированная система (ОНС) векторов относительно включения $\subset$.

Замечание: максимальные ОНС называются базисами гильбертового пространства.

Индексированное семейство векторов $h \cdot I \to H \quad \left(h(j) = h_j\right)$ называется *ортонормированным*, если $\forall j_1 \in I \;\; \forall j_2 \in I \backslash \{j_1\} \quad s\left(h_{j_1}, h_{j_2}\right) = 0, \;\; s\left(h_{j_1}, h_{j_1}\right) = 1.$

Ортогональная система называется *собственной*, если скалярные квадраты ее элементов ненулевые ($s(s_1, s_2) = 0,\ s(s_1, s_2) \neq 0$).

Гильбертово пространство H со скалярным произведением s_H называется *пополнение*м пространства X со скалярным произведением s_X в узком смысле, если $\bar{X}^{p_{s_H}} = H$ и $s_X = s_H \restriction_{X\times X}$.

Если (X, ρ) – метрическое пространство, то его пополнение в широком смысле (Z, r, J) может быть получено следующей конструкцией: в пространстве всех последовательностей $X^{\mathbb{N}}$ выбирается подмножество фундаментальных последовательностей $X^{\mathbb{N}}_{fund}$, вводится понятие эквивалентности, по которому будем факторизовать: $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty} \ <=> \ \big(\rho(x_n, y_n)\big)$ - бесконечно малая.

$(X^{\mathbb{N}}_{fund}/\sim) = Z$ - множество классов эквивалентностей;

$\vec{x} = (x_1, x_2 \dots)$ – замечание в обозначениях;

$r\big(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ – метрика;

$J(x) = (\widetilde{x, x, \dots})$ – вложение.

Если X было векторным пространством, на котором метрика задавалась полунормой (X, p), тогда можно ввести аналогичный способ пополнения, а результатом факторизации будет полунормированное пространство, где $r(z, 0)$ – норма $\tilde{p}$, такое что $r(z_1, z_2) = \tilde{p}(z_1 + (-1)\cdot z_2)$, где $\forall\lambda \in K \quad \lambda \cdot \widetilde{(x)_n} = (\widetilde{\lambda\, x_n})_n, \quad \widetilde{(x_n)_n} + \widetilde{(y_n)_n} = (\widetilde{x_n + y_n})_n$.

Если норма p на X задавалась скалярным произведением $p = p_s$, то $\tilde{p} = p_{\tilde{s}}$, где $\tilde{s}\big(\widetilde{(x)_n},\ \widetilde{(y_n)_n}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} s(x_n, x_n)$.

Так есть пополнение в широком смысле для нормированных гильбертовых пространств. Отсюда способом, рассмотренным в предыдущей лекции, получается пополнение в узком смысле.

Связь базиса и структуры гильбертова пространства

Комплексные гильбертовы пространства рассматриваются в роли пространств чистых состояний квантовых систем.

Замечание: если B – гильбертов базис (ОНБ) в гильбертовом пространстве H над полем K, то функция $H \ni \vec{x} \overset{J}{\mapsto} c^{\vec{x}} \in K^B$ т.ч. $c^{\vec{x}}(b) \equiv: c_b^{\vec{x}} := (\vec{x}; b)_H$ называется коэффициентной и обращается в нуль во всех точках B кроме, быть может, счетного подмножества, причем $\sum_{b\in B} |c_b^{\vec{x}}|^2 < \infty$ и $\forall \vec{y} \in H \quad \sum_{b\in B} c_b^{\vec{x}} \cdot \overline{c_b^{\vec{y}}}^{\mathbb{C}} = (\vec{x}, \vec{y})_H$.

$J(H) = \{f: B \to \mathbb{C}: Card\{b \in B: f(b) \neq 0\} \leq \aleph_0$ и $\sum_{b\in B} |f(b)|^2$ сходится $(< \infty)\}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(f, g)_{J(H)} = \sum f_b \cdot \overline{g_b}$ (абс. сходится).

J является биекцией H на J(H), эта биекция линейная, сохраняет норму и скалярное произведение. Биекции, сохраняющие дополнительные структуры, называются изоморфизмами для соответствующих структур. Можно сказать, что J является *гильбертовым изоморфизмом* любого гильбертового пространства на пространство функций, отличающихся от нуля не более чем в счетном множестве определений. Пространства такого вида обозначаются следующим образом: $l_2(B; K) = l_2(B)$.

Аналогия с теорией интегрирования

Гильбертово пространство самосопряженное. Гильбертово пространство нормированное. Как локально выпуклое оно обладает пространством непрерывных линейных функционалов. На непрерывных линейных функционалах можно ввести структуру гильберотова пространства.

Рассмотрим два случая относительно сопряженных пространств.

Если N – нормированное пространство, то $N^* :\equiv N'$.

$\|l\|_{N^*} = \sup\limits_{x \in B_1^N(0)} |l(x)|$.

Замечание: если $K = \mathbb{R}$ и H - гильбертово над $\mathbb{R}$, то $\forall l \in H' \quad \exists y_l \in H$ т.ч. $\forall x \in H \quad l(x) = (x, y_l)_H$; при этом $\|y_l\|_H = \|l\|_{H'}$, причем отображение $I: H' \to H: \ l \mapsto y_l$ является изоморфизмом нормированных пространств, и если в H' задать скалярное произведение по формуле: $(l_1, l_2)_{H'} = (y_{l_1}, y_{l_2})_H$, то I будет *гильбертовым изоморфизмом*; в частности H' является гильбертовым пространством относительно соответствующего скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{H'}$.

Замечание: если $K = \mathbb{C}$ H - гильбертово над $\mathbb{C}$, то $\forall l \in H' \quad \exists y_l \in H$ т.ч. $\forall x \in H \quad l(x) = (x, y_l)_H$; при этом $\|y_l\|_H = \|l\|_{H'}$, причем I является вещественно линейным и комплексно антилинейным: $I(\alpha \cdot \vec{h}) = \bar{\alpha}^{\mathbb{C}} \cdot I(\vec{h})$, таким образом, I – *антиизоморфизм гильбертовых пространств*, и если в H' задать скалярное произведение по формуле: $(l_1, l_2)_{H'} = (y_{l_2}, y_{l_1})_H$, то I будет антиизоморфизмом комплексных гильбертовых пространств;

Если H_1 и H_2 комплексные гильбертовы пространства, то антиизоморфизмом на $J: H_1 \to H_2$, называется вещественная линейная биекция H_1 на H_2, такая что $\forall(\vec{a}_1, \vec{b}_1) \in H_1 \quad (a_1, b_1)_{H_1} = \big(J(b_1), J(a_1)\big)_{H_2}$ и $J(\alpha \cdot b_1) = \bar{\alpha}^{\mathbb{C}} \cdot J(b_1)$ (кванторы всеобщности подразумеваются).

Следствие: если $J': H' \to H$ и $J'': H'' \to H'$ гильбертовы антиизоморфизмы, описанные в замечании, то $J' \circ J''$: $H'' \to H$ является гильбетровым изоморфизмом, то есть биекцией, сохраняющей скалярное произведение $\forall K$.

Гильбертовы тензорные произведения гильбертовых пространств

Замечание: если функция $f \in l_1(B_1, K)$ и $g \in l_2(B_2, K)$, то функция $(f \otimes g): B_1 \times B_2 \to K$ т.ч. $(f \otimes g)(b_1, b_2) = f(b_1) \cdot g(b_2)$ является элементом $l_2(B_1 \times B_2, K)$.

Доказательство:

$\forall(t_1, t_2) \in (B_1 \times B_2)(S_1 \times S_2) \quad (f \otimes g)(t_1, t_2) = 0.$

Пусть $S_1 \underset{\leq \text{сч.}}{\subset} B_1$ и $S_2 \underset{\leq \text{сч.}}{\subset} B_2$, такие что $f|_{B_1 \backslash S_1} \equiv 0$ и $f|_{B_2 \backslash S_2} \equiv 0$, тогда $S_1 \times S_2$ тоже не более чес счетно и $\sum_{\substack{s_1 \in S_1 \\ s_2 \in S_2}} |(f, g)(s_1, s_2)|^2 = \sum_{s_2}(\sum_{s_1} |f_{s_1}|^2) |g_{s_2}|^2 = \|f\|^2 \cdot \|g\|^2 < \infty$.

Замечание: линейная оболочка множества тензорных произведений $\{(f \otimes g): f \in l_2(B_1), g \in l_2(B_2)\}$ плотна в $l_2(B_1 \times B_2, K)$.

15. Тензорное произведение

В пространстве $l_2(B)$ ОНБ является множество функций вида $\{\delta_b\colon b \in B\}$, где $\delta_b\colon B \to \mathbb{C}$, такая что $\forall b_0 \in B \quad \delta_b(b_0) = \begin{cases} 1, b = b_0 \\ 0, b_0 \in B\backslash\{b\} \end{cases}$; $\quad \delta_b(b_0) \equiv \delta_{b,b_0}$ – символ Кронекера. Кронекеровские функции – индикаторные функции. $1_{\{b\}\subset B} \equiv \delta_b$.

ОНБ в $l_2(B_1 \times B_2, K)$ образован функциями вида $\delta_{(b_1,b_2)}$ $(\forall\ (b_1,b_2) \in B_1 \times B_2)$, где $\forall\ \left(b_{1,0},b_{2,0}\right) \in B_1 \times B_2 \qquad \delta_{\left(b_{1,0},b_{2,0}\right)}\left(\left(b_{1,0},b_{2,0}\right)\right) = 1_{\{b_1,b_2\}\subset B_1\times B_2}\left(b_{1,0},b_{2,0}\right) \equiv 1_{\{b_1\}\subset B_1}\left(b_{1,0}\right) \cdot 1_{\{b_2\}\subset B_2}\left(b_{2,0}\right) = \left(\delta_{b_1} \otimes \delta_{b_2}\right)\left(b_{1,0},b_{2,0}\right)$.

Таким образом, ортонормированный базис, по которому раскладываются все векторы в не более чем счетную линейную комбинацию, таков, что $f = \sum_{b\in B} c_b^f \cdot \delta_b \in$ замыканию множеств линейных комбинаций (замыканию линейной оболочки базиса). Тензорные произведения содержат в себе базисные функции. Линейная оболочка всех тензорных произведений, которые содержат в себе базисные функции, будет плотна, потому что ее замыкание даст любую функцию.

$l_2(B_1 \times B_2)$ изоморфно гильбертовому тензорному произведению: $l_2(B_1 \times B_2) \underset{\text{г.}}{\cong} l_2(B_1)\otimes l_2(B_2)$.

Свойства тензорного произведения

Отображение $\beta\ \ l_2(B_1) \times l_2(B_2) \ni (f,g) \overset{\beta}{\mapsto} (f \otimes g) \in l_2(B_1 \times B_2)$:

$$\begin{tikzcd} l_2(B_1) \times l_2(B_2) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & l_2(B_1 \times B_2) \arrow[d, dashed, "\lambda"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Рис. 15.1

1) билинейно;
2) линейная оболочка образа $lin\ span\ (Ran\ \beta)$ плотна в $l_2(B_1 \times B_2)$;
3) универсальнось: $\forall$ билинейного ограниченного оператора отображения $\beta_0\colon l_2(B_1) \times l_2(B_2) \to K \quad \exists!$ линейный ограниченный оператор $\lambda\colon l_2(B_1 \times$

$B_2) \to K$ т.ч. выполнено условие коммутативной диаграммы с рис. 15.1, то есть $\forall (f,g) \in l_2(B_1) \times l_2(B_2)$

$$\beta_0(f,g) = \lambda\big(\beta(f,g)\big) = \lambda(f \otimes g).$$

Докажем свойство 3.

Доказательство:

Линейную непрерывную функцию достаточно задать на базисе. Базис – образ базисных векторов.

Пусть $\lambda_{00}(\delta_{b_1} \otimes \delta_{b_2}) \coloneqq \beta_0(\delta_{b_1}, \delta_{b_2})$ продолжаем по линейности на линейную оболочку $lin\, span(\delta_{b_1} \otimes \delta_{b_2}) = l_{2,0}(B_1 \times B_2) = lin\, span\, \beta\left(l_{2,0}(B_1) \times l_{2,0}(B_2)\right)$, это продолжение однозначно, $\lambda_0 \colon l_{2,0}(B_1 \times B_2) \to K$.

$\forall f_0 \in l_{2,0}(B_1) \quad \forall g_0 \in l_{2,0}(B_2)$, вычислим λ_0: $\lambda_0(f_0 \otimes g_0) = \lambda_0\left(\left(\sum_{b_1 \in B} c_{b_1}^{f_0} \delta_{b_1}\right) \otimes \left(\sum_{b_2 \in B} c_{b_2}^{g_0} \delta_{b_2}\right)\right) = \lambda_0 \sum_{(b_1,b_2) \in B_1 \times B_2} \left(\left(c_{b_1}^{f_0} \cdot c_{b_2}^{g_0}\right) \cdot \delta_{b_1} \otimes \delta_{b_2}\right) = \sum_{(b_1,b_2) \in B_1 \times B_2} \left(\left(c_{b_1}^{f_0} \cdot c_{b_2}^{g_0}\right) \beta_0(\delta_{b_1}, \delta_{b_2})\right) = \sum_{b_1} c_{b_1}^{f_0} \left(\sum_{b_2} c_{b_2}^{g_0} \cdot \beta_0(\delta_{b_1}, b_2)\right) = \sum_{b_1} c_{b_1}^{f_0} \cdot \beta_0(\delta_{b_1}, g_0) = \beta_0(f_0, g_0)$.

Проверим непрерывность λ, опираясь на непрерывность β_0. Воспользуемся свойством непрерывности β.

Докажем ограниченность λ на единичном шаре: $\sup_{h \in l_{2,0}(B_1 \times B_2), \|h\|^2 \le 1} |\lambda_0(h)| < +\infty$.

$h = \sum c_{b_1,b_2}^h \cdot b_1 \otimes b_2$;

$\sum \left|c_{b_1,b_2}^h\right|^2 \le 1$;

$\lambda_0(h) = \sum c_{b_1,b_2}^h \cdot \beta_0(b_1, b_2)$;

Ограничения нетривиальные. Сумма квадратов сходится и не превосходит единицу, β_0 задает ограниченные числа. Это не удобно, не прослеживается связь с гильбертовой структурой. Переформулируем через соответствие ортонормированных базисов.

$\forall$ билинейного ограниченного оператора, переводящего базис в базис, $\beta_0: l_2(B_1) \times l_2(B_2) \to H_0$, где H_0 вспомогательное гильбертово пространство, переводящего декартово произведение канонических ОНБ в ОНБ, $\exists!$ линейный ограниченный оператор $\lambda: l_2(B_1 \times B_2) \to H_0$, переводящий канонический ОНБ в ОНБ. В этом случае доказательство заметно упрощается.

Из свойств β_0 (произведение декатровых ортонормированных базисов переходит в ортонормированный базис) следует свойство для λ_{00}. Затем продолжаем по линейности. Заметим, что выполняется $\beta_0: l_2(B_1) \times l_2(B_2) \to H_0$ $\exists!$ линейный ограниченный оператор $\lambda: l_2(B_1 \times B_2) \to K$ т.ч. есть $\forall(f, g) \in l_2(B_1) \times l_2(B_2)$.

Проверим ограниченность $\sup\limits_{h \in l_{2,0}(B_1 \times B_2), \|h\| \le 1} \|\lambda_0(h)\|^2$. Вспомним, что если система $(v_1, \dots, v_n)$ – ортонормированная, то $\|\sum_k c_k v_k\|^2 = \sum_k |c_k|^2$ (обобщение теоремы Пифагора). Соответственно, $\|\lambda_0(h)\|^2 = \sum \left|c_{b_1, b_2}^h\right|^2 = \|h\|^2$, $\sup\limits_{h \in l_{2,0}(B_1 \times B_2), \|h\| \le 1} \sum \left|c_{b_1, b_2}^h\right|^2 \le 1$. Так, свойство ограниченности выполнилось автоматически. Из того, что ОНБ перешел в ОНБ, мы получили ограниченность на плотном подмножестве.

Продолжим на все пространство.

Введем понятие свойства Липшица для отображений метрических пространств.

Если (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) метрические пространства, функция $f: M_1 \to M_2$ со свойством $\exists L > 0 \quad \forall(m_1, n_1) \in M_1 \times M_2 \quad \rho_2\big(f(m_1), f(n_1)\big) < L \cdot \rho_1(m_1, n_1)$, то такое отображение называется *липшицевым* с константой Липшица L. Такие отображения равномерно непрерывны.

Отображение между метрическими пространствами $f: (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ называется равномерно непрерывным, если функция $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{(m_1, n_1) \in M_1 \times M_2, \rho_1(m_1, n_1) < \delta} \rho_2\big(f(m_1), f(n_1)\big)$ при $\delta > 0$ стремится к нулю при $\delta \to 0$.

ω_f - модуль непрерывности.

Для липшицовой L есть ограничение: $0 \le \omega_f(\delta) \le L \cdot \delta$.

Равномерные непрерывные отображения можно продолжать на замыкание однозначным образом.

Теорема: если (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) метрические пространства, (M_2, ρ_2) - полное, подмножество $M_0 \subset M_1$ - плотное, $\rho_0 = \rho_1|_{M_0 \times M_0}$, f_0 равномерно непрерывно отображает $(M_0, \rho_0) \to (M_2, \rho_2)$, то $\exists!$ равномерно непрерывное отображение $f_1 : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$, такое что $f_0 = f_1 \upharpoonright_{M_0}$ с тем же модулем непрерывности ω_f.

Доказательство:

$\forall m_1 \in M_1 \backslash M_0$ в силу определения плотности можем брать окрестности радиуса $1/_n$ вокруг точки m_n^0. Поскольку это точка замыкания, то $\rho_1(m_1, m_n^0) < 1/_n$.

Последовательность (m_n^0) фундаментальна, следовательно, для равномерно непрерывных отображений вытекает, что образы $f_0(m_n^0)$ образуют фундаментальную последовательность. Тогда в силу полноты (M_2, ρ_2), $f_0(m_n^0) \to m_2 \in M_2$, $m_2 := f(m_1)$. В силу равномерной непрерывности можно проверить корректность.

Наличие модуля непрерывности, бесконечно малого в точке 0 – критерий равномерной непрерывности и в частности непрерывности.

Таким образом, линейный оператор λ_0 сохраняет нормы, так как он сохраняет базисы, значит, стремящаяся к нулю последовательность переходит в стремящуюся к нулю. И поскольку есть непрерывность в нуле, то в любой точке образы будут сходиться, поскольку расстояние вычисляется как норма разности, которая при сходимости будет стремиться к нулю.

Так, λ_0 – равномерно непрерывный оператор с константой Липшица 1. Тогда равномерно непрерывное отображение можно продолжить на замыкание, а замыканием будет все l_2.

λ получаем замыканием λ_0 (функция, у которой график является замыканием графика другой функции, называется замыканием той другой функции).

Гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств

Гильбертовым тензорным произведением гильбертовых пространств H_1 и H_2 называется произвольная пара - (β, H_3), такая что:

1) H_3 - гильбертово пространство;
2) β является билинейным непрерывным отображением $H_1 \times H_2 \to H_3$, такое что $\forall$ ОНБ $B_1 \subset H_1$ и $B_2 \subset H_2$ $\quad \beta \restriction_{B_1 \times B_2}$ инъективно и образ $\beta(B_1 \times B_2)$ является ОНБ в H_3;
3) $\forall$ билинейного ограниченного оператора $\beta_0 \colon H_1 \times H_2 \to H_0$, переводящее декартово произведение ОНБ инъективно в ОНБ пространства H_0 соответственно, $\exists!$ линейно ограниченный оператор $\lambda \colon H_3 \to H_0$, такое что $\forall (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ справедливо $\beta_0(h_1, h_2) = \lambda\big(\beta(h_1, h_2)\big)$ и перев. ОНБ в ОНБ (справедлива коммутативная диаграмма с рис. 15.2).

$$\begin{tikzcd} H_1 \times H_2 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & & H_3 \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ & H_0 & \end{tikzcd}$$

Рис. 15.2

16. Тензорные произведения конечномерных пространств

Свойство универсальности

Пусть на $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $Card(B_1 \cup B_2) < \infty$, тогда $H_j = l_2(B_j) \cong K^{B_j}, j = 1, 2, 3$, $B_3 = B_1 \times B_2$. В этом случае $H_3 = K^{B_1}$, $\beta: K^{B_1} \times K^{B_2} \to K^{B_1 \times B_2}$, $\beta_c(\delta_{b_1}, \delta_{b_2}) = \delta_{b_1} \otimes \delta_{b_2} = \delta_{(b_1,b_2)}$ $\forall (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$. $\delta_{(b_1,b_2)}$ не только гильбертовый, но и линейный базис в $K^{B_1 \times B_2}$.

Помимо универсальности, сформулированной в терминах ОНБ в предыдущей лекции, H_3 , которое мы назвали гильбертовым тензорным произведением, обладает дополнительным свойством.

Замечание (универсальность): $\forall$ векторного пространства V_0 над K и $\forall$ билинейного отображения $\beta_0: K^{B_1} \times K^{B_2} \to V_0$ $\exists!$ линейное отображение $\lambda: K^{B_1 \times B_2} \to V_0$, такое что справедлива коммутативная диаграмма с рис. 16.1, то есть $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in K^{B_1} \times K^{B_2}$ справедливо равенство $\beta_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda\big(\beta(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\big)$.

$$\begin{tikzcd} K^{B_1} \times K^{B_2} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & & K^{B_1 \times B_2} \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ & V_0 & \end{tikzcd}$$

Рис. 16.1

Доказательство:

Рассмотрим частный случай тождества $\beta_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda\big(\beta(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\big)$ при $\vec{x}_1 = \delta_{b_1}$, $\vec{x}_2 = \delta_{b_2}$.

$\beta_0(\delta_{b_1}, \delta_{b_2}) = \lambda\left(\beta(\delta_{b_1}, \delta_{b_2})\right) = \lambda(\delta_{(b_1,b_2)})$.

Мы хотим, чтобы отображение было линейным и известно его значение на базисе, тогда можем продолжить до единственного линейного оператора со значениями в V_0.

Линейный оператор по значениям на базисе пространства однозначно определяется, так доказана единственность.

Проверим условие $\beta_0(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \lambda\big(\beta(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\big)$ для произвольных $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$.

Воспользуемся билинейностью вспомогательного произвольного оператора $\beta_0(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = \beta_0\big(\sum_{b_1\in B_1} c_{b_1}^{x_1}\cdot\delta_{b_1}, \sum_{b_2\in B_2} c_{b_2}^{x_2}\cdot\delta_{b_2}\big) = \sum_{b_1\in B_1}\ \sum_{b_2\in B_2} c_{b_1}^{x_1}\cdot c_{b_2}^{x_2}\cdot$ $\beta_0\big(\delta_{b_1},\delta_{b_2}\big) = \sum_{b_1\in B_1}\ \sum_{b_2\in B_2} c_{b_1}^{x_1}\cdot c_{b_2}^{x_2}\cdot\lambda\Big(\beta\big(\delta_{b_1},\delta_{b_2}\big)\Big) =$ $\lambda(\sum_{b_1\in B_1}\ (\sum_{b_2\in B_2}\beta(\delta_{b_1},\delta_{b_2})\ \cdot c_{b_2}^{x_2})\ \cdot\ c_{b_1}^{x_1}) = \sum_{b_1}\beta\,(\delta_{b_1},x_2)c_{b_1}^{x_1} = \lambda(\beta(x_1,x_2)$.

Тензорное произведение пространств

Сформулируем единственность. Аксиоматизируем доказанное свойство.

$\forall$ алгебраического поля K пусть V_1 и V_2 векторные пространства над K. *Тензорным произведением пространств V_1 и V_2 над K* будет называться пара (V_3,β), такая что

V_3 - линейное пространство над K;

$\beta: V_1\times V_2 \to V_3$ билинейное отображение, причем $\forall$ вспомогательного линейного пространства V_0 $\forall$ билинейного отображения $\beta_0: V_1\times V_2\to V_0$ $\exists!$ линейное отображение λ: $V_3\to V_0$, такое что $\forall(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$ $\beta_0(v_1,v_2) = \lambda\big(\beta(v_1,v_2)\big)$ или $\beta_0 = \lambda\circ\beta$ (рис. 16.2).

$$\begin{tikzcd}
V_1\times V_2 \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & & V_3 \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\
& V_0 &
\end{tikzcd}$$

Рис. 16.2

Значит, пару $(K^{B_1\times B_2},\beta)$ можно назвать тензорным произведением.

Доказательство существования тензорного произведения (V_3,β) для $\forall$ конечномерных пространств V_1 и V_2:

Выбираем линейные базисы B_1 в V_1 и B_2 в V_2 (конечное множество).

Выбрав базисы, можем каждому вектору сопоставить однозначно коэффицентную функцию разложения.

$V_1 \times V_2 \underset{\leftarrow}{\overset{J}{\longrightarrow}} K^{B_1} \times K^{B_2}$ – копия декартового произведения с изоморфизмом J.

$K^{B_1} \times K^{B_2} \overset{\beta_c}{\to} K^{B_1 \times B_2}$.

Проверим свойство универсальности: если $V_1 \times V_2 \underset{\leftarrow}{\overset{J}{\longrightarrow}} K^{B_1} \times K^{B_2} \overset{\beta_c}{\to} K^{B_1 \times B_2} \equiv V_3$,

то $V_1 \times V_2 \overset{\beta = J \circ \beta_c}{\longrightarrow} K^{B_1 \times B_2}$.

Билинейность β очевидна в силу свойства J построено из J_1, J_2: $J_j : V_j \underset{\leftarrow}{\longrightarrow} K^{B_j}$, $j = 1, 2$, $J(v_1, v_2) = \big(J_1(v_1), J_2(v_2)\big)$.

Проверим билинейность β_c по первому аргументу (по второму проверяется аналогично). $\beta(k \cdot v_1 + v_1', v_2) = \beta_c\big(J(k \cdot v_1 + v_1', v_2)\big) = \beta_c\big(J_1(k \cdot v_1 + v_1'), J_2(v_2)\big) = \beta_c\big(kJ_1(v_1) + J_1(v_1'), J_2(v_2)\big) = k\beta_c\big(J_1(v_1), J_2(v_2)\big) + \beta_c\big(J_1(v_1'), J_2(v_2)\big) = k\beta_c\big(J\,(v_1, v_2)\big) + \beta_c\big(J\,(v_1', v_2)\big) = k\beta(v_1, v_2) + \beta(v_1', v_2)$.

Предположим, $V_1 \times V_2 \overset{\beta_0}{\to} V_0$, тогда должно найтись $\lambda : V_3 \overset{\lambda}{\to} V_0$. По аналогии с тем, как из билинейности β_c получали билинейность β, можно рассмотреть другую композицию. Можно взять β_{0c}: $K^{B_1} \times K^{B_2} \overset{\beta_{0c} = \beta_0 \circ J^{-1}}{\longrightarrow} V_0$, β_{0c} оказывается билинейным, значит можно воспользоваться существованием канонического λ_c.

Проверим, что можно принять $\lambda = \lambda_c$.

$\beta_0\,(v_1, v_2) = \beta_{0c}\big(J_1(v_1), J_2(v_2)\big) = \lambda_c\Big(\beta_c\big(J_1(v_1), J_2(v_2)\big)\Big) = \lambda_c\Big(\beta_c\big(J(v_1, v_2)\big)\Big) = \lambda_c\big(\beta(v_1, v_2)\big)$.

Так, мы доказали все свойства, присущие тензорному произведению. Таким образом, существование тензорного произведения для конечномерных пространств доказано.

Комментарий: $J(v_1, v_2) = \big(J_1(v_1), J_2(v_2)\big)$ можно записать в виде $J = J_1 \times J_2$ – справедливо с точностью до дополнительной биекции.

Единственность тензорного произведения с точностью до изоморфизма

Обсудим общую единственность тензорного произведения. Пусть в каких-то случаях тензорное произведение существует. Тензорное произведение не единственно, потому что если есть пара (V_3, β), для которой выполняется свойство универсальности, какого бы ни было пространство V_0 и билинейное отображение β_0, всегда найдется $\lambda_{\beta_0,\beta}$, единственным образом зависящая от β_0.

Рассмотрим пространство V_4 такое, чтобы между V_3 и V_4 был линейный изоморфизм J. Тогда появится линейное отображение $\lambda_{\beta_0,\beta}\circ J^{-1}$ (рис. 16.3), проверим, что эта композиция подойдет на роль $\lambda_{\beta_0,\beta_J}$.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend left, "\beta_J \equiv J\circ\beta"] \arrow[dr, "\beta_0"'] & V_3 \arrow[r, shift left, "J"] \arrow[d, dashed, "\lambda_{\beta_0,\beta}"] & V_4 \arrow[l, shift left, "J^{-1}"] \arrow[dl, dashed, "\lambda_{\beta_0,\beta}\circ J^{-1}"] \\
 & V_0 &
\end{tikzcd}$$

Рис. 16.3

$$\beta_0\,(v_1, v_2) = \lambda_{\beta_0,\beta}\big(\beta(v_1, v_2)\big) = \big(\lambda_{\beta_0,\beta}\circ J^{-1}\big)\Big(\big(J\circ\beta\big)(v_1, v_2)\Big) = \lambda_{\beta_0,\beta_J}\Big(\beta_J(v_1, v_2)\Big).$$

Проверим единственность $\lambda_{\beta_0,\beta_J}$. Предположим, что есть другое отображение $\tilde{\lambda}$, подходящее под то же свойство, которому удовлетворяет $\lambda_{\beta_0,\beta_J}$, $\tilde{\lambda}(v_4) \neq \lambda_{\beta_0,\beta_J}(v_4)$. Тогда $v_3 = J^{-1}v_4$ => $\big(\tilde{\lambda}J\big)(v_3) \neq \lambda_{\beta_0,\beta_J}(Jv_3) = \lambda_{\beta_0,\beta}\,(v_3)$

$\beta_0 = \tilde{\lambda}\circ\beta_J = \big(\tilde{\lambda}\circ J\big)\circ J^{-1}\circ\beta_J = \big(\tilde{\lambda}\circ J\big)\circ\beta = \lambda_{\beta_0,\beta}\circ\beta$, то есть свойство справедливо не для единственного отображения.

Таким образом, пара (V_4, β_J) то же реализует тензорное произведение. Так, в случае конечномерных пространств огромное количество изоморфизмов на другие пространства, тензорных произведений при ненулевых пространствах континуум, но они между собой связаны.

Сформулируем теорему единственности с точностью до изоморфизмов. Покажем, что на самом деле если есть другое тензорное произведение, то оно однозначно связано с исходным.

Замечание о единственности тензорного произведения с точностью до фиксированного изоморфизма: пусть (V_3, β) и (V_4, β_4) – билинейные тензорные произведения $\left(V_1 \times V_2 \xrightarrow{\beta} V_3,\ V_1 \times V_2 \xrightarrow{\beta_4} V_4\right)$. Тогда по определению того, что (V_3, β) - тензорное произведение и в силу билинейности β_4. Тогда $\exists!\ \lambda_{\beta_4,\beta}: V_3 \to V_4$. (V_4, β_4) - тензорное произведение, β – билинейный оператор. Тогда $\exists\ \lambda_{\beta,\beta_4}: V_4 \to V_3$. Образ β является алгебраически полным в V_3, то есть образ β дает базис, потому что если бы линейная оболочка образа не совпадала бы с V_3, тогда был бы дополнительный вектор в базисе, на котором линейные операторы λ могли бы различаться и единственность бы нарушилась. Таким образом, образ отображения β содержит базис пространства. Аналогично про β_4.

Таким образом, между любыми двумя тензорными произведениями существует единственный линейный изоморфизм, который их связывает.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ