МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ. СЕМИНАРЫ

ГУГНИН
ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

Гугнин Дмитрий Владимирович

Конспект лекций

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ. СЕМИНАРЫ

Конспект выполнен студентом мех.-мат. ф-та МГУ
Тюриной Кристиной Евгеньевной

Содержание

Семинар 1

Общая топология

Определение 1.1. Метрикой на пространстве X называется отображение $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее аксиомам:
1) $d(x,y) \geqslant 0$, причем $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$;
3) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$.

Определение 1.2. Метрическим пространством называется множество X с заданной на нем метрикой d.

Определение 1.3. Топологий на пространстве X называется подмножество $\tau \subset 2^X$, удовлетворяющее условиям:

$$1)\ \varnothing, X \in \tau$$
$$2)\ \forall U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda : \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$$
$$3)\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall U_1, \dots, U_n \in \tau : \quad U = U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$$

Элементы τ называют открытыми множествами.

Определение 1.4. Топологическим пространством называется множество X с заданной на нем топологией τ.

Определение 1.5. Множество A в топологическом пространстве (X,τ) называется замкнутым, если $X \setminus A \in \tau$.

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Тогда топологию на нем можно задать следующим образом:

$$U \subset X \text{ — открытое множество} \Leftrightarrow \forall x_0 \in U \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(x_0) \subset U,$$

где $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X | \quad d(x,x_0) < \varepsilon\}$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x_0.

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). Топологическое пространство (X,τ) называется хаусдорфовым, если:

$$\forall x,y \in X, x \neq y \quad \exists x \in U \in \tau, \quad \exists y \in V \in \tau : \quad U \cap V = \varnothing.$$

Аксиома T_4 (нормальность). Топологическое пространство (X,τ) называется нормальным, если:

$$\forall A,B \subset X \text{ — замкнутые }, A \cap B = \varnothing \quad \exists A \subset U \in \tau, \quad \exists B \subset V \in \tau : \quad U \cap V = \varnothing.$$

Задача 1.1. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

Решение. Покажем хаусдорфовость метрического пространства. Фиксируем точки $x,y \in X$. Пусть $d(x,y) = d$. Тогда возьмем в качестве множеств U и V из определения хаусдорфовости открытые шары $B_{d/2}(x)$ и $B_{d/2}(y)$.

Теперь покажем выполнение аксиомы T_4. Пусть $A,B \subset X$ — замкнутые , $A \cap B = \varnothing$. Для каждой точки $a \in A$ обозначим $d_a = d(a,B)$. Если $d_a = 0$, то существует набор сходящихся к a точек из B. Тогда a — предельная точка замкнутого множества B, следовательно, $a \in B$, что невозможно. Получаем, что $d_a > 0 \quad \forall a \in A$. Построим окрестность всего множества A:

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{d_a/2}(a).$$

Аналогичным образом строится окрестность V множества B.

Допустим, что эти окрестности пересекаются, то есть:

$$\exists a \in A, \quad \exists b \in B : \quad B_{d_a/2}(a) \cap B_{d'_b/2}(b) \neq \varnothing,$$

где $d'_{b_0} = d(A, b)$. Очевидно, что $d(a,b) \geqslant d_a$ и $d(a,b) \geqslant d'_b$, а также по неравенству треугольника: $d(a,b) \leq \frac{d_a}{2} + \frac{d'_b}{2}$. Из этих последних соотношений видим, что $d(a,b) = \frac{d_a}{2} + \frac{d'_b}{2}$, то есть шары не пересекаются, это дает противоречие.

Задача решена.

Определение 1.6. Индуцированная топология на подмножестве A в топологическом пространстве (X, τ) это множество:

$$\tau|_A = \{U \subset A| \quad \exists V \in \tau : \quad U = V \cap A\}.$$

Определение 1.7. Пусть на топологическом пространстве (X, τ) задано отношение эквивалентности, то есть определено фактор-пространство $Y = X/\sim$. Каноническая проекция $\pi : X \to X/\sim$ задает фактор-топологию на фактор-пространстве Y следующим образом:

$$U \subset Y \text{ — открыто } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \tau.$$

Определение 1.8. Открытой локальной базой в точке x_0 топологического пространства (X, τ) называется множество:

$$B_{x_0} = \{x_0 \in U_\lambda \in \tau, \quad \lambda \in \Lambda| \quad \forall x_0 \in V \in \tau \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda : \quad x_0 \in U_{\lambda_0} \subset V\}$$

.

Первая аксиома счетности (1AC). У любой точки топологического пространства существует не более чем счетная локальная база.

Для метрического пространства первая аксиома счетности выполнена. В качестве базы достаточно взять все шары с рациональными радиусами.

Определение 1.9. Базой топологии пространства (X, τ) называется такое подмножество $\mathcal{B} \subset \tau$, что любое открытое множество представляется в виде некоторого объединения элементов из $\mathcal{B}$.

Вторая аксиома счетности (2AC). У данной топологии пространства существует не более чем счетная открытая база.

Пример. Континуальное дискретное метрическое пространство X с метрикой

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq y, \\ 0, \text{ если } x = y \end{cases}$$

не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Задача 1.2. Пусть $X = \bigvee_{n=1}^{\infty} I_n^1$ — счетный букет (т.е. дизъюнктное объединение с отождествлением одной точки из каждого множества букета) отрезков со стандартной топологией. Доказать, что пространство X хаусдорфово, но не метризуемо.

Решение. Пусть на пространстве X существует метрика d. Выберем последовательность точек $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, удовлетворяющую условиям:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in I_n^1 \quad \text{и} \quad d(x_0, x_n) \leq \frac{1}{n},$$

где x_0 — общая точка всех отрезков.

Такая последовательность точек сходится к x_0. Покажем, что в фактор-пространстве $X/\sim$ множество A замкнуто. Действительно, его дополнение $(X/\sim) \setminus A$ состоит из объединения полуинтервалов и "звездчатой"окрестности точки x_0. Значит, точка x_0 — не предельная для множества A в фактор-пространстве $X/\sim$, то есть последовательность $\{x_1, x_2, \dots\}$ не сходится к точке x_0. Противоречие.

Хаусдорфовость очевидна.

Задача решена.

Компактность

Определение 1.10. Открытым (внутренним) покрытием топологического пространства (X, τ) называется объединение открытых множеств такое, что:

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha, \quad \text{где} \quad U_\alpha \in \tau \quad \forall \alpha \in \Lambda$$

Определение 1.11. Если из любого открытого покрытия топологического пространства можно выбрать конечное подпокрытие, то такое пространство называется внутренне компактным.

Определение 1.12. Пусть $(X, \tau) \subset (W, \xi)$ — топологические пространства, причем $\tau = \xi|_X$. Внешним покрытием пространства X называется объединение открытых множеств такое, что:

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha, \quad \text{где} \quad U_\alpha \in \xi \quad \forall \alpha \in \Lambda$$

Определение 1.13. Если из любого внешнего покрытия (открытыми множествами из топологии пространства (W, ξ)) топологического пространства (X, τ) можно выбрать конечное подпокрытие, то такое пространство (X, τ) называется внутренне компактным.

Теорема 1.1. Топологическое пространство внешне компактно тогда и только тогда, когда оно внутренне компактно.

Задача 1.3 (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$). Доказать, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Решение. Пусть множество X компактно. Допустим, что X неограниченно. Тогда из покрытия

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a), \quad \text{где} \quad a \in X$$

нельзя выбрать конечное подпокрытие. Противоречие.

Покажем замкнутость также от противного. Пусть у множества X существует предельная точка $a \in \mathbb{R}^n$ такая, что $a \notin X$. Рассмотрим покрытие:

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{n}}(a) \right)$$

В силу компактности из него можно выбрать конечное подпокрытие X. Следовательно, у точки a существует окрестность, не пересекающаяся с множеством X. В то же время точка a — предельная. Получаем противоречие.

Обратно, пусть множество X — ограничено и замкнуто. Тогда $X \subset I_1 \times \dots \times I_n$, где $I_1, \dots, I_n$ — одномерные отрезки. Каждый отрезок компактен, значит, их прямое произведение также компактно. Замкнутое подмножество в компактном множестве — компактно.

Задача решена.

Накрытия

Определение 1.14. Топологическое пространство (X, τ) называется сильно локально линейно связным, если:

$$\forall x_0 \in X \quad \forall x_0 \in U \in \tau \quad \exists x_0 \in V \in \tau, \text{ т.ч. } V \subset U \text{ и } V\text{— линейно связно}$$

Определение 1.15. Пусть пространства $(X, \tau), (Y, \xi)$ — хаудорфовы, линейно связны, сильно локально линейно связны и $n \in \mathbb{N}$. Тогда n-листным накрытием пространства Y пространством X называется отображение $f : X \to Y$ такое, что:

$$\forall y_0 \in Y \quad \exists y_0 \in U \in \xi : \quad f^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{n} V_i, \text{ где } V_i \in \tau \text{ и } f : V_i \to U\text{— гомеоморфизм}$$

Замечания. 1) Любой гомеоморфизм задает однолистное накрытие.

2) Двулистное накрытие задает непрерывную инволюцию накрывающего множества без неподвижных точек.

Определение 1.16. Если X односвязно, то накрытие называется универсальным.

Задача 1.4*. Доказать, что у гавайской серьги нет универсального накрытия.

Определение 1.17. Топологическое пространство (X, τ) называется сильно локально односвязным, если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall x_0 \in U \in \tau \quad \exists x_0 \in V \in \tau, \text{ т.ч. } V \subset U, V\text{— линейно связно и } \pi_1(V) = 1$$

Задача 1.5. Пусть пространства $(X, \tau), (Y, \xi), (Z, \eta)$ — хаудорфовы, линейно связны, сильно локально линейно связны. Заданы n-листное накрытие $f : X \to Y$ и m-листное накрытие $g : Y \to Z$. Доказать, что:

а) если $n, m \in \mathbb{N}$, то $g \circ f$ — nm-листное накрытие;

б) если $n = \infty, m \in \mathbb{N}$, то $g \circ f$ — ∞-листное накрытие.

Задача 1.6*. Построить пример композиции накрытий из задачи 5, для которого $n = 2, m = \infty$ и $g \circ f$ — не накрытие.

Задача 1.7*. Пусть пространства $(X, \tau), (Y, \xi), (Z, \eta)$ — хаудорфовы, линейно связны, сильно локально линейно связны, сильно локально односвязны. Тогда для любых двух накрытий $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ их композиция $g \circ f$ — тоже накрытие.

Произведение топологических пространств

Пусть $(X, \tau), (Y, \xi)$ — топологические пространства.

Определение 1.18. Подмножество $W \subset X \times Y$ открыто, если

$$\forall (x_0, y_0) \in W \quad \exists x_0 \in U \in \tau \quad \exists y_0 \in V \in \xi : \quad (x_0, y_0) \in U \times V \subset W.$$

Семинар 2

Симплициальные комплексы

Разбор домашнего задания

Решение задачи 1.4*. Гавайская серьга — топологическое пространство, соответствующее объединению счетного числа окружностей. Окружность с номером n из этого объединения обозначим через S^1_n. Допустим, существует универсальное накрытие гавайской серьги множеством X. Тогда X — односвязно, то есть его фундаментальная группа тривиальна: $\pi_1(X) = 1$. Рассмотрим в X петлю, которая проецируется в S^1_n. Эта петля, в силу односвязности, стягивается по X в точку, следовательно, ее проекция также стягивается в точку по гавайской серьге. Тогда отображение пространств:

$$S^1_n \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{r} S^1_n$$

индуцирует отображение фундаментальных групп:

$$\pi_1(S^1_n) \xhookrightarrow{i} \pi_1(X) \xrightarrow{r} \pi_1(S^1_n),$$

$$\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i_*} 1 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z},$$

где i — вложение окружности S^1_n в гавайскую серьгу, r — ретракт серьги на окружность S^1_n. Композиция отображений $r \circ i : S^1_n \to S^1_n$ — есть тождественное отображение, но тогда и композиция $r_* \circ i_* : \pi_1(S^1_n) \to \pi_1(S^1_n)$ — тождественна, что невозможно, так как $i_*(\mathbb{Z}) = e$.

Задача решена.

Решение задачи 1.5. Заданы n- и m-листные накрытия:

$$X \xrightarrow[f]{\forall} Y \xrightarrow[g]{m} Z,$$

причем накрытие f может быть бесконечнолистным.

Возьмем точку $z_0 \in Z$ и рассмотрим ее окрестность $U \in \eta$, удовлетворяющую свойству из определения 1.15.. А именно:

$$g^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^{n} V_i, \text{ где } V_i \in \xi \text{ и } g : V_i \to U \text{— гомеоморфизм.}$$

Далее, у каждой точки из прообраза $g^{-1}(z_0) = y_1, \ldots, y_m$ также существует окрестность W_i из определения 1.15.. Рассмотрим новую окрестность точки z_0:

$$\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^{m} g(V_i \cap W_i) \subset U.$$

Тогда:

$$g^{-1}(\tilde{U}) = \bigsqcup_{i=1}^{n} V'_i, \text{ где } V'_i \in \xi, V'_i \subset V_i \text{ и } g : V'_i \to \tilde{U} \text{— гомеоморфизм,}$$

где $V_i' = V_i \cap W_i$. Осталось рассмотреть в X набор открытых множеств, которые при накрытии f отображаются в множества V_i'. Образом такого набора при отображении $g \circ f$ является окрестность $\tilde{U}$, причем каждое из множеств гомеоморфно этой окрестности.

Задача решена.

CW-комплексы

Определение 2.1. Хаусдорфово пространство X называется CW-комплексом (или клеточным комплексом), если оно представляется в виде:

$$X = \bigsqcup_{n=0}^{N \le +\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_n} e_\alpha^n,$$

где множества e_α^n, называемые клетками, гомеоморфны $\mathbb{R}$ для $\forall \alpha \in I_n$. А также $\forall \alpha \in I_n$ существуют характеристические отображения $\chi_\alpha : D^n \to X$ (D^n — замкнутый шар) такие, что $\chi_\alpha : \mathring{D}^n \to e_\alpha^n$ — гомеоморфизм ($\mathring{D}^n$ — внутренность замнутого шара) и:

$$\chi_\alpha(\partial D^n) = \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right) \subset \bigsqcup_{m \le n-1} \bigsqcup_{\beta \in I_m} e_\beta^m,$$

причем выполнены следующие аксиомы:

$$(C) \quad \overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n = \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right) \subset \bigsqcup_{m \le n-1} \bigsqcup_{\beta=1}^{k<+\infty} e_\beta^m$$

$$(W) \quad \text{Подмножество } A \subset X \text{ — замкнуто} \quad \Leftrightarrow \quad \forall e_\alpha^n : \quad \overline{e_\alpha^n} \cap A \text{ — замкнуто в } X$$

Замечания. 1) Множество $\partial e_\alpha^n = \overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n$ называется границей клетки и, вообще говоря, не совпадает с границей в смысле теории множеств и общей топологии.

2) Обратим внимание, что в аксиоме (C) равенство $(C) \quad \overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n = \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right)$ следует из условий на характеристические отображения χ_α. Действительно, покажем включение:

$$\overline{e_\alpha^n} \subset \chi_\alpha\left(D^n\right) = e_\alpha^n \sqcup \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right).$$

Множество $\chi_\alpha\left(D^n\right)$ — компакт, лежащий в хаусдорфовом пространстве, следовательно, он замкнут. Таким образом, замкнутое множество, содержащее клетку e_α^n, содержит ее замыкание.

Покажем обратное включение:

$$\overline{e_\alpha^n} \supset \chi_\alpha\left(D^n\right) = e_\alpha^n \sqcup \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right).$$

Возьмем точку $x_0 \in \chi_\alpha\left(S^{n-1}\right)$. Тогда $x_0 = \chi_\alpha\left(s_0\right)$ для некоторой точки $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$, то есть s_0 — предельная точка множества D^n. Следовательно, x_0 — предельная для клетки e_α^n, то есть лежит в ее замыкании.

Задача 2.1. Пусть X — произвольный CW-комплекс. Пусть подмножество $A \subset X$ такое,что для любой клетки e_α^n пересечение $A \cap e_\alpha^n$ либо пусто, либо состоит из одной точки. Доказать, что подмножество A — замкнуто в X, а также с индуцированной топологией является дискретным подмножеством.

Решение. Из аксиом (C) и (W) следует что множество $\overline{e_\alpha^n} \cap A$ содержится в пересечении множества A с конечным числом клеток, то есть в пересечении вида:

$$A \cap \left(\bigsqcup_{m=1}^{n} \bigsqcup_{\beta=1}^{k<+\infty} e_\beta^m \right) = \bigsqcup_{m=1}^{n} \bigsqcup_{\beta=1}^{k<+\infty} \left(A \cap e_\beta^m \right).$$

Таким образом, множество $\overline{e_\alpha^n} \cap A$ содержится в объединении конечного числа точек, следовательно, оно замкнуто.

Покажем, что любая точка $a \in A$ является открытым множеством в A. Действительно, для множества $A \setminus a$ пересечение $(A \setminus a) \cap e_\alpha^n$ либо пусто, либо состоит из одной точки. Повторяя рассуждения выше, получим, что множество $A \setminus a$ — замкнуто.

Задача решена.

Задача 2.2. Доказать, что CW-комплекс является компактом тогда и только тогда, когда он конечен (то есть является объединением конечного числа клеток).

Решение. Пусть X — конечный CW-комплекс. Тогда:

$$X = \bigsqcup_{n=0}^{N<+\infty} \bigsqcup_{\alpha=1}^{k<+\infty} e_\alpha^n = \bigsqcup_{n=0}^{N<+\infty} \bigsqcup_{\alpha=1}^{k<+\infty} \overline{e_\alpha^n} = \bigsqcup_{n=0}^{N<+\infty} \bigsqcup_{\alpha=1}^{k<+\infty} \chi_\alpha \left(D^n \right).$$

Так как замкнутый шар D^n — компакт, то его образ при отображении χ_α — также компакт. Таким образом, пространство X представляется в виде конечного объединения компактов, следовательно, само является компактом.

Обратное утверждение докажем от противного, то есть пусть X — компактный бесконечный CW-комплекс. Тогда выберем в каждой клетке e_α^n по одной точке $x_{n,\alpha}$. Полученное бесконечное дискретное множество $A = x_{n,\alpha}$ является замкнутым в X по аксиоме (W). так как A — замкнутое подмножество компакта, то оно само является компактом. С другой стороны дискретное множество может быть компактным, только если оно конечно. Получаем противоречие.

Задача решена.

Определение 2.2. Клеточный комплекс X и его подмножество A называются клеточной парой, если:

$$A = \bigsqcup_{n} \bigsqcup_{\alpha \in J_n \subset I_n} e_\alpha^n \text{ — замкнуто в } X.$$

Задача 2.3. Пусть X — CW-комплекс. Доказать, что для любого компактного подмножества $K \subset X$ существует конечный подкомплекс $A \subset X$, содержащий компакт K.

Решение. Пусть компакт K пересекает бесконечное число клеток пространства X. Рассмотрим множество $B = x_{n,\alpha}$, состоящее из точек $x_{n,\alpha} \in e_\alpha^n \cap K$. Множество B бесконечно и замкнуто, а также является подмножеством компакта, следовательно, множество B компактно. С другой стороны, оно дискретно. Получаем противоречие. Следовательно, компакт K пересекает только конечное число клеток пространства X.

Далее, построим подкомлекс A методом конечного спуска. А именно, множество A будет иметь вид:

$$A = A_N \cup \dots \cup A_0,$$

где A_N есть объединение конечного количества клеток максимальной размерности N, которые пересекает компакт K. Границы этих клеток содержатся в конечном объединении клеток меньшей размерности. Множество A_{N-1} состоит из клеток размерности $N-1$ из этого объединения, а также из остальных клеток размерности $N-1$, которые пересекает компакт K и так далее.

Задача решена.

Симплициальные комплексы

Определение 2.3. Прямым n-мерным симплексом в $\mathbb{R}^N$ называется множество:

$$\Delta^n = \{\overline{OA} = m_0\,\overline{OA_0} + \dots + m_n\,\overline{OA_n} \quad | \quad 0 \le m_0, \dots, m_n \le 1, \quad m_0 + \dots + m_n = 1\},$$

где O — начало координат, точки $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}^N$, $0 \le n \le N$ такие, что вектора $\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_n}$ линейно независимы. Набор чисел $(m_0, \dots, m_n)$ называется барицентрическими координатами на симплексе Δ^n.

Задача 2.4. Доказать, что вектора $\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_n}$ линейно независимы при любом упорядочивании точек $A_0, \dots, A_n$.

Определение 2.4. Подсимплексом Δ^k симплекса Δ^n называется множество:

$$\Delta^k = \{\overline{OA} \in \Delta^n \quad | \quad m_{i_1} = 0, \dots, m_{i_k} = 0\},$$

где $i_1, \dots, i_k$ — фиксированный набор индексов.

Задача 2.5. Пусть Δ^n — симплекс на вершинах $A_0, \dots, A_n$. Доказать, что $\Delta^n = Conv(A_0, \dots, A_n)$, то есть выпуклая оболочка этих вершин.

Определение 2.5. Прямым конечным симплициальным комплексом в $\mathbb{R}^N$ называется подмножество $X \subset \mathbb{R}^N$, которое представляется в виде объединения конечного числа симплексов, расположенных согласованным образом:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i^{n_i}.$$

Согласованность симплексов в определении 2.5. означает, что при $i \ne j$ пересечение $\Delta_i^{n_i} \cap \Delta_j^{n_j}$ либо пусто, либо является общей гранью этих симплексов.

Задача 2.6*. Пусть $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i^{n_i}$ — прямой конечный симплициальный комплекс. Доказать, что при добавлении границ симплексов к набору $\Delta_1^{n_1}, \dots, \Delta_k^{n_k}$ условие согласованности симплексов сохраняется.

Триангуляция

Определение 2.6. Конечной триангуляцией топологического пространства X называется гомеоморфизм $h : K \longrightarrow X$, где K — конечный симпициальный комплекс в $\mathbb{R}^N$.

Задача 2.7. Призмой над симплексом Δ^n назовем множество $X = \Delta^n \times I^1$. Обозначим через $u_0, \ldots, u_n$ вершины симплекса Δ^n. Тогда вершины $w_1, \ldots, w_n$ получаются из $u_0, \ldots, u_n$ при умножении на отрезок I^1. Рассмотрим прямые симплексы на вершинах:

$$\begin{array}{c} u_0,\, w_0,\, w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_{n-1},\, w_n \\ u_0,\, u_1,\, w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_{n-1},\, w_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_0,\, u_1,\, u_2,\, u_2,\, \ldots,\, u_n,\, w_n \end{array}$$

Доказать, что объединение этих симплексов есть триангуляция призмы $X = \Delta^n \times I^1$.

Семинар 3

Симплициальные и полусимплициальные комплексы

Разбор домашнего задания

Решение задачи 2.5.

Определение 3.1. Пусть задана система материальных точек $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$ с массами $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$ такими, что $m = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \neq 0$. Точка A называется центром масс системы материальных точек $(A_1, m_1) \dots, (A_k, m_k)$, если $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \, \overline{AA_i} = 0$.

Замечания. 1) Центр масс существует и единственен.

2) Если систему материальных точек разбить на подсистемы, в которых сумма масс точек отлична от нуля, то у каждой из подсистем существует центр масс в некоторой точке, а центр масс всей системы совпадает с центром масс этих точек.

Пусть $\Delta^n \subset \mathbb{R}^N$ — симплекс на вершинах $A_0, \dots, A_n$. Докажем, что Δ^n является выпуклым множеством. Пусть точки $A, B \in \Delta^n$, а точка C лежит на отрезке AB. Надо показать, что $C \in \Delta^n$.

В силу определения 2.3. верны следующие выражения:

$$\overline{OA} = m_0 \, \overline{OA_0} + \dots + m_n \, \overline{OA_n},$$

$$\overline{OB} = m_0' \, \overline{OA_0} + \dots + m_n' \, \overline{OA_n},$$

где $0 \leq m_0, \dots, m_n \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$ и $0 \leq m_0', \dots, m_n' \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i' = 1$.

Точка C является центром масс системы точек (A, k) и $(B, 1-k)$ для некоторого k:

$$\overline{OC} = k \, \overline{OA} + (1-k) \, \overline{OB}.$$

Далее, рассмотрим системы материальных точек $(A_0, km_0), \dots, (A_n, km_n)$ и $(A_0, (1-k)m_0'), \dots, (A_n, (1-k)m_n')$. Их центрами масс являются точки A и B с массами k и $1-k$, соответственно. Таким образом, точка C — центр масс для объединения этих систем материальных точек, суммарная масса которых равна 1. Следовательно, точка $C \in \Delta^n$.

Нетрудно видеть, что любое выпуклое множество, содержащее вершины $A_0, \dots, A_n$, содержит также симплекс Δ^n. Таким образом, множество Δ^n — минимальное выпуклое множество, содержащее вершины $A_0, \dots, A_n$.

Задача решена.

Абстрактный симплициальный комплекс

Опишем, как задавать абстрактно симплициальный комплекс с конечным или счетным числом вершин.

Определение 3.2. Пусть заданы два множества: множество вершин V такое, что $|V| \leq |\mathbb{N}|$ и множество симплексов $S \subset 2^V$ такого, что $\forall \Delta^n \in S : \ |\Delta^n| = n+1 <$

∞. Симплициальной схемой называется пара $K = (V, S)$, для которой выполнены условия:

1) $\forall v \in V: \quad \{v\} \in S,$ то есть нет фиктивных вершин;

2) $\forall \Delta \in S \quad \forall \Delta' \subset \Delta: \quad \Delta' \in S$ (то есть любая грань любого симплекса — снова симплекс).

Симплициальный комплекс можно рассматривать как топологическое пространство, элементы которого представляются в виде формальной конечной ($|V| \leq +\infty$) линейной комбинации $A = \sum\limits_{v \in V} m_v\, v$, где $0 \leq m_v \leq 1$, $\sum\limits_{v \in V} m_v = 1$ и $\{v_0, \ldots, v_n\} \in S$ при $m_{v_0} > 0, \ldots, m_{v_n} > 0$. Далее, введем топологию на этом пространстве таким образом, чтобы симплициальный комплекс являлся CW-комплексом. Аксиома (C) следует из того, что все грани симплекса являются симплексами меньших размерностей. Остается потребовать выполнение аксиомы (W). Обозначим через $|K|$ геометрическую реализацию. Тогда аксиома (W) примет вид:

$$(W) \quad F \subset |K| \text{ — замкнуто} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \Delta^n \in S: \quad F \cap \Delta^n \text{ — замкнуто в } \Delta^n.$$

Любое сепарабельное метрическое пространство (X, d) размерности $dim\, X = n$ можно топологически вложить в пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$. Покажем это для полиэдров — геометрических реализаций конечного симплициального комплекса. Пусть $dim|K| = n$, требуется вложить $|K|$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Пусть $V = \{B_1, \ldots, B_k\}$, тогда построим инъективное отображение $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f(B_i) = C_i$. Отображение f можно доопределить на формальные отрезки B_iB_j так, что $f(B_iB_j) = C_iC_j$, причем точка с барицентрическими координатами (m_i, m_j) внутри отрезка B_iB_j переходит в точку с теми же барицентрическими координатами внутри отрезка C_iC_j. Аналогичным образом доопределяем отображение f на весь симплекс на вершинах $B_1, \ldots, B_k$, причем свойство инъективности сохраняется. Точки $C_1, \ldots, C_k$ — общего положения, то есть $\forall C_{i_1}, \ldots, C_{i_{2n+2}}$ — вершины некоторого симплекса Δ^{2n+1}.

Полусимплициальный комплекс

Триангуляция хаусдорфова топологического пространства это гомеоморфизм на тело некоторого симплициального комплекса:

$$h: X \xrightarrow{\sim} |K|.$$

Напомним, что прямым симплексом называется множество:

$$\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \quad 0 \leq x_0, \ldots, x_n \leq 1,\ x_0 + \cdots + x_n = 1\}.$$

Определение 3.3. Хаусдорфово пространство X называется полусимплициальным комплексом, если задан набор отображений:

$$\sigma_\alpha^n: \Delta^n \xrightarrow{f_\alpha} X,$$

для которых выполнены условия:

1) $\sigma_\alpha^n: \overset{\circ}{\Delta}{}^n \longrightarrow X$ — инъекция;

2) $X = \bigsqcup\limits_n \bigsqcup\limits_\alpha \sigma^n_\alpha(\overset{\circ}{\Delta}{}^n)$;

3) $\forall\alpha \quad \exists\beta: \quad \sigma^n_\alpha|_{\Delta^k} = \sigma^k_\beta$;

4) F замкнуто в $X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\sigma^n_\alpha: \quad f^{-1}_\alpha(F)$ замкнут в Δ^n.

Рассмотрим в качестве примера трехмерный симплекс в полусимплициальном комплексе. Пронумеруем его вершины числами от 0 до 3. Любой набор вершин может быть склеен в одну точку. Никакие две точки с положительными барицентрическими координатами внутри симплекса не склеены друг с другом. На границе симплекса могут быть склеены только точки с разных граней, причем, если склеены грани $\overline{013}$ и $\overline{012}$ (монотонный порядок следования номеров вершин важен), то внутри граней склеиваются точки с одинаковыми барицентрическими координатами.

Рассмотрим трехмерный симплекс (тетраэдр) с вершинами $0, 1, 2, 3$. Склеим в нем вершины $\overline{0}$ и $\overline{1}$, $\overline{2}$ и $\overline{3}$, ребра $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{02}$ и $\overline{03}$ в одно ребро, а также грани $\overline{012}$ и $\overline{013}$, $\overline{123}$ и $\overline{023}$. Полученный полусимплициальный комплекс состоит из одного трехмерного симплекса, двух двумерных и трех одномерных. Нетрудно видеть, что описанный комплекс является джойном двух окружностей.

Напомним определение джойна.

Определение 3.4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$ и $L \subset \mathbb{R}^l$ — компакты. Расположим в пространстве $\mathbb{R}^{k+l+1}$ пространства $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$ таким образом, чтобы они были общего положения. Тогда джойном $K * L$ двух компактов K и L называется множество всевозможных отрезков, соединяющих точки множества K с точками множества L.

Покажем, что $S^1 * S^1 = S^3$. Действительно, пусть одна окружность S^1 лежит на плоскости Oxy в $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, а вторая окружность S^1 это ось Oz (см рис.1.). Будем соединять каждую точку прямой со всеми точками окружности. Получаемые "шапочки"в пределе $z \to \infty$ "разворачиваются"на плоскость Oxy.

Определение 3.5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^k$, $L \subset \mathbb{R}^l$ и $M \subset \mathbb{R}^m$ — компакты. Расположим в пространстве $\mathbb{R}^{k+l+m+2}$ пространства $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$ и $\mathbb{R}^m$ таким образом, чтобы они были общего положения. Тогда джойном $K * L * M$ трех компактов K, L и M называется множество всевозможных треугольников, соединяющих точки множеств K, Lи M.

Задача 3.1. Доказать равенства:

$$(K * L) * M = K * (L * M) = K * L * M.$$

Задача 3.2. Доказать, что $S^k * S^l = S^{k+l+1}$.

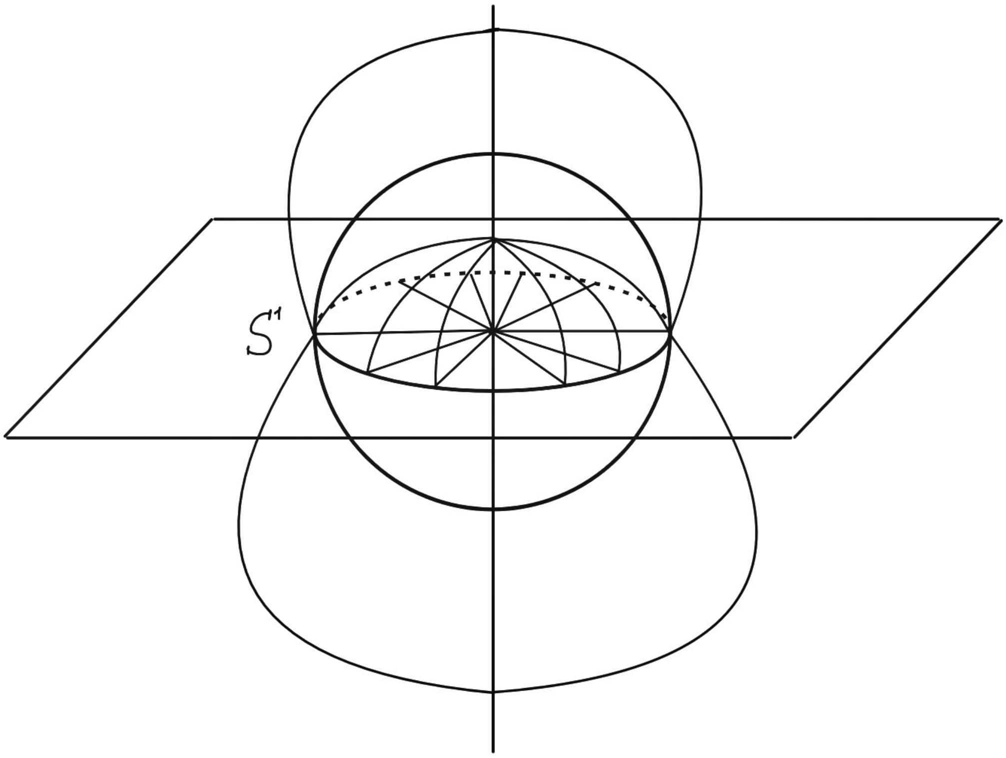

Рис. 1. Геометрическое доказательство равенства $S^1 * S^1 = S^3$

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ