МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

ПАНОВ
ТАРАС ЕВГЕНЬЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА VK.COM/TEACHINMSU.

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
VK.COM/TEACHINMSU.

Теория гомологий

ПАНОВ Тарас Евгеньевич

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Последняя редакция: 12 ноября 2024 г.

Содержание

Список литературы

[Ва] В. А. Васильев. *Введение в топологию.* Москва, Фазис, 1997.
[ВИНХ] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. *Элементарная топология.* Москва, МЦНМО, 2010.
[Топ1] Т. Е. Панов. *Топология-1. Курс лекций.* `http://higeom.math.msu.su/people/taras/#teaching`
[ФФ] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* Москва, Наука, 1989.
[Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Москва, МЦНМО, 2011.

Введение

Наряду с гомотопическими группами группы гомологий (а также кольца когомологий) представляют собой один из основных алгебраических инструментов для работы с топологическими пространствами и многообразиями.

Определение групп гомологий пространства технически сложнее, чем определение гомотопических групп. Тем не менее, преодолев некоторые технические трудности при определении групп гомологий и выводе их основных свойств, мы получаем весьма эффективные алгебраические инварианты, вычисление которых на основных примерах пространств и многообразий оказывается значительно проще, чем вычисление гомотопических групп.

В целом гомотопические группы и группы гомологий содержат примерно равноценную (хотя и неэквивалентную) информацию о пространстве в односвязном случае. Соотношение между ними описывается так называемой *двойственностью Экманна–Хилтона*, которая является основой теории модельных категорий.

Группы гомологий топологического пространства X определяются при помощи понятия *цикла*. Цикл размерности k в X представляет собой непрерывное отображение «k-мерной поверхности» (не обязательно сферы) в X. Отношение гомотопности сфероидов заменяется отношением *гомологичности* циклов — цикл гомологичен нулю, если он ограничивает кусок поверхности размерности на 1 больше.

Что считать «k-мерной поверхностью» в определении цикла? Наиболее естественно было бы рассматривать отображения k-мерных гладких многообразий в X (эта идея восходит к Пуанкаре). Однако получаемая таким образом теория, называемая *теорией бордизмов*, оказывается намного сложнее теории гомологий. С точки зрения вычислимости, более эффективным оказывается подход к определению циклов как объединений некоторых стандартных элементов, роль которых играют симплексы.

В классическом подходе пространство X предполагается разбитым на симплексы, т.е. на нём предполагается заданной структура *симплициального комплекса*. Рассматриваются формальные линейные комбинации симплексов, называемые *симплициальными цепями*, и вводится симплициальный граничный оператор. Тогда циклы определяются как симплициальные цепи, граница которых равна нулю. Группа k-мерных гомологий $H_k(X)$ определяется как факторгруппа группы k-мерных циклов по подгруппе циклов, гомологичных нулю. Это приводит к чисто комбинаторно-алгебраической теории *симплициальных гомологий*, которой посвящён §1. Для топологических приложений необходимо доказывать независимость группы $H_k(X)$ от способа разбиения пространства X на симплексы.

Более общий подход к определению групп гомологий, при котором на пространстве X не предполагается наличие никакой дополнительной комбинаторной структуры, заключается в рассмотрении *сингулярных симплексов*, т.е. отображений $\varDelta^k \to X$, где $\varDelta^k$ — симплекс размерности k. Формальные линейные комбинации сингулярных симплексов называются *сингулярными цепями*. Это приводит к понятию сингулярных гомологий, которым посвящён §2.

Группы гомологий также можно определить на основе клеточного разбиения пространства. Получаемая теория клеточных гомологий эквивалентна сингулярным гомологиям для клеточных пространств и позволяет эффективно вычислять группы гомологий для простых клеточных разбиений.

В §4 изучается взаимосвязь между группами гомологий и гомотопическими группами клеточных пространств. Здесь же доказывается гомологическая теорема Уайтхеда, которая предоставляет эффективный способ проверки того, что отображение односвязных пространств является гомотопической эквивалентностью.

Группы когомологий вводятся в §5. Здесь же обсуждается связь групп гомологий и когомологий с разными коэффициентами («формулы универсальных коэффициентов»).

На классах когомологий имеется операция умножения, превращающая прямую сумму всех групп когомологий пространства в градуированно-коммутативное кольцо. Наряду с группами (ко)гомологий структура этого кольца является важным гомотопическим инвариантом топологического пространства. Различные конструкции умножения в когомологиях обсуждаются в §6.

Говоря о пространстве мы всегда имеем ввиду топологическое пространство, а все отображения предполагаются непрерывными, если не оговорено противное.

1. Симплициальные гомологии

1.1. **Симплициальные комплексы и триангуляции.**

Мы уже встречались с понятиями симплекса и симплициального комплекса в курсе «Топология-1» при доказательстве теоремы о клеточной аппроксимации.

Напомним, что n-мерный *симплекс* — это выпуклая оболочка набора из $n+1$ точек $v_0, v_1, \dots, v_n$ в некотором евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной плоскости (где под плоскостью мы подразумеваем аффинное подпространство). Эквивалентное условие состоит в том, что векторы $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ линейно независимы. Точки $v_0, v_1, \dots, v_n$ называются *вершинами* симплекса, а сам симплекс мы будем обозначать $[v_0, \dots, v_n]$. Выпуклые оболочки поднаборов множества вершин симплекса называются его *гранями*. Грани являются симплексами размерности $\leqslant n$.

Пример 1.1. *Правильный* n-мерный симплекс есть

$$\varDelta^n = \Big\{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_i t_i = 1 \text{ и } t_i \geqslant 0 \text{ для всех } i\Big\}.$$

Его вершинами являются концы единичных векторов вдоль координатных осей.

Далее вершины симплексов мы будем всегда считать упорядоченными, и под «n-мерным симплексом» мы будем иметь ввиду «n-мерный симплекс с указанным порядком его вершин». Вершины граней симплекса всегда будут упорядочиваться согласно их порядку в большем симплексе.

Задание порядка вершин определяет канонический линейный гомеоморфизм правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n$ на любой n-мерный симплекс $[v_0, \dots, v_n]$, сохраняющий порядок вершин, а именно

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_i t_i v_i.$$

Коэффициенты $t_0, \dots, t_n$ называются *барицентрическими координатами* точки $\sum_i t_i v_i$ в симплексе $[v_0, \dots, v_n]$.

Объединение всех собственных граней симплекса $\varDelta^n$ называется его *границей* и обозначается $\partial\varDelta^n$. Внутренность $\varDelta^n \setminus \partial\varDelta^n$ симплекса $\varDelta^n$ называется *открытым* *симплексом* и обозначается $\dot{\Delta}^n$. При этом для $n = 0$ принимается соглашение, что внутренность 0-симплекса (точки) совпадает с ним самим.

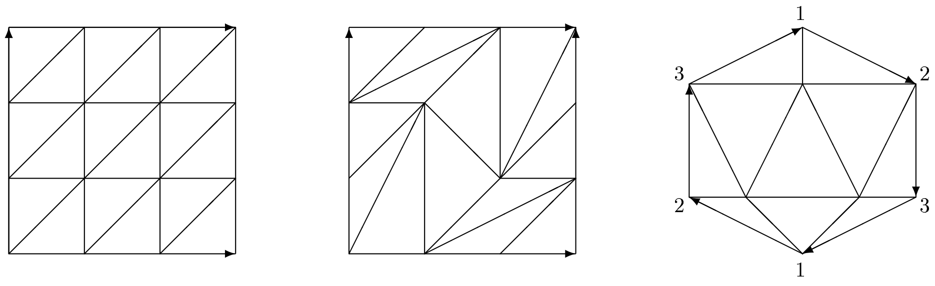
Конечный *симплициальный комплекс* — это такой конечный набор симплексов произвольной размерности в некотором $\mathbb{R}^N$, что любые два симплекса из этого набора либо не пересекаются, либо пересекаются по целой грани. Говорят, что некоторое подмножество K евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ *триангулировано*, если оно представлено в виде объединения симплексов, которые образуют (конечный) симплициальный комплекс. *Триангуляцией* топологического пространства X называется гомеоморфизм $f\colon K \to X$ между некоторым триангулированным подмножеством $K \subset \mathbb{R}^N$ и X. Часто говорят, что на пространстве X *задана структура симплициального комплекса*, имея ввиду, что задана его триангуляция. (Можно также рассматривать симплициальные комплексы и триангуляции, состоящие из бесконечного числа симплексов, но в этом случае естественная топология на них не является индуцированной из $\mathbb{R}^N$, её определение будет дано в следующем параграфе.)

Таким образом, триангуляция пространства X задаётся набором отображений $\sigma_\alpha\colon \Delta^{n_\alpha} \to X$ (ограничений гомеоморфизма $f\colon K \to X$ на симплексы множества $K \subset \mathbb{R}^N$) и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного ограничения $\sigma_\alpha|_{\dot{\Delta}^{n_\alpha}}$ на внутренность симплекса. Другими словами, X представлено в виде несвязного объединения гомеоморфных образов внутренностей симплексов.

Пример 1.2.

1. Граница n-мерного симплекса Δ^n задаёт триангуляцию $(n-1)$-мерной сферы. В частности, граница тетраэдра задаёт триангуляция 2-мерной сферы. Другими примерами триангуляций 2-мерной сферы являются границы октаэдра или икосаэдра, а также граница любого 3-мерного многогранники, у которого все 2-мерные грани — треугольники (такие многогранника называются *симплициальными*).

2. На рис. 1 а) показана триангуляция тора T^2 с 9 вершинами. На рис. 1 б) показана триангуляция тора T^2 с 7 вершинами. Противоположные стороны квадратов отождествляются в соответствии со стрелками.



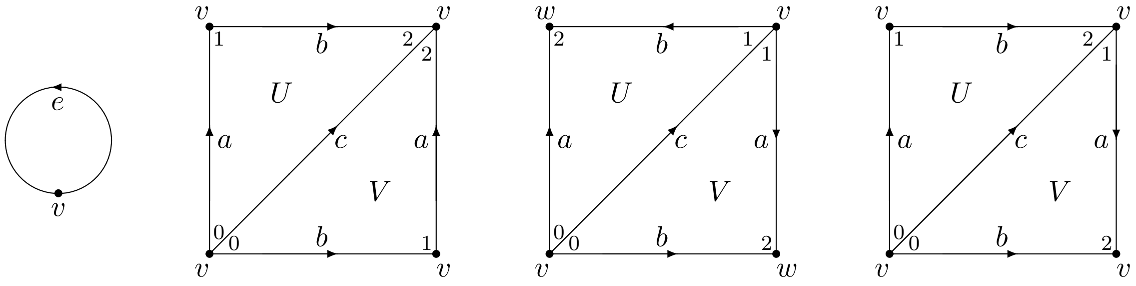
а) б) в)

Рис. 1. Триангуляции тора T^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

3. На рис. 1 в) показана триангуляция проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с 6 вершинами. На границе многоугольника производятся отождествления в соответствии со стрелками и нумерацией вершин.

Триангуляции на рис. 1 б) и в) минимальны по числу вершин (задача).

В классическом подходе симплициальные гомологии пространств определялись через их триангуляции. Однако мы видим, что даже для простых двумерных поверхностей триангуляции содержат большое количество симплексов, что приводит к громоздким вычислениям. Обобщение понятия симплициального комплекса, при котором симплексы могут приклеиваться друг к другу по части границы, а не только по одному симплексу, приводит к более экономным разбиениям пространств на симплексы. Примеры изображены на рис. 2, а определение приводится в следующем параграфе.



а) S^1 б) T^2 в) $\mathbb{R}P^2$ г) Бутылка Клейна

Рис. 2. Полусимплициальные комплексы

1.2. **Полусимплициальные комплексы.** Структура *полусимплициального комплекса* на пространстве X — это такой набор отображений $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$, где n зависит от индекса α, что выполняются следующие условия.

а) Ограничение $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ инъективно, и каждая точка пространства X содержится в образе ровно одного такого ограничения $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$.

б) Каждое ограничение отображения σ_α на грань симплекса Δ^n — это одно из отображений $\sigma_\beta\colon \Delta^k \to X$, $k \leqslant n$.

в) Множество $A \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ открыто в Δ^n для всех σ_α.

Если каждое отображение $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$ инъективно, количество этих отображений конечно и пересечение любых двух симплексов $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ и $\sigma_\beta(\Delta^m)$ в X является гранью каждого из них (возможно, пустой), то все симплексы можно вложить в одно пространство $\mathbb{R}^N$ так, что $\bigcup_\alpha \Delta^n$ станет симплициальным комплексом, а X — триангулированным пространством. В этом случае условие в) выполнено автоматически. Если же количество симплексов $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$ бесконечно, то условие в) даёт «правильный» способ введения топологии на $\bigcup_\alpha \Delta^n$, не зависящий от вложений в $\mathbb{R}^N$. См. задачи 1.10 и 1.11. Таким образом, бесконечные симплициальные комплексы (триангуляции) — это полусимплициальные комплексы, в которых все отображения σ_α инъективны и все пересечения $\sigma_\alpha(\Delta^n) \cap \sigma_\beta(\Delta^m)$ являются гранями.

Из условия в) следует, что X можно построить как факторпространство набора непересекающихся симплексов Δ^n_α, по одному для каждого отображения $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$. Отсюда следует, что пространство X должно быть хаусдорфовым, а каждое ограничение $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ является гомеоморфизмом на свой образ, который поэтому является открытым симплексом в X (задача). Тем самым открытые симплексы $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ задают клеточное разбиение пространства X. Однако полусимплициальные комплексы образуют весьма ограниченный класс клеточных пространств.

Пример 1.3.

1. На рис. 1.1 а) изображено полусимплициальное разбиение окружности с одной вершиной v и одним ребром (1-мерным симплексом) e.

2. На рис. 1.1 б) изображено полусимплициальное разбиение тора с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками (2-мерными симплексами) U, V. Рёбра ориентируются в соответствии с порядком отображаемых вершин симплексов, от меньшей к большей. Например, U является образом треугольника $\varDelta^2 = [012]$, при этом ребро $[01]$ отображается в a, ребро $[12]$ в b, и ребро $[02]$ в $[c]$, и все три вершины $0, 1, 2$ переходят в v.

3. На рис. 1.1 в) изображено полусимплициальное разбиение проективной плоскости с двумя вершинами v, w, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V. Здесь отображение из $\varDelta^2 = [012]$, соответствующее треугольнику U, устроено так: вершины 0 и 1 переходят в v, а 2 в w.

4. На рис. 1.1 г) изображено полусимплициальное разбиение бутылки Клейна с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V.

1.3. **Симплициальные гомологии.** Пусть X — полусимплициальный комплекс. Определим свободную абелеву группу $\varDelta_n(X)$, порождённую n-мерными симплексами $\sigma_\alpha\colon \varDelta^n \to X$ комплекса X. Элементы группы $\varDelta_n(X)$ называются n-мерными *симплициальными цепями* для X. Каждая симплициальная цепь может быть записана в виде конечной формальной суммы $\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha$ с коэффициентами $k_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Определим *граничный гомоморфизм* $\partial_n\colon \varDelta_n(X) \to \varDelta_{n-1}(X)$, задав его значения на элементах базиса $\sigma_\alpha\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$:

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}, \tag{1}$$

где $\sigma_\alpha|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}$ обозначает $(n-1)$-мерную грань симплекса σ_α, получаемую опусканием i-й вершины v_i. Например,

$$\begin{aligned}\partial_1[v_0, v_1] &= [v_1] - [v_0],\\ \partial_2[v_0, v_1, v_2] &= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1].\end{aligned}$$

Выбор знаков обусловлен согласованием ориентаций, задаваемых порядком вершин, на симплексе и его гранях.

Лемма 1.4. *Композиция* $\varDelta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \varDelta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \varDelta_{n-2}(X)$ *является нулевым отображением.*

Доказательство. Из соотношения (1) вытекает

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_n]}.$$

Последние две суммы сокращаются, так как после перестановки i и j во второй сумме она становится первой суммой со знаком минус. □

Тем самым мы находимся в следующей алгебраической ситуации. Имеется последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

причём $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ для всех n. Такая последовательность $C_\bullet = \{C_n, \partial_n\}$ называется *цепным комплексом*. Из равенства $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ следует, что $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_n$. Поэтому мы можем определить n-ю *группу гомологий* цепного комплекса как факторгруппу $H_n = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$. Элементы ядра $\operatorname{Ker}\partial_n$ называются *циклами*, а элементы образа $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ — *границами*. Элементы группы H_n называются *классами гомологий*. Класс гомологий цикла $c \in \operatorname{Ker}\partial_n$ обозначается через $[c]$. Два цикла, представляющие один и тот же класс гомологий, называются *гомологичными*. Это означает, что их разность является границей.

Возвращаясь к случаю $C_n = \varDelta_n(X)$, группу гомологий $\operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ будем обозначать $H_n^\varDelta(X)$ и называть n-й *группой симплициальных гомологий* комплекса X.

Пример 1.5. Пусть $X = S^1$ с одной вершиной v и одним ребром e, см. рис. 1.1 а). Тогда обе группы $\varDelta_0(X)$ и $\varDelta_1(X)$ равны $\mathbb{Z}$, а граничное отображение ∂_1 нулевое, так как $\partial_1 e = v - v$. Кроме того, $\varDelta_n(S^1) = 0$ при $n \geqslant 2$, так как в этих размерностях нет симплексов. Следовательно,

$$H_n^\varDelta(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 1; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Пример 1.6. Пусть $X = T^2$ — тор с одной вершиной v, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V, см. рис. 1.1 б). Как и в предыдущем примере, $\partial_1 = 0$, поэтому $H_0^\varDelta(T^2) = \mathbb{Z}$. Так как $\partial_2 U = [12] - [02] + [01] = b - c + a = \partial_2 V$, а $a, b, a + b - c$ — базис группы $\partial_1(T^2)$, получаем, что $H_1^\varDelta(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисными классами гомологий $[a]$ и $[b]$. Так как трёхмерных симплексов нет, $H_2^\varDelta(T^2) = \operatorname{Ker}\partial_2$, а группа $\operatorname{Ker}\partial_2 \cong \mathbb{Z}$ порождена циклом $U - L$. Таким образом,

$$H_n^\varDelta(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при } n = 1; \\ \mathbb{Z} & \text{при } n = 0, 2; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Пример 1.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^2$ с двумя вершинами v, w, тремя рёбрами a, b, c и двумя треугольниками U, V, см. рис. 1.1 в). Тогда группа $\operatorname{Im}\partial_1$ порождена цепью $w - v$, поэтому $H_0^\varDelta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$, причём в качестве образующей можно взять $[v]$ или $[w]$. Так как $\partial_2 U = -a + b + c$ и $\partial_2 V = a - b + c$, мы видим, что $\operatorname{Ker}\partial_2 = 0$, поэтому $H_2^\varDelta(\mathbb{R}P^2) = 0$. Далее, $\operatorname{Ker}\partial_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с базисом $a - b$ и c. Отсюда видно, что $\operatorname{Im}\partial_2$ является подгруппой индекса 2 в $\operatorname{Ker}\partial_1$, так как в качестве базиса в $\operatorname{Ker}\partial_1$ можно взять $a - b + c$ и c, а в качестве базиса в $\operatorname{Im}\partial_2$ можно взять $a - b + c$ и $(-a + b + c) + (a - b + c) = 2c$. Таким образом, $H_1^\varDelta(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ и мы имеем

$$H_n^\varDelta(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 0; \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при } n = 1; \\ 0 & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Симплициальные гомологии в действительности являются топологическими инвариантами пространства X, т.е. не зависят от способа его разбиения на симплексы. Более того, группы симплициальных гомологий гомотопически эквивалентных пространств одинаковы. Для того, чтобы доказать эти свойства, мы определим другой тип гомологий пространств — группы сингулярных гомологии, определение которых не будет использовать разбиение пространства на симплексы. Затем мы докажем, что группы симплициальных и сингулярных гомологий полусимплициального комплекса совпадают.

Задачи и упражнения.

1.8. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7, а в триангуляции проективной плоскости — 6.

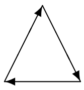
1.9. Постройте какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна. Какое минимальное число вершин у такой триангуляции?

1.10. Пусть I_k — отрезок единичной длины на плоскости $\mathbb{R}^2$ с концами $(0,0)$ и $(\cos\frac{2\pi}{k},\sin\frac{2\pi}{k})$. Определим $Y=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ как подпространство в $\mathbb{R}^2$ с индуцированной топологией. Пусть $\sigma_k\colon \varDelta^1\to Y$ — линейное отображение отрезка $\varDelta^1$ на I_k. Докажите, что семейство отображений σ_k вместе с их ограничениями на вершины удовлетворяет условиям а) и б) из определения полусимплициального комплекса, но не удовлетворяет условию в). Таким образом, пространство Y представляет собой бесконечное объединение симплексов в $\mathbb{R}^2$, примыкающих друг к другу по граням, но не является полусимплициальным комплексом.

1.11. Рассмотрим букет счётного числа отрезков $X=\bigvee_{k=1}^{\infty}\varDelta^1_k$. (По определению, букет — это факторпространство $(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}\varDelta^1_k)/(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}0_k)$.) Докажите, что инъективные отображения $\sigma_k\colon \varDelta^1_k\to X$ вместе с их ограничениями на вершины задают на X структуру бесконечного (полу)симплициального комплекса, но X не вкладывается в $\mathbb{R}^N$ ни для какого N (т. е. не гомеоморфно подмножеству $\mathbb{R}^N$ с индуцированной топологией).

1.12. Докажите, что структура полусимплициального комплекса на пространстве X задаёт на нем структуру клеточного пространства.

1.13. Приведите пример клеточного разбиения пространства, которое не является структурой полусимплициального комплекса.

1.14. Пусть $X=S^1\cup_\varphi D^2$ — клеточное пространство, получаемое приклеиванием к окружности S^1 (разбитой на две клетки) двумерной клетки по отображению $\varphi\colon S^1\to S^1$ степени 3, $z\mapsto z^3$. Пространство X можно получить из треугольника отождествлением трёх его сторон в одну в соответствии с направлениями стрелок на рисунке:  Задают ли характеристические отображения $\varDelta^0\to X$, $\varDelta^1\to X$ и $\varDelta^2\to X$ данного клеточного разбиения структуру полусимплициального комплекса?

1.15. Вычислите симплициальные гомологии бутылки Клейна, воспользовавшись структурой полусимплициального комплекса.

1.16. Вычислите симплициальные гомологии 2-мерной сферы S^2, воспользовавшись триангуляцией или структурой полусимплициального комплекса.

2. СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ

2.1. **Определение и первые свойства.** *Сингулярным n-мерным симплексом* (или просто *n-симплексом*) в пространстве X называется непрерывное отображение $\sigma\colon \varDelta^n\to X$. Определим свободную абелеву группу $C_n(X)$, порождённую множеством сингулярных n-мерных симплексов в X. Элементы группы $C_n(X)$, называемые *сингулярными n-мерными цепями*, являются конечными формальными суммами $\sum_i k_i\sigma_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $\sigma_i\colon \varDelta^n \to X$. Граничное отображение $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ задаётся той же формулой, что и для симплициальных цепей:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]},$$

где $\sigma\colon [v_0,\ldots,v_n] \to X$ — сингулярный симплекс.

Мы часто будем писать просто ∂ вместо ∂_n. Так же как и для симплициальных цепей, доказывается, что $\partial_n\partial_{n+1} = 0$, т.е. $\partial^2 = 0$. Таким образом, можно определить группу *сингулярных гомологий* $H_n(X) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1}$.

Из определения очевидно, что гомеоморфные пространства имеют одинаковые группы сингулярных гомологий H_n, в отличие от ситуации с симплициальными гомологиями $H_n^{\varDelta}$. С другой стороны, так как число сингулярных n-мерных симплексов в X обычно несчётно, группы цепей $C_n(X)$ столь велики, что непонятно, почему для конечного симплициального комплекса X группа сингулярных гомологий $H_n(X)$ должна быть конечно порожденной и нулевой при $n > \dim X$. Эти свойства были тривиальны для симплициальных гомологий.

Сингулярные гомологии в действительности можно рассматривать как частный случай симплициальных гомологий при помощи следующей конструкции. Для произвольного пространства X определим *полный сингулярный комплекс* $S(X)$ как полусимплициальный комплекс, имеющий по одному симплексу для каждого сингулярного симплекса $\sigma\colon \varDelta^n \to X$. Из определений ясно, что $H_n^{\varDelta}(S(X)) = H_n(X)$ для всех n. Эта конструкция обладает свойством функториальности (т.е. отображение $X \to Y$ индуцирует отображение $S(X) \to S(Y)$, переводящее симплексы в симплексы), однако комплекс $S(X)$ слишком велик, чтобы его можно было использовать для явных вычислений.

Перейдём к описанию простейших свойств сингулярных гомологий.

Предложение 2.1. *Если пространство X представлено в виде объединения $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$ компонент линейной связности, то $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Доказательство. Так как образ сингулярного симплекса линейно связен, мы имеем $C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$. Граничное отображение ∂_n сохраняет это разложение, т.е. $\partial_n C_n(X_\alpha) \subset C_{n-1}(X_\alpha)$, поэтому подпространства $\operatorname{Ker}\partial_n$ и $\operatorname{Im}\partial_n$ аналогично раскладываются в прямую сумму. Отсюда следует разложение для гомологий. □

Для дальнейшего нам понадобится следующая модификация сингулярного цепного комплекса. Определим гомоморфизм *аугментации* $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ по формуле $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i$. Теперь рассмотрим последовательность

$$\ldots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Мы имеем $\varepsilon\partial_1 = 0$, так как для любого 1-симплекса $\sigma\colon [v_0, v_1] \to X$ выполнено $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{v_0}) = 1 - 1 = 0$. Следовательно, (2) является цепным комплексом, называемым *аугментированным сингулярным цепным комплексом* для X. Его гомологии называются *приведёнными группами гомологий* и обозначаются $\widetilde{H}_n(X)$.

Так как аугментация ε обращается в нуль на $\operatorname{Im}\partial_1$, она индуцирует отображение $H_0(X) \to \mathbb{Z}$ с ядром $\widetilde{H}_0(X)$. Следовательно,

$$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $H_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X)$ при $n > 0$.

Предложение 2.2. *Если пространство X линейно связно, то $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, т.е. $\widetilde{H}_0(X) = 0$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что $\widetilde{H}_0(X) = 0$, достаточно убедиться, что $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$, см. (2). Пусть $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = 0$, т. е. $\sum_i k_i = 0$. Сингулярные 0-симплексы $\sigma_i\colon [v_0] \to X$ — это просто точки в X. Для каждого σ_i выберем путь $\tau_i\colon I \to X$ из фиксированной точки $x_0 \in X$ в точку $\sigma_i(v_0)$. Пусть σ_0 — сингулярный 0-симплекс с образом x_0. Каждый путь τ_i можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс $\tau_i\colon [v_0, v_1] \to X$, причём $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Мы имеем

$$\partial\Big(\sum_i k_i\tau_i\Big) = \sum_i k_i\sigma_i - \sum_i k_i\sigma_0 = \sum_i k_i\sigma_i,$$

так как $\sum_i k_i = 0$. Следовательно, $\sum_i k_i\sigma_i$ — граница, а значит, $\operatorname{Ker}\varepsilon \subset \operatorname{Im}\partial_1$. ☐

Предложение 2.3. *Гомологии точки $X = pt$ имеют вид $H_0(pt) = \mathbb{Z}$ и $H_n(pt) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Для $X = pt$ имеется единственный сингулярный n-симплекс σ_n для любого n, причём

$$\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётно или } n = 0,\\ \sigma_{n-1}, & \text{если } n \text{ чётно и } n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, сингулярный цепной комплекс для $X = pt$ имеет вид

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

а его гомологии тривиальны, за исключением $H_0 \cong \mathbb{Z}$. ☐

2.2. **Функториальность и гомотопическая инвариантность.** Здесь мы покажем, что гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. Для этого мы сначала убедимся, что гомологии являются функтором из категории топологических пространств в категорию абелевых групп, т.е. непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$. Затем мы докажем, что f_* является изоморфизмом, если f — гомотопическая эквивалентность.

Для отображения $f\colon X \to Y$ определим гомоморфизм цепей $f_\#\colon C_n(X) \to C_n(Y)$, взяв композицию сингулярных симплексов $\sigma\colon \varDelta^n \to X$ с f, т.е. $f_\#(\sigma) = f\sigma\colon \varDelta^n \to Y$, с последующим продолжением по линейности. При этом $f_\#\partial = \partial f_\#$, так как

$$f_\#\partial(\sigma) = f_\#\Big(\sum_i(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]}\Big) = \sum_i(-1)^i f\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]} = \partial f_\#(\sigma).$$

Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_n(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_\#"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_n(Y) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Эта ситуация описывается следующими алгебраическими понятиями. Пусть $C_\bullet = \{C_n, \partial\}$ и $C'_\bullet = \{C'_n, \partial\}$ — два цепных комплекса. Набор гомоморфизмов $f = \{f_n\colon C_n \to C'_n,\ n \geqslant 0\}$ называется *цепным отображением* цепного комплекса $C_\bullet$ в цепной комплекс $C'_\bullet$, если выполнены соотношения $f_{n-1}\partial = \partial f_n$.

Предложение 2.4. *Цепное отображение* $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ *индуцирует гомоморфизмы групп гомологий этих комплексов,* $f_*\colon H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$*, причём*

а) $(gf)_* = g_* f_*$ *для композиции отображений* $C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet$*;*

б) $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$*, где* id *обозначает тождественное отображение.*

Доказательство. Из соотношения $f\partial = \partial f$ вытекает, что f переводит циклы в циклы (из равенства $\partial c = 0$ следует, что $\partial f(c) = f(\partial c) = 0$) и переводит границы в границы (так как $f(\partial b) = \partial f(b)$). Следовательно, f индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$. Свойства а) и б) очевидны. ☐

Возвращаясь к топологической ситуации, мы получаем, что отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы их групп сингулярных гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, удовлетворяющие соотношениям а) и б) из предложения 2.4. Это свойство и называется функториальностью групп гомологий.

Далее мы покажем, что гомотопные отображения пространств индуцируют одинаковые гомоморфизмы их групп гомологий. Пусть $F\colon X \times I \to Y$ — гомотопия между отображениями $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon \varDelta^n \to X$ рассмотрим композицию $\varDelta^n \times I \xrightarrow{\sigma\times\mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$. Это отображение вместе с разбиением призмы $\varDelta^n \times I$ на симплексы даст сингулярную $(n+1)$-мерную цепь в Y. Тем самым мы построим горморфизм $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, который является алгебраическим аналогом гомотопии. Его формальное определение заключается в следующем.

Два цепных отображения $f\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ и $g\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ называются *цепно гомотопными*, если существует набор гомоморфизмов $P = \{P_n\colon C_n \to C'_{n+1},\ n \geqslant 0\}$ (называемый *цепной гомотопией* между f и g), удовлетворяющих соотношениям

$$\partial P + P\partial = g - f.$$

Это описывается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "g-f"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] \arrow[dl, "P_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Геометрический смысл соотношения цепной гомотопии поясняется ниже в доказательстве теоремы 2.6.

Предложение 2.5. *Цепно гомотопные отображения* $f, g\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ *индуцируют один и тот же гомоморфизм гомологий:* $f_* = g_*$.

Доказательство. Если $c \in C_n$ — цикл, то $g(c) - f(c) = \partial P(c) + P\partial(c) = \partial P(c)$, так как $\partial c = 0$. Таким образом, $g(c) - f(c)$ — граница, т. е. $g_*[c] - f_*[c] = 0$. ☐

Теперь мы снова вернёмся к сингулярным гомологиям.

Теорема 2.6. *Гомотопные отображения пространств* $f, g\colon X \to Y$ *индуцируют один и тот же гомоморфизм сингулярных гомологий:* $f_* = g_*$.

Доказательство. Для доказательства мы построим цепную гомотопию $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ между $f_\#$ и $g_\#$. Нам понадобится триангуляция (разбиение на симплексы) призмы $\Delta^n \times I$. Пусть $v_0, \dots, v_n$ — вершины основания $\Delta^n \times \{0\}$, а $w_0, \dots, w_n$ — вершины основания $\Delta^n \times \{1\}$. Наша триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ имеет $n+1$ симплексов размерности $n+1$, каждый из которых имеет вид $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, $i = 0, \dots, n$. Можно проверить (задача), что это действительно симплициальный комплекс. Случаи $n = 1$ и $n = 2$ показаны на рис. 3.

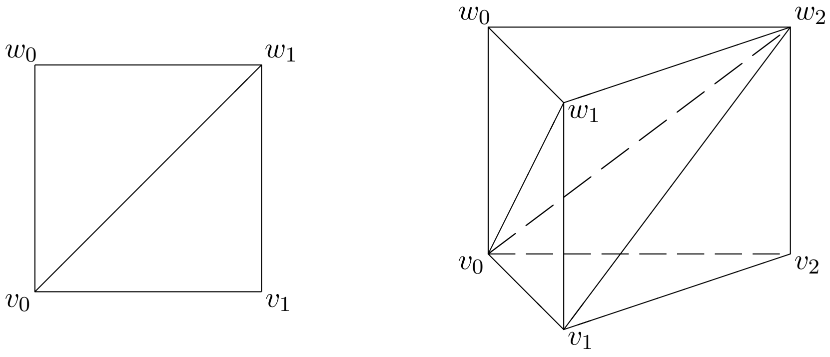


Рис. 3. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

Пусть теперь дана гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ между отображениями f и g. Определим *призменные операторы* $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]},$$

где $\sigma\colon \Delta^n \to X$, а $F \circ (\sigma \times \mathrm{id})$ — композиция $\Delta^n \times I \to X \times I \to Y$. Мы покажем, что призменные операторы задают цепную гомотопию между $f_\#$ и $g_\#$, т.е. удовлетворяют соотношению

$$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial.$$

Геометрически левая часть этого соотношения представляет границу призмы, а три члена в правой части представляют верхнее основание $\Delta^n \times \{1\}$, нижнее основание $\Delta^n \times \{0\}$ и боковую поверхность $\partial\Delta^n \times I$ призмы. Для доказательства соотношения проведём вычисление:

$$\partial P(\sigma) = \sum_{j \leqslant i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} +$$

$$+ \sum_{j \geqslant i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\widehat{w_j},\dots,w_n]}.$$

Члены с $i = j$ в этих двух суммах взаимно сокращаются, за исключением членов

$$F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[\widehat{v_0},w_0,\dots,w_n]} = g \circ \sigma = g_\#(\sigma) \quad \text{и} \quad -F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,v_n,\widehat{w_n}]} = -f \circ \sigma = -f_\#(\sigma).$$

Члены с $i \neq j$ — это в точности $-P\partial(\sigma)$, так как

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i<j}(-1)^i(-1)^j F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\widehat{w_j},\dots,w_n]} + \\ + \sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^j F \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\dots,\widehat{v_j},\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]}.$$

Мы доказали, что P — это цепная гомотопия между $f_\#$ и $g_\#$, а значит, $f_* = g_*$. ☐

Из теоремы 2.6 и свойств а), б) из предложения 2.4 немедленно вытекает

Следствие 2.7. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то индуцированное отображение гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ является изоморфизмом для любого n.*

Следствие 2.8. *Гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. В частности, если X стягиваемо, то $\widetilde{H}_n(X) = 0$ для любого n.*

2.3. **Длинная точная последовательность гомологий.** Напомним, что последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\dots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

называется *точной*, если $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ для любого n. Такая последовательность является цепным комплексом с тривиальными группами гомологий.

Точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

называется *короткой точной последовательностью*. В ней гомоморфизм f инъективен, g сюръективен и $C \cong B/\operatorname{Im} f$.

Коммутативная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

в которой строки являются цепными комплексами, а столбцы — короткими точными последовательностями групп, называется *короткой точной последовательностью цепных комплексов*. Мы будем использовать обозначение $0 \to A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \to 0$. Так как отображения i и j в короткой последовательности являются цепными, они индуцируют гомоморфизмы групп гомологий $H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j} H_n(C_\bullet)$.

Далее мы опишем ещё один гомоморфизм $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$, называемый *граничным гомоморфизмом*. Рассмотрим класс гомологий $[c] \in H_n(C_\bullet)$, представленный циклом $c \in C_n$. Так как j — эпиморфизм, $c = j(b)$ для некоторого $b \in B_n$. Тогда $j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0$, т.е. $\partial b \in \operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i$. Следовательно, $\partial b = i(a)$ для некоторого $a \in A_{n-1}$. При этом $\partial a = 0$, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial\partial b = 0$, а i — мономорфизм. Теперь определим $\partial[c] = [a]$. Необходимо проверить, что полученное отображение $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ определено корректно (т.е. не зависит от произвола в выборе c, b и a) и является гомоморфизмом. Эти проверки мы оставляем в качестве задачи.

Вот одна из первых теорем гомологической алгебры.

Теорема 2.9. *Короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

индуцирует «длинную» точную последовательность групп гомологий:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B_\bullet) \longrightarrow \ldots$$

Доказательство. Рассуждения, используемые при доказательстве, называются диаграммным поиском. Необходимо доказать 6 включений.

$\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} j_*$. Действительно, равенство $ji = 0$ влечёт $j_* i_* = 0$.

$\operatorname{Im} j_* \subset \operatorname{Ker} \partial$. Если $[c] \in \operatorname{Im} j_*$, то $c = j(b)$, где $\partial b = 0$. Так как при определении граничного гомоморфизма мы полагаем $i(a) = \partial b$, получаем $a = 0$, т.е. $\partial[c] = [a] = 0$.

$\operatorname{Im} \partial \subset \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $[a] = \partial[c]$. Тогда $i(a) = \partial b$, а значит, $i_*[a] = [\partial b] = 0$.

$\operatorname{Ker} j_* \subset \operatorname{Im} i_*$. Пусть $j_*[b] = 0$. Тогда $j(b) = \partial c'$ для некоторого $c' \in C_{n+1}$, Так как j — эпиморфизм, $c' = j(b')$ для некоторого $b' \in B_{n+1}$. При этом $j(b - \partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = 0$. Следовательно, $b - \partial b' = i(a)$ для некоторого $a \in A_n$. Элемент a является циклом, так как $i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$, а i — мономорфизм. Следовательно, $i_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$, т.е. $[b] \in \operatorname{Im} i_*$.

$\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Пусть $\partial[c] = 0$. В обозначениях из определения граничного гомоморфизма ∂ мы имеем $\partial[c] = [a]$, т.е. в нашей ситуации $a = \partial a'$ для некоторого $a' \in A_n$. Далее, $i(a) = \partial b$. Рассмотрим элемент $b - i(a')$. Это цикл, так как $\partial(b - i(a')) = \partial b - i\partial(a') = \partial b - i(a) = 0$. Кроме того, $j(b - i(a')) = j(b) = c$, а значит, $j_*[b - i(a')] = [c]$.

$\operatorname{Ker} i_* \subset \operatorname{Im} \partial$. Пусть $i_*[a] = 0$. Тогда $i(a) = \partial b$ для некоторого $b \in B_n$. Элемент $j(b)$ является циклом, так как $\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0$. Тогда по определению граничного гомоморфизма мы имеем $\partial[j(b)] = [a]$. ☐

2.4. **Относительные группы гомологий и точная последовательность пары.**

Теперь мы применим алгебраические построения предыдущего параграфа в топологической ситуации.

Пусть $A \subset X$ — подпространство, т.е. (X, A) — *топологическая пара*. Обозначим через $C_n(X, A)$ факторгруппу $C_n(X)/C_n(A)$. Так как граничный гомоморфизм $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ переводит $C_n(A)$ в $C_{n-1}(A)$, он индуцирует граничный гомоморфизм $\partial\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$. В результате мы получаем цепной комплекс

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

(соотношение $\partial^2 = 0$ выполнено, так как оно выполнялось до перехода к факторгруппам). Его гомологии $H_n(X, A)$ называются *относительными группами гомологий* пары (X, A). Таким образом, а) элементы из $H_n(X, A)$ представлены *относительными циклами*, т. е. такими цепями $a \in C_n(X)$, что $\partial a \in C_{n-1}(A)$;

б) относительный цикл a представляет 0 в $H_n(X, A)$ тогда и только тогда, когда он является *относительной границей*, т. е. $a = \partial b + c$ для некоторых $b \in C_{n+1}(X)$ и $c \in C_n(A)$.

Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{i} C_\bullet(X) \xrightarrow{j} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0.$$

Из теоремы 2.9 вытекает следующий результат.

Теорема 2.10. *Для пары пространств (X, A) имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Из алгебраического определения граничного гомоморфизма в длинной точной последовательности групп гомологий непосредственно вытекает следующее описание граничного отображения $\partial\colon H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$. Если класс $[a] \in H_n(X, A)$ представлен относительным циклом a, то $\partial[a]$ — класс цикла ∂a в $H_{n-1}(A)$.

Ниже мы покажем, что для достаточно хороших пар (X, A) относительная группа гомологий $H_n(X, A)$ в точной последовательности выше может быть заменена на «абсолютную» группу $\widetilde{H}_n(X/A)$. Получаемая точная последовательность даст нам первый эффективный инструмент для вычисления сингулярных гомологий пространств.

2.5. **Теорема вырезания и её следствия.** Свойство вырезания является одним из ключевых свойств сингулярных гомологий наряду с гомотопической инвариантностью и точными последовательностями пар. В качестве следствия из теоремы вырезания в следующем пункте мы докажем изоморфизм $H_n(X, A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$ для «хороших» пар. Вот классическая формулировка теоремы вырезания.

Теорема 2.11. *Пусть даны пространства $Z \subset A \subset X$, причём замыкание пространства Z содержится во внутренности пространства A. Тогда включение $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Имеется следующая эквивалентная формулировка теоремы вырезания, которая также будет полезна для приложений.

Теорема 2.12. *Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Тогда включение $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индуцирует изоморфизмы*

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Чтобы убедиться, что две формулировки теоремы вырезания эквивалентны, положим $B = X \setminus Z$ и $Z = X \setminus B$. Тогда $A \cap B = A \setminus Z$, а условие $\overline{Z} \subset \operatorname{int} A$ эквивалентно условию $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$, так как $X \setminus \operatorname{int} B = \overline{Z}$.

Доказательство теоремы вырезания будет дано в следующем параграфе, а пока мы получим ряд её важных следствий.

Для пары (X, A) рассмотрим пространство $X \cup CA$, которое получается из X присоединением конуса CA над A (т.е. *конус отображения* вложения $A \hookrightarrow X$).

Предложение 2.13. *Имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X, A), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\widetilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \cong H_n(X, A),$$

где первый изоморфизм вытекает из точной последовательности пары (так как конус CA стягиваем), второй изоморфизм следует из теоремы вырезания (теорема 2.11; здесь v — вершина конуса), а третий изоморфизм происходит из деформационной ретракции $CA \setminus \{v\} \xrightarrow{\simeq} A$. ☐

Напомним, что отображение вложения $A \hookrightarrow X$ называется *корасслоением*, если оно удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (см. [Топ1, §4.2]). Примерами являются вложения клеточных подпространств в клеточные пространства (*клеточные пары* (X, A)), а также подмножества $A \subset X$, которые являются деформационными ретрактами своих окрестностей в X.

Предложение 2.14. *Если вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A) = (X/A, pt)$ индуцирует изоморфизмы*

$$q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, pt) = \widetilde{H}_n(X/A), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Если $A \hookrightarrow X$ является корасслоением, то факторотображение $X \cup CA \to (X \cup CA)/CA = X/A$ является гомотопической эквивалентностью (см. [Топ1, предложение 4.9]), так что утверждение следует из предложения 2.13. ☐

Предложение 2.15. *Для сферы S^n, $n \geqslant 0$, имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Доказательство. При $n > 0$ рассмотрим пару $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$; тогда $X/A = S^n$. Точная последовательность для приведённых гомологий имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_i(D^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_i(D^n, S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \arrow[r] & \widetilde{H}_{i-1}(D^n) \arrow[d, equal] \\
0 & \widetilde{H}_i(S^n) & & 0
\end{tikzcd}$$

Из точности следует, что $\widetilde{H}_i(S^n) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$. При помощи индукции мы сводим утверждение к случаю $i = 0$ либо $n = 0$, тогда S^0 — две точки и результат следует из предложений 2.2 и 2.3. ☐

Обобщением предыдущего утверждения является следующая теорема.

Теорема 2.16 (изоморфизм надстройки). *Для любого пространства X имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_i(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X).$$

Доказательство. Это вытекает из точной гомологической последовательности пары (CX, X), где CX стягиваемо, $X \hookrightarrow CX$ является корасслоением для любого X и $CX/X = \Sigma X$. ☐

Теорема 2.17. *Пусть* (X_α, x_α) *— набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения* $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ *являются корасслоениями. Тогда имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}_n\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big) \cong \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. Это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$ и определения букета $\bigvee_\alpha X_\alpha = \bigsqcup_\alpha X_\alpha / \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\}$. □

При помощи гомологий легко доказывается следующий классический результат.

Теорема 2.18 («инвариантность размерности»)**.** *Если непустые открытые множества* $U \subset \mathbb{R}^m$ *и* $V \subset \mathbb{R}^n$ *гомеоморфны, то* $m = n$.

Доказательство. Для любой точки $x \in U$ мы имеем

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{m-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = m, \\ 0 & \text{при } i \neq m, \end{cases}$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, второй — из точной последовательности пары $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$, а третий — из деформационной ретракции $\mathbb{R}^m \setminus \{x\} \to S^{m-1}$. Аналогично

$$H_i(V, V \setminus \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

Так как гомеоморфизм $h\colon U \to V$ индуцирует изоморфизмы $H_i(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_i(V, V \setminus \{h(x)\})$ для всех i, должно выполняться равенство $m = n$. □

2.6. **Доказательство теоремы вырезания.** Доказательство будет основано на ключевой лемме, позволяющей вычислять группы гомологий, используя лишь «малые» сингулярные симплексы. Малость мы будем определять в терминах покрытий, а основным комбинаторным инструментом будет барицентрическое подразделение.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}$ — набор подпространств в X, внутренности которых образуют открытое покрытие пространства X. Определим подгруппу $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n(X)$, состоящую из таких цепей $\sum_i n_i\sigma_i$, что образ каждого отображения $\sigma_i\colon \varDelta^n \to X$ содержится в некотором множестве из покрытия $\mathcal{U}$. Граничное отображение $\partial\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ переводит $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, поэтому группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ образуют цепной комплекс. Обозначим его группы гомологий через $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Лемма 2.19. *Включение* $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \to C_n(X)$ *является цепной гомотопической эквивалентностью, т. е. существует такое цепное отображение* $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$, *что* $\iota\rho$ *и* $\rho\iota$ *цепно гомотопны тождественным отображениям. Следовательно,* ι *индуцирует изоморфизмы* $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$, $n \geqslant 0$.

Доказательство. Напомним, что барицентром (или центром тяжести) симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ называется точка $b = \frac{1}{n+1}(v_0 + \ldots + v_n)$. *Барицентрическим подразбиением* симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ называется симплициальный комплекс, вершинами которого являются барицентры всех граней симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ (включая сам симплекс); при этом набор барицентров граней является множеством вершин симплекса в барицентрическом подразбиении только тогда, когда эти грани образуют цепочку вложенных друг в друга. По-другому барицентрическое подразбиение симплекса можно определить индуктивно: барицентрическое подразбиение нульмерного симплекса (точки) есть сама эта точка, а при $k > 0$ барицентрическое подразбиение k-мерного симплекса получается взятием конусов над барицентрическими подразбиениями всех его граней. Аналогично индуктивным образом определяется барицентрическое подразбиение произвольного симплициального комплекса.

Барицентрическое подразбиение обладает следующим важным свойством: если диаметр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$ (максимальное расстояние между его точками) равен d, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$ (задача). Таким образом, многократно применяя барицентрическое подразбиение, можно получать сколь угодно мелкие триангуляции.

Далее мы построим оператор подразбиения $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$ и проверим, что он цепно гомотопен тождественному отображению.

Пусть $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$ — сингулярный симплекс. Для любого набора точек $w_0, \dots, w_k \in [v_0, \dots, v_n]$ ограничение отображения σ задаёт сингулярный k-симплекс $[w_0, \dots, w_k] \to X$. Определим на таких симплексах оператор b_σ по формуле

$$b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [b, w_0, \dots, w_k],$$

где b — барицентр симплекса $[v_0, \dots, v_n]$. По определению граничного оператора ∂ мы имеем соотношение

$$\partial b_\sigma[w_0, \dots, w_k] = [w_0, \dots, w_k] - b_\sigma \partial [w_0, \dots, w_k],$$

которое можно переписать в виде

$$\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = \mathrm{id}\,.$$

Теперь определим оператор подразбиения $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$, для $n = 0$ положив $S = \mathrm{id}\colon C_0(X) \to C_0(X)$, а для $n > 0$ при помощи индуктивной формулы

$$S\sigma = b_\sigma S \partial \sigma. \tag{3}$$

Геометрически эта формула означает, что S переводит сингулярный симплекс $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$ в сингулярную цепь, представляющую собой сумму ограничений σ на симплексы барицентрического подразбиения симплекса $[v_0, \dots, v_n]$, взятые с некоторыми знаками.

Оператор $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$ является цепным отображением. Действительно, при $n = 0$ мы имеем $S = \mathrm{id}$ и $\partial = 0$, т. е. $\partial S = S\partial = 0$, а при $n > 0$ имеем

$$\partial S\sigma = \partial(b_\sigma S\partial\sigma) = (\mathrm{id} - b_\sigma\partial)S\partial\sigma = S\partial\sigma - b_\sigma \partial S \partial\sigma = S\partial\sigma - b_\sigma S\partial\partial\sigma = S\partial\sigma,$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\partial S = S\partial$ имеет место для сингулярной $(n-1)$-мерной цепи $\partial\sigma$).

Теперь определим оператор цепной гомотопии $T\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ между S и тождественным отображением. Для $n = 0$ положим $T\sigma = b_\sigma \sigma$ (это сингулярный одномерный симплекс, переводящий обе вершины в точку $\sigma[v_0]$). Для $n > 0$ определим T используя индуктивную формулу

$$T\sigma = b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma).$$

Геометрическая интерпретация этой формулы заключается в следующем. Определим индуктивно подразбиение призмы $\Delta^n \times I$, полученное в результате соединения всех

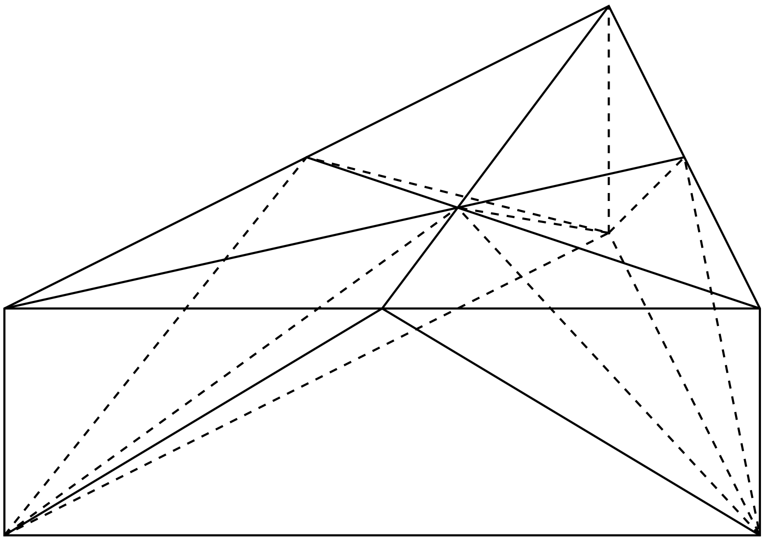


Рис. 4. Триангуляция призмы $\Delta^n \times I$.

симплексов в $\Delta \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times I$ с барицентром симплекса $\Delta \times \{1\}$, см. рис. 4. Тогда сингулярная $(n+1)$-мерная цепь $T\sigma$ есть сумма ограничений композиции

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\text{pr}} \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \xrightarrow{\sigma} X$$

на симплексы подразбиения призмы, взятые с некоторыми знаками.

Формула цепной гомотопии $\partial T + T\partial = \mathrm{id} - S$ выполнена на $C_0(X)$, где $S = \mathrm{id}$, $\partial = 0$ и $\partial T = 0$. Для сингулярного n-мерного симплекса σ, $n > 0$, мы имеем

$$\partial T\sigma = \partial(b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)) = (\mathrm{id} - b_\sigma\partial)(\sigma - T\partial\sigma) = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma(\mathrm{id} - \partial T)\partial\sigma = \\ = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma(T\partial + S)\partial\sigma = \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma S\partial\sigma = (\mathrm{id} - T\partial - S)\sigma.$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции (соотношение $\mathrm{id} - \partial T = T\partial + S$ имеет место для сингулярной $(n-1)$-мерной цепи $\partial\sigma$) и формулой (3).

Рассмотрим оператор m-кратного барицентрического подразбиения $S^m\colon C_n(X) \to C_n(X)$. Тогда оператор $D_m = \sum_{0 \leqslant i < m} TS^i$ задаёт цепную гомотопию между id и S^m:

$$\partial D_m + D_m\partial = \sum_{0 \leqslant i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leqslant i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{0 \leqslant i < m} (\partial T + T\partial)S^i = \\ = \sum_{0 \leqslant i < m} (\mathrm{id} - S)S^i = \sum_{0 \leqslant i < m} (S^i - S^{i+1}) = \mathrm{id} - S^m.$$

Для каждого сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^n \to X$ и достаточно большого m сингулярная цепь $S^m\sigma$ будет лежать в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, так как диаметры симплексов в $S^m(\Delta^n)$ при больших m будут меньше числа Лебега покрытия симплекса Δ^n открытыми множествами $\sigma^{-1}(\operatorname{int} U_j)$. (Число Лебега открытого покрытия компактного метрического пространства — это такое число $\varepsilon > 0$, что любое множество диаметра меньше ε содержится в некотором множестве покрытия.) Если бы можно было выбрать одно число m для всех сингулярных симплексов σ, то мы могли бы положить $\rho = S^m\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$, и тогда соотношение $\partial D_m + D_m\partial = \mathrm{id} - S^m$ означало бы, что D_m является цепной гомотопией между $\iota\rho$ и id (а также между $\rho\iota$ и id).

На практике, однако, мы не можем выбрать одно m для всех σ. Поэтому определим $m(\sigma)$ как наименьшее m, для которого $S^m\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Определим теперь оператор

$$D\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X), \quad D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Ниже мы покажем, что D является цепной гомотопией между id и $\iota\rho$ для некоторого цепного отображения $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Рассмотрим соотношение

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma.$$

Мы имеем $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$, но $D_{m(\sigma)}\partial\sigma \neq D\partial\sigma$. Прибавив $D\partial\sigma$ к обеим частям приведённого выше соотношения, после преобразования получим

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \big(S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma\big).$$

Теперь положим

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.$$

Смысл этого отображения ρ заключается в том, что мы сначала барицентрически подразбиваем каждый сингулярный симплекс минимальное требуемое число раз, а затем подправляем на границе так, чтобы результат был цепным отображением. Тогда предпоследнее соотношение принимает вид

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma). \tag{4}$$

При этом ρ является цепным отображением. Действительно, из формулы (4), применённой к σ и $\partial\sigma$, следует, что $\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \rho(\partial\sigma)$.

Покажем, что $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Это очевидно для члена $S^{m(\sigma)}\sigma$. Для остальной части $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ заметим, что если σ_j обозначает ограничение σ на j-ю грань симплекса Δ^n, то $m(\sigma_j) \leqslant m(\sigma)$, поэтому каждый член $TS^i(\sigma_j)$ в $D\partial\sigma$ будет входить и в $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$. Таким образом, $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ — сумма членов $TS^i(\sigma_j)$, где $i \geqslant m(\sigma_j)$, а все такие члены лежат в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ (заметим, что T переводит $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ в $C_n^{\mathcal{U}}(X)$).

Таким образом, мы можем рассматривать ρ как цепное отображение $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Тогда соотношение (4) перепишется в виде $\partial D + D\partial = \mathrm{id} - \iota\rho$, где $\iota\colon C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ — включение. Кроме того, $\rho\iota = \mathrm{id}$, так как D тождественно равно нулю на $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, поскольку $m(\sigma) = 0$ для $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Итак, отображение ρ цепно гомотопически обратно к ι. ☐

Теперь мы можем доказать теорему вырезания.

Доказательство теоремы 2.12. Нам даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Переходя, если необходимо, к внутренностям, мы можем считать, что $X = A \cup B$ — открытое покрытие, которое мы обозначим через $\mathcal{U}$. Мы будем обозначать группы $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ через $C_n(A+B)$, что указывает на то, что они состоят из сумм цепей в A и цепей в B.

В конце доказательства леммы 2.19 мы получили формулы $\partial D + D\partial = \mathrm{id} - \iota\rho$ и $\rho\iota = \mathrm{id}$. Все отображения в этих формулах переводят $C_n(A)$ в $C_n(A)$, поэтому включение

$$C_n(A+B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

индуцирует изоморфизм гомологий. С другой стороны, отображение

$$C_n(B)/C_n(A\cap B) \to C_n(A+B)/C_n(A),$$

индуцированное включением, является изоморфизмом, так как обе факторгруппы свободные и их базисом служат сингулярные n-симплексы в B, не лежащие в A.

Следовательно, мы получаем требуемый изоморфизм $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$, индуцированный включением. □

2.7. **Точная последовательность Майера–Виеториса.**

Теорема 2.20. *Пусть даны подпространства $A, B \subset X$, внутренности которых покрывают X. Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots \to H_0(X) \to 0.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим подгруппу $C_n(A + B) \subset C_n(X)$, состоящую из цепей, которые являются суммами цепей в A и цепей в B. Мы имеем точную последовательность цепных комплексов, образованную короткими точными последовательностями

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \longrightarrow 0,$$

где $\varphi(x) = (x, -x)$ и $\psi(x, y) = x + y$. Соответствующая длинная точная последовательность гомологий и есть последовательность Майера–Виеториса, так как включение $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ индуцирует изоморфизм групп гомологий согласно лемме 2.19. □

Граничное отображение $\partial\colon H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ легко описать явно. Пусть класс $\alpha \in H_n(X)$ представлен циклом a. С помощью барицентрического подразбиения цикл a можно выбрать так, чтобы он был суммой $x + y$ цепей в A и B соответственно. Мы имеем $\partial a = \partial x + \partial y = 0$. Тогда элемент $\partial\alpha \in H_{n-1}(A \cap B)$ представлен циклом $\partial x = -\partial y$.

Имеется также следующая относительная последовательность Майера–Виеториса, доказательство которой остаётся в качестве задачи.

Теорема 2.21. *Пусть дана пара пространств $(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$, где $C \subset A$, $D \subset B$, внутренности пространств A и B покрывают X, а внутренности C и D покрывают Y. Тогда имеет место точная последовательность групп гомологий*

$$\ldots \to H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

2.8. **Эквивалентность симплициальных и сингулярных гомологий.** Пусть на X задана структура полусимплициального комплекса, т. е. заданы отображения $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$, удовлетворяющие свойствам а)–в), см. п. 1.2. Мы определили комплекс симплициальных цепей $\{\Delta_n(X), \partial\}$ и симплициальные гомологии $H_n^\Delta(X)$.

Определим также группы относительных симплициальных гомологий $H_n^\Delta(X, A)$. Пусть $A \subset X$ — полусимплициальный подкомплекс, т. е. полусимплициальный комплекс, образованный объединением некоторых симплексов комплекса X. Тогда группа $H_n^\Delta(X, A)$ определяется как группа гомологий комплекса относительных цепей $\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X)/\Delta_n(A)$. Как и для сингулярных гомологий, имеет место длинная точная последовательность пары (X, A) для симплициальных гомологий.

Имеется канонический гомоморфизм $H_n^\Delta(X, A) \to H_n(X, A)$ из симплициальных в сингулярные гомологии, индуцированный цепным отображением $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$, переводящим каждый n-мерный симплекс комплекса X в его характеристическое отображение $\sigma_\alpha\colon \Delta^n \to X$. При $A = \varnothing$ относительные группы гомологий сводятся к абсолютным: $H_n^\Delta(X, \varnothing) = H_n^\Delta(X)$ и $H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$.

Теорема 2.22. *Гомоморфизмы* $H_n^{\Delta}(X,A) \to H_n(X,A)$ *являются изоморфизмами.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда комплекс X конечномерен, а $A=\varnothing$. Пусть X^k — это k-мерный остов комплекса X, состоящий из всех симплексов размерности $\leqslant k$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму точных последовательностей

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}^{\Delta}(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^{\Delta}(X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^{\Delta}(X^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^{\Delta}(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^{\Delta}(X^{k-1}) \arrow[d] \\
H_{n+1}(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^{k-1}) \arrow[r] & H_n(X^k) \arrow[r] & H_n(X^k,X^{k-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(X^{k-1}).
\end{tikzcd}$$

Покажем, что первое и четвёртое вертикальные отображения — изоморфизмы. Группа симплициальных цепей $\Delta_n(X^k,X^{k-1})$ нулевая при $n \neq k$ и свободная абелева с базисом из k-мерных симплексов комплекса X при $n=k$. Следовательно, группы симплициальных гомологий $H_n^{\Delta}(X^k,X^{k-1})$ имеют точно такое же описание. Для вычисления групп сингулярных гомологий $H_n(X^k,X^{k-1})$ рассмотрим отображение

$$\Phi\colon \Big(\bigsqcup_{\alpha}\Delta_{\alpha}^k, \bigsqcup_{\alpha}\partial\Delta_{\alpha}^k\Big) \to (X^k,X^{k-1}),$$

образованное характеристическими отображениями $\Delta_{\alpha}^k \to X$ для всех k-мерных симплексов комплекса X. Отображение Φ индуцирует гомеоморфизм

$$\bigsqcup_{\alpha}\Delta_{\alpha}^k \Big/ \bigsqcup_{\alpha}\partial\Delta_{\alpha}^k \xrightarrow{\cong} X^k/X^{k-1},$$

а значит, оно индуцирует изоморфизмы групп сингулярных гомологий. В левой части стоит букет k-мерных сфер, поэтому группа $H_n(X^k,X^{k-1})$ равна нулю при $n \neq k$ и является свободной абелевой группой с базисом, соответствующим характеристическим отображениям $\Delta_{\alpha}^k \to X$ всех k-мерных симплексов комплекса X, при $n=k$. Следовательно, отображение $H_n^{\Delta}(X^k,X^{k-1}) \to H_n(X^k,X^{k-1})$ является изоморфизмом для всех n.

Применяя индукцию по k, мы можем предположить, что второе и пятое вертикальные отображения в приведённой выше коммутативной диаграмме также изоморфизмы. Тогда и среднее вертикальное отображение — изоморфизм согласно алгебраическому утверждению, известному как *лемма о пяти гомоморфизмах (5-лемма)*, см. задачу 2.41. Итак, утверждение доказано в случае, когда X конечномерен, а $A=\varnothing$.

Рассмотрим теперь случай, когда X — бесконечномерный комплекс. Докажем следующий факт: компактное подмножество K в X может пересекать только конечное число открытых симплексов. (На самом деле это общий факт о клеточных пространствах.) Действительно, предположим, что K пересекает бесконечно много открытых симплексов. Выбирая по одной точке внутри каждого из таких открытых симплексов, получим бесконечный набор точек x_i. Каждое из множеств $U_i = X \setminus \bigcup_{j\neq i}\{x_j\}$ открыто, так как открыт его прообраз при любом характеристическом отображении $\sigma_{\alpha}\colon \Delta^n \to X$. Множества U_i образуют открытое покрытие множества K, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Противоречие.

Теперь докажем, что $H_n^{\Delta}(X) \to H_n(X)$ есть изоморфизм. Сначала докажем сюръективность. Пусть элемент $\gamma \in H_n(X)$ представлен циклом c. Так как c — конечная линейная комбинация сингулярных симплексов, его образ содержится в X^N для некоторого N согласно утверждению из предыдущего абзаца. Так как X^N конечномерен, $H_n^{\Delta}(X^N) \to H_n(X^N)$ есть изоморфизм. Следовательно, цикл c гомологичен в X^N (а значит, и в X) симплициальному циклу. Это доказывает сюръективность отображения $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$. Теперь докажем инъективность. Пусть s — симплициальный цикл, причём $s = \partial d$ для некоторой сингулярной цепи d в X. Цепь d имеет компактный образ, а значит содержится в некотором X^N. Поэтому цикл s представляет элемент из ядра отображения $H_n^\Delta(X^N) \to H_n(X^N)$. Но это отображение — изоморфизм, а потому s является границей симплициальной цепи в X^N, а значит, и в X.

Осталось рассмотреть случай, когда X произвольно и $A \neq \varnothing$. В этом случае мы применим лемму о пяти гомоморфизмах к каноническому отображению длинных точных последовательностей симплициальных и сингулярных гомологий:

$$\begin{tikzcd}
H_n^\Delta(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^\Delta(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_n^\Delta(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^\Delta(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^\Delta(X) \arrow[d] \\
H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X).
\end{tikzcd}$$ ☐

Задачи и упражнения.

2.23. Докажите, что разбиение призмы $\Delta^n \times I$ на симплексы, описанное в начале доказательства теоремы 2.6, действительно является симплициальным комплексом.

2.24. Постройте какую-нибудь триангуляцию произведения симплексов $\Delta^n \times \Delta^m$.

2.25. Покажите, что если A — ретракт пространства X, то отображение $H_n(A) \to H_n(X)$, индуцированное включением $A \hookrightarrow X$, является мономорфизмом.

2.26. Покажите, что цепная гомотопия цепных отображений — отношение эквивалентности.

2.27. Проверьте, что граничное отображение $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ гомологий цепных комплексов определено корректно и является гомоморфизмом.

2.28. Докажите, что $H_n(X, x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$ для любых $x_0 \in X$ и $n \geqslant 0$.

2.29. Выведите точную последовательность пары для приведённых гомологий:

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

2.30. Напомним, что *отображением пар* $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ называется отображение $f\colon X \to Y$, для которого $f(A) \subset B$. Докажите, что отображение пар индуцирует гомоморфизмы $f_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B),\ \ n \geqslant 0$.

2.31. Докажите, что если отображения $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ гомотопны в классе отображений пар (т. е. существует такая гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ между f и g, что $F(A \times I) \subset B$), то индуцируемые ими отображения гомологий пар совпадают: $f_* = g_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B),\ \ n \geqslant 0$.

2.32. Докажите следующее свойство *естественности* гомологической последовательности пары: для отображения пар $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

2.33. Определите и докажите точность *гомологической последовательности тройки* для (X, A, B), где $B \subset A \subset X$:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$

2.34. Докажите, что включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизмы всех групп гомологий тогда и только тогда, когда $H_n(X,A) = 0$ для всех n.

2.35. Докажите теорему 2.21 (последовательность Майера–Виеториса для пар).

2.36. Докажите при помощи групп гомологий *общую теорему Брауэра*: непрерывное отображение шара D^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

2.37. Вычислите группы гомологий для дополнения двух зацепленных и двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$; сравните с вычислением фундаментальных групп.

2.38. Вычислите гомологии дополнения трёх координатных осей в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{C}^3$.

2.39. Докажите, что если диаметр симплекса $[v_0, \ldots, v_n]$ равен d, то диаметры симплексов его барицентрического подразбиения не превосходят $\frac{n}{n+1}d$.

2.40. Вычислите гомологии сферы S^n и докажите изоморфизм $\widetilde{H}_i(\Sigma X) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X)$ при помощи точной последовательности Майера–Виеториса.

2.41. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах*. Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

2.42. Для отображения $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(S_n) \to H_n(S_n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d. Это число называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$.

Докажите следующие свойства степени:

а) $\deg \mathrm{id} = 1$;
б) $\deg f = 0$, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не сюръективно;
в) если отображения f и g гомотопны, то $\deg f = \deg g$ (верно и обратное утверждение: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны; это вытекает из утверждения $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, известного как *теорема Хопфа*, см. теорему 4.7);
г) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$;
д) Если $f\colon S^n \to S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости, например $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то $\deg f = -1$;
е) Антиподальное отображение $-\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto -\boldsymbol{x}$, имеет степень $(-1)^{n+1}$.

2.43. Докажите, что если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.

2.44. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечётно.

2.45. Говорят, что группа G *действует* на пространстве X , если для каждого элемента $g \in G$ задано такое непрерывное отображение $\alpha_g \colon X \to X$, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.

Докажите, что для чётного n единственной нетривиальной группой, которая может действовать свободно на S^n, является $\mathbb{Z}_2$.

2.46. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f \colon S^n \to S^n$ степени k.

3. КЛЕТОЧНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Пусть X — клеточное пространство. Будем обозначать n-мерный остов пространства X через X^n.

Клеточные гомологии обобщают симплициальные гомологии. Элементами группы n-мерных клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$ являются формальные линейные комбинации n-мерных клеток e^n_α пространства X, и имеется более-менее явная формула для описания клеточного граничного отображения $\partial^c \colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$.

Перейдём к формальным определениям и конструкциям.

3.1. **Клеточный цепной комплекс и его гомологии.**

Лемма 3.1. *Пусть X — клеточное пространство. Тогда*

а) *группа $H_k(X^n, X^{n-1})$ равна нулю при $k \neq n$ и является свободной абелевой группой, порождённой n-мерными клетками пространства X, при $k = n$;*

б) *$H_k(X^n) = 0$ при $k > n$; в частности, если пространство X конечномерно, то $H_k(X) = 0$ при $k > \dim X$;*

в) *Включение $i \colon X^n \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм $i_* \colon H_k(X^n) \xrightarrow{\cong} H_k(X)$ при $k < n$.*

Доказательство. Так как вложение $X^{n-1} \hookrightarrow X^n$ является корасслоением, мы имеем $H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \widetilde{H}_k(X^n/X^{n-1})$, а X^n/X^{n-1} — букет сфер, по одной сфере для каждой n-мерной клетки пространства X. Это доказывает утверждение а).

Далее рассмотрим фрагмент точной последовательности пары (X^n, X^{n-1}):

$$\ldots \to H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \to H_k(X^{n-1}) \to H_k(X^n) \to H_k(X^n, X^{n-1}) \to \ldots$$

Если $k \neq n, n-1$, то обе внешние группы равны нулю согласно утверждению а) и мы получаем $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ при $k \neq n$, $n-1$. Тогда при $k > n$ имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \ldots \cong H_k(X^0) = 0,$$

что доказывает утверждение б). При $k < n$ мы имеем

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong H_k(X^{n+2}) \cong \ldots,$$

что доказывает утверждение в), если X конечномерно.

Для бесконечномерного X воспользуемся тем, что компактное подмножество в X пересекает лишь конечное число клеток. Таким образом, каждая сингулярная цепь лежит в некотором конечном остове X^N. Поэтому k-мерный цикл c в X является циклом в некотором X^N, а тогда согласно конечномерному случаю утверждения в) цикл c гомологичен циклу в X^n при $n > k$, а значит, гомоморфизм $i_*\colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ сюръективен. Аналогично доказывается его инъективность: если k-мерный цикл c в X^n является границей цепи d в X, то d лежит в некотором X^N, $N \geqslant n$, а потому согласно конечномерному случаю c является границей в X^n при $n > k$. $\square$

Группа $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ называется *группой n-мерных клеточных цепей* клеточного пространства X. Согласно лемме 3.1 а) клеточную цепь можно представлять линейной комбинацией n-мерных клеток.

Определим *клеточный граничный гомоморфизм* $\partial^c_n\colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ как граничный гомоморфизм $H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ в точной последовательности тройки (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}), т. е. $\partial^c_n = j_{n-1}\partial_n$, см. коммутативную диаграмму ниже. В этой диаграмме наклонные линии — фрагменты длинных последовательностей пар:

(5)

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \arrow[ur] \arrow[r, equal] & H_n(X) & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "\partial^c_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "\partial^c_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Из этой же диаграммы следует, что $\partial^c\partial^c = 0$, так как $\partial^c_n\partial^c_{n+1} = j_{n-1}\partial_n j_n\partial_{n+1}$, а $\partial_n j_n = 0$.

Цепной комплекс $\mathcal{C}_\bullet(X) = \{\mathcal{C}_n(X), \partial^c_n\}$ называется *клеточным цепным комплексом*, а его гомологии $\mathcal{H}_n(X)$ — *группами клеточных гомологий* пространства X.

Теорема 3.2. *Имеет место изоморфизм $\mathcal{H}_n(X) \cong H_n(X)$.*

Доказательство. Из диаграммы (5) имеем

$$H_n(X) = H_n(X^n)/\operatorname{Im}\partial_{n+1}, \quad \mathcal{H}_n(X) = \operatorname{Ker}\partial^c_n/\operatorname{Im}\partial^c_{n+1}.$$

Так как j_n — мономорфизм, он отображает $\operatorname{Im}\partial_{n+1}$ изоморфно на $\operatorname{Im}(j_n\partial_{n+1}) = \operatorname{Im}\partial^c_{n+1}$ и отображает $H_n(X^n)$ изоморфно на $\operatorname{Im} j_n = \operatorname{Ker}\partial_n$. Так как j_{n-1} — мономорфизм, $\operatorname{Ker}\partial_n = \operatorname{Ker}\partial^c_n$. Таким образом, j_n индуцирует изоморфизм $H_n(X)$ на $\mathcal{H}_n(X)$. $\square$

Из изоморфности сингулярных и клеточных гомологий сразу вытекают следующие важные свойства.

Следствие 3.3.

а) *Если X имеет k клеток размерности n, то группа $H_n(X)$ порождена не более чем k элементами. В частности, если X не имеет клеток размерности n, то $H_n(X) = 0$.*

б) *Если X не имеет пар клеток в соседних размерностях (например, если все клетки в X имеют чётную размерность), то $H_n(X)$ — свободная абелева группа, порождённая n-мерными клетками пространства X.*

Пример 3.4. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет по одной клетке в каждой чётной размерности $2k \leqslant 2n$. Таким образом,

$$H_i(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, 2, 4, \ldots, 2n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2. **Явный вид граничного гомоморфизма.** При $n = 1$ клеточное граничное отображение $\partial^c \colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_{n-1}(X)$ представляет собой граничный гомоморфизм

$$\partial \colon H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0).$$

Если X связно и имеет только одну нульмерную клетку, то этот гомоморфизм должен быть нулевым. Это следует из точной последовательности пары (X^1, X^0) и изоморфизма $H_0(X^1) \cong H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Далее мы будем отождествлять клетку $e^n_\alpha \subset X$ с соответствующей образующей группы клеточных цепей $\mathcal{C}_n(X)$.

Теорема 3.5. *При $n > 1$ имеет место равенство*

$$\partial^c(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta, \tag{6}$$

где $d_{\alpha\beta}$ — степень отображения

$$f_{\alpha\beta} \colon S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_\alpha} X^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1},$$

представляющего собой композицию приклеивающего отображения $\varphi_\alpha \colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ клетки e^n_α и отображения факторизации $q_\beta \colon X^{n-1} \to S^{n-1}$, стягивающего $X^{n-1} \setminus e^{n-1}_\beta$ в точку.

Доказательство. Прежде всего заметим, что сумма в формуле (6) содержит конечное число членов, так как образ приклеивающего отображения φ_α компактен, а потому пересекает лишь конечное число клеток e^{n-1}_β.

Пусть $\varPhi_\alpha \colon D^n_\alpha \to X^n$ — характеристическое отображение клетки e^n_α; его ограничение на $S^{n-1}_\alpha = \partial D^n_\alpha$ есть приклеивающее отображение $\varphi_\alpha \colon S^{n-1}_\alpha \to X^{n-1}$. Ясно, что отображение факторизации $q_\beta \colon X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ раскладывается в композицию $X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2} \xrightarrow{\widehat{q}_\beta} S^{n-1}_\beta$ для некоторого отображения $\widehat{q}_\beta$, выделяющего сферу S^{n-1}_β из букета X^{n-1}/X^{n-2}.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "\varPhi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\alpha) \arrow[r, "f_{\alpha\beta*}"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha*}"] & \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}_\beta) \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial^c"'] & \widetilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "q_{\beta*}"'] \arrow[d, "j"] & \\
 & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[uur, "\widehat{q}_{\beta*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Отображение $\Phi_{\alpha *}$ переводит стандартную образующую $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha)$ в образующую $e^n_\alpha \in H_n(X^n, X^{n-1})$. Из коммутативности левой части диаграммы следует, что $\partial^c(e^n_\alpha) = j\varphi_{\alpha *}\partial[D^n_\alpha]$. В терминах базиса для $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, соответствующего $(n-1)$-мерным клеткам, отображение $\widehat{q}_{\beta *}$ — это проекция группы $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ на слагаемое, соответствующее клетке e^{n-1}_β. Теперь требуемая формула следует из коммутативности правой части диаграммы. □

Пример 3.6. Пусть S_g — сфера с g ручками, т. е. замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Введём на S_g стандартную клеточную структуру с одной нульмерной клеткой, $2g$ одномерными клетками $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по произведению коммутаторов $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Соответствующий клеточный цепной комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial^c_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial^c_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Мы имеем $\partial^c_1 = 0$, так как S_g имеет всего одну нульмерную клетку. Кроме того, $\partial^c_2 = 0$, так как каждое ребро a_i и b_i входит в $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ вместе с его обратным, а значит все отображения $f_{\alpha\beta}\colon S^1 \to S^1$ гомотопны отображению в точку. Поэтому группы гомологий поверхности S_g совпадают с группами клеточных цепей, т. е.

$$H_0(S_g) = H_2(S_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_i(S^g) = 0 \text{ при } i > 2.$$

Пример 3.7. Пусть $X = \mathbb{R}P^n$ — вещественное проективное пространство. Оно имеет клеточную структуру с одной клеткой e^k в каждой размерности $k \leqslant n$. Приклеивающее отображение для клетки e^k — это двулистное накрытие $\varphi\colon S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}$. Согласно формуле (6) имеем $\partial^c(e^k) = d_k e^{k-1}$, где d_k — это степень композиции

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}.$$

При ограничении на каждую компоненту связности пространства $S^{k-1} \setminus S^{k-2}$ отображение $q\varphi$ является гомеоморфизмом. Один из этих гомеоморфизмов тождественный, а другой является ограничением антиподального отображения сферы S^{k-1}, которое имеет степень $(-1)^k$. Поэтому $\deg q\varphi = 1 + (-1)^k$, что есть 0 или 2 в зависимости от чётности k. Таким образом, клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ чётно;}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ нечётно.}$$

Следовательно,

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } k = 0 \text{ и при нечётном } k = n, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при нечётном } k, \text{ где } 0 < k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3.3. **Эйлерова характеристика.** *Эйлерова характеристика* конечного клеточного пространства X определяется как

$$\chi(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n c_n,$$

где $c_n = \operatorname{rk} \mathcal{C}_n(X)$ — число n-мерных клеток пространства X (ранг конечно порождённой абелевой группы $\mathcal{C}_n(X)$).

Классическая *теорема Эйлера* утверждает, что для выпуклого трёхмерного многогранника имеет место формула $В - Р + Г = 2$, где $В$, $Р$ и $Г$ — число вершин, рёбер и граней соответственно. Обобщением этого факта является следующий результат, который показывает, что эйлерова характеристика является топологическим (и даже гомотопическим) инвариантом клеточного пространства X. В частности, она не зависит от клеточного разбиения.

Теорема 3.8. *Для конечного клеточного пространства X справедливо соотношение*

$$\chi(X) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \operatorname{rk} H_n(X).$$

Доказательство. Это чисто алгебраический факт. Рассмотрим цепной комплекс

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

конечно порождённых абелевых групп. Пусть $Z_n = \operatorname{Ker}\partial_n$ — циклы, $B_n = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Из коротких точных последовательностей $0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$ и $0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$ получаем соотношения

$$\operatorname{rk} C_n = \operatorname{rk} Z_n + \operatorname{rk} B_{n-1},$$
$$\operatorname{rk} Z_n = \operatorname{rk} B_n + \operatorname{rk} H_n.$$

Подставим второе соотношение в первое, умножим полученное соотношение на $(-1)^n$ и просуммируем по n. В результате получим

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \operatorname{rk} C_n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \operatorname{rk} H_n.$$

Осталось применить это соотношение к случаю $C_n = \mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$. ☐

Пример 3.9. Эйлерова характеристика замкнутой ориентированной поверхности S_g рода g равна $2 - 2g$. Таким образом, все замкнутые ориентированные поверхности различаются их эйлеровыми характеристиками.

Задачи и упражнения.

3.10. Вычислите гомологии произведения сфер $S^n \times S^n$ при $n \geqslant 2$, пользуясь клеточным разбиением.

3.11. Пусть N_g — замкнутая неориентируемая поверхность рода g, т. е. сфера с g вклеенными листами Мёбиуса. Вычислите гомологии поверхности N_g, пользуясь клеточной структурой с одной нульмерной клеткой, g одномерными клетками $c_1, \ldots, c_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2$.

3.12. Вычислите гомологии пространства X, полученного приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам. В частности, рассмотрите случай приклеивания клеток по словам a^5b^{-3} и $b^3(ab)^{-2}$. Что можно сказать о фундаментальной группе такого пространства?

3.13. Вычислите гомологии трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, пользуясь клеточным разбиением.

3.14. Докажите, что для конечных клеточных пространств X, Y имеет место соотношение $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

3.15. Докажите, что если $X = A \cup B$, где X — клеточное пространство, а A, B — клеточные подпространства в X, то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

3.16. Докажите, что для n-листного накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ над конечным клеточным пространством X имеет место соотношение $\chi(\widetilde{X}) = n\chi(X)$.

4. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ

Здесь мы рассмотрим взаимоотношения между гомотопическими группами и группами гомологий. Мы последовательно докажем утверждения о том, что первая группа гомологий совпадает с абеленизацией фундаментальной группы (теорема Пуанкаре), для односвязного пространства первая нетривиальная гомотопическая группа и первая нетривиальная группа гомологий появляются в одной размерности и изоморфны (теорема Гуревича) и отображение односвязных клеточных пространств, индуцирующее изоморфизм групп гомологий, является гомотопической эквивалентностью (гомологическая теорема Уайтхеда). Для доказательства последних двух утверждений нам понадобятся результаты о гомотопических группах, а именно теорема Фрейденталя о надстройке и вычисление групп $\pi_n(S^n)$.

4.1. **Фундаментальная группа и гомологии.** Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Элементами фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ являются классы гомотопных петель $\varphi\colon I \to X$, где $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Каждую такую петлю можно рассматривать как сингулярный 1-симплекс, который является циклом, так как $\partial\varphi = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$.

Напомним, что *абеленизацией* группы G называется факторгруппа $G/[G, G]$ по нормальной подгруппе $[G, G]$, порождённой всевозможными коммутаторами $ghg^{-1}h^{-1}$ (эта подгруппа называется *коммутантом* группы G). Например, абеленизацией свободной группы F_n является свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n$.

Теорема 4.1 (Пуанкаре)**.** *Рассматривая петли как сингулярные* 1*-циклы, мы получаем гомоморфизм* $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. *Если* X *линейно связно, то* h *является эпиморфизмом, а его ядро — коммутант группы* $\pi_1(X, x_0)$. *Таким образом, группа* $H_1(X)$ *изоморфна абеленизации группы* $\pi_1(X, x_0)$.

Доказательство. Мы будем использовать обозначение $\varphi \simeq \psi$ для отношения гомотопии петель и $\varphi \sim \psi$ для отношения гомологии соответствующих 1-циклов (т. е. $\varphi \sim \psi$, если $\varphi - \psi$ является границей 2-мерной цепи).

Сначала проверим, что сопоставление гомотопическому классу петли φ класса гомологий 1-мерного цикла φ задаёт корректно определённое отображение $h\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$, т. е. проверим, что если $\varphi \simeq \psi$, то $\varphi \sim \psi$. Заметим, что если φ — постоянная петля $I \to x_0$, то $\varphi \sim 0$. Это следует из того, что $H_1(pt) = 0$. Теперь рассмотрим гомотопию $F\colon I \times I \to X$ между петлями φ и ψ. Разбив квадрат $I \times I$ на треугольники $[v_0, v_1, v_3]$ и $[v_0, v_2, v_3]$, как показано слева на рис. 5, мы получим сингулярные 2-симплексы σ_1, σ_2. Мы имеем

$$\begin{aligned}\partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= \partial[v_0, v_1, v_3] - \partial[v_0, v_2, v_3] = \\ &= [v_1, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_1] - [v_2, v_3] + [v_0, v_3] - [v_0, v_2] \sim [v_0, v_1] - [v_2, v_3] = \varphi - \psi,\end{aligned}$$

так как боковые стороны $[v_0, v_2]$ и $[v_1, v_3]$ отображаются в отмеченную точку, а значит, гомологичны нулю. Следовательно, $\varphi \sim \psi$.

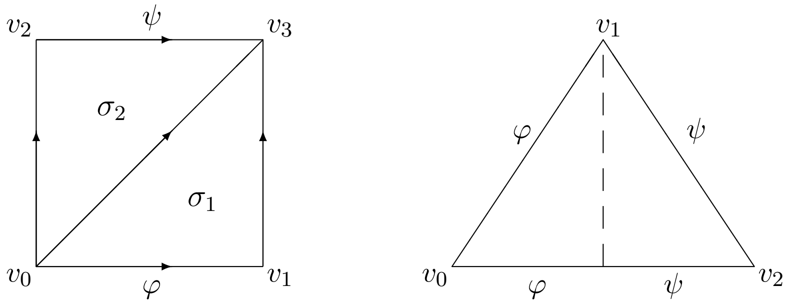


Рис. 5.

Теперь проверим, что $h\colon \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ — гомоморфизм, т. е. $\varphi\cdot\psi\sim\varphi+\psi$, где $\varphi\cdot\psi$ обозначает произведение петель. Рассмотрим сингулярный 2-симплекс $\sigma\colon \varDelta^2\to X$, задаваемый композицией проекции треугольника $\varDelta^2=[v_0,v_1,v_2]$ на ребро $[v_0,v_2]$ и отображения $\varphi\cdot\psi\colon [v_0,v_2]\to X$, как показано справа на рис. 5. Тогда

$$\partial\sigma=[v_1,v_2]-[v_0,v_2]+[v_0,v_1]=\psi-\varphi\cdot\psi+\varphi,$$

т. е. $\psi-\varphi\cdot\psi+\varphi\sim 0$, что и требовалось.

В предыдущем рассуждении мы не использовали тот факт, что φ и ψ — петли, так что мы имеем $\varphi\cdot\psi\sim\varphi+\psi$ для любых путей φ,ψ, удовлетворяющих условию $\varphi(1)=\psi(0)$. В частности, $\bar\varphi\sim-\varphi$ (где $\bar\varphi$ — обратный путь для φ), так как $\varphi+\bar\varphi\sim\varphi\cdot\bar\varphi\sim 0$.

Покажем, что $h\colon \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ — эпиморфизм, если X линейно связно. Пусть $\sum_i n_i\sigma_i$ — одномерный цикл, представляющий данный элемент группы $H_1(X)$. Перенумеровав симплексы σ_i, можно считать, что $n_i=\pm1$. Так как $-\sigma_i\sim\bar\sigma_i$, мы можем считать, что наш 1-цикл имеет вид $\sum_i\sigma_i$. Если какой-то из путей σ_i не является петлёй, то из условия $\partial(\sum_i\sigma_i)=0$ следует, что в сумме найдётся другой путь σ_j, для которого определено произведение путей $\sigma_i\cdot\sigma_j$. Так как $\sigma_i+\sigma_j\sim\sigma_i\cdot\sigma_j$, мы можем в записи $\sum_i\sigma_i$ заменить $\sigma_i+\sigma_j$ на $\sigma_i\cdot\sigma_j$. Повторяя эту процедуру, мы приходим к случаю, когда каждый путь σ_i является петлей с началом и концом в некоторой точке $x_i\in X$. Так как X линейно связно, существуют пути γ_i из отмеченной точки x_0 в x_i. Так как $\gamma_i\cdot\sigma_i\cdot\bar\gamma_i\sim\sigma_i$, мы можем считать, что все σ_i — петли с началом и концом в точке x_0. Тогда цикл $\sum_i\sigma_i$ гомологичен произведению всех петель σ_i, которое представляет элемент образа гомоморфизма $h\colon \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$.

Коммутант группы $\pi_1(X)$ лежит в ядре гомоморфизма h, так как группа $H_1(X)$ абелева. Чтобы получить обратное включение, покажем, что если $[\varphi]\in\operatorname{Ker}h$, то петля φ представляет тривиальный элемент в абеленизации $\pi_1(X)_{ab}$.

Пусть $[\varphi]\in\operatorname{Ker}h$. Тогда 1-мерный цикл φ является границей 2-мерной цепи $\sum_i n_i\sigma_i$. Как и выше, перенумеровав сингулярные 2-симплексы $\sigma_i\colon \varDelta_i^2\to X$, мы можем считать, что $n_i=\pm1$, а изменив порядок вершин симплекса $\varDelta_i^2$ мы можем заменить $-\sigma_i$ на σ_i. В результате получим $\varphi=\partial(\sum_i\sigma_i)$. Сопоставим цепи $\sum_i\sigma_i$ двумерный полусимплициальный комплекс K, который получается склейкой 2-мерных симплексов $\varDelta_i^2$, соответствующих сингулярным симплексам $\sigma_i\colon \varDelta_i^2\to X$, следующим образом. Записав $\partial\sigma_i=\tau_{i0}-\tau_{i1}+\tau_{i2}$ для сингулярных 1-симплексов τ_{ij}, получаем

$$\varphi=\partial(\sum_i\sigma_i)=\sum_{i,j}(-1)^j\tau_{ij}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что мы можем сгруппировать все τ_{ij}, кроме одного, в пары так, что в каждой паре сингулярные 1-симплексы совпадают, а коэффициенты при них равны 1 и -1. Оставшийся сингулярный 1-симплекс есть φ. Теперь мы отождествим рёбра симплексов Δ_i^2, соответствующие объединённым в пары симплексам τ_{ij}, с учётом ориентации рёбер. В результате получим полусимплициальный комплекс K, для которого 1-цикл φ будет «границей».

Отображения σ_i согласованы и вместе дают отображение $\sigma\colon K \to X$. Отображение σ можно заменить на гомотопное ему отображение σ', которое переводит все вершины $v \in K$ в отмеченную точку x_0, причём гомотопию между σ и σ' можно выбрать постоянной на ребре, соответствующем циклу φ. Это вытекает из свойства продолжения гомотопии: выбрав для каждой вершины $v \in K$ путь из $\sigma(v)$ в x_0, мы тем самым зададим гомотопию на $K^0 \cup \varphi$, а затем продолжим её на весь K. Отображение $\sigma'\colon K \to X$ задаёт новую 2-цепь $\sum_i \sigma'_i$, граница которой равна φ, причём все её рёбра τ'_{ij} — петли с началом и концом в x_0.

Так как в правой части соотношения (7) все τ_{ij}, кроме одного, разбиваются на сокращающиеся пары, мы также имеем соотношение $[\varphi] = \prod_{i,j}[\tau'_{ij}]^{(-1)^j}$ в абеленизации $\pi_1(X)_{ab}$. Используя аддитивные обозначения, мы получаем

$$[\varphi] = \sum_{i,j}(-1)^j[\tau'_{ij}] = \sum_i[\partial\sigma'_i] = \sum_i([\tau'_{i0}] - [\tau'_{i1}] + [\tau'_{i2}]).$$

Так как каждый симплекс σ_i задаёт стягивание петли $\tau'_{i0} - \tau'_{i1} + \tau'_{i2}$ (в мультипликативных обозначениях $\tau'_{i0}\bar{\tau}'_{i1}\tau'_{i2}$), мы получаем, что $[\varphi] = 0$ в $\pi_1(X)_{ab}$. □

Пример 4.2. Напомним, что фундаментальная группа ориентируемой поверхности рода g изоморфна факторгруппе свободной группы F_{2g} по одному соотношению, заданному произведением коммутаторов:

$$\pi_1(S_g) \cong \langle\, a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \,|\, a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdot a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} \,\rangle.$$

В результате абеленизации мы получаем свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^{2g} \cong H_1(S_g)$.

4.2. Слабая гомотопическая эквивалентность и клеточная аппроксимация.

Пусть (X, x_0) — пространство с отмеченной точкой. Напомним, что гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ определяется как множество гомотопических классов отображений $f\colon S^n \to X$, переводящих отмеченную точку s_0 сферы S^n в x_0. Эти отображения называются *сфероидами*. Иначе сфероид можно представить как отображение пар $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *слабой гомотопической эквивалентностью*, если индуцированные отображения $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ являются изоморфизмами для любых $n \geqslant 0$ и $x_0 \in X$. Согласно теореме Уайтхеда (см. [Топ1, теорема 9.10]) слабая гомотопическая эквивалентность клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью.

Мы могли бы назвать пространства X, Y слабо гомотопически эквивалентными, если между ними существует слабая гомотопическая эквивалентность $f\colon X \to Y$. Это отношение, очевидно, рефлексивно и транзитивно, но оно не является симметричным: из существования слабой гомотопической эквивалентности $f\colon X \to Y$ не следует существование слабой гомотопической эквивалентности $g\colon Y \to X$. (Пример: любое взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ непрерывно и является слабой гомотопической эквивалентностью, но непрерывного взаимно однозначного отображения $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ не существует.) Поэтому слабая гомотопическая эквивалентность пространств определяется как отношение эквивалентности, порождённое отображениями — слабыми гомотопическими эквивалентностями. Таким образом, пространства X и Y *слабо гомотопически эквивалентны* (обозначение: $X \simeq_w Y$), если между ними существует последовательность («зигзаг») отображений

$$X \leftarrow Z_1 \to Z_2 \leftarrow \ldots \leftarrow Z_k \to Y,$$

в которой все стрелки являются слабыми гомотопическими эквивалентностями.

Слабая гомотопическая эквивалентность $f\colon Z \to X$, где Z — клеточное пространство, называется *клеточной аппроксимацией* пространства X.

Теорема 4.3. *Для любого пространства X существуют клеточное пространство Z и слабая гомотопическая эквивалентность $f\colon Z \to X$.*

Доказательство. Можно ограничиться случаем линейно связного пространства X; в противном случае построение ниже нужно провести для каждой компоненты линейной связности. Мы построим по индукции цепочку вложенных клеточных пространств $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots$ и такую систему продолжающих друг друга отображений $f_k\colon Z_k \to X$, что $(f_k)_*\colon \pi_i(Z_k) \to \pi_i(X)$ — мономорфизм при $i < k$ и эпиморфизм при $i \leqslant k$. Индукция начинается с $k = 0$ и $Z_0 = pt$.

Предположим теперь, что клеточное пространство Z_k уже построено, и опишем процедуру построения Z_{k+1}.

Отображение $(f_k)_*\colon \pi_k(Z_k) \to \pi_k(X)$ сюръективно, но, возможно, не инъективно. Выберем клеточные отображения $g_\alpha\colon S^k \to Z_k$, представляющие образующие ядра отображения $(f_k)_*$. Приклеим клетки e_α^{k+1} к Z_k посредством этих отображений g_α и обозначим полученное клеточное пространство Z'_{k+1}. Так как композиция $f_k g_\alpha$ гомотопна нулю для любого α, отображение f_k продолжается до отображения $f'_{k+1}\colon Z'_{k+1} \to X$:

$$\begin{tikzcd}
S^k \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d] & Z_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d] & X \\
D^{k+1} \arrow[r] & Z_k \cup_{g_\alpha} D^{k+1} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Тогда $(f'_{k+1})_*\colon \pi_i(Z'_{k+1}) \to \pi_i(X)$ — мономорфизм при $i < k$ по теореме о клеточной аппроксимации: приклеивание $(k+1)$-мерных клеток к Z_k не меняет группы π_i с $i < k$, а $\pi_i(Z_k) \to \pi_i(X)$ — мономорфизм при $i < k$. Кроме того, $(f'_{k+1})_*\colon \pi_k(Z'_{k+1}) \to \pi_k(X)$ также мономорфизм, так как любой сфероид $S^k \to Z'_{k+1}$, представляющий элемент ядра этого гомоморфизма, гомотопен клеточному отображению, т. е. отображению, образ которого лежит в Z_k, а все такие отображения гомотопны нулю в Z'_{k+1} по построению.

Теперь выберем отображения $h_\beta\colon S_\beta^{k+1} \to X$, порождающие группу $\pi_{k+1}(X)$, и положим $Z_{k+1} = Z'_{k+1} \vee (\bigvee_\beta S_\beta^{k+1})$. Отображения f'_{k+1} и h_β задают отображение $f_{k+1}\colon Z_{k+1} \to X$. Тогда $(f_{k+1})_*\colon \pi_{k+1}(Z_{k+1}) \to \pi_{k+1}(X)$ — эпиморфизм по построению. Кроме того, $(f_{k+1})_*\colon \pi_i(Z_{k+1}) \to \pi_i(X)$ — эпиморфизм при $i \leqslant k$, так как композиция

$$\pi_i(Z_k) \longrightarrow \pi_i(Z'_{k+1}) \longrightarrow \pi_i(Z_{k+1}) \overset{(f_{k+1})_*}{\longrightarrow} \pi_i(X)$$

совпадает с $(f_k)_*$, которое является эпиморфизмом при $i \leqslant k$ по предположению индукции. Наконец, покажем, что $(f_{k+1})_*\colon \pi_i(Z_{k+1}) \to \pi_i(X)$ — мономорфизм при $i \leqslant k$. Пусть $\varphi \in \operatorname{Ker}\bigl((f_{k+1})_*\colon \pi_i(Z_{k+1}) \to \pi_i(X)\bigr)$, $i \leqslant k$, и $j\colon Z'_{k+1} \to Z_{k+1}$ — вложение. Так как Z_{k+1} получается из Z'_{k+1} приклеиванием $(k+1)$-мерных клеток, из теоремы о клеточной аппроксимации следует, что $\varphi = j_*\psi$ для некоторого $\psi \in \pi_i(Z'_{k+1})$. Тогда $0 = (f_{k+1})_*\varphi = (f_{k+1})_* j_*\psi = (f'_{k+1})_*\psi$. Так как $(f'_{k+1})_*$ — мономорфизм (см. предыдущий абзац), получаем $\psi = 0$. Следовательно, $\varphi = j_*\psi = 0$ и шаг индукции завершён.

Для завершения доказательства положим $Z = \bigcup_k Z_k$, а отображение $f\colon Z \to X$ определим условием $f|_{Z_k} = f_k$. □

4.3. **Теорема Фрейденталя о надстройке.** Пусть (X, A) — пара пространств с отмеченной точкой $x_0 \in A$. Напомним, что относительная гомотопическая группа $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 1$, определяется как множество гомотопических классов отображений пар $f\colon (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$, переводящих отмеченную точку $s_0 \in S^{n-1} = \partial D^n$ в x_0 (такие отображения называются *относительными сфероидами*). На кубическом языке относительный сфероид — это отображение $f\colon (I^n, \partial I^n, \partial I^n \backslash I^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, где грань $I^{n-1} \subset I^n$ задаётся уравнением $t_n = 0$.

В общем случае для гомотопических групп $\pi_i(X, A)$ не выполняется свойство вырезания (отсутствуют аналоги теорем 2.11 и 2.12, см. задачу 4.22). Однако это свойство имеет место в некотором диапазоне размерностей i, который зависит от степени связности пары (X, A). Стандартные следствия из свойства вырезания, такие как изоморфизм $\pi_i(X, A) \cong \pi_i(X/A)$ для клеточных пар и изоморфизм надстройки $\pi_i(X) \cong \pi_{i+1}(\varSigma X)$, также имеют место лишь в некотором диапазоне размерностей.

Напомним, что пространство X называется *n-связным*, если $\pi_i(X, x_0) = 0$ при $i \leqslant n$ для всех $x_0 \in X$ (заметим, что $\pi_0(X, x_0)$ — это множество компонент линейной связности, так что 0-связность — это линейная связность). Пара (X, A) называется *n-связной*, если $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ при $i \leqslant n$ для всех $x_0 \in A$ и каждая компонента линейной связности пространства X содержит точки из A (множество $\pi_0(X, A, x_0)$ не определено, так что при $n = 0$ остаётся лишь второе условие). Заметим, что пространство X является n-связным тогда и только тогда, когда пара (X, x_0) является n-связной для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) точки $x_0 \in X$.

Пример 4.4. Пусть (Z, A) — клеточная пара, причём Z получено из A приклеиванием клеток размерности $> n$. Тогда (Z, A) — n-связная пара; это следует из теоремы о клеточной аппроксимации. Несложная модификация рассуждения из доказательства теоремы 4.3 показывает, что любая n-связная клеточная пара имеет такой вид с точностью до гомотопической эквивалентности (см. задачу 4.23).

Теорема 4.5 (свойство вырезания для гомотопических групп)**.** *Пусть $X = A \cup B$, где X — клеточное пространство, A и B — его клеточные подпространства и $C = A \cap B$ связно и непусто. Предположим, что пара (A, C) является m-связной, а пара (B, C) является n-связной. Тогда отображение $\pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$, индуцированное включением, является изоморфизмом при $i < m+n$ и эпиморфизмом при $i = m+n$.*

Прежде чем доказывать свойство вырезания, сформулируем и докажем его важнейшее следствие, известное как теорема Фрейденталя или теорема о надстройке.

Рассмотрим сфероид $f\colon S^n \to X$, представляющий элемент гомотопической группы $\pi_n(X)$. Для каждого такого сфероида рассмотрим отображение надстроек

$\Sigma f\colon \Sigma S^n = S^{n+1} \to \Sigma X$, которое является $(n+1)$-мерным сфероидом пространства ΣX. Если сфероиды $f, g\colon S^n \to X$ гомотопны, то гомотопны и сфероиды $\Sigma f, \Sigma g\colon S^{n+1} \to \Sigma X$. Кроме того, сфероид $\Sigma(f+g)$ гомотопен сфероиду $\Sigma f + \Sigma g$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм $\Sigma\colon \pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X)$, который называется *гомоморфизмом надстройки*.

Теорема 4.6 (Фрейденталь). *Пусть X — $(n-1)$-связное клеточное пространство. Тогда гомоморфизм надстройки $\Sigma\colon \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$ является изоморфизмом при $i < 2n-1$ и эпиморфизмом при $i = 2n-1$.*

Доказательство. Мы имеем $\Sigma X = C_+X \cup C_-X$, где C_+X и C_-X — «верхний» и «нижний» конусы над X, а $C_+X \cap C_-X = X$. Гомоморфизм надстройки можно представить в виде композиции

$$\pi_i(X) \cong \pi_{i+1}(C_+X, X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X, C_-X) \cong \pi_{i+1}(\Sigma X),$$

где оба изоморфизма получаются из точных последовательностей пар, а среднее отображение индуцировано включением. Так как X является $(n-1)$-связным, пара $(C_\pm X, X)$ является n-связной. Тогда из теоремы 4.5 вытекает, что $\pi_{i+1}(C_+X, X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X, C_-X)$ — изоморфизм при $i+1 < 2n$ и эпиморфизм при $i+1 = 2n$. ☐

Теорема 4.7 (Хопф). *Группа $\pi_n(S^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождается гомотопическим классом тождественного отображения $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$. В частности, отображение $\pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$, сопоставляющее каждому отображению его степень, является изоморфизмом.*

Доказательство. Из теоремы Фрейденталя вытекает, что в последовательности гомоморфизмов надстройки

$$\pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2) \to \pi_3(S^3) \to \dots$$

первое отображение — эпиморфизм, а все последующие — изоморфизмы. Из точной гомотопической последовательности расслоения Хопфа $S^1 \to S^3 \to S^2$ следует изоморфизм $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$, так что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ при $n \geqslant 1$. ☐

Пример 4.8. Рассмотрим следующий фрагмент гомотопической последовательности расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ со слоем S^1:

$$\dots \to \pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to \dots$$

Так как $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = 0$ и $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$, мы получаем $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

4.4. **Доказательство теоремы вырезания.** Доказательство основано на использовании «соображения общего положения».

Доказательство теоремы 4.5. Мы последовательно рассмотрим несколько всё более общих случаев. Первый случай включает классическое доказательство теоремы Фрейденталя.

Случай 1. Подпространство A получено из C приклеиванием клеток e^{m+1}_α, а B получено из C приклеиванием одной клетки e^{n+1}.

Для доказательства сюръективности гомоморфизма $\pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ при $i \leqslant m+n$ рассмотрим относительный сфероид $f\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$, представляющий некоторый элемент из $\pi_i(X, B)$. Образ f компактен, а потому пересекает лишь конечное число клеток e^{m+1}_α и e^{n+1}. Выберем точки $p_\alpha \in e^{m+1}_\alpha$ и $q \in e^{n+1}$.

Назовём *полиэдром* размерности $\leqslant k$ объединение конечного числа выпуклых многогранников размерности $\leqslant k$. Докажем две леммы.

Лемма 4.9. *Существует такое отображение* $g\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$, *гомотопное* f *в классе отображений пар (и сколь угодно близкое к* f*), что* $g^{-1}(p_\alpha)$ *— полиэдр размерности* $\leqslant i-m-1$ *для любого* α, *а* $g^{-1}(q)$ *— полиэдр размерности* $\leqslant i-n-1$.

Доказательство. В основе доказательства этой леммы лежит конструкция кусочно-линейной аппроксимации, уже известная нам по доказательству «леммы о свободной точке» [Топ1, лемма 4.11]. Напомним основные шаги этой конструкции.

1) Окружим каждую из точек p_α, q пятью малыми концентрическими шарами: $p_\alpha \in B_1^{(\alpha)} \subset \ldots \subset B_5^{(\alpha)}$, $q \in B_1 \subset \ldots \subset B_5$.
2) Выберем в D^i (компактный) многогранник, содержащий $f^{-1}\bigl(B_5 \cup \bigcup_\alpha B_5^{(\alpha)}\bigr)$.
3) Триангулируем этот многогранник настолько мелко, что если f-образ симплекса задевает $B_i^{(\alpha)}$, то он содержится в $B_{i+1}^{(\alpha)}$, и то же для B_i и B_{i+1}.
4) Обозначим через K объединение симплексов, f-образы которых пересекаются с $B_4 \cup \bigcup_\alpha B_4^{(\alpha)}$.
5) Подправим отображение f на K, заменив его отображением g', совпадающим с f на вершинах триангуляции и линейным на каждом симплексе.
6) «Сошьём» g' с f, т. е. построим отображение g, совпадающее с f вне множества $f^{-1}\bigl(B_3 \cup \bigcup_\alpha B_3^{(\alpha)}\bigr)$ и с g' в $f^{-1}\bigl(B_2 \cup \bigcup_\alpha B_2^{(\alpha)}\bigr)$ и такое, что g-образ дополнения к $f^{-1}\bigl(B_2 \cup \bigcup_\alpha B_2^{(\alpha)}\bigr)$ не задевает $B_1 \cup \bigcup_\alpha B_1^{(\alpha)}$ (это сшивание описано в конце доказательства леммы 4.11 из [Топ1]).

Итак, мы аппроксимировали отображение f отображением g с таким свойством: прообраз окрестности каждой из точек p_α, q покрывается конечным числом симплексов Δ^i, на каждом из которых отображение линейно. Мы можем считать, что если $p_\alpha \in g(\Delta^i)$, то $\dim g(\Delta^i) = m+1$ (т. е. $\dim g(\Delta^i)$ не меньше $m+1$; иначе сдвинем p_α с «запрещённого» множества при помощи гомеоморфизма шара $\operatorname{int} D^{m+1} \cong e_\alpha^{m+1}$, близкого к тождественному). Аналогично если $q \in g(\Delta^i)$, то $\dim g(\Delta^i) = n+1$. Поскольку прообраз точки при линейном отображении $g\colon \Delta^i \to \mathbb{R}^{m+1}$, имеющем $(m+1)$-мерный образ, есть выпуклый многогранник размерности $\leqslant i-m-1$, отображение g удовлетворяет требованиям леммы. $\square$

Следующая лемма формализует понятие «общего положения», используемое в доказательстве теоремы.

Лемма 4.10. *Пусть* $K, L \subset \mathbb{R}^p$ *— полиэдры размерностей* $\leqslant k$ *и* $\leqslant l$ *соответственно. Если* $k+l+1 < p$, *то* K *и* L *не зацеплены. Это означает, что существует такая изотопия (гомотопия тождественного отображения, состоящая из гомеоморфизмов)* $f_t\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, *что* $f_1(K)$ *и* $f_1(L)$ *разделяются в* $\mathbb{R}^p$ *гиперплоскостью.*

Доказательство. Выберем такую гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^p$, что $H \cap K = \varnothing$. Докажем, что существует такая точка $x \in \mathbb{R}^p$, что x и K лежат по разные стороны от H и никакая прямая, проходящая через x, не пересекает одновременно K и L. Полиэдр K лежит в объединении плоскостей $K_1, \ldots, K_p$ размерности $\leqslant k$, а полиэдр L лежит в объединении плоскостей $L_1, \ldots, L_q$ размерности $\leqslant l$. Пусть P_{ij} — минимальная плоскость, содержащая K_i и L_j; тогда $\dim P_{ij} \leqslant \dim K_i + \dim L_j + 1 \leqslant k+l+1 < p$. В качестве x можно взять любую точку в полупространстве, не содержащем K, не лежащую в объединении плоскостей P_{ij}. Теперь необходимую изотопию пространства $\mathbb{R}^p$ построим следующим образом. Каждая точка $y \in \mathbb{R}^p$ движется прямолинейно по направлению к x, причём скорость пропорциональна расстоянию от y до x, а коэффициент пропорциональности свой на каждом луче, выходящем из x, равен нулю на лучах, пересекающих K, и положителен на лучах, пересекающих L. ☐

Теперь завершим доказательство случая 1 теоремы вырезания. Рассмотрим отображение $g\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$, построенное в лемме 4.9, так что $g^{-1}(p_\alpha)$ — полиэдр размерности $\leqslant i-m-1$, а $g^{-1}(q)$ — полиэдр размерности $\leqslant i-n-1$. Так как

$$(i-m-1)+(i-n-1)+1 = 2i-(m+n)-1 \leqslant i-1 < i,$$

мы можем применить лемму 4.10, т. е. можно считать, что полиэдры $g^{-1}(\bigcup_\alpha p_\alpha)$ и $g^{-1}(q)$ разделены в D^i гиперплоскостью (см. рис. 4.4).

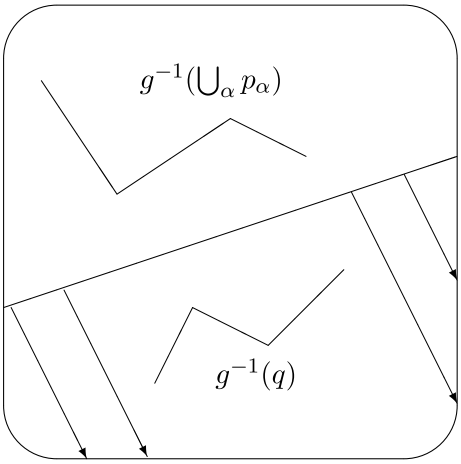


Рис. 6.

Пусть теперь $g_t\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$ — гомотопия отображения $g = g_0$, при которой полупространство шара D^i, содержащее $g^{-1}(\bigcup_\alpha p_\alpha)$, постепенно растягивается на весь шар, а полупространство, содержащее $g^{-1}(q)$, постепенно стягивается на границу шара (см. рис. 4.4). Тогда $g_t(S^{i-1})$ не пересекается с $\bigcup_\alpha p_\alpha$ для любого t, а $g_1(D^i)$ не пересекается с q. Это означает, что в коммутативной диаграмме

(8)
$$\begin{tikzcd}
\pi_i(A, C) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_i(X, B) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_i(X \setminus \{q\}, X \setminus \{q\} \cup \bigcup_\alpha \{p_\alpha\}) \arrow[r] & \pi_i(X, X \setminus \bigcup_\alpha \{p_\alpha\})
\end{tikzcd}$$

элемент $[f] \in \pi_i(X, B)$, рассматриваемый как элемент группы $\pi_i(X, X \setminus \bigcup_\alpha \{p_\alpha\})$, равен элементу $[g_1] \in \pi_i(X \setminus \{q\}, X \setminus \{q\} \cup \bigcup_\alpha \{p_\alpha\}) \cong \pi_i(A, C)$. Тем самым сюръективность гомоморфизма $e\colon \pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ при $i \leqslant m+n$ доказана.

Теперь докажем инъективность гомоморфизма e при $i < m+n$. Пусть два относительных сфероида $f_0, f_1\colon (D^i, S^{i-1}) \to (A, C)$ таковы, что $e([f_0]) = e([f_1]) \in \pi_i(X, B)$. Тогда существует гомотопия $F\colon (D^i, S^{i-1}) \times I \to (X, B)$ между ef_0 и ef_1. Применив леммы 4.9 и 4.10 к F и $D^i \times I \cong D^{i+1}$, мы можем считать, что $F^{-1}(\bigcup_\alpha p_\alpha)$ — полиэдр размерности $\leqslant i-m$ и $F^{-1}(q)$ — полиэдр размерности $\leqslant i-n$, причём эти два полиэдра разделены в $D^i \times I \cong D^{i+1}$ гиперплоскостью (ограничение на размерности выполнено, так как $i - m + i - n + 1 = 2i - (m+n) + 1 < i + 1$). Как и выше, из рассмотрения диаграммы (8) вытекает, что F поднимается с точностью до гомотопии до отображения $(D^i, S^{i-1}) \times I \to (A, C)$, т. е. $[f_0] = [f_1]$ в $\pi_i(A, C)$.

Случай 2. Подпространство A получено из C приклеиванием клеток e_α^{m+1}, как в случае 1, а B получено из C приклеиванием клеток размерности $\geqslant n + 1$. Чтобы доказать, что $e\colon \pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ — эпиморфизм при $i \leqslant m + n$, рассмотрим сфероид $f\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$. Так как образ f компактен, он пересекает лишь конечное число клеток. Применяя рассуждение из случая 1, мы можем последовательно «сдвинуть» f с каждой клетки из $B \setminus C$ в порядке убывания размерности. Инъективность гомоморфизма e можно доказать аналогично, «сдвигая» образ гомотопии $F\colon (D^i, S^{i-1}) \times I \to (X, B)$ с клеток из $B \setminus C$.

Случай 3. Подпространство A получено из C приклеиванием клеток размерности $\geqslant m+1$, а B получено из C приклеиванием клеток размерности $\geqslant n+1$, как в случае 2. Можно считать, что клетки из $A \setminus C$ имеют размерность $\leqslant m+n+1$, так как клетки более высокой размерности не влияют на $\pi_i(C)$ и $\pi_i(B)$ при $i \leqslant m+n$, и в этом случае мы имеем $\pi_i(A, C) = \pi_i(X, B) = 0$.

Пусть $A_k \subset A$ — объединение C и клеток A размерности $\leqslant k$, и пусть $X_k = A_k \cup B$. Мы докажем результат для отображения $e_k\colon \pi_i(A_k, C) \to \pi_i(X_k, B)$ индукцией по k. База индукции — случай $k = m+1$, т. е. случай 2 выше. Далее рассмотрим диаграмму, образованную точными последовательностями троек (A_k, A_{k-1}, C) и (X_k, X_{k-1}, B):

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(A_k, A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i(A_{k-1}, C) \arrow[r] \arrow[d, "e_{k-1}"] & \pi_i(A_k, C) \arrow[r] \arrow[d, "e_k"] & \pi_i(A_k, A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{i-1}(A_{k-1}, C) \arrow[d, "e_{k-1}"] \\
\pi_{i+1}(X_k, X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_i(X_{k-1}, B) \arrow[r] & \pi_i(X_k, B) \arrow[r] & \pi_i(X_k, X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_{i-1}(X_{k-1}, B)
\end{tikzcd}$$

При $i < m + n$ первая и четвёртая вертикальные стрелки — изоморфизмы согласно случаю 2, а вторая и пятая стрелки — изоморфизмы по предположению индукции. Следовательно, средняя вертикальная стрелка — изоморфизм согласно 5-лемме. При $i = m+n$ вторая и четвёртая вертикальные стрелки — эпиморфизмы, а пятая стрелка — мономорфизм, так что средняя стрелка — эпиморфизм согласно 5-лемме.

Общий случай сводится к случаю 3, так как любая m-связная клеточная пара (A, C) имеет с точностью до гомотопии такой вид, как там описано, и аналогично для (X, B) (это задача 4.23). □

4.5. **Гомотопические группы клеточных пространств.** Вот ещё одно важное следствие теоремы вырезания (сравните с предложением 2.14, выражающим аналогичное свойство групп гомологий).

Предложение 4.11. *Пусть (X, A) — k-связная клеточная пара, а A является l-связным. Тогда гомоморфизм*

$$\pi_i(X, A) \to \pi_i(X/A),$$

индуцированный факторотображением $(X, A) \to (X/A, A/A) = (X/A, pt)$, является изоморфизмом при $i \leqslant k + l$ и эпиморфизмом при $i = k + l + 1$.

Доказательство. Так как (X, A) — k-связная клеточная пара, а (CA, A) — $(l+1)$-связная клеточная пара, гомоморфизм $\pi_i(X, A) \to \pi_i(X \cup CA, CA)$ является изоморфизмом при $i \leqslant k+l$ и эпиморфизмом при $i = k+l+1$ согласно теореме 4.5. С другой стороны, $\pi_i(X \cup CA, CA) \cong \pi_i(X \cup CA) \cong \pi_i(X/A)$, где первый изоморфизм вытекает из точной последовательности пары $(X \cup CA, CA)$ со стягиваемым CA, а второй изоморфизм следует из гомотопической эквивалентности $X \cup CA \simeq X/A$. □

Предложение 4.12. *При $n \geqslant 2$ группа $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ — свободная абелева группа, порождённая гомотопическими классами включений $S^n_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha S^n_\alpha$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай конечного букета. Тогда $\bigvee_\alpha S^n_\alpha$ есть n-мерный остов произведения сфер $\prod_\alpha S^n_\alpha$ со стандартной клеточной структурой. Так как в $\prod_\alpha S^n_\alpha$ размерности всех клеток кратны n, пара $(\prod_\alpha S^n_\alpha, \bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ является $(2n-1)$-связной, т. е. $\pi_i(\prod_\alpha S^n_\alpha, \bigvee_\alpha S^n_\alpha) = 0$ при $i \leqslant 2n-1$. Из точной последовательности пары получаем, что $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \to \pi_n(\prod_\alpha S^n_\alpha) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ — изоморфизм при $n \geqslant 2$.

В случае бесконечного букета рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\varPhi\colon \bigoplus_\alpha \pi_n(S^n_\alpha) \to \pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha).$$

Тогда $\varPhi$ является эпиморфизмом, так как образ любого сфероида $f\colon S^n \to \bigvee_\alpha S^n_\alpha$ содержится в конечном букете, поэтому $[f]$ лежит в образе $\varPhi$ согласно конечному случаю. Аналогично $\varPhi$ является мономорфизмом, так как гомотопия между f и отображением в точку также имеет образ, содержащийся в конечном букете, а для конечных букетов $\varPhi$ — мономорфизм. □

Следующее утверждение является многомерным аналогом теоремы, описывающей фундаментальную группу клеточного пространства (см. [Топ1, теорема 6.7]).

Предложение 4.13. *Пусть пространство X получено из букета сфер $\bigvee_\alpha S^n_\alpha$, $n \geqslant 2$, приклеиванием клеток e^{n+1}_β по отображениям $\varphi_\beta\colon S^n \to \bigvee_\alpha S^n_\alpha$. Тогда $\pi_n(X)$ — факторгруппа свободной абелевой группы $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ по подгруппе, порождённой классами $[\varphi_\beta]$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность пары $(X, \bigvee_\alpha S^n_\alpha)$:

$$\pi_{n+1}(X, \bigvee_\alpha S^n_\alpha) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow 0.$$

Таким образом, $\pi_n(X)$ — факторгруппа группы $\pi_n(\bigvee_\alpha S^n_\alpha)$ по образу гомоморфизма ∂. Мы имеем $X/\bigvee_\alpha S^n_\alpha \simeq \bigvee_\beta S^{n+1}_\beta$. Из предложения 4.11 следует, что $\pi_{n+1}(X, \bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cong \pi_{n+1}(X/\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cong \pi_{n+1}(\bigvee_\beta S^{n+1}_\beta)$ — свободная абелева группа, порождённая характеристическими отображениями клеток e^{n+1}_β. Граничное отображение ∂ переводит их в классы $[\varphi_\beta]$, что и требуется. □

4.6. **Стабильные гомотопические группы.**

Предложение 4.14. *k-кратная надстройка $\varSigma^k X$ над любым клеточным пространством X является $(k-1)$-связной.*

Доказательство. Проведём индукцию по k. При $k = 1$ утверждается, что $\varSigma X$ линейно связно, что очевидно. Предположим, что $Y = \varSigma^k X$ является $(k-1)$-связным, т. е. $\pi_i(Y) = 0$ при $i < k$. Согласно теореме 4.6 гомоморфизм надстройки $\pi_i(Y) \to \pi_{i+1}(\varSigma Y)$ является изоморфизмом при $i < 2k-1$. В частности,

$\pi_{i+1}(\Sigma^{k+1}X) = \pi_{i+1}(\Sigma Y) \cong \pi_i(Y) = 0$ при $i < k$ (так как $k \leqslant 2k-1$). Это означает, что $\Sigma^{k+1}X$ является k-связным. □

В последовательности гомоморфизмов надстройки

$$\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X) \to \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \to \ldots,$$

начиная с некоторого момента, все гомоморфизмы становятся изоморфизмами. А именно, так как $\Sigma^k X$ является $(k-1)$-связным, $\pi_{i+k}(\Sigma^k X) \to \pi_{i+k+1}(\Sigma^{k+1}X)$ будет изоморфизмом при $i + k < 2(k-1) + 1$, т. е. при $k > i + 1$.

Группа $\pi_{i+k}(\Sigma^k X)$ при $k > i+1$ называется *стабильной гомотопической группой* клеточного пространства X и обозначается $\pi_i^s(X)$.

При $X = S^0$ мы получаем группу $\pi_{i+k}(S^k)$, $k > i+1$, которая называется *i-й стабильной гомотопической группой сфер* и обозначается просто π_i^s. Например, $\pi_0^s = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, $\pi_1^s = \pi_4(S^3)$, $\pi_2^s = \pi_6(S^4)$ и т. д.

Вычисление стабильных гомотопических групп сфер — классическая проблема гомотопической топологии, которая не решена до сих пор.

4.7. **Произведение Уайтхеда и произведение Самельсона.** Рассмотрим приклеивающее отображение $w\colon S^{k+l-1} \to S^k \vee S^l$ для $(k+l)$-клетки произведения сфер $S^k \times S^l$ со стандартной клеточной структурой (с 4 клетками). В явном виде отображение w описано в задаче 4.33.

Произведением Уайтхеда сфероидов $f\colon S^k \to X$ и $g\colon S^l \to X$ называется сфероид, задаваемый композицией

$$[f,g]_w\colon S^{k+l-1} \xrightarrow{w} S^k \vee S^l \xrightarrow{f\vee g} X.$$

Мы получаем корректно определённый гомоморфизм

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_w\colon \pi_k(X) \times \pi_l(X) \to \pi_{k+l-1}(X),$$

который также называется произведением Уайтхеда. При $k = l = 1$ произведение Уайтхеда — это коммутатор в группе $\pi_1(X)$, т. е. $[f,g]_w = fgf^{-1}g^{-1}$.

Мы имеем $[f,g]_w = 0$ в группе $\pi_{k+l-1}(X)$ тогда и только тогда, когда отображение $f \vee g\colon S^k \vee S^l \to X$ продолжается до отображения $S^k \times S^l \to X$.

Произведение Уайтхеда обладает следующими свойствами:

а) для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta, \gamma \in \pi_l(X)$, $l > 1$, имеем

$$[\alpha, \beta+\gamma]_w = [\alpha,\beta]_w + [\alpha,\gamma]_w;$$

б) для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$, $k, l > 1$, имеем

$$[\alpha,\beta]_w = (-1)^{kl}[\beta,\alpha]_w;$$

в) для $\alpha \in \pi_k(X)$, $\beta \in \pi_l(X)$ и $\gamma \in \pi_m(X)$, $k, l, m > 1$, имеем

$$(-1)^{km}[[\alpha,\beta]_w,\gamma]_w + (-1)^{lk}[[\beta,\gamma]_w,\alpha]_w + (-1)^{ml}[[\gamma,\alpha]_w,\beta]_w = 0.$$

Доказательство свойств а) и б) — задачи. Доказать свойство в) непосредственно сложнее. Имеется непрямой способ доказательства, использующий произведения Самельсона и Понтрягина, который также будет изложен в виде задач.

При $k = 1$ свойство а) даёт линейное отображение $\pi_1(X) \times \pi_l(X) \to \pi_l(X)$, $l > 1$, которое называется *действием фундаментальной группы на высших гомотопических группах.*

Теперь рассмотрим пространство петель ΩX. Операция коммутирования петель $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ индуцирует отображение $c\colon \Omega X \wedge \Omega X \to \Omega X$. (Если быть точным, это отображение определено лишь с точностью до гомотопии, так как петли у нас имеют фиксированную длину. Этого можно избежать, рассматривая петли переменной длины, так называемые *петли Мура*.)

Произведением Самельсона сфероидов $f\colon S^p \to \Omega X$ и $g\colon S^q \to \Omega X$ называется сфероид

$$[f, g]_s\colon S^{p+q} = S^p \wedge S^q \xrightarrow{f\wedge g} \Omega X \wedge \Omega X \xrightarrow{c} \Omega X.$$

Это задаёт корректно определённое произведение

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_s\colon \pi_p(\Omega X) \times \pi_q(\Omega X) \to \pi_{p+q}(\Omega X),$$

которое также называется произведением Самельсона.

Можно доказать, что при подходящем выборе изоморфизма $t\colon \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$ произведения Уайтхеда и Самельсона связаны соотношением

$$t[\alpha, \beta]_w = (-1)^{k-1}[t\alpha, t\beta]_s$$

для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. С учётом этого соотношения свойства а)–в) произведения Уайтхеда переходят в следующие свойства произведения Самельсона:

а) для $\varphi \in \pi_p(\Omega X)$ и $\psi, \eta \in \pi_q(\Omega X)$ имеем

$$[\varphi, \psi + \eta]_s = [\varphi, \psi]_s + [\varphi, \eta]_s;$$

б) для $\varphi \in \pi_p(\Omega X)$ и $\psi \in \pi_q(\Omega X)$ имеем

$$[\varphi, \psi]_s = -(-1)^{pq}[\psi, \varphi]_s;$$

в) для $\varphi \in \pi_p(\Omega X)$, $\psi \in \pi_q(\Omega X)$ и $\eta \in \pi_r(\Omega X)$ имеем

$$[\varphi, [\psi, \eta]_s]_s = [[\varphi, \psi]_s, \eta]_s + (-1)^{pq}[\psi, [\varphi, \eta]_s]_s.$$

Эти три свойства называются *билинейностью*, *градуированной антикоммутативностью* и *градуированным тождеством Якоби* соответственно. Градуированное векторное пространство V, на котором введена операция $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon V \times V \to V$, обладающая этими трёмя свойствами, называется *градуированной алгеброй Ли*. Таким образом, произведение Самельсона превращает векторное пространство $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ (*рациональные гомотопические группы*) в градуированную алгебру Ли, которая называется *рациональной гомотопической алгеброй Ли* пространства X.

4.8. **Гомоморфизм Гуревича, теорема Гуревича и теорема Уайтхеда.** *Отображение Гуревича* $h\colon \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ определяется следующим образом. Пусть элемент $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ представлен сфероидом $f\colon (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ и пусть $\alpha \in H_n(S^n)$ — фиксированная образующая группы $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Тогда положим $h([f]) = f_*(\alpha)$, где $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(X)$ — индуцированный гомоморфизм в гомологиях. Отображение h определено корректно, так как гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы в гомологиях.

Относительное отображение Гуревича $h\colon \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ определяется по формуле $h([f]) = f_*(\alpha)$, где $f\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ и $\alpha \in H_n(D^n, S^{n-1})$ — фиксированная образующая группы $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$.

Предложение 4.15. *Отображение Гуревича $h\colon \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ является гомоморфизмом при $n \geqslant 1$. Относительное отображение Гуревича $h\colon \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ является гомоморфизмом при $n > 1$.*

Доказательство. Мы уже доказали, что $h\colon \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ — гомоморфизм, в теореме 4.1. Так что нужно доказать лишь утверждение об относительном отображении Гуревича.

Пусть $f,g\colon (D^n,S^{n-1})\to(X,A)$ — относительные сфероиды, представляющие элементы группы $\pi_n(X,A)$. Нам надо проверить, что $(f+g)_*=f_*+g_*$, где $+$ в левой части означает сумму сфероидов, а звёздочка означает индуцированный гомоморфизм в гомологиях. Тогда мы получим

$$h([f+g])=(f+g)_*(\alpha)=f_*(\alpha)+g_*(\alpha)=h([f])+h([g]),$$

что и требуется.

Пусть $c\colon D^n\to D^n\vee D^n$ — отображение, стягивающее экватор D^{n-1} в точку, и $q_1,q_2\colon D^n\vee D^n\to D^n$ — отображения, тождественное на одном слагаемом букета и стягивающие другое слагаемое в точку. Тогда по определению суммы сфероидов

$$f+g=(f\vee g)c\colon (D^n,S^{n-1})\to(D^n\vee D^n,S^{n-1}\vee S^{n-1})\to(X,A).$$

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n,S^{n-1}) \arrow[r, "c_*"] \arrow[dr, "\Delta"'] & H_n(D^n\vee D^n,S^{n-1}\vee S^{n-1}) \arrow[r, "(f\vee g)_*"] \arrow[d, "q_{1*}\oplus q_{2*}"', "\cong"] & H_n(X,A) \\
& H_n(D^n,S^{n-1})\oplus H_n(D^n,S^{n-1}) \arrow[ur, "f_*+g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Отображение $q_{1*}\oplus q_{2*}$ — изоморфизм, так как его обратный есть $i_{1*}+i_{2*}$, где $i_1,i_2\colon D_n\hookrightarrow D^n\vee D^n$ — включения слагаемых в букет. Так как отображения $q_1c,q_2c\colon (D^n,S^{n-1})\to(D^n,S^{n-1})$ гомотопны тождественному, $(q_{1*}\oplus q_{2*})c_*=\Delta$ — диагональное отображение $\alpha\mapsto(\alpha,\alpha)$. Так как $(f\vee g)i_1=f$ и $(f\vee g)i_2=g$, имеем

$$(f\vee g)_*(i_{1*}+i_{2*})(\alpha,0)=f_*(\alpha),\quad (f\vee g)_*(i_{1*}+i_{2*})(0,\alpha)=g_*(\alpha).$$

Следовательно,

$$(f\vee g)_*c_*(\alpha)=(f\vee g)_*(i_{1*}+i_{2*})(q_{1*}\oplus q_{2*})c_*(\alpha)=(f\vee g)_*(i_{1*}+i_{2*})(\alpha,\alpha)=(f_*+g_*)(\alpha).$$

С другой стороны, $(f\vee g)_*c_*=(f+g)_*$ (см. выше). ☐

Гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_1(X,x_0)\to H_1(X)$ описан в теореме 4.1.

Теорема 4.16 (Гуревич). *Пусть пространство X является $(n-1)$-связным, $n\geqslant 2$, т. е. $\pi_0(X,x_0)=\pi_1(X,x_0)=\ldots=\pi_{n-1}(X,x_0)=0$. Тогда $H_1(X)=\ldots=H_{n-1}(X)=0$ и $h\colon \pi_n(X,x_0)\to H_n(X)$ — изоморфизм.*

Пусть пара (X,A) является $(n-1)$-связной, $n\geqslant 2$, а пространство A односвязно и непусто. Тогда $H_i(X,A)=0$ при $i<n$ и $h\colon \pi_n(X,A,x_0)\to H_n(X,A)$ — изоморфизм.

Доказательство. Рассмотрев клеточную аппроксимацию, можно считать, что X — клеточное пространство, а (X,A) — клеточная пара. Тогда относительный случай теоремы сводится к абсолютному, так как $\pi_i(X,A)\cong\pi_i(X/A)$ при $i\leqslant n$ согласно предложению 4.11, а $H_i(X,A)\cong\widetilde{H}_i(X/A)$ согласно предложению 2.14.

В абсолютном случае несложное обобщение предложения 6.6 из [Топ1] показывает, что $(n-1)$-связное клеточное пространство X можно заменить на гомотопически эквивалентное пространство с одной 0-мерной клеткой и без клеток размерности $\leqslant n-1$. Поэтому можно считать, что $X^{n-1}=pt$, а значит $\widetilde{H}_i(X)=0$ при $i<n$. Далее,

можно считать, что $X = X^{n+1}$, так как клетки размерности $\geqslant n+2$ не влияют ни на π_n, ни на H_n. Таким образом, X имеет вид $(\bigvee_\alpha S^n_\alpha) \cup (\bigcup_\beta e^{n+1}_\beta)$, как в предложении 4.13.

Тогда гомоморфизмы Гуревича $\pi_{n+1}(X, X^n) \to H_{n+1}(X, X^n)$ и $\pi_n(X^n) \to H_n(X^n)$ — изоморфизмы, так как все входящие в них группы — свободные абелевы, порождённые классами сфер, входящих в букеты. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X, X^n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(X^n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
H_{n+1}(X, X^n) \arrow[r] & H_n(X^n) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Из 5-леммы следует, что $h\colon \pi_n(X) \to H_n(X)$ — изоморфизм. □

Теорема 4.17 (гомологическая теорема Уайтхеда)**.** *Отображение $f\colon X \to Y$ односвязных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда индуцированные отображения $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ являются изоморфизмами для всех n.*

Доказательство. Нужно доказать лишь утверждение «тогда». Заменив f на клеточное отображение, а Y на $(X \times I) \cup_f Y$ (цилиндр отображения f), можно считать, что f — вложение клеточного подпространства, т. е. (Y, X) — клеточная пара.

Так как $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ являются изоморфизмами для всех n, из гомологической последовательности пары следует, что $H_n(Y, X) = 0$ для любого n. Так как X линейно связно, а Y односвязно, из гомотопической последовательности пары следует, что $\pi_1(Y, X) = 0$, т. е. пара (Y, X) односвязна. Так как X односвязно, из относительной теоремы Гуревича следует, что $h\colon \pi_2(Y, X) \to H_2(Y, X) = 0$ — изоморфизм. Следовательно, $\pi_2(Y, X) = 0$, т. е. пара (Y, X) 2-связна. Продолжая по индукции, мы получаем $\pi_n(Y, X) = 0$. Из гомотопической последовательности пары следует, что $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ является изоморфизмом для любого n. Следовательно, f — гомотопическая эквивалентность по теореме Уайтхеда (см. [Топ1, теорема 9.10]). □

Задачи и упражнения.

4.18. Вычислите первую группу гомологий бутылки Клейна как абеленизацию её фундаментальной группы.

4.19. Напомним, что $[X, Y]$ обозначает множество классов гомотопных отображений $X \to Y$. Докажите, что пространства X, Y гомотопически эквивалентны, если для любого Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z. Последнее означает, что для любого отображения $h\colon Z \to Z'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[Z, X]} \arrow[r, "\varphi^Z"] & {[Z, Y]} \\
{[Z', X]} \arrow[r, "\varphi^{Z'}"] \arrow[u, "h^*"] & {[Z', Y]} \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

4.20. Докажите, что пространства X, Y слабо гомотопически эквивалентны, если для любого клеточного пространства Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z.

4.21. Приведите пример слабо гомотопически эквивалентных пространств X, Y, для которых не существует ни слабой гомотопической эквивалентности $f\colon X \to Y$, ни слабой гомотопической эквивалентности $g\colon Y \to X$.

4.22. Пусть D^2_+ и D^2_- — верхняя и нижняя замкнутые полусферы в S^2 и N — северный полюс. Убедитесь, что $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(S^2 \setminus N, D^2_+ \setminus N) = 0$. Аналогично $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(D^2_-, D^2_- \cap D^2_+) = 0$. Таким образом, свойство вырезания не выполнено для $\pi_3(S^2, D^2_+)$.

4.23. Докажите, что для любой n-связной клеточной пары (X, A) существуют клеточное пространство Z, получаемое из A приклеиванием клеток размерности $> n$, и гомотопическая эквивалентность $Z \to X$, неподвижная на A.

4.24. Покажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные группы гомологий.

4.25. Покажите, что пространства $S^m \times \mathbb{R}P^n$ и $S^n \times \mathbb{R}P^m$ имеют одинаковые гомотопические группы, но при $m \neq n$ и $n > 1$ их группы гомологий различны.

4.26. Покажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые группы гомологий, но разные гомотопические группы.

4.27. Вычислите $\pi_n(S^1 \vee S^n)$.

4.28. Докажите, что для любого $n > 0$ и любой группы π, которая должна быть абелевой при $n > 1$, существует клеточное пространство X, для которого $\pi_n(X) = \pi$ и $\pi_i(X) = 0$ при $i \neq n$. Такое пространство X называется *пространством Эйленберга–Маклейна* и обозначается $K(\pi, n)$.

4.29. Докажите, что пространство $K(\pi, n)$ единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

4.30. Убедитесь, что $K(\mathbb{Z}, 1) \simeq S^1$, $K(\mathbb{Z}_2, 1) \simeq \mathbb{R}P^\infty$, $K(\mathbb{Z}, 2) \simeq \mathbb{C}P^\infty$, а также что все двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами типа $K(\pi, 1)$.

4.31. Пусть X — связное клеточное пространство. Докажите, что существует коммутативная диаграмма пространств и отображений

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] \\
& X_3 \arrow[d] \\
& X_2 \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_1,
\end{tikzcd}$$

в которой каждое отображение $X \to X_n$ индуцирует изоморфизм групп π_i при $i \leqslant n$, а $\pi_i(X_n) = 0$ при $i > n$. Эта диаграмма называется *башней Постникова* для X.

4.32. Докажите, что гомотопическим слоем отображения $X_n \to X_{n-1}$ в башне Постникова является пространство типа $K(\pi, n)$, где $\pi = \pi_n(X)$.

4.33. Докажите, что приклеивающее отображение $w\colon S^{k+l-1} \to S^k \vee S^l$ для $(k+l)$-клетки произведения $S^k \times S^l$ задаётся композицией

$$S^{k+l-1} = \partial(D^k \times D^l) = D^k \times S^{l-1} \cup_{S^{k-1}\times S^{l-1}} S^{k-1} \times D^l \to S^k \vee S^l,$$

где последнее отображение состоит из двух проекций

$$D^k \times S^{l-1} \to D^k \to D^k/S^{k-1} = S^k \hookrightarrow S^k \vee S^l \quad \text{и}$$
$$S^{k-1} \times D^l \to D^l \to D^l/S^{l-1} = S^l \hookrightarrow S^k \vee S^l$$

и переводит $S^{k-1} \times S^{l-1}$ в отмеченную точку.

4.34. Убедитесь, что произведение Уайтхеда $\pi_1(X) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ — коммутатор.

4.35. Докажите, что для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta, \gamma \in \pi_l(X)$, $l > 1$, имеет место соотношение $[\alpha, \beta+\gamma]_w = [\alpha, \beta]_w + [\alpha, \gamma]_w$.

4.36. Докажите, что для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$, $k, l > 1$, имеет место соотношение $[\alpha, \beta]_w = (-1)^{kl}[\beta, \alpha]_w$.

4.37. Докажите, что при подходящем выборе изоморфизма сопряжения $t\colon \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$ произведения Уайтхеда и Самельсона связаны соотношением

$$t[\alpha, \beta]_w = (-1)^{k-1}[t\alpha, t\beta]_s$$

для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$.

Выведите свойства а)–в) произведения Самельсона (билинейность, градуированную антикоммутативность и градуированное тождество Якоби) из соответствующих свойств произведения Уайтхеда.

4.38. Обозначим через ι_n каноническую образующую группы $\pi_n(S^n)$ и через η_2 — каноническую образующую группы $\pi_3(S^2)$, т. е. класс отображения Хопфа $S^3 \to S^2$. Покажите, что $[\iota_2, \iota_2]_w = 2\eta_2$.

4.39. Пусть $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Докажите, что произведение Уайтхеда $[\alpha, \beta]_w$ лежит в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma\colon \pi_{k+l-1}(X) \to \pi_{k+l}(\Sigma X)$.

В частности, если X — $(n-1)$-связное клеточное пространство, то произведения Уайтхеда $[\alpha, \beta]_w$ классов $\alpha, \beta \in \pi_n(X)$ лежат в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma\colon \pi_{2n-1}(X) \to \pi_{2n}(\Sigma X)$ в «пограничной» размерности, который является эпиморфизмом согласно теореме Фрейденталя. «Трудная часть» теоремы Фрейденталя утверждает, что ядро этого эпиморфизма порождено классами вида $[\alpha, \beta]_w$.

4.40. Докажите, что если X — топологическая группа, то $[\alpha, \beta]_w = 0$ для любых $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Это обобщает тот факт, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.

4.41. Докажите, что $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$ или 0. (Указание: рассмотрите гомоморфизм надстройки $\pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$ и используйте задачи 4.38 и 4.39.) Из «трудной части» теоремы Фрейденталя следует, что $\pi_1^s = \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$.

4.42. Приведите пример $(n-1)$-связной пары (X, A), $n \geqslant 2$, с неодносвязным A, для которой $h\colon \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$ не является изоморфизмом.

4.43. Покажите, что проекция

$$S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) = S^2$$

индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но нетривиальный гомоморфизм в группах гомологий.

4.44. Покажите, что проекция $p\colon S^3 \to S^2$ расслоения Хопфа индуцирует тривиальный гомоморфизм в группах гомологий, но нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.

4.45. Пусть $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Докажите, что произведение Уайтхеда $[\alpha,\beta]_w$ лежит в ядре гомоморфизма Гуревича $h\colon \pi_{k+l-1}(X) \to H_{k+l-1}(X)$.

4.46. Докажите, что если X односвязно и $H_i(X) \cong H_i(S^n)$ для любого n, то $X \simeq S^n$.

4.47. Покажите, что условие односвязности пространств X и Y в теореме 4.17 существенно.

4.48. Приведите пример отображения связных клеточных пространств $f\colon X \to Y$, для которого $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ — изоморфизм и $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ — изоморфизм для любого n, но f не является слабой гомотопической эквивалентностью. (Можно доказать, что такое f будет гомотопической эквивалентностью, если группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ абелевы и тривиально действуют на высших гомотопических группах.)

5. Гомологии с коэффициентами и когомологии

5.1. **Определения и основные свойства.** Напомним, что *тензорное произведение* $G \otimes H$ абелевых групп G и H определяется как факторгруппа свободной абелевой группы с образующими $g\otimes h$, $g \in G$, $h \in H$, по соотношениям $(g+g')\otimes h = g\otimes h + g'\otimes h$ и $g \otimes (h + h') = g \otimes h + g \otimes h'$. Кроме того, определена абелева группа $\mathrm{Hom}(G, H)$, элементами которой являются гомоморфизмы $G \to H$.

Пусть теперь дана фиксированная абелева группа G. Тогда определены соответственно ковариантный и контравариантный функторы

$$-\otimes G\colon H \mapsto H \otimes G, \qquad \mathrm{Hom}(-, G)\colon H \mapsto \mathrm{Hom}(H, G)$$

из абелевых групп в абелевы группы.

Пусть теперь X — топологическое пространство. Применяя функторы $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-, G)$ к группам сингулярных цепей $C_n(X)$, мы получаем группы

$$C_n(X; G) = C_n(X) \otimes G \quad \text{и} \quad C^n(X; G) = \mathrm{Hom}(C_n(X), G),$$

которые называются *группами сингулярных цепей с коэффициентами в* G и *группами сингулярных коцепей с коэффициентами в* G соответственно. В более явном виде сингулярная цепь $a \in C_n(X; G)$ представляет собой линейную комбинацию $a = \sum_i k_i\sigma_i$, где $k_i \in G$ и $\sigma_i\colon \Delta^n \to X$ — сингулярные симплексы. Сингулярная коцепь $c \in C^n(X; G)$ представляет собой функцию на множестве n-мерных сингулярных симплексов пространства X со значениями в группе G. Значение коцепи c на сингулярном симплексе σ обозначается $c(\sigma)$ или $\langle c, \sigma\rangle$.

Применяя $-\otimes G$ и $\mathrm{Hom}(-, G)$ к граничному гомоморфизму $\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, мы получаем граничный гомоморфизм $\partial_n\colon C_n(X; G) \to C_{n-1}(X; G)$,

$$\partial_n\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_n]},$$

где $\sigma\colon \varDelta^n = [v_0, \dots, v_n] \to X$ — сингулярный симплекс, и *кограничный гомоморфизм (дифференциал)* $d_{n-1}\colon C^{n-1}(X;G) \to C^n(X;G)$, задаваемый формулой

$$(d_{n-1}c)(\sigma) = c(\partial_n\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c\bigl(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_n]}\bigr). \tag{9}$$

Мы имеем $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ и $d_n d_{n-1} = 0$. Таким образом, мы получаем цепной комплекс

$$\dots \longrightarrow C_{n+1}(X;G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X;G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X;G) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;G) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

а также *коцепной комплекс*

$$0 \longrightarrow C^0(X;G) \xrightarrow{d_0} \dots \longrightarrow C^{n-1}(X;G) \xrightarrow{d_{n-1}} C^n(X;G) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(X;G) \longrightarrow \dots$$

Группа $H_n(X;G) = \operatorname{Ker}\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ называется n-й *группой сингулярных гомологий пространства* X *с коэффициентами в* G.

Группа $H^n(X;G) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$ называется n-й *группой сингулярных когомологий пространства* X *с коэффициентами в* G. Коцепи из $\operatorname{Ker} d_n$ называются n-мерными *коциклами*, а коцепи из $\operatorname{Im} d_{n-1}$ называются *кограницами*.

Ясно, что $H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n(X)$. Для когомологий $H^n(X;\mathbb{Z})$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ используется сокращённое обозначение $H^n(X)$.

При определении приведённых гомологий $\widetilde{H}_n(X;G)$ мы рассматривали гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon C_0(X;G) \to G$, заданный формулой $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i$. Двойственный гомоморфизм $\varepsilon^*\colon G \to C^0(X;G)$ переводит $g \in G$ в функцию, принимающую постоянное значение g на всех 0-симплексах. Мы получаем *коаугментированный коцепной комплекс*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\varepsilon^*} C^0(X;G) \xrightarrow{d_0} C^1(X;G) \xrightarrow{d_1} C^2(X;G) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии называются *приведёнными группами когомологий* и обозначаются $\widetilde{H}^n(X;G)$. Мы имеем $\widetilde{H}^0 = \operatorname{Ker} d_0 / \operatorname{Im}\varepsilon^* = H^0/\operatorname{Im}\varepsilon^*$ и $\widetilde{H}^n = H^n$, $n \geqslant 1$.

Свойства групп гомологий с коэффициентами полностью аналогичны свойствам обычных групп гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$). Свойства групп когомологий получаются «формальным обращением стрелок». Приведём формулировки утверждений, в которых имеются некоторые отличия; для простоты будем рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Непрерывное отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизмы групп когомологий $f^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$.*

Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то $f^* = g^*$.

Для пары (X, A) группа *относительных коцепей* $C^n(X, A)$ определяется как подгруппа в $C^n(X)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на сингулярных симплексах, образы которых лежат в A. (Напомним, что относительные цепи $C_n(X, A)$ определялись как *факторгруппа* $C_n(X)/C_n(A)$.) Так как d_n переводит $C^n(X, A)$ в $C^{n+1}(X, A)$, группы $C^n(X, A)$ образуют коцепной комплекс, когомологии которого — *относительные когомологии* $H^n(X, A)$.

Теорема 5.2. *Для пары (X, A) имеет место точная последовательность*

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A) \xrightarrow{d} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \longrightarrow \dots$$

Если вложение $i\colon A \hookrightarrow X$ *является корасслоением (например, если* (X, A) *— клеточная пара), то* $H^n(X, A) \cong \widetilde{H}^n(X/A)$.

Кограничный (или *связывающий*) гомоморфизм $d\colon H^{n-1}(A) \to H^n(X, A)$ в точной последовательности пары определяется следующим образом. Пусть класс $[c] \in H^{n-1}(A)$ представлен коциклом $c \in C^{n-1}(A)$. Продолжим c до коцепи $\overline{c} \in C^{n-1}(X)$, положив функцию $\overline{c}$ равной нулю на сингулярных симплексах, которые не лежат в A. Коцепь $d_{n-1}\overline{c} \in C^n(X)$ на самом деле является коциклом в $C^n(X, A)$, так как $d_{n-1}c = 0$. Тогда $d[c] = [d_{n-1}\overline{c}] \in H^n(X, A)$.

Теорема 5.3. *Пусть* (X_α, x_α) *— набор пространств с отмеченными точками, для которых вложения* $x_\alpha \hookrightarrow X_\alpha$ *являются корасслоениями. Тогда*

$$\widetilde{H}^n\Bigl(\bigvee_\alpha X_\alpha\Bigr) \cong \prod_\alpha \widetilde{H}^n(X_\alpha), \quad n \geqslant 0.$$

Как и в случае гомологий, это вытекает из точной последовательности пары $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \{x_\alpha\})$. Отличие (которое проявляется только для бесконечных наборов пространств) в том, что $H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ — прямая сумма, а $H^n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha) = \prod_\alpha H^n(X_\alpha)$ — прямое произведение. Это вытекает из алгебраического факта: $\mathrm{Hom}(\bigoplus_\alpha G_\alpha, H) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}(G_\alpha, H)$.

Для клеточного пространства X можно определить группу *клеточных коцепей* $\mathcal{C}^n(X; G)$ либо как $H^n(X^n, X^{n-1}; G)$, либо как $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G)$, где $\mathcal{C}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$ — группа клеточных цепей. Эти два подхода эквивалентны (задача). Когомологии $\mathcal{H}^n(X; G)$ получаемого коцепного комплекса называются *клеточными когомологиями* пространства X с коэффициентами в G. Тогда $\mathcal{H}^n(X; G) \cong H^n(X; G)$.

Клеточную коцепь $c \in \mathcal{C}^{n-1}(X; G)$ можно представлять себе как такую функцию на $(n-1)$-мерных ориентированных клетках $e^{n-1}_\beta \in X$ со значениями в G, что замена ориентации клетки приводит к изменению знака значения функции. Тогда кограничное отображение $d\colon \mathcal{C}^{n-1}(X; G) \to \mathcal{C}^n(X; G)$ задаётся формулой

$$dc(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} c(e^{n-1}_\beta),$$

где определение чисел $d_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ дано в теореме 3.5.

Пример 5.4. Напомним (см. пример 3.7), что клеточный цепной комплекс для $\mathbb{R}P^n$ имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ чётно;}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad \text{если } n \text{ нечётно.}$$

После применения функторов $- \otimes \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z}_2)$ все гомоморфизмы в получаемом комплексе становятся нулевыми. Поэтому $H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Однако группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ отличаются от групп гомологий $H_k(\mathbb{R}P^n)$ (задача).

5.2. **Коэффициентные точные последовательности.** Рассмотрим короткую точную последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0. \tag{10}$$

Применяя к ней функторы $C_n(X)\otimes -$, получаем короткую точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X;F) \longrightarrow C_\bullet(X;G) \longrightarrow C_\bullet(X;H) \longrightarrow 0$$

(применение функтора $G\otimes -$ не обязательно сохраняет точные последовательности, см. следующий пункт, однако в нашем случае это верно, так как группа $C_n(X)$ свободна). Короткая точная последовательность цепных комплексов приводит к длинной точной последовательности гомологий (см. теорему 2.9)

$$\text{(11)} \qquad \ldots \longrightarrow H_n(X;F) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_n(X;H) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X;F) \longrightarrow \ldots$$

Аналогично, применяя к (10) функторы $\mathrm{Hom}(C_n(X),-)$, получаем короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow C^\bullet(X;F) \longrightarrow C^\bullet(X;G) \longrightarrow C^\bullet(X;H) \longrightarrow 0$$

и длинную точную последовательность когомологий

$$\text{(12)} \qquad \ldots \longrightarrow H^n(X;F) \longrightarrow H^n(X;G) \longrightarrow H^n(X;H) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X;F) \longrightarrow \ldots$$

Последовательности (11) и (12) называются *коэффициентными точными последовательностями.*

Особый интерес представляют короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0.$$

Граничные гомоморфизмы $\widetilde{b}\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X)$ и $b\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_m)$ из соответствующих коэффициентных точных последовательностей, а также кограничные гомоморфизмы $\widetilde{\beta}\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$ и $\beta\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_m)$ называются *гомоморфизмами Бокштейна.*

Гомологический гомоморфизм Бокштейна $\widetilde{b}\colon H_n(X;\mathbb{Z}_m)\to H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ описывается в явном виде следующим образом. Для $\alpha\in H_n(X;\mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $a\in C_n(X;\mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» цепь $a\in C_n(X;\mathbb{Z}_m)$ до цепи $\widetilde{a}\in C_n(X;\mathbb{Z})$, рассматривая коэффициенты-вычеты по модулю m как целые числа. Тогда граница $\partial\widetilde{a}$ делится на m (её приведение по модулю m есть $\partial a=0$). Поделим: $\frac{1}{m}\partial\widetilde{a}$ есть целочисленный цикл, который и представляет класс $\widetilde{b}(\alpha)\in H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$. Его приведение по модулю m есть $b(\alpha)\in H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_m)$.

Когомологический гомоморфизм Бокштейна $\widetilde{\beta}\colon H^n(X;\mathbb{Z}_m)\to H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$ описывается так. Для $\gamma\in H^n(X;\mathbb{Z}_m)$ выберем представителя $c\in C^n(X;\mathbb{Z}_m)$. «Поднимем» коцепь $c\in C^n(X;\mathbb{Z}_m)$ до коцепи $\widetilde{c}\in C^n(X;\mathbb{Z})$, считая её значения целыми числами, а не вычетами. Тогда кограница $d\widetilde{c}$ делится на m и мы имеем $\widetilde{\beta}(\gamma)=[\frac{1}{m}d\widetilde{c}]\in H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$. Кроме того, приведение класса $[\frac{1}{m}d\widetilde{c}]$ по модулю m есть $\beta(\gamma)\in H_{n+1}(X;\mathbb{Z}_m)$. Это выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
H^n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho"] & H^n(X;\mathbb{Z}_m) \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] \arrow[dr, "\beta"] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cdot m"] \arrow[d, "\rho"] & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}) \\
& & H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_m), &
\end{tikzcd}$$

где ρ — приведение по модулю m.

5.3. **Функторы** Tor **и** Ext**.** Мы определим Tor и Ext для модулей над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, так как это более естественный контекст, хотя для наших целей достаточно ограничиться абелевыми группами (т. е. $\mathbb{Z}$-модулями).

Напомним, что *модулем* над кольцом R (или R*-модулем*) называется абелева группа M с операцией $\cdot\colon R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto r \cdot m$, которая удовлетворяет условиям $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$, $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$ и $1 \cdot m = m$ для любых $r_i \in R$ и $m_i \in M$. Примерами являются абелевы группы (модули над $\mathbb{Z}$) и векторные пространства (модули над полем).

R-модуль F называется *свободным*, если он изоморфен прямой сумме $\bigoplus_\alpha R_\alpha$, где каждый R_α есть кольцо R, рассматриваемое как R-модуль.

Тензорным произведением модулей M и N над R (обозначение: $M \otimes_R N$) называется фактормодуль свободного модуля с множеством образующих $\{(m, n) \in M \times N\}$ по подмодулю, порождённому всевозможными элементами вида

$$(m + m', n) - (m, n) - (m', n), \quad (m, n + n') - (m, n) - (m, n'),$$
$$(rm, n) - r(m, n), \quad (m, rn) - r(m, n),$$

где $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$. Гомоморфизмы R-модулей $M \to N$ образуют R-модуль, который обозначается $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Свободной резольвентой R-модуля M называется точная последовательность модулей

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \tag{13}$$

в которой все модули F_i свободны.

Пусть N — другой R-модуль. После применения функтора $- \otimes_R N$ к свободной резольвенте (13) получаемая последовательность может не быть точной, но является цепным комплексом. Исключив из этого комплекса член $M \otimes_R N$, получим цепной комплекс

$$\ldots \longrightarrow F_2 \otimes_R N \longrightarrow F_1 \otimes_R N \longrightarrow F_0 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

Его n-я группа гомологий обозначается $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$, т. е.

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = \frac{\mathrm{Ker}(F_n \otimes_R N \to F_{n-1} \otimes_R N)}{\mathrm{Im}(F_{n+1} \otimes_R N \to F_n \otimes_R N)}.$$

Аналогично, применив функтор $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ к (13) и исключив член $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, получим коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_2, N) \longrightarrow \ldots$$

Его n-я группа когомологий обозначается $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$, т. е.

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = \frac{\mathrm{Ker}\big(\mathrm{Hom}_R(F_n, N) \to \mathrm{Hom}_R(F_{n+1}, N)\big)}{\mathrm{Im}\big(\mathrm{Hom}_R(F_{n-1}, N) \to \mathrm{Hom}_R(F_n, N)\big)}.$$

Вот основные свойства функторов Tor и Ext.

Теорема 5.5.

а) *Модули* $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ *и* $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ *не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты* (13).

б) $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$, $\mathrm{Tor}_n^R(M, -)$ *и* $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ *являются ковариантными функторами, а* $\mathrm{Ext}_R^n(-, N)$ *является контравариантным функтором.*

в) $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ *и* $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

г) $\operatorname{Tor}_n^R(M,N) \cong \operatorname{Tor}_n^R(N,M)$.

Доказательство. Мы лишь приведём основные идеи доказательства, оставляя детали в качестве задач. Свойства а) и б) доказываются при помощи следующего утверждения. Пусть $F_\bullet$ — свободная резольвента модуля M, $F'_\bullet$ — свободная резольвента модуля M'. Тогда любой гомоморфизм R-модулей $f\colon M \to M'$ продолжается до цепного отображения $f_\bullet\colon F_\bullet \to F'_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F'_2 \arrow[r] & F'_1 \arrow[r] & F'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

причём любые два таких продолжения цепно гомотопны. Это утверждение проверяется диаграммным поиском.

Для доказательства г) рассмотрим свободную резольвенту $F_\bullet$ модуля M и свободную резольвенту $G_\bullet$ модуля N. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
\ldots \arrow[r] & F_2 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_1 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_0 \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & M \otimes_R G_2 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R G_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Гомологии самого правого ненулевого столбца — это $\operatorname{Tor}_R^\bullet(M,N)$, а гомологии самой нижней ненулевой строки изоморфны $\operatorname{Tor}_R^\bullet(N,M)$. Можно доказать, что гомологии каждого из этих цепных комплексов изоморфны гомологиям комплекса, составленного из модулей $H_n = \bigoplus_{p+q=n} F_p \otimes_R G_q$. ☐

5.4. **Формулы универсальных коэффициентов.** Модули над кольцом $R = \mathbb{Z}$ — это абелевы группы. Свободную резольвенту абелевой группы G можно построить следующим образом. Возьмём в качестве F_0 свободную абелеву группу с базисом, элементы которого соответствуют любому набору образующих группы G. Мы имеем эпиморфизм $F_0 \to G$, ядро которого мы обозначим через F_1. Тогда F_1 также свободная абелева группа (подгруппа свободной абелевой группы свободна, но подмодуль свободного R-модуля, вообще говоря, может не быть свободным). В результате мы получаем «короткую» свободную резольвенту группы G:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0.$$

Таким образом, нетривиальными Tor-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(G,H) = G\otimes H$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G,H)$, который обозначается $\mathrm{Tor}(G,H)$. Мы имеем

$$\mathrm{Tor}(G,H) = \mathrm{Ker}\bigl(F_1\otimes H \to F_0\otimes H\bigr). \tag{14}$$

Аналогично нетривиальными Ext-модулями при $R = \mathbb{Z}$ являются лишь $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(G,H) = \mathrm{Hom}(G,H)$ и $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G,H)$, который обозначается $\mathrm{Ext}(G,H)$. Мы имеем

$$\mathrm{Ext}(G,H) = \mathrm{Coker}\bigl(\mathrm{Hom}(F_0,H)\to \mathrm{Hom}(F_1,H)\bigr). \tag{15}$$

Короткая точная последовательность R-модулей $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{j} C\to 0$ называется *расщепимой*, если выполнено одно из эквивалентных условий:

1) существует гомоморфизм $s\colon C\to B$, для которого $js = \mathrm{id}\colon C\to C$;
2) существует гомоморфизм $q\colon B\to A$, для которого $qi = \mathrm{id}\colon A\to A$.

Для расщепимой короткой последовательности имеем изоморфизм $A\oplus C \xrightarrow{\cong} B$, $(a,c)\mapsto i(a)+s(c)$.

Теорема 5.6 (формулы универсальных коэффициентов). *Для любой абелевой группы G и любого $n\geqslant 0$ существуют естественные по X расщепимые короткие точные последовательности*

а) $0\to H_n(X)\otimes G\to H_n(X;G)\to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X);G)\to 0,$

б) $0\to H^n(X)\otimes G\to H^n(X;G)\to \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X);G)\to 0,$
если G конечно порождена,

в) $0\to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G)\to H^n(X;G)\to \mathrm{Hom}(H_n(X),G)\to 0.$

Замечание. Эти расщепимые точные последовательности дают изоморфизмы

$H_n(X;G)\cong (H_n(X)\otimes G)\oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X),G),$
$H^n(X;G)\cong (H^n(X)\otimes G)\oplus \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X),G)$ (группа G конечно порождена),
$H^n(X;G)\cong \mathrm{Hom}(H_n(X),G)\oplus \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G),$

которые, однако, не являются естественными по X.

Доказательство теоремы 5.6. Первые две точные последовательности легко вытекают из коэффициентных точных последовательностей (11) и (12). Выведем точную последовательность а). Рассмотрим короткую точную последовательность (резольвенту) $0\to F_1\to F_0\to G\to 0$, где F_0, F_1 — свободные абелевы группы. Тогда мы имеем

$$H_n(X;F_i) = H_n(X;\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = \oplus_\alpha H_n(X;\mathbb{Z}) = H_n(X)\otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства групп коцепей $C_n(X;\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = C_n(X)\otimes(\oplus_\alpha\mathbb{Z}) = \oplus_\alpha C_n(X)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности (11):

$$\longrightarrow H_n(X;F_1)\xrightarrow{f_n} H_n(X;F_0)\longrightarrow H_n(X;G)\longrightarrow H_{n-1}(X;F_1)\xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(X;F_0)\longrightarrow .$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}\, f_n\longrightarrow H_n(X;G)\longrightarrow \mathrm{Ker}\, f_{n-1}\longrightarrow 0,$$

где

$$\operatorname{Coker} f_n = \operatorname{Coker}\bigl(H_n(X) \otimes F_1 \to H_n(X) \otimes F_0\bigr) = H_n(X) \otimes G,$$
$$\operatorname{Ker} f_{n-1} = \operatorname{Ker}\bigl(H_{n-1}(X) \otimes F_1 \to H_{n-1}(X) \otimes F_0\bigr) = \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X), G),$$

см. (14). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем а).

Чтобы получить последовательность б), рассмотрим резольвенту $0 \to F_1 \to F_0 \to G \to 0$, где F_0, F_1 — конечно порождённые свободные абелевы группы. Тогда

$$H^n(X; F_i) = H^n(X; \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha H^n(X; \mathbb{Z}) = H^n(X) \otimes F_i,$$

где второе равенство следует из равенства $C^n(X; \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(C_n(X), \oplus_\alpha \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha \operatorname{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z}) = \oplus_\alpha C^n(X; \mathbb{Z})$ для конечной прямой суммы $\oplus_\alpha \mathbb{Z}$. Далее используем точную последовательность (12) аналогично доказательству а).

Однако этот метод не работает для точной последовательности в). Мы приведём другой способ доказательства, который вместо резольвенты группы G использует резольвенту группы $H_n(X)$.

Пусть $C_n = C_n(X)$, $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n$ — циклы, $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ — границы, $H_n = Z_n/B_n$ — гомологии. Мы имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0,$$

которая расщепляется, так как в ней все абелевы группы свободны. Применив $\operatorname{Hom}(-, G)$, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C_n, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z_n, G) \longrightarrow 0.$$

Эту последовательность можно рассматривать как короткую точную последовательность коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_{\bullet-1}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(C_\bullet, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z_\bullet, G) \longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{Hom}(B_{\bullet-1}, G)$ и $\operatorname{Hom}(Z_\bullet, G)$ — комплексы с нулевым дифференциалом. Соответствующая длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$\to \operatorname{Hom}(Z_{n-1}, G) \xrightarrow{i_{n-1}^*} \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G) \to H^n(X; G) \to \operatorname{Hom}(Z_n, G) \xrightarrow{i_n^*} \operatorname{Hom}(B_n, G) \to$$

Связывающим гомоморфизмом здесь является $i_n^*\colon \operatorname{Hom}(Z_n, G) \to \operatorname{Hom}(B_n, G)$; он представляет собой просто ограничение гомоморфизмов $Z_n \to G$ на $B_n \subset Z_n$. Из этой последовательности мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \operatorname{Ker} i_n^* \longrightarrow 0.$$

Теперь заметим, что $0 \to B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \to H_n \to 0$ — резольвента группы H_n, поэтому

$$\operatorname{Ker} i_n^* = \operatorname{Ker}\bigl(\operatorname{Hom}(Z_n, G) \to \operatorname{Hom}(B_n, G)\bigr) = \operatorname{Hom}(H_n, G),$$
$$\operatorname{Coker} i_{n-1}^* = \operatorname{Coker}\bigl(\operatorname{Hom}(Z_{n-1}, G) \to \operatorname{Hom}(B_{n-1}, G)\bigr) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}, G),$$

см. (15). Подставляя это в предыдущую точную последовательность, получаем в).

Докажем расщепимость точной последовательности в). В ней гомоморфизм $h\colon H^n(X; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(X), G)$ сопоставляет классу когомологий $[c]$ коцикла $c\colon C_n \to G$ гомоморфизм $H_n = Z_n/B_n \to G$, задаваемый ограничением c на группу циклов Z_n с последующим переходом к факторгруппе. Для h существует правый обратный $s\colon \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \to H^n(X; G)$, который строится следующим образом.

Гомоморфизм $f\colon H_n \to G$ задаёт гомоморфизм $\widetilde{f}\colon Z_n \to G$, который можно продолжить до гомоморфизма $\widetilde{f}'\colon C_n \to G$ (так как $Z_n \subset C_n$ — прямое слагаемое). Тогда положим $s(f) = [\widetilde{f}']$. Очевидно, что $hs = \mathrm{id}$, так что точная последовательность в) расщепима.

Для доказательства расщепимости точной последовательности а) рассмотрим расщепляющие гомоморфизмы $C_n \to Z_n$ для точных последовательностей $0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$. Взяв композицию с факторотображениями $Z_n \to H_n$, получим гомоморфизмы $C_n \to H_n$. Вместе они образуют цепное отображение $C_\bullet \to H_\bullet$, где справа стоит комплекс с нулевым граничным отображением. Тензорно умножив на G, получим цепное отображение $C_\bullet \otimes G \to H_\bullet \otimes G$. Перейдя к гомологиям, получим расщепляющий гомоморфизм $q\colon H_n(X;G) \to H_n(X) \otimes G$ для точной последовательности а). Доказательство для последовательности б) аналогично. ☐

Задачи и упражнения.

5.7. Докажите, что группа $H^1(X)$ не содержит кручения.

5.8. Пусть $A, B \subset X$ — подпространства, внутренности которых покрывают X. Выведите *когомологическую точную последовательность Майера–Виеториса*:

$$\ldots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{\psi^*} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(A \cap B) \xrightarrow{d} H^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

и опишите явно кограничное отображение $d\colon H^n(A \cap B) \to H^{n+1}(X)$.

5.9. Определим $d^n\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ как композицию отображений $j^*\colon H^n(X^n, X^{n-1}; G) \to H^n(X^n; G)$ и $d\colon H^n(X^n; G) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n; G)$ из когомологических точных последовательностей пар. Докажите, что коцепные комплексы $\{H^n(X^n, X^{n-1}; G), d^n\}$ и $\{\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_n(X), G), \partial_n^*\}$ изоморфны.

5.10. Вычислите группы целочисленных когомологий $H^k(\mathbb{R}P^n)$ и $H^k(\mathbb{R}P^\infty)$.

5.11. Опишите гомоморфизм Бокштейна $\beta\colon H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$.

5.12. Докажите, что модули $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ и $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты модуля M.

5.13. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$, $\mathrm{Tor}_n^R(M,_)$ и $\mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ являются ковариантным функторами, а $\mathrm{Ext}_R^n(-, N)$ является контравариантным функтором.

5.14. Докажите, что $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

5.15. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$.

5.16. Докажите, что короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

даёт следующие длинные точные последовательности:

$$\begin{aligned}
\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(M_3, N) \longrightarrow \ldots \\
\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M_3, N) \longrightarrow \\
\longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_1, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_2, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_0^R(M_3, N) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M_1,N) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M_1,N) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_3,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_2,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M_1,N) \longrightarrow \ldots, \end{aligned}$$

а короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$$

даёт длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N_3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N_3) \longrightarrow \ldots \\ \ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,N_3) \longrightarrow \ldots. \end{aligned}$$

5.17. Докажите, что $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, где (m,n) — наибольший общий делитель m и n, а $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = \operatorname{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m) = 0$.

5.18. Докажите, что $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$, $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m$ и $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m) = 0$.

5.19. Постройте свободную резольвенту $\mathbb{Z}_4$-модуля $\mathbb{Z}_2$ и вычислите $\operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}_4}_n(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ и $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$.

5.20. Докажите, что если отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует изоморфизм $f_*\colon H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y)$ для любого n, то оно индуцирует изоморфизмы гомологий и когомологий с коэффициентами в любой группе G. [Указание: используйте формулы универсальных коэффициентов.]

6. Кольцо когомологий

Для любого коммутативного кольца R с единицей мы определим отображения

$$\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X;R) \longrightarrow H^{p+q}(X;R),$$

которые превращают прямую сумму $H^*(X;R) = \bigoplus_{p \geqslant 0} H^p(X;R)$ в ассоциативное, градуированно-коммутативное кольцо (R-алгебру) с единицей. Наряду с группами (ко)гомологий, структура этого кольца является важным гомотопическим инвариантом топологического пространства X.

6.1. **Произведение Колмогорова–Александера.**

Определим $\smile$-*произведение* (также известное как *произведение Колмогорова–Александера*) сингулярных коцепей $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ как коцепь $a \smile b \in C^{p+q}(X;R)$, значение которой на сингулярном симплексе $\sigma\colon \Delta^{p+q} = [v_0,\ldots,v_{p+q}] \to X$ задаётся формулой

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\ldots,v_{p+q}]}). \tag{16}$$

Лемма 6.1. *Для $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ выполнено равенство*

$$d(a \smile b) = da \smile b + (-1)^p a \smile db,$$

где $d\colon C^*(X;R) \to C^{*+1}(X;R)$ — кограничный гомоморфизм (9).

Доказательство. Для $\sigma\colon \varDelta^{p+q+1} = [v_0, \dots, v_{p+q+1}] \to X$ мы имеем

$$(da \smile b)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1}]})\, b(\sigma|_{[v_{p+1},\dots,v_{p+q+1}]}),$$

$$(-1)^p (a \smile db)(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0,\dots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+q}]}).$$

При сложении этих выражений последний член первой суммы сократится с первым членом второй суммы, а оставшиеся члены дадут $d(a \smile b)(\sigma) = (a \smile b)(\partial\sigma)$, так как

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+q+1}]}. \qquad \square$$

Напомним, что *градуированное кольцо* — это кольцо A, представленное в виде прямой суммы $\bigoplus_{i\geqslant 0} A^i$ подгрупп A^i таким образом, что если $a \in A^i$ и $b \in A^j$, то $ab \in A^{i+j}$. Если все A^i являются модулями над коммутативным кольцом R с единицей и умножение в кольце A является R-билинейным, то A называется градуированной *алгеброй* над кольцом R (или кратко *R-алгеброй*). Градуированное кольцо (или алгебра) $A = \bigoplus_{i\geqslant 0} A^i$ называется *градуированно коммутативным*, если для любых $a \in A^i$ и $b \in A^j$ выполнено соотношение $ab = (-1)^{ij} ba$.

Теорема 6.2. *Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Тогда $\smile$-произведение коцепей задаёт на $H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ структуру градуированной, ассоциативной, градуированно-коммутативной алгебры с единицей над R.*

Доказательство. Из леммы 6.1 следует, что $\smile$-произведение двух коциклов снова является коциклом, а произведение коцикла и кограницы (в любом порядке) является кограницей. Поэтому $\smile$-произведение коцепей задаёт $\smile$-произведение в когомологиях $\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$, которое превращает $H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ в градуированное кольцо (R-алгебру). Единицей этого кольца является класс 0-мерного коцикла, принимающего значение 1 на каждом сингулярном 0-симплексе. Умножение в когомологиях ассоциативно, так как оно ассоциативно на уровне коцепей. Однако умножение коцепей не является градуированно коммутативным, поэтому градуированная коммутативность умножения в когомологиях нуждается в дополнительной проверке.

Пусть $\omega\colon \varDelta^n \to \varDelta^n$ — аффинный автоморфизм симплекса, обращающий порядок вершин. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$ обозначим $\overline{\sigma} = \sigma \circ \omega$, т. е. $\overline{\sigma}(v_i) = \sigma(v_{n-i})$. Теперь определим гомоморфизм

$$\rho\colon C_n(X) \to C_n(X), \qquad \sigma \mapsto \varepsilon_n \overline{\sigma},$$

где $\varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ — определитель оператора ω.

Для $a \in C^p(X;R)$, $b \in C^q(X;R)$ и $\rho^*\colon C^n(X) \to C^n(X)$ имеем

$$(\rho^* a \smile \rho^* b)(\sigma) = a(\varepsilon_p \sigma|_{[v_p,\dots,v_0]})\, b(\varepsilon_q \sigma|_{[v_{p+q},\dots,v_p]}),$$

$$\rho^*(b \smile a)(\sigma) = \varepsilon_{p+q} b(\sigma|_{[v_{p+q},\dots,v_p]})\, a(\sigma|_{[v_p,\dots,v_0]}).$$

Так как $\varepsilon_{p+q} = (-1)^{pq} \varepsilon_p \varepsilon_q$, а кольцо R коммутативно, отсюда получаем $(\rho^* a \smile \rho^* b) = (-1)^{pq} \rho^*(b \smile a)$. Ниже мы покажем, что ρ — цепное отображение, цепно гомотопное тождественному. Поэтому при переходе к классам когомологий ρ^* можно опустить и мы получаем требуемую формулу $[a] \smile [b] = (-1)^{pq}[b] \smile [a]$.

Проверим, что ρ — цепное отображение. Для $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$ имеем

$$\partial\rho(\sigma) = \varepsilon_n \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_n,\dots,\widehat{v}_{n-i},\dots,v_0]},$$

$$\rho\partial(\sigma) = \rho\Bigl(\sum_j (-1)^j \sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_n]}\Bigr) = \varepsilon_{n-1} \sum_i (-1)^{n-i} \sigma|_{[v_n,\dots,\widehat{v}_{n-i},\dots,v_0]}.$$

Так как $\varepsilon_n = (-1)^n \varepsilon_{n-1}$, получаем требуемое соотношение $\partial\rho = \rho\partial$.

Осталось построить цепную гомотопию между ρ и id. Это построение похоже на построение цепной гомотопии в доказательстве теоремы 2.6. Там же была построена триангуляция призмы $\Delta^n \times I$ с вершинами $v_0, \dots, v_n$ на основании $\Delta^n \times \{0\}$ и вершинами $w_0, \dots, w_n$ на основании $\Delta^n \times \{1\}$. Симплексы этой триангуляции имеют вид $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$, $i = 0, \dots, n$. Пусть $\pi\colon \Delta^n \times I \to \Delta^n$ — проекция. Определим призменный оператор $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ по формуле

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varepsilon_{n-i} (\sigma\pi)|_{[v_0,\dots,v_i,w_n,\dots,w_i]}.$$

Чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$, сначала вычислим ∂P, опустив для краткости σ и $\sigma\pi$:

$$\partial P = \sum_{j \leqslant i} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i] + \\ + \sum_{j \geqslant i} (-1)^i (-1)^{i+1+n-j} \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i]. \tag{17}$$

Члены с $j = i$ в этих двух суммах дают

$$\varepsilon_n [w_n, \dots, w_0] + \sum_{i>0} \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, v_{i-1}, w_n, \dots, w_i] + \\ + \sum_{j<n} (-1)^{n+j+1} \varepsilon_{n-j} [v_0, \dots, v_j, w_n, \dots, w_{j+1}] - [v_0, \dots, v_n].$$

В этом выражении две суммы сокращаются, так как замена j на $i-1$ во второй сумме приводит к новому знаку $(-1)^{n+i} \varepsilon_{n-i+1} = -\varepsilon_{n-i}$. Оставшиеся два члена дают $\varepsilon_n [w_n, \dots, w_0] - [v_0, \dots, v_n] = \rho(\sigma) - \sigma$. Поэтому, чтобы показать, что $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$, остаётся проверить, что члены с $j \neq i$ в (17) дают $-P\partial$. Мы имеем

$$P\partial = \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j \varepsilon_{n-i-1} [v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i] + \\ + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j \varepsilon_{n-i} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i].$$

Так как $\varepsilon_{n-i} = (-1)^{n-i} \varepsilon_{n-i-1}$, мы действительно получаем $\partial P + P\partial = \rho - \mathrm{id}$. □

Предложение 6.3. *Отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм колец когомологий $f^*\colon H^*(Y; R) \to H^*(X; R)$, т. е. $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.*

Доказательство. Из определения произведения (16) следует, что уже на уровне коцепей имеет место формула $f^*(a \smile b) = f^*(a) \smile f^*(b)$. □

6.2. **Относительные произведения и $\times$-произведение.** Формула

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0,\dots,v_p]})\, b(\sigma|_{[v_p,\dots,v_{p+q}]})$$

для $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ также задаёт относительные $\smile$-произведения

$$\smile\colon H^p(X;R) \times H^q(X,A;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A;R),$$

$$\smile\colon H^p(X,A;R) \times H^q(X,A;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A;R),$$

так как если коцепи $a \in C^p(X;R)$ и $b \in C^q(X;R)$ обращаются в нуль на цепях в A, то это верно и для $a \smile b$.

Если A и B — открытые подмножества в X или (X,A) и (X,B) — клеточные пары, то имеется более общее *относительное $\smile$-произведение*

$$\smile\colon H^p(X,A;R) \times H^q(X,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X,A \cup B;R). \tag{18}$$

Оно определяется следующим образом: $\smile$-произведение коцепей даёт отображение

$$C^p(X,A;R) \times C^q(X,B;R) \longrightarrow C^{p+q}(X,A+B;R), \tag{19}$$

где $C^n(X,A+B;R)$ — подгруппа в $C^n(X;R)$, состоящая из коцепей, обращающихся в нуль на суммах цепей в A и цепей в B. Включения $C^n(X,A \cup B;R) \to C^n(X,A+B;R)$ индуцируют изоморфизмы когомологий; это следует из 5-леммы и леммы 2.19 (из когомологического варианта этой леммы следует, что ограничение $C^n(A \cup B) \to C^n(A+B)$ индуцирует изоморфизм в когомологиях). Следовательно, $\smile$-произведение коцепей (19) даёт относительное $\smile$-произведение когомологий (18).

Определим также абсолютное и относительное $\times$-*произведение* (или *внешнее произведение*)

$$\times\colon H^p(X;R) \times H^q(Y;R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y;R),$$

$$\times\colon H^p(X,A;R) \times H^q(Y,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B;R)$$

формулой $\alpha \times \beta = p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$, где p_X и p_Y — проекции $X \times Y$ на X и на Y.

6.3. **Клеточное определение умножения.** Имеется другой подход к определению умножения в когомологиях, использующий клеточные коцепи. Мы изложим этот подход схематично, оставляя доказательства основных утверждений в качестве задач; эти доказательства можно найти в книгах [ФФ] или [Ха].

Пусть X, Y – клеточные пространства. Напомним, что произведение $X \times Y$ имеет клеточную структуру, клетками которой являются произведения $e^m_\alpha \times e^n_\beta$ клеток $e^m_\alpha \subset X$ и $e^n_\beta \subset Y$. Таким образом, мы получаем билинейное отображение

$$\times\colon \mathcal{C}_m(X) \times \mathcal{C}_n(Y) \to \mathcal{C}_{m+n}(X \times Y), \qquad (e^m_\alpha, e^n_\beta) \mapsto e^m_\alpha \times e^n_\beta. \tag{20}$$

Лемма 6.4. *Клеточный граничный гомоморфизм $\partial\colon \mathcal{C}_i(X \times Y) \to \mathcal{C}_{i-1}(X \times Y)$ удовлетворяет соотношению*

$$\partial(e^m_\alpha \times e^n_\beta) = \partial e^m_\alpha \times e^n_\beta + (-1)^m e^m_\alpha \times \partial e^n_\beta. \tag{21}$$

Из (21) следует, что произведение двух циклов — цикл, а произведение цикла и границы — граница. Следовательно, определено отображение в клеточных гомологиях (с коэффициентами в кольце R)

$$\times\colon H_m(X;R) \times H_n(Y;R) \to H_{m+n}(X \times Y;R), \tag{22}$$

которое называется *(гомологическим) $\times$-произведением.*

Теперь рассмотрим клеточные коцепи. Существует R-билинейное отображение

$$\times\colon \mathcal{C}^p(X;R)\times\mathcal{C}^q(Y;R)\to\mathcal{C}^{p+q}(X\times Y;R), \tag{23}$$

переводящее пару коцепей (c_1,c_2) в коцепь $c_1\times c_2$, значение которой на клетке $e^m_\alpha\times e^n_\beta$ равно $c_1(e^m_\alpha)c_2(e^n_\beta)$. Так как клеточный дифференциал $d\colon \mathcal{C}^{i-1}(X;R)\to\mathcal{C}^i(X;R)$ задаётся соотношением $(dc)(e^n)=c(\partial e^n)$, простая проверка с использованием (21) показывает, что имеет место формула

$$d(c_1\times c_2)=dc_1\times c_2+(-1)^p c_1\times dc_2,\qquad c_1\in\mathcal{C}^p(X;R),c_2\in\mathcal{C}^q(Y;R). \tag{24}$$

Отсюда получаем отображение в клеточных когомологиях

$$\times\colon H^p(X;R)\times H^q(Y;R)\to H^{p+q}(X\times Y;R), \tag{25}$$

которое называется *(комологическим клеточным) $\times$-произведением.*

Замечание. В некоторых монографиях и учебниках клеточный дифференциал $d\colon\mathcal{C}^p(X;R)\to\mathcal{C}^{p+1}(X;R)$ задаётся соотношением

$$\langle dc,e^n\rangle=(-1)^p\langle c,\partial e^n\rangle,\qquad c\in\mathcal{C}^p(X;R),$$

а $\times$-произведение коцепей задаётся соотношением

$$\langle c_1\times c_2,e^m_\alpha\times e^n_\beta\rangle=(-1)^{qm}c_1(e^m_\alpha)c_2(e^n_\beta),\qquad c_1\in\mathcal{C}^p(X;R),c_2\in\mathcal{C}^q(Y;R).$$

При этом формула (24) по-прежнему имеет место.

Теперь мы можем определить *клеточное $\smile$-произведение* как композицию

$$\smile\colon H^p(X;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\times}H^{p+q}(X\times X;R)\xrightarrow{\Delta^*}H^{p+q}(X;R),$$

где Δ^* — отображение, индуцированное диагональю $\Delta\colon X\to X\times X$.

Теорема 6.5. *Клеточные $\times$- и $\smile$-произведения совпадают с произведениями, определёнными при помощи сингулярных коцепей. В частности, клеточное $\smile$-произведение не зависит от клеточной структуры и является гомотопическим инвариантом пространства.*

Замечание. Клеточное $\smile$-произведение нельзя естественным образом определить для коцепей. Дело в том, что диагональ $\Delta\colon X\to X\times X$ не является клеточным отображением и для построения отображения $\mathcal{C}^{p+q}(X\times X)\to\mathcal{C}^{p+q}(X)$ необходимо перейти к клеточной аппроксимации диагонали. Однако не существует конструкции клеточной аппроксимации $\widetilde{\Delta}\colon X\to X\times X$, которая была бы функториальной относительно всех отображений $X\to Y$. Иногда это можно сделать относительно выделенных классов пространств и отображений.

6.4. **Формула Кюннета.** Пусть заданы цепные комплексы $C=\{C_n,\partial_n\}$ и $C'=\{C'_n,\partial_n\}$ абелевых групп или R-модулей. *Тензорное произведение* $C\otimes_R C'$ определяется как цепной комплекс, состоящий из модулей

$$(C\otimes_R C')_n=\bigoplus_i C_i\otimes_R C_{n-i}$$

с граничным гомоморфизмом $\partial\colon(C\otimes_R C')_n\to(C\otimes_R C')_{n-1}$, заданным формулой

$$\partial(c\otimes c')=\partial c\otimes c'+(-1)^i c\otimes\partial c',\qquad c\in C_i,c'\in C'_{n-i}. \tag{26}$$

Непосредственная проверка показывает, что $\partial^2 = 0$:

$$\partial^2(c\otimes c') = \partial(\partial c\otimes c' + (-1)^i c\otimes \partial c') = \partial^2 c\otimes c' + (-1)^{i-1}\partial c\otimes\partial c' + (-1)^i\partial c\otimes\partial c' + c\otimes\partial^2 c' = 0.$$

Из (26) следует, что тензорное произведение циклов — цикл, а тензорное произведение цикла и границы — граница. Поэтому мы получаем индуцированный гомоморфизм гомологий $H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C')$. Просуммировав по i, получаем гомоморфизм

$$\bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C'). \tag{27}$$

Формула Кюннета описывает этот гомоморфизм при некоторых ограничениях на R и C. Основное её применение — в следующей топологической ситуации.

Пример 6.6. Пусть $C = \{\mathcal{C}_n(X), \partial_n\}$ и $C' = \{\mathcal{C}_n(Y), \partial_n\}$ — клеточные цепные комплексы для X и Y. Билинейные отображения (20) дают изоморфизм

$$\bigoplus_i \mathcal{C}_i(X)\otimes\mathcal{C}_{n-i}(Y) \to \mathcal{C}_n(X\times Y), \qquad e^i_\alpha\otimes e^{n-i}_\beta \mapsto e^i_\alpha\times e^{n-i}_\beta,$$

а формула (21) превращается в (26). Следовательно, мы имеем изоморфизм цепных комплексов $\mathcal{C}_\bullet(X)\otimes\mathcal{C}_\bullet(Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_\bullet(X\times Y)$, а гомоморфизм (27) превращается в гомоморфизм

$$\bigoplus_i H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y) \to H_n(X\times Y).$$

Теорема 6.7 (алгебраическая формула Кюннета)**.** *Пусть R — область главных идеалов (например, $R = \mathbb{Z}$ или поле) и цепной комплекс C состоит из свободных R-модулей C_i. Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C') \to H_n(C\otimes_R C') \to \bigoplus_i \operatorname{Tor}_R\bigl(H_i(C), H_{n-1-i}(C')\bigr) \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все граничные отображения в комплексе C нулевые, т. е. $H_i(C) = C_i$. Тогда $\partial(c\otimes c') = (-1)^i c\otimes\partial c'$ и цепной комплекс $C\otimes_R C'$ — это прямая сумма комплексов $C_i\otimes_R C'$, каждый из которых, в свою очередь, является прямой суммой комплексов C', так как C_i — свободный модуль. Поэтому

$$H_n(C\otimes_R C') = H_n\Bigl(\bigoplus_i C_i\otimes_R C'\Bigr) = \bigoplus_i H_n(C_i\otimes_R C') \cong$$
$$\cong \bigoplus_i C_i\otimes_R H_{n-i}(C') = \bigoplus_i H_i(C)\otimes_R H_{n-i}(C'),$$

так что в этом случае теорема верна.

В общем случае рассмотрим подгруппы $B_i\subset Z_i\subset C_i$ границ и циклов, как в доказательстве части в) формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). Мы имеем короткую точную последовательность цепных комплексов $0\to Z_\bullet\to C_\bullet\to B_{\bullet-1}\to 0$, состоящую из расщепимых коротких точных последовательностей $0\to Z_i\to C_i\to B_{i-1}\to 0$. Умножая тензорно на C', получим короткую точную последовательность

$$0\longrightarrow (Z\otimes_R C')_\bullet \longrightarrow (C\otimes_R C')_\bullet \longrightarrow (B\otimes_R C')_{\bullet-1}\longrightarrow 0$$

и соответствующую ей длинную точную последовательность гомологий

$$\ldots \xrightarrow{i_n} H_n(Z \otimes_R C') \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow H_{n-1}(B \otimes_R C') \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(Z \otimes_R C') \longrightarrow \ldots$$

Здесь связывающим гомоморфизмом является гомоморфизм, индуцированный вложением $i\colon B \to Z$. Так как B и Z — комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, частный случай, разобранный в начале доказательства, позволяет преобразовать предыдущую точную последовательность в последовательность

$$\ldots \xrightarrow{i_n} \bigoplus_i \bigl(Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')\bigr) \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \bigoplus_i \bigl(B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) \xrightarrow{i_{n-1}}$$

$$\xrightarrow{i_{n-1}} \bigoplus_i \bigl(Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) \longrightarrow \ldots$$

Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} i_n \longrightarrow H_n(C \otimes_R C') \longrightarrow \operatorname{Ker} i_{n-1} \longrightarrow 0$$

Теперь заметим, что $0 \to B_i \to Z_i \to H_i(C) \to 0$ — свободная резольвента для $H_i(C)$ (здесь мы используем то, что R — область целостности). Поэтому

$$\operatorname{Coker}\bigl(B_i \otimes_R H_{n-i}(C') \xrightarrow{i_n} Z_i \otimes_R H_{n-i}(C')\bigr) = H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'),$$

$$\operatorname{Ker}\bigl(B_i \otimes_R H_{n-1-i}(C') \xrightarrow{i_{n-1}} Z_i \otimes_R H_{n-1-i}(C')\bigr) = \operatorname{Tor}_R\bigl(H_i(C), H_{n-1-i}(C')\bigr).$$

Суммируя по i и подставляя эти выражения в предыдущую точную последовательность, получаем точную последовательность из формулировки теоремы.

Осталось установить расщепимость точной последовательности. Мы докажем расщепимость при дополнительном условии, что цепной комплекс C' состоит из свободных R-модулей C'_i. Этого будет достаточно для топологических приложений. Так как $Z_i \subset C_i$ — прямое слагаемое, гомоморфизм факторизации $Z_i \to H_i(C)$ продолжается до $C_i \to H_i(C)$. Аналогично получаем $C'_i \to H_i(C')$. Рассматривая гомологии $H(C')$ и $H(C')$ как цепные комплексы с нулевым граничным гомоморфизмом, получаем цепное отображение $C \otimes_R C' \to H(C) \otimes_R H(C')$. Переходя к гомологиям, получаем требуемое расщепляющее отображение $H_n(C \otimes_R C') \to \bigoplus_i (H_i(C) \otimes_R H_{n-i}(C'))$. $\square$

Теперь применим алгебраическую формулу Кюннета в ситуации из примера 6.6.

Теорема 6.8 (топологическая формула Кюннета)**.** *Пусть X, Y — клеточные пространства и R — область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда для любого n существует естественная расщепимая короткая точная последовательность*

$$0 \to \bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_i \operatorname{Tor}\bigl(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)\bigr) \to 0$$

(где мы опустили кольцо коэффициентов R).

Для приложений выделим следующий важный частный случай, который включает и когомологическую формулировку.

Теорема 6.9. *Пусть X, Y — клеточные пространства. Если $H_i(Y)$ является свободной абелевой группой для любого i, то гомоморфизмы*

$$\bigoplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \longrightarrow H_n(X \times Y),$$

задаваемые $\times$*-произведением, являются изоморфизмами. Если* $H_i(Y)$ *является конечно порождённой свободной абелевой группой для любого* i*, то гомоморфизмы*

$$\bigoplus_i H^i(X)\otimes H^{n-i}(Y)\longrightarrow H^n(X\times Y),$$

задаваемые $\times$*-произведением, являются изоморфизмами.*

Доказательство. Для гомологий это непосредственно вытекает из теоремы 6.8, так как в нашем случае $\operatorname{Tor}(H_i(X),H_{n-1-i}(Y))=0$.

Для когомологий заметим, что требуемый гомоморфизм можно разложить в композицию

$$\bigoplus_i H^i(X)\otimes H^{n-i}(Y)\xrightarrow{\cong}\bigoplus_i H^i(X,H^{n-i}(Y))\longrightarrow H^n(X\times Y),$$

где первый изоморфизм получается из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 б)), так как $H^{n-i}(Y)$ — свободная абелева группа (здесь мы пользуемся тем, что $H_{n-i}(Y)$ конечно порождена). Поэтому достаточно доказать, что второй гомоморфизм в приведённой выше композиции — изоморфизм.

Рассмотрим короткую точную последовательность из формулы универсальных коэффициентов (теорема 5.6 в)):

$$0\longrightarrow\operatorname{Ext}\bigl(H_{n-1}(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr)\longrightarrow H^n(X\times Y)\longrightarrow\operatorname{Hom}\bigl(H_n(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr)\longrightarrow 0.$$

Имеют место изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}\bigl(H_n(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr)\cong\operatorname{Hom}\Bigl(\bigoplus_i H_i(X)\otimes H_{n-i}(Y),\mathbb{Z}\Bigr)\cong$$
$$\cong\bigoplus_i\operatorname{Hom}\bigl(H_i(X),\operatorname{Hom}(H_{n-i}(Y),\mathbb{Z})\bigr)\cong\bigoplus_i\operatorname{Hom}\bigl(H_i(X),H^{n-i}(Y)\bigr).$$

Здесь в первом изоморфизме мы воспользовались уже доказанным утверждением для гомологий, второй изоморфизм вытекает из соотношения $\operatorname{Hom}(A\otimes B,C)\cong\operatorname{Hom}(A,\operatorname{Hom}(B,C))$ (задача), а третий следует из формулы универсальных коэффициентов, так как $H_{n-i}(Y)$ — свободная абелева группа. Далее, имеем изоморфизмы

$$\operatorname{Ext}\bigl(H_{n-1}(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr)\cong\operatorname{Ext}\Bigl(\bigoplus_i H_{i-1}(X)\otimes H_{n-i}(Y),\mathbb{Z}\Bigr)\cong$$
$$\cong\bigoplus_i\operatorname{Ext}\bigl(H_{i-1}(X),\operatorname{Hom}(H_{n-i}(Y),\mathbb{Z})\bigr)\cong\bigoplus_i\operatorname{Ext}\bigl(H_{i-1}(X),H^{n-i}(Y)\bigr),$$

где второй изоморфизм вытекает из соотношения $\operatorname{Ext}(A\otimes B,C)\cong\operatorname{Ext}(A,\operatorname{Hom}(B,C))$ для свободной абелевой группы B (задача). Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму, строки которой — точные последовательности универсальных коэффициентов:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}\bigl(H_{n-1}(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr) \arrow[r] & H^n(X\times Y) \arrow[r] & \operatorname{Hom}\bigl(H_n(X\times Y),\mathbb{Z}\bigr) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_i\operatorname{Ext}\bigl(H_{i-1}(X),H^{n-i}(Y)\bigr) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \bigoplus_i H^i\bigl(X,H^{n-i}(Y)\bigr) \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus_i\operatorname{Hom}\bigl(H_i(X),H^{n-i}(Y)\bigr) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Тогда из 5-леммы следует, что средняя стрелка является изоморфизмом. ☐

6.5. **Кольца когомологий тора и проективных пространств.** Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что *R-алгеброй* называется кольцо A, которое также является R-модулем, причем умножение $A \times A \to A$ является R-билинейным.

Внешней алгеброй с n образующими над кольцом R называется ассоциативная алгебра с 1, порождённая элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые удовлетворяют соотношениям $\alpha_i^2 = 0, \quad \alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i$. Внешняя алгебра обозначается $\Lambda_R[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ или просто $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Внешнюю алгебру можно сделать градуированной, положив $\deg \alpha_i = 1$. При этом алгебра $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ становится градуированно-коммутативной, и мы имеем $\Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k$, где Λ^k — свободный R-модуль, порождённый мономами $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.

Предложение 6.10. *Пусть $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — n-мерный тор. Тогда имеет место изоморфизм*

$$H^*(T^n) \cong \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n],$$

при котором $\alpha_i \in \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ переходит в $p_i^*(\alpha) \in H^1(T^n)$, где $\alpha \in H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а $p_i \colon T^n \to S^1$ — проекция на i-й сомножитель.

Доказательство. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для T^n, и докажем его для T^{n+1}. Достаточно доказать, что для любого k группа $H^k(T^{n+1})$ является свободной абелевой с базисом из мономов $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n + 1$. Из теоремы 6.9 получаем изоморфизм

$$H^k(T^n) \oplus (H^{k-1}(T^n) \otimes H^1(S^1)) \xrightarrow{\cong} H^k(T^n \times S^1) = H^k(T^{n+1}),$$

при котором $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_{k-1}} \otimes \alpha$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{k-1} \leqslant n$, переходит в $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} + \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_{k-1}} \alpha_{n+1}$. Отсюда следует требуемое утверждение. ☐

Наряду с внешними алгебрами важный класс градуированных колец образуют кольца многочленов $R[v_1, \ldots, v_n]$. Градуировка в кольце $R[v_1, \ldots, v_n]$ задаётся степенями образующих, $\deg v_i = d_i$. Если все элементы кольца R имеют порядок 2, то кольцо $R[v_1, \ldots, v_n]$ будет градуированно-коммутативным при любых степенях образующих. Если же в R имеются элементы порядка, отличного от 2, то для градуированной коммутативности кольца $R[v_1, \ldots, v_n]$ необходимо, чтобы все степени d_i были чётными. Например, можно положить $\deg v_i = 2$.

Также рассматриваются «усечённые» кольца $R[v]/(v^k)$, состоящие из многочленов степени меньше k.

Предложение 6.11. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1}), \quad H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u], \qquad \deg u = 1,$$
$$H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v]/(v^{n+1}), \quad H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v], \qquad \deg v = 2.$$

Доказательство. Сначала разберём случай $\mathbb{R}P^n$. Для упрощения обозначений будем писать P^n вместо $\mathbb{R}P^n$ и не указывать явно коэффициенты $\mathbb{Z}_2$. Имеем $H^i(P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $i \leqslant n$. Если мы докажем, что произведение образующей группы $H^1(P^n)$ на образующую группы $H^{n-1}(P^n)$ даёт образующую группы $H^n(P^n)$, то изоморфизм $H^*(P^n) \cong \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$ получится индукцией по n, так как включение $P^{n-1} \to P^n$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i \leqslant n - 1$.

Мы докажем больше, а именно, что $\smile\colon H^i(P^n)\otimes H^{n-i}(P^n)\to H^n(P^n)$ — изоморфизм. Вложим P^i и P^{n-i} в P^n в качестве следующих подмножеств:

$$\begin{gathered}\{[x_0:\ldots:x_n]\in P^n\colon x_{i+1}=\ldots=x_n=0\}\cong P^i,\\ \{[x_0:\ldots:x_n]\in P^n\colon x_0=\ldots=x_{i-1}=0\}\cong P^{n-i}.\end{gathered}$$

Тогда $P^i\cap P^{n-i}$ — одна точка $p=[0:\ldots:1:\ldots:0]$, где 1 стоит на i-м месте. Пусть $U_i\subset P^n$ — i-я аффинная карта, задаваемая условием $x_i\neq 0$. Тогда $U_i\cong\mathbb{R}^n$, и при этом изоморфизме $p\in U_i$ переходит в $0\in\mathbb{R}^n$. Мы имеем деформационную ретракцию $P^n\setminus P^{n-i}\to P^{i-1}$; гомотопия между ней и тождественным отображением задаётся формулой

$$f_t\colon P^n\setminus P^{n-i}\to P^n\setminus P^{n-i},\quad [x_0:\ldots:x_n]\mapsto[x_0,\ldots,x_{i-1},tx_i,\ldots,tx_n].$$

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^i(P^n)\otimes H^{n-i}(P^n) \arrow[r, "\smile"] & H^n(P^n) \\
H^i\big(P^n,P^n\setminus P^{n-i}\big)\otimes H^{n-i}\big(P^n,P^n\setminus P^i\big) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\smile"] & H^n\big(P^n,P^n\setminus\{p\}\big) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^{n-i}\big)\otimes H^{n-i}\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^i\big) \arrow[d] \arrow[r, "\smile"] & H^n\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\big) \arrow[d] \\
H^i\big(\mathbb{R}^i,\mathbb{R}^i\setminus\{0\}\big)\otimes H^{n-i}\big(\mathbb{R}^{n-i},\mathbb{R}^{n-i}\setminus\{0\}\big) \arrow[d] \arrow[r, "\smile"] & H^n\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\big) \arrow[d] \\
H^i(I^i,\partial I^i)\otimes H^{n-i}(I^{n-i},\partial I^{n-i}) \arrow[r, "\smile"] & H^n(I^n,\partial I^n) \\
H^i(T^i,\dot{T}^i)\otimes H^{n-i}(T^{n-i},\dot{T}^{n-i}) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\smile"] & H^n(T^n,\dot{T}^n) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^i(T^i)\otimes H^{n-i}(T^{n-i}) \arrow[r, "\smile"] & H^n(T^n).
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные стрелки представляют собой разные варианты относительного $\smile$-произведения (18), а $\dot{T}^n$ обозначает $(n-1)$-мерный остов n-мерного тора со стандартной клеточной структурой. Первая (сверху) пара вертикальных стрелок — изоморфизмы, так как $H^i(P^n,P^n\setminus P^{n-i})\cong H^i(P^n,P^{i-1})$ (см. выше), а $H^i(P^n)\to H^i(P^n,P^{i-1})$ — изоморфизм (это следует из клеточных когомологий, так как все клеточные дифференциалы нулевые). Вторая пара вертикальных стрелок — изоморфизмы согласно вырезанию. Третья и четвёртая пары вертикальных стрелок являются изоморфизмами, так как там имеются очевидные деформационные ретракции. Пятая пара вертикальных стрелок — изоморфизмы, индуцированные факторотображениями $I^n\to T^n$. Нижняя пара вертикальных стрелок — изоморфизмы, так как все дифференциалы в клеточном коцепном комплексе тора нулевые. Наконец, нижняя горизонтальная стрелка является изоморфизмом благодаря предложению 6.10. Итак, верхняя горизонтальная стрелка также изоморфизм, что завершает описание кольца $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$.

Изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2[u]$ следует из конечномерного случая, так как вложение $\mathbb{R}P^n\hookrightarrow\mathbb{R}P^\infty$ индуцирует изоморфизм групп H^i при $i\leqslant n$.

Доказательство для $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{C}P^\infty$ аналогично, надо лишь рассматривать коэффициенты в $\mathbb{Z}$ и удвоить размерности групп и пространств. ☐

Задачи и упражнения.

6.12. Докажите, что для произвольных R-модулей A,B,C существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R B,C)\cong\mathrm{Hom}_R(A,\mathrm{Hom}_R(B,C)).$$

6.13. Докажите, что если R — область главных идеалов, то для R-модулей A,C и свободного R-модуля B существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_R(A\otimes_R B,C)\cong\mathrm{Ext}_R(A,\mathrm{Hom}_R(B,C)).$$

6.14. Докажите следующую формулу, связывающую $\smile$- и $\times$-произведения:

$$(\varphi_1\times\psi_1)\smile(\varphi_2\times\psi_2)=(-1)^{q_1p_2}(\varphi_1\smile\varphi_2)\times(\psi_1\smile\psi_2)$$

для $\varphi_1\in H^{p_1}(X)$, $\psi_1\in H^{q_1}(Y)$, $\varphi_2\in H^{p_2}(X)$, $\psi_2\in H^{q_2}(Y)$.

6.15. Докажите изоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[v]/(2v)$, где $\deg v=2$. Опишите кольцо когомологий $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$.

6.16. Докажите изоморфизм колец $H^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)\cong\mathbb{Z}[v_1,v_2]$, $\deg v_1=\deg v_2=2$.

7. Двойственность Пуанкаре

Для ориентируемого замкнутого n-мерного многообразия M имеют место изоморфизмы двойственности Пуанкаре $H^k(M)\cong H_{n-k}(M)$. Для коэффициентов в $\mathbb{Z}_2$ изоморфизмы $H^k(M;\mathbb{Z}_2)\cong H_{n-k}(M;\mathbb{Z}_2)$ имеют место без предположения об ориентируемости. Мы также докажем изоморфизмы двойственности в более общей ситуации: для когомологий с компактными носителями некомпактных многообразий и для многообразий с краем.

7.1. Гладкие и топологические многообразия.

Топологическим *многообразием* размерности n называется такое хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, что для каждой точки $x\in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в $\mathbb{R}^n$. Компактные многообразия традиционно называют *замкнутыми*.

Гладким атласом на n-мерном многообразии M называется открытое покрытие $M=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ многообразия M, в котором для каждого множества U_α фиксирован гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha\xrightarrow{\cong}V_\alpha$, называемый *картой*, где $V_\alpha\subset\mathbb{R}^n$, и на пересечениях $U_\alpha\cap U_\beta$ *отображения замены координат*

$$\psi_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\colon\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n$.

Выбор гладкого атласа на многообразии называется *гладкой структурой*, а многообразие с гладким атласом — *гладким* (или *дифференцируемым*) *многообразием*.

Примерами гладких многообразий являются $\mathbb{R}^n$, сферы S^n, проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$, классические двумерные поверхности. Произведение гладких многообразий снова является гладким многообразием.

Не являются многообразиями графы с вершинами степени $\geqslant 2$ и бесконечномерные клеточные пространства типа S^∞, $\mathbb{R}P^\infty$ и $\mathbb{C}P^\infty$. Конус, надстройка, смэш-произведение и джойн многообразий, как правило, не являются многообразиями.

7.2. **Группы локальных гомологий. Ориентация. Фундаментальный класс.** Пусть X — топологическое пространство. Группа $H_n(X, X \setminus \{x\})$ называется *n-й группой локальных гомологий* пространства X в точке x.

Предложение 7.1. *Пусть M — топологическое n-мерное многообразие. Тогда $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_i(M, M \setminus \{x\}) = 0$ при $i \neq n$ для любой точки $x \in M$.*

Доказательство. Имеем

$$H_i(M, M \setminus \{x\}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}),$$

где первый изоморфизм следует из теоремы вырезания, а второй — из точной последовательности пары. Теперь утверждение следует из предложения 2.15. □

Локальная ориентация n-мерного многообразия M в точке x — это выбор одной из двух образующих группы локальных гомологий $H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Выберем локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ в каждой точке $x \in M$. Такой выбор называется *согласованным*, если для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность B, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$, что для каждой точки $y \in B$ образующие μ_x и μ_y переходят друг в друга при изоморфизмах

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{y\}),$$

индуцированных вложениями $M \setminus B \to M \setminus \{x\}$ и $M \setminus B \to M \setminus \{y\}$. Многообразие M называется *ориентируемым*, если существует согласованный выбор локальных ориентаций всех его точек. Такой выбор называется *ориентацией* многообразия M. Если многообразие M связно и ориентируемо, то у него есть в точности две ориентации.

Рассмотрим множество, состоящее из пар (x, μ_x):

$$\widetilde{M} = \{(x, \mu_x)\colon x \in M,\ \mu_x \text{ — локальная ориентация в точке } x \in M\}.$$

Для каждого подмножества $B \subset M$, гомеоморфного открытому шару в $\mathbb{R}^n$, и образующей $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B) \cong \mathbb{Z}$ определим подмножество $U(\mu_B) \subset \widetilde{M}$ как

$$U(\mu_B) = \big\{(x, \mu_x)\colon x \in B,\ \mu_B \text{ переходит в } \mu_x \\ \text{при изоморфизме } H_n(M, M \setminus B) \to H_n(M, M \setminus \{x\})\big\}.$$

Введём на $\widetilde{M}$ топологию, базу которой образуют подмножества $U(\mu_B)$. Тогда из этой конструкции и определения ориентируемости вытекает следующее.

Предложение 7.2. *Пусть M связно. Тогда*

а) *M ориентируемо в том и только том случае, когда $\widetilde{M}$ имеет две компоненты связности, т. е. $\widetilde{M} = M \sqcup M$;*

б) *если M не ориентируемо, то $\widetilde{M}$ — связное ориентируемое многообразие, а проекция $\widetilde{M} \to M$, $(x, \mu_x) \mapsto x$, является двулистным накрытием.*

Двулистное накрытие $\widetilde{M} \to M$ неориентируемого многообразия M называется *ориентирующим накрытием*.

Следствие 7.3. *Односвязное многообразие ориентируемо.*

Также M ориентируемо, если в $\pi_1(M)$ нет подгрупп индекса 2.

Рассматривая группы гомологий с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей, получим определение *R-ориентируемого* многообразия. (Образующей в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$ называется любой обратимый элемент кольца R.) Любое многообразие $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо, так как образующая в $\mathbb{Z}_2$ единственна. Более того, легко видеть, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого R, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R (задача). Поэтому интерес представляют случаи $R = \mathbb{Z}$ и $R = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 7.4. *Пусть M — многообразие размерности n и $A \subset M$ — компактное подмножество. Тогда для коммутативного кольца R с единицей*

а) *элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю в том и только том случае, когда его образ α_x в $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ равен нулю для любой точки $x \in A$;*

б) *если выбраны согласованные локальные ориентации $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для всех $x \in A$, то существует единственный элемент $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A; R)$, который отображается в μ_x при гомоморфизме $r_A\colon H_n(M, M \setminus A; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ для любой точки $x \in A$;*

в) *$H_i(M, M \setminus A; R) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Доказательство леммы разобьём на несколько шагов. Будем опускать коэффициенты R в обозначениях групп гомологий.

Шаг 1. Если лемма верна для A, B и $A \cap B$, то она верна и для $A \cup B$. Рассмотрим точную последовательность Майера–Виеториса для пар (теорема 2.21):

$$0 \to H_n(M, M \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(M, M \setminus (A \cap B)).$$

Слева стоит 0 так как $H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) = 0$ по предположению. Кроме того, группы $H_i(M, M \setminus (A \cup B))$ при $i > n$ стоят между двумя нулевыми группами в последовательности, поэтому они равны нулю, что доказывает утверждение в). Утверждение а) для $A \cup B$ следует из утверждения а) для A и B в силу инъективности φ.

Для доказательства утверждения б) для $A \cup B$ рассмотрим элементы $\mu_A \in H_n(M, M \setminus A)$ и $\mu_B \in H_n(M, M \setminus B; R)$, которые существуют по предположению. При отображении $H_n(M, M \setminus A) \to H_n(M, M \setminus (A \cap B))$ элемент μ_A переходит в элемент, удовлетворяющий условию из утверждения б) для $A \cap B$, т. е. в $\mu_{A \cap B}$, в силу единственности такого элемента. Аналогично μ_B переходит в $\mu_{A \cap B}$ при отображении $H_n(M, M \setminus B) \to H_n(M, M \setminus (A \cap B))$. Следовательно, отображение ψ из точной последовательности Майера–Виеториса переводит элемент $(\mu_A, -\mu_B)$ в нуль. Поэтому $(\mu_A, -\mu_B) = \varphi(\mu_{A \cup B})$ для некоторого $\mu_{A \cup B} \in H_n(M, M \setminus (A \cup B))$. Этот элемент $\mu_{A \cup B}$ удовлетворяет условию из утверждения б) для $A \cup B$, а его единственность следует из инъективности φ.

Шаг 2. Сводим лемму к случаю, когда M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (одна карта). Компактное подмножество A содержится в конечном объединении карт некоторого атласа M, т. е. $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Будем вести индукцию по k. Положим $A_i = U_i \cap A$ и применим утверждение предыдущего шага к $A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ и A_k. В результате утверждение сводится к случаю $k = 1$, т. е. к случаю одной карты.

Шаг 3. $A = K$ — конечный симплициальный комплекс. Если $A = \Delta^k$ — симплекс, то $\mathbb{R}^n \setminus A \to \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ — деформационная ретракция и $r_A\colon H_i(M, M \setminus A) \to H_i(M, M \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in A$. Далее лемма для K сводится к случаю одного симплекса по индукции при помощи утверждения из шага 1.

Шаг 4. $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный компакт. Пусть элемент $\alpha = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ представлен относительным циклом a. Тогда $\partial a \subset C$ для некоторого компакта $C \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Построим симплициальный комплекс K, для которого $A \subset K$ и $K \cap C = \varnothing$. (Покроем A симплексом, перейдём к кратному барицентрическому подразделению с диаметром симплексов меньше расстояния между A и C и оставим только n-симплексы, пересекающие A.) Тогда a задаёт класс $\alpha_K = [a] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$, который отображается в данный элемент α при гомоморфизме $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \to H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$ при $i > n$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ при $i > n$, что доказывает третье утверждение леммы.

Пусть теперь $i = n$. Предположим, что $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in A$. Тогда и $\alpha_x = 0$ для любой точки $x \in K$, так как K — объединение n-симплексов, пересекающих A, а $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ — изоморфизм для $x \in \Delta^n$. Согласно предыдущему шагу $\alpha_K = 0$, а значит и $\alpha = 0$. Это доказывает первое утверждение леммы и единственность во втором утверждении.

Для доказательства существования продолжим согласованные ориентации μ_x, $x \in A$, на симплекс $\Delta^n \supset A$. Для Δ^n существование элемента $\mu_{\Delta^n} \in H_n(M, M \setminus \Delta^n)$ очевидно. Тогда искомый элемент μ_A есть образ элемента μ_{Δ^n} при гомоморфизме $H_n(M, M \setminus \Delta^n) \to H_n(M, M \setminus A)$. ☐

Если многообразие M замкнуто (компактно), то мы можем положить $A = M$ в лемме 7.4. Тогда из утверждения б) получаем, что если M замкнуто и ориентировано, т. е. согласованно выбраны образующие $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, то существует единственный класс $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$, переходящий в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ для любой точки $x \in M$. Этот класс называется *фундаментальным классом* ориентированного многообразия M и обозначается $[M]$.

Теперь можно сформулировать теорему о связи ориентируемости и старшей группы гомологий для замкнутых связных многообразий M.

Теорема 7.5. *Пусть M — замкнутое связное многообразие размерности n. Тогда*

а) *отображение $H_n(M; \mathbb{Z}_2) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ является изоморфизмом для любой точки $x \in M$;*

б) *если M ориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — изоморфизм для любой точки $x \in M$; если M неориентируемо, то $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;*

в) *$H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$.*

Доказательство. Положим $A = M$ и $R = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в лемме 7.4. Утверждение в) вытекает из утверждения в) леммы.

Пусть $x \in M$. Покажем, что для связного многообразия M гомоморфизм $H_n(M; R) \to H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$, $\alpha \mapsto \alpha_x$, инъективен. Пусть $\alpha_x = 0$ для некоторого $\alpha \in H_n(M; R)$. Тогда если $y \in M$ — другая точка, содержащаяся вместе с x в окрестности B, гомеоморфной открытому шару, то гомоморфизмы для x и y

раскладываются в композицию следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
H_n(M;R) \arrow[r] & H_n(M,M\setminus B;R) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & H_n(M,M\setminus\{x\};R) \\
& H_n(M,M\setminus\{y\};R) &
\end{tikzcd}$$

Так как M связно, отсюда следует, что $\alpha_y = 0$ для любой точки $y \in M$. Следовательно, $\alpha = 0$ в силу утверждения а) леммы 7.4.

Если многообразие M является R-ориентируемым, то гомоморфизм $H_n(M;R) \to H_n(M, M\setminus\{x\};R)$ сюръективен в силу утверждения б) леммы 7.4 (для $A = M$). Это доказывает утверждение а) теоремы (так как M всегда $\mathbb{Z}_2$-ориентируемо) и первую часть утверждения б).

Пусть M неориентируемо. Так как гомоморфизм $H_n(M) \to (M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ инъективен, получаем $H_n(M) \cong 0$ или $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Предположим последнее, и пусть α — образующая. Тогда $\alpha_x = k\mu_x$, где $\mu_x \in H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая, а k — положительное целое число. Из приведённой выше диаграммы следует, что k не зависит от x и μ_x можно выбрать согласованно для всех $x \in M$. Это противоречит предположению о неориентируемости многообразия M. Итак, $H_n(M) \cong 0$. ☐

Таким образом, для замкнутого связного M имеем $H_n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ всегда, а $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ или 0 в зависимости от того, является M ориентируемым или нет, а выбор ориентации на M — это выбор образующей группы $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (фундаментального класса).

Предположим, что замкнутое многообразие M триангулировано или на нём задана структура конечного полусимплициального комплекса с n-мерными симплексами σ_i, $i = 1,\dots,k$. Тогда каждый $(n-1)$-мерный симплекс τ является гранью в точности двух n-мерных симплексов σ_i и σ_j. Если M ориентируемо, то ориентации симплексов σ_i можно выбрать согласованно. Это означает, что можно выбрать отображения $\sigma_i\colon \Delta^n = [v_0,\dots,v_n] \to M$ так, что каждый τ входит в $\partial\sigma_i$ и $\partial\sigma_j$ с разными знаками. Тогда $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$ и цикл $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ представляет образующую группы $H_n(M)$ — фундаментальный класс $[M]$. Для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$ цепь $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ — всегда цикл, представляющий образующую группы $H_n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

7.3. **Степень отображения многообразий.** Пусть $f\colon M \to N$ — отображение связных замкнутых ориентированных n-мерных многообразий с фундаментальными классами $[M]$ и $[N]$. Тогда для $f_*\colon H_n(M;\mathbb{Z}) \to H_n(N;\mathbb{Z})$ имеем $f_*[M] = d[N]$. Целое число d называется *степенью* отображения $f\colon M \to N$.

Предложение 7.6. *Для любого связного замкнутого ориентированного n-мерного многообразия M и любого $d \in \mathbb{Z}$ существует отображение $M \to S^n$ степени d.*

Доказательство. Сначала построим отображение степени 1. Пусть $U \subset M$ — карта, причём $U \cong \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $M \to M/(M\setminus U) \cong S^n$. Для любой точки $x \in U$ имеем композицию гомоморфизмов $H_n(M) \to H_n(M, M\setminus U) \to H_n(M, M\setminus\{x\})$, при которой $[M]$ переходит в μ_x. Отсюда следует, что образ класса $[M]$ при первом гомоморфизме есть фундаментальный класс $[S^n] \in H_n(S^n) \cong H_n(M, M\setminus\{x\})$, а значит отображение $M \to M/(M\setminus U)$ имеет степень 1. Композиция этого отображения с любым отображением $S^n \to S^n$ степени d даёт отображение $M \to S^n$ степени d. ☐

7.4. **$\frown$-произведение и изоморфизмы двойственности.** Определим *произведение высечения*, или *$\frown$-произведение*

$$\frown\colon C_p(X;R)\times C^q(X;R)\to C_{p-q}(X;R)$$

для $p\geqslant q$ по формуле

$$\sigma\frown\varphi=\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]},$$

где $\sigma\colon[v_0,\dots,v_p]\to X$ — сингулярный симплекс и $\varphi\in C^q(X;R)$ — коцепь.

Лемма 7.7. *$\partial(\sigma\frown\varphi)=(-1)^q(\partial\sigma\frown\varphi-\sigma\frown d\varphi)$.*

Доказательство. Непосредственная проверка:

$$\partial\sigma\frown\varphi=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\dots,v_p]}+\sum_{i=q+1}^{p}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,\widehat{v}_i\dots,v_p]},$$

$$\sigma\frown d\varphi=\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{q+1}]})\sigma|_{[v_{q+1},\dots,v_p]},$$

$$\partial(\sigma\frown\varphi)=\sum_{i=q}^{p}(-1)^{i-q}\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\dots,\widehat{v}_i\dots,v_p]}.\quad\square$$

Отсюда получаем R-билинейное отображение (*гомологическое $\frown$-произведение)*

$$H_p(X;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X;R).$$

Имеются также относительные версии:

$$H_p(X,A;R)\times H^q(X;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X,A;R),$$
$$H_p(X,A;R)\times H^q(X,A;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X;R),$$
$$H_p(X,A\cup B;R)\times H^q(X,A;R)\xrightarrow{\frown}H_{p-q}(X,B;R).$$

Лемма 7.8 (функториальность)**.** *Для $f\colon X\to Y$ отображения в диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
H_p(X)\times H^q(X) \arrow[r, "\frown"] & H_{p-q}(X) \arrow[d, "f_*"] \\
H_p(Y)\times H^q(Y) \arrow[r, "\frown"] & H_{p-q}(Y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_p(X) \arrow[d, "f_*"'] & \times & H^q(X) \arrow[r, "\frown"] & H_{p-q}(X) \arrow[d, "f_*"'] \\
H_p(Y) & \times & H^q(Y) \arrow[u, "f^*"'] \arrow[r, "\frown"] & H_{p-q}(Y)
\end{tikzcd}$$

удовлетворяют соотношению $f_*(\alpha)\frown\varphi=f_*(\alpha\frown f^*(\varphi))$.

Доказательство. $f\sigma\frown\varphi=\varphi(f\sigma|_{[v_0,\dots,v_q]})f\sigma|_{[v_q,\dots,v_p]}$. $\square$

Теперь мы можем сформулировать теорему об изоморфизмах *двойственности Пуанкаре.*

Теорема 7.9. *Пусть M — замкнутое R-ориентируемое n-мерное многообразие с фундаментальным классом $[M]\in H_n(M;R)$. Тогда отображение*

$$D\colon H^k(M;R)\to H_{n-k}(M;R),\quad \varphi\mapsto[M]\frown\varphi,$$

является измоморфизмом для любого k.

Доказательство этой теоремы будет аналогично доказательству существования фундаментального класса: с помощью последовательности Майера–Вьеториса мы сведём утверждение к случаю $M = \mathbb{R}^n$. Но для этого нам понадобится версия двойственности Пуанкаре для некомпактных многообразий. Она использует понятие когомологий с компактными носителями.

7.5. **Когомологии с компактными носителями.** Для пространства X определим группу i-мерных *сингулярных коцепей с компактными носителями* с коэффициентами в G как подгруппу $C^i_c(X;G)$ в $C^i(X;G)$, состоящую из коцепей, обращающихся в нуль вне некоторого компактного подмножества (зависящего от коцепи):

$$C^i_c(X;G) = \{f\colon C_i(X) \to G\colon f|_{C_*(X\setminus K_f)} = 0 \quad \text{для некоторого компактного } K_f \subset X\}.$$

Коцепное кограничное отображение ограничивается на группы коцепей с компактными носителями: $d\colon C^i_c(X;G) \to C^{i+1}_c(X;G)$. Группы когомологий получаемого коцепного комплекса называются *когомологиями с компактными носителями* и обозначаются $H^i_c(X;G)$. Если само пространство X компактно, то $C^i_c(X;G) = C^i(X;G)$ и $H^i_c(X;G) = H^i(X;G)$.

Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств, то мы имеем мономорфизм $C^i(X, X\setminus K;G) \hookrightarrow C^i(X, X\setminus L;G)$ и $C^i_c(X;G) = \bigcup_{K\subset X} C^i(X, X\setminus K;G)$. Индуцированный гомоморфизм гомологий $H^i(X, X\setminus K;G) \to H^i(X, X\setminus L;G)$ может не быть инъективным. Однако группу $H^i_c(X;G)$ также можно описать через группы $H^i(X, X\setminus K;G)$ при помощи следующей алгебраической конструкции.

Конструкция 7.10 (прямой предел (копредел) групп). Пусть $(P,\leqslant)$ — частично упорядоченное множество. *Диаграммой* абелевых групп, индексированной множеством P, называется такой набор $D = \{G_\alpha\colon \alpha \in P\}$ абелевых групп G_α и гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$, что $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$ и $f_{\alpha\gamma}$ есть композиция $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\beta\gamma}$, если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Пусть $\mathcal{P}$ — категория, объектами которой являются элементы $\alpha \in P$, и между α и β имеется единственный морфизм, если $\alpha \leqslant \beta$. Тогда диаграмма — это (ковариантный) функтор $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{AB}$, $\alpha \mapsto G_\alpha$, из $\mathcal{P}$ в категорию абелевых групп.

Прямым пределом или *копределом* диаграммы D абелевых групп называется факторгруппа прямой суммы $\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha$ по подгруппе, порождённой всеми элементами вида $g_\alpha - f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$. Обозначение: $\operatorname{colim} D$ или $\varinjlim G_\alpha$.

Определены канонические гомоморфизмы $i_\alpha\colon G_\alpha \to \varinjlim G_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям $i_\beta f_{\alpha\beta} = i_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$.

Если в P существует наибольший элемент μ, то $\varinjlim G_\alpha = G_\mu$. Если никакие два различных элемента в P не находятся в отношении порядка, то $\varinjlim G_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha$.

Предложение 7.11. *Пусть в P для любых двух элементов $\alpha, \beta \in P$ существует такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$. Тогда прямой предел $\varinjlim G_\alpha$ можно отождествить с фактормножеством $(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha)/{\sim}$ по отношению эквивалентности, порождённому эквивалентностями $g_\alpha \sim f_{\alpha\beta}(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$.*

Доказательство. Введём на фактормножестве $(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha)/\sim$ структуру абелевой группы следующим образом. Для классов эквивалентности $[g_\alpha]$ и $[g_\beta]$ элементов $g_\alpha \in G_\alpha$ и $g_\beta \in G_\beta$ найдём такой элемент $\gamma \in P$, что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$, и положим

$[g_\alpha] + [g_\beta] = [f_{\alpha\gamma}(g_\alpha) + f_{\beta\gamma}(g_\beta)]$, где в правой части элементы складываются в группе G_γ. Тогда отображение

$$\varinjlim G_\alpha = \Big(\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha\Big)/\!\sim\ \to \Big(\bigsqcup_{\alpha\in P} G_\alpha\Big)/\!\sim, \quad [g_\alpha] \mapsto [g_\alpha],$$

является изоморфизмом. ☐

Предложение 7.12 (универсальное свойство прямого предела)**.** *Пусть* $D = \{G_\alpha\colon \alpha \in P\}$ *— диаграмма абелевых групп, индексированная частично упорядоченным множеством* P*. Предположим, что заданы гомоморфизмы* $h_\alpha\colon G_\alpha \to H$*, удовлетворяющие соотношениям* $h_\beta f_{\alpha\beta} = h_\alpha$ *при* $\alpha \leqslant \beta$*. Тогда существует единственный такой гомоморфизм* $h\colon \varinjlim G_\alpha \to H$*, что* $hi_\alpha = h_\alpha$*:*

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[dd, "f_{\alpha\beta}"'] \arrow[drr, bend left, "h_\alpha"] & & \\
& \varinjlim G_\alpha \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
G_\beta \arrow[ur, "i_\beta"'] \arrow[urr, bend right, "h_\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Гомоморфизм h однозначно задаётся условием $h([g_\alpha]) = h_\alpha(g_\alpha)$ для $g_\alpha \in G_\alpha$, $[g_\alpha] \in \varinjlim G_\alpha = (\bigoplus_{\alpha\in P} G_\alpha)/\!\sim$. ☐

Это универсальное свойство определяет копредел диаграммы $D\colon \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ для произвольной категории $\mathcal{C}$. Конструкция 7.10 показывает, что копределы существуют в категории абелевых групп. Копределы диаграмм также существуют в категории топологических пространств: прямую сумму необходимо заменить на несвязное объединение (копроизведение пространств), а факторгруппу — на факторпространство.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное по включению множество компактных подмножеств $K \subset X$. Мы имеем диаграмму групп $H^i(X, X \setminus K; G)$ и гомоморфизмов $H^i(X, X \setminus K; G) \to H^i(X, X \setminus L; G)$ для $K \subset L$.

Предложение 7.13. $H^i_c(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$.

Доказательство. Так как каждый элемент из $H^i_c(X; G)$ представлен коциклом в $C^i(X, X \setminus K; G)$ для некоторого компактного $K \subset X$, получаем гомоморфизм $H^i_c(X; G) \to \big(\bigoplus_{K\subset X} H^i(X, X \setminus K; G)\big)/\!\sim\ = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$. Сюръективность и инъективность этого гомоморфизма следует из определений (задача). ☐

Пример 7.14. Вычислим когомологии с компактными носителями пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть B_k — шар радиуса $k > 0$ с центром в нуле. Так как каждое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ содержится в некотором B_k, мы имеем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) = \varinjlim H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G),$$

где последний предел берётся по упорядоченному множеству шаров B_k. Так как $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) \to H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_l; G)$ — изоморфизм при $k < l$, получаем

$$H^i_c(\mathbb{R}^n; G) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k; G) = \begin{cases} G & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь R-ориентируемое n-мерное многообразие M, возможно некомпактное. Далее гомологии и когомологии будем рассматривать с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей.

Согласно лемме 7.4 существует единственный элемент $\mu_K \in H_n(M, M\setminus K)$, который отображается в локальную ориентацию $\mu_x \in H_n(M, M\setminus\{x\})$ для любой точки $x \in K$. Рассмотрим гомоморфизм $H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M)$, $\varphi \mapsto \mu_K \frown \varphi$. Если $K \subset L$ — вложение компактных подмножеств и $i\colon (M, M\setminus L) \to (M, M\setminus K)$ — соответствующее отображение пар, то диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^k(M, M \setminus K) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"'] & H_{n-k}(M) \arrow[d, equal] & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_K \frown \varphi \\
H^k(M, M \setminus L) \arrow[r] & H_{n-k}(M) & \varphi \arrow[r, mapsto] & \mu_L \frown \varphi
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Действительно, $\mu_L \frown i^*(\varphi) = i_*(\mu_L) \frown \varphi = \mu_K \frown \varphi$, где первое соотношение следует из леммы 7.8, а $i_*(\mu_L) = \mu_K$ в силу единственности μ_K. Тогда из предложения 7.12 получаем, что определён *гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H^k_c(M) = \varinjlim H^k(M, M \setminus K) \to H_{n-k}(M).$$

Теорема 7.15. *Для R-ориентируемого n-мерного многообразия M гомоморфизм двойственности*

$$D_M\colon H^k_c(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$$

является изоморфизмом.

Так как $H^k_c(M; R) = H^k(M; R)$ для компактного M, теорема 7.9 вытекает из теоремы 7.15.

Доказательство теоремы 7.15. Будем опускать обозначения коэффициентов R.

Шаг 1. $M = \mathbb{R}^n$. Из примера 7.14 получаем, что единственная нетривиальная группа когомологий с компактными носителями есть $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — шар. Гомоморфизм двойственности есть

$$D_{\mathbb{R}^n}\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \to H_0(\mathbb{R}^n) \cong R, \quad \varphi \mapsto \mu_B \frown \varphi.$$

Здесь класс $\mu_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ представлен любым симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, содержащим B в своей внутренности. Группа $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong R$ порождена коцепью, принимающей значение 1 на Δ^n и 0 на остальных симплексах. При этом $\mu_B \frown \varphi = \varphi(\mu_B)$ — спаривание n-коцепи с n-цепью μ_B. Поэтому $D_{\mathbb{R}^n}$ — изоморфизм.

Следующие шаги основаны на применении последовательности Майера–Виеториса. Пусть $M = U \cup V$, где U и V открыты. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k_c(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H^k_c(M) \arrow[r] \arrow[d, "D_M"] & H^{k+1}_c(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_{n-k}(U \cap V) \arrow[r] & H_{n-k}(U) \oplus H_{n-k}(V) \arrow[r] & H_{n-k}(M) \arrow[r] & H_{n-k-1}(U \cap V) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до знака. Мы оставим это без доказательства, см. [Ха, лемма 3.36].

Шаг 2. M — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Представим M в виде счётного объединения открытых шаров, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Положим $V_k = U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Докажем по индукции, что D_{V_k} — изоморфизм для любого k. Случай $k=1$ — это шаг 1, так как $U_1 \cong \mathbb{R}^n$. Далее, $V_k = U_k \cup V_{k-1}$, причём V_{k-1} и $U_k \cap V_{k-1}$ гомеоморфны объединению $k-1$ открытых шаров. Рассмотрим коммутативную диаграмму выше с $U = U_k$ и $V = V_{k-1}$. Из предположения индукции и 5-леммы получаем, что D_{V_k} — изоморфизм.

Теперь мы получаем, что M — объединение последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ Если $K \subset V_i$ — компактное подмножество, то $H^k(V_i, V_i \setminus K) = H^k(M, M \setminus K)$ согласно вырезанию. Так как каждое компактное подмножество в M содержится в некотором V_i, получаем $H_c^k(M) = \varinjlim H_c^k(V_i)$. Кроме того, $H_{n-k}(M) = \varinjlim H_{n-k}(V_i)$ (задача). Поэтому гомоморфизм $D_M\colon H_c^k(M) \to H_{n-k}(M)$ является пределом гомоморфизмов $D_{V_i}\colon H_c^k(V_i) \to H_{n-k}(V_i)$. Так как каждый D_{V_i} — изоморфизм, D_M тоже изоморфизм.

Шаг 3. Произвольное M. Так как M имеет счётную базу, его можно представить в виде объединения $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, где каждое U_i гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Далее рассуждение в точности повторяет рассуждение из предыдущего шага с заменой открытых шаров на открытые множества в $\mathbb{R}^n$. □

7.6. **Связь с умножением. Сигнатура.** Градуированно-коммутативная алгебра A над полем $\mathbf{k}$ называется *алгеброй Пуанкаре*, если она связна (т. е. $A^0 \cong \mathbf{k}$), конечномерна (т. е. $A = \bigoplus_{i=0}^{d} A^i$, где все A^i конечномерны) и $\mathbf{k}$-линейные отображения

$$A^i \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d),$$
$$a \mapsto m_a, \quad \text{где } m_a(b) = ab,$$

являются изоморфизмами при $0 \leqslant i \leqslant d$. Для алгебры Пуанкаре имеем $A^0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^d, A^d)$, так что $A^d \cong A^0 \cong \mathbf{k}$ и $A^i \cong A^{d-i}$.

Мы докажем, что для замкнутого связного многообразия M алгебра когомологий $H^*(M;\mathbb{Z}_2)$ является алгеброй Пуанкаре всегда, а алгебра когомологий $H^*(M;\mathbf{k})$ с коэффициентами в произвольном поле $\mathbf{k}$ является алгеброй Пуанкаре, если M ориентируемо.

Нам понадобится формула, связывающая $\frown$- и $\smile$-произведения.

Лемма 7.16. *Для $\alpha \in C_p(X)$, $\varphi \in C^q(X)$ и $\psi \in C^{p-q}(X)$ имеет место формула*

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\alpha).$$

Доказательство. Для сингулярного симплекса $\sigma\colon \Delta^p \to X$ имеем

$$\psi(\sigma \frown \varphi) = \psi\bigl(\varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\sigma|_{[v_q,\ldots,v_p]}\bigr) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_q]})\psi(\sigma|_{[v_q,\ldots,v_p]}) = (\varphi \smile \psi)(\alpha). \quad \square$$

Рассмотрим ориентированное замкнутое многообразие M с фундаментальным классом $[M] \in H_n(M)$. Тогда $\smile$-произведение определяет билинейную функцию (*спаривание*)

$$H^i(M;\mathbf{k}) \times H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathbf{k}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M], \tag{28}$$

для любого поля $\mathbf{k}$ и $0 \leqslant i \leqslant n$.

Напомним, что билинейное спаривание $f\colon V \times W \to \mathbf{k}$, $(v,w) \mapsto f(v,w)$, векторных пространств над $\mathbf{k}$ называется *невырожденным*, если линейные отображения $W \to \mathrm{Hom}(V,\mathbf{k})$, $w \mapsto f(-,w)$, и $V \to \mathrm{Hom}(W,\mathbf{k})$, $v \mapsto f(v,-)$, являются изоморфизмами.

Теорема 7.17. *Для замкнутого многообразия M спаривание* (28) *невырожденно, если M ориентируемо или если поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику* 2.

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H_{n-i}(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}),$$

где h — гомоморфизм, задаваемый вычислением коцепей на цепях, а D^* — гомоморфизм, двойственный к изоморфизму двойственности Пуанкаре $D\colon H^i(M;\mathbf{k}) \to H_{n-i}(M;\mathbf{k})$. Композиция D^*h является изоморфизмом, так как h — изоморфизм для коэффициентов в поле $\mathbf{k}$ в силу формул универсальных коэффициентов (теорема 5.6). С другой стороны, композиция D^*h переводит $\psi \in H^{n-i}(M;\mathbf{k})$ в гомоморфизм $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$, где последнее равенство следует из леммы 7.16. Отсюда следует, что D^*h — первый из изоморфизмов в определении невырожденного спаривания. Второй изоморфизм вытекает из коммутативности $\smile$-произведения. ☐

Следствие 7.18. *Алгебра когомологий* $H^*(M;\mathbf{k}) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M;\mathbf{k})$ *связного замкнутого многообразия* M *является алгеброй Пуанкаре, если* M *ориентируемо или если поле* $\mathbf{k}$ *имеет характеристику* 2.

Доказательство. Условие $H^0(M;\mathbf{k}) \cong \mathbf{k}$ вытекает из связности M. Конечномерность групп когомологий компактного многообразия оставим без доказательства (для гладких многообразий есть явная конструкция конечного клеточного разбиения, происходящая из теории Морса; для топологических многообразий см. [Ха, следствие П.9]).

Чтобы проверить, что гомоморфизм $H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}), H^n(M;\mathbf{k}))$, $\psi \mapsto (\varphi \mapsto \varphi \smile \psi)$, является изоморфизмом, рассмотрим композицию

$$H^{n-i}(M;\mathbf{k}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}), H^n(M;\mathbf{k})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^i(M;\mathbf{k}),\mathbf{k}),$$

где последний изоморфизм задаётся композицией с изоморфизмом $H^n(M;\mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ вычисления n-коцепи на фундаментальном классе. Приведённая выше композиция есть изоморфизм D^*h из доказательства теоремы 7.17. Поэтому первый гомоморфизм в композиции также является изоморфизмом. ☐

Билинейное спаривание (28) при $n = 2\ell$ и $i = \ell$ задаёт невырожденную билинейную функцию на средней группе когомологий $H^\ell(M;\mathbf{k})$ замкнутого ориентированного многообразия. Эта билинейная функция кососимметрическая, если ℓ нечётно, и симметрическая, если ℓ чётно (т. е. $n = 4k$).

Сигнатура (разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в диагональном виде) невырожденной симметрической билинейной функции

$$H^{2k}(M;\mathbb{R}) \times H^{2k}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (\varphi,\psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M],$$

является гомотопическим инвариантом замкнутого ориентированного $4k$-мерного многообразия M и называется его *сигнатурой*.

7.7. **Двойственность для многообразий с краем.** Топологическим *многообразием с краем* размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой, для каждой точки $x \in M$ которого существует окрестность U, гомеоморфная открытому подмножеству V в полупространстве

$$\mathbb{R}^n_{\geqslant} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n \geqslant 0\}.$$

Если такой гомеоморфизм переводит точку $x \in M$ в точку $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n = 0$, то согласно вырезанию мы имеем $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n_{\geqslant}, \mathbb{R}^n_{\geqslant} \setminus \{0\}) = 0$. Если же $x \in M$ переходит при гомеоморфизме в точку $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с $x_n > 0$, то $H_n(M, M \setminus \{x\}) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$. Подмножество

$$\partial M = \{x \in M \colon H_n(M, M \setminus \{x\}) = 0\}$$

называется *краем* многообразия M. При любом гомеоморфизме между открытым множеством $U \subset M$ и открытым множеством $V \subset \mathbb{R}^n_{\geqslant}$ точки края переходят в точки с $x_n = 0$. Край ∂M является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Гладкое многообразие с краем определяется аналогично гладкому многообразию без края, при помощи гладкого атласа, в котором отображения перехода являются гладкими отображениями на открытых подмножествах в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$. (Отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ называется *гладким*, если оно является ограничением гладкого отображения между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$.)

Многообразие M с краем называется *ориентируемым*, если многообразие $M \setminus \partial M$ ориентируемо.

Для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0,1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$ (задача). Такая окрестность называется *воротником* края ∂M.

Используя воротник, мы получаем гомотопическую эквивалентность (деформационную ретракцию) $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$. Отсюда получаем изоморфизм

$$H_i(M, \partial M) \cong H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H_i(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon)$$

для $0 < \varepsilon < 1$, где $K_\varepsilon \subset M \setminus \partial M$ — компактное подмножество. Применяя лемму 7.4 к многообразию $M \setminus \partial M$ и компактному подмножеству K_ε, получаем, что если $M \setminus \partial M$ ориентировано, то существует единственный элемент $[M] \in H_n(M, \partial M)$, ограничение которого даёт локальные ориентации во всех точках $x \in M \setminus \partial M$. Класс $[M] \in H_n(M, \partial M)$ называется *фундаментальным классом* компактного ориентированного многообразия M с краем.

Теорема 7.19 (двойственность Пуанкаре–Лефшеца). *Пусть M — компактное ориентированное n-мерное многообразие с краем и $[M] \in H_n(M, \partial M)$ — фундаментальный класс. Тогда гомоморфизмы двойственности*

$$\begin{aligned} H^k(M, \partial M) &\to H_{n-k}(M), \qquad &\varphi \mapsto [M] \frown \varphi, \\ H^k(M) &\to H_{n-k}(M, \partial M), \qquad &\varphi \mapsto [M] \frown \varphi, \end{aligned}$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Теорема 7.15 даёт изоморфизм

$$D \colon H^k_c(M \setminus \partial M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M \setminus \partial M).$$

Из гомотопической эквивалентности $M \setminus \partial M \xrightarrow{\simeq} M$ получаем изоморфизмы

$$H_{n-k}(M \setminus \partial M) \cong H_{n-k}(M),$$
$$H^k(M, \partial M) \cong H^k(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon)) = H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K_\varepsilon).$$

Так как любое компактное подмножество $K \subset M \setminus \partial M$ содержится в некотором K_ε, получаем

$$H^k_c(M \setminus \partial M) = \varinjlim H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \cong H^k(M, \partial M).$$

Тогда изоморфизм D превращается в первый из доказываемых изоморфизмов. Доказательство второго изоморфизма остаётся в качестве задачи. $\square$

Задачи и упражнения.

7.20. Докажите, что S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ являются замкнутыми многообразиями, а шар D^n и полноторие $D^2 \times S^1$ являются многообразиями с краем.

7.21. Вычислите группы локальных гомологий $H_i(X, X \setminus x)$ для графа X и его произвольной точки x.

7.22. Докажите, что ориентируемое многообразие R-ориентируемо для любого коммутативного кольца R с единицей, а неориентируемое многообразие R-ориентируемо, если $2 = 0$ в кольце R.

7.23. Докажите, что многообразия S^n, T^n, $\mathbb{C}P^n$ ориентируемы. При каких n ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

7.24. Докажите, что $H^i_c(X) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K)$, где прямой предел берётся по компактным подмножествам $K \subset X$.

7.25. Пусть пространство X представлено в виде объединения последовательности вложенных открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, причём любое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором V_i. Докажите, что $H_k(M) = \varinjlim H_k(V_i)$.

7.26. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i\colon N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^* y, [N] \rangle = \langle x \smile y, [M] \rangle.$$

7.27. Определим действие группы $\mathbb{Z}_7$ на S^5 формулой

$$\tau \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{7}} z_0, e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{7}} z_1, e^{\frac{2\pi i \cdot 5}{7}} z_2),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}_7$ — образующая группы. Вычислите группы гомологий $S^5/\mathbb{Z}_7$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_7$.

7.28. *Связной суммой* $M \# N$ топологических многообразий M и N одной размерности n называется многообразие, получаемое вырезанием малых открытых шаров из M и N с последующим отождествлением их граничных сфер путём некоторого гомеоморфизма $S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$. Насколько выбор этого гомеоморфизма влияет на топологический тип результата — связной суммы? Гомеоморфны ли многообразия

а) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$;

б) $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией?

7.29. Докажите, что если n-мерные многообразия M и N замкнуты и ориентируемы, то $H_i(M \# N) = H_i(M) \oplus H_i(N)$ при $0 < i < n$. Как выглядит соответствующая формула в неориентируемом случае?

7.30. Докажите, что для замкнутых n-мерных многообразий M и N имеет место формула для эйлеровой характеристики $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n)$.

7.31. Пусть S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g. Докажите, что отображение $S_g \to S_h$ степени 1 существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$.

7.32. Вычислите кольцо когомологий

а) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$ и $x_2 = x_4 = 0$ в $\mathbb{R}^4$;

б) дополнения до объединения координатных плоскостей $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = x_1 = 0$ и $x_5 = x_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5$;

в) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$ и $z_2 = z_4 = 0$ в $\mathbb{C}^4$;

г) дополнения до объединения координатных плоскостей $z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $z_3 = z_5 = 0$, $z_4 = z_1 = 0$ и $z_5 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^5$.

7.33. Докажите, что для замкнутого ориентируемого $(4n+2)$-мерного многообразия M ранг группы $H^{2n+1}(M)$ чётный.

7.34. Вычислите сигнатуру многообразий $\mathbb{C}P^2$ и $S^2 \times S^2$. Для данного целого k постройте связное замкнутое ориентированное многообразие сигнатуры k.

7.35. Докажите, что для компактного многообразия M с краем существуют открытая окрестность $U(\partial M)$ края и гомеоморфизм $U(\partial M) \xrightarrow{\cong} \partial M \times [0,1)$, при котором ∂M переходит в $\partial M \times \{0\}$.

7.36. Докажите второй изоморфизм в теореме 7.19.

7.37. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

7.38. Пусть K — компактное подмножество в сфере S^n, причём вложение $K \subset S^n$ является корасслоением, т. е. удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Докажите *изоморфизмы двойственности Александера–Понтрягина*:

$$\widetilde{H}_i(S^n - K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(Эти изоморфизмы имеют место и без ограничения на вложение, если K — локально стягиваемое компактное подмножество.)

7.39. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1}. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{K} = \{I \subset [m] \colon [m] \setminus I \notin K\},$$

т. е. наборами вершин симплексов из $\widehat{K}$ являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K. Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий:

$$\widetilde{H}_j(K) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{K}).$$

Это комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.

Предметный указатель

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in

ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ