МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ГОРДИЕНКО
АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
АПЛЕТАЛИНА АЛЕКСЕЯ АНДРЕЕВИЧА

Содержание

Лекция 1

Гомологическая алгебра — это совокупность методов, возникших в конце XIX века и применявшихся в топологии. Гомологии дают алгебраическую картину топологических пространств, сопоставляя каждому пространству семейство абелевых групп (ко)гомологий, а каждому непрерывному отображению — гомоморфизмы между соответствующими группами. С середины XX века методы гомологической алгебры активно применяются в теории групп, колец, алгебр Ли, а также в алгебраической геометрии. Курс будет полезен не только алгебраистам, но и топологам, для которых он может послужить идеальным дополнением к курсам по алгебраической топологии.

Напоминания из топологии

Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым топологическим пространством*, если для любых $x, y \in X$ существуют такие открытые множества $U, V \subseteq X$, что $x \in U, y \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Пример. В качестве нехаусдорфового топологического пространства можно рассмотреть множество, состоящее из двух точек $X = \{a, b\}$, с заданным на нем набором открытых множеств $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Определение. *Замкнутым единичным n-мерным диском (шаром)* называется множество $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$.

Множество $S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots x_n^2 = 1\}$, являющееся границей $(n+1)$-мерного диска, называется *n-мерной сферой*.

Определение. Пусть X, Y — топологические пространства, $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения. Говорят, что f *гомотопно* g и пишут $f \sim g$, если существует непрерывное отображение $F : [0; 1] \times X \to Y$ такое, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для произвольного $x \in X$.

Определение. Говорят, что топологические пространства X, Y *гомотопически эквивалентны*, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ такие, что $fg \sim \mathrm{id}_Y$ и $gf \sim \mathrm{id}_X$.

Пример. *Стягиваемые пространства* — топологические пространства, гомотопически эквивалентные точке. Например, замкнутый диск, который можно непрерывно стянуть в центр (рис. 1.1).

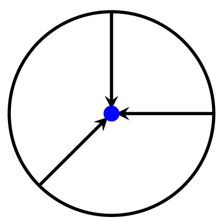

Рис. 1.1: Стягивание диска в точку.

Рассматриваются два непрерывных отображения: первое — отображение, переводящее все точки диска в рассматриваемую точку, второе — вложение точки в диск.

Приклеивание клеток по отображениям

Рассмотрим топологическое пространство Y, набор непересекающихся n-мерных дисков ($n \geq 1$) $D_1^n, \ldots, D_k^n$ и их границ $S_1^{n-1}, \ldots, S_k^{n-1}$, а также множество непрерывных отображений $f_j : S_j^{n-1} \to Y$, $1 \leq j \leq k$.

Определение. *Клеткой* называется множество $E_j^n = D_j^n \setminus S_j^{n-1}$.

Определение. Рассмотрим топологическое пространство, являющееся дизъюнктным объединением $Y \sqcup D_1^n \sqcup \ldots \sqcup D_k^n$ с заданной на нем топологией дизъюнктного объединения. *Результатом приклеивания клеток* $E_1^n, \ldots, E_k^n$ к пространству Y по отображениям $f_1, \ldots, f_k$ называется факторпространство $(Y \sqcup D_1^n \sqcup \ldots \sqcup D_k^n)/\sim$. При этом границы дисков отождествляются с точками из Y при помощи минимального отношения эквивалентности такого, что $f_j(x) \sim x$ для любых $x \in S_j^n$, $1 \leq j \leq k$ (при этом разные точки на сферах могут перейти в одну и ту же точку в Y).

Замечание. Отношение эквивалентности на множестве M можно рассматривать как подмножество $M \times M$, состоящее из пар (m, n) таких, что $m \sim n$. $M \times M$ также можно рассматривать как отношение эквивалентности. В этом случае все элементы множества M эквивалентны друг другу. На множестве $Y \sqcup D_1^n \sqcup \ldots \sqcup D_k^n$ рассмотрим всевозможные отношения эквивалентности, содержащие пары $(f_j(x), x)$ для любых $x \in S_j^n$, $1 \leq j \leq k$. Их пересечением будет минимальное отношение эквивалентности.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности. Рассмотрим отображение $p : X \to X/\sim$, сопоставляющее элементу X класс эквивалентности, которому он принадлежит. *Фактортопология* на факторпространстве $X/\sim$ — это наиболее тонкая топология, для которой p непрерывно. Иными словами, $W \subseteq X/\sim$ — открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(W)$ открыто в X.

Клеточные комплексы

Определение. Рассмотрим множества $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X^n = X$, где X^0 — конечное множество точек, а X^k получается из X^{k-1} приклеиванием конечного (возможно, нулевого) числа k-мерных клеток, $1 \leq k \leq n$. Полученное таким образом хаусдорфово топологическое пространство X называется *клеточным комплексом* или *CW-комплексом.*

Замечание. В определении клеточного комплекса можно не ограничивать ни число клеток, ни их размерность, но нам достаточно конечного случая.

Примеры. 1) Рассмотрим S^n как клеточный комплекс. В качестве клеток можно взять: E^0 — точка и E^n — внутренность n-мерного диска D^n. Граница D^n отображается в одну точку (рис. 1.2).

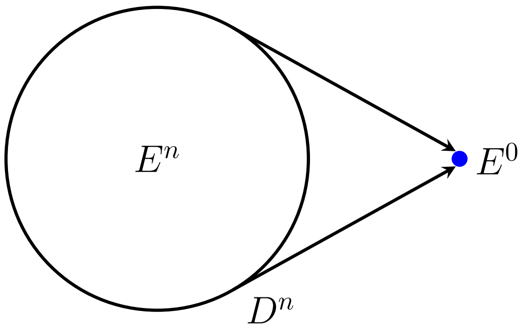

Рис. 1.2: Отображение границы D^n в точку.

2) Двумерный тор T^2. Рассмотрим одну нульмерную клетку, две одномерные и одну двумерную. Клетка E^2 — это поверхность тора, E_1^1 и E_2^1 — две окружности и E^0 — выделенная точка(рис. 1.3).

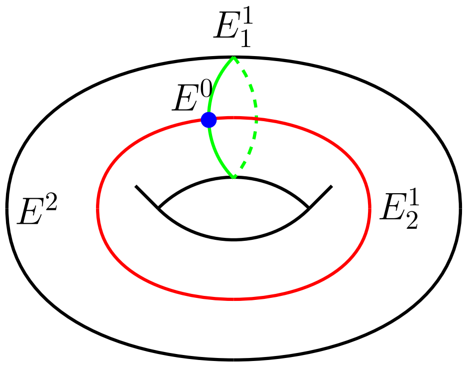

Рис. 1.3: Клетки на двумерном торе.

Схематично изобразим приклеивание клеток (рис. 1.4). Круг можно непре-

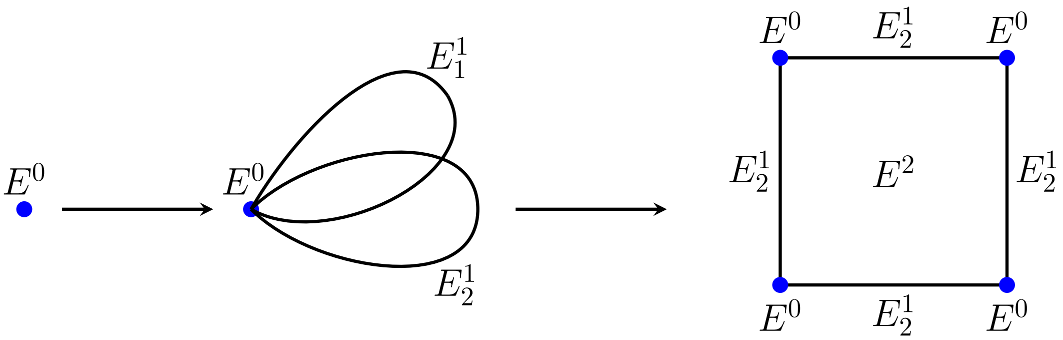

Рис. 1.4: Приклеивание клеток на примере двумерного тора.

рывно деформировать в квадрат. Угловые точки квадрата отображаются в E^0, а противоположные стороны квадрата отображаются в окружности (рис. 1.5).

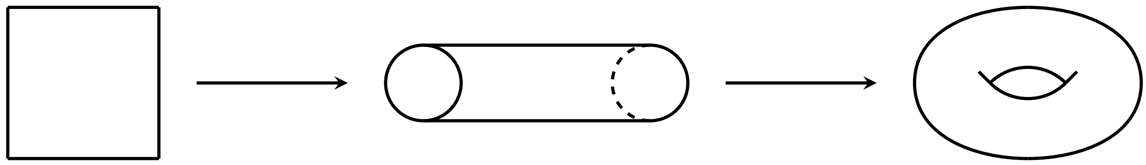

Рис. 1.5: Схема склейки двумерного тора.

Степень отображения

Определение. Пусть A — абелева группа. Подмножество $Z \subseteq A$ называется *базисом* A, если для любого $a \in A$ существуют коэффициенты $m_z \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$a = \sum_{z \in Z} m_z z,$$

причем все m_z равны нулю, за исключением, быть может, конечного числа.

Определение. Абелева группа A называется *свободной*, если в ней существует базис.

По клеточному комплексу построим свободные абелевы группы C^k. В качестве базиса C_k возьмем $E_1^k, \ldots, E_{n(k)}^k$, где $n(k)$ — число клеток размерности k.

Определение. *Комплексом абелевых групп* или *полуточной последовательностью* называется последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xleftarrow{d_{-1}} A_{-1} \xleftarrow{d_0} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \xleftarrow{d_3} \ldots,$$

таких, что $d_{j-1}d_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Конечное число групп и гомоморфизмов можно дополнить нулями до полуточной последовательности.

Определение. *Клеточным цепным комплексом* называется множество свободных абелевых групп C_k и гомоморфизмов между ними, дополненное нулями до полуточной последовательности

$$\ldots \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} \ldots \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \ldots$$

Гомоморфизмы между группами называются *дифференциалами* (часто индексы у них опускают для удобства). Они строятся по правилу

$$d_k E_j^k = \sum_{i=1}^{n(k-1)} \alpha_{ji} E_i^{(k-1)},$$

коэффициенты $\alpha_{ji} \in \mathbb{Z}$ называются *степенью отображения* $S_j^k \mid_U \to E_i^{k-1}$, где U — прообраз клетки E_i^{k-1}.

Замечание. Существует нестрогий, но наглядный подход к определению степени отображения. Рассматривается гладкое отображение между гладкими многообразиями. Возьмем точку x, у которой конечное число прообразов, каждый из которых можно поместить в окрестность, не пересекающуюся с другими. Такая точка называется точкой общего положения. Согласно лемме Сарда, почти все точки гладкого многообразия являются точками общего положения. Припишем каждому прообразу x число $+1$, если отображение в этой точке сохраняет ориентацию, и -1 в противном случае. Тогда степень отображения — это сумма чисел всех прообразов точки x. Иными словами, степень отображения — это количество прообразов у точки общего положения с учетом ориентации. В качестве примера рассмотрим отображение $S^1 \to S^1$ (рис. 1.6). Синим отмечена точка общего положения, зеленым — окрестности прообразов точки, вдоль которых движение совершается в положительном направлении, красным — в отрицательном. Более строгий подход — определение

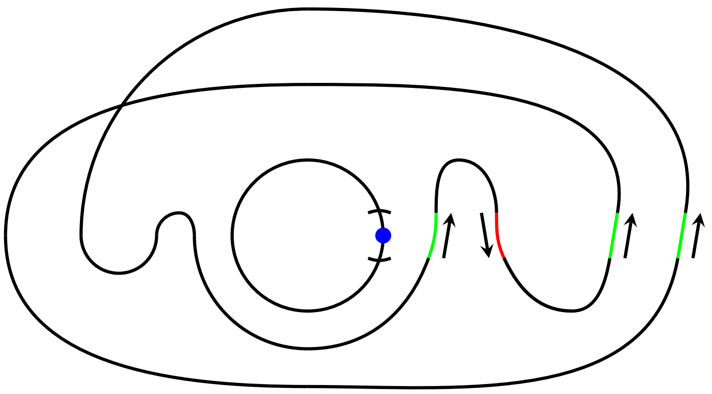

Рис. 1.6: Отображение окружности в себя.

степени отображения с помощью гомологий, введенных другим способом, например, сингулярных. Это будет сделано в весенней части курса.

Группы гомологий

Определение. Элементы группы C_k называются *k-цепями.* Если k-цепь $\omega \in C_k$ такая, что $d\omega = 0$, то ω называется *k-циклом.* Если $\omega = d\beta$, где $\beta \in C_{k+1}$, то ω называется *k-границей.*

Определение. Пусть $B_k \subseteq C_k$ — группа границ, а $Z_k \subseteq C_k$ — группа циклов. Тогда $H_k(X) := Z_k/B_k$ называется *группой гомологий* комплекса X.

Примеры. 1) $X = S^n$.

a) $n \geq 2$.
C_0 и C_n изоморфны $\mathbb{Z}$, как абелевы группы с одним порождающим.

$$0 \longleftarrow C_0 \longleftarrow 0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow C_n \longleftarrow 0$$

все цепи являются циклами, потому что гомоморфизмы нулевые.
$Z_0 = C_0$, $Z_n = C_n$, остальные группы циклов нулевые. Все группы границ

нулевые. Отсюда

$$H_0(S^n) \cong \mathbb{Z},\ H_n(S^n) \cong \mathbb{Z},$$

а остальные группы гомологий нулевые.

б) $n = 1$.
У двух концов отрезка разная ориентация (рис. 1.7), поэтому

$$dE^1 = E^0 - E^0 = 0,$$

то есть, аналогично,

$$H_0(S^1) \cong \mathbb{Z},\ H_1(S^1) \cong \mathbb{Z},$$

а остальные группы гомологий нулевые.

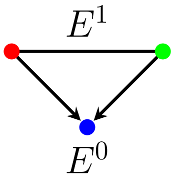

Рис. 1.7: Приклеивание E^0 и E^1.

2) $X = T^2$.
C_0 и C_2 также изоморфны $\mathbb{Z}$ как абелевы группы с одним порождающим.

$$0 \longleftarrow C_0 \longleftarrow C_1 \longleftarrow C_2 \longleftarrow 0$$

Для вычиления дифференциала от клеток обратимся к картинке (рис. 1.8).

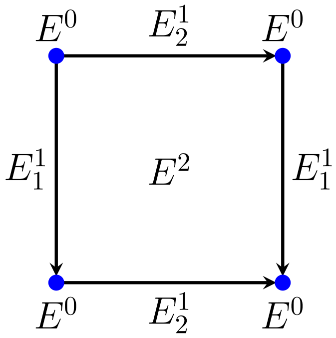

Рис. 1.8: Клетки на двумерном торе.

$$dE^1_1 = E^0 - E^0 = 0,\ dE^1_2 = E^0 - E^0 = 0,\ dE^2 = E^1_1 - E^1_1 + E^1_2 - E^1_2 = 0.$$

Отсюда следует, что все группы границ нулевые, а $Z_j = C_j$. Тогда

$$H_0(T^2) \cong \mathbb{Z},\ H_1(T^2) = C_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ H_2(T^2) \cong \mathbb{Z},$$

а остальные группы гомологий нулевые.

Лекция 2

Пример вычисления клеточных гомологий

В предыдущих примерах подсчета клеточных гомологий рассуждения оказывались простыми из-за того, что все дифференциалы были нулевыми. Выберем другое разбиение двумерной сферы. Рассмотрим две нульмерные, две одномерные и две двумерные клетки. Клетки E_1^0 и E_2^0 — выделенные точки, E_1^1 и E_2^1 — отрезки, соединяющие их и образующие окружность, а E_1^2 и E_2^2 — диски, склеенные по этой окружности (рис. 2.1).

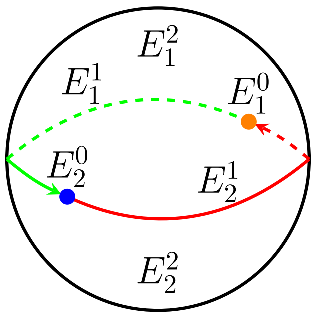

Рис. 2.1: Клетки на двумерной сфере.

Для вычисления дифференциалов от клеток обратимся к картинке (рис. 2.2).

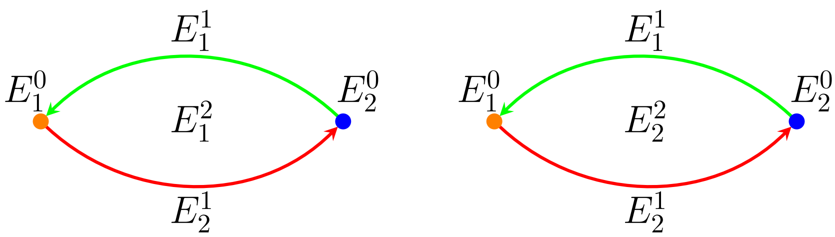

Рис. 2.2: Приклеивание клеток на двумерной сфере.

$$d_2 E_1^2 = E_1^1 + E_2^1,\ d_2 E_2^2 = E_1^1 + E_2^1,$$
$$d_1 E_1^1 = E_2^0 - E_1^0,\ d_1 E_2^1 = E_1^0 - E_2^0.$$

Мы знаем, что

$$C_2 = \mathbb{Z}E_1^2 \oplus \mathbb{Z}E_2^2,\ C_1 = \mathbb{Z}E_1^1 \oplus \mathbb{Z}E_2^1,\ C_0 = \mathbb{Z}E_1^0 \oplus \mathbb{Z}E_2^0.$$

Поэтому

$$Z_2 := \operatorname{Ker} d_2 = \mathbb{Z}(E_1^2 - E_2^2) \cong \mathbb{Z},\ B_2 = 0,\ H_2(S^2) := Z_2/B_2 \cong \mathbb{Z}.$$

$$Z_0 := \operatorname{Ker} d_0 = C_0,\ B_0 := \operatorname{Im}\, d_1 = \mathbb{Z}(E_1^0 - E_2^0)\mathbb{Z},\ H_0(S^2) := Z_0/B_0.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\psi : C_0 \to \mathbb{Z}$ такой, что $\psi(\alpha E_1^0 + \beta E_2^0) := \alpha + \beta$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\operatorname{Ker} \psi = B_0$, то, по теореме о гомоморфизме,

$$H_0(S^2) := Z_0/B_0 \cong \mathbb{Z}.$$

Найдем ядро d_1:

$$d(\lambda E_1^1 + \mu E_2^1) = \lambda(E_2^0 - E_1^0) + \mu(E_1^0 - E_2^0) = (\mu - \lambda)E_1^0 + (\lambda - \mu)E_2^0,$$

следовательно,

$$\operatorname{Ker} d_1 = Z_1 = \mathbb{Z}(E_1^1 + E_2^1) \cong \mathbb{Z},\ \operatorname{Im} d_2 = B_1 = Z_1,\ H_1(S^2) = Z_1/B_1 \cong 0.$$

Видно, что новый результат совпал со старым, несмотря на другое разбиение сферы.

Клеточные отображения

Определение. Пусть X и Y — клеточные комплексы. Непрерывное отбражение $f : X \to Y$ называется *клеточным*, если $f(X^k) \subseteq Y^k$ для любого k.

Определение. Пусть $\{E_i^k\}$ — клетки X, а $\{\widetilde{E}_j^k\}$ — клетки Y. Рассмотрим отображение $f_\#^k : C_k(X) \to C_k(Y)$ такое, что $f_\#^k(E_i^k) = \sum_j m_{ij}\widetilde{E}_j^k$, где m_{ij} — *степень ограничения* $f^{-1}(\widetilde{E}_j^k) \cap E_i^k \to \widetilde{E}_j^k$ клеточного отображения $f : X \to Y$.

Оказывается, что $f_\#^{k-1} d_k = d_k f^k$. Индуцируется гомоморфизм факторгрупп $f_k : H_k(X) \to H_k(Y)$. При этом, если отображения f и g гомотопны, f_k совпадает с g_k для любого k.

Упражнение. Вычислить гомологии и когомологии с коэффициентами в произвольной абелевой группе проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (иногда обозначают как $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$).

Указание. Зададим структуру клеточного пространства на проективной плоскости. Вещественная двумерная проективная плоскость — это множество прямых, проходящих через фиксированную точку в трехмерном пространстве. Данные прямые называются точками проективной плоскости. Рассмотрим сферу с центром в фиксированной точке (рис. 2.3). Каждая прямая пересекает сферу в двух точках.

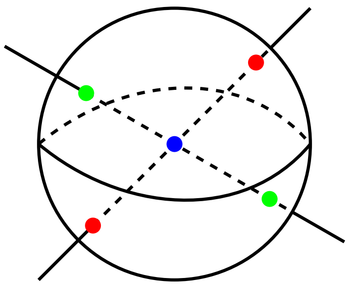

Рис. 2.3: Модель проективной плоскости.

Тогда можно рассмотреть модель полусферы со склеенными противоположными точками границы. Поэтому вещественную двумерную проективную плоскость можно разбить на одну нульмерную, одну одномерную и одну двумерную клетки (рис. 2.4).

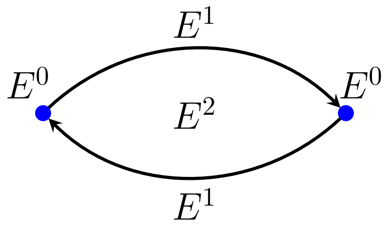

Рис. 2.4: Приклеивание клеток на $\mathbb{R}P^2$.

Категории и функторы

Рассмотренный выше индуцированный гомоморфизм f_k топологи называют гомотопическим функтором. Мы естественным образом приходим к необходимости ознакомления с понятиями из теории категорий.

Определение. Говорят, что задана *категория* $\mathcal{C}$, если задано (вообще говоря, большое) множество объектов $Ob\,\mathcal{C}$, и для любых объектов $c, d \in \mathcal{C}$ задано (как правило, малое) множество морфизмов, которое обозначается $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ или $\mathcal{C}(c, d)$. Элементы $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$ обозначаются с помощью стрелок $c \xrightarrow{f} d$. Причем, для любых объектов $a, b, c \in Ob\,\mathcal{C}$ и морфизмов $f : a \to b$, $g : b \to c$ определена композиция $gf : a \to c$, для которой выполняются свойства:

1) Для любых объектов $a, b, c, d \in Ob\,\mathcal{C}$ и морфизмов

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

композиция ассоциативна, то есть $h(gf) = (hg)f$.

2) Для любого объекта $a \in Ob\,\mathcal{C}$ существует *тождественный морфизм* $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, a)$ такой, что для любого морфизма $f : a \to b$

$$\mathrm{id}_b f = f\,\mathrm{id}_a = f$$

Замечание. Существует подход, позволяющий избежать теоретико-множественных парадоксов. Рассматриваются классы и множества (классы, которые принадлежат другим классам). Тогда при определении категории можно считать, что множество объектов, вообще говоря, класс, а морфизмов, как правило, множество. Но такой подход не всегда срабатывает, например, при работе с категорией всех категорий. Поэтому для избежания парадоксов вводится понятие *универсума*. Множества, которые являются элементами универсума, назовем малыми, а остальные — большими. В частности, если универсум является множеством всех множеств, то малые множества — это множества, а большие множества — это классы, которые не являются множествами.

Пример. Для любого объекта $c \in Ob\,\mathcal{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$ является моноидом. Поэтому любой моноид — это категория с одним объектом.

Последний пример важен, потому что показывает переход на новый уровень абстракции. При изучении групп не важна природа элементов, а при работе с категориями мы абстрагируемся от природы не только объектов, но и морфизмов между ними.
Рассмотрим некоторые примеры категорий:

Название	Объекты	Морфизмы
Sets	Малые множества	Отображения между множествами
Ab	Абелевы группы	Гомоморфизмы абелевых групп
Top	Топологические пространства	Непрерывные отображения
Toph	Топологические пространства	Классы гомотопных отображений

Замечание. Пусть X и Y — топологические пространства. Тогда

$$\mathbf{Toph}(X,Y) = \mathbf{Top}(X,Y)/\sim,$$

где $\sim$ — отношение гомотопности.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — категории. Говорят, что задан *ковариантный функтор* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, если для любого объекта $c \in Ob\,\mathcal{C}$ задан объект $Fc \in Ob\,\mathcal{D}$, и для любых объектов $c_1, c_2 \in Ob\,\mathcal{C}$ и морфизма $f : c_1 \to c_2$ задан морфизм $F(f) : Fc_1 \to Fc_2$. Причем для любых объектов $c, c_1, c_2, c_3 \in Ob\,\mathcal{C}$ и морфизмов $f : c_1 \to c_2, g : c_2 \to c_3$ выполняется

$$F(gf) = FgFf,\ F(id_c) = id_{Fc}.$$

Пример. Функтор $H_k : \mathbf{Toph} \to \mathbf{Ab}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. *Двойственной категорией* к $\mathcal{C}$ называется категория $\mathcal{C}^{op}$ такая, что

$$Ob\,\mathcal{C}^{op} := Ob\,\mathcal{C},\ \mathcal{C}^{op}(c,d) = \mathcal{C}(d,c),$$

и для любых

$$f \in \mathcal{C}(c_1,c_2) =: \mathcal{C}^{op}(c_2,c_1),\ g \in \mathcal{C}(c_2,c_3) =: \mathcal{C}^{op}(c_3,c_2)$$

определена композиция

$$\text{в } \mathcal{C}^{op}\ fg := gf \text{ в } \mathcal{C}.$$

При этом тождественные морфизмы те же.

Определение. *Контравариантным функтором* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ или $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

Замечание. В дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматриваемые функторы считаются ковариантными.

Очень важным является семейство *Hom-функторов* — функторов из данной категории в категорию множеств.

Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Фиксируем объект $a \in Ob\mathcal{C}$. Определим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ такой, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,-)(c) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,c)$$

для любых объектов $c \in Ob\mathcal{C}$. Если $g : a \to b$, $f : b \to c$ — морфизмы между объектами $a, b, c \in Ob\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,-)(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,c),\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,-)(f)(g) := f \circ g.$$

Этот функтор называется *ковариантный Hom-функтор.*
Контравариантным Hom-функтором называется функтор $\mathrm{Hom}(-,a) : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$ такой, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,a)(c) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,a),$$

если $g : c \to a$, $f : b \to c$ — морфизмы, то

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,a)(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,a) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,a),\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,a)(f)(g) := gf.$$

Замечание. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,-)(f)$ иногда обозначают как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,f)$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,a)(f)$ как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,a)$.

Клеточные когомологии

В категории $\mathbf{Ab}$ hom-множества сами являются абелевыми группами. Пусть A, B — абелевы группы, а $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,B)$ — гомоморфизмы между ними. Тогда $(\varphi+\psi)(a) := \varphi(a)+\psi(a)$ для любого $a \in A$. Под действием Hom-функтора в категории $\mathbf{Ab}$ гомоморфизм абелевых групп переходит в гомоморфизм абелевых групп. Поэтому в данном случае Hom-функтор является функтором из категории $\mathbf{Ab}$ в категорию $\mathbf{Ab}$. Для того чтобы получить когомологии клеточного комплекса с коэффициентами в фиксированной абелевой группе, необходимо к комплексу цепей применить Hom-функтор в фиксированную абелеву группу.

Определение. Пусть X — клеточный комплекс,

$$\ldots \xleftarrow{d_k} C_k \xleftarrow{d_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{d_{k+2}} \ldots$$

— комплекс его клеточных цепей. Рассмотрим абелеву группу A. Тогда группа

$$C^k = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(C_k, A)$$

называется *группой клеточных коцепей с коэффициентами в* A. Функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(-,A)$ — контравариантный, поэтому комплекс клеточных цепей переходит в *комплекс клеточных коцепей коэффициентами в* A

$$\ldots \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \ldots,$$

где

$$d^k := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(d_{k+1}, A) : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(C_k, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(C_{k+1}, A).$$

Если $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(C_k, A)$, $\zeta \in C_{k+1}$, то

$$(d^k\omega)(\zeta) = \omega(d_{k+1}\zeta).$$

Определение. *Группами коциклов* называются группы

$$Z^k(X; A) := \mathrm{Ker}\, d^k.$$

Группами кограниц называются группы

$$B^k(X; A) := \mathrm{Im}\, d^{k-1}.$$

Группами когомологий называются группы

$$H^k(X; A) := Z^k/B^k.$$

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Тогда индуцируются гомоморфизмы

$$f^k : H^k(Y; A) \to H^k(X; A),$$

определенный по правилу

$$(f^k\omega)(\zeta) := \omega(f^k_{\#}(\zeta)),$$

где $\omega \in Z^k(Y; A)$, $\zeta \in C_k(X)$.

Клеточные гомологии с коэффициентами в абелевой группе

Определение. Пусть X — клеточный комплекс.

$$\ldots \xleftarrow{d_k} C_k \xleftarrow{d_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{d_{k+2}} \ldots$$

— клеточный цепной комплекс. Рассмотрим

$$C_k(X; A) := C_k \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

$$d_k(\zeta \otimes a) := d_k\zeta \otimes a.$$

Для введенного клеточного комплекса с коэффициентами в абелевой группе определим

$$Z_k(X; A) := \mathrm{Ker}\, d_k \text{ — группы циклов},$$

$$B_k(X; A) := \mathrm{Im}\, d_{k+1} \text{ — группы границ},$$

$$H_k(X; A) := Z_k(X; A)/B_k(X; A) \text{ — группы гомологий}.$$

Строгое определение тензорного произведения в более общем случае будет рассмотрено на следующей лекции.

Лекция 3

Модули над кольцами

Пусть R — ассоциативное (не обязательно коммутативное) кольцо с единицей.

Определение. Говорят, что множество M — *левый R-модуль*, если на нем заданы операции:

$$+ : M \times M \to M \text{ — сложение,}$$

$$\cdot : R \times M \to M \text{ — умножение на элементы из кольца.}$$

Причем выполнены следующие аксиомы:

1-4) $(M, +)$ — абелева группа,

5) $(r + s)m = rm + sm$,

6) $r(m + n) = rm + rn$,

7) $r(sm) = (rs)m$,

8) $1_R m = m$,

для любых $r, s \in R$ и $m, n \in M$.

Примеры. 1) $\mathbb{K}$-модуль, где $\mathbb{K}$ — поле. Это в точности векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

2) $\mathbb{Z}$-модули — это в точности абелевы группы, ведь $na = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}$.

3) Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, и $A : V \to V$ — линейный оператор. Тогда V — $\mathbb{K}[\lambda]$-модуль, где $\mathbb{K}[\lambda]$ — кольцо многочленов над $\mathbb{K}$. По определению, $f(\lambda)v = f(A)v$ для всех $v \in V$ и $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$. Выбор λ не случаен и связан с приведением матрицы оператора к Жордановой нормальной форме.

Определение. Говорят, что множество M — *правый R-модуль*, если на нем заданы операции:

$$+ : M \times M \to M \text{ — сложение,}$$

$$\cdot : M \times R \to M \text{ — умножение на элементы из кольца.}$$

Причем выполнены следующие аксиомы:

1-4) $(M, +)$ — абелева группа,

5) $m(r + s) = mr + ms$,

6) $(m + n)r = mr + nr$,

7) $(ms)r = m(sr)$ — основное различие с определением левого R-модуля,

8) $m1_R = m$,

для любых $r, s \in R$ и $m, n \in M$.

Замечание. Если R — коммутативное кольцо, то понятия левого и правого R-модулей совпадают.

Определение. *Бимодулем над* R называется множество M с заданной на нем структурой левого и правого R-модулей и дополнительной аксиомой:

$$(rm)s = r(ms), \text{ для всех } m \in M \text{ и } r, s \in R.$$

Замечание. Если R — коммутативное кольцо, то всякий R-модуль — бимодуль, если положить $rm := mr$ для всех $m \in M$ и $r \in R$.

Прямая сумма и прямое произведение модулей

Пусть M_α, где $\alpha \in \Lambda$, — левые R-модули.

Определение. *Прямым произведением* $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ называется множество наборов $(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, где $m_\alpha \in M_\alpha$, с заданными на них покомпонентными операциями:

$$(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} + (n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} := (m_\alpha + n_\alpha)_{\alpha\in\Lambda},$$

$$r(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = (rm_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.$$

Можно считать, что каждый из модулей $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ вложен в прямое произведение (достаточно рассмотреть все наборы, в которых только α-компонента ненулевая). Но, если Λ — бесконечное множество, то прямое произведение, как модуль, не порождается вложенными в него M_α. Чтобы получить модуль, порожденный всеми $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, рассматривается понятие *прямой суммы.*

Определение. *Прямой суммой* $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ называется подмодуль в $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, состоящий из наборов $(m_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, в которых все компоненты равны нулю, кроме, быть может, конечного числа.

Замечание. Если множество Λ конечно, то понятия прямого произведения и прямой суммы левых R-модулей совпадают.

Определение. Пусть X — множество. Зададим биективное соответствие между элементами $x \in X$ и экземплярами кольца R, рассматриваемыми как левые модули над собой. *Свободным R-модулем* называется модуль $\mathcal{F}_{_R Mod}(X) = \oplus_{x\in X} R$. Положим

$$x := (\delta_{xy})_{y\in X}, \text{ где } \delta_{xy} = \begin{cases} 1, \text{ при } x = y \\ 0, \text{ при } x \neq y \end{cases}$$

Тогда для люблого $m \in \mathcal{F}_{_R Mod}(X)$ существуют однозначно определенные элементы $m_x \in R$, все из которых равны нулю, кроме, быть пожет, конечного числа, такие, что

$$m = \sum_{x\in X} m_x x.$$

Элементы x называются *свободными порождающими* $\mathcal{F}_{_R Mod}(X)$, а множество X — *базисом.* Таким образом, задается вложение $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{F}_{_R Mod}(X)$.

Кроме этого способа, свободный R-модуль можно определить с помощью *универсального свойства*:

Определение. Для любого отображения $\varphi_0 : X \to M$, где M — R-модуль, существует единственный гомоморфизм R-модулей (гомоморфизм абелевых групп, сохраняющий умножение на элемент кольца, то есть R-линейное отображение) $\varphi : \mathcal{F}_{_RMod}(X) \to M$ такой, что $\varphi \circ i = \varphi_0$. Это свойство удобно изображать с помощью коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathcal{F}_{_RMod}(X) \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Иными словами, все гомоморфизмы свободного R-модуля однозначно задаются с помощью образов его порождающих.

Тензорное произведение модулей

Определение. Пусть M — правый R-модуль, N — левый R-модуль, а R — ассоциативное кольцо с единицей. Отображение $\varphi : M \times N \to A$, где A — абелева группа, называется $\mathbb{Z}$-*билинейным*, если выполнены свойства:

$$\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$$

$$\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$$

для любых $m, m_1, m_2 \in M$ и $n, n_1, n_2 \in N$.

Определение. Пусть M — правый R-модуль, N — левый R-модуль, а R — ассоциативное кольцо с единицей. *Тензорным произведением* называется абелева группа $M \otimes N$ (часто пишут $M \otimes_R N$) вместе с $\mathbb{Z}$-билинейным отображением

$$\varphi : M \times N \to M \otimes N$$

со свойством *ассоциативности*:

$$\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$$

для всех $m \in M, n \in N$ и $r \in R$, такая, что для любого $\mathbb{Z}$-билинейного ассоциативного отображения $\psi_0 : M \times N \to A$, где A — абелева группа, существует единственный гомоморфизм абелевых групп $\psi : M \otimes N \to A$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Таким образом, ставится соответствие между $\mathbb{Z}$-билинейными ассоциативными отображениями и гомоморфизмами абелевых групп.
Элемент тензорного произведения $m \otimes n$ обозначают как $\varphi(m, n)$.

Явная конструкция тензорного произведения

Необходимо доказать существование тензорного произведения модулей.

Рассмотрим свободную абелеву группу F с порождающими (m, n), где $m \in M$ и $n \in N$. Пусть $L \subseteq F$ — подгруппа, порожденная эдементами:

$$(mr, n) - (m, rn),$$

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n),$$
$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$$

для всех $r \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$ и $n, n_1, n_2 \in N$.

Рассмотрим факторгруппу F/L и определим отображение $\varphi : M \times N \to F/L$ по правилу

$$\varphi(m, n) := (m, n) + L,$$

то есть порождающему элементу ставится в соответствие его смежный класс. В силу того, как мы определили подгруппу L, отображение φ ассоциативное и $\mathbb{Z}$-линейное.

Осталось проверить универсальное свойство. Пусть есть ассоциативное $\mathbb{Z}$-билинейное отображение $\psi_0 : M \times N \to A$, где A — абелева группа. Поскольку образы (m, n) при отображении φ порождают F/L, отображение ψ можно определить единственным способом, положив

$$\psi((m, n) + L) := \psi_0(m, n).$$

Таким образом, диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & F/L \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Такое определение корректно, так как $L \subseteq \operatorname{Ker} \theta$, где $\theta : F \to A$ — гомоморфизм групп такой, что

$$\theta(m, n) := \psi_0(m, n).$$

Действительно, в силу универсального свойства модуля, образы порождающих абелевой группы F однозначно задают гомоморфизм θ абелевых групп, или $\mathbb{Z}$-модулей. В силу $\mathbb{Z}$-билинейности и ассоциативности ψ_0, порождающие L лежат в ядре θ, а значит $L \subseteq \operatorname{Ker} \theta$. Следовательно, гомоморфизм θ постоянен на смежных классах и однозначно определяет гомоморфизм из факторгруппы F/L.

Тензорное произведение как модуль

Пусть M — бимодуль над ассоциативным кольцом R с единицей, а N — левый R-модуль. Определим умножение на $r \in R$ слева на элементы $M \otimes N$ через универсальное свойство:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "r"] \\
& M \otimes N
\end{tikzcd}$$

Отображение $\otimes$ из определения тензорного произведения, а ψ_0 задается правилом

$$\psi_0(m,n) := rm \otimes n.$$

Поскольку M — бимодуль, то отображение ψ_0 ассоциативно. Действительно,

$$\psi_0(ms,n) = r(ms)\otimes n = (rm)s \otimes n = rm \otimes sn = \psi_0(m,sn),$$

для всех $s \in R$. По обеим компонентам это гомоморфизм абелевых групп, поэтому ψ_0 — $\mathbb{Z}$-билинейное отображение. Тогда однозначно определена операция

$$r(m \otimes n) := rm \otimes n.$$

Поэтому $M \otimes N$ — левый R-модуль.

Универсальное свойство тензорного произведения

Докажем универсальное свойство, которое формулируется для модулей над коммутативным кольцом.

Предложение. Пусть M и N — R-модули для ассоциативного коммутативного кольца R с единицей. Тогда отображение

$$\otimes = \varphi : M \times N \to M \otimes N$$

R-билинейно, и для любого R-билинейного отображения

$$\psi_0 : M \times N \to K,$$

где K — R-модуль, существует единственный гомоморфизм R-модулей

$$\psi : M \otimes N \to K,$$

такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Доказательство. Проверим, что отображение φ билинейно. Мы знаем, что оно $\mathbb{Z}$-билинейно. Кроме того,

$$\varphi(rm,n) = rm \otimes n = r(m \otimes n) = r\varphi(m,n),$$

$$\varphi(m,rn) = \varphi(mr,n) = \varphi(rm,n) = r\varphi(m,n),$$

для всех $r \in R, m \in M$ и $n \in N$. То есть φ — R-билинейно.
Так как отображение ψ_0 — R-билинейно, то оно $\mathbb{Z}$-билинейно и ассоциативно. Поэтому, по определению тензорного произведения, существует единственный гомоморфизм абелевых групп

$$\psi : M \otimes N \to K$$

с требуемыми свойствами. Осталось показать, что ψ — гомоморфизм R-модулей. Тензорное произведение $M \otimes N$ порождается элементами вида $m \otimes n$, поэтому R-линейность достаточно показать только для них. Поскольку

$$\psi(r(m \otimes n)) = \psi(rm \otimes n) = \psi_0(rm, n) = r\psi_0(m, n) = r\psi(m \otimes n)$$

для любых $r \in R, m \in M$ и $n \in N$, ψ — гомоморфизм R-модулей. □

Из доказанного универсального свойства видно, что тензорное произведение векторных пространств является частным случаем рассматриваемой конструкции. Но, работая с тензорным произведением модулей, не всегда можно действовать по аналогии с тензорным произведением векторных пространств. Результат тензорного произведения ненулевых векторных пространств не может быть нулевым векторным пространством, но аналогичное свойство для тензорного произведения модулей не выполняется.

Пример. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$. В кольце Z_3 умножение на 2 — обратимая операция, поэтому

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}_3 = 2\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = 0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = 0.$$

Предложение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, а M — левый R-модуль. Рассмотрим R как бимодуль над собой. Тогда

$$R \otimes_R M \cong M$$

как R-модули.

Доказательство. Рассмотрим

$$\varphi : R \otimes_R M \to M,\ \varphi(r, m) := rm.$$

Это $\mathbb{Z}$-билинейное ассоциативное отображение. Пусть

$$\psi_0 : R \times M \to A,$$

где A — абелева группа, — $\mathbb{Z}$-билинейное ассоциативное отображение. Тогда

$$\psi_0(r, m) = \psi_0(1, rm).$$

Поэтому, если ψ — гомоморфизм групп M и A такой, что $\psi\varphi = \psi_0$, то он определен единственным способом:

$$\psi(m) := \psi(\psi_0(1, m)) = \psi_0(1, m).$$

Тогда

$$\psi\varphi(r, m) = \psi(rm) = \psi_0(1, rm) = \psi_0(r, m)$$

для всех $r \in R$ и $m \in M$. Получаем, что $R \otimes_R M$ и M изоморфны как абелевы группы, причем изоморфизм должен быть согласован с отображением φ, и строится по правилу

$$r \otimes_R m \mapsto rm.$$

При этом

$$s(r \otimes_R m) = sr \otimes_R m \mapsto srm,$$

для всех $s \in R$. То есть это изоморфизм R-модулей. □

Лекция 4

Одной из тем данного курса является категорное основание гомологической алгебры. Будет показано, что многое из того, о чем будет идти речь дальше, формулируется на языке стрелок и диаграмм. Изначально гомологическую алгебру развивали в категории модулей над кольцом, но появление новых задач в алгебраической геометрии показало ограниченность такого подхода. В данной лекции речь пойдет об абелевых категориях — категориях, которые в некотором роде сводятся к категории модулей над кольцом, но не во всех смыслах.

Ab-категории

Определение. Говорят, что $\mathcal{C}$ — *Ab-категория*, если для всех объектов $a, b \in \mathcal{C}$ на hom-множестве $\mathcal{C}(a,b)$ введена структура абелевой группы. Причем операция композиции морфизмов $\mathbb{Z}$-линейна по каждому аргументу:

$$(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g,$$

$$f(g_1 + g_2) = f g_1 + f g_2$$

для любых объектов $a, b, c \in \mathcal{C}$ и морфизмов $f, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(b,c)$ и $g, g_1, g_2 \in \mathcal{C}(a,b)$.

Пределы и копределы

Определение. Пусть $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ — функтор. *Конусом* над T называется объект a с набором морфизмов $\{\alpha_j : a \to Tj \,|\, j \in Ob\mathcal{J}\}$. Причем для любого морфизма $f : i \to j$ в категории $\mathcal{J}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & Ti \arrow[dd, "Tf"] \\ a \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & \\ & Tj \end{tikzcd}$$

Конус будем обозначать как $\alpha : a \Rightarrow T$.

Определение. Конус $\alpha : a \Rightarrow T$ называется *предельным*, если для любого конуса $\beta : b \Rightarrow T$ существует единственный морфмизм $g : b \to a$ в $\mathcal{C}$, что диаграмма ниже коммутативна для любого объекта $j \in Ob\mathcal{J}$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ & Tj \\ b \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[ur, "\beta_j"'] & \end{tikzcd}$$

Тогда объект $a =: \lim T$ называется пределом (раньше его называли обратным пределом или проективным пределом функтора T).

Определение. *Копределом* $\operatorname{colim} T$ функтора $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ называется предел функтора $T^{op} : \mathcal{J}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$. Копредел иногда называют прямым или индуктивным пределом.

Пример. Рассмотрим функтор $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{J} = \varnothing$. Функтор из пустого множества ничего не отображает. Поэтому не существует объектов Tj, а конус состоит из одного объекта. Значит, если объект $a \in \mathcal{C}$ — предел функтора T, то для любого объекта $b \in \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $b \to a$ в $\mathcal{C}$. Такой предел называется *терминальным* или *универсальным притягивающим объектом.*

Копредел функтора T называется *начальным* или *универсальным отталкивающим объектом.* Если объект $a \in \mathcal{C}$ — универсальный отталкивающий объект, то для любого объекта $b \in \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $a \to b$

Замечание. Пределы и копределы единственны с точностью до изоморфизма, согласованного с набором морфизмов предельного конуса.

Рассмотрим примеры категорий и унивесальных притягивающих и отталкивающих объектов в них.

Примеры. Рассотрим категории **Sets** и ${}_R\mathbf{Mod}$[1] и универсальные притягивающие объекты (для краткости УПО) и универсальные отталкивающие объекты (для краткости УОО) в них.

$\mathcal{J}$	$\mathcal{C}$	УПО	УОО
$\varnothing$	**Sets**	$\{*\}$	$\varnothing$
$\varnothing$	${}_R\mathbf{Mod}$	0	0

Определение. Если универсальный притягивающий объект является универсальным отталкивающим объектом, то он называется *нулевым объектом.*

Замечание. Объект a в Ab-категории $\mathcal{C}$ является нулевым, если и только если $0_a = id_a$, где 0_a — нейтральный элемент группы $\mathcal{C}(a, a)$.

Пример. Рассмотрим функтор $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{J}$ — дискретная категория (категория, в которой все морфизмы тождественные). Тогда предел функтора T называется *произведением* объектов $\{T_j\}_{j \in Ob\mathcal{J}}$ и обозначается $\prod_{j \in Ob\mathcal{J}} T_j$. Копредел функтора T называется *копроизведением* объектов $\{T_j\}_{j \in Ob\mathcal{J}}$ и обозначается $\coprod_{j \in Ob\mathcal{J}} T_j$.

Ознакомимся с соответствующими коммутативными диаграммами[2]:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{j \in Ob\mathcal{J}} T_j \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
& Tj \\
b \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[ur, "\beta_j"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{j \in Ob\mathcal{J}} T_j \arrow[dd, dashed, "h"'] & \\
& Tj \arrow[ul, "i_j"'] \arrow[dl, "\gamma_j"] \\
d &
\end{tikzcd}$$

[1] Категория левых модулей над ассоциативным кольцом R с единицей.

[2] В дальнейшем пунктирная стрелка на диаграмме будет обозначать единственность морфизма, для которого диаграмма коммутативна.

Морфизмы $\{\alpha_j\}_{j\in Ob\mathcal{J}}$ и $\{i_j\}_{j\in Ob\mathcal{J}}$ называются проекциями и вложениями соответственно.

Примеры. В категориях **Sets** и ${}_R\mathbf{Mod}$ произведения и копроизведения являются уже знакомыми для нас конструкциями:

$\mathcal{J}$	$\mathcal{C}$	lim	colim
дискретная	**Sets**	декартово произведение	дизъюнктное объединение
дискретная	${}_R\mathbf{Mod}$	прямое произведение	прямая сумма

Аддитивные категории

В дальнейшем некоторые утверждения из теории категорий будут приведены без доказательств. Доказательства можно посмотреть в соответствующих *спецкурсах* или книге С.Маклейна *Категории для работающего математика.*

Утверждение. Пусть $\mathcal{C}$ — Ab-категория с нулевым объектом, а

$$\begin{tikzcd} & a\times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

— произведение объектов $a, b \in Ob\mathcal{C}$. Определим морфизмы i_1 и i_2 при помощи коммутативных диаграмм:

$$\begin{tikzcd} & a\times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ a & & b \\ & a \arrow[ul, equal, "id_a"] \arrow[uu, dashed, "i_1"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a\times b \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ a & & b \\ & b \arrow[ul, "0"] \arrow[uu, dashed, "i_2"] \arrow[ur, equal, "id_b"'] & \end{tikzcd}$$

Тогда объект $a\times b$ с морфизмами i_1 и i_2 является копроизведением объектов $a, b \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & a\times b & \\ a \arrow[ur, "i_1"] & & b \arrow[ul, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

Причем выполнены равенства:

$$p_1 i_1 = id_a,\ p_1 i_2 = 0,$$

$$p_2 i_1 = 0,\ p_2 i_2 = id_b,$$

$$id_{a\times b} = i_1 p_1 + i_2 p_2.$$

Определение. Объект $a \times b$ из Ab-категории $\mathcal{C}$ с нулевым объектом, обладающий свойствами, приведенными в последнем предложении, называется *бипроизведением* или *прямой суммой* объектов a и b. Его обозначают как $a \otimes b$.

Определение. Ab-категория с нулевым объектом, в которой существует прямая сумма любой пары объектов, называется *аддитивной* категорией.

Уравнители и коуравнители

Приведем еще один пример (ко)предела. Пусть $\mathcal{J}$ — категория с двумя объектами $1, 2$ и двумя морфизмами $\xi, \eta : 1 \to 2$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop below, "id_1"] \arrow[r, shift left, "\xi"] \arrow[r, shift right, "\eta"'] & 2 \arrow[loop below, "id_2"] \end{tikzcd}$$

Рассмотрим функтор $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — произвольная категория, и предельный конус $\alpha : a \Rightarrow T$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[rr, bend right, "\alpha_2"'] & T1 \arrow[r, shift left, "\xi"] \arrow[r, shift right, "\eta"'] & T2 \end{tikzcd}$$

Важен только морфизм α_1, потому что α_2 определен однозначно:

$$(T\xi)\alpha_1 = \alpha_2 = (T\eta)\alpha_1.$$

Морфизм α_1 называется *уравнителем* морфизмов $T\xi$ и $T\eta$ и обозначается как $\mathrm{eq}(T\xi, T\eta)$.

Определение. В аддитивной категории морфизм $\mathrm{eq}(f, 0)$ называется *ядром* морфизма f.

Раскроем определение. Пусть $h := \mathrm{eq}(f, 0)$:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "h"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & b \end{tikzcd} \text{[3]}$$

Тогда $fh = 0h = 0$, и для любого морфизма $\zeta : s \to a$ такого, что $f\zeta = 0$, существует единственный морфизм $g : s \to t$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "h"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & b \\ s \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\zeta"'] & & \end{tikzcd}$$

Пример. В категории ${}_R\mathbf{Mod}$ ядро морфизма f — это вложение ядра гомоморфизма модулей:

[3] Морфизм h принято обозначать как $\ker f$, а объект t как $\mathrm{Ker}\, f$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \\
S \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "\zeta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Действительно, если $f\zeta = 0$, то образ гомоморфизма ζ лежит в ядре гомоморфизма f. Значит, этот морфизм однозначно пропускается через вложение ядра гомоморфизма f.

Определение. *Коуравнитель* — это двойственное понятие к понятию уравнителя. Им называется копредел функтора T из ранее рассмотренной категории $\mathcal{J}$ в категорию $\mathcal{C}$. Коуравнитель морфдизмов f, g обозначается как $\operatorname{coeq}(f, g)$.

Определение. Аналогично определяется *коядро* морфизма — коуравнитель морфизмов $f, 0 : a \to b$. Поэтому, если есть морфизм $\zeta : b \to s$ такой, что $\zeta f = 0$, то существует единственный морфизм $g : \operatorname{Coker} f \to s$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & b \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] \arrow[dr, "\zeta"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "g"] \\
& & s
\end{tikzcd}$$

Пример. В категории ${}_R\mathbf{Mod}$ коядро морфизма f — это канонический сюръективный гомоморфизм в факторгруппу по образу:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\zeta"'] & B/\operatorname{Im} f \arrow[d, dashed, "g"] \\
& & 0
\end{tikzcd}$$

Действительно, если $\zeta f = 0$, то образ гомоморфизма f лежит в ядре гоморфизма ζ, значит ζ однозначно пропускается через факторгруппу по образу.

Замечание. В аддитивной категории

$$\operatorname{eq}(f, g) = \ker(f - g), \ \operatorname{coeq}(f, g) = \operatorname{coker}(f - g).$$

Абелевы категории

Перед определением абелевой категории необходимо сформулировать на языке стрелок и диаграмм, что такое сюръективные и инъективные отображения.

Определение. Морфизм $f : a \to b$ называется *мономорфизмом*, если для любых морфизмов $g, h : c \to a$ из равенства

$$fg = fh$$

следует, что

$$g = h.$$

Определение. Морфизм $f : a \to b$ называется *эпиморфизмом*, если для любых морфизмов $g, h : b \to c$ из равенства

$$gf = hf$$

следует, что

$$g = h.$$

Пример. В категории ${}_R\mathbf{Mod}$ эпиморфизмы — это сюръективные гомоморфизмы, а мономорфизмы — инъективные гомоморфизмы модулей.

Определение. Аддитивная категория называется *абелевой*, если в ней у всех морфизмов существуют ядра и коядра, все мономорфизмы являются ядрами некоторых морфизмов, а эпиморфизмы — коядрами.

Замечание. Можно показать, что в любой категории уравнитель является мономорфизмом, а коуравнитель — эпиморфизмом. В частности, ядра и коядра морфизмов являются мономорфизмами и эпиморфизмами соответственно.

Определение. Понятия *образа* и *кообраза* f вводятся следующим образом:

$$\operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker} f),$$

$$\operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker f).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{coker}(\ker f)"'] \arrow[dr, dashed, "g"] & b \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed, "h"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\ker(\operatorname{coker} f)"'] &
\end{tikzcd}$$

По определению,

$$(\operatorname{coker} f)f = 0,$$

значит, существует единственный морфизм $g : a \to \operatorname{Im} f$, что диаграмма выше коммутативна. Аналогично,

$$f(\ker f) = 0,$$

откуда

$$\ker(\operatorname{coker} f)(g(\ker f)) = 0.$$

Но ядро — мономорфизм, поэтому

$$g(\ker f) = 0.$$

Следовательно, в силу универсального свойства коядра, существует однозначно определнный морфизм $h : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$.

Определение. Говорят, что морфизм $f : a \to b$ — *изоморфизм*, если существует морфизм $g : b \to a$ такой, что

$$gf = \mathrm{id}_a,\ fg = \mathrm{id}_b\,.$$

Объекты, между которыми существуют изоморфизмы, называются *изоморфными.*

Замечание. Существует эквивалентное определение абелевой категории. Абелевой категорией называется аддитивная категория, в которой у всех морфизмов существуют ядра и коядра, а объекты $\mathrm{Im}\, f$ и $\mathrm{Coim}\, f$ изоморфны для любого морфизма f.

Точные последовательности

На мономорфизмах можно установить отношение эквивалентности. Два мономорфизма $f; b \to a$ и $g : c \to a$ эквивалентны, если существует изоморфизм $h : b \to c$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
 & a & \\
b \arrow[ur, tail, "f"] \arrow[rr, "h"] & & c \arrow[ul, tail, "g"']
\end{tikzcd}$$ [4]

Определение. Класс эквивалентности мономорфизмов называется *подобъектом.*

Определение. Говорят, что последовательность

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

точна в члене b, если

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g.$$

Равенство подразумевается в смысле подобъектов. Эквивалентным условием является равенство

$$\mathrm{Coker}\, f = \mathrm{Coim}\, g.$$

Покажем это с помощью коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coker}\, f \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Coim}\, g \\
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, two heads] \arrow[r, "g"] & c \\
\mathrm{Ker}\, g \arrow[ur, tail] & & \mathrm{Im}\, f \arrow[ul, tail] \arrow[ll, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Определение. *Короткой точной последовательностью* называется последовательность

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0 \qquad (4.1)$$

точная в каждом из трех членов a, b, c.

[4] Обычно мономорфизмы на диаграммах изображают с помощью стрелок $\rightarrowtail$, а эпиморфизмы с помощью $\twoheadrightarrow$.

Замечание. Можно убедиться, что последовательность 4.1 является короткой точной, если и только если
$$f = \ker g,\ g = \operatorname{coker} f.$$
Поэтому, если последовательность короткая точная, то f — мономорфизм, а g — эпиморфизм.

Точные функторы

Определение. Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, где $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — Ab-категории, называется *аддитивным*, если он является гомоморфизмом на hom-множествах (hom-абелевых группах).

Замечание. Если $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, то нулевой объект и бипроизведение он будет переводить в нулевой объект и бипроизведение соответственно.

Определение. Категория $\mathcal{C}$ называется *конечной*, если в ней конечное число объектов и морфизмов между ними.

Определение. *Конечные пределы* в категории $\mathcal{C}$ — это пределы функторов из конечных категорий, включая пустую, в категорию $\mathcal{C}$.

Замечание. Для существования в категории конечных пределов достаточно существования конечных произведений и уравнителей. В абелевой категории существуют конечные произведения и ядра, поэтому оба условия выполнены.

Определение. Пусть $T : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{J}$ — конечная категория, и $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — функторы. Говорят, что функтор F *сохраняет малые пределы*, если он любой предельный конус $\alpha : a \Rightarrow T$ отображает в предельный конус $F\alpha : Fa \Rightarrow FT$.

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — абелевы категории.

Определение. Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется *точным слева*, если он сохраняет конечные пределы или, эквивалентно, аддитивен и преводит любую точную в категории $\mathcal{C}$ последовательность 4.1 в точную в категории $\mathcal{D}$ последовательность
$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$$

Определение. Аналогично, функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *точен справа*, если он сохраняет конечные копределы или, эквивалентно, аддитивен и преводит любую точную в категории $\mathcal{C}$ последовательность 4.1 в точную в категории $\mathcal{D}$ последовательность
$$Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \longrightarrow 0$$

Определение. Функтор называется *точным*, если он одновременно точен слева и справа.

Примеры. 1) Функтор $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ точен слева для любого R-модуля A.

2) Функтор $(-) \otimes_R B$ точен справа для любого R-модуля B.

3) Забывающий функтор $U : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ точен.

Лекция 5

Теорема Фрейда-Митчелла

Определение. Говорят, что категория $\mathcal{C}$ — *малая*, если множества ее объектов и всех морфизмов — малые.

На прошлой лекции было сказано о некоторой схожести абелевых категорий и категории ${}_R\mathbf{Mod}$. Следующая теорема показывает различия между произвольными абелевыми категориями и категорией левых R-модулей.

Теорема 5.1 (Фрейд-Митчелл)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — малая абелева категория. Тогда существуют ассоциативное кольцо R с единицей и функтор $F : \mathcal{A} \to {}_R\boldsymbol{Mod}$ такие, что*

1) F — точный;

2) F биективен на hom-множествах;

3) F — вложение категорий (то есть инъективен на объектах).

Пусть мы хотим доказать какое-нибудь утверждение в необязательно малой абелевой категории $\mathcal{A}$, например, коммутативность диаграммы. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$, содержащую все объекты из диаграммы и нулевой объект. Затем, рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}$, содержащую $\mathcal{A}_0$ и конечные (ко)пределы в $\mathcal{A}_0$. Аналогично, по категории $\mathcal{A}_1$ строится полная подкатегория $\mathcal{A}_2$ и так далее. Объединение категорий $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ — это малая абелева категория, которую можно рассматривать как полную подкатегорию в категории ${}_R\mathbf{Mod}$.

Но точный функтор не обязан сохранять бесконечные пределы. Поэтому бесконечные (ко)произведения могут вычисляться в категории $\mathcal{A}$ совсем не так, как в категории ${}_R\mathbf{Mod}$.

Естественные преобразования функторов

Определение. Рассмотрим категории $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и два функтора F_1, F_2 между ними:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование $\alpha : F_1 \Rightarrow F_2$ — это набор морфизмов

$$\{\alpha_x : F_1x \to F_2x \mid x \in Ob(\mathcal{X})\}$$

таких, что для любого морфизма $f : x \to z$ диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} F_1x & \xrightarrow{\alpha_x} & F_2x \\ {\scriptstyle F_1f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_2f} \\ F_1z & \xrightarrow{\alpha_z} & F_2z \end{array}$$

Морфизмы α_x называются *компонентами естественного преобразования* α.

Определение. Функторы $F_1, F_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называюся *изоморфными* (обозначение $F_1 \cong F_2$), если существуют такие естественные преобразования $\alpha : F_1 \Rightarrow F_2$ и $\beta : F_2 \Rightarrow F_1$, что

$$\alpha\beta = \mathrm{id}_{F_2},\ \beta\alpha = \mathrm{id}_{F_1}.$$

Мы уже встречались с понятием естественного преобразования в данном курсе.

Пример. Пусть $T : \mathcal{J} \to \mathcal{X}$ — функтор. Рассмотрим $a \in OB(\mathcal{X})$ и константный функтор $a : \mathcal{J} \in \mathcal{X}$:

$$a(j) := a \text{ и } a(f) := \mathrm{id}_a$$

для любых объектов $i, j \in Ob(\mathcal{J})$ и морфизмов $f : i \to j$. Тогда конус $\alpha : a \to T$ — естественное преобразование функторов a и T. Действительно, заданы компоненты $\alpha_j : a \to Tj$, а также для любого морфизма $f : i \to j$ выполнено условие согласованности:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha_i} & Ti \\ {\scriptstyle id_a}\Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle Tf} \\ a & \xrightarrow{\alpha_j} & Tj \end{array}$$

Коммутативность диаграммы выше следует из определения конуса.

Сопряженные функторы

Определение. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{A}$ — категории, а $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ и $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ — функторы. Говорят, что функтор F — *левый сопряженный* для функтора G, а G — *правый сопряженный* для F, и пишут $F \dashv G$, если существует естественная по x и a биекция

$$\mathcal{A}(Fx, a) \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}(x, Ga),$$

то есть, если два функтора $\mathcal{A}(F(-), -)$, $\mathcal{X}(-, G(-)) : \mathcal{X}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Sets}$ изоморфны.

Замечание. Сопряженные функторы единственные с точностью до изоморфизма.

Утверждение. Правый сопряженный функтор сохраняет все пределы, а левый сопряженный функтор — все копределы. В частности, правый сопряженный функтор точен слева, а левый сопряженный функтор точен справа.

Примеры. 1) Пусть R — ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим $A, B, C \in Ob({}_R\mathbf{Mod})$. Тогда существуют естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_R(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(B, C)).$$

Естественная биекция строится с помощью универсального свойства тензорного произведения. Каждому R-билинейному отображению $\varphi_0 : A \times B \to C$ соответствует R-линейное отображение $\varphi : A \otimes B \to C$. Рассмотрим R-линейное отображение $\psi : A \to \mathrm{Hom}_R(B, C)$. Имеем

$$\varphi_0(a, b) = \varphi(a \otimes b) = \psi(a)(b).$$

Фиксировав первый элемент, получили отображение в множество функций от второго аргумента. На множестве $\mathrm{Hom}_R(B, C)$ также задана структура R-модуля.

Отсюда функтор $(-) \otimes_R B : {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$ — левый сопряженный для функтора $\mathrm{Hom}_R(B, (-)) : {}_R\mathbf{Mod} \to {}_R\mathbf{Mod}$. Причем естественность преобразования будет по трем переменным.

2) Пусть R (необязательно коммутативное) ассоциативное кольцо с единицей. Для правого R-модуля A, левого R-модуля B и абелевой группы C рассмотрим естественную биекцию

$$\mathbf{Ab}(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} {}_R\mathbf{Mod}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)).$$

Покажем, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)$ — правый R-модуль:

$$(fr)(b) := f(rb),\ ((fr)s)(b) := f(r(sb))$$

для любых $r, s \in R$, $b \in B$ и $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, C)$.

Согласно определению тензорного произведения, существует биекция между гомоморфизмами абелевых групп и $\mathbb{Z}$-билинейными отображениями, свойство ассоциативности которых позволяет построить взаимнооднозначное соответсвие между ними и гомоморфизмами R-модулей.

Поэтому функтор $(-) \otimes B$ — левый сопряженный, сохраняет копределы и точен справа.

3) Покажем, что функтор Hom_R над необязательно коммутативным кольцом тоже будет правым сопряженным. Возникает проблема с заданием структуры модуля над кольцом R на множестве гомоморфизмов модулей, поэтому функтор Hom_R принимает значения в категории абелевых групп. Для абелевой группы A и левых R-модулей B, C рассмотрим естественную биекцию

$${}_R\mathbf{Mod}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ab}(A, \mathrm{Hom}_R(B, C)).$$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ — левый R-модуль. Для всех $a \in A, b \in B, r \in R$ полагаем

$$r(a \otimes b) := a \otimes rb.$$

Корректность доказывается аналогично предыдущим сображениям. Определяется билинейное отображение, которое сводится к $\mathbb{Z}$-линейному отображению, задающему структуру левого модуля.

Рассматривается ограничение конструкции из предыдущего пункта, в котором речь шла о произвольном коммутативном кольце, в случае кольца $\mathbb{Z}$. Таким образом, функтор $\mathrm{Hom}_R(B, -)$ является правым сопряженным, сохраняет пределы и точен слева.

Предложение. Функтор $A \otimes_R (-)$ точен справа для любого правого R-модуля A.

Доказательство. Рассмотрим кольцо R^{op}, которое как множество совпадает с R, но $a \cdot^{op} b := b \cdot a$ для всех $a, b \in R$. Тогда левые и правые R-модули — это правые и левые R^{op}-модули, а $A \otimes_R B = B \otimes_{R^{op}} A$. Точность последовательностей не изменится, ведь множества и морфизмы не изменились. Поэтому функтор $A \otimes_R (-)$ точен справа, так как функтор $(-) \otimes_{R^{op}} A$ точен справа. $\square$

Замечание. В силу теоремы Фрейда-Митчелла для любой абелевой категории (необязательно малой) $\mathcal{A}$ и объекта $B \in Ob(\mathcal{A})$, функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ точен слева (можно проверить напрямую).

Предложение. Функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, B) : \mathcal{A}^{op} \to Ab$ точен слева для любого объекта $B \in Ob(\mathcal{A})$.

Доказательство. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$, то есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, -)$ — точен слева. $\square$

Рассмотрим еще одно важное сопряжение, помогающее лучше понять, что такое сопряженные функторы.

Пример. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, $\mathcal{F}_{_R Mod}(X)$ — левый свободный R-модуль. Рассмотрим функтор $U : {_R}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Sets}$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Тогда существует естественная биекция

$$ {_R}\mathbf{Mod}(\mathcal{F}_{_R Mod}(X), M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sets}(X, UM), $$

где $X \in Ob(\mathbf{Sets}), M \in Ob({_R}\mathbf{Mod})$.

Любой гомоморфизм модулей можно рассматривать как отображение множеств. Воспользуемся универсальным свойством свободного R-модуля. Как бы мы не строили отображение свободных порождающих из множества X в произвольный модуль M (в множество элементов UM), его можно однозначно продолжить до гомоморфизма модулей $\mathcal{F}_{_R Mod}(X) \to M$.

Такое сопряжение называется *свободно-забывающим.* Его можно построить для многих алгебраических структур, например, групп, абелевых групп и алгебр.

Упражнение. Пусть A — абелева группа, а m — натуральное число. Тогда

$$ A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong A/mA. $$

Проективные и инъективные объекты

Для конструкции производного функтора нам понадобятся объекты, для которых Hom-функторы точны не только слева, но и справа.

Определение. Объект P абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным*, если для любого морфизма $f_0 : P \to M$ и эпиморфизма $p : N \twoheadrightarrow M$ существует (возможно, не единственный) морфизм $f : P \to N$ такой, диаграмма ниже коммутативна:

$$ \begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "p"] \\ P \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_0"'] & M \end{tikzcd} $$

Пусть

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

— точная последовательность. Применим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, C) \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

Предложение. Объект P проективен тогда и только тогда, когда для любой точной последовательности 5.1 точна последовательность 5.2.

Доказательство. Так как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ точен слева, достаточно рассмотреть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, C)$. Последовательность 5.2 точна, если и только если g_* сюръективный. Если $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, B)$, то $g_*(h) = gh$ (диаграмма 5.3).

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g_*(h)"'] & C \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

g_* сюръективен тогда и только тогда, когда любой морфизм из P в C пропускается через g, а это следует из определения проективного объекта. $\square$

Определение. *Инъективные объекты* в абелевой категории $\mathcal{A}$ — это проективные объекты в категории $\mathcal{A}^{op}$.

Иными словами, объект Q в A называется инъективным, если для любого морфизма $f_0 : M \to Q$ и мономорфизма $i : M \rightarrowtail N$ существует (необязательно единственный) морфизм $f : N \to Q$ такой, что диаграмма ниже коммутутивна:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, dashed, "f"] \\ M \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[r, "f_0"'] & Q \end{tikzcd}$$

Предложение. Объект Q — инъективен, если и только если для любой последовательности 5.1 точна последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Q) \longrightarrow 0$$

Доказательство. Доказывается с помощью перехода к двойственной категории и предыдущего предложения. $\square$

Определение. Проективные и инъективные объекты в категории ${}_R\mathbf{Mod}$ называются *проективными и инъективными модулями* соответственно.

Докажем свойство, называющееся *характеризацией проективных модулей над кольцами.*

Предложение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Модуль P проективный, если и только если существует модуль M такой, что $P \oplus M$ — свободный R-модуль.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть X — множество порождающих проективного модуля P. Рассмотрим соответствующий сюръективный гомоморфизм $p : \mathcal{F}_{_RMod}(X) \twoheadrightarrow P$. Значит, существует гомоморфизм $s : P \to \mathcal{F}_{_RMod}(X)$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_{_RMod}(X) \arrow[d, "p"] \\ P \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_P"'] & P \end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что s — инъективный гомоморфизм и $s(P) \cong P$. Тогда

$$\mathcal{F}_{_RMod}(X) = s(P) \oplus \operatorname{Ker} p.$$

Действительно, любой элемент $a \in \mathcal{F}_{_RMod}(X)$ можно представить как сумму $s(p(a)) \in s(P)$ и $(a - s(p(a))) \in \operatorname{Ker} p$. Если $b \in s(P) \cap \operatorname{Ker} p$, то существует такой $c \in P$, что

$$b = s(c) \text{ и } 0 = p(b) = p(s(c)) = \mathrm{id}_P(c) = c.$$

То есть $c = 0$, а значит $b = 0$.

($\Leftarrow$) Следует из того, что прямая сумма (=копроизведение в абелевой категории) $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$ проективно тогда и только тогда, когда все $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ проективны (будет доказано на следующей лекции). Действительно, так как свободный модуль проективен, все его прямые слагаемые являются проетивными модулями. $\square$

Лекция 6

Проективные и свободные модули

Докажем утверждение, которое мы использовали для доказательства того, что проективный модуль — прямое слагаемое свободного.

Предложение. Пусть $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — набор объектов в некоторой абелевой категории. Тогда их прямая сумма $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ является проективным объектом, если и только если все объекты в наборе $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ проективны.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть даны морфизмы $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to A$ и $\pi : B \twoheadrightarrow A$. Покажем, что существует морфизм $g : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to B$ такой, что диаграмма 6.1 коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Рассмотрим объект P_λ и соответствующее ему вложение $i_\lambda : P_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$. Объект P_λ проективный, значит, существует морфизм $g_\lambda : P_\lambda \to B$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
P_\lambda \arrow[r, "g_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & B \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

В качестве морфизма g на диаграмме 6.1 возьмем морфизм, соответствующий набору $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ согласно определению копроизведения. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
P_\lambda \arrow[r, "g_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & B \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Композиции πg и f со всеми i_λ одинаковы:

$$\pi g i_\lambda = \pi g_\lambda = f i_\lambda,$$

так как морфизмы из копроизведения однозначно определяются набором компонент, то $\pi g = f$.

($\Rightarrow$) Рассмотрим диаграмму 6.2:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, two heads, "\pi"] & \\
P_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & A \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[uu, bend left, "g"] & P_\mu \arrow[u, "0"'] \arrow[l, "i_\mu"]
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

Фиксируем объект P_α и рассматриваем морфизм $f_\alpha : P_\alpha \to A$. Для любого $\mu \neq \alpha$ в качестве морфизма из P_μ в A берем нулевой морфизм. Тогда существует единственный морфизм $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to A$. Прямая сумма объектов $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ проективна, поэтому всесте с эпиморфизмом $\pi : B \twoheadrightarrow A$ существует морфизм $g : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to B$ такой, что $\pi g = f$. Следовательно,

$$\pi g i_\alpha = f i_\alpha = f_\alpha.$$

Значит, $g i_\alpha : P_\alpha \to B$ — искомый морфизм. Таким образом мы доказали проективность всех объектов в наборе $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. □

Возникает вопрос, всегда ли проективный модуль свободный? Приведем пример проективного несвободного модуля.

Пример. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ как модуль над собой. Подмодуль $\mathbb{Z} \times \{0\}$ проективен, потому что является прямым слагаемым свободного:

$$(\mathbb{Z} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Но этот подмодуль не является свободным. Действительно, $(0,1)(\mathbb{Z} \times \{0\}) = 0$, что неверно для свободного модуля. Нельзя получить 0, умножая свободный модуль на ненулевой элемент кольца.

Упражнение. Найти несвободный проективный модуль над кольцом квадратных матриц $M_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — поле.

Упражнение. Проверить непосредственно, что функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ точен слева для любого объекта M в абелевой категории $\mathcal{A}$, а функтор $(-) \otimes_R N$ точен справа для любого левого R-модуля N.

Выделим класс таких колец, что все проективные модули над ними свободные.

Определение. Пусть R — ассоциативное кольцо. Подгруппа $I \subseteq (R, +)$ называется *левым идеалом (правым идеалом)*, если $ra \in I$ ($ar \in I$) для любых $r \in R$ и $a \in I$.

Если I является левым и правым идеалом одновременно, то он называется *двухсторонним идеалом* или просто *идеалом*.

Определение. Для элемента кольца $a \in R$ обозначим через (a) идеал, порожденный этим элементом[5]. Идеал называется *главным*, если он порожден одним элементом.

Определение. Ассоциативное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля[6] называется *кольцом главных идеалов* (сокращенно КГИ), если все его идеалы главные.

Замечание. В определении кольца главных идеалов можно не требовать коммутативности или отсутствия делителей нуля, но основные структурные теоремы, изучаемые в данном курсе, доказываются с учетом этих условий.

[5] Такой идеал можно воспринимать как пересечение всех идеалов, содержащих a.
[6] То есть таких ненулевых элементов a и b, что $ab = 0$.

Пример. Евклидовы кольца являются кольцами главных идеалов, например, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, кольцо многочленов над полем $\mathbb{K}[x]$.

Теорема 6.1. *Пусть R — КГИ. Тогда все проективные R-модули свободные.*

Доказательство. Можно посмотреть в книге P.J. Hilton, U. Stammbach *A Course in Homological Algebra*, Theorem 5.1. □

Критерий Бэра инъективности модуля

Рассмотрим несколько конструкций и утверждений, необходимых для доказательства критерия Бэра.

Определение. Пусть M — множество, а $\preceq$ — бинарное отношение на этом множестве. Говорят, что $(M, \preceq)$ — *частично упорядоченное множество* (сокращенно ЧУМ), если отношение $\preceq$ для любых $a, b, c \in M$ удовлетворяет условиям:

1) $a \preceq a$ — рефлексивность;

2) $(a \preceq b) \wedge (b \preceq a) \Leftrightarrow a = b$ — антисимметричность;

3) $(a \preceq b) \wedge (b \preceq c) \Rightarrow a \preceq c$ — транзитивность.

Замечание. Множество называется частично упорядоченным, потому что в нем могут быть несравнимые элементы. То есть могут быть элементы a и b в M такие, что ни $a \preceq b$, ни $b \preceq a$.

Определение. ЧУМ, в котором все элементы сравнимы, называется *линейно упорядоченным множеством.*

Определение. Элемент ЧУМ a называется *максимальным (минимальным)*, если из того, что $a \preceq b\,(b \preceq a)$ для некоторого $b \in M$, следует равенство a и b.

Определение. ЧУМ $(M, \preceq)$ называется *вполне упорядоченным*, если оно линейно упорядоченно, и в любом подмножестве $K \subseteq M$ есть минимальный элемент.

Определение. *Цепью* в ЧУМ называется линейно упорядоченное подмножество.

Определение. Элемент $m \in M$ называется *верхней гранью* цепи K, если для любого элемента $k \in K$ выполняется $k \preceq m$.

Приведем два утверждения, эквивалентных аксиоме выбора:

Теорема 6.2 (Цермело)**.** *Любое множество можно вполне упорядочить.*

Лемма 6.3 (Цорна)**.** *ЧУМ, в котором любая цепь имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.*

Теорема 6.4 (Критерий Бэра)**.** *Пусть M — левый модуль над ассоциативным кольцом R с единицей. Тогда M инъективен, если и только если для любого левого идеала $I \subseteq R$ и гомоморфизма R-модулей $f_0 : I \to M$ существует гомоморфизм R-модулей $f : R \to M$ такой, что $f|_I = f_0$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Рассмотрим гомоморфизм $i : I \to R$, отображающий все элементы I в себя. Существование искомого гомоморфизма f следует из инъективности M (см. диаграмму 6.3).

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, dashed, "f"] \\ I \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[r, "f_0"'] & M \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

($\Leftarrow$) Нужно показать, что существование гомоморфизма модулей φ_0 из $N \subseteq L$[7] в M влечет существование гомоморфизма модулей $\varphi : L \to M$ такого, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ N \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[r, "\varphi_0"'] & M \end{tikzcd}$$

Обозначим через K множество пар $\{(N_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, где $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — подмодули L, содержащие N, а $\{\varphi_\lambda : N_\lambda \to M\}_{\lambda\in\Lambda}$ — гомоморфизмы модулей такие, что $\varphi_\lambda|_N = \varphi_0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. На K можно ввести частичный порядок $\preceq$:

$$(N_\alpha, \varphi_\alpha) \preceq (N_\beta, \varphi_\beta), \text{ если } (N_\alpha \subseteq N_\beta) \wedge (\varphi_\beta|_{N_\alpha} = \varphi_\beta).$$

Любая цепь в K содержит верхнюю грань. Действительно, пусть $\{(N_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ — цепь. Тогда $(\bigcup_{\alpha\in A} N_\alpha, \widetilde{\varphi})$, где $\widetilde{\varphi}(a) = \varphi_\alpha$, если $a \in N_\alpha$, — верхняя грань рассматриваемой цепи. Согласно лемме Цорна, в K есть максимальный элемент. Обозначим его $(\widetilde{N}, \psi)$.

Покажем, что $\widetilde{N} = L$. От противного, пусть $\widetilde{N} \neq L$. Выберем $b \in L \setminus \widetilde{N}$ и рассмотрим гомоморфизм $\theta : R \to L$, определенный по правилу $\theta(r) := rb$. Рассмотрим прообраз $\theta^{-1}(\widetilde{N}) = I$ — левый идеал в R. Определим гомоморфизм f_0 из I в M:

$$f_0(r) := \psi(\theta(r)) = \psi(rb).$$

По условию, f_0 продолжается до гомоморфизма $f : R \to M$. Определим отображение $\widetilde{\psi} : \widetilde{N} + Rb \to M$ по правилу

$$\widetilde{\psi}(a + rb) := \psi(a) + f(r).$$

Проверим корректность: пусть $a_1 + r_1 b = a_2 + r_2 b$, тогда

$$a_1 - a_2 = (r_2 - r_1)b \in \operatorname{Im}\theta,$$
$$f(r_2 - r_1) = f_0(r_2 - r_1) = \psi((r_2 - r_1)b) = \psi(a_1) - \psi(a_2).$$

Отсюда

$$\psi(a_1) + f(r_1) = \psi(a_2) + f(r_2).$$

Таким образом, корректность доказана.

[7] Можем так считать, ведь N можно отождествить с его образом при инъективном гомоморфизме в L.

Отображение $\widetilde{\psi}$ — гомоморфизм модулей, так как является суммой гомоморфизмов модулей. Но тогда $(\widetilde{N}, \psi) \prec (\widetilde{N} + Rb, \psi)$ — противоречие с максимальностью. Значит, $\widetilde{N} = L$, а в качестве φ можно взять ψ. □

Следствие. Абелева группа A является инъективным $\mathbb{Z}$-модулем, если и только если для любых $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ существует $b \in A$ такой, что $nb = a$.

Абелева группа с таким свойством называется *делимой*. Такой является, например, $(\mathbb{Q}, +)$.

Замечание. Нельзя пользоваться двойственностью, чтобы из результатов для проективных модулей получить результаты для инъективных модулей и наоборот. Категория ${}_R\mathbf{Mod}^{op}$ не является эквивалентной категории модулей над каким-либо кольцом.

Упражнение. Инъективный модуль выделяется прямым слагаемым в любом модуле, его содержащем.

Категории, в которых достаточно проективных и инъективных объектов

Из инъективных и проективных модулей мы будем строить резольвенты, необходимые для построения левых и правых производных функторов, компенсирующих неточность функторов, которые точны только слева или только справа. Важное условие для построения резольвент — достаточность проективных и инъективных объектов.

Определение. Говорят, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ *достаточно проективных объектов*, если для любого объекта $A \in Ob(\mathcal{A})$ существует проективный объект P и эпиморфизм $P \twoheadrightarrow A$.

Определение. Говорят, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ *достаточно инъективных объектов*, если для любого объекта $A \in Ob(\mathcal{A})$ существует инъективный объект Q и мономорфизм $A \rightarrowtail Q$.

Предложение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Тогда в категории ${}_R\mathbf{Mod}$ достаточно проективных объектов.

Доказательство. Пусть M — левый R-модуль, а X — множество порождающих. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{F}_{{}_RMod}(X)$ в M, определенный по правилу

$$x \mapsto x.$$

□

Замечание. Строго говоря, свободные порождающие в $\mathcal{F}_{{}_RMod}(X)$ не то же самое, что порождающие элементы в M. Но для простоты записи были использованы одинаковые обозначения.

Возникает вопрос, достаточно ли инъективных объектов в категории ${}_R\mathbf{Mod}$? Ответ — да, но доказательство несколько сложнее, чем в случае проективных объектов. Нам понадобится вспомогательное утверждение, которое интересно само по себе.

Теорема 6.5. *Пусть даны абелевы категории $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ и сопряженные функторы*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd},$$

причем F точен. Тогда для любого инъективного объекта $Q \in \mathcal{A}$ объект GQ инъективен в $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in Ob(X)$, и существуют морфизм $f_0 : X \to GQ$ и мономорфизм $i : X \rightarrowtail Y$. Нужно показать наличие морфизма $f : Y \to GQ$ такого, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, dashed, "f"] \\ X \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[r, "f_0"'] & GQ \end{tikzcd}$$

Докажем сюръективность $i^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y, GQ) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X, GQ)$. Воспользуемся естественной биекцией: диаграмма 6.4 коммутативна.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y, GQ) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X, GQ) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FY, Q) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "(Fi)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FX, Q) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{6.4}$$

Функтор F точен, поэтому Fi — мономорфизм. Объект Q инъективен в $\mathcal{A}$, значит, между морфизмами из FX в Q и из FY в Q устанавливается соответствие, задаваемое коммутативной диаграммой 6.5:

$$\begin{tikzcd} & FY \arrow[d, dashed] \\ FX \arrow[ur, tail, "Fi"] \arrow[r] & Q \end{tikzcd} \tag{6.5}$$

Это соответствие показывает сюръективность $(Fi)^*$. Следовательно, в силу коммутативности диаграммы 6.4, i^* сюръективен, и объект GQ инъективен в $\mathcal{X}$. □

Лекция 7

Достаточность инъективных объектов в категории $_R$Mod

Замечание. Согласно следствию из критерия Бэра, абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является инъективным $\mathbb{Z}$-модулем.

Теорема 7.1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Тогда в категории $_R\boldsymbol{Mod}$ достаточно инъективных объектов*[8].

Доказательство. Рассмотрим абелеву группу $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$, где A — абелева группа. Зададим на ней структуру левого R-модуля:

$$(rh)(s) := h(sr)$$

для любых элементов $r, s \in R$ и гомоморфизма $h : R \to A$.

Функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ является правым сопряженным к функтору тензорного произведения:

$$\mathbf{Ab}(R \otimes_R M, A) \xrightarrow{\sim} {_R\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)),$$

где M — левый R-модуль. Действительно, слева стоят билинейные отображения $f : R \times M \to A$ со свойством ассоциативности:

$$f(rs, m) = f(r, sm)$$

для всех $r, s \in R$ и $m \in M$. Им соответствуют гомоморфизмы абелевых групп $f(-, m) : R \to A$. Рассматриваемое отображение из M в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ является гомоморфизмом R-модулей. Таким образом, доказана естественность по A и M.

Мы значем, что $R \otimes_R M$ и M изоморфны как абелевы группы. Это естественный по M изоморфизм, следовательно, функтор $R \otimes_R (-)$ — точный, потому что, по сути, является забывающим функтором из категории $_R\mathbf{Mod}$ в категорию $\mathbf{Ab}$. По теореме 6.5, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ инъективен для любого инъективного $\mathbb{Z}$-модуля.

Пусть $I := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Рассмотрим

$$Q_0 := \prod_{f \in \mathrm{Hom}_R(M, I)} I.$$

Q_0 инъективно, как произведение инъективных объектов (было доказано двойственное утверждение). Определим гомоморфизм $\varphi : M \to Q_0$ с помощью диаграммы прямого произведения:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & Q_0 \arrow[d, "p_f"] \\ & I \end{tikzcd}$$

[8]Равносильно тому, что любой модуль является подмодулем инъективного модуля.

Осталось доказать инъективность гомоморфизма φ. Достаточно показать, что образ ненулевого элемента $a \in M$ под действием φ не равен нулю. В $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ есть элементы всех конечных порядков, значит, существует ненулевой гомоморфизм

$$g : \mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ g(a) \neq 0.$$

Так как $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен, то g продолжается до гомоморфизма из M в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Положим

$$f(m)(r) := g(rm).$$

Таким образом, мы задали отображение

$$f : M \to I.$$

Это гомоморфизм левых R-модулей:

$$f(sm)(r) = g(rsm) = f(m)(rs) = (sf(m))(r).$$

Тогда

$$(p_f\varphi(a))(1) = f(a)(1) = g(a) \neq 0.$$

Следовательно, $\varphi(a) \neq 0$. □

Левые производные функторы

Левые производные функторы строятся для точных справа функторов и призваны компенсировать их возможную неточность слева.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. *(Цепным) комплексом* в $\mathcal{A}$ называется поледовательность объектов и морфизмов

$$\ldots \xleftarrow{d_k} C_k \xleftarrow{d_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{d_{k+2}} C_{k+2} \xleftarrow{d_{k+3}} \ldots$$

такая, что $d_n d_{n+1} = 0$ для любого целого n.

Определение. Пусть дан точный справа функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, причем в $\mathcal{A}$ достаточно проективных объектов. *Проективной резольвентой* объекта $A \in \mathcal{A}$ называется точная последовательность

$$0 \longleftarrow A \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow P_n \longleftarrow \ldots,$$

где $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ — проективные объекты категории $\mathcal{A}$.

Рассмотрим комплекс $FP_\bullet$ в категории $\mathcal{B}$:

$$\ldots \longleftarrow 0 \longleftarrow FP_0 \longleftarrow FP_1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow FP_n \longleftarrow \ldots$$

По определению,

$$(L_nF)(A) := H_n(FP_\bullet).$$

— *n-й левый производный функтор* функтора F.

Замечание. Так как последовательность

$$0 \longleftarrow A \longleftarrow P_0 \xleftarrow{d_1} P_1$$

точна, то последовательность

$$0 \longleftarrow FA \longleftarrow FP_0 \xleftarrow{Fd_1} FP_1$$

тоже точна. Тогда

$$H_0(FP_\bullet) = \operatorname{Coker} Fd_1 \cong FA.$$

Определение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, M — правый R-модуль, N — левый R-модуль. Тогда

$$\operatorname{Tor}_n^R(M, N) := L_n(M \otimes (-))(N) \cong {}^9 L_n((-) \otimes N)(M)$$

— *функтор Tor*.

Определение. Пусть G — группа. Обозначим через $\mathbb{Z}G$ свободную абелеву группу с базисом G. То есть $\mathbb{Z}G$ состоит из формальных целочисленных комбинаций элементов из G. Введем операцию умножения на этом множестве:

$$(\sum_{g\in G} k_g g)(\sum_{h\in G} l_h h) := \sum_{g,h\in G} k_g l_h gh.$$

Построенное ассоциативное кольцо с единицей называется *групповым кольцом*.

Определение. Пусть G — группа, а A — левый $\mathbb{Z}G$-модуль[10]. Рассмотрим правый тривиальный $\mathbb{Z}G$-модуль $\mathbb{Z}$:

$$ng := n$$

для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. На всем $\mathbb{Z}G$ продолжается по линейности. Определим *гомологии групп* по правилу

$$H_n(G; A) := \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A).$$

Замечание. Приведем без доказательства формулу Хопфа для второй группы гомологий в качестве иной интерпретации рассматриваемых структур. Пусть F — свободная группа, R — ее нормальная подгруппа из соотношений. Если $G \cong F/R$, то

$$H_2(G; \mathbb{Z}) \cong (R \cap [F, F])/[R, F].$$

[9] Докажем это позже.
[10] То есть абелева группа с действием группы G автоморфизмами.

Правые производные функторы

Определение. Пусть дан точный слева функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, причем в $\mathcal{A}$ достаточно инъективных объектов. *Инъективной резольвентой* объекта $A \in \mathcal{A}$ называется точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q^n \longrightarrow \ldots,$$

где $\{Q^i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ — инъективные объекты категории $\mathcal{A}$.

Рассмотрим комплекс $FQ^\bullet$ в категории $\mathcal{B}$:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow FQ^0 \longrightarrow FQ^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow FQ^n \longrightarrow \ldots$$

По определению,

$$(R^n F)(A) := H^n(FQ^\bullet).$$

— *n-й правый производный функтор* функтора F.

Пример. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, M и N — левые R-модули. Тогда

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := (L_n \mathrm{Hom}_R(-, N))(M) \cong \text{[11]} (R^n \mathrm{Hom}_R(M, -))(N)$$

— *функтор Ext.*

Определение. Пусть G — группа, A — $\mathbb{Z}G$-модуль, $\mathbb{Z}$ — тривиальный $\mathbb{Z}G$-модуль. Определим *когомологии групп* по правилу:

$$H^n(G; A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}; A).$$

Построение резольвент

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория с достаточным количеством проективных объектов, $A \in Ob\mathcal{A}$. Так как в категории $\mathcal{A}$ достаточно проктивных объектов, то существует эпиморфизм $d_0 : P_0 \twoheadrightarrow A$, где P_0 — проективный объект. Рассмотрим $Z_0 := \mathrm{Ker}\, d_0$. Аналогично, существует эпиморфизм $p_1 : P_1 \twoheadrightarrow Z_0$, где P_1 — проективный объект. В качестве морфизма из P_1 в P_0 возьмем $d_1 := \ker d_0 \circ p_1$ (см. диаграмму 7.1).

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] & P_0 \arrow[l, two heads, "d_0"'] & P_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[dl, "p_1"] \\
 & & Z_0 \arrow[u, hook, "\ker d_0"] \arrow[dl] & \\
 & 0 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{7.1}$$

Построенная последовательность

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{d_0} P_0 \xleftarrow{d_1} P_1$$

[11] Будет доказано позже.

точна в члене P_0.

Аналогично строится P_{k+1} (см. диаграмму 7.2).

$$\begin{tikzcd}
\ldots & P_{k-1} \arrow[l, "d_{k-1}"'] & P_k \arrow[l, "d_k"'] & P_{k+1} \arrow[l, "d_{k+1}"'] \arrow[dl, "p_{k+1}"] \\
& & \operatorname{Ker} d_k \arrow[u, tail, "\ker d_k"] \arrow[dl] & \\
& 0 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

И так далее.

Утверждение. Рассмотрим диаграмму 7.3:

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[l] \arrow[d, dashed, "f_0"] & P_1 \arrow[l] \arrow[d, dashed, "f_1"] & \ldots \arrow[l] & P_k \arrow[l] \arrow[d, dashed, "f_k"] & \ldots \arrow[l] \\
0 & B \arrow[l] & C_0 \arrow[l] & C_1 \arrow[l] & \ldots \arrow[l] & C_k \arrow[l] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{7.3}$$

Пусть дан морфизм $f : A \to B$, верхняя и нижняя строчки являются комплексами, причем объекты $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ проективны, а нижняя строчка точна. Тогда диаграмму 7.3 можно дополнить до коммутативной морфизмами $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ