ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИЯ ВЫСШИХ СПИНОВ И ГОЛОГРАФИЯ

ПОНОМАРЕВ
ДМИТРИЙ СЕМЕНОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
БЕЛОВА МИХАИЛА АНАТОЛЬЕВИЧА

Содержание

Лекция 1.

Введение. Высшие спины

В начале лекции обратимся к основным определениям для того, чтобы было понятно, что будет дальше в этом курсе.

В плоском пространстве свободные поля можно классифицировать в четырех измерениях спином и массой.

- $s = 0, \frac{1}{2}, \dots$
- $m^2 = 0,\ m^2 > 0$

Это классификация на свободном уровне. Дальше можно строить взаимодействия.

Возможно, вам знакомы разные теория поля, такие как общая теория относительности или теория Янга – Миллса. Обычно данные теории мотивируются либо экспериментально, либо исходя из некоторых эвристических или математических соображений. Теперь представим себе ситуацию, когда у нас нет таких данных. Что тогда делать? Один из вариантов – рассматривать все возможные условия теории поля: физические условия совместности. Начиная со свободного уровня, мы будем пытаться строить взаимодействующую теорию высших спинов.

Высшие спины – такие спины, где $s > 2$.

Далее в курсе будут рассмотрены теории, в которых значение массы равно нулю. Симметрии в теориях хороши тем, что они являются неким руководящим принципом в построении теории, а также они связаны с какой-нибудь красивой геометрией. Кроме того, симметрии могут ограничивать различные контрчлены и приводят к тому, что теория на квантовом уровне становится конечной или перенормированной.

Однако, существует проблема, связанная с тем, что симметрии слишком большие и сильные. Этот факт имеет название **no-go теорем.** Суть их заключается в том, что в плоском пространстве частицы высших спинов не могут взаимодействовать. В случае замены плоского пространства на пространство АДС (антидеситтеровское) можно показать, что в пространстве АДС совместная теория высших спинов действительно существует.

Поля в плоском пространстве

Будем рассматривать поле Минковского $M^{d-1,1}$

$$g \sim 1, \qquad n = \begin{pmatrix} -1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Гравитационное поле в окружающем нас мире имеет значение порядка единицы в то время, как остальные поля – небольшие флуктуации, которые в первом приближении равны нулю. Соответственно имеет смысл изучать проблемы построения теорий, начиная с гравитационного фона.

Изометрии n – это группа Пуанкаре $ISO(d-1,1)$. Это малые поля степени ноль. Теперь добавим поля степени один. В этом порядке уравнения движения имеют вид:

$$L\phi = 0$$

Симметрия Пуанкаре «выживает» на взаимодействующем уровне. Решение такого уравнения образует линейное пространство. Также алгебра Пуанкаре некоторым образом действует на поля ϕ. То есть все вместе это означает, что

$$P, J \to U(P) = \delta_P\phi,$$
$$U(J)\phi = \delta_J\phi,$$

где P, J – генераторы трансляции и преобразования Лоренца.

Требование заключается в том, чтобы эти преобразования переводили решения в решения. Отсюда следует, что

1) $\phi,\ L\phi = 0$ реализует представление $ISO(d-1,1)$.

2) Унитарность:

$$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*$$
$$(\phi, \xi_1\psi_1 + \xi_2\psi_2) = \xi_1(\phi, \psi_1) + \xi_2(\phi, \psi_2)$$
$$(\eta_1\phi_1 + \eta_2\phi_2, \psi) = \eta_1^*(\phi_1, \psi) + \eta_2^*(\phi_2, \psi)$$
$$(\psi, \psi) > 0 \ \text{для}\ \psi \neq 0$$

Дополнительно требуется, чтобы произведение было инвариантно по отношению действия изометрий:

$$(U(G)\phi, U(G)\psi) = (\phi, \psi)$$

Здесь G – конечный элемент группы.

Далее рассмотрим элемент, который бесконечно близок к единичному:

$$G = 1 + e\epsilon g$$
$$(U(g)\phi, \psi) = (\phi, U(g)\psi)$$

Таким образом, нас интересуют унитарные представления.

Существует **теорема**:

Унитарные представления простых некомпактных групп бесконечномерные либо тривиальные.

Обычными конечномерными матрицами невозможно реализовать представление некомпактной группы. Поэтому мы всегда имеем дело с бесконечномерными пространствами.

Свободные поля в пространстве Минковского – унитарные неприводимые представления группы Пуанкаре [UIR’s ISO(d-1,1)].

Метод индуцированных представлений Вигнера

Данный метод состоит из нескольких шагов:

1. Трансляция коммутирует $[P_\mu, P_\nu] = 0$, P_μ можно одновременно диагонализировать.
   Можно выбрать базис среди состояний полей таким образом, что трансляции действуют диагонально: $P_\mu \phi_{p,\sigma} = p_\mu \phi_{p,\sigma}$
2. Действуем на состояние с импульсом p конечным преобразованием Лоренца:
$$P^\mu\big(U(\Lambda)\phi_{p,\sigma}\big) = U(\Lambda)[U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)]\phi_{p,\sigma} = U(\Lambda)\big(\Lambda^{-1}{}_{\rho}{}^{\mu} P^\rho\big)\phi_{p,\sigma}$$
$$= \Lambda^\mu_\rho p^\rho\big(U(\Lambda)\phi_{p,\sigma}\big)$$
   То есть
$$U(\Lambda)\phi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}(\Lambda, p)\phi_{\Lambda \mathrm{p},\sigma'}$$
   p образуют орбиты некоторого p_0.
3. Зафиксируем некоторое удобное p_0. Далее выберем для любого p некоторое стандартное преобразование Лоренца $L \in So(d-1,1){:}\, p = Lp_0$
4. Выбираем базис $\phi_{p_0,\sigma}$ в дополнительном пространстве σ. Далее индуцируем базис в точках p.
$$\phi_{p,\sigma} = N(p)U\big(L(p)\big)\phi_{p_0,\sigma}$$
5. Возьмем
$$U(\Lambda)\phi_{p,\sigma} = N(p)U\big(\Lambda L(p)\big)\phi_{p_0,\sigma} = N(p)U\big(L(\Lambda p)\big)U\big(L^{-1}(\Lambda \mathrm{p})\Lambda \mathrm{L}(\mathrm{p})\big)\phi_{p_0,\sigma}$$
6. Осталось разобраться как работает $U(W)$, где $p_0^\mu = W^\mu \nu p_0^\nu$. W – элементы подгруппы стабильности p_0, которые также известны как малая группа Вигнера.
$$\big(\phi_{p_0,\sigma_1}, \phi_{p_0,\sigma_2}\big) = a_{\sigma_1,\sigma_2}$$
   P самосопряжены, то $\big(\phi_{p_1,\sigma}, \phi_{p_2,\sigma}\big) \propto \delta(p_1 - p_2)$.

Случаи малых групп

Орбиты p_0, классы

1. $p_0 = 0$, подгруппа стабильности (п.с.) $= So(d-1,1)$
$$p^2 = -p_0^2 + p^{-2}$$
$$m^2 = -p^2$$
2. $m^2 > 0$, выбираем стандартный вектор $p_0 = (m, 0, \dots, 0)$ и п.с. $= So(d-1)$.
3. $m^2 < 0$, $p_0 = (0, m, 0, \dots, 0)$ и п.с. $= So(d-2,1)$
4. $m^2 = 0, \to p^2 = 0$ – конус. Такие представления есть безмассовые.

Подгруппа стабильности у $p_0{:}\, p^2 = 0$, имеет вид:
$$(p_+, p_-, p_i)$$
$$p_+ = \frac{(p_0 + p_d)}{2}$$
$$p_- = \frac{(p_0 - p_d)}{2}$$

$$p^2 = 4p_+p_- + \vec{p}^2$$

В этих координатах выбираем стандартный вектор $(p_+, 0, 0)$.

И мы хотим, чтобы $J_{mn}p_0^n = 0 \to J_{m-} = 0,\ J_{ij} \neq 0,\ J_{i+} \neq 0$.

Очевидно, что

$$[J_{ij}, J_{ij}] \to So(d-2)$$

$$J_{i+} - \text{вектор к } J_{ij}$$

$$[J_{i+}, J_{j+}] = \eta_{ij}J_{++} = 0$$

Задача сводится к тому, что есть некоторые π_0 – импульсы в $d-2$ мерном пространстве. Необходимо будет классифицировать орбиты:

1. $\pi_0 = 0$
   I из $ISO(d-2)$ действует тривиально. Эффективно заменяется на $So(d-2)$.
2. $\pi_0 > 0$
   Представление бесконечного (непрерывного) спина.

В итоге имеем:

1. $p = 0,\ So(d-1,1)$
2. $p^2 < 0,\ So(d-1)$
3. $p^2 > 0,\ So(d-2,1)$
4. $p^2 = 0,\ So(d-2)$
5. $p^2 = 0,\ ISo(d-2)$

Лекция 2.

Унитарное неприводимое представление So(d)

Обозначим скалярное представление следующим образом:

$$(V,W)=V^*W$$

V^a – вектор, $(V,W)=\overrightarrow{V^a}W_a$

Тензорное произведение векторов:

$$V^a * V^b \rightarrow V^{ab} \rightarrow \text{Тензор ранга 2}$$

В случае, если

$$V^{ab}=V^{ba},$$

то сохраняется свойство симметрии.

$$V'^{a'b'}=O_a^{a'}O_b^{b'}V^{ab}$$

И условие антисимметричности инвариантно

$$V^{ab}=-V^{ba}$$

И, наконец, в случае равенства нулю следа получаем инвариантность

$$V^{ab}\delta_{ab}=0$$

Эквивалентно можно представить произвольный вектор в таком виде:

$$W^{ab}=V^{ab}+U^{ab}+S\delta^{ab},$$

где V^{ab} – симметричный, U^{ab} – антисимметричный и $S\delta^{ab}$ – скаляр.

Пусть есть тензор без следов, на который наложены условия симметрии

$$T^{a_1,\dots,a_n}$$

Чтобы этот тензор описывал неприводимые представления ортогональной группы, необходимо задавать симметрии неприводимых тензоров **диаграммой Юнга**.

Это объект, состоящий из клеток, которые размещены в строки с невозрастающей длиной (Рисунок 1).

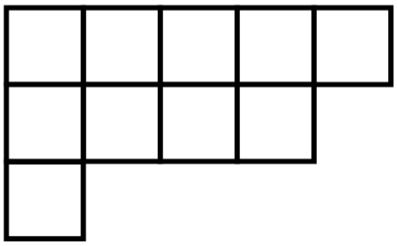

Рисунок 1. Диаграмма Юнга формы (5,4,1).

Каждая клетка диаграммы соответствует одному индексу тензора.

$$T^{a_1a_2,\dots,a_{i+1},\dots,a_{i_1+i_2},\dots,}$$

Свойства тензора будут следующими:

1. Он симметричен по отношению к перестановке индексов в одной группе.
2. При симметризации индексов в одной группе тензор становится симметричным и является проекцией.

$$Sym_{ab}(T^{ab}) = \frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba})$$

$$Sym_{abc}(T^{abc}) = \frac{1}{6}(T^{abc} + T^{acb} + T^{bac} + T^{bca} + T^{cab} + T^{cba})$$

Утверждение:

Тензоры с данной симметрией являются неприводимыми представлениями $So(d)$.

Упражнение:

Имеем:

$$T^{abc} = T^{bac}$$
$$T^{abc} = -T^{cba}$$

Необходимо показать, что $T = 0$.

У $So(d)$ существует еще один инвариантный тензор $\epsilon_{a_1,\dots,a_d}$

Данный тензор можно использовать, чтобы устанавливать эквивалентность между разными представлениями:

$$\epsilon_{a_1,\dots,a_d} T_{a_1,\dots,a_n} = S_{a_{n+1},a_d}$$

В общем случае можно сворачивать индексы в любой диаграмме. Однако не всегда полученная часть будет бесследовой.

Факт:

Пусть имеется некая диаграмма. Если $h_1 + h_2 \geq d$, то диаграмма равна 0. Также важно отметить, что след по любой паре индексов равен 0.

Упражнение:

Имеется диаграмма формы (2,1), след ее равен нулю и $d = 2$.

Необходимо показать, что тензор также будет равен нулю.

В случае $m^2 > 0$ нам интересны представления $So(d-1)$ с диаграммой, у которой след равен нулю, причем $h_1 + h_2 \leq d$.

При $m^2 = 0$ рассматриваются представления $So(d-2)$ с диаграммой, у которой след равен нулю, причем $h_1 + h_2 \leq d$.

В случае $M(d-1,1)$ нас интересуют представления $ISO(d-1,1)$. Конформная соответствующая группа $So(d,2)$.

Теперь перейдем к обычной теории поля, где нам необходимо иметь $So(d-1,1)$ явную. Или по-другому – мы хотим использовать там тензоры Лоренца. Тогда логично возникает задача о том, как переформулировать данную конструкцию через Лоренцевы тензоры.

Рассмотрим задачу поэтапно:

1. $m^2 > 0$

$$(\boxdot - n^2)\phi = 0$$

Пусть Y – некоторая форма диаграммы Юнга.

Для того, чтобы эта форма описывала представления малой группы $So(d-1)$, характеризуемой формой Y, то мы должны выбрать тензор Лоренца с симметрий Y.

Цель заключается в описание $UIR, m^2 > 0, So(d-1) \rightarrow Y$.

В случае, если ограничиться только условием $Tr(\phi^Y) = 0$, мы не сможем достичь вышеуказанной цели, поэтому необходимо ввести следующие условия:

$$\partial a \Phi^{a(i_1),..} = 0, \qquad \partial b \Phi^{a(i_1),b(i_2),...} = 0$$

Для того, чтобы убедиться в правильности результаты можно провести преобразование Фурье:

$$p_a \widetilde{\Phi}^{a(i_1),..} = 0$$
$$p_b \widetilde{\Phi}^{a(i_1),b(i_2),...} = 0$$

После этого переходим в систему отчета покоя (с помощью преобразований Лоренца):

$$\tilde{p} = (w, \vec{o})$$

Теперь приведем пример уравнения для UIR с $m^2 > 0, S = 1$.

$$\begin{cases} (\boxdot - m^2) A^\mu(x) = 0 \\ \partial_\mu A^\mu(x) = 0 \end{cases}$$

Только система таких уравнений дает возможность иметь дело с унитарными неприводимыми представлениями.

Безмассовые поля

Пусть мы имеем $m^2 = 0$ и необходимо найти $\phi^{a(s)}\ So(d-2)$.

Для этого возьмем Лоренцев тензор с той же симметрией.

$$Tr\left(\phi^{m(s)}\right) = 0, \qquad m - So(d-1,1) \text{ индекс}$$
$$\boxdot \phi^{m(s)} = 0$$
$$\partial_m \phi^{m(s)} = 0$$

Далее необходимо будет добавить калибровочной инвариантности.

$$\partial \phi^{m(s)} = \partial^m \xi^{m(S-1)}$$

Кроме того,

$$Tr\xi = 0, \qquad \boxdot\, \xi = 0, \qquad \partial\xi = 0$$

Снова проведем преобразование Фурье и используем Лайтко координаты

$$p = (p_+, 0, 0)$$
$$p_+ \phi^+ = 0, \phi \text{ не может иметь индекс "} + \text{"}$$

И дополнительное условие калибровочной инвариантности

$$\partial \phi = p^- \xi^{m(S-1)}$$

В итоге при таком подходе можно описать необходимые представления малых групп.

Лекция 3.

Задачи с прошлой лекции

Дано:

$$T_{ijk} = T_{jik}$$
$$T_{ijk} = -T_{kji}$$

Решение:

$$T_{ijk} = -T_{kji} = -T_{ikj} = T_{kij} = -T_{jik} = -T_{ijk} \to 2T_{ijk} = 0$$

Дано:

$$T_{ijk} = T_{jik}$$
$$T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} = 0$$
$$T^{i}_{ik} = 0, \qquad T^{i}_{ji} = 0, \qquad T^{j}_{ij} = 0$$

Решение:

$$T_{12,1} = T_{21,1}$$
$$T_{12,2} = T_{21,2}$$
$$3T_{11,1} = 0$$
$$T_{11,2} + 2T_{21,1} = 0$$
$$T_{22,1} + 2T_{21,2} = 0$$
$$T_{11,2} + T_{22,2} = 0 \to T_{11,2} = 0$$
$$T_{22,1} + T_{11,1} = 0 \to T_{22,1} = 0$$

Симметричные безмассовые поля

На прошлой лекции было получено следующее:

$$\boxdot\phi^{m(s)} = 0$$
$$\partial_m \phi^{ma(s-1)} = 0$$
$$\phi^{ma(s-1)} = 0$$

Также условия на калибровочные инварианты:

$$\partial\phi^{a(S)} = \partial^a \xi^{a(S-1)}$$
$$\boxdot\xi^{a(s)} = 0$$
$$\partial_m \xi^{ma(S-1)} = 0$$
$$\xi_m^{ma(S-3)} = 0$$

Из всех уравнений видно, что путем варьирования бесследового поля ранга S можно получить такое уравнение:

$$\phi^{a(S)}\boxdot\phi^{a(S)}$$

Необходимо добавлять вспомогательные поля так, чтобы они были откалиброваны и не несли новых степеней свободы.

Минимальный набор вспомогательных полей используется в теории Фронсдела.

$$\phi_{mn}^{mna(S-4)} = 0 \rightarrow \phi^{a(S)} = \psi^{a(S)} + \eta^{aa}\chi^{a(S-2)}, \qquad \psi_m^{ma(S-2)} = 0, \qquad \chi_m^{ma(S-4)} = 0$$

Калибровочное преобразование, как и раньше:

$$\partial\phi^{a(S)} = \partial^a\xi^{a(S-1)}, \qquad \xi_m^{ma(S-3)} = 0$$

Конечный результат имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\int d^dx\, \phi_{a(S)}G^{a(S)}$$

$$G^{a(S)} = F^{a(S)} - \frac{s(s-1)}{4}\eta^{aa}F_m^{a(S-2)m}$$

$$F^{a(S)} = \boxdot\, \phi^{a(S)} - s\partial^a D^{a(S-1)}$$

$$D^{a(S-1)} = \partial_m\phi^{ma(S-1)} - \frac{(s-1)}{2}\partial^a\phi_m^{ma(S-2)}$$

Далее покажем, что данное действие имеет смысл:

1. $G^{a(S)} = 0$

$$F^{a(S)} - \frac{s(s-1)}{4}\eta^{aa}F_m^{a(S-2)m} = 0$$

Далее берем след уравнения и получаем, что

$$\# * F_m^{a(S-2)m} = 0$$

Тогда

$$F^{a(S)} = 0$$

$$\boxdot\, \phi^{a(S)} - s\partial^a D^{a(S-1)} = 0$$

Следующим шагом накладываем калибровку:

$$D^{a(S-1)} = 0$$

Отсюда следует, что остаточная калибровочная симметрия удовлетворяет параметрам $\boxdot\, \xi^{a(S-1)} = 0$

И наше уравнение имеют вид:

$$\boxdot\, \phi^{a(S)} = 0$$

Теперь рассмотрим, как меняется след:

$$\partial_m\phi_m^{ma(S-2)} = \frac{2}{3}\partial_m\xi^{ma(S-2)}$$

$$\phi_m^{ma(S-2)} = 0$$

$$\partial_m\xi^{ma(S-2)} = 0$$

$$D = 0 \rightarrow \partial_m\phi_m^{ma(S-1)} = 0$$

То есть нужные уравнения восстановлены.

Кроме того, мы знаем, что

$$0 = \partial S = \int d^dx\partial_a\xi_{a(S-1)}G^{a(S)} = -\int d^dx\xi_{a(S-1)}\partial_m G^{ma(S-1)}$$

$$\partial_m G^{ma(S-1)} = \eta^{aa}H^{a(s-3)}$$

Это так называемое **тождество Бьянки.**

Массивные поля

Уравнения движения имеют вид:

$$(\boxdot - m^2)\phi^{a(S)} = 0$$
$$\partial_m \phi^{ma(S-1)} = 0$$
$$\phi_m^{ma(S-2)} = 0$$

В случае $S = 1$ имеем:

$$S = \int d^d x \left(-\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}\phi_a m^2 \phi^a\right)$$
$$F_{ab} = \partial_a \phi_b - \partial_b \phi_a$$

Варьируя эти выражения, получим:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = 0 \to \boxdot\, \phi^a - \partial^a \partial_b \phi^b - m^2 \phi^a = 0$$
$$(\boxdot - m^2)\phi^a = 0$$

Мы получаем столько же уравнений, сколько было и полей.

Факт:

$S = 2,\ m^2 > 0$ – теория Фирца-Паули

Кратко про теорию (кинчлен как в линеаризованной ОТО + $m_1^a \phi^{aa} \phi_{ab}$, $m_1^a \phi_a^a \phi_b^b$).

При $S \geq 3$ обязательно добавляются вспомогательные поля.

Приведем пример:

$$S = \frac{1}{2}\int d^d x \phi_a \boxdot\, \phi^a$$
$$\boxdot\, \phi^a = 0$$

Посмотрим, какими будут представления малой группы Вигнера $ISO(d-2)$.

$$\phi^a = \{\phi^+, \phi^-, \phi^i\}$$
$$\phi^+ \to \ \phi^i = J_{i+}\phi^+$$
$$\phi^i \to \ \phi^- = J_{+i}\phi^+$$
$$\phi^- \to \ 0$$

Более детально построим инвариантное внутреннее произведение:

$$(\phi, \psi) = \alpha \overline{\phi^+}\psi^+ + \beta \overline{\phi^-}\psi^- + \gamma\left(\overline{\phi^-}\psi^+ + \overline{\phi^+}\psi^-\right) + \delta \overline{\phi^i}\psi_i$$
$$(\dots) \geq 0 \to \delta > 0$$

Это означает, что

$$\left(\pi^i \phi^+, \psi^i\right) \neq 0$$
$$\left(\phi^+, \pi^i \psi^i\right) \neq 0$$
$$\gamma \neq 0$$

Кроме того,

$$\left(\pi^i \phi^i, \psi^-\right) = \left(\phi^i, \pi^i\, \psi^-\right) = 0$$
$$\beta = 0$$

Скалярные моды:

$$(\phi,\psi)|_{\text{ск}} = \alpha\overline{\phi^+}\psi^+ + \gamma\left(\overline{\phi^-}\psi^+ + \overline{\phi^+}\psi^-\right), \qquad \gamma \neq 0$$

Упражнения

Задача 1.

Имеем:

$$D^{a(S-1)} = \partial_m\phi^{ma(S-1)} - \frac{s-1}{2}\partial_m\phi^{a(S-2)m} = 0$$

Необходимо найти остаточную симметрию

$$\partial\phi^{a(S)} = \partial^a\xi^{a(S-1)}$$

Решение:

$$\partial_m\partial\phi^{ma(S-1)} = \partial_m\frac{1}{S}\left(1 - \partial^m\xi^{a(S-1)} + (S-1)\partial^a\xi^{ma(S-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{S}\boxdot\,\xi^{a(S-1)} + \frac{S-1}{S}\partial^a\partial_m\xi^{ma(S-2)}$$

Далее перейдем ко второму члену

$$Tr\left(\partial\phi^{a(S)}\right) = \eta_{aa}\partial^a\xi^{a(S-1)} = \frac{2(S-1)}{S(S-1)}\partial^m\xi_m^{a(S-2)} = \frac{2}{S}\partial^m\xi_m^{a(s-2)}$$

$$\partial(2) = -\frac{S-1}{S}\partial^a\partial^m\xi_m^{a(s-2)} = -\frac{S-1}{S}\partial^a\partial^m\xi_m^{a(S-2)}$$

Задача 2.

Необходимо показать, что $\partial F^{a(S)} = 0$

Решение:

$$F^{a(S)} = \boxdot\,\phi^{a(S)} - S\partial^a D^{a(S-1)}$$

$$\partial F^{a(S)} = \boxdot\,\partial^a\xi^{a(S-1)} - S\partial^a\frac{1}{S}\boxdot\,\xi^{a(S-1)} = 0$$

Задача 3.

Покажем, что $F_{mn}^{mna(S-4)} = 0$

Решение:

$$\eta_{aa}D^{a(S-1)} = \eta_{aa}\partial_m\phi^{ma(S-1)} = \frac{S-1}{2}\eta_{aa}\partial^a\phi^{a(S-2)m} =$$

$$= \partial_m\phi^{mna(S-3)} - \partial_n\phi_m^{na(S-3)m} = 0$$

$$\eta_{aa}F^{a(S)} = \boxdot\,\phi_m^{ma(S-2)} - \partial^m D_m^{a(S-2)} = \boxdot\,\phi_m^{ma(S-2)} - 2\partial^m D_m^{a(S-2)} =$$

$$= 2\boxdot\,\phi_m^{ma(S-2)} - 2\partial_n\partial_m\phi^{mna(S-2)} + (S-2)\partial^a\partial_n\phi_m^{na(S-3)m}$$

И, наконец, еще раз берем след и получаем:

$$\eta_{aa}\left(2\boxdot\,\phi_m^{ma(S-2)} - 2\partial_n\partial_m\phi^{mna(S-2)} + (S-2)\partial^a\partial_n\phi_m^{na(S-3)m}\right) =$$

$$= -2\partial_n\partial_m\phi_p^{mnpa(S-4)} + 2\partial_p\partial_m\phi_m^{npa(S-4)m} = 0$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 4.

Упражнения с прошлой лекции

Имеем выражение:

$$S = \int d^d x \left(-\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\phi_a m^2 \phi^a - \frac{1}{2}\partial_n \phi \partial^n \phi + m\partial_n \phi \phi^a\right)$$

Найдем уравнение движения:

$$\boxdot\, \phi^b - \partial^a \partial_b \phi^b - m^2 \phi^a + m\partial_a \phi = 0$$

Действуя на уравнение оператором ∂_a, получаем

$$\boxdot\, \phi - m\partial_a \phi^a = 0$$

Можно увидеть, что данные уравнения эквивалентны относительно калибровочных преобразований:

$$\delta\phi_a = \partial_a \xi$$
$$\delta\phi = m\xi$$

Далее для решения можно положить, что

$$\partial_a \phi^a = 0$$
$$\boxdot\, \phi = 0$$

Поля пространства AdS_D

Один из способов описания – представить в виде гиперболоида, который вложен в пространственную единицу большей размерности:

$$X^M X_M = -R^2 < 0$$
$$\eta_{MN} = diag(-,+,\dots,+,-)$$

Космологическая постоянная:

$$\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2R^2}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \leftarrow L = R - 2\Lambda$$

В этом случае тензор Римана равен:

$$\mathbb{R}_{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{1}{R^2}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}), \qquad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]v^\rho = -\frac{1}{R^2}(\delta_\mu^\rho v_\nu - \delta_\nu^\rho v_\mu)$$

Мы находимся в координатах объемлющего пространства (ambient coordinates). Это значит, что мы ввели дополнительное измерение и AdS вложен в плоском пространстве на единице большего измерения.

Тогда в данных координатах симметрия действует линейным образом как просто вращение:

$$J^{MN} = -i(X^M \partial^N - X^N \partial^M)$$

Теперь разбиваем выражение на две части: преобразование Лоренца и деформированные трансляции.

$$J^{\mu\nu} \text{ и } P^\mu = R^{-1} J^{D\mu}$$

И получим коммутационное соотношение для P:

$$i[P^\mu, P^\nu] = \frac{1}{R^2} J^{\mu\nu}$$

Видно, что в плоском пределе, где $R \to \infty$, $[P, P] \to 0$.

Это означает, что мы гладким образом воспроизводим коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре.

Введем обозначения для энергий на будущее:

$$H = P^0 = -P_0 = R^{-1} J^{D0}$$
$$E = J^{D0}$$

Построение унитарных неприводимых представлений группы So(d-1,2)

Для начала необходимо выделить компактную подгруппу:

$$So(D-1) \oplus So(2) < So(d-1,2)$$

Унитарные представления $So(D-1) \oplus So(2)$ нумеруются диаграммой Юнга $\big(So(D-1)\big)$, а также числом энергии $\big(So(2)\big)$.

Это действия генераторов компактной подгруппы на наше состояние. Оставшиеся генераторы будут смешивать представления. Требование состоит в том, чтобы норма была положительна на каждом из представлении компактной группы.

Некомпактные генераторы удобно выбрать следующим образом:

$$J^{+m} = J^{0m} + iJ^{Dm}, \qquad J^{-m} = J^{0m} - iJ^{Dm}$$
$$[E, J^{+m}] = J^{+m}, \qquad [E, J^{-m}] = -J^{-m}$$

Также для вычислений потребуется

$$[J^{-m}, J^{+n}] = 2(\delta^{mn} E - iJ^{mn})$$

Мы начинаем с представления компактной подалгебры, которое характеризуется двумя числами:

$$E|E_0, S_0> = E_0|E_0, S_0>$$
$$\frac{1}{2} J^{mn} J_{mn} |E_0, S_0> = S_0(S_0 + D - 3)|E_0, S_0>$$

Это означает, что собственное значение у энергии равно E_0 на этих состояниях и спин равен S_0.

Дальше необходимо потребовать, что вектор аннигилируется понижающими операторами:

$$J^{-m}|E_0, S_0> = 0$$

Данный вектор называется вектором младшего веса.

При действии вектора J^+ генерируем основные состояния в представлении.

Тогда состояния в представлении имеют вид:

$$J^{+m_1} \dots J^{+m_n} |E_0, S_0>$$

И остается выяснить является ли данный модуль унитарным.

Как минимум необходимо потребовать, чтобы на младшем весе норма была положительно определена и инвариантна.

$$< E_0, S_0 | E_0, S_0 >$$

На младшем весе норма известна и равна произведению инвариантных тензоров $So(D-1)$.

Далее покажем, что норма для всех состояний в данном представлении индуцируется с первоначальной нормы.

$$(J^{+m})^{+} = J^{-m}, \qquad (J^{-m})^{+} = J^{+m}$$

$$(J^{+p_1} \dots J^{+p_n}|E_0, S_0>', J^{+m_1} \dots J^{+m_n}|E_0, S_0>) =$$

$$=< E_0, S_0|' J^{-p_k} \dots J^{-p_1} J^{+m_1} \dots J^{+m_n}|E_0, S_0>$$

При условии, когда $k > n$ будем иметь $< \cdots > = 0$.

Также при $k < n$ получим $< \cdots > = 0$.

То есть для нас будет интересна ситуация $k = n$. В ходе коммутации останутся только члены J^{mn} и E.

Другими словами, сначала коммутируем J^{-} направо и требуем, чтобы $< \cdots > \geq 0$.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда

$$|E_0, S = 1>$$

$$|E_0>^a - \text{обозначение для младшего веса}$$

$$< E_0|^a|E_0>^b = \delta^{ab}$$

Теперь действуем повышающим оператором на каждый из этих весов и смотрим норму:

$$< E_0|^d J^{-a} J^{+b}|E_0>^c = 2 < E_0|^d (\delta^{ab} E - iJ^{ab})|E_0>^c$$

$$J^{ab}|E_0>^c = -i\delta^{bc}|E_0>^a + i\delta^{ac}|E_0>^b$$

И тогда

$$< E_0|^d J^{-a} J^{+b}|E_0>^c = 2(E\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{bc}\delta^{ad} + \delta^{ac}\delta^{bd})$$

$$J^{+b}|E_0>^c \propto \delta^{bc}$$

И с учетом таких представлений получим:

$$\delta_{da}\delta_{bc} < \cdots > = 2(D-1)(E_0 - D + 2)$$

Необходимое требование для унитарности:

$$E_0 > D - 2$$

А в другом случае, когда

$$E_0 = D - 2$$

Имеем, что состояние будет аннигилироваться понижающими операторами

$$J^{-a}(J^{+b}|E_0>_b) = 2(E_0 - D + 2)|E_0>^a = 0$$

Данное состояние действием J^{+} генерирует подмодуль нулевой нормы.

С точки зрения теории поля необходимо избавиться от состояний с нулевой нормой. Такая процедура возможна методом факторизации. И оставшееся представление будет унитарным.

И, наконец, в случае

$$E_0 < D - 2$$

получаем сразу неунитарность представлений.

Таким образом, начиная с вектора младшего веса, мы генерируем все представление путем действия повышающих операторов. Представления параметризуются энергией и спином. Мы можем менять значения энергии и получать границу унитарности, когда возникают состояния с нулевой нормой. Тогда возможно применить метод факторизации.

Классификация унитарных неприводимых представлений So(d-1,2) с симметричными полями.

В случае, когда

$$E_0 \geq S_0 + D - 3, \qquad \text{при } S_0 \geq 1$$

В случае, когда

$$E_0 \geq \frac{D-3}{2}, \qquad \text{при } S_0 = 0$$

С точки зрения CFT_{D-1} получаем безмассовый скаляр

$$\boxdot\, \phi = 0$$

Упражнение

Необходимо проделать похожие вычисления, которые были в лекции (для спина $S = 1$).

Дано:

$$S = 0, \qquad E_0 : |E_0 0 >$$
$$(\delta_{ab} J^{+a} J^{+b} |E_0, 0 >, \dots) \geq 0$$

И задача состоит в том, чтобы вывести выражение

$$E_0 \geq \frac{D-3}{2}$$

Разница конструкций представлений в AdS и CFT

Как мы помним, в случае AdS имеем:

$$So(D-1,2) \to So(D-1) \oplus So(2)$$

В то время, как в CFT

$$So(D-1,2) \supset So(D-2,1) + So(1,1)$$

В качестве альтернативного варианта описания конструкций представлений, введем новую переменную оператора Казимира:

$$S_0, \qquad C_2\big(\delta_0(D-1,2)\big) = \frac{1}{2} J^{AB} J_{AB}$$

Далее покажем связь оператора Казимира и S_0

$$J^{0m} J^{0m} + J^{Dm} J^{Dm} = (D-1)E + J^{+m} J^{-m}$$

$$\frac{1}{2} J^{AB} J_{AB} \Big| E_0, S_0 > = \left(E_0(E_0 - D + 1) + \frac{1}{2} J^{nm} J_{nm} \right) \Big| E_0, S_0 >$$

Массивные поля в AdS

Существует поле с s индексами, которое удовлетворяет волновому уравнению, оно бездивергентно и бесследово.

$$\left(\boxdot - \frac{1}{R^2}[(S-2)(D+S-3)-S] - m^2\right)\phi^{a(S)} = 0$$

$$\nabla_m \phi^{ma(S-1)} = 0$$

$$\phi_m^{ma(S-2)} = 0$$

Напомним, что в плоском пространстве масса была P^2, которая коммутирует со всем. А в AdS это не так. Масса – просто какой-то параметр.

При $m^2 = 0$ появляется калибровочная инвариантность.

$$\delta\phi^{a(S)} = \nabla^a \xi^{a(S-1)}$$

$$\left(\boxdot - \frac{1}{R^2}(S-1)(S+D-3)\right)\xi^{a(S-1)} = 0$$

$$\nabla_m \xi^{ma(S-2)} = 0$$

$$\xi_m^{ma(S-2)} = 0$$

Далее сделаем упражнение для нахождения поправок к массовым слагаемым.

$$\nabla_m(\delta\phi)^{ma(S-1)} = 0$$

$$\dots$$

$$G \sim 0, F \sim 0$$

$$\text{калибровка } D = 0$$

$$(*) \to D\phi^{a(S)} - \frac{1}{R^2}[\dots]\phi^{a(S)} - \frac{1}{R^2}S(S-1)g^{aa}\phi_m^{ma(S-2)} = 0$$

Дополнительно потребуем, чтобы поле было бесследовым

$$\delta\phi_m^{a(S-2)m} = \frac{2}{5}\nabla_m \xi^{ma(S-2)}$$

И воспроизводим необходимое уравнение на ϕ, ξ.

Лекция 5.

Производящие функции

Пусть у нас есть тензор ранга s. Удобно свернуть его со вспомогательным вектором, что даст нам некоторую функцию $\phi(u)$. То есть мы заменяем операции с тензорами на операции с функциями, которые зависят от одной дополнительной переменной.

$$\sum_S \frac{1}{S!}\Phi^{a_1,\dots,a_s}u_{a_1,\dots,a_s} = \Phi(u)$$

Например, действие преобразований Лоренца

$$J^{ab}\Phi(u) = -i\left(u^a\frac{\partial}{\partial u_b} - u^b\frac{\partial}{\partial u_a}\right)\phi(u)$$

Вторым примером может быть следующее

$$\left(u^a\frac{\partial}{\partial u^a} - s\right)\phi(u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial u_a}\phi = 0 \rightarrow \text{след} = 0$$

Используя такой подход, удобно вычислить квадратичный Казимир

$$\frac{1}{2}J^{ab}J_{ab}\phi = S(S+D-3)\phi$$

Подход объемлющего пространства для тензоров в AdS

Для начала напомним, что

$$X^A = (0,\dots,D)$$

$$\eta \rightarrow (-,+,\dots,-)$$

Введем вспомогательный вектор u^A

$$u^A - \text{вектор } So(D-1,2)$$

И для работы с тензорами имеем

$$\phi(x,u) \rightarrow \text{тензор в объемлющем пространстве}$$

Данные объекты не очень хороши для описания тензоров в AdS. Так как необходимо «посадить» все объекты на гиперболоид $X^M Y_M = -R^2$.

Получается ситуация, что если мы хотим описывать тензоры в AdS,то необходимо накладывать следующее условие:

$$X^A\frac{\partial}{\partial u^A}\phi(x,u) = 0$$

Это означает, что компоненты у ϕ только касательные. Далее выпишем проектор

$$P_B^A = \delta_B^A + \frac{X^A X_B}{R^2}$$

$$P_b^A\phi^B(x) - \text{касательный к } AdS\ \forall\phi$$

В результате получаем касательную версию к метрике

$$g_{AB} = \delta_{AB} + \frac{X_A X_B}{R^2} - \text{метрика } AdS$$

Далее разберемся с ковариантными производными:

$$\nabla_B \phi_{A_1,\dots,A_S} = P_B^D P_{A_1}^{C_1} \dots P_{A_S}^{C_S} \partial_D \phi_{C_1\dots C_S} - \text{ковариантная производная}$$

$$T = 0, \qquad \nabla g = 0$$

Тогда можно выразить ковариантную производную через более простые объекты в пространстве

$$\nabla_B \phi_{A(S)} = \partial_B \phi_{A(S)} + \frac{X_B}{R^2} \triangle \phi_{A(S)} - \frac{S X_A}{R^2} \phi_{BA(S-1)}$$

$$\triangle = \frac{X^A \partial}{\partial X^A}$$

Отсюда мы понимаем, что

$$g^{ab}\phi_{abc(S-2)} = 0 \leftrightarrow g^{AB}\phi_{ABC(S-2)} \leftrightarrow \eta^{AB}\phi_{ABC(S-2)} = 0$$

Сохраняя условие того, что

$$\nabla^a \phi_{abc(S-1)} = 0$$

После свертки получаем

$$0 = \nabla^B \phi_{BA(S-1)} = \partial^B \phi_{BA(S-1)} = 0$$

А для того, чтобы найти вид Делабертиана необходимо дважды применить ковариантную производную и потом свернуть ее

$$\nabla\nabla\phi_{A(S)} = \partial\partial\phi_{A(S)} + \frac{1}{R^2}[\triangle(\triangle + D - 1) - S]\phi_{A(S)}$$

Далее перейдем к вычислению оператора Казимира. Наше поле зависит от $\phi(x;u)$

$$J^{AB} = L^{AB} + M^{AB}$$

$$L^{AB} = -i\left(X^A \frac{\partial}{\partial X_B} - X^B \frac{\partial}{\partial X_A}\right), \qquad M^{AB} = -i\left(u^A \frac{\partial}{\partial u_B} - u^B \frac{\partial}{\partial u_A}\right)$$

В случае применение оператора Казимира, мы получим

$$C_2\big(So(D-1,2)\big)\phi(x;u) = \left(\frac{1}{2}L^{AB}L_{AB} + L^{AB}M_{AB} + \frac{1}{2}M^{AB}M_{AB}\right)\phi(x;u)$$

$$\frac{1}{2}M^{AB}M_{AB}\colon S_0(S_0 + D - 1)\phi(x;u)$$

$$L^{AB}M_{AB}\colon -2x^A u_A \frac{\partial}{\partial X_B}\frac{\partial}{\partial u^B} - 2u^A\frac{\partial}{\partial u^A} + 2u^A\frac{\partial}{\partial X^A}X^B\frac{\partial}{\partial u^B}$$

$$L^{AB}L_{AB}\colon 2\left(R^2\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial X} + \triangle(\triangle + D - 1)\right)$$

И в итоге будем иметь

$$C_2\phi = \big(R^2\partial\partial + \triangle(\triangle + D - 1) + S(S + D - 3)\big)\phi =$$
$$= \big(R^2\nabla\nabla + S_0(S_0 + D - 2)\big)\phi$$

При выражении оператора Казимира через младшие веса получим

$$C_2\big(S_0(D-1,2)\big) = \Big(E_0(E_0 - D + 1) + C_2\big(S_0(D-1)\big)\Big)$$

Тогда приравниваем получившиеся выше выражения и получаем уравнение для поля ϕ

$$(R^2\nabla\nabla - [E_0(E_0 - D + 1) - S])\phi = 0$$

$$R^2m^2 = E_0(E_0 - D + 1) - (S-2)(D+S-3)$$
$$|S = S_0|$$
$$E_0 = S_0 + D - 3 - \text{безмассовые поля}$$
$$m^2 = 0$$

Операторы дельта (△) выпали из вычислений, так как это производные вдоль радиального направления, а все интересующие нас переменные сформулированы независимо от дельта-образа.

Теорема Flato-Fronsdel

Для начала имеем $AdS_4,\ So(3,2)$.

Граница унитарности $S = 0, E = \frac{1}{2} \to Rac = D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

В случае спинов больше нуля получаем

$$S > 0 \to D(S+1, S) - \text{безмассовые поля}$$
$$S = 0 \to D(1,0) - \text{"безмассовое" поле в } AdS \text{ (скалярное)}$$

Утверждение.

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sum_{S=0}^{\infty} \oplus\, D(S+1, S)$$

Доказательство.

Для доказательства будет использован метод характеров. Для его корректного применения необходимо найти как устроены представления $So(2) \oplus So(3)$.

$$E = J + \frac{1}{2}, \qquad J = 0,1,2 \text{ при } Rac = D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$
$$E = J+1, J+2 \dots, \qquad J = S, S+1, S+2 \text{ при } S > 0$$
$$E = J+1, J+3, \dots, \qquad J = 0,1,2, \dots \text{ при } S = 0$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству методом характеров. Хотелось бы написать функцию, которая бы взаимно-однозначно кодировала информацию о решетке весов.

$$\chi(\alpha, \beta) = \sum_{E,J} n(E,J)\alpha^{2E}\chi_j(\beta)$$
$$\chi_j(\beta) = \sum_{m=-J}^{J} \beta^{2m} = \frac{\beta^{2J+1} - \beta^{-2J-1}}{\beta - \beta^{-1}}$$

Цель данного подхода – взять представления, которые мы описываем как совокупность весовых пространств, и закодировать при помощи функции взаимно-однозначным образом.

Кроме того, приведем некоторые свойства характеров:

$$\text{хар}\left(\sum \dots\right) = \sum \text{хар}$$
$$\text{хар}(X) = X(\text{хар})$$

Тогда при вычислении характеров по определению имеем

$$\chi(Rac) = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{(\alpha^{-1}\beta^{-1} - \alpha\beta)(\beta\alpha^{-1} - \alpha\beta^{-1})}$$

$$\chi\big(D(S+1,S)\big) = \frac{\dfrac{(\alpha\beta)^{2s}}{\alpha\beta - (\alpha\beta)^{-1}} + \dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2s}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{\beta}}}{(\beta - \beta^{-1})(\alpha - \alpha^{-1})}$$

$$\chi\big(D(1,0)\big) = \frac{1}{\alpha}\frac{\dfrac{1}{\alpha\beta - (\alpha\beta)^{-1}} + \dfrac{1}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{\beta}}}{(\beta - \beta^{-1})(\alpha^2 - \alpha^{-2})}$$

И в итоге получаем

$$\chi^2(Rac) = \sum_{S=0}^{\infty} \chi\big(D(S+1,S)\big)$$

Лекция 6.

Упражнение

Требовалось доказать, что

$$\frac{1}{2}J^{AB}J_{AB}\phi(u) = -\frac{1}{2}\left(u^A\frac{\partial}{\partial u^B} - u^B\frac{\partial}{\partial u^A}\right)\left(u_A\frac{\partial}{\partial u_B} - u_B\frac{\partial}{\partial u_A}\right)\phi(u) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2u^A\delta_B^A\frac{\partial}{\partial u^B} - u^A\delta_B^B\frac{\partial}{\partial u^A} - 2u^A\left(u_B\frac{\partial}{\partial u_B}\frac{\partial}{\partial u^A}\right) + u^B u_B\frac{\partial}{\partial u_A}\frac{\partial}{\partial u^A}\right]\phi =$$

$$= -[S - (D-1)S - S(S-1)] = S[D - 3 + S]$$

Известно, что $So(3,2) \sim Sp(4,R)$. На основании этого изоморфизма можно построить следующую реализацию. Вводим осцилляторы

$$[a, a^+] = 1, \qquad [b, b^+] = 1$$

$$E = \frac{1}{2}(a^+a + b^+b + 1)$$

$$J^{-1} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \qquad J^{-2} = -\frac{i}{2}(a^2 - b^2), \qquad J^{-3} = ab$$

$$J^{+1} = (J^{-1})^+ = \frac{1}{2}((a^+)^2 + (b^+)^2)$$

$$J^{+2} \sim \dots, \qquad J^{+3} \sim \dots$$

$$J^{12} = \frac{1}{2}(b^+b - a^+a), \qquad J^{13} = \frac{1}{2}(b^+a + a^+b), \qquad J^{23} = \frac{1}{2}(b^+a - a^+b)$$

Рассмотрим связную конструкцию

$p^1, p^2, q^1, q^2 \rightarrow$ Дарбу координаты в симплектическом $4-$х мерном пространстве

Тогда можно рассмотреть функции Гамильтона $H(z) \sim a_{ij}z^i z^j$, которые квадратичные по Дарбу координатам. Они генерируют векторные поля

$$\{H(z), f(z)\} \sim \xi^i(z)\partial_i f$$

То есть мы из всех симплектоморфизмов оставляем только линейные.

Начинаем с вакуума – операторов уничтожения

Для оператора Rac:

$$a|0> = 0, \qquad b|0> 0$$

$$J^{-i}|0> = 0,$$

$$E|0> = \frac{1}{2}|0>, \qquad J^{ij}|0> = 0$$

Приходим к заключению, что $|0>$ - младший вес модуля $D(E = \frac{1}{2}, S = 0)$.

$$(J^+)\dots(J^+)|0> = f(a^+, b^+)|0>$$

$$f(-a^+, -b^+) = f(a^+, b^+)$$

Теперь для оператора Di:

$$D\left(E = 1, S = \frac{1}{2}\right)$$

$$\{a^+|0>, b^+|0>\} \rightarrow \text{младший вес}$$

$$E\, a^+|0> = 1\, a^+|0>$$

Далее рассмотрим тензорное произведение таких представлений

$$[a_1, a_1^+] = 1, \qquad [b_1, b_1^+] = 1$$
$$[a_2, a_2^+] = 1, \qquad [b_2, b_2^+] = 1$$

Состояния представления $Rac \oplus Rac$

$$f(a_1^+, b_1^+, a_2^+, b_2^+)|0>_1 \oplus |0>_2$$
$$f(-a_1^+, -b_1^+, a_2^+, b_2^+) = f(a_1^+, b_1^+, -a_2^+, -b_2^+) = f(a_1^+, b_1^+, a_2^+, b_2^+)$$

Для удобства введем обозначение

$$A_i = \{a_1^+, a_2^+\}, \qquad B_i = \{b_1^+, b_2^+\}, \qquad i = 1{,}2$$

И в качестве напоминания запишем

$$J(V_1 \oplus V_2) = JV_1 \oplus V_2 + V_1 \oplus JV_2$$

Теперь ищем состояния такие, что

$$J^{-i}|V> = 0$$
$$J_- = a^+ b = -\frac{1}{2}(J^{23} + iJ^{13})$$
$$[J^{12}, J_-] = -J_-$$

Таким образом, при условии

$$J_-|V> = 0$$

мы дополнительно в пространстве с большой энергией находим пространство с минимальным J^{12}.

Сначала потребуем, чтобы

$$J^{-i} f|0>_1 \oplus |0>_2 = 0$$
$$\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2) f(\dots)|0> \oplus |0> = 0$$

То есть мы «протаскиваем» a_i, b_i направо, чтобы добиться аннигиляции вакуума. И при коммутировании имеем

$$a\, f(a^+)|0> = \frac{\partial f}{\partial a^+}(a^+)|0>$$

Данное выражение дает нам следующее

$$J^{-1} f\, |0> \oplus |0> = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial A^i \partial A_i} + \frac{\partial^2}{\partial B^i \partial B_i}\right) f = 0$$

Производим свертку i, j при помощи δ^{ij} и накладываем следующие условия

$$(J^{-1}, J^{-2}, J^{-3}) f\, |0> |0> = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial A^i \partial A_i} f = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial A^i \partial B_i} f = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial B^i \partial B_i} f = 0$$

Далее ищем младший вес по J^{12}

$$J_- f|0>_1 \oplus |0>_2 = 0$$

$$A^i \frac{\partial}{\partial B^i} f = 0$$

И выражение выше будет называться условием Юнговости.

Как мы помним, f – производящие функции для тензоров, которые являются бесследовыми с $d = 2$.

Также будет необходимо проверить какие из возможных решений удовлетворяют условиям симметрии.

$$f_1 = \epsilon^{ij} A_i B_j = a_1^+ b_2^+ - a_2^+ b_1^+$$

Такое решение нам не подойдет, так как четность не выполняется.

Рассмотрим остальные выражения и найдем, что только может быть $S = 2k$.

$$A_+ = A_1 + iA_2, \qquad A_- = A_1 - iA_2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A^i} \rightarrow \# \frac{\partial}{\partial A^-} \frac{\partial}{\partial A^+}$$

$$f = \phi(A^-) + \phi(A^+)$$

$$f = C_1 (A_1 + iA_2)^{2k} + C_2 (A_1 - iA_2)^{2k}$$

Где коэффициенты $C_1 = C_2 \rightarrow$ удовлетворяют условиям четности.

В результате получили, что младшие веса по E и J_{12} имеют вид

$$|V_k> = \frac{1}{2}[(a_1^+ + ia_2^+)^{2k} + (a_1^+ - ia_2^+)^{2k}]|0>_1 \oplus |0>_2$$

$$E|V_k> = \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 + b_1^+ b_1 + a_2^+ a_2 + b_2^+ b_2 + 2)|V_k> \rightarrow$$

$$E|V_k> = (k+1)|V_k>$$

$$J^{12} V_k> = \frac{1}{2}(b_1^+ b_1 - a_1^+ a_1 + b_2^+ b_2 - a_2^+ a_2)|V_k> = -k|V_k>$$

То есть мы наблюдаем действительно безмассовые поля.

Алгебра высших спинов.

Для начала введем звездочное произведение отображения Вейля-Вигнера.

Идея в том, что мы хотели бы работать с функциями осцилляторов.

$$f(a, a^+), \qquad [a, a^+] = 1$$

Мы будем использовать Вейлевское (симметричное) упорядочение. Начнем с примера:

$$(\alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^+)^n = (\alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^+)\,(\dots)\dots(\dots) - n \text{ раз}$$

Это выражение находится в нормальной упорядоченной форме. И определяет Вейлевское упорядочение на все полиномы.

К примеру:

$$\hat{a}^+ \hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) - \frac{1}{2}$$

Далее вводим отображение Вейля-Вигнера

$$f[\hat{a}^+, \hat{a}] \rightarrow f^{sym}[\hat{a}^+, \hat{a}] \rightarrow f^{sym}[\hat{a}, \hat{a}^+]$$

Тогда будем иметь

$$W[f(\hat{a}^+,\hat{a})] = f_{sym}(\hat{a}^+,\hat{a})$$

В данном случае оператор будет равен

$$W[\hat{a}^+,\hat{a}] = W\left[\frac{1}{2}(\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^+)\right] = a^+a - \frac{1}{2}$$

При Вейлеровской упорядоченности мы делаем только эквивалентные преобразования, то есть оператор всегда остается тем же, а преобразуется только его форма.

Лекция 7.

Вводные понятия

В этой лекции рассмотрим, как операторное умножение транслируется в умножение коммутирующих переменных. Данный тип произведения называется звездочным произведением.

$$W[f_1] * W[f_2] = W[f_1 f_2]$$

Звездочное произведение двух функций:

$$f * g = f exp\frac{1}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a}\frac{\vec{\partial}}{\partial a^+} - \frac{\vec{\partial}}{\partial a}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a^+}\right) g$$

Этот вариант удобно применять тогда, когда мы действуем на полиномы.

Теперь запишем интегральный вариант формулы

$$f * g = \frac{1}{\pi^2}\int ds ds^+ du du^+ f(a+s, a^+ + s^+) g(a+u, a^+ + u^+) e^{-2[su^+ - s^+ u]}$$

Вычисление такого рода произведения сводится к вычислению простых интегралов или дельта-функций.

Алгебра высших спинов в d = 4

По определению алгебра высших спинов – это алгебра всех отображений Rac в себя.

$$Rac \to Rac, \qquad End(Rac)$$

Напомним метод построения состояний

$$f(a^+, b^+)|0>, \qquad g(a, b, a^+, b^+)$$

Произведение в алгебре будет устроено следующим образом

$$[g_1(\dots), g_i(\dots)] \to \text{просто прокоммутировать}$$
$$[g_1(\dots), g_2(\dots)] = g_1 * g_2 - g_2 * g_1$$

Алгебра высших спинов содержит в себе $So(3,2)$ как подалгебру. То есть можно разбить всю алгебру высших спинов на представления $So(3,2)$.

Пусть f → элемент алгебры высших спинов, а g → элемент $So(3,2)$

$$g[f] = [g, f]_*$$

Сами g – квадратичные функции от осцилляторов.

Далее будет искать вектора младшего веса по E и J_{12} и идентифицировать сами представления.

Требуем выполнения условий

$$[a^2, f]_* = 0$$
$$[b^2, f]_* = 0$$
$$[ab, f]_* = 0$$
$$[a^+ b, f]_* = 0$$

$$f exp\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a}\frac{\vec{\partial}}{\partial a^+} - \frac{\vec{\partial}}{\partial a}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial a^+}\right) g = fg + \#f(\dots)g + \#f(\dots)^2 g + \cdots$$

Здесь останется только одно слагаемое из-за симметричности.

$$[a^2, f] = 2a\frac{\partial}{\partial a^+}f = 0$$
$$[b^2, f] = 2b\frac{\partial}{\partial b^+}f = 0$$
$$[ab, f] = b\frac{\partial}{\partial a^+}f - a\frac{\partial}{\partial b^+}f = 0$$
$$[a^+b, f] = -b\frac{\partial}{\partial a}f - a^+\frac{\partial}{\partial b^+}f = 0$$

В качестве упражнения необходимо вывести эти формулы.

Далее решаем эти уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a^+}f = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial b^+}f, \qquad \frac{\partial}{\partial a}f = 0$$
$$f = f(b)$$
$$f_k = b^{2k}$$

Были найдены младшие веса.

Теперь переходим к вычислению E и J_{12}.

$$[E, b^{2k}] = \frac{1}{2}[a^+a + b^+b, b^{2k}]_* = -kb^{2k}$$
$$[J_{12}, b^{2k}] = \cdots = -kb^{2k}$$

Чтобы понять смысл представлений можно рассмотреть

$$[g, f] - \text{сохраняет } N(a, a^+, b, b^+)$$

То есть представления генерируются полиномами с одной и той же степенью однородности.

В качестве примера можно посмотреть вид представления $So(3,2)$

$$[(iu^1 + u^2)(iv^0 + v^4) - (iv^1 + v^2)(iu^0 + u^4)]^k$$

В качестве упражнения можно проверить E и J_{12} в состоянии, записанном выше.

Взаимодействия калибровочных полей

Далее будем для простоты работать в плоском пространстве с безмассовыми полями произвольного спина.

Ранее квадратичное действие было калибровочно инвариантно

$$\delta_0 S_2 = 0$$

Мы добавляем нелинейные поправки и допускаем деформацию калибровочного преобразования

$$S_2 \to S_2 + gS_3 + \cdots = S$$
$$\delta_0\phi \to \delta_0\phi + g\delta_1\phi + g^2\delta_2\phi + \cdots = \delta\phi$$

И требование состоит в том, что действие остается калибровочно инвариантным.

$$\delta S = 0$$

Здесь и далее g – константа связи.

Разложим наше условие в ряд

$$\delta_0^{\xi} S_2 = 0$$

$$\delta_1^\xi S_2 + \delta_0^\xi S_3 = 0$$
$$\delta_2^\xi S_2 + \delta_1^\xi S_3 + \delta_0^\xi S_4 = 0$$
$$\dots$$

Запишем для облегчения расчетов

$$\delta_1^\xi S_2 = \delta_1^\xi \phi \frac{\partial S_2}{\partial \phi} \approx 0$$

Здесь такого рода равенство ($\approx$) соблюдается с учетом уравнения движения в свободной теории. Тогда остается

$$\delta_0^\xi S_3 \approx 0 \to S_3$$

После этого можно подставить S_3 во второе уравнение и найти δ_1.

Однако важно рассмотреть ряд тонкостей:

1. Fake interactions.

$$\phi \to \phi = gf(\phi)$$
$$S_2 = \frac{1}{2}\int dx \phi_1 \boxdot \phi_1, \qquad \phi_1 \to \phi_1 + g\phi_2\phi_3$$

Тогда у нас добавится формально нелинейное слагаемое

$$+S_3 = \int dx\, \phi_2\phi_3 \boxdot \phi_1 \approx 0$$

Другими словами, когда у нас есть две производные, свернутые друг с другом, при интегрировании по частям мы получаем линейные комбинации с $\boxdot$.

2. Переопределение параметров.

$$\delta_1^\xi \phi \frac{\partial S_2}{\partial \phi} + \delta_0^\xi S_3 = 0$$

Если $\delta_1^\xi \phi$ – решение, то и $\delta_1^\xi \phi + \delta_0^\xi \phi$ – тоже решение.

Утверждается, что все слагаемые такого рода можно убрать переопределением параметров

$$\xi \to \xi + gf(\xi, \phi)$$

В качестве упражнения предлагается выписать все нетривиальные взаимодействия теории Янга-Миллса (понять какие фейковые, а какие нет). Также потребовать, чтобы $\delta_0 S_3 \approx 0$ и найти $\delta_1 A$.

Вернемся к теории и посмотрим на следующий ее порядок.

$$\delta_2^\xi S_2 + \delta_1^\xi S_3 + \delta_0^\xi S_4 = 0$$

Возможно последовательно вывести из этого теорию Янга-Миллса.

Замыкание алгебры.

Теперь рассмотрим условие о замыкании алгебры. Пусть у нас есть калибровочные преобразования, которые можно комбинировать

$$[\delta^{\xi_1}, \delta^{\xi_2}]\phi = \delta^\alpha \phi, \qquad \alpha = C(\phi, \xi_1, \xi_2)$$

Кроме того, существует тонкость касательно того, что можно добавить слагаемое, равное

$$+\delta^Q \phi^i = Q^{i,j}(\phi, \xi_1, \xi_2)\frac{\partial L}{\partial \phi^j}$$

В таком случае можно рассмотреть следующего рода калибровочные преобразования

$$\delta^Q L = Q^{i,j}(\phi, \xi_1, \xi_2)\frac{\partial L}{\partial \phi^i}\frac{\partial L}{\partial \phi^j} = 0$$

Такого рода симметрии рассматриваться не будут.

Пусть калибровочные преобразования даются функцией T

$$\phi \to \phi^1 = \phi + \delta^\pi \phi = \phi + T\left(\phi, \pi\big(x, \phi(x)\big)\right)$$

$$\xi(x) \to \pi\big(x, \phi(x)\big)$$

Далее вычислим коммутатор для данных параметров

$$[\delta^{\pi_1}, \delta^{\pi_2}]\phi = \frac{\delta T(\phi, \pi_1)}{\delta \phi} T(\phi, \pi_2) - \frac{\delta T(\phi, \pi_2)}{\delta \phi} T(\phi, \pi_1)$$

$$+T\left(\phi, \frac{\delta \pi_1}{\delta \phi} T(\phi, \pi_2)\right) - T\left(\phi, \frac{\delta \pi_2}{\delta \phi} T(\phi, \pi_1)\right)$$

У нас получается калибровочное преобразование с некоторым калибровочным параметром

$$\frac{\delta T(\phi, \xi_1)}{\delta \phi} T(\phi, \xi_2) - \frac{\delta T(\phi, \xi_2)}{\delta \phi} T(\phi, \xi_1) = T(\phi, C(\phi, \xi_1, \xi_2)$$

Теперь подставляем данное выражение в коммутатор и получаем

$$[\delta^{\pi_1}, \delta^{\pi_2}]\phi = \delta^{[\pi_1, \pi_2]}\phi$$

$$[\pi_2, \pi_1] = C(\phi, \pi_1, \pi_2) + \frac{\delta \pi_2}{\delta \phi} T(\phi, \pi_1) - \frac{\delta \pi_1}{\delta \phi} T(\phi, \pi_2)$$

Далее раскладываем это условие в ряд

$$T(\phi, \xi) = T_0(\phi, \xi) + g T_1(\phi, \xi) + \cdots$$

Исходное уравнение рассмотрим в ведущем порядке

$$g\frac{\delta T_1(\phi, \xi_1)}{\delta \phi} T_0(\phi, \xi_2) - g\frac{\delta T_2(\phi, \xi_2)}{\delta \phi} T_0(\phi, \xi_1)$$

$$C(\phi, \xi_1, \xi_2) = g C_0(\phi, \xi_1 \xi_2) + g^2 C_1(\phi, \xi_1 \xi_2) + \cdots$$

Получаем, что в ведущем порядке условие с калибровочными параметрами нетривиально

$$T_1(T_0(\phi, \xi_2), \xi_1) - T_1(T_0(\phi, \xi_1), \xi_2) = T_0\big(\phi, C_0(\phi, \xi_1, \xi_2)\big)$$

Аналогично можно получать условия в старших порядках.

Тождество Якоби

Данное тождество должно быть выполнено, так как при применении отображений несколько раз результат комбинаций таких отображений не зависит от порядка применения. Соответственно, преобразования симметрии всегда ассоциативны. На инфинитезимальном уровне это соответствует тому, что коммутаторы инфинитезимальных преобразований удовлетворяют тождеству Якоби.

$$\sum_{cylic}\left[\delta^{\xi_1},\left[\delta^{\xi_2},\delta^{\xi_3}\right]\right]\phi=0$$

С учетом введенных ранее обозначений, сведем данное выражение к следующему

$$\sum_{cylic}[\xi_1,[\xi_2,\xi_3]]\phi=0$$

$$\sum_{cylic}\left(C\big(\phi,\xi_1,C(\phi,\xi_2,\xi_3)\big)\phi-\frac{\delta C(\phi,\xi_2,\xi_3)}{\delta\phi}T(\phi,\xi_1)\right)=0$$

С точки зрения теории возмущения можно представить данное уравнение как

$$g^2\colon\sum_{cylic}\Big(C_0\big(\phi,\xi_1,C(\phi,\xi_2,\xi_3)\big)-C_1(T_0(\phi,\xi_1),\xi_2,\xi_3)\Big)=0$$

Лекция 8.

Применение деформационных процедур

На примере взаимодействия со спином один выпишем все кандидаты взаимодействия S_3

$$S_3 = \int d^d x \partial^\mu A_\mu A_\nu A_\rho \eta^{\nu\rho}$$

Количество производных будет нечетное, причем при их количестве больше 5 придется сворачивать производные друг с другом.

Таким образом, будут получены ненастоящие S_3.

Начнем с примера, когда $N(\partial) = 3$ (количество производных равно трем).

$$S_3 = \int d^d x F_{\mu\nu} F_\rho^\nu F^{\mu\rho}$$

Получаем «цветной» случай.

$$\delta_0 F = 0$$
$$\delta_0 S_3 = 0$$

Такое взаимодействие носит название взаимодействие Борна-Инфельда.

Далее рассмотрим случай с $N(\partial) = 1$

$$S_3 = \int d^d x \left(f_{abc} A_\mu^a \, \partial^\mu A_\nu^b A^{c\nu} + h_{abc} \partial^\mu A_\mu^a A_\nu^b A^{c\nu} \right)$$

Сразу можно отметить, что интегрирование по частям приводит к следующему антисимметричному виду по последним двум индексам

$$-f_{abc} = f_{acb}, \qquad h_{abc} = h_{acb}$$

И решаем мы задачу $\delta_0 S_3 \approx 0$

$$\boxdot\, A_\mu \approx \partial_\mu \partial^\nu A_\nu$$
$$\delta_0 S_3 = \int d^d x \, \xi^a f_{abc} (\ldots \partial A, \partial A \ldots) + \xi^a h_{abc} (\ldots)$$

Сфокусируемся на следующем слагаемом

$$\xi_a h^{abc} \partial_\mu A_\nu^b \partial^\mu A^{c\nu}$$
$$h^{abc} = -h^{acb}$$
$$h = 0$$

Далее

$$\xi^b f_{abc} \partial^\mu A_\mu^a \partial_\nu A^{\nu c}$$
$$f_{abc} = -f_{cba}$$
$$f_{[abc]} = f_{abc}$$

Следующим шагом решаем такое уравнение

$$\delta_0 S_3 + \delta_1 S_2 = 0$$
$$\delta_1 A_\mu^a = -g f_{bc}^a \xi^b A_\mu^c$$

На уровне g^1 анализ закончен.

Данный процесс можно проводить дальше, так, например, для следующего порядка имеем

$$\delta_0 S_4 + \delta_1 S_3 + \delta_2 S_2 = 0$$

Сразу делаем замечание, что S_3 с одной производной, а δ_1 производных не содержит. Отсюда следует, что если решение существует, то $\delta_2 = 0$. Кроме того, δ_0 содержит одну производную, тогда S_4 должна содержать ноль производных.

$$S_4 = \int d^d x e_{abcd} A^a_\mu A^{b\mu} A^c_\nu A^{d\nu}$$

Варьируем выражение и получаем

$$e_{abcd} = -\frac{1}{4} f^e_{ac} f_{ebd}$$

Более того, данная процедура возможна только в случае, если выполнено тождество Якоби

$$f^a_{bc} f^c_{de} + \cdots 2 \text{ слагаемых} = 0$$

Далее смотрим следующее выражение

$$\delta_0 S_5 + \delta_1 S_4 + \delta_2 S_3 + \delta_3 S_2 = 0$$

И получаем

$$S = S_2 + g S_3 + g^2 S_4$$
$$\delta = \delta_0 + g\delta_1$$

Рассмотрим условие замыкания калибровочных симметрий

$$\delta_1 A^a_\mu = -g f^a_{bc} \xi^b A^c_\mu$$

Было требование, что калибровочные преобразования должны замыкаться на преобразование с параметром α.

$$[\delta_1, \delta_2]\phi = \delta_{\alpha(\xi_1,\xi_2)}\phi$$

В порядке g получаем

$$T_1(T_0(\phi,\xi_2),\xi_1) - T_1(T_0(\phi,\xi_1),\xi_2) = -\partial_\mu\left(f^a_{bc}\xi^b_1\xi^c_2\right)$$

Тогда константы имеют вид

$$C^a_0 = -f^a_{bc}\xi^b_1\xi^c_2$$

В порядке g^2 будет следующее условие

$$T_1(T_1(\phi,\xi_2),\xi_1) - T_1(T_1(\phi,\xi_1),\xi_2) = T_1\big(\phi, C_0(\phi,\xi_1,\xi_1)\big) + C_1 = 0$$

После всех преобразований деформационная процедура обрывается.

В первом порядке тождества Якоби мы получаем, что

$$\sum_{cylic} C_0\left(\phi,\xi_1,C_0(\phi,\xi_2,\xi_3)\right) + C_1 T_0 = 0$$

Деформационную процедуру здесь можно оборвать.

Таким способом мы вывели теорию Янга-Миллса.

Случай с гравитацией

В данном случае смотрим на метрику, разложенную вблизи пространства Минковского

$$g = \eta + h$$
$$S_{grav}(h) = \int d^d x(hh + hhh + \cdots)$$

Формально все работает хорошо, но на практике такая теория вряд ли удобна. Будет полезно восстановить $\delta\phi$ во всех порядках, а дальше уже строить инварианты.

Самодействие со спином 3

S_2 – действие Фроседела. Необходимо несколько полей уже на первом шаге.

На следующем шаге смотрим S_3. Количество производных будет нечетное, а именно $N(\partial) \leq 9$.

$$S_3^{9\partial} = \int d^d x F^a F^b F^c f_{abc}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)$$

$$\forall S \; F_{\mu_1\nu_1,\dots} = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s}\phi_{\nu_1\dots\nu_s}$$

Утверждение состоит в том, что $\delta F = 0$.

Теперь рассмотрим вершину, где $N(\partial) = 3$

$$S_3 = g\int d^d x f_{abc}\phi^a_{\mu(3)}\partial^\mu\partial^\mu\partial^\mu\phi^b_{\nu(3)}\phi^{c\nu(3)} + \cdots$$

$$\delta_0 S_3 = 0 \to \delta_1\phi^a_{\mu(3)} = -f^{abc}\partial^\nu\partial^\nu\xi^b_{1|\mu(2)}\xi_{2|\nu(2)} + \cdots$$

Далее посмотрим на замыкания калибровочных преобразований

$$T_1(T_1(\phi,\xi_2),\xi_1) - (\xi_1 \leftrightarrow \xi_2) = (f^{abc}f^e_{bd} - f^{abe}f^c_{bd})\partial^\nu\partial^\nu\partial^\mu\partial^\mu\phi^d_{\mu(3)}\xi_{2|\mu(2)}\xi_{2|\nu(2)} + \cdots$$

$$\mathrm{T}_1(T_1) + T_2(T_0) = T_0(C_1) + T_1(C_0)$$

Вернемся немного к порядку g^1, где получим уравнения вида

$$T_1T_0 \sim C_0, \qquad C_0 = f^{abc}\partial^\nu\partial^\nu\xi_{1|b|\mu(2)}\xi_{2|c|\nu(2)} + \cdots = \alpha_{\mu(2)}(\xi_1,\xi_2)$$

В итоге мы получаем, что слагаемые T_i имеют неправильную структуру, к примеру

$$T_1\big(\phi, C_0(\phi,\xi_1,\xi_2)\big)$$

Соответственно мы не можем замкнуть калибровочное преобразование. Таким образом, теория, которая имеет вершину S_3, не существует в предположениях данного анализа. Ситуацию может исправить добавление взаимодействий S_3 с количеством производных 5,7 и т.д. Однако результат технического анализа показывает, что такой подход также не работает. Отсюда делаем окончательный вывод, что S_3 с тремя производными не может быть в полностью согласованной теории высших спинов (No-go theorem).

Классификация вершин

Задача состоит в том, чтобы построить все S_3.

$$\delta_0 S_3 \approx 0$$

Вместо того, чтобы строить взаимодействия полей Фрондела можно фиксировать TT калибровку.

$$\phi(x,u) = \sum_{S=0}^{\infty}\frac{1}{S!}\phi_{\mu(s)}(x)u^\mu \dots u^\mu$$

С условиями

$$\partial_x \partial_u \phi = 0$$
$$\partial_u \partial_u \phi = 0$$
$$\partial_x \partial_x \phi = 0$$
$$\delta\phi = \phi \partial x \xi$$

Поле будет буквально бесследовым.

Сначала запишем выражение для кубической вершины

$$S_3 = \frac{1}{3!} \int d^d x \, C_{a_1,a_2,a_3}\left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{u_3}\right)$$
$$\phi^{a_1}(x_1, u_1)\phi^{a_2}(x_2, u_2)\phi^{a_3}(x_3, u_3)|_{x_i=x, u_i=0}$$

Далее дополнительно накладываем условие симметрии

$$C_{a_2,a_1,a_3}(2,1,3) = C_{a_1,a_3,a_2}(1,3,2) = C_{a_1,a_2,a_3}(1,2,3)$$

Все производные должны быть свернуты Лоренц-ковариантным образом. В итоге мы получаем, что

$$C_{a_1,a_2,a_3}(Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3)$$

Где комбинации равны

$$Y_1 = \partial_{u_1} \partial_{x_{23}}, \qquad Z_1 = \partial_{u_2} \partial_{u_3}, \qquad \dots$$

Лекция 9.

Продолжение классификации кубических вершин

Накладываем TT калибровку для упрощения вычислений. Условия все остаются с прошлой лекции.

$$\partial_x \partial_u \phi = 0$$
$$\partial_u \partial_u \phi = 0$$
$$\partial_x \partial_x \phi = 0$$
$$\delta\phi = \phi \partial x \xi$$

При подстановке получаем

$$S_3 = \frac{1}{3!} \int d^d x \, B_{a_1,a_2,a_3}\left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{u_3}\right)$$
$$\phi^{a_1}(x_1, u_1) \phi^{a_2}(x_2, u_2) \phi^{a_3}(x_3, u_3)|_{x_i = x, u_i = 0}$$

Как мы показывали соблюдается симметрия

$$B_{a_2,a_1,a_3}(2,1,3) = B_{a_1,a_3,a_2}(1,3,2) = B_{a_1,a_2,a_3}(1,2,3)$$

Требуем Лоренц-инвариантность и получаем следующий вид комбинаций

$$\partial_{u_1}\left(\partial_{x_2} - \partial_{x_3}\right) = \partial_{u_1} \partial_{x_{23}} = Y_1, Y_2, Y_3$$
$$Z_1 = \partial_{u_2} \partial_{u_3}, \qquad Z_2 = \partial_{u_3} \partial_{u_1}, \qquad Z_3 = \partial_{u_1} \partial_{u_2}$$

То есть можно заменить выражение следующим образом

$$B_{a_1,a_2,a_3}\left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{u_1}, \partial_{u_2}, \partial_{u_3}\right) = C_{a_1,a_2,a_3}(Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3)$$

Далее варьируем по первому полю

$$\delta_0 S_3 = \frac{1}{2!} \int d^d x \, C_{a_1,a_2,a_3}(Y_i, Z_i) u_1 \partial_{x_1} \xi^{a_1}(x_1, u_1) \phi^{a_2}(x_2, u_2) \phi^{a_3}(x_3, u_3)|_{x_i = x, u_i = 0} =$$
$$= \frac{1}{2} \int d^d x \left[C, u_1 \partial_{x_1}\right] \xi_1 \phi_2 \phi_3 | + \frac{1}{2} \int d^d x \left[u_1 \partial_{x_1} C \, \xi_1^{u_1} \phi_2^{u_2} \phi_3^{u_3}\right]|_{x_i = x, u_i = 0} = 0 + td$$

Требуется решить следующее

$$\left[C_{a_1,a_2,a_3} u_1 \partial_{x_1}\right] = 0, \qquad \left[C_{a_1,a_2,a_3} u_2 \partial_{x_2}\right] = 0, \qquad \left[C_{a_1,a_2,a_3} u_3 \partial_{x_3}\right] = 0$$

Введем некоторые вспомогательные результаты

$$\left[Y_i, u_j \partial_{x_j}\right] = 0, \left[Z_i, u_j \partial_{x_j}\right] = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} Y_k$$

Используя эти знания, можно легко получить

$$\left[C_{a_1,a_2,a_3}(Y_i, Z_i), u_j \partial_{x_j}\right] = \left[Z_i, u_j \partial_{x_j}\right] \partial_{Z_i} C_{a_1,a_2,a_3}(Y_i, Z_i)$$
$$\left(Y_1 \partial_{Z_2} - Y_2 \partial_{Z_1}\right) C_{a_1,a_2,a_3}(Y_i, Z_i) = 0$$

А также сюда добавляются два уравнения циклических перестановок.

Первое из этих уравнений означает, что $C = f(Z_1 Y_1 + Z_2 Y_2, Z_3, Y_i)$

$$C = K(G, Y_1, Y_2, Y_3), \qquad G = Z_1 Y_1 + Z_2 Y_2 + Z_3 Y_3$$

Разложим выражение по спинам

$$K_{a_1,a_2,a_3}(Y_i, G) = \sum_{s_1,s_2,s_3=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\min\{s_1,s_2,s_3\}} g_{a_1,a_2,a_3}^{s_1,s_2,s_3} \, G Y_1^{s_1-n} Y_2^{s_2-n} Y_3^{s_3-n}$$

Отсюда можно узнать сколько производных в такой вершине

$$N(\partial_x) = S_1 + S_2 + S_3 - 2n$$

$$S_1 + S_2 + S_3 - 2\min\{s_1, s_2, s_3\} \leq N(\partial_x) \leq S_1 + S_2 + S_3$$

Кроме того, отметим

$$g^{s_2,s_1,s_3 n}_{a_2,a_1,a_3} = g^{s_1,s_3,s_2 n}_{a_1,a_3,a_2} = (-1)^{S_1+S_2+S_3} g^{s_1,s_2,s_3 n}_{a_1,a_2,a_3}$$

Комментарии

1. $\exists S_i \geq 3 \rightarrow N(\partial) \geq 3$

   если S_3 – минимальное, то $S_1 + S_2 + S_3 \geq 3$

   Высшие спины развивают высшие производные.

   К примеру, рассмотрим следующее взаимодействие

   $$S - S - 2 \rightarrow N(\partial) \geq 2S - 2$$

   На практике мы получаем, что

   $$F[\partial, \eta] \rightarrow F(\nabla, g)$$
   $$\partial\xi \rightarrow \nabla\xi$$

   что ведет к $\delta_\xi F \neq 0$

Первая кубическая вершина нетривиальная должна иметь вид $S - S - 2$ с количеством производных $N(\partial) = 2$. Но из классификации получается, что таких вершин нет. У высших спинов нет минимальных взаимодействий с гравитацией. На эту тему существует теорема Арагона-Дезера.

2. Роль локальности.

   $$\delta_1 S_2 + \delta_0 S_1 = 0$$
   $$\delta_1\phi \frac{\partial S_2}{\partial\phi} \approx \boxdot\, \phi$$

   Однако такое верно лишь в том случае, если у нас множитель не содержит $\boxdot^{-1}$.

   Без локальности $\forall S_3 \exists \delta_1 \colon \delta_1 S_2 + \delta_0 S_1 = 0$

3. Проблемы со взаимодействиями

   $$S_3 \rightarrow \text{проблем нет}$$

   $$\delta_0 S_4 + \delta_1 S_3 + \delta_2 S_2 = 0 \rightarrow \text{возникновение сложностей (теория спина 3)}$$

4. Нечетные взаимодействия

При построении мы не используем антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Сделано это для простоты изложения.

5. Тождества, зависящие от размерности (тождества Скаутена).

В случае, если мы находимся в d измерении, то антисимметризация более чем по d индексам дает ноль.

$$\delta^{[\nu_1}_{\mu_1} \dots \delta^{\nu_{d+1}]}_{\mu_{d+1}} = 0$$

$$GY_1Y_2Y_3 \propto \delta_{\mu_1}^{[\nu_1} \dots \delta_{\mu_5}^{\nu_5]} \dots$$

Тем не менее, так как выражение содержит этот фактор, $GY_1Y_2Y_3 = 0$.

Это означает, что только слагаемое с $n = 0$ остается и слагаемое, где нет одного из Y_i. Там есть только две вершины с минимальным и максимальным количеством производных.

В случае спина 2 есть кубическая вершина $(2-2-2)$ с $N(\partial) = 2$, ассоциированная с ОТО, также с $N(\partial) = 4$ и теорией Гаусса Бонэ и с $N(\partial) = 6$ – взаимодействие типа RRR.

6. Все условия могут быть легко закодированы на языке формализма $BRST$.

Глобальная симметрия

Сфокусируемся на специальных $\hat{\xi}$: $\delta_0^{\hat{\xi}} = 0, \quad \partial^a \hat{\xi}^{a(S-1)} = 0$.

Можно переписать выражение в терминах производящих функций

$$u^a \frac{\partial}{\partial x^a} \hat{\xi}(u, x) = 0 - \text{тензор Киллинга}$$

Тензор имеют симметрию диаграммы Юнга. Кроме того, он еще и бесследов. Такие тензоры еще называют симметриями вакуума.

Такие тензоры действуют на поля следующим образом

$$\delta^{\hat{\xi}} \phi = g \delta_1^{\hat{\xi}} \phi + g^2 \delta_2^{\hat{\xi}} \phi + \cdots$$

Далее рассмотрим уравнения типа

$$T_1(T_0) + T_1(T_0) = T_0(C_0)$$

После преобразования остается только

$$T_0\left(\phi, C_0(\phi, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)\right) = 0$$

Смысл в том, что мы взяли $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$, прокоммутировали их и в результате получилось такое ξ, которое аннигилируется свободным преобразованием T_0. Это означает, что преобразования $\hat{\xi}_i$ замыкаются на себе.

$$C_0(\phi, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) \to \hat{\xi}_{[1,2]}$$

В следующем порядке мы имели уравнение такого типа

$$T_1(T_1(\phi, \hat{\xi}_2), \hat{\xi}_1) - T_1(T_1(\phi, \hat{\xi}_1), \hat{\xi}_2) =$$
$$= T_0\left(\phi, C_1(\phi, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)\right) + T_1\left(\phi, C_0(\phi, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2)\right)$$

Здесь мы обращаем внимание на то, что

$$T_0 - \text{чистая калибровка в свободной теории}$$

То есть если мы введем такое соотношение эквивалентности, что поля будут равны нулю, тогда данное отношение означает, что поля ϕ образуют представление алгебры $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$.

$$[e_1, e_2] = e_3$$
$$[T_{e_1}, T_{e_2}] = T_{e_3}$$

Таким образом, T_1 – реализует представление $\widehat{\xi_1}, \widehat{\xi_2}$ на полях, где мы ввели чистую калибровку.

Далее рассмотрим выражения для тензоров Киллинга.

$$\sum_{cylic} C_0\left(\phi, \hat{\hat{\xi}}_1, C_0\big(\phi, \widehat{\xi_1}, \widehat{\xi_2}\big)\right) = 0$$

Это буквально тождество Якоби.

Существует некоторая алгебра на тензорах Киллинга и поля реализуют ее представление.

Для уравнения действия имеем

$$\delta_1^{\hat{\hat{\xi}}} S_2 = 0 \text{ для } g^1$$

$$\delta_1^{\hat{\hat{\xi}}} S_3 = 0 \text{ для } g^2 \to \delta_1^{\hat{\hat{\xi}}} A_3 = 0$$

$$\dots$$

$$\delta_1^{\hat{\hat{\xi}}} A_n = 0$$

Таким образом, самые первые порядки по теории возмущения дают доступ к данной структуре алгебры Ли на тензорах Киллинга.

Лекция 10.

Древесное рассеяние калибровочных полей

Далее рассмотрим подход, который заключается в построении S матрицы для безмассовых полей, причем данная S матрица будет инвариантной по отношению к переопределению определенного класса полей.

Напомним сначала каким образом строится амплитуда

$$S = S_2 + S_3 + S_4 + \cdots$$

Из каждого члена мы извлекаем по вершинам и по стандартным правилам Фейнмана соединяем все линии, используя данные вершины.

Кроме того, у амплитуды в S матрице на внешних ногах находятся состояния, которые являются решением свободных уравнений. Это означает, что для свободных уравнений удобно выбирать калибровку ТТ:

$$\partial\phi = 0, \qquad \phi' = 0, \qquad \boxdot\, \phi = 0$$

$$\delta\phi = \partial\xi, \qquad \partial\xi = \xi' = 0$$

Амплитуда является некоторой функций от ϕ_i

$$A_n\left(\phi_1^{a_1(s_1)}(p_1), \dots, \phi_n^{a_n(s_n)}(p_n)\right)$$

$$A_n\left(\phi_1^{a_1(s_1)}(p_1), \dots, \phi_n^{a_n(s_n)}(p_n)\right) = \phi_1^{a_1(s_1)}(p_1) \dots \phi_n^{a_n(s_n)}(p_n) A_{a_1(s_1),\dots,a_n(s_n)}(p_1, \dots, p_n)$$

Также мы накладываем требования на A.

1. Оно должно быть инвариантно по отношению к трансляциям:

$$A(\dots) = \delta^d(p_1 + \cdots + p_n) M(\dots)$$

2. Лоренц инвариантность.

   Все индексы свернуты ковариантно.

3. Калибровочная инвариантность.

$$\phi_{a_1 \dots a_s} \to\; p_{a_1} \xi a_2 \dots a_s$$

Результат должен быть равен нулю, что в терминах M имеет вид

$$p^a M_{a(s_1),b(s_2)\dots}(p_1, \dots, p_n) = 0$$

Данное выражение носит название тождества Уорда.

И для вычисления амплитуд необходимо ввести понятие пропагатора. Он находится следующим образом

$$F^{a(S)}(\phi) = J^{a(S)}$$

$$\delta(x - x')\eta^{2\dots}$$

Данный источник должен удовлетворять тождествам Бьянки.

В случае, если в правой части будет ноль, то можно накладывать ТТ калибровку, однако, если в правой части будет источник, то можно будет использовать только калибровку Де Дондера.

Далее посмотрим, чему равен пропагатор в импульсном пространстве

$$D_s^d(u_1,u_2;p)=\frac{P_s^{d-2}(u_1,u_2)}{p^2}$$

Здесь P_s^d – бесследовый проектор

$$P_s^d(u_1,u_2)=\frac{1}{(s!)^2}(u_1u_2)^s+\cdots,\qquad \partial_{u_1}^2P_s^d(u_1,u_2)=\partial_{u_2}^2P_s^d(u_1,u_2)=0$$

Если мы перепишем данное выражение не через производящие функции, а через тензор, то получим

$$P^{a(s),b(s)}=\eta^{ab}\dots\eta^{ab}+\#\eta^{aa}\eta^{bb}(\eta^{ab})+\cdots$$

$$P_s^d(u_1,u_2)=\frac{1}{(s!)^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]}t_{s,k}^d(u_1^2)^k(u_2^2)^k\,(u_1u_1)^{s-2k}$$

$$t_{s,k}^d=\frac{(-1)^k s!}{4^k k!\,(s-2k)!\left(\frac{d}{2}-1+s-k\right)_k},\qquad (a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

Упражнение. Проверить данное выражение и найти коэффициенты 1,2.

Теперь начинаем искать трехточечные амплитуды. Требуем выполнения условия

$$P^{a_1}M_{3a(s_1)b(s_2)c(s_3)}(p_1,p_2,p_3)=0$$

На уровне четырех точек будут присутствовать вклады обменов и контактных диаграмм. Все вместе дает $M_{4a(s_1)\dots}$

Часть с кубическими амплитудами фиксирована, по ней можно восстановить кубические вершины и посчитать обмены. То есть нам нужно найти M_4 ..., которое удовлетворяет

$$P^{a_1}M_{4a(s_1)\dots}=0$$

В таком стиле можно продолжать во всех точках. На каждом шаге будет только одна неизвестная.

Однако существуют замечания:

1. Амплитуда M_3 не определяет однозначно S_3

Так получается из-за того, что все слагаемые, действия которых пропорционально аннигилируются свободными движениями, выпадают.

$$S_3\sim\phi_1\,\Box\,\phi_2\phi_3\to M_3=0$$

Разные способы восстановить S_3 по M_3 дают разные обмены, что вытекает в неоднозначность в S_4.

Также понятно, что для амплитуд переопределение полей происходит не по существу.

2. Роль локальности.

Пусть M_4 удовлетворяет тождеству Уорда.

$$P^{a_1}M_{4a(s_1)\dots}=0$$

Тогда если у нас есть выражение с конечным количеством производных, то это дает полином

$$M=s^\alpha t^\beta u^\gamma$$

Где s, t, u – переменные Мандельштама.

Существуют амплитуды совсем другого типа

$$M = \frac{1}{S}$$

Формально это выглядит в таком виде

$$(\phi\phi)\frac{1}{J}(\phi\phi)$$

В случае, если мы рассматриваем только локальные теории, то M_4 должно подбираться таким образом, чтобы сингулярности от M_4.

Под локальностью понимается, что взаимодействия происходят в одной точке.

$$L_4 = \partial\phi(x)\partial\phi(x)\phi(x)\phi(x)$$
$$e^{-a\partial_x}\phi(x) = \phi(x+s)$$

Можно разложить экспоненту в ряд и получить бесконечный ряд по производным, действующим на ϕ.

Из фиксированных сингулярностей можно получить, что

$$M_4 \text{ содержит в точности сингулярности обменов}$$

Данное условие с тождеством Лорда делает первоначальную задачу значительно более нетривиальной.

Теория Янга-Миллса

У нас есть поляризационные вектора

$$A_3 = A^{a_1}_{\lambda_1}(p_1)A^{a_2}_{\lambda_2}(p_2)A^{a_3}_{\lambda_3}(p_3)f_{a_1a_2a_3}$$
$$\left[(p_2-p_3)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_3} + (p_3-p_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_1} + (p_1-p_2)^{\lambda_3}\eta^{\lambda_1\lambda_2}\right]\delta^d(p_1+p_2+p_3)$$

Далее проверяем тождество Уорда и делаем замену

$$A^{a_1}_{\lambda_1}(p_1) \to p_{1\lambda_1}\xi^{a_1}(p_1)$$

Тогда получаем

$$p_{1\lambda_1}[\dots] = \left[(p_1p_2 - p_1p_3)\,\eta^{\lambda_2\lambda_3} + p_1^{\lambda_3}(p_3-p_1)^{\lambda_2} + p_1^{\lambda_2}(p_1-p_2)^{\lambda_3}\right]\delta(\dots) =$$
$$= \left[p_1^{\lambda_3}p_3^{\lambda_2} - p_1^{\lambda_2}p_2^{\lambda_3}\right]\delta(\dots) = \left[-p_2^{\lambda_3}p_3^{\lambda_2} - p_3^{\lambda_3}p_3^{\lambda_2} + p_2^{\lambda_2}p_2^{\lambda_3} + p_3^{\lambda_2}p_2^{\lambda_3}\right]\delta(\dots)$$

Далее рассмотрим обмен (s-канал).

$$\int f_{a_1a_2a_e}\left[(p_2-p_e)^{\lambda_1}\eta^{\lambda_2\lambda_e} + (p_e-p_1)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_e\lambda_1} + (p_1-p_2)^{\lambda_e}\eta^{\lambda_1\lambda_2}\right]$$
$$\frac{\delta^{a_ea_{e'}}\eta_{\lambda_e\lambda_{e'}}}{p_e^2}\delta^d(p_e+p_{e'})\delta^d(p_1+p_2+p_e)\delta^d(p_3+p_4+p_{e'})d^dp_e d^dp_{e'}A_1A_2A_3A_4$$

Снова применяем тождество Уорда по первой ноге

$$\delta_1 A_{4|s}^{exch} = \xi^{a_1}(p_1)A_1A_2A_3A_4 f^{a_e}_{a_1a_2}f_{a_3a_4a_e}$$
$$\left(2\eta^{\lambda_2\lambda_4}p_4^{\lambda_3} - 2\eta^{\lambda_2\lambda_3}p_3^{\lambda_4} + (p_3-p_4)^{\lambda_2}\eta^{\lambda_3\lambda_4}\right)$$

В качестве упражнения необходимо проверить истинность данного выражения.

$$S_4 = \alpha\int d^dx f^e_{a_1a_2}f_{a_3a_4a_e}A_1A_2A_3A_4\eta^{\lambda_1\lambda_3}\eta^{\lambda_2\lambda_4}$$

Вид данного выражения строится таким образом, потому что вариация амплитуды линейна по импульсу.

И соответствующее значение амплитуды равно

$$A_{4|s}^{cont} = A \dots A4\alpha f_{a_1 a_2}^{e} f_{a_3 a_4 a_e}\left(\eta^{\lambda_1\lambda_3}\eta^{\lambda_2\lambda_4} - \eta^{\lambda_1\lambda_4}\eta^{\lambda_2\lambda_3}\right)$$

Всего будет 24 перестановки.

После процедуры варьирования получим

$$\delta_1 A_{4|s}^{cont} = \xi A \dots A4\alpha f_{a_1 a_2}^{e} f_{a_3 a_4 a_e}\left(p^{1\lambda_3}\eta^{\lambda_2\lambda_4} - p^{1\lambda_4}\eta^{\lambda_2\lambda_3}\right)$$

Остается потребовать, чтобы соблюдалось условие

$$\delta_1 A_{4|s}^{exch} + \delta_1 A_{4|s}^{cont} + t + u = 0$$

Далее производим решение уравнения, получаем тождество Якоби и значение

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

Замечание

$$\delta_1 A^{cont} \to 0 \text{ при } p_1 \to 0$$

$$\delta_1 A^{exch} - \text{конечное при } p_1 \to 0$$

Тогда можно взять $p_1 = 0$

$$\delta_1 A_{4|s}^{exch}\big|_{p_1=0} = 0$$

Данное выражение также называется мягким пределом.

Лекция 11.

No-go теоремы. Теорема Вайнберга

Первая no-go теорема – теорема Вайнберга (soft theory). Данная теорема использует язык с матрицами амплитуд. Далее будет рассмотрен упрощенный вариант теоремы. Начнем с того, что мы имеем теорию скалярного поля

$$S_3 = g_s \int d^d x \left(\partial_{u_1} \partial_{x_{23}}\right)^s \phi(x_1, u_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$

В случае, когда скаляры безмассовые, вершины были получены ранее в лекциях.

Сразу в качестве упражнения можно убедиться, что $\delta_0 S_3 = 0$ и при $m^2 \neq 0$.

Рассмотрим ситуацию, когда все вершины скаляры, а одна частица со спином s. Более того, пусть у скаляров импульс p, а у частицы импульс $q \to 0$

Такой процесс рассеяния доминируется диаграммой, в которой калибровочная частица присоединяется к одной из внешних линий через вершину.

Пропагатор будет иметь вид

$$\frac{1}{p_e^2 + m_i^2} = \frac{1}{(p_i + q)^2 + m_i^2} \sim \frac{1}{p_i^2 + 2p_i q + m_i^2} = \frac{1}{2p_i q}$$

В выражении использовано то, что внешняя нога – нога on-shell. Импульс стремится к полюсу.

В пределе $q = 0$ происходит отделение куска s матрицы, в котором остаются только скалярные поля.

$$M_{a(s)}(p_1, \dots, p_n; q) \sim \sum_i g_s^i \, M(p_1, \dots, p_n) \frac{1}{2p_i q} \left((p_i - p_e)_a\right)^s$$
$$\sim \sum_i g_s^i \, M(p_1, \dots, p_n) \frac{1}{2p_i q} (2p_{ia})^s$$

Далее смотрим на тождество Уорда для данного процесса. Конечный вклад будет только от диаграммы.

$$0 = M_{a(s)} q^a \sim \sum_i g_s^i \, M(p_1, \dots, p_n)(2p_{ia})^s$$

Если $M \neq 0$, то

$$\sum_i g_s^i (p_{ia})^{s-1} = 0$$

Далее рассмотрим отдельные спины:

1. $S = 1$

$$\sum_i g_1^i = 0, \qquad g_1^i - \text{электрический заряд}$$

И формула означает сохранения заряда.

2. $\mathrm{S} = 2$

$$\sum_i g_2^i \, p_{ia} = 0$$

Данное условие должно быть рассмотрено вместе с условием сохранения импульса:

$$\sum_i p_{i2} = 0$$

Тогда мы получаем, что

$$g_2^i = g_2$$

И замечаем, что нет зависимости от i. Отсюда следует, что гравитация универсальна, то есть все поля взаимодействуют с одной и той же силой.

3. $S \geq 3$

При аналогичных условиях

$$\begin{cases} \sum_i g_s^i \, (p_{ia})^{s-1} = 0 \\ \sum_i p_{ia} = 0 \end{cases}$$

можно видеть, что решения находятся только в виде тривиального рассеяния:

$$p_1 = -p_3$$
$$p_2 = -p_4$$

Теорема Коулмана-Мандулы

Данная теорема о возможных симметрия S-матрицы.

Утверждение теоремы состоит в следующем:

Пусть

1. Речь идет о $2 \to 2$ рассеянии. Амплитуда (M) – аналитическая функция от s, u, t.
2. $M \neq 0$ за исключением изолированных s, u, t.
3. $N(m_i)$ конечно, где $m_i < M, \forall M$.

Тогда симметрия

$$B = P \oplus I,$$

где P- Пуанкаре и I – внутренняя симметрия ($[P, I] = 0$).

Далее проведем доказательство теоремы.

Начнем с рассмотрения симметрии

$$[B_\alpha, P] = 0$$

Для этого выберем состояние с определенным импульсом

$$|p>^m, \text{где } m - \text{конечное число}$$

Тогда получим

$$B_\alpha |p>^m = \left(b_\alpha(p)\right)^m_{m'} |p>^{m'}$$

Теперь рассмотрим действие генератора на двухчастичное состояние

$$\left(b_\alpha(p,q)\right)^{m\ \ n}_{m',\ n'} = \left(b_\alpha(p)\right)^m_{m'} \delta^n_{n'} + \left(b_\alpha(q)\right)^n_{n'} \delta^m_{m'}$$

В этих терминах условие инвариантности S-матрицы будет выглядеть следующим образом:

$$b_\alpha(p,q)S(p',q';p,q) = S(p',q';p,q)b_\alpha(p,q)$$

Сначала будем рассматривать следовую часть от b_α

$$Tr(b'\,S) = Tr(S\,b) = Tr(b\,S)$$

$$Tr(b') = Tr(b)$$

Из структуры двухчастичных b_α возьмем следы по m, m' и n, n'

$$N(q^2)trb_\alpha(p') + N(p^2)trb_\alpha(q') = N(q^2)trb_\alpha(p) + N(p^2)trb_\alpha(q),$$

где $N(q^2)$ – количество состояний с импульсом q

$$p' + q' = p + q$$

Тогда решение может быть только в следующем виде

$$trb_\alpha(p) = N(p^2)a_\alpha^\mu p_\mu + b_\alpha$$

Дальше рассматриваем бесследовые b, которые будет обозначать как b^*. Утверждается, что они коммутируют как

$$[b^*(B_1), b^*(B_2)] = b^*([B_1, B_2])$$

Более того, можно показать, что отображение $B \to b^*$ невырожденное. Тогда если допустить, что b^* нетривиально преобразуются под действием преобразования Лоренца и b^* унитарно, то мы получим противоречие, так как m пробегает конечное количество значений. Отсюда следует, что

$$[b^*, \text{Лоренц}] = 0, \qquad b^* - \text{внутренняя симметрия}$$

То есть все симметрии, которые коммутируют с трансляциями, либо внутренние, либо импульсы.

Далее рассмотрим более общее преобразование симметрии.

$$A_\alpha|p>^\mu = \int d^4p' \big(A_\alpha(p',p)\big)^n_{n'}|p>^{n'}$$

Для данного случая генератор симметрии будет иметь вид

$$A_\alpha^f = \int d^4x \exp(iPx)\exp(-iPx)\,f(x)$$

Тогда утверждается, что

$$A_\alpha^f|p>^\mu = \int d^4p' \tilde{f}(p'-p)\big(A_\alpha(p',p)\big)^n_{n'}|p'>^{n'}$$

$$\tilde{f}(k) = \int d^4x \exp(ixk)\,f(k)$$

Теперь рассмотрим $\tilde{f}(p'-p)$: $f \neq 0$ при $p - p' \sim \delta$

$$p + q \to p' + q'$$

$$p'^2 = p^2 = m_{p^2}$$

$$q'^2 = q^2 = m_{q^2}$$

При этом

$$(p+\delta)^2 = m_{p^2}$$

$$(p'+\delta)^2 \neq m_{p^2}$$

$$(q+\delta)^2 \neq m_{q^2}$$

$$(q'+\delta)^2 \neq m_{q^2}$$

И рассматриваем следующее

$$\delta A = AS$$

$$< p'q'|\, S\,(A|p> \oplus\ |q> \ +|p> \ \oplus A|q>) \ =$$
$$= (< p'|\,A \oplus\ < q'| + < p'| \oplus\ < q'|\,A)\,S|pq>$$

Единственное ненулевое слагаемое здесь будет

$$< p'q'|\,SA|p> \ \oplus |q> = 0$$

Выражение выполняется в случае, когда

$S = 0$ для некоторой нетривиальной области в пространстве s, u, t

Тогда мы делаем вывод, что $A^{\delta}|p> = 0, \forall \delta \neq 0$.

И в заключении имеем, что

$$A(p', p) = 0\ \forall p \neq p'$$

Для нас это означает, что в качестве решения можно брать выражения вида

$$A(p, p') = \delta(p - p') + A^{\mu}\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\delta(p - p') + \dots =$$
$$= \sum_{n} B_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n}\frac{\partial}{\partial p^{\mu_1}}\dots\frac{\partial}{\partial p^{\mu_n}}\delta(p - p')$$

$$B_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n} = \left[P^{\mu_1}, [P^{\mu_2}, \dots [P^{\mu_N}, A_{\alpha}] \dots]\right]$$
$$\left[B_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n}, P^{\mu}\right] = 0$$

Используя предыдущие результаты, имеем

$$B_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n}(p) = b_{\alpha}^{*\mu_1,\dots,\mu_n} + a_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n,\mu}p_{\mu}^{1}$$

Последнее, что мы должна учесть

$$A: on - shell \to on - shell$$

Все генераторы симметрии должны коммутировать с P^2.

$$[A, P^2] = 0$$
$$0 = \left[P^{\mu_1}, [P^{\mu_2}, \dots [P^{\mu_N}, A_{\alpha}] \dots]\right] = 2P_{\mu_1}B_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n}$$
$$p_{\mu_1}b_{\alpha}^{*\mu_1,\dots,\mu_n} = 0 \to b^{*} = 0$$

Отсюда следует, что

$$a_{\alpha}^{\mu_1,\dots,\mu_n,\mu} = -a_{\alpha}^{\mu\mu_2,\dots,\mu_N,\mu_1} \to a = 0$$

При $N = 1$

$$a_{\alpha}^{\mu_1,\mu} = -a_{\alpha}^{\mu,\mu_1}$$
$$A_{\alpha} = a_{\alpha}^{\mu_1,\mu}p_{\mu_1}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}$$

Именно так мы восстанавливаем преобразования Лоренца.

Лекция 12.

Высшеспиновая голография

Один из популярных способов обойти все трудности с взаимодействиями высших спинов – это перейти в пространство AdS. В нем есть два полезных факта:

1. Существование высшеспиновой алгебры.
   Там образуются тензоры Киллинга
$$\nabla^a \xi^{a(S)} = 0$$
2. Существуют синглетоны
$$E = \frac{d-2}{2}, \qquad S = 0 = Rac$$
$$FF: Rac \oplus Rac = \sum_s D(E = d + S - 2, S)$$

Специфика AdS в том, что существуют специфические синглетонные представления, которую играют важную роль.

AdS/CFT соответствие

У нас есть два пространства: AdS и Минковского
$$AdS_{d+1} \text{ и } M_d$$
$$\text{изометрии } So(d,2) \mid \text{конфорные изометрии } So(d,2)$$
Поля в AdS соответствуют операторам в M_d.

Амплитудам, например, соответствуют корреляторы операторов.

Далее будем работать в Евклидовом пространстве ($So(d+1,1)$.

В обычной теории поля могут возникать следующие выражения:
$$\frac{1}{\left(\left(x_i - x_j\right)^2\right)^\delta}$$

Здесь проблема заключается в том, что необходимо правильно обходить точку ветвления.

Обозначим $EAdS$ – Евклидовое AdS. И метрика выглядит как
$$X^2 = -R^2, \qquad X^0 > 0$$
$$(-,+,\dots,+)$$

Далее возьмем объемлющие координаты и параметризуем их при помощи координат Пуанкаре.
$$X^A = (X^+, X^-, X^1 \dots X^d) = \frac{R}{Z}(1, Z^2 + x^2, x^\mu)$$
$$x \to \infty \text{ отображается в } Z \to 0$$

Метрика в таких координатах выглядит следующим образом:
$$dS^2 = R^2 \frac{dZ^2 + dx^2}{Z^2}$$

Будем называть границей $Z = 0$.

Можно увидеть, что в случае, когда $z = \epsilon, \epsilon \to 0$

$$dS^2 = dx^2 \#$$

На $Z = 0$ индуцируется метрика Минковского. Кроме того, у данной границе есть описание в рамках нашей конструкции

$$P^2 = 0 - \text{конус}$$

$$P \sim \lambda P, \qquad \lambda \neq 0$$

Чтобы избавиться от последнего условия, можно сделать следующее

$$P^A = (P^+, P^-, P^1, \dots, P^d) = (1, x^2, x^\mu)$$

$$P^+ = 1$$

Так как в AdS есть поля, а в CFT операторы, то логично построить некоторый объект, который бы отображал одно поле в другое.

Bulk-to-boundary propagators

Для простоты рассматривать будет случай скалярных полей. Ниже выпишем выражение для пропагатора

$$G_{b\partial}(P; X) = \frac{C}{(-2P\,X)^{\triangle}}$$

У него есть следующие свойства:

1. Явная $So(d, 2)$ ковариантность
2. Зависимость от P:
$$P \frac{\partial}{\partial P} G = - \triangle \mathrm{G}$$
3. Можно вычислить следующее:
$$\frac{\partial}{\partial x^M} \frac{\partial}{\partial x_M} G_{b\partial}(P; X) = 0$$
$$\boxdot_{AdS}\, G = \partial\partial G + \frac{1}{R} \triangle (\triangle - d)\mathrm{G}$$
$$(\boxdot_{AdS} - M^2) G_{b\partial} = 0, \qquad M^2 = \frac{1}{R^2} \triangle (\triangle - \mathrm{d})$$

То есть со стороны AdS, пропагатор ведет себя как некоторое поле с некоторой массой.

Более того, можно показать, что

$$G_{b\partial}(P; X)$$

с разными P дают базис решений этого уравнения

$$(\boxdot_{AdS} - M^2)\phi(x) = 0$$

Тогда можно сказать, что граница

$$p^2 = m^2 b \text{ в плоском пространстве}$$

$$G_{b\partial}(P; X) \sim e^{ipx} \text{ с } p^2 = m^2$$

Запишем пропагатор во внутренних координатах

$$G_{b\partial}(P;X) = \frac{C}{(-2P\,X)^{\triangle}} = C\left(\frac{Z}{Z^2 + (y-x)^2}\right)^{\triangle} = G_{b\partial}(y;z,x)$$

Исследуем предел $Z \to 0$. Для этого рассмотрим два случая

1. $y \neq x$ Тогда пропагатор ведет себя как

$$G_{b\partial} \sim CZ^{\triangle}\frac{1}{((y-x)^2)^{\triangle}}$$

2. $Z \to 0,\ y \rightrightarrows x,$

$$G_{b\partial} \sim \delta^d(x-y)\#$$

Для вычисления # будем интегрировать по частям

$$\int d^d x G_{b\partial}(y;z,x) = \frac{C}{Z^{\triangle}}\int d^d x\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y-x}{z}\right)^2}\right)^{\triangle} =$$

$$= CZ^{d-\triangle}\int d^d\bar{x}\frac{1}{(1+\bar{x}^2)^{\triangle}} = CZ^{d-\triangle}\frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\triangle - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\triangle)}$$

Тогда получаем, что

$$G_{b\partial} = CZ^{d-\triangle}\frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\triangle - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\triangle)}\delta^d(x-y) + CZ^{\triangle}\frac{1}{((y-x)^2)^{\triangle}}$$

Обычно для унитарных теорий $\triangle > d - \triangle$, тогда

$$Z^{d-\triangle} \gg Z^{\triangle} \text{ при } Z \to 0$$

Часто этот пропагатор называют решением в AdS с источником в точке y на границе.

Такого рода пропагаторы можно считать аналогами плоских волн в плоском пространстве, а граничные координаты можно считать аналогами $on-shell$ импульсов.

Свободная O(N) векторная модель

Вернемся к алгебре высших спинов. Алгебра высших спинов – это алгебра симметрий уравнения

$$\boxdot\,\phi = 0$$

Нас будут интересовать дифференциальные операторы L:

$$\boxdot\,\phi = 0 \to \boxdot\,(L\phi) = 0$$

Такие операторы должны удовлетворять выражению

$$\boxdot\,L = L'\,\boxdot$$

Кроме того, операторы типа

$$L = M\,\boxdot\ - \text{тривиальны}$$

Они также образуют идеал в алгебре L

$$[L, I] \subset I$$

Тогда алгебра высших спинов по определению

$$hs = \frac{L}{I}$$

В теореме FF (Flato-Fronsdal theorem), необходимо предъявить операторы, которые являются примарными, имеют нужный спин и размерность и билинейные по полям

$$J_{\mu(s)} = \sum_{k=0}^{l} a_k \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_S} \phi \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \phi - \text{следы}$$

$$a_k = (-1)^k \binom{l}{k} \frac{\left(\frac{d-2}{2}\right)_l}{\left(\frac{d-2}{2}\right)_k \left(\frac{d-2}{2}\right)_{l-k}}$$

$$KJ = 0$$

Можно убедиться, что токи сохраняются

$$\partial_\mu J^{\mu(s)} = 0$$

Это означает следующее: можно определить конформные тензоры Киллинга

$$\left(\partial_\mu K_{\mu(s-1)}\right) = 0$$

$$\mathbb{J}^\mu(K) = J^{\mu_1,\dots,\mu_s} K_{\mu_2,\dots,\mu_s}$$

И утверждается, что $\partial_{\mu_1} \mathbb{J}^{\mu_1} = 0$

Данные токи генерируют высшеспиновые симметрии.

Перед тем, как перейти к корреляторам, сделаем небольшое улучшение

$$\phi \to \phi^a$$

$$O(N) \text{ индекс в векторном представлении}$$

$$J_{\mu(s)} = \sum_{k=0}^{l} a_k \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_S} \phi^a \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_s} \phi_a$$

Рассмотрим корреляторы данных токов, которые переинтерпретируются в амплитуды.

$$< J_{s_1} \dots J_{s_n} >$$

$$< \phi^{a_1}(x_1) \phi^{a_2}(x_2) > = \frac{\delta^{a_1 a_2}}{(x_{12}^2)^{\frac{d-2}{2}}} = D(x_1, x_2) \delta^{a_1 a_2}$$

Далее будет разобран случай скалярного поля

$$J_0 = \phi^{a_1}(x_1) \phi^{a_2}(x_2)$$

$$<: \phi^{a_1}(x_1) \phi_{a_1}(x_1) :: \ \phi^{a_2}(x_2) \phi_{a_2}(x_2) > =$$

$$= 2ND^2(x_1, x_2) = \frac{2N}{(x_{12}^2)^{d-2}}$$

Для трехточечной функции получим

$$<: \phi^{a_1}(x_1) \phi_{a_1}(x_1) :: \ \phi^{a_2}(x_2) \phi_{a_2}(x_2) :: \ \phi^{a_3}(x_3) \phi_{a_3}(x_3) > =$$

$$= 8ND(x_1, x_2) D(x_2, x_3) D(x_3, x_1) = \frac{8N}{(x_{12}^2)^{\frac{d-2}{2}} (x_{23}^2)^{\frac{d-2}{2}} (x_{31}^2)^{\frac{d-2}{2}}}$$

И для четырех точек имеем

$$<:: \cdots :: \cdots :: \cdots :: \cdots ::> =$$
$$= 16ND(x_1, x_2) \ldots$$

В качестве упражнения можно полностью выписать получившийся результат.

Для того, чтобы лучше понять роль N в данном анализе, можно ввести некий оператор

$$O(x) = \frac{1}{\sqrt{2N}} : \phi^a(x)\phi_a(x):$$

Тогда получаем, что

$$< o(x_1)o(x_2) > = \frac{1}{(x_{12}^2)^{d-2}}$$

$$< o(x_1)o(x_2)o(x_3) > = \sqrt{\frac{8}{N}} \frac{1}{(x_{12}^2)^{\frac{d-2}{2}} \ldots}$$

$$< oooo > = \frac{4}{N} \ldots$$

Лекция 13.

Тетрадная (Картанова) гравитация, теория Черна-Саймонса

Можно использовать не только стандартный базис для векторов. Так, например, далее показан базис h_a

$$A = A^\mu \partial_\mu = A^a \vec{h}_a$$

$$A^a = e^a_\mu A^\mu, \qquad A^\mu = (e^{-1})^\mu_a A^a$$

Также нужно потребовать, чтобы метрика в новом базисе была метрикой Минковского

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}, \qquad \eta_{ab} = (e^{-1})^\mu_a (e^{-1})^\nu_b g_{\mu\nu}$$

С практической точки зрения данные преобразования полезны при работе с фермионами

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

И сделать замену

$$\gamma_\mu = e_\mu \gamma_a$$

Можно также отметить, что

$$"e \sim \sqrt{g}"$$

Еще одно свойство заключается в поднятии-опускании индексов

$$A_a = \eta_{ab} A^b$$

$$(e^{-1})^\mu_a = \eta_{ab} g^{\mu\nu} e^b_\nu$$

Далее рассмотрим, что происходит с ковариантными производными

$$\partial_\mu v^b + \omega_\mu{}^b{}_c v^c = \nabla_\mu v^b = e^b_\nu \nabla_\mu v^\nu = e^b_\nu \nabla_\mu (e^\nu_c v^c)$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы ковариантная производная, действуя на тетраду, давала ноль

$$\nabla_\nu e^a_\mu = \partial_\nu e^a_\mu - \Gamma_\nu{}^\rho{}_\mu e^a_\rho + \omega_\nu{}^a{}_b e^b_\mu = 0$$

Дополнительно также требуем, чтобы ковариантная производная в метрике Минковского была равна нулю

$$0 = \nabla_\nu \eta_{ab} = \partial_\nu \eta_{ab} - \omega_\nu{}^c{}_a \eta_{cb} - \omega^c_{\nu\, b} = -(\omega_{\nu ba} + \omega_{\nu ab})$$

Если взять антисимметричную часть ковариантной производной, то получается следующее выражение

$$T^a_{\nu\mu} = \nabla_\nu e^a_\mu - \nabla_\mu e^a_\nu = \partial_\nu e^a_\mu - \partial_\mu e^a_\nu + \omega_\nu{}^a{}_b e^b_\mu - \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu = 0$$

$$\omega = \omega(e, \partial e)$$

В уравнении выше можно опустить индексы и получить следующий результат

$$n_{\nu\mu\rho} = \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}$$

Тогда все уравнение будет иметь вид

$$n_{\nu\mu\rho} = \omega_{\mu\rho\nu} - \omega_{\nu\rho\mu}$$

В качестве упражнения можно решить уравнение и выразить ω через n.

Кривизна

Кривизна может определяться следующим образом:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^a = R^a_{b,\mu\nu} v^b$$

$$R^a_{b,\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{\nu\ b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu\ b} + \omega^a_{\mu\ c} \omega^c_{\nu\ b} - \omega^a_{\nu\ c} \omega^c_{\mu\ b}$$

Если сравнить тензорную формулу с формулой из Римановой геометрии, то получаем

$$R^a_{b,\mu\nu} = e^a_\lambda e^\rho_b R^\lambda_{\rho,\mu\nu}$$

$$R^\lambda_{\rho,\mu\nu} - \text{тензор Римана}$$

Все это можно переписать, используя дифференциальные формы

$$T^a = de^a - e_b \omega^{ab}, \qquad R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$$

Далее рассмотрим, как выглядит действие

$$S_{EH} = \int d^d x \sqrt{-g} R$$

Оно может быть переписано в форме Картана-Вейля следующим образом

$$S_{CW} = \int R^{ab} e^c \dots e^u \epsilon_{abc\dots u}$$

$$R^{ab}{}_{\mu\nu} = R^{cb}{}_{cd} e^c_\mu e^d_\nu$$

Далее воспользуемся следующей формулой

$$e^k_\mu e^l_\nu e^c_\lambda \dots e^u_\sigma\, \epsilon^{\mu\nu\dots\sigma} = \det(e)\, \epsilon^{klc\dots u}$$

$$\epsilon^{k[n]l[d-n]} \epsilon_{k[n]m[d-n]} = \det(\eta)\, n!\, (d-n)!\, \delta^{[l_1}_{m_1} \dots \delta^{l_{d-n}]}_{m_{d-n}}$$

После подстановки получим

$$S_{CW} \propto \int R^{ab}{}_{cd} \left(\delta^c_a \delta^d_b - \delta^d_a \delta^c_b\right) \sqrt{-g} d^d x$$

Аналогично запишем

$$S_\Lambda = \Lambda \int e^{c_1 \dots c_d} \epsilon_{c_1 \dots c_d} \propto \int d^d x \sqrt{-g}$$

Можно воспринимать ω и e как 2 динамических поля, тогда

$$\frac{\delta S}{\delta \omega} = 0 \leftrightarrow T = 0 \rightarrow \omega = \omega(e, \partial e)$$

Симметрии

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$$

В каждой точке всегда есть остаточная симметрия, которая сохраняет данную метрику и является алгеброй Лоренца.

$$\delta e^a = -\lambda^a{}_{,b} e^b, \qquad \delta \omega^{a,b} = d\lambda^{a,b} + \omega^{a,}{}_c \lambda^{c,b} + \omega^{b,}{}_c \lambda^{a,c} = \nabla \lambda^{a,b}$$

Линеаризация над пространством Минковского

$$dh = 0, \qquad v = 0; \qquad e \rightarrow h + \delta e, \qquad \omega \rightarrow v + \delta\omega$$

Далее начинаем с действия, которое было получено раньше

$$S = (d-2) \int d\omega^{a,b} e^c h^{n_4} \dots h^{n_d} \epsilon_{abcn_4,\dots,n_d} +$$

$$+ \int \omega^{a,b} \omega_c{}^{,b} h^{n_3} \dots h^{n_d} \epsilon_{abn_3,\dots,n_d} =$$

$$= (d-2)\int \left(de^a - \frac{1}{2}h_m\omega^{a,m}\right)\omega^{b,c}h^{n_4}\dots h^{n_d}\epsilon_{abcn_4,\dots,n_d}$$

Выпишем типы симметрий

1. $\delta e^a = d\xi^a$
2. $\delta e^a = -h_m\lambda^{a,m},\ \delta\omega^{a,b} = d\lambda^{a,b}$

Далее можно поварьировать по ω

$$\frac{\delta S}{\delta\omega} \leftrightarrow T^a = de^a - h_m\omega^{a,m} = 0$$

$$\omega = \omega(e, \partial e)$$

$$\sim\phi_{\mu\nu} - \text{симметрично и дважды бесслодово}$$

Теперь рассмотрим калибровочные преобразования

$$\delta e^a = d\xi^a \to \phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \to \text{преобразования Фронсдела}$$

Как итог, нужно отметить, что были восстановлены поля ϕ и $\delta\phi$ из теории Фронсдела.

В качестве комментария скажем, что Картанова гравитация примерно совпадает с теорией Янга-Миллса для алгебры Пуанкаре.

$$A = e + \omega = e^aP_a + \frac{1}{2}\omega^{a,b}J_{a,b}$$

$$\delta A = d\epsilon + [A, \epsilon]$$

$$\delta e = \nabla\xi + [e, \lambda]$$

$$\delta e = \nabla\lambda + [e, \xi]$$

Аналогичным образом можно определить напряженность

$$F = dA + \frac{1}{\xi}[A, A] + T^aP_a + \frac{1}{2}\tilde{R}^{a,b}J_{a,b}$$

Таким образом, мы получаем кручение и кривизну с некоторым добавочным слагаемым.

$$\lambda - \text{локальные преобразования Лоренца, симмтрия}$$

$$\xi - \text{не симметрия на нелинейном уровне}$$

$$\delta_\xi S_{CW} = -(d-2)(d-3)\int R^{a,b}\xi^{c_3}T^{c_4}\dots e^{c_d}\epsilon_{abc_3,\dots,c_d} \neq 0$$

$$\text{при это } \xi - \text{симметрия линеаризованного действия}$$

Свободные безмассовые поля, спин s

Ранее у нас было тетрадное поле, из которого мы получили поле Фронсдала. В случае высших спинов получится поле, в котором будет $s-1$ Лоренцовых индексов с Фронсдаловским параметром.

$$\omega_\mu^{ab}; \lambda^{a,b}$$

Выпишем действие в таком случае

$$S = \int \left(de^{af(s-2)} - \frac{1}{2}h_m\omega^{af(s-2),m}\right)\omega^{b}_{f(s-2)}{}^{c}h^{n_4}\dots h^{n_d}\epsilon_{abcn_3,\dots,n_d}$$

Снова варьируем по ω и получаем

$$\frac{\delta S}{\delta\omega} = T = 0 = de^{a(s-1)} - h_m\omega^{a(s-1),m} = 0$$

$$\omega = \omega(e, \partial e)$$

Кроме того, у нас есть λ симметрия

$$\delta e^{a(s-1)} = -h_m\lambda^{a(s-1),m}$$

И калибровочное преобразование дает

$$\delta e^{a(s-1)} = d\xi^{a(s-1)} \to \delta\psi = \partial\xi$$

В случае AdS необходимо добавить следующие слагаемые

$$+\frac{1}{R^2}\#\int e^{af(s-2)}e^b_{f(s-2)}h^{n_3\dots n_d}\epsilon_{cbn_3,\dots,n_d}$$

$$T = \nabla e - h\omega = 0$$

3D теория Черна-Саймонса

$$S_{CW} = \frac{1}{16\pi G}\int\left(e^aR^{bc} + \frac{1}{3R^2}e^ae^be^c\right)\epsilon_{abc}$$

$$\frac{\delta S}{\delta e} = 0 \to \tilde{R}^{a,b} = R^{ab} + \frac{1}{R^2}e^ae^b = 0$$

В произвольном количестве измерений

$$\frac{\delta S}{\delta\omega} = 0 \to T = 0$$

С точности до производных получаем, что

$$S_{CW} = \frac{1}{16\pi G}\int tr\left(AdA + \frac{2}{3}AAA\right)$$

$$tr(P_aP_b) = 0, \qquad tr(P_a, M_{bc}) = \epsilon_{abc}, \qquad tr(M_{ab}, M_{cd}) = 0$$

Далее используем следующую замену

$$\omega^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{b,c}$$

И в качестве последнего шага имеем

$$S = \cdots\int tr\left(A_LdA_L + \frac{2}{3}A_LA_LA_L\right) - \cdots\int tr\left(A_RdA_R + \frac{2}{3}A_RA_RA_R\right)$$

$$A_L, A_R \to \text{связанности } SL(2,R) \text{ и } SL(2,R)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ