ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА И КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

ЗОТОВ
АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

Содержание

Лекция 1 Гамильтоновы векторные поля

Механика частиц

Пусть есть функция Гамильтона H для N взаимодействующих частиц с потенциалом U. Потенциал зависит от разности координат. Запишем функцию Гамильтона в явном виде:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \nu^2 \sum_{i<j} U(q_i - q_j),$$

где $\nu = const$, p_i – импульсы, q_i, q_j – координаты.

Для описания зависимости потенциала от координат рассмотрим набор частиц на комплексной плоскости, которые взаимодействуют с интегрируемым потенциалом U. Примером такого потенциала является система Калоджера-Мозера. Существует три случая записи:

1) Рациональный $U(q) = \frac{1}{q^2}$

2) Тригонометрический $U(q) = \frac{1}{\mathrm{sh}^2(q)}$

3) Эллиптический $U(q) = \mathscr{P}(q)$

Зададим каноническую скобку Пуассона, которая будет иметь вид:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Можно утверждать, что в этих случаях система будет интегрируема, то есть можно построить нужное количество законов сохранения, которые будут независимы в инволюции в зависимости от скобки Пуассона.

Интегрируемые волчки

Пусть есть функция Гамильтона H. Запишем функцию Гамильтона в явном виде для интегрируемого волчка:

$$H = \tfrac{1}{2} tr(S(J(\mathscr{S}))),$$

где $S = \sum_{i=1}^{N} E_{ij}\mathscr{S}_{ij}$ – матрица размера $N \times N$ со стандартным базисом E_{ij}.

Стандартный базис – это такая матрица, где на i и j месте стоит 1, а остальные 0.

Матричные элементы имеют вид:

$$(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$$

А J – некоторый линейный функционал:

$J(\mathscr{S}) = \sum E_{ij}\mathscr{S}_{ij}J_{ij}$, где J_{ij} – коэффициенты, постоянные числа при которых система будет интегрируема.

В дальнейшем будет изучаться система механических частиц, которая будет получена с помощью редукции по симметриям и редукции свободного движения по симметриям, то есть на каком-то большом фазовом пространстве движение будет свободным, но при этом оно будет обладать большими симметриями.

Если их правильным образом зафиксировать, то на меньшем пространстве (на редуцированном) движение будет уже несвободным, а нелинейным с потенциалом взаимодействия $U(q_i - q_j)$.

За счет того, что мы понимаем, что это движение образовалось в результате редукции по симметриям (исходные свободного), это позволит решить систему в рациональном и тригонометрическом случаях.

Рассмотрим пример.

Если представить, что есть плоскость, в которой по прямой летит свободная частица.

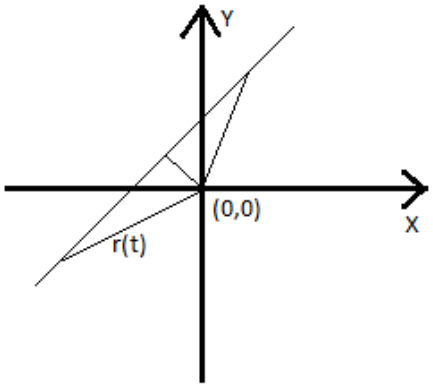

Рис. 1.1. Траектория свободной частицы

Закон прямолинейного движения для часиц можно записать, как:

$$\begin{cases} x(t) = p_x t + x_0 \\ y(t) = p_y t + y_0 \end{cases}$$

Знаем, что плоскость обладает симметрией относительно поворота вокруг центра с координатами (0;0). Если перейти к полярным координатам и посмотреть, как меняется расстояние от любой точки на прямой до центра координат, то оно будет меняться по мере удаления от точки (0;0).

С точки зрения радиальной координаты: частица сначала приближалась к центру, дошла до минимального расстояния, оттолкнулась и полетела назад. Таким образом, зависимость расстояния от времени будет нетривиальным, а уравнение движения имеет вид: $R = \frac{k}{r^3}$, где k - константа, которая может быть любого знака. Это означает, что в радиальных переменных имеем дело с системой:

$$H = \frac{p_r}{2} + \frac{k}{r^2}$$

Это простейший пример записи функции Гамильтона для описания механики частиц. Зафиксировав некую симметрию и перейдя к радиальным переменным, можно интерпретировать как факторизацию по угловой симметрии плоскости.

Таким образом, из простого движения получаем нелинейное с потенциалом $R = \frac{1}{r^2}$. Если в системе частиц будет много, то нужно будет использовать многомерное пространство и проводить факторизацию в нем. Оно будет матричным, которое будет иметь теоретико-групповой смысл.

Упражнение 1.1. *Вывести из закона прямолинейного движения уравнение на радиальную составляющую, которая представляется в виде:* $\ddot{r} = -\frac{k}{r^3}$

Описание произвольной гамильтоновой системы

Для того, чтобы описать систему (1) с точки зрения матричного или группового пространства, на котором будут симметрии нужно сформулировать как можно описывать системы. Поскольку речь идет об интегрированных по Лиу-Вилю системах и работаем в гамильтоновой механике, которая задается функцией Гамильтона и скобками Пуассона. Рассмотрим какие они бывают, как задаются и формуллируются. Что такое фазовое пространство? В механике частиц – это набор импульсов и координат.

В общем случае:

Фазовое пространство – пуассоново многообразие (M), если на нем задана Пуассонова структура.

То есть операция скобка Пуассона, которая паре гладких функций соответствует третью гладкую функцию. Эта операция удовлетворяет свойствам:

1) Антисимметричность
$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

2) Тождество Якоби и циклические перестановки
$$\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} = 0$$

3) Правило Лейбница
$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$

Означает, что скобка Пуассона является дифференцированной. Если она дифференцируема по одному аргументу, то в силу антисимметричности, будет дифференцируема и по второму. Таким образом скобка Пуассона, локально, – бивектор. Существуют векторные поля, которые в локальных переменных выглядят, как:

$$V = \sum \upsilon_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

А объект, описываемый скобкой Пуассона – бивектор, локальная запись которого обозначается:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j} \pi^{ij(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где $\{x_{i,j}\}$ – локальные координаты на M, а $\pi^{ij}(x)$ – скобка между координатами.

Если поставить вместо f и g координаты x_a и x_b, тогда вместо производных будут $\delta -$, все свернется и получится в итоге $\pi^{ab}(x)$.

Перепишем свойства (1) и (2):

1)
$$\pi_{ij}(x) = \pi_{ji}(x)$$

2)
$$\sum_{l=1}^{d} imM\pi_{il}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}\pi_{jk}(x) + \pi_{kl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}\pi_{ij}(x) + \pi_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}\pi_{ki}(x) = 0$$

Рассмотрим например каноническую скобку с импульсами и координатами. $M = \mathfrak{R}^{2n}$ или C^{2n} (в зависимости какие координаты: вещественные или комплексные)

Пусть $x = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ – набор импульсов и координат Для этих элементов выполняются действия:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$$

Напишем матрицу размера $2n \times 2n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & . & 1 \\ . & . & . \\ -1 & . & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда скобка произвольных функций будет выглядеть следующим образом:

$$\{f,g\} = \sum_{i,j}\{p_i, q_j\}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j} + \{q_i, p_j\}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}$$

Стремимся описать произвольную Гамильтовую систему. Есть скобка Пуассона, гамильтониан, тогда уравнение движение будет устроено в виде: $\dot{f} = \{H, f\}$ Для гамильтонова потока для любой функции $\dot{f}$ динамика будет задаваться уравнением гамильтона. Для случая канонической скобки можно воспроизвести уравнение Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ и } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Теорема 1 (Дарбу)**.** *Локально можно выбрать координаты, в которых в матрице пуассоновый вектор примет канонический вид, а все остальное окажется 0.*

$$\begin{pmatrix} 0 & . & 1 & 0 \\ . & . & . & 0 \\ -1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n, z_1 ... z_n)$, *где* z_i *- оставшиеся переменные.*

Рассмотрим например линейную скобку Пуассона-Ли.Такая скобка относится к типу волчков, гадемов, спиновых цепочек. Она рассматривается на $ag*$ - алгебра Ли.

Что такое алгебра Ли?

Алгебра задается структурными константами $[T_i, T_j] = \sum_k C_{i\ j}^k T_k$

Например, алгебра Ли $su(2)$ – это алгебра матриц Паули:

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma,$$

для которой структурные константы – ε-символ.

Запись скобки Пуассона:

$$\{x_i, x_j\} = \sum_k C_{i\ j}^k x_k$$

Как можно заметить, запись алгебры Ли и скобки Пуассона-Ли совпадает, так как в обоих определениях лежит выполнение тождества Якоби.

Упражнение 1.2. *Доказать, что из тождества Якоби алгебры Ли на* $C_{i\ j}^k$ *следует тождество Якоби скобки Пуассона-Ли.*

Рассмотрим скобку $\{x_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k$
Фазовое пространство трехмерное и состоит из x1, x2, x3. Такое, что $\{x_1, x_2\} = x_3$
Матрица будет тогда иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{x}_3 & -\mathrm{x}_2 \\ -\mathrm{x}_3 & 0 & \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 & -\mathrm{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Используя теорему Дарбу и преобразования матрицу можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, мы получили, что скобка Пуассона оказалась вырожденной. Это связано с тем, что в данной скобке есть функция Казимира $C(x)$ – величина, которая коммутирует со всеми функциями:

$$\{x, C(x)\} = 0 \Rightarrow \{f(x), C(x)\} = 0$$

В механике данной $\{x, C(x)\}$ удовлетворяют компоненты момента вращения твердого тела, а () – абсолютная величина момента суммы всех компонентов.

Рассмотрим еще одну скобку.

Пусть есть E_{ij} – стандартный базис матрицы. Тогда напишем правило умножения для пары таких матриц, при том, что номер соответствующего столбца должен совпадать с номером соответствующей строки у другой матрицы, иначе будет 0:

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{kj}E_{il}$$

Это означает, что коммутатор базисных элементов имеет вид:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}$$

Получается алгебра Ли на $gl(N)$ – алгебра образованная коммутатором общего положения без ограничений.

Тогда можно написать скобку Пуассона на $gl*(N)$:

$$\{x_{ij}, x_{kl}\} = \delta_{kj}x_{il} - \delta_{il}x_{kj}$$

Она пишется на двойственном пространстве. На ней будут выполнятся все те свойства, характерные фазовому пространству.

Упражнение 1.3. *Проверить, что $C_k(x) = \frac{1}{k}tr(X^k)$ - функция Казимира, где $tr(X^k)$ – след от матрицы $X = \sum X_{ij}E_{ij}$.*

Если будем задавать динамическую систему, которая будет описываться скобкой Пуассона, то всегда следы этих величин будут оставаться постоянными. Они будут функциями Казимира. Пусть есть матрица X, которую можно привести к диагональному виду: $X = g\bigwedge g^{-1}$, где $\bigwedge$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда $tr(X) = \sum \lambda_i$

$$tr(x^2) = tr(gg^{-1}gg^{-1}) = tr\overset{2}{\bigwedge}$$
$$tr(X^k) = \sum \lambda_i^k$$

Получается, если каждый из следов константа, то и λ_i является константой. Если в пространстве матриц фиксируем собственные значения, то пространство, которое получается в итоге называется орбитой коприсоединенного действия относительно действия группы. В данном случае, под действием группы подразумевается присоединение $g*g^-1$.

Гамильтоновы векторные поля и их свойства

Если есть скобка Пуассона и функция Гамильтона, то можно на любую функцию задать уравнение движения – Гамильтонов поток. Уравнение Гамильтона:

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \{H, f\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{x}_i \partial^i = \{H, x_i\} \partial^i = \pi_{ki} \partial^k H \partial^i = (V_H)_i \partial^i$$

$V_H = \pi_{ki} \partial^k H$ – векторное поле, у которого компоненты зависят от Пуассонова бивектора и гамильтониана. Такие векторные поля будем называть Гамильтоновыми (определение).

Свойства:

1) Запишем скобку Пуассона пары функций, как спаривание векторного поля с дифференциалом и наоборот:

$$\{f, g\} = i_{v_f} dg = -i_{v_g} df$$

Это значит, что происходит естественное спаривание между векторными полями и один-формами:

$$\langle \partial^i, dx_j \rangle = \delta^i_j,$$

dx_j – вектора (вариантные тензоры первого ранга), ∂^i – ковектора (коинвариантные тензоры). Они преобразуются двойственным образом. Следовательно, их можно рассматривать, как базис в дуальных векторных пространствах. Поэтому между ними есть спаривание. Это спаривание будем называть подстановкой.

Если $V = \partial^i$, то при подстановке его в векторное поле получается

$$i_v dx_j = \delta^i_j$$

Тогда вернувшись к скобке Пуассона, получаем:

$$\{f, g\} = \langle (V_f)_i \partial^i, \partial^j g dx_j \rangle = \sum (V_f)_i \partial^j g \langle \partial^i, dx_j \rangle = (V_f)_i \partial^j g = \{f, g\}$$

Рассмотрим произвольное векторное поле:

$$V = \sum V_i \partial^i \quad \text{и} \quad U = \sum U_j \partial^j$$

Векторные поля всегда образуют алгебру Ли. Чтобы убедиться в этом можно посчитать коммутатор:

$$[V,U] = \sum_{i,j} V_i \partial^i (U_j \partial^j) - U_j \partial^j (V_i \partial^i) = \sum_{i,j} V_i (\partial^i U_j) \partial^j - U_j (\partial^j V_i) \partial^i =$$
$$= \sum (V_i \partial^i U_j - U_j \partial^i V_i) \partial^j$$

Можно сделать вывод, что коммутатор векторных полей – векторное поле. Этому свойству удовлетворяют и Гамильтоновы векторные поля, но для них характерно другое свойство:

2) Линейность
$$V_{f+g} = V_f + V_g$$

3) Коммутатор гамильтоновых векторных полей снова гамильтоново векторное поле, построенное по функции, являющейся скобкой Пуассона между векторными полями.
$$[V_f, V_g] = V_{\{f,g\}}$$

Напишем коммутирующие векторные поля, не используя свойство гамильтоновости:
$$[V_f, V_g]_l = (V_f)_k \partial^k (V_g)_l - (V_G)_k \partial^k (V_f)_l$$

Знаем, что
$$(V_f)_i = \pi_{ki} \partial^k f$$

Получаем
$$[V_f, V_g]_l = \pi_{ik} \partial^i f \partial^k (\pi_{jl} \partial^j g) - \pi_{jl} \partial^j g \partial^k (\pi_{il} \partial^i f) =$$
$$= \pi_{ik} \pi_{jl} (\partial^i f \partial^j \partial^k g - \partial^j g \partial^k (\pi_{il} \partial^i f) + \pi_{lk} \partial^k \pi_{jl} - \pi_{jk} \partial^k \pi_{il}) \partial^i f \partial^j g =$$
$$= \pi_{kl} \partial^k (\pi_{ij} \partial^i f \partial^j g) = (V_{\{f,g\}})_l$$

Рассмотрим получившиеся слагаемые. Первое: l – фиксированное, i, g, k – индексы суммирования. В результате симметричности/антисимметричности можно свернуть и получатся согласованные вторые производные. Второе: воспользоваться тождеством Якоби. В итоге получается новое векторное поле.

Симплектическая структура

Рассмотрим другую формулировку механики. Отличие состоит в том, что вместо скобки Пуассона рассмотрим другую структуру, которую назовем симплектической. Симплектическая структура на M – это замкнутая невырожденная 2-форма. Это значит, что есть ω, которая в локальных координатах имеет вид:

$$\omega = \sum_{i,j} \omega^{ij} dx_i \wedge dx_j$$

$\omega^{ij} = -\omega^{ji}$, где j - симметричность Про нее знаем, что матрица ω не вырождена и $d\omega = 0$ С другой стороны:

$$d\omega = \sum \partial^k \omega^{ij} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\partial^k \omega^{ij} + \partial^j \omega^{ki} + \partial^i \omega^{jk} = 0$$

Упражнение 1.4. *Рассмотрим матрицу для скобки Пуассона и равную ей матрицу, построенную на ω^{-1}. Тогда, если ω – симплектическая структура, то матрица для скобки – Пуассонов бивектор. Показать, что из $d\omega = 0$ можно получить тождество Якоби на матрице скобки и наоборот.*

Важное свойство симплектической структуры – линейность. Если есть замкнутые ω_1 и ω_2, то их сумма будет тоже замкнутой. Это позволяет упростить сложное фазовое пространство: на каждый компонент можно задать симплектическую структуру, а сумма их – даст симплекстическую структуру фазового пространства.

Свойства симплектической структуры:

1) Линейность (см. выше)

2) Применение гамильтонова векторного поля есть отрицательный дифференциал функции.

$$i_{vf}\omega = -df$$

$$(V_f)_i = \pi_{ki}\partial^k f V = \sum V_i \partial^i$$

$$\omega = c\sum (\pi^{-1})_{kl} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j$$

Применим спаривание векторного поля к ω:

$$i_{vf}\omega = c\sum (\pi^{-1})_{kl} V_k dx_l - c\sum (\pi^{-1})_{kl} dx_k V_l = 2c\sum (\pi^{-1})_{kl} V_k dx_l =$$

$$= 2c\sum (\pi^{-1})_{kl} \pi_{mk} \partial^m f dx_l = 2cdf = -df$$

Чтобы выполнялось свойство $= -1/2$.

Рассмотрим скобку Пуассона $\{p,q\} = \delta$.

Пусть есть матрицы:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_j \sum (\pi^{-1})_{kl} dx_i \wedge dx_j = -dp \wedge dq + dq \wedge dp = -2dp \wedge dq$$

Если подставим $-\frac{1}{2}$, то все сократится и будет согласовано с условием данного свойства.

Как зная симплектическую структуру вычислить скобку Пуассона?

Пример 1.

Знаем, что $\{f,g\} = i_{vf} dg$

$$i_{vf}\omega = -df$$

План: из (2) находим гамильтоново векторное поле и подставляем его в (1). Напишем произвольное векторное поле.

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_j$$

Фазовое пространство: M = R^{2n} (все импульсы и координаты)

$$V = \sum \alpha_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Вычислим его для конкретной функции в виде импульса ($f = p_i$):

$$i_{vf}\omega = -dp_i$$

Найдем заничения α_k, β_k.

$$i_{vf}\omega = \sum \alpha_k dq_k + \beta_k dp_k = -dp_i$$

$$\alpha_k = 0 \quad \beta_k = \delta_{ki}$$

Получаем: $\{f,g\} = \delta_{ij}$

Пример 2. Фазовое пространство: T*g – кокасательная пространства к алгебре Ли.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum E_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \omega = \langle dX \wedge dY \rangle = tr(dX \wedge dY) = \sum_{i,j=1}^{N} dX_{ij} \wedge dY_{ji}$$

В данном случае имеется сумма канонических скобок в количестве N^2 штук. Напишем произвольное векторное поле.

$$V = \sum A_{ab}\frac{\partial}{\partial X_{ab}} + B_{ab}\frac{\partial}{\partial Y_{ab}} = \langle A^T \frac{\partial}{\partial X}\rangle + \langle B^T \frac{\partial}{\partial Y}\rangle$$

Вычислим его для конкретной функции в виде матрицы ($f = X_{ab}$):

$$i_{vf}\omega = -dX_{ab}$$

$$i_{vf}\omega = \sum A_{Ij}\frac{\partial}{\partial Y_{ji}} + B_{ij}\frac{\partial}{\partial X_{ij}} = -dX_{ab}$$

$$A_{ij} = 0$$

$$B_{ij} = \delta_{ja}\delta_{ib}$$

Получаем:

$$\left\{X_{ab}, Y_{cd}\right\} = \delta_{ba}\delta_{dc}$$

Лекция 2 Уравнения Лакса

Динамика задается двумя объектами: скобка Пуассона и гамильтониан. А скобка Пуассона пары функций локально записывается в терминах бивекторного поля:

$$f = \{f,g\} \quad \{f,g\} = \pi_{ij})\partial^i f \partial^j g$$

Сам бивектор удовлетворяет свойствам:

1) Антисимметричность

$$\pi_{ij}(x) = \pi_{ji}(x)$$

$$\pi_{ik}(x)\partial^k \pi_{jl}(x) + cycl(ijl) = 0$$

2) Тождество Якоби

$$\partial^i \omega^{kj} + cycl(ikj) = 0$$

По-другому, динамику можно задать через гамильтоново векторное поле, для которого работают свойство: коммутатор двух гамильтоновых векторных полей тоже гамильтоново векторное поле. Также можно рассмотреть обратную матрицу:

$$V_f = \sum_{i,j} \pi_{ij} \partial^i f \partial^j$$

$$[V_f, V_g] = V_{\{f,g\}}$$

Тогда динамика – невырожденная и замкнутая 2-форма, которая называется симплектической структурой. $\omega = \sum \omega^{ij} dx_i \wedge dx_j$

Для нее характерны следующие свойства:

1) $d\omega = 0$

2) $i_{vf}\omega = -df$

Пример: форма Кириллова-Костанта

Фазовое пространство: T*g – на кокасательном расслоении к группе. Группа $G = GL_N$. На группе бывают 1-формы ($g^{-1}dg$ - левоинвариантные и dgg^{-1} - правоинвариантные). 1-формы инвариантны относительно постоянных сдвигов влево или вправо.

Рассмотрим инвариантные. Если сдвинем g на постоянное h, то 1-форма останется постоянной. Это выполняется в любом случае инвариантность будет влево или право.

1-формы принимают значение в алгебре Ли. **Алгебра Ли** – разложение первого нетривиального члена элемента групп в окрестности единицы, поэтому можно считать g-1dg – элемент из алгебры Ли. Форма, которая пишется на данном фазовом пространстве – форма Кириллова-Костанта:

$$\omega = d\langle Sg^{-1}dg\rangle = \langle dS \wedge g^{-1}dg\rangle - \langle Sg^{-1}dg \wedge g^{-1}dg\rangle,$$

где

$$d(g^{-1}) = -g^{-1}dgg^{-1}; \qquad d(gg^{-1}) = 0$$

Эта форма замкнута, потому что квадрат внешнего дифференциала равен 0.

Посчитаем скобку Пуассона между элементами в форме: $\{S_{ab}, S_{cd}\} = \delta_{ba}\delta_{dc}$ Напишем произвольное векторное поле и подействуем ей на форму (воспользуемся примером 1 из лекции 1):

$$V = \sum A_{ab}\frac{\partial}{\partial S_{ab}} + B_{ab}\frac{\partial}{\partial g_{ab}} = \langle A^T\frac{\partial}{\partial S}\rangle + \langle B^T\frac{\partial}{\partial g}\rangle$$

$$i_r\omega = \langle Ag^{-1}dg\rangle - \langle dSg^{-1}B\rangle$$

Пусть $f = S_{ab}$. Тогда $i_v\omega = -dS_{ab}$

$$\langle dSg^{-1}B\rangle = \sum_{ijk} dS_{ij}g_{jk}^{-1}B_{kl} = dS_{ab}$$

Получаем, что $B^{ab} = gE_{ab}$.

Тогда матричный элемент:

$$(B)_{ij} = (gE_{ab})_{ij} = \delta_{ai}g_{ib}$$

$$\langle (A - Sg^{-1}B - g^{-1}BS)g^{-1}dg\rangle = 0$$

Получаем, что $A = -[g^{-1}B, S] = -[E_{ab}, S]$

Посчитаем скобку:

$$\{S_{ab}, S_{cd}\} = i_{vs}dS_{cd} = A_{cd}$$

$$A_{cd} = -(E_{ab}, S)_{cd} + (E_{ba}, S)_{cd} = -\delta_{bc}S_{ad} + \delta_{cb}S_{ad}$$

$$V = \langle A^T\frac{\partial}{\partial S}\rangle + \langle B^T\frac{\partial}{\partial g}\rangle$$

$$\{S_{ab}, S_{cd}\} = \delta_{ad}S_{ac} - \delta_{bc}S_{ad}$$

$$\{S_{ab}, g_{cd}\} = i_{vs}dg_{cd} = B_{cd} = g_{cb}\delta_{ad}$$

Упражнение 2.1. *Построить векторное поле, порожденное i_{vgab} и посчитать по нему скобку $\{g_{ab}, g_{cd}\}$.*

Оператор перестановки

Оператор перестановки матричный (P12) – это такой оператор, который действует на тензорное произведение векторов и переставляет их.

$$P_{12}(a \otimes b) = b \otimes a$$

Пусть a и b – вектора из одного и того же векторного пространства, n-мерного. Обозначение 12 – действие на первую и вторую компоненту тензорного произведения. В стандартном базисе оператор перестановки можно записать в виде:

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

Пусть $N = 2$.

$$P_{12} = E_{11} \otimes E_{11} + E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12} + E_{22} \otimes E_{22}$$

Тензорное произведение двух матриц размером n – матрица размером $n^2 \times n2$, которая устроена так:

$$\begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & . \\ A_{12}B & A_{22}B & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

Упражнение 2.2. *Проверить свойство:* $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$

Используем определение для оператора перестановки при $N = 2$:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перестановки

Пусть есть 2 вектора. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Запишем тензорное произведение:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \\ a_2 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Если на него подействуем оператором перестановки:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \\ a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = b \otimes a$$

Введем правило умножения. Зададим вектора в стандартном базисе: $a = \sum_k a_k e_k$, где e_k - вектор с единицей на k-м месте.

$$E_{ij} e_k = \delta_{kj} e_i$$

Опираясь на это правило, применим его к действию оператора перестановки на тензорное произведение векторов:

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} (E_{ij} e_k) \otimes (E_{ji} e_l) a_k b_l = \sum_{ijkl} \delta_{il} \delta_{kj} a_k b_l e_i \otimes e_j = \sum a_k b_l e_l \otimes e_k = b \otimes a$$

Аналогичным способом можно проверить, что $P^2 = 1$

$$P_{12}^2 = \sum_{ijkl} (E_{ij} \otimes E_{ji})(E_{kl} \otimes E_{lk}) = \sum_{ijkl} (E_{ij} \otimes E_{kl})(E_{ji} \otimes E_{lk}) =$$

$$= \sum E_{il} \otimes E_{jk} \delta_{kj} \delta_{il} = \sum_{ij} (E_{ii} \otimes E_{jj}) = 1_N \otimes 1_N = 1$$

Свойства матричного оператора перестановки

1) При действии оператора перестановки на тензорное произведение векторов, то переставляет их.

$$P_{12}(a \otimes b) = b \otimes a$$

При действии оператора перестановки на тензорное произведение матриц, то переставляет их и оператор остается, но с другой стороны.

$$P_{12}(A \otimes B) = (B \otimes A) P_{12}$$

Рассмотрим оператор перестановки, где 3 компонента:

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

$$P_{13} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes 1_N \otimes E_{ji}$$

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} 1_N \otimes E_{ij} \otimes E_{ji}$$

$$P_{13}(a \otimes b \otimes c) = c \otimes b \otimes a$$

2) Матричная реализация групп перестановок: если верно для генераторов групп перестановок, то будет верно и для оператора перестановок.

$$P_{12}P_{23} = P_{23}P_{31} = P_{13}P_{12}$$

Воспользуемся вторым свойством и распишем скобку Пуассона:

$$\{S_{ab}, S_{cd}\} = \delta_{ad}S_{cb} - \delta_{bc}S_{ad}$$

Утверждается, что если есть скобка Пуассона, то ее можно написать в виде: $\{S_1, S_2\} = [P_{12}, S_1]$

Где 1,2 – компоненты векторного произведения, S – матрица, тогда $S_1 = S \otimes 1_N, S_2 = 1_N \otimes S$. Справа – расчет коммутатора, слева по определению: взять все возможные наборы скобок Пуассона и распределить в большую матрицу всевозможных тензорных произведений.

Доказательство.

$$[P_{12}, S_1] = [\sum E_{mn} \otimes E_{nm}, \sum E_{kl}S_{kl} \otimes 1_N] = \sum [E_{mn}, E_{kl}] \otimes E_{nm}S_{kl} =$$

$$= \sum (\delta_{kn}E_{ml} - E_{kn}\delta_{ml}) \otimes E_{mn}S_{kl} = \sum E_{ab}E_{cd}(\delta_{ad}S_{cb} - \delta_{cb}S_{ad})$$

$$\{S_1, S_2\} = \{S \otimes S\} = [P_{12}, S_1] = -[P_{21}, S_2]$$

$$\{S_1, S_2^2\} = S_2\{S_1, S_2\} + \{S_1, S_2\}S_2 = -S_2[P_{12}, S_2] - [P_{12}, S_2]S_2 =$$

$$= -S_2P_{12}S_2 + S_2^2P_{12} - P_{12}S_2^2 + S_2P_{12}S_2 = -[P_{12}, S_2^2]$$

■

Упражнение 2.3. *Доказать равенство* $\{S_1, S_2^k\} = -[P_{12}, S_2^k]$

Рассмотрим следствие из равенства $\{S_1, S_2^k\} = -[P_{12}, S_2^k]$ Возьмем след по второму пространству.

Тогда получим: $\{S, trS^k\} = 0$

trS_k – функции Казимира => собственные значения тоже функции Казимира (по опр)

Тем самым показали, что скобка Пуассона вырождена. У нее есть набор переменных z, которые являются собственными значениями этой матрицы. Если их зафиксировать, то попадаем на пространство, где скобка будет не вырождена. Тут присутствуют симплектичекие структуры, работает обратимость.

Такое пространство называется пространством коприсоединенного действия группы G. ТО есть скобка $\{S_{ab}, S_{cd}\}$ – скобка на q-алгебре Ли. Если зафиксировать функции Казимира, а именно собственные значения, то скобка станет ограниченной на подмножестве уровня и будет не вырождена (скобка на орбите).

Назовем матрицу $L(z) = \frac{S}{z}$

Напишем скобку

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = \frac{1}{z}\frac{1}{w}\{S_1, S_2\} = [L_1(z), r_{12}(z,w)] - [L_2(w), r_{21}(z,w)]$$

Докажем, что получившаяся скобка эквивалентна

$$\{S_1, S_2\} = [P_{12}, S_1]$$

Пусть $r_{12}(z,w) = \dfrac{P_{12}}{z-w}$

Тогда

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = \frac{1}{z}\frac{1}{z-w}[S_1, P_{12}] - \frac{1}{w}\frac{1}{z-w}[S_2, P_{12}] = \frac{1}{z-w}(\frac{1}{z} - \frac{1}{w})[S_1, P_{12}] = -\frac{1}{z}\frac{1}{w}[S_1, P_{12}]$$

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), r_{12}(z,w)] - [L_2(w), r_{21}(z,w)]$$

- это соотношение в классических интегрируемых системах играет ключевую роль. Называется *классическим RLL-соотношением*, а r12 – *классическая r-матрица.*

Система взаимодействующих частиц

Рассмотрим интегрируемую систему частиц на прямой:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \nu^2 \sum_{i<j} \frac{1}{(q_i - p_i)^2}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i$$

$$\ddot{q}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{i<j} \frac{2\nu^2}{(q_i - p_i)^3}$$

Запишем уравнения в виде матричного уравнения $N \times N$ Зачем: пусть есть пара матриц L,M, такие что удалось записать уравнение движения в виде: $\dot{L} = [L, M]$ Такое уравнение называется уравнением Лакса.

Тогда закон сохранения: $H_k = trL^k$ – следы степеней матрицы L Получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} trL^2 = tr(\dot{L}L + L\dot{L}) = tr(L[L,M] + [L,M]L) = tr([L^2, M]) = 0$$

Упражнение 2.4. *Показать, что* $\frac{\partial}{\partial t} trL^k = 0$

Не известно, что Hk отдельно не зависимы и скобка Пуассона между $\{H_k, H_l\} = 0$, то есть они в инволюции. Это не следует из уравнения Лакса.

Утверждение 2. *Если существует классическая r-матрица, то есть скобки L1 и L2 представляются в виде коммутаторов, то соответствующие интегралы движения H1, H2 находятся в инволюции.*

Таким образом наличие r-матрицы достаточное условие, чтобы законы сохранения были в инволюции. Инволютивность интегралов движения – теорема Лиу-Виля.

Получаем: $\frac{\partial}{\partial t} L = [L, M]$

$$\frac{\partial}{\partial t} i = [H, L]$$

Если запустить динамику по любому из времен, а все остальные гамильтонианы остаются на месте, то

$$\frac{\partial}{\partial t_k} i = [L, M_k]$$

Все потоки не зависимы. Можем по одному из них двигаться, запускать динамику, а все остальные будут оставаться неподвижно по закону сохранения.

Рассмотрим пару матриц.

$$L_{ij} = \delta_{ij}\dot{q}_i + (1-\delta_{ij})\frac{v}{q_i - p_j}$$

$$M_{ij} = \delta_{ij}d_i + (1-\delta_{ij})\frac{v}{(q_i - p_j)^2}$$

Пусть $L = \dot{Q} + l, M = d + m$

Распишем уравнение Лакса:

$$[L,M] = [\dot{Q},m] + [l,d] + [l,m] =$$

Получается уравнение движения по π:

$$diag : \ddot{Q} = diag[l,m]$$

$$no\ diag : \dot{l} = [\dot{Q},m] + [l,d] + nodiag[l,m]$$

Можно рассчитать составляющую для диагональных частей матрицы:

$$_{ik}m_{ik} - m_{ik}l_{ki} = \sum v^2 \frac{1}{q_i - p_j}\frac{1}{(q_i - p_j)^2} - \frac{v}{(q_i - p_j)^2}\frac{v}{q_i - p_j} = \sum \frac{2v^2}{(q_i - p_j)^3}$$

Лекция 3 Гамильтонова редукция системы Калоджеро

Рассмотрим скобку Пуассона на T*G. Скобка представлена на паре переменных-матриц (S,g). Получили, что

$$\{S_{ab}, S_{cd}\} = \delta_{ad} S_{cb} - \delta_{bc} S_{ad}$$

Можно записать скобку в тензорной форме:

$$\{S_1, S_2\} = [P_{12}, S_1]$$

Так же скобку можно записать через

$$L(z) = \frac{S}{z}$$

Тогда

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), r_{12}(z,w)] - [L_2(w), r_{21}(z,w)]$$

В итоге получились три более сложные записи одной с той же скобки Пуассона. В нашем случае классической r-матрицей будем считать

$$r_{12}(z,w) = \frac{P_{12}}{z-w}$$

Данная запись r-матрицы позволяет установить интегрируемость системы по Лиу-Вилю, которая обладает представление Лакса.

Пусть уравнения движения в системе записаны в форме уравнения Лакса.

$$\frac{\partial}{\partial t} L = [L, M]$$

Тогда из этого уравнения можно сделать вывод, что законы сохранения –

$$\frac{\partial}{\partial t} trL^k$$

.

Проверка утверждения.

По правилу Лейбница получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} trL^2 = tr(\dot{L}L + L\dot{L}) = tr(L[L,M] + [L,M]L) = tr([L^2, M]) = 0$$

По теореме Лиу-Виля для того, чтобы система была интегрируема, нужно чтобы интегралы движения были независимы и в инволюции. Независимость проверяется расчетами для каждого случая, а инволютивность – $\{H_k, H_n\} = 0$, как следствие записи скобки Пуассона. Заметим, что L(z) зависит от спектрального параметра z.

А значит, это прослеживается и в уравнении Форекса $L(z) = [L(z), M(z)]$. Тогда набор величин $tr(L_k)$ остается законом сохранения, но теперь является производящей функцией интегралов движения.

Разложим $H_k(z) = \sum z^2 H_{kl} \{H_k, H_n\} = 0$

Получаем, что $\{H_{kl}, H_{nm}\} = 0$

Тем самым наличие классической r-матрицы гарантирует инволютивность уравнения движения.

Система Калоджеро

Система задается гамильтонианом из N взаимодействующих частиц на комплексной прямой:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \nu^2 \sum_{i<j} \frac{1}{(q_i - p_i)^2}$$

Координаты импульса – комплексные переменные:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Напишем матрицу

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + \nu(1 - \delta_{ij}) \frac{1}{q_i - p_j}$$

При k=2 запишем гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2} trL^2 = \frac{1}{2}\sum L_{i\,i}^2 + \frac{1}{2}\sum L_{ij} L_{ji}$$

Получаем, что данный гамильтониан описывает нашу систему. Если выписать все гамильтонианы при $k = 1 \ldots N$, то они окажутся в независимости и инволюции.

Если добавим спектральный параметр Z, то матрица примет вид:

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + \nu(1 - \delta_{ij})(\frac{1}{q_i - p_j} + \frac{1}{z})$$

Обобщение системы можно рассматривать только в том случае, если каждая частица будет нести дополнительные степени свободы. Тогда спектральный параметр даст дополнительный интеграл движения.

Напишем M-матрицу системы.

$$M_{ij} = \nu \delta_{ij} d_i - \nu(1 - \delta_{ij}) \frac{1}{(q_i - p_j)^2}$$

di подобрана таким образом, что сумма всех элементов по строке или столбцу будет равна 0.

Если рассмотреть гамильтониан, то из него следуют такие уравнения:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i$$

$$\ddot{q}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{i<j} \frac{2\nu^2}{(q_i - p_i)^3}$$

Если записать N уравнений движения в форме Лакса. То можно заметить, что уравнений Лакса получается N^2, а уравнений движения нужно N. Тогда получится, что диагональная часть эквивалентна уравнениям движения, а недиагональная – тождество.

С лекции 1, знаем, что система гамильтониана имеет тригонометрическое $\frac{1}{sin^2(q_i - p_j)}$ и эллиптическое $\mathscr{P}(q_i - p_j)$ обобщение.

Введем обозначение ϕ-функции:

$$\phi(z, q_1 ... q_n) = \frac{1}{q_i - p_j} + frac1z$$

А в M-матрице:

$$f(z, q_1 ... q_n) = \partial_q \phi(z, q_1 ... q_n)$$

Для того, чтобы убедиться, что уравнения движения совпадают с уравнениями Лакса, введем тождество:

$$\phi(z, q_{ik}) f(z, q_{kj}) - f(z, q_{ik}) \phi(z, q_{kj}) = \phi(z, q_{ij}) (\frac{1}{(q_{ik})^2} + \frac{1}{(q_{ik})^2})$$

Оно обеспечивает, что вся недиагональная часть матрицы в уравнении Лакса сократиться.

Упражнение 3.1. *Проверить выполнение тождества для $N^2 - N$ уравнений для любого z.*

Отображение момента гамильтоновой редукции

Это процедура, которая позволяет по симметриям системы строить законы сохранения. Процедура аналогична теореме Нетер в лагранжевой формулировке. Теорема Нетер имеет две формулировки, связанные с:

1) локальными симметриями Следуют сохраняющиеся токи

2) глобальными симметриями Пример: пространство времени Законы сохранения импульса, момента импульса, энергии

Вернемся к гамильтоновой механике. В ней работаем со скобкой Пуассона, записанной через векторное поле: $\{f,g\} = i_{vf}dg$

При этом тождество Якоби эквивалентно $[V_f, V_g] = V_{f,g}$

Также вместо скобки Пуассона определяли симплектическую структуру:

$$i_v\omega = -df$$

Для любого векторного поля можно записать производную Ли, действующую на 2-форму:

$$L_\xi\omega = i_\omega + di_\xi\omega$$
$$\xi = V_f$$

, а значит $L_\xi\omega = 0\breve{}$.

Для T*G касательным пространством к группе будет алгебра Ли (T_1G) Введем понятие: Строго гамильтоновое векторное поле – это поле, которое строится по элементу кси из алгебры Ли и удовлетворяет следующим свойствам:

1) скобка Пуассона, отвечающая гамильтонианам паре элементов, есть гамильтониан коммутатора этих элементов $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{\xi,\eta}$

2) линейно $H_\xi, \eta = H_\xi + H_\eta$

Из линейности следует, что гамильтониан можно представить в виде:

$$H_\xi = \langle\mu(x), \xi\rangle$$

Рассмотрим векторную систему, заданную гамильтонианом h, который инвариантен относительно преобразований, порожденных векторными полями, построенными по H_ξ. Это значит, что производную Ли, действующую на 2-форму равна 0.

$$L_\xi V_h = 0 = [H_\xi, H_h] = V_{\xi,h}$$

Отображение момента $\mu(x)$ из фазового пространства есть элемент из коалгебры Ли.

Пример 1: Рассмотрение глобальной симметрии и вывод уравнения импульса

Рассмотрим симплектическую структуру:

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3 = dp \wedge dq$$

$$g = SO(3), gg^T = 1$$

Тогда

$$p^T = p^T g^T (p \to gp)$$

$$g = e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon$$

$$p^T \to p^T + p^T \varepsilon^T = p^T + p^T \varepsilon$$

$$q \to q + \varepsilon q$$

$$i_\varepsilon \omega = -p^T \varepsilon dq - dp^T \varepsilon q = -\sum p_i \varepsilon_{ij} dq_j + dp_i \varepsilon_{ij} q_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum (p_i \varepsilon_{ij} dq_j + dp_i \varepsilon_{ij} q_j - p_j \varepsilon_{ij} dq_i - dp_j \varepsilon_{ij} q_i) = -\frac{1}{2}\sum \varepsilon_{ij} d(p_i q_j - p_j q_i) = \langle \varepsilon, \mu \rangle$$

В итоге в качестве момента отображения получили момент импульса. Если система инвариантна относительно вращения, то это будет закон сохранения.

Пример 2: Вывод и решение системы Калоджеро

На T*ag: $\omega = tr(dX \wedge dY)$

$T * G : \omega = d\langle S g^{-1} dg \rangle$

$$X \to f X f^{-1} = \bar{X}$$

$$Y \to f X f^{-1} = \bar{Y}$$

$$tr(dX \wedge dY) = tr(\bar{X} \wedge \bar{Y}) + dtr([\bar{X}, \bar{Y}] d f f^{-1})$$

Знаем, что

$$\bar{X} = dfXf^{-1} + fdXf^{-1} - fdXf^{-1}dff^{-1}$$

Утверждение 3.

$$d\langle S dg g^{-1} \rangle = d\langle \bar{S} \bar{d} g \bar{g}^{-1} \rangle - d\langle \bar{S} \bar{d} f \bar{f}^{-1} \rangle$$

Получаем, что 1-форма инвариантная относительно правых сдвигов со значениями в алгебре Ли. То, что с ним спаривается из ко-алгебры Ли – моменты, порождающиеся при действии 1 и 2.

$$\omega = \bar{\omega} + dtr(([\bar{X}, \bar{Y}] - \bar{S}) d f f^{-1})$$

Запустим дикамику:

$$H = \frac{1}{2} tr(x^2)$$

$$\{X_1, Y_2\} = P_{12}$$

Воспользуемся симметриями и проведем редукцию по ней:

$$\dot{Y} = X\dot{X} = 0 = \ddot{Y}$$

Зафиксируем S так, что Y имеет диагональный вид:

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \bar{S}$$

$$\bar{X}_{ij}(q_j - q_i) = \bar{S}_{ij}$$

$$\bar{X}_{ij} = p_i \delta_{ij} + \frac{\bar{S}_{ij}}{q_i - q_j}(\delta_{ij})$$

Получилась система X_{ij} взаимодействующих частиц Колоджера со спином. Если записать гамильтониан, а X_{ij} принимать как матрицу Лакса:

$$\frac{1}{2} trL^2 = \frac{1}{2} \sum p_i^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ji}}{(q_i - q_j)^2}$$

Теперь свободная динамика, которая была на исходных полях, на редуцированном пространстве превратится в нелинейную динамику. На уровне матричных уравнений система была свободна, а на редуцированных переменных p и q – это система Калоджеро, то есть это системы дифференциальных уравнений с нетривиальным потенциалом взаимодействия.

$$\dot{Y} = gQg^{-1} + gQg^{-1} - gQg^{-1}gg^{-1} = g(-[Q, g^{-1}g])g^{-1} = A$$

$$L = g^{-1}Ag$$

$$\dot{L} = -g^{-1}g^{-1}g^{-1}Ag + g^{-1}Ag = [L, M]$$

L – матрица Лакса системы Калоджеро-Мозера Матрица Лакса появляется только в том случае, когда Y диагонализуется.

$$[Q, M]_{ij} = (q_i - q_j)M_{ij} = -\frac{\nu}{q_i - q_j}$$

В итоге получается: в момент есть условие $Y = At + B$ Благодаря общему сопряжению в момент времени t=0 пусть B имеет диагональный вид. Тогда из всего следует, что $A = L(0)$ – матрица Лакса в начальный момент времени.

$$Q(t) = g^{-1}(t)(L(0)t + Q(0))g(t)$$

То есть $Q(t)$ имеет собственные значения такие же как сумма матриц. Для того чтобы найти положение координат частиц Калоджеро, нужно записать матрицу: $Q(t) = L(0)t + Q(0)$ и найти ее собственные значения.

Лекция 4 Многочастичные интегрируемые системы

Система Калоджеро – это модель, заданная гамильтонианом, описывающим N частиц.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \nu^2 \sum_{i<j} \frac{1}{(q_i - p_i)^2}$$

Решение системы в пространстве $T*ag$, где алгебра Ли может быть представлена, как Sl_n или gl_n или матрица комплекснозначная. То есть рассматриваем фазовое пространство, состоящее из пары N^2 матриц. Зададим на них симплектическую, каноническую структуру ($\Omega = \omega_1 + \omega_2$): Для первого слагаемого:

$$\omega = tr(dX \wedge dY)$$

$$X \to fXf^{-1} = \bar{X}$$

$$Y \to fXf^{-1} = \bar{Y}$$

Для второго слагаемого: $\omega = dtr(Sh^{-1}dL)$- *форма Кириллова* на ко-касательном расслоении к группе

$$H = \frac{1}{2}tr(x^2) \text{— динамика на группе}$$

Также определили отображение момента, которое генерируется преобразованиями: $\mu_1 = [X,Y], \mu_2 = -S$

Решение уравнения: $[X,Y] = S$ Где Y привели к диагональному виду, а X перешел в матрицу Лекса. Если $S_{ii} = \nu$, то вид решение принимает:

$$L_{ij} = p_i\delta_{ij} - \frac{S_{ij}}{q_i - q_j}(1 - \delta_{ij})$$

Если ранг(S) = 1, то S_{ij} можно убрать калибровочным преобразованием, потому что $S_{ij} = \varepsilon_i\eta_j$

В итоге получаем:

$$L_{ij} = p_i\delta_{ij} - \frac{\nu}{q_i - q_j}(1 - \delta_{ij})$$

Стартовали со свободного движения на большом пространстве T*g ($2N^2$), использовали симметрии пространства (аналоги поворотов, сопряжения групповыми элементами, ко-присоединенное действие группы g), получили закон сохранения, отвечающее симметриям относительно этого действия, решили их и в итоге получили фазовое пространство меньшей размерности (2N), где движение можно рассматривать как нетривиальное.

Можно рассуждать, какие бывают пространства с симметриями, на которых можно было бы задавать свободным аналогичным способом свободную динамику. Так

же эти пространства вместе со своей Пуассоновой или симплектической структурами обладало групповыми симметриями, по ним проводить редукцию и получать интегрируемую систему.

Семейства систем

Существуют семейства систем, которые можно получить таким образом:

1) Бесспиновая модель

2) Спиновая модель

Это условное название для переменных. Они исходно связаны с пространством T*g, с орбитой алгебры Ли, факторизуется по связям, дополнительным симметриям, которые генерируются действием Картена (преобразование диагональной матрицы, которое позволило из спинового случая получить бесспиновый ранга 1). Если ранг S равен 1, то степени свободы, связанные с S останутся.

Строго говоря, они устроены так, что в произвольном случае числитель не интерпретируется, как взаимодействие спинов, связанных с каждой из частиц. То есть фазовое пространство делится на две части, один – p,q (канонически сопряженные переменные для частиц), а второй – орбита ко-присоединенного действия (матрица S с фиксированными собственными значениями).

Если в этой матрице S N-1 элемент совпадают, то получаем случай, отвечающий бесспиновой модели. Если произвольный набор собственных значений, то пространство нужно профакторизовать по Картеновской подгруппе. Это означает: наложить связи и зафиксировать калибровку (зафиксировать присоединенное действие диагональной матрицей). Диагональная матрица присоединенным действием сохраняет связи. В случае gl_2 связей матрицы достаточно, чтобы нейтрализовать все степени свободы.

Пусть есть матрица 2×2. Все собственные значения – Казимиры. trS , trS^2 зафиксированы. Следовательно, остаются 2 независимых переменных. С учетом связей их не остается совсем. В результате редукции матрица переходит в:

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим в бесспиновой модели потенциал: Представляет собой рациональный вид $\frac{1}{q_i - q_j}$, который имеет разные виды обобщения

1) Нерелятивистская деформация

$$H^{RS} = \sum_{i=1}^{N} e^p \prod_{k\neq i} \frac{q_i - p_k + \gamma}{q_i - p_k}$$

а) Тригонометрический

$$\prod_{k\neq i}\frac{sh(q_i-p_k+\gamma)}{sh(q_i-p_k)}$$

б) Эллиптический

$$\prod_{k\neq i}\frac{\Theta(q_i-p_k+\gamma)}{\Theta(q_i-p_k)}$$

2) Релятивистская деформация Это система, в которых матрица Лакса будет групповыми элементами. Гамильтониан Рузенарса-Шнайдера имеет вид:

$$L_{ij}=\frac{1}{q_i-p_j+\gamma}e^p\prod_{k\neq i}\frac{q_i-p_k+\gamma}{q_i-p_k}$$

В данном случае зависимость от импульсов становится тригонометрической. Импульс «живет» на окружности. Сдвиг на $2\pi i$ сохраняет экспоненту, то есть импульс считается переменной на окружности.

а) Тригонометрический

$$\prod_{k\neq i}\frac{1}{sh^2(q_i-p_j)}$$

б) Эллиптический

$$\mathscr{P}(q_i-q_j)$$

Факторизация решетки – отождествление сторон решетки и, следовательно, получаем тор (Эллиптический). Если одру из сторон будем устремлять к бесконечности, то получится цилиндр (Тригонометрический). В рациональном случае получим сферу Римана.

Матрица Лакса в гамильтониане Рузенарса-Шнайдера

$$L_{ij}=\frac{1}{q_i-p_j+\gamma}e^p\prod_{k\neq i}\frac{q_i-p_k+\gamma}{q_i-p_k}$$

Покажем, что матрица Лакса в пределе воспроизведет систему Калоджеро. Введем обозначение $\gamma=\frac{v}{c}$, где c – размер окружности, на которой живет импульс, равный скорости света, стремящейся к бесконечности.

$$i=j: L_{ij}=\frac{1}{\gamma}e^p\prod_{k\neq i}(1+\frac{p_i}{c}+o(\frac{1}{c^2}))$$

$$\prod_{k\neq i}(1+\frac{p_i}{c}+o(\frac{1}{c^2}))=\prod_{k\neq i}(1+\frac{1}{c}\frac{1}{q_i-p_k})\to 1+\frac{1}{c}\sum_{k\neq j}\frac{1}{q_i-p_k}$$

Сумму можем убрать в переопределение $p_j : p_j \to p_j + \nu \sum_{k \neq j} \frac{1}{q_i - p_k}$

Это преобразование каноническое (не изменяется скобка с Q), поэтому с учетом переопределения на диагонали будет стоять $\bar{p}_j$.

$$L^{RS} \to 1 + \frac{1}{c} L^C M$$

Смысл предела: разложили групповой элемент в окрестности 1, получили Ли алгебраической элемент. Параметр деформации можно понимать как параметр, по которому раскладывается групповой элемент в окрестности 1 для того, чтобы воспроизвести ко-касательное пространство (алгебру Ли).

Покажем, что матрица Лакса является групповым элементом.

Пространство имеет вид: T*G

$$\omega_1 = dtr(Sg^{-1}dg)$$

$$\mu_1 = g^{-1}Xg - X$$

$$\omega_2 = dtr(SL^{-1}dL)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$g^{-1}Xg - X = S - \gamma 1$$

Можем рассмотреть 2 случая: 1) Диагонализовать матрицу g: $g = e^Q$, где Q – диагональная матрица из элементов-координат

$$ij : X_{ij}e^{-q} - X_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij}\gamma$$

$$S_{ij} = const$$

$$X_{ij} = \frac{S_{ij}}{e^{-q} - 1}$$

$$L_{ij} = \frac{S_{ij}}{sh(\frac{q_i - q_j}{2})}$$

2) Найти x с помощью матрицы g:

$$Xg - gX = gS - \gamma g$$

$$X = \Lambda ij : g_{ij}(\lambda_i - \lambda_j + \gamma) = (gS)_{ij}g_{ij} = \frac{f_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j + \gamma}$$

Систему, которую называем релятивистской, это система, у которой матрица Лакса – групповой элемент. L – есть результат редукции, то есть решение системы уравнений на групповой элемент.

Можно определить так же фазовое пространство – дубль Гейзенберга, которое можно рассматривать, как произведение двух переменных-групп. Тогда получим

$$g_1 g^{-1}{}_2 g^{-1}{}_1 g_2 = e^{\gamma(}e^T - 1), g_{ij} = e^q \delta_{ij}$$

Решать можно относительно g1 или g2, привести к диагональному виду и получим тригонометрическую систему Рузенаруса. Это примеры конечномерные. Фазовые исходные пространства, на которых описывали исходную динамику – пространство размерностью $2n^2$, а получившееся редуцированное – $2n$.

Афинизация

Пример, когда исходное фазовое пространство бесконечномерное: $T*\breve{(Lg)}$ - к центрально-расширенной алгебре петель, $T*\breve{(LLg)}$ - к центрально-расширенной алгебре двойных петель, $T*\breve{(LG)}$ - к центрально-расширенной группе петель, $T*\breve{(LLG)}$ - к центрально-расширенной группе двойных петель (двухпетлевой группе), афинный дубль Гейзенберга.

Суть афинизации: В предыдущих обсуждаемых системах нет спектрального параметра, даже в спиновом случае. Когда есть спиновые переменные, интегралов не хватает. Интегралы движения независимые – следы степеней L. Если L – матрица N на N, то у нее только N независимых собственных значений. А значит, есть только N независимых интегралов движения. Но N – количество степеней свободы, связанных с частицами (N координат и N импульсов). Если будут еще спины, это означает, что матрицы Лакса размером N на N не хватает, не хватит интегралов движения.

Существуют системы, заданные Лаксом, которые есть матрично-значные функции от переменной z (спектрального параметра). Из наличия классической r-матрицы следует, что следы степеней L в разных точках находятся в инволюции. Получаем, что каждая степень будет раскладываться в семейство гамильтонианов. За счет этого можно набрать нужное количество интегралов движения.

Смысл афинизации – разработать спектральный параметр. Введем пару переменных: Φ (поле Хикса - функция от $z\bar{z}$) и (компонента связаности $\bar{\partial}$ и функция от $z\bar{z}$ на торе).

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} \delta\Phi \wedge \delta\bar{A}$$

С учетом спиновой переменной:

$$\omega = \int\limits_{\Sigma} \delta\Phi \wedge \delta\bar{A} + \int\limits_{\delta} (z\bar{z})\delta tr(SL^{-1}dL)$$

Получаем, что степени свободы локализованы в одной точке. Поэтому существует понятия об обмеченных точках на кривой и в них «сидят» спиновые степени свободы.

$$\Phi \to f\Phi f^{-1}$$

$$\bar{A} \to f\bar{A}f^{-1} - \bar{\partial}ff^{-1}$$

$$\triangle\omega = tr(\mu^{-1})$$
$$\mu_1 = -[\Phi, \bar{A}] + \bar{\partial} = S\delta^2(z\bar{z})$$
$$\mu_2 = S\delta^2(0)$$
$$\Phi = \frac{\Theta(0)\Theta(z+q_i-q_j)}{\Theta(z)\Theta(q_i-q_j)} S_{ij} e^{2\pi}$$

Существует случай алгебры DIM (Динка-Иньиакара-Меки) – эллиптическая зависимость от импульса. В системах Калоджеро зависимость от импульса рациональная, то есть импульс в гамильтониан входит как импульс пополам, в системе Рузенарса – тригонометрическая (экспонента от импульсов или косинусы гиперболические). Но известно, что теоретико-группового описания у алгебры DIM нет.

Лекция 5 Квадратичная r-матричная структура. Одномерный магнетик.

Системы, содержащие только спиновые степени свободы

Существуют системы частиц спиновые и есть класс систем, в которых присутствуют только спиновые степени свободы. Пример классическое определение r-матрицы:

Пусть

$$r_{12}(z,w) = \frac{P_{12}}{z-w}$$

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), r_{12}(z,w)] - [L_2(w), r_{21}(z,w)]$$

Это линейная скобка по L-элементам, для которой можно утверждать:

1) Достаточное условие инволютивности интегралов движения

2) Из нее следует, что r удовлетворяет классическую уравнению Янга-Бакстера (достаточное условие для выполнения тождества Якоби на

$$\{\{L_1, L_2\}, L_3\} + cycl = 0$$

3) Это форма записи скобки Пуассона Ли на $gl*_n$ на коалгебре Ли

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj}$$

Скобки умножали на тензорные произведения, суммировали и получали скобки:

$$\{S_1, S_2\} = [P_{12}, S_1]$$

Эта скобка работает при условии, что L и r можно представить в виде:

$$r_{12}(z,w) = \frac{P_{12}}{z-w}, L(z) = \frac{P_{12}}{z-w}$$

Рассмотрим $L(z)$:

$$trL^k(z) = \frac{trS^k}{z^k},$$

где числитель - функция Казимира.

Рассмотрим пример матрицы размером 2×2.

1) Изотропный (xyz)

$$L = \frac{P_{12}}{z-w} = \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{3} \sigma_i S_i$$

2) Частично анизотропный (xyz)

$$L = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(z)\sigma_i S_i, \text{ где } \phi_1 = \frac{1}{shz}, \phi_2 = \frac{1}{shz}, \phi_3 = cthz$$

Рациональный предел ϕ-функций дает 1/z.

3) Полностью анизотропный (xyz)

$$L = \sum_{i=1}^{3} \phi_i(z)\sigma_i S_i$$

$$\Phi = \frac{\Theta(0)\Theta(z+q_i-q_j)}{\Theta(z)\Theta(q_i-q_j)} S_{ij} e^{2\pi}$$

Где омега альфа – полупериоды на эллиптической кривой (три нетривиальных).

Можно заметить уже нетривиальную динамику. Уравнение динамики будет задаваться уравнением волчка Эйлера. В эллиптическом случае будет устроено

$$\dot{S} = [S, J(S)], J(S) = \sum S_i \sigma_i J_i, J_i = \mathscr{P}(q)$$

У этих систем существует релятивистское обобщение. Отличие состоит в том, что фазовое пространство будет связано с группами. В этом обобщении работает квадратичное RLL-соотношение. Скобка в этом случае будет иметь вид:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [L_1(z), L_2(w), r_1, 2(z,w)]$$

Для данной скобки будут верны первые 2 свойства. Так как это тоже классическая r-матрица. То есть это еще одна Пуассонова структура r-матричная на пространстве матриц Лакса. Но здесь присутствует произведение L элементов, которое отсутствует в алгебре, а есть в группе, значит правильнее думать про L, как про групповые элементы. Также появляется еще одно свойство, характерное только для данной скобки.

Рассмотрим набор $L^k(z)$, для которых выполняется скобка:

$$\{L_1^k(z), L_2^k(w)\} = [L_1^k(z), L_2^k(w), r_1, 2(z,w)]$$

И выполняется условие:

$$\{L_1^j(z), L_2^k(w)\} = 0$$

Тогда квадратичная скобка будет и на матрицу монодромии

$$\{T_1(z), T_2(w)\} = [T_1(z), T_2(w), G_1, 2(z,w)]$$

Это означает, что получается «конструктор». Можно рассмотреть набор систем, имеющих квадратичную скобку, определить на них скобку Пуассона и построить новую, перемножив все $L^k(z)$. В итоге получится матрица монодромии.

$$T(z) = L^n(z)L^{n-1}(z)...L^2(z)L^1(z) \text{ - трансфер-матрица}$$

Можно сдвинуть z на нединамические числа (параметры неоднородности), от этого ничего не изменится.

Упражнение 5.1. *Проверить, что мультипликативная запись скобки*

$$\left\{L_1^2(z-\varepsilon_2)L_1^1(z-\varepsilon_1), L_2^2(z-\varepsilon_2)L_2^1(z-\varepsilon_1)\right\}$$

В матрице монодромии каждый L(z) можно разложить в ряд Тейлора при $\eta \to 0$. В данном случае сумма – системы Годена, а в релятивистском обобщении – классические спиновые цепочки.

Система Годена

$$L(z) = \sum \frac{S^k}{z-\varepsilon_k}$$

Скобка Пуассона Ли имеет вид:

$$\left\{S_1^k, S_2^n\right\} = \delta^{kn}[P_{12}, S_1^k]$$

Посчитаем гамильтонианы:

$$H(z) = \frac{1}{2}trL^2(z) = \frac{1}{2}tr\sum_{k,l}\frac{S^kS^l}{(z-\varepsilon_k)(z-\varepsilon_l)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l}\frac{tr(S^k)^2}{(z-\varepsilon_k)^2} + \frac{1}{(z-\varepsilon_k)(z-\varepsilon_l)} = (\frac{1}{(z-\varepsilon_k)} + \frac{1}{(z-\varepsilon_l)})\frac{1}{(\varepsilon_k-\varepsilon_l)} + \frac{1}{2}tr\sum\sum_{k,l}\frac{1}{(z-\varepsilon_k)}\frac{tr(S^kS^l)}{(\varepsilon_k-\varepsilon_l)}$$

$$\frac{1}{z-\varepsilon_k} : H_k = \sum_{l\neq k}\frac{tr(S^kS^l)}{(\varepsilon_k-\varepsilon_l)} \text{ \textbf{- гамильтонианы Годена}}$$

Упражнение 5.2. *Показать правильность равенств:*

$$i \neq k : \frac{\partial}{j}S^k = \left\{H_j, S^k\right\} = \frac{[S^k, S^i]}{\varepsilon_k - \varepsilon_j}$$

$$i = k : \frac{\partial}{k}S^k = \left\{H_j, S^k\right\} = -\sum_{j\neq k}\frac{[S^k, S^j]}{\varepsilon_k - \varepsilon_j}$$

Матрица монодромии

Пусть есть

$$T(z) = L^n(z)L^{n-1}(z)...L^2(z)L^1(z) \text{ - трансфер-матрица}$$

Пусть есть окружность: Давайте расположим ϕ_i (комплексные числа) на окружности так, что каждому ϕ_i соответствует L_i, S_i, ε_i где Li зависит от спиновых переменных и от ε и каждому узлу присвоим вектор.

Задача тогда будет сформулирована таким образом:

$$\phi_2 = L^1\phi_1$$

$$\phi_3 = L^2\phi_2 = L^2L^1\phi_1$$

$$\phi_n = L^{n-1}\phi_{n-1} = L^{n-1}...L^1\phi_1$$

В результате, из-за того, что прошел круг, то ϕ_{n+1} можно оттождествить с ϕ_1, а с другой стороны ϕ_{n+1} - матрица мондромии подействовавшая на саму себя. То есть это задача нахождения собственных значений для матрицы мондромии.

Почему цепочка?

Представим линию, в которой каждая точка взаимодействует только с соседней. Такие системы обычно называются цепочками. Тогда окружность, которая представлялась ранее – обобщенная цепочка.

Цепочка Гейзенберга

Пусть существует точка z_0, такая что для любого $kL^k(z_0)$ – матрица ранга 1.

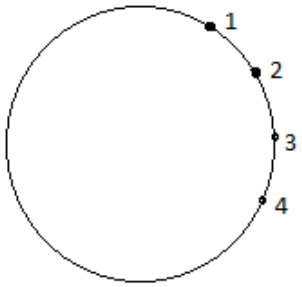

Рис. 5.1. Окружность с набором точек

Если бы это условие выполнялось, то в какой-то одной точке матрицы на окружности выродились. Тогда определители их равны 0 и могут быть представлены в виде произведения вектора на ковектор. Можно заметить, что рядом стоят вектор и ко-вектор из соседних узлов.

Если достроить эту комбинацию до конца и взять логарифм, то произведение заменится суммой, слагаемые которой будут характеризовать взаимодействия только с соседними узлами. Получается цепочка Гейзенберга, описывающая локальное взаимодействие.

Магнетик Гейзенберга

Если же расстояние между узлами обозначить, как $\delta \to =$.

Тогда набору матриц будет соответствовать $1+1$ поле $S(x)$, где – точка на окружности.

$$\{S_1(x), S_2(y)\} = [P_{12}, S_1(x)]\delta(x-y) \text{ - магнетик Гейзенберга}$$

Если записать $L_k = 1 + \dots$ и проделать аналогичные операции, то получится непрерывный магнетик Гейзенберга, то есть система, описывающаяся уравнением

$$\partial_t S = [S, S_{xx}]$$

Если матрица 2 на 2, то можно записать через матрицы Паули:

$$S = \sum \sigma_i \delta_i$$

В тригонометрический и эллиптический случаях система дополняется и имеет в итоге вид:

$$\partial_t \vec{S} = \vec{S} \times \partial_t^2 \vec{S} + \vec{S}(\vec{S})$$

Это уравнение Ландау-Лившитца, которое описывает динамику векторов намагниченности в магнетике. S (вектор) – вектор намагниченности в ферромагнетике. Второе слагаемое – обменное взаимодействие и второе – вклад от анизотропии. В изотропном случае третье слагаемое 0.

В итоге получаются полевые уравнения. В явном виде в них отсутствует уравнение Лакса, а матрица Лакса станет оператором и вычисление интегралов, гамильтонианов и законов сохранения станет сложнее.

Матрица Лакса

Запишем уравнение Захарова-Шабата в изотропном случае в форме Лакса (нулевой кривизны).

$$\partial_t U - \partial_t V = [U, V]$$
$$[\partial_t + V, \partial_x + U] = 0$$

Упражнение 5.3. *Показать правильность равенств:*

$$H = \frac{1}{2}\oint dxtr(S^2(x))$$

Убедимся, что уравнение движения воспроизводится гамильтонианом:

$$(y) = \{H, S(y)\} = \frac{1}{2}\oint dx\{tr(S(x), S(x)), S(y)\} = \oint dxtr_1(\partial_x S_1[P_{12}, \partial_x S_1])$$

$$[P_{12}, \partial_x S_1] = \partial_x S_1 P_{12} \partial_x S_1 - (\partial_x S_1)^2 P_{12}$$

$$tr_1(P_{12}A_1) = A_2$$

$$tr_2(P_{12}A_2) = A_1$$

$$\{\partial_x S_1(x)\partial_x S_1(x), S_2(y)\} = [P_{12}, \partial_x S_1(x)]\delta(x-y) + [P_{12}, S_1(x)]\delta'(x-y)$$

$$(y) = \oint dxtr_1(\partial_x S_1[P_{12}, S_1])\delta'(x-y) = \oint dx(S_2, \partial_x S_2)\delta'(x-y) =$$

$$= -\oint dx(S, \partial_x^2 S)\delta(x-y) = -[S(y), \partial_x^2 S]$$

$$\frac{\partial_t S}{z} - \frac{\partial_t S}{z^2} - \frac{\partial_t h}{z} = [\frac{S}{z}, \frac{S}{z^2}, \frac{h}{z}] = \frac{1}{z^2}[S, h]$$

$$\frac{1}{z} : \partial_t S = \partial_x h$$

$$\frac{1}{z^2} : -\partial_x S = [S, h]$$

Для $\partial_t U - \partial_t V = [U, V]$ запишем решение:

$$U = \frac{S}{z}, V = \frac{S}{z^2} + \frac{h}{z}$$

$$Spec(S(x,t)) = \begin{pmatrix} \lambda & 00 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\partial_t \lambda = 0$$

$$S^2 = \lambda^2 1$$

$$S_x S + S_x S = 0$$

$$-S_x = [S, h]$$

$$h = -\frac{1}{4\lambda^2}[S, S_x] = -\frac{1}{4\lambda^2}(S_x S - S_x S) = -\frac{1}{2}SS_x = \frac{1}{2}S_x S$$

$$[S, h] = Sh - hS = -\frac{1}{2}S^2 S_x - \frac{1}{2}S_x S^2 = -\lambda^2 S_x \frac{1}{\lambda^2} = -S_x$$

$$\partial_t S = \partial_x h = -\frac{1}{4\lambda^2}[S, S_{xx}]$$

Лекция 6 Интегралы движения в 1+1 спиновой цепочке

Пусть есть 1+1 интегрируемая система. В простом случае – это магнетик Гейзенберга. Уравнение нулевой кривизны (коммутативность двух компонентов связанности) имеет вид:

$$[\partial_t + V, \partial_x + U] = 0$$

$$U = \frac{S}{z}, V = \frac{S}{z^2} + \frac{h}{z}$$

$$Spec(S(x,t)) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

$$\partial_t U - k\partial_t V = [U, V]$$

$$[L, \partial_t + M] = 0, = [L, M]$$

$$L = \frac{S}{z}$$

$$H_k = \frac{1}{k} trL^k = \frac{1}{kz^k} trS^k = C_k$$

$$-kS_k = [S, h]$$

$$h = -\frac{1}{4\lambda^2}[S, S_x]$$

$$S^2 = \lambda^2 1$$

$$S_x S + S_x S = 0$$

$$\partial_t S = -\frac{1}{4\lambda^2}[S, S_{xx}]$$

Его можно называть уравнением Лакса, которое можно тоже назвать уравнением нулевой кривизны.

Рассмотрим тривиальный пример из механики. В 1+1 случае замечается нетривиальная динамика.

В итоге уравнение движения магнетика Гейзенберга получает вид:

$$\{S_1(x), S_2(y)\} = [P_{12}, S_1(x)]\delta(x-y)$$

Уравнение гамильтоново: скобка Пуассона остается, но имеет вид:

$$\{S_1, S_2\} = [P_{12}, S_1]$$

Гамильтониан, отвечающий уравнению:

$$H = \frac{k^2}{16\lambda^2} \oint dx tr(S^2(x))$$

Вычисление гамильтониана

Сделаем калибровочные преобразования.

$$f^{-1}(k\partial_x + u)f = k\partial_x + f^{-1}uf + kf^{-1}\partial_x f = k\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} = f^{-1}(u + k\partial_x f f^{-1})f$$

Заметим, что $\partial_x f f^{-1}$ – удлинение, которое используется для того, чтобы убрать диагональные части, но при этом останутся свободы, чтобы действовать диагональными калибровочными преобразованиями, которые будут менять угловые элементы. За счет них можно выбрать один из них равный 1.

Упражнение 6.1.

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{12}} & 0 \\ -\frac{u_{11}}{\sqrt{u_{12}}} - k^2 \frac{\partial_x \sqrt{u_{12}}}{u_{12}} & \frac{1}{\sqrt{u_{12}}} \end{pmatrix}$$

Доказать, что при подстановке в уравнение нулевой кривизны получится нужное выражение.

Тогда

$$T = u_{21}u_{12} + u_1{}_1^2 + ku_{11}\frac{\partial_x u_{12}}{u_{12}} - k\partial_x u_{12} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial_x^2 u_{12}}{u_{12}} + \ldots$$

Первые 2 слагаемых – гамильтониан в обычной механике:

$$\frac{1}{2}tru^2 u_{21}u_{12} + u_1{}_1^2$$

Напишем уравнения, как условия нулевой кривизны. При этом есть нулевые сечения связанности, плоские сечения. Можно написать на них уравнения и тогда условием нулевой кривизны - условие совместности линейной системы уравнений (операторы коммутируют, имеются общие собственные вектора):

$$(k\partial_x + u)\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

$$(\partial_t + V)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

После калибровочного преобразования получим:

$$\left(k\partial_x + \begin{pmatrix}0 & 1\\ T & 0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\partial_t + \begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = 0$$

Распишем первую задачу.

$$k\partial_x\phi_1 = -\phi_2$$
$$k\partial_x\phi_2 = -T\phi_1$$

Помучаем уравнение Шредингера на ϕ_1:

$$(k^2\partial_x^2 - T)\phi_1 = 0$$

Перейдем к уравнению Рекати с помощью замены.

$$\phi_1 = e^{\frac{1}{k}}\int \chi(y)dy$$

$$\partial_x\phi_1 = \chi\phi_1 = -\phi_2\partial_x^2\phi_1 = (\partial_x\chi + \chi^2)\phi_1$$

Утверждение 4. χ *– производящая функция плотностей интегралов движения. То есть для того чтобы найти интеграл движения нужно найти функцию* χ.

Докажем, что

$$\oint \frac{d}{dt}\chi = \partial_x(...)$$

$$\phi_2 = -\chi\phi_1 \Rightarrow \widehat{\phi_2} = -\widehat{\chi}\phi_1 - \chi\widehat{\phi_1}$$

$$\partial_x\phi_1 + V_{11}\phi_1 + V_{12}\phi_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial_x\phi_1}{\phi_1} + V_{11} - kV_{12}\frac{\partial_x\phi_2}{\phi_1} = 0$$

$$\partial_x\phi_2 + V_{21}\phi_1 + V_{11}\phi_2 = 0 \Rightarrow \widehat{\chi}\phi_1 + \chi\widehat{\phi_1} = -V_{11}\phi_2 + V_{21}\phi_1 = (V_{21} +_{1\,1})\phi_1$$

$$\widehat{\chi} = -\chi\frac{\widehat{\phi_1}}{\phi_1} + V_{21} +_{1\,1} = -\chi(_{12} - V_{11}) + V_{21} +_{1\,1} = -\chi^2 V_{12} + V_{21} + 2_{11}$$

Воспользуемся второй задачей.

$$(\partial_t + \begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\phi_1\phi_2\end{pmatrix} = [U,V]$$

Для полного доказательства нужно написать уравнение движения в этой калибровке.

$$-k\partial_x V_{11} = V_{21} - V_{12}T$$

$$k\partial_x V_{12} = 2V_{11}$$

$$\widehat{\chi} = -\chi^2 V_{12} + V_{12}T - k\partial_x V_{11} + \chi k\partial_x V_{12} = -k\partial_x V_{11} + \chi k\partial_x V_{12} + k\partial_x \chi V_{12} = -k\partial_x(V_{11} - \chi V_{12})$$

Можно написать уравнение движения.

$$U = \frac{S}{z}$$

около z=0:

$$T = \frac{1}{z}T_{-2} + \frac{1}{z}T_{-1} + T_0$$

$$\chi = \frac{1}{z}\chi_{-1} + \chi_0 + \chi_1 z$$

$$\chi_{-1}^2 = T_{-2} = \lambda^2$$

$$\chi_0 = \frac{1}{2\chi}(T_{-1} - k\partial_x \chi_{-1})$$

$$\chi_1 = \frac{1}{2\chi}(T_0 - \frac{T_{-1}^2}{4T_{-2}^2})$$

$$T_{-2} = S_{12}S_{21} + S_1^2 1 = \frac{1}{2}tr(S^2)$$

$$T_{-1} = k\frac{S_{11}\partial_x S_{12}}{S_{12}} - k\partial_x S_{11}$$

$$T_0 = -\frac{k^2}{2}\frac{\partial_x^2 S_{12}}{S_{12}} - \frac{3}{4}k^2(\frac{\partial_x S_{11}}{S_{12}})^2$$

$$\{S_{12}, S_{11}\} = S_{12}\delta(x-y)$$

$$\{S_{12}, S_{21}(y)\} = -2S_{11}\delta(x-y)$$

$$\{S_{21}(x), S_{11}(y)\} = -S_{21}\delta(x-y)$$

Упражнение 6.2. *Доказать равенство*

$$\{\oint P, S(y)\} = k\partial_y S_{ab}$$

Упражнение 6.3. *Проверить, что*

$$\oint \chi_1 = -\frac{k^2}{2}\oint tr(S_x, S_x)$$

Данный способ задания уравнения движения обобщает ту естественную конструкцию из механики. включает в себя интеграл движения (-2), описываемые в обычной механике и прибавляются члены с производными, которые описываются теорией поля. U – полевой Лакс, компонента связанности, устроена так же как и в механике. Это явление характерно с системами, где нет степеней свободы, связанной с частицами. Это характерно для волчков, гаденов. Это связано с тем, что в механике $L(z)$ – решение уравнения.

$$\bar{\partial} L + [\bar{A}, L] = S\delta(z,)$$

При переходе от механики к теории поля.

$$0+1 : [L,Q] = S - 1_N \nu Q$$

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{q_i - q_j}(1-\delta_{ij})$$

$$1+1 : [k\partial_x + u, Q] = S - 1_N \nu$$

$$[U,Q] + kQ_x = S$$

Получаем, что L заменяется на связанность. Но можно L оценить как матрично значную функцию, удовлетворяющую уравнению на кривой, где z – локальные координаты, то $\bar{A}$ бывает разное.

В расслоениях степени 1, то уравнение – уравнение моментов на L, которые матрично значные функции, сечения, расслоения индоморфизмов некоторого векторного расслоения. Получится волчок. Тут только спиновые обобщения, то и переменные S, связанные с алгеброй или группой.

В расслоениях степени 0, $\bar{A}$ приводится к диагональному виду. Получится эллиптическая система Калоджеро. Присутствуют переменная, связанная с динамикой частиц, если спиновые обобщения, то и переменные S, связанные с алгеброй или группой.

Гамильтониан системы Калоджеро

$$H = \frac{1}{2}\oint \frac{p^2}{2}(h - q_x^2) - \frac{q_{xx}^2}{4(h-q_x^2)} + 2(h - 3q_x^2)$$

$$q_x^2 + \nu^2 = const = hResL = \begin{pmatrix} kq_x & \nu\nu & -kq_x \end{pmatrix}$$

В данном случае ν не является константой связи.

Классический способ получения магнетика Гейзенберга

Пусть есть

$$L = \frac{S}{z}$$

Если бы это условие выполнялось, то в какой-то одной точке матрицы на окружности выродились. Тогда определители их равны 0 и могут быть представлены в виде произведения вектора на ковектор. Можно заметить, что рядом стоят вектор и ковектор из соседних узлов.

Если достроить эту комбинацию до конца и взять логарифм, то произведение заменится суммой, слагаемые которой будут характеризовать взаимодействия только с соседними узлами. Получается обычная спиновая цепочка, описывающая локальное взаимодействие. Далее можно применить калибровочное преобразование, в результате которого получится магнетик Гейзенберга.

Лекция 7 Алгебры Хопфа

Квантование групп

Ранее рассматривали системы разного типа: частиц, волчков, релятивистские обобщения, цепочек, гаденов. Они связаны друг с другом и могут квантоваться. Все эти системы связаны с теоретико-групповой конструкцией – пары Лакса, элементы алгебры Ли, группы, компоненты связанности со значениями в ко-алгебре Ли. В конечном итоге, квантование этих систем – ответ на вопрос «как устроено квантование алгебры и групп»?

Теперь рассмотрим квантовые группы, как устроено квантование для всех систем в общем.

Раньше понимали, что под понятием «проквантовать группу или алгебру». Группы имели матричное представление, динамичные переменные – матрицы со значениями в группе. Использовали матричное умножение, как групповое. Матрица действует на векторных пространствах.

Рассмотрим вопрос квантования функций на группе. При этом группа – модель фазового пространства динамической системы. Сами динамические системы описываем, как функции на фазовом пространстве и квантовать будем пространство функций.

Вся наука, аксиоматический подход исходно был основан на конструкции наблюдений, которые пришли из интегрированных систем. Классики интегрируемых систем открыли квантование алгебры до того, как это было доказано математически.

С-алгебра (А)

Пусть эта с-алгебра действует над полем С (над полем комплексных чисел).

С-алгебра (А) – ассоциативная алгебра с 1. То есть векторное пространство на С с операцией умножения (двум элементам сопоставляется третий). Зададим свойства (ассоциативное умножение и наличие 1) в виде коммутативных диаграмм.

$$1a = a1 = a$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\mu : A \Rightarrow A$$

1) Аксиома ассоциативности

$$\begin{tikzcd}
\underset{a}{A} \otimes \underset{b}{A} \otimes \underset{c}{A} \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & \underset{(a,b)}{A} \otimes \underset{c}{A} \arrow[d, "\mu"] \\
\underset{a}{A} \otimes \underset{bc}{A} \arrow[r, "\mu"'] & \underset{(a,b)c}{A}
\end{tikzcd}$$

То есть диаграмма подразумевает то, каким путем мы не шли, получаем одно и тоже значение в итоге.

2) Аксиома существования единицы

Получается, что существует отображение из C в A такое, что оно удовлетворяет свойству:

$$\begin{tikzcd}
\overset{1}{C} \otimes \overset{q}{A} \arrow[r, "i\otimes id"] \arrow[d, "\cong"'] & \underset{i}{A} \otimes \underset{-q}{A} \arrow[d, "\mu"] \\
\underset{q}{A} \arrow[r, "id"'] & \underset{q}{A}
\end{tikzcd}$$

Также про нее известно:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "id\otimes i"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \arrow[r, "id"'] & A
\end{tikzcd}$$

Введем обозначение перестановки (σ) – операция перевода пары элементов из тензорного квадрата в тензорный квадрат.

$$A \Rightarrow A$$

$$\sigma(a) = b$$

Алгебры коммутативны, если

$$\mu = \mu\sigma$$

$$\mu(a) = \mu\sigma(a) = \mu(b) = b$$

Пример коммутативной алгебры.

Пусть X – гладкое многообрацие, а A – алгебра гладких функций на X. Мы находимся на поле комплексных чисел, соответственно и функции можно считать комплексными. Тогда алгебра A будет C-алгеброй относительно поточечного умножения функций.

$$fh(x) = f(x)h(x), i(x) = 1$$

Коалгебра A

Пусть эта алгебра действует над полем C.

В коалгебре есть двойственные операции, которые будем называть коумножением.

Коалгебра – векторное пространство на C с линейной операцией коумножения (построение пары коэлементу). Так же работает свойства коассоциативности и коединицы: Зададим свойства (коассоциативное умножение и наличие коединицы) в виде коммутативных диаграмм.

$$\Delta : A \Rightarrow A$$

1) Аксиома коассоциативности

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\triangle \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \triangle"'] & A \otimes A \arrow[d, "\triangle"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\triangle"] & A
\end{tikzcd}$$

2) Аксиома коединицы

$$\begin{tikzcd}
C \otimes A \arrow[r, "\varepsilon \otimes id"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\triangle"] \\
A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

Также про нее известно:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "id \otimes \varepsilon"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\triangle"] \\
A \arrow[r, "id"] & A
\end{tikzcd}$$

Из C-алгебры получить коалгебру: поменять направление стрелочек и заменить операции на кооперации.

Коалгебра будет кокоммутативна, если

$$\Delta = \sigma \Delta$$

σ нет смысла применять на один элемента, а кокоммутативность даст элемент тензорного квадрата, на котором сигма естественным образом действует.

Коалгебра естественным образом оттождествляется с множеством линейным функционалов на алгебре.

Пусть есть алгебра A – c-алгебра и l – линейный функционал.

$$A* = l : A$$

$$l(\alpha a + \beta b) = \alpha l(a) + (b)$$

$$(a) = l(\mu(a))$$
$$\varepsilon(l) = l(i)$$
$$(A)* = A**$$

Пример коалгебры.

$$A = MAT_N E_{ij}$$
$$E_{ij}E_{kl} = \mu(E_{ijkl}) = E_{il}\delta_{kj}$$
$$i = 1_N =_{k\ k}$$

Введем A* - линейные функционалы на A.

$$\{X_{ij}\} = l$$
$$X_{ij}(E_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}$$
$$\Delta(X_{ij}) =_{i\ kkj}$$

«Последнее» - определение двойственного объекта = спаривание между векторами и ковекторами (в алгебре и коалгебре).

$$\varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

Проверим, что операция ко-умножения согласуется с операцией умножения в базисных элементах матричного умножения.

$$a = E_{kb}, b = E_{mn}$$
$$l(\mu(a)) = X_{ij}(E_{kb}E_{mn}) = X_{ij}(\delta_{lm}E_{kn}) =$$
$$= \delta_{lm}\delta_{ik}\delta_{jn} = \sum \delta_{ep}\delta_{pm}\delta_{ik}\delta_{jn} =_{i\ p}(E_{kl})$$
$$X_{pj}(E_{mn}) = (_{ippj})(E_{klmn}) = (a)$$

Проверим, что аксиома коединицы согласуется с аксиомой единицы в базисных элементах в с-алгебре.

$$l(i) = l(1_N) = l(\sum_{k=1}^{N} E_{kk}) = \sum_{k=1}^{N} X_{ij}E_{kk} = \sum \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} = \varepsilon(l)$$

Биалгебра A

Это алгебра, которая объединяет в себе свойства с-алгебры и коалгебры.
Пусть эта алгебра действует над полем C.
Биалгебра A – векторное пространство со структурами алгебры (аксиомы умножение и единица), коалгебры (аксиомы коумножение и коединица) и аксиомами совместности.
Под аксиомами совместности подразумевается:

1) Аксиома совместности умножения и коумножения

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)\Delta(\mu(a)) = \mu(\Delta(a) \otimes \Delta(b))$$

2) Аксиома совместности единицы и коединицы

Зададим аксиомы совместности в виде коммутативных диаграмм.

1) Аксиома совместности умножения и ко-умножения

$$(i\alpha \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \alpha i)\Delta$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B_1,\ldots,B_p"'] & A \\
A \arrow[r, "F(B_1,\ldots,B_p)"'] & A \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}$$

2) Аксиома совместности единицы и ко-единицы

$$(i\alpha \otimes \varepsilon)\Delta(a) = (\varepsilon \otimes \alpha i)\Delta(a) = a$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B_1,\ldots,B_p"'] & A \\
A \arrow[r, "F(B_1,\ldots,B_p)"'] & A \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}$$

Обозначения Свидлера

$$\Delta(a) = {}^{\prime}_{i}\,{}^{\prime\prime}_{i} = {}^{i}_{1}\,{}^{i}_{2} = a_{12}$$

Это обозначение используется для ко-умножения. То есть действие ко-умножения на элемент алгебры получается элемент вида:

$$\Delta(a) = \sum a' \otimes a''$$

Запишем тогда коассоциативность:

$$(\Delta)\Delta(a) = \sum \left(\sum (a')' \otimes (a')''\right)''$$

$$(id \otimes \Delta)\Delta(a) = \sum a' \otimes \left(\sum (a'')' \otimes (a'')''\right)$$

Упражнение 7.1. *Проверить равенство*

$$(a_1)_1 \otimes (a_1)_{22} = a_1 \otimes (a_2)_1 \otimes (a_2)_2$$

Запишем условие совместности:

$$\sum (ab)' \otimes (ab)'' = \sum (a'b'''b'')$$

Алгебра Хопфа

Это биалгебра с биективным линейным отображением S, которое называется антипод и удовлетворяет аксиомам антипода.

Аксиома: антигомоморфизм умножения и единицы

$$S(ab) = S(b)S(a)$$
$$S(i) = i$$

По-другому умножение можно записать:

$$S(\mu(a)) = \mu(S)\sigma(a)$$

Зададим аксиому в виде коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma \quad A\otimes A \quad \mu"] \arrow[d, "S\otimes S"'] & A\otimes A \\
A & A \arrow[l, "\mu"] \arrow[u, "S"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 7.2. *Записать в виде диаграмм результат свойства гомоморфизма единицы с коединицами*

Пример алгебры Хопфа.

$$\mu(S)\Delta(a) = \varepsilon(a)i = \mu(id)$$

Пример
Пусть A – функция на группе Ли.

$$a = Fun(G)$$

$$\mu : fh(g) = f(g)h(g)$$
$$i : i(g) = 1$$
$$(g12) = f(g1g2)$$

$$\varepsilon(f) = f(e)$$
$$S : S(f)(g) = f(g^{-1})$$

Тогда утверждается, что это алгебра Хопфа. Зададим все элементы конструкции: Замечание: алгебра Хопфа коммутативна (функции С значны, перемножаем в итоге числа), но не является ко-коммутативной.

Упражнение 7.3. *Вывести элементы конструкции алгебры Хопфа.*

Свертка

Пусть есть алгебра , в котором выполняются аксиомы умножения и единицы.

Есть коалгебра , в которой выполняются аксиомы коумножения и коединицы.

И есть f и g – линейное отображение из С в А.

Тогда возможно выполнение операции:

$$f * g : C \Rightarrow C \otimes C \Rightarrow A \otimes A \Rightarrow A$$
$$\Delta(x) =_i^{\prime}{}_i^{\prime\prime}$$
$$f * g(x) = (x_i^{\prime}) g(x_i^{\prime\prime})$$

Операция может помочь проверить соотношения между умножением, перестановкой, антиподом.

Лекция 8 Группа Пуассона-Ли

Алгебра Хопфа

Что мы теперь знаем:

1) Существует алгебра A, в которой введено:

   а) ассоциативное умножение

$$\mu(\mu(a\otimes b)\otimes c) = \mu(a\otimes\mu(b\otimes c))$$

   б) единица

$$\mu(i\otimes a) = \mu(a\otimes i) = a$$

2) Существует ко-алгебра A, в которой введено:

   а) ассоциативное коумножение

$$(id\otimes\Delta)\Delta(a) = (\Delta\otimes id)\Delta(a)$$

   б) коединица

$$(id\otimes\varepsilon)\Delta(a) = a = (\varepsilon\otimes id)\Delta(a)$$

3) Существует биалгебра A, в которой введено совместность:

   а) умножения и коумножения

$$\Delta(\mu(a\otimes b)) = \mu(\Delta(a)\otimes\Delta(b))$$

   б) коумножения и единицы

$$\Delta(i) = i\otimes i$$

   в) умножения и коединицы

$$\varepsilon(\mu(a\otimes b)) = \mu(\varepsilon(a)\otimes\varepsilon(b))$$

   г) коединицы и единицы

$$\varepsilon(i) = 1$$

4) Существует алгебра Хопфа, в которой введен антипод. Главное свойство – согласование:

   а) антипода с умножением и коумножением

$$\mu(S\otimes id)\Delta(a) = \varepsilon(a)i = \mu(id\otimes S)\Delta(a)$$

б) антигомоморфизма

$$S(ab) = S(b)S(a)$$

$$S(i) = i$$

Вспомним, что свертка определялась:

$$f * g : C \Rightarrow C \otimes C \Rightarrow A \otimes A \Rightarrow A$$

$$\Delta(x) = \sum x_i' \otimes x_i''$$

$$f * g(x) = \sum f(x_i')g(x_i'')$$

Введем утверждение: Утверждение

Теорема 5. *На множестве отображений из C в A:*

$$(Ham(C,A), *, i\varepsilon)$$

, $*$ - ассоциативное умножение, а 1 в умножении – композиция единицы и коединицы в исходной алгебре и коалгебре, соответсвенно.

Докажем утверждение.

$$(id \otimes \Delta)\Delta(x) = \sum x_i' \otimes (x_i'')_j' \otimes (x_i'')_j''$$

Для начала докажем ассоциативность:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f \otimes g \otimes h)(id \otimes \Delta)\Delta(x) = \sum_{i,j} f(x_i') \otimes g((x_i'')_j') \otimes h((x_i'')_j'')$$

$$\mu(id \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h)(id \otimes \Delta)\Delta(x) = f * (g * h)$$

Запишем через коассоциативность и ассоциативность:

$$\mu(\mu \otimes id)(f \otimes g \otimes h)(\Delta \otimes id)\Delta(x) = (f * g) * h$$

Упражнение 8.1. *Вывести аналогичное утверждение для эпсилон – единица ($i\varepsilon$).*

Пусть есть пара отображений:

$$\nu, \rho \in Ham(C,A)$$

$$\nu = \rho h$$

Чтобы доказать, что $\nu = \rho$, можно доказать два равенства при существовании h.

$$\nu * h = i\varepsilon \nu * \rho = i\varepsilon$$

Докажем, что антипод является антигомоморфизмом исходя из аксиомы. Для этого нужно указать явно значения ν, ρ, h:

$\nu(x \otimes y) = S(y)S(x)\rho(x \otimes y) = S(xy), \breve{}, .$

$$C = A^2 \text{ - алгебра Хопфа}$$

$$\nu, \rho = A^2 \Rightarrow A$$

Напишем свертку, чтобы подготовить элемент, на который действуем. Свертка предполагала, что мы действуем сначала ко-умножением на алгебру, а потом отображаем и умножаем.

В этом случае *коалгебра* – тензорный квадрат алгебры Хопфа. Поэтому нужно подействовать ко-умножением на тензорный квадрат и получится четвертая степень.

1)

$$\rho * \nu = i\varepsilon$$

$$(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) = \sum x_i' \otimes x_i'' \otimes y_j' \otimes y_j''$$

$$\sigma_{21}(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) = \sum x_i' \otimes y_j' \otimes x_i'' \otimes y_j''$$

$$\mu(\rho \otimes \mu)\sigma_{23}(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) = \sum S(x_i'y_j')x_i''y_j''$$

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) \Leftrightarrow \sum (x_i'y_j') \otimes (x_i''y_j'') = \sum (xy)_k' \otimes (xy)_k''$$

$$(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) = \mu(S \otimes id)\Delta(x)\Delta(y) = \mu(S \otimes id)\Delta(xy) = \varepsilon(xy)_i$$

2)

$$\mu * \nu = i\varepsilon$$

$$\mu(\mu \otimes \nu)\sum x_i' \otimes y_j' \otimes x_i'' \otimes y_j'' = \sum x_i'y_j'S(y_j'')S(x_i'') = i\varepsilon(y)\sum x_i'S(x_i'') = i\varepsilon(y)\varepsilon(x) = i\varepsilon(xy)$$

Проверили оба равенства, а следовательно, можно сделать вывод, что $\nu = \rho$.

Упражнение 8.2. *Проверить, что аксиома $S(i) = i$ – следствие из предыдущей аксиомы.*

Функция на матричной группе

Пусть есть группа GL_n - матрицы. Алгеброй будет функция на группе – матричные элементы.

$$g = \sum E_{ij} g_{ij}$$
$$T_{ij}(g) = g_{ij}$$
$$A = Pol(GL_N)$$

A – полиномы на группе GL_n – полиномы от матричных функций элементов групп.

Определим ко-умножение, коединицу и антипод на T.

$$\Delta(T_{ij}) = \sum T_{ik} \otimes T_{kj} = T \otimes T$$
$$\varepsilon(T_{ij}) = \delta_{ij}$$
$$S(T_{ij}) = (T^{-1})_{ij}$$
$$T = \sum T_{kl} E_{kl}$$

Упражнение 8.3. *Проверить аксиомы для функции на матричной группе*

Данная алгебра будет коммутативна (перемножение чисел), но не ко-коммутативна.

Это следует из:

$$\Delta' f(g_1 \otimes g_2) = f(g_1 g_2)$$

Получаем, что результат вычисления коумножения – функция от произведения. Произведение не коммутативно, значит нет в общем случает для неабелевой группы. Поэтому нет кокоммутативности, так как перемножаются только функции.

Алгебра Хопфа универсальной обёртывающей алгебры Ли

Пусть есть алгебра Ли и берем от нее универсальную обёртывающую.

$$[x_i, x_j] = \sum_{i,j} C_{i\ j}^{k} X_k$$

Тогда получаем, что коммутатор – линейная комбинация базисных элементов. При этом структурные константы должны удовлетворять условиям симметричности и тождеству Якоби.

Универсальной обёртывающей алгебры Ли называется свободная алгебра полиномов от xi с единицей, профакторизованная по соотношению

$$X_i X_j - X_j X_i = [X_i, X_j] = \sum_{i,j} C_{i\ j}^{k} X_k$$

Где правая часть понимается, как определение алгебры Ли.

Тогда структура алгебры Хопфа устроена в виде:

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$$

$$\varepsilon(x_i) = 0$$

$$S(x_i) = x_i$$

$$\Delta(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon(i) = 1$$

$$S(i) = i$$

Полиномы первой степени – сам базис. Полиномы второй степени – все пары элементов, перебранные в произвольном порядке.

Ко-умножение в данном случае задано только на базисном элементе (на линейной функции по x).

Чтобы задать произвольный элемент, нужно использовать аксиому совместности.

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$$

То есть это способ продолжения определения ко-умножения на всю универсальную обертывающую.

$$\Delta(X_iX_j - X_jX_i) = \Delta(x_i)\Delta(x_j) - \Delta(x_j)\Delta(x_i)$$

$$\Delta([X_i, X_j]) = [X_i, X_j] \otimes 1 + 1 \otimes [X_i, X_j]$$

Покажем равенство левых и правых частей.

$$\Delta(x_i)\Delta(x_j) = (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i)(x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j) = x_ix_j \otimes 1 + x_i \otimes x_j + x_j \otimes x_i + 1 \otimes x_ix_j$$

$$\Delta(x_j)\Delta(x_i) = (x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j)(x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i) = x_jx_i \otimes 1 + x_j \otimes x_i + x_i \otimes x_j + 1 \otimes x_jx_i$$

$$[\Delta(X_i), \Delta(X_j)] = \Delta([X_i, X_j])$$

Упражнение 8.4. *Проверить аксиомы для алгебры Хопфа универсальной обёртывающей алгебры Ли.*

Можно понять, почему антипод выбрать именно таким образом.

$$S(x_i) = -x_i$$

$$\mu(S \otimes 1)\Delta(a) = i\varepsilon(a) = 0$$

$$(S \otimes 1)\Delta(x_i) = S(x_i) \otimes 1 + S(1)_i = -x_i + x_i = 0$$

Утверждение

Теорема 6. *Алгебра Хопфа универсальной обёртывающей алгебры Ли не коммутативна, но кокоммутативна.*

В данном случае алгебра Хопфа – полиномы от не коммутирующих элементов. Поэтому сама алгебра не коммутативна. А значит, не можем переставлять x между собой. Но она является ко-коммутативной.

Упражнение 8.5. *Доказать утверждение (см. книга Касселя)*

Лекция 9 Векторные поля и Пуассонова структура на группе Ли

Скобки Пуассона на группе

Рассмотрим деформацию алгебр Хопфа так, чтобы они остались теми же алгебрами, но при этом стали бы не коммутативными и не кокоммутативными.

Исходно ставили задачу о квантовании. На группе это значит, что квантуется скобка Пуассона.

То есть существует функция, которой в квантовом случае сопоставляется оператор. Сопоставление не однозначное. Поэтому нужно вводить упорядоченность, пространство, на котором действует оператор.

Естественный способ квантования состоит в том, что если есть скобка Пуассона, то при квантовании она должна так деформироваться, что воспроизводится в классическом пределе (из обычной квантовой механики).

$$f \Rightarrow \hat{f}$$

$$\{f,g\} = \lim_{t\to 0} \frac{[\hat{f},\hat{g}]}{\hbar}$$

Опишем скобки Пуассона на группе. Когда матрица Лакса является групповым элементам и отвечает релятивистским системам в механике, то существует скобка Пуассона вида

$$\{L_1,L_2\} = [L_1L_2, r_{12}]$$

В нерелятивистских системах – линейна:

$$\{L_1,L_2\} = [L_1, r_{12}] - [L_2, r_{21}]$$

Основным свойством групповой скобки:

$$\{T_1,T_2\} = [T_1T_2, r_{12}]$$

Рассмотрим классические цепочки с двумя узлами.

$$\{L_1'L_1'', L_2'L_2''\} = L_2'\{L_1'L_1'', L_2''\} + \{L_1'L_1'', L_2'\}L_2'' = L_2'L_1'\{L_1'', L_2''\} + \{L_1', L_2'\}L_1''L_2''$$

Группа Пуассона Ли

Группу Ли (G) будем называть группой Пуассона Ли, если G - Пуассоново многообразие со скобкой на функциях на группе, удовлетворяющей свойству Пуассона Ли.

Свойство:

$$\Delta(\{f_1, f_2\}) = \{\Delta(f_1), \Delta(f_2)\}$$

Тогда коумножение на тензорном квадрате можно считать:

$$\{f_1 \otimes f_3, f_2 \otimes f_4\} = \{f_1, f_2\} \otimes f_3, f_4 + f_1, f_2 \otimes \{f_3, f_4\}$$

Скобка имеет матрично-квадратичный вид. Это квадратичная скобка или скобка Склянина на группе.

Существует локальная запись скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum \pi_{ij}(x) \partial^i f \partial^j g$$

В данном случае, многообразие – группа Ли.

$$\{\phi, \psi\} = \sum \pi_{ij}(g) \partial^l \phi(g) \partial^l \psi(g)$$

Векторные поля – элементы касательного пространства к группе – алгебра Ли в единице. Поэтому берем производную функции не в 1, а в точке, сдвинутой от 1 на аргумент. Лево инвариантные и право инвариантные образуют базис в касательном пространстве.

Пусть G – группа.

$T_e G$ – касательная к пространству – алгебра Ли.

Тогда правый сдвиг действует на функцию:

$$R_h f(g) = f(gh)$$

$$\partial_x^l f = (i_v df)(g) = \frac{d}{dt} f(ge^{tx}) \Big|_{t=0}$$

А левый сдвиг действует на функцию:

$$L_h f(g) = f(hg)$$

$$\partial_x^r f = (i_v df)(g) = \frac{d}{dt} f(e^{tx} g) \Big|_{t=0}$$

Свойства:

1) Гомоморфизм из алгебры Ли в векторные поля на группе – отображение:

$$X \Rightarrow \partial_x^l$$

2) Антигомоморфизм
$$X \Rightarrow \partial_x^r$$

3) Левая производная коммутирует с левым сдвигом
$$[\partial_x^l, L_g] = [\partial_x^r, R_g] = 0$$

4)
$$\partial_x^l R_g = R_g \partial_{Ad(x)}^l$$
$$Ad_g(x) = gXg^{-1}$$

5)
$$\partial_x^r A_g = \partial_{Ad(x)}^l f(g)$$

Проверим (4) свойство.

$$\partial_x^l R_g f(h) = \partial_x^l f(hg) = \frac{d}{dt} f(hge^{tx})\Big|_{t=0}$$
$$R_g \partial_{Ad(x)}^l f(h) = R_g \frac{d}{dt} f(he^{tx}g)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(he^{tgxg^{-1}}g)\Big|_{t=0}$$
$$e^{tgxg-1} = ge^{tx}g^{-1}$$
$$e^{tA} = 1 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + ...$$
$$(gxg^{-1})(gxg^{-1}) = gx^2g^{-1}$$
$$(gxg^{-1})^2 = gx^2g^{-1}$$
$$\partial^l([x_\alpha, x_\beta]) = [\partial^l x_a lpha, \partial^l x_\beta]$$
$$\partial^r([x_\alpha, x_\beta]) = -[\partial^r x_\alpha, \partial^r x_\beta]$$

Упражнение 9.1. *Проверить 3 и 5 свойства.*

Векторные поля

Помним, что
$$\langle \partial^i, dx_j \rangle = \delta_j^i$$
Левоинвариантная 1-форма на G со значениями в алгебре Ли – форма
$$\alpha^l = g^{-1}dg$$
(при левых сдвигах альфа не меняется). Правоинвариантная 1-форма на G со значениями в алгебре Ли – форма
$$\alpha^k = dgg^{-1}$$

(при правых сдвигах альфа тоже не меняется).

$$(l+\alpha) \Rightarrow g(l+\alpha) = g + \delta g$$

Если G – матричная группа, тогда в явно виде можно написать с помощью матричных элементов левые и правые векторные поля.

$$V_{i\ j}^{l} = \sum g_{ki} \frac{\partial}{\partial g_{kj}}$$

$$V_{i\ j}^{r} = \sum g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ik}}$$

Построим такое векторное поле, для которого

$$\langle V_{k\,l}^{l}, \alpha_{ij} \rangle = \delta_k^i \delta_j^l$$

$$\alpha_{ij} = (g^{-1} dg)_{ij}$$

$$\sum \langle g_{\gamma k} \frac{\partial}{\partial g_{\gamma l}}, g^{-1}{}_{i\,\beta} dg_{\beta\, j} \rangle = \sum g_{\gamma k} g^{-1}{}_{i\,\beta} \delta_{\gamma\beta} \delta_{l\,j} = \delta_{\gamma\beta} \delta_{l\,j}$$

Тем самым проверили, что лево инвариантное векторное поле двойственно лево инвариантной 1-форме с точки зрения естественного спаривания (на матричной группе координатами являются матричные элементы).

Упражнение 9.2. *Показать, что право инвариантные векторные поля двойственны правым 1-формам.*

$$\langle V_{k\,l}^{r}, \alpha_{i\ j}^{r} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Докажем свойства:

$$V_{i\ j}^{l} = \sum g_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial g_{\alpha j}}$$

$$V_{i\ j}^{r} = \sum g_{\beta k} \frac{\partial}{\partial g_{\beta k}}$$

Доказательство (1):

$$[V_{i\ j}^{l}, V_{i\ j}^{l}] = \sum g_{\alpha i} \delta_{\gamma\beta} \delta_{l\,j} \frac{\partial}{\beta\, j} - g_{\beta k} \delta_{\beta\,\alpha} \delta_{il} \frac{\partial}{i\,j} = \delta_{k\,j} \sum g_{\alpha i} \frac{\partial}{\beta\, j} - \delta_{il} \sum g_{\beta k} \frac{\partial}{i\,j} = \delta_{k\,j} V_{i\ j}^{l} - \delta_{il} V_{k\,j}^{l}$$

Проверить, что

$$[V_{i\ j}^{r}, V_{i\ j}^{r}] = \delta_{k\,j} V_{i\ j}^{r} - \delta_{il} V_{k\,j}^{r}$$

Покажем, что левые и правые векторные поля построенные по одному элементу g между собой коммутируют.

$$\sum g_{\alpha i} \delta_{\gamma\beta} \delta_{l\,j} \frac{\partial}{\beta\, j} - g_{\beta k} \delta_{\beta\,\alpha} \delta_{il} \frac{\partial}{i\,j} = 0 g_{\alpha i} \frac{\partial}{\beta\, j} - g_{\beta k} \frac{\partial}{i\,j} = 0$$

Свойство Пуассона Ли

$$\{\phi,\psi\} = \sum \pi_{ij}(g)\partial^l\phi(g)\partial^l\psi(g)$$
$$X_\alpha \Rightarrow \partial^l_x$$

Пусть есть пуассонов бивектор. Его индексы спариваются с индксами векторных полей, которых столько же сколько элементов в алгебре Ли. И выше доказали, что дифференциалы – представления алгебры на векторные поля.

$$\pi(g) = \sum \pi^{\alpha\beta}(g)x_{\alpha\beta}$$

Теорема 7. *Свойство Пуассона Ли эквивалентно условию:*

$$\pi(g_1g_2) = \pi(g_1) + Ad_g\pi(g_1)$$

$$Ad_h(x) = hxh^{-1}$$
$$Ad_h(\pi) = \sum \pi^{\alpha\beta}(hx_\alpha h^{-1}) \wedge (hx_\beta h^{-1})$$

Доказательство.

Докажем свойство. Вспомним, что

$$f(g_1g_2) = \Delta f(g_1 \otimes g_2) = \sum f_i'(g_1)f_i''(g_2)$$

$$\{\phi(g_1g_2),\psi(g_1g_2)\} = \sum\{\phi_i'(g_1)\phi_i''(g_2),\psi_k'(g_1)\psi_k''(g_2)\} =$$

$$= \sum\{\phi_i'(g_1),\psi_k'(g_1)\}\phi_i''(g_2),\psi_k''(g_2) + \phi_i'(g_1),\psi_k'(g_1)\{\phi_i''(g_2),\psi_k''(g_2)\} =$$

$$= \sum\sum \pi^{\alpha\beta}(g_1)\partial^l_\alpha\phi_i'(g_1)\partial^l_\beta\psi_k'(g_1)\phi_i''(g_2),\psi_k''(g_2) +$$

$$+\phi_i'(g_1),\psi_k'(g_1)\pi^{\alpha\beta}(g_2)\partial^l_\alpha\phi_i''(g_2)\partial^l_\beta\psi_k''(g_2) =$$

{Перепишем получившееся выражение через определение}

$$= \sum\sum \pi^{\alpha\beta}(g_1)\left.\frac{d\phi_i'}{dt}(g_1e^{tx})\right|_{t=0}\left.\frac{d\psi_k'}{d\bar{t}}(g_1e^{tx})\right|_{\bar{t}=0}\phi_i''(g_2),\psi_k''(g_2) +$$

$$+\phi_i'(g_1),\psi_k'(g_1)\pi^{\alpha\beta}(g_2)\left.\frac{d\phi_i''}{dt}(g_2e^{tx})\right|_{t=0}\left.\frac{d\psi_k'}{d\bar{t}}(g_1e^{tx})\right|_{\bar{t}=0} =$$

$$= \sum \pi^{\alpha\beta}(g_1)(R_{g1}\partial^l_\alpha\phi(g_1))(R_{g2}\partial^l_\beta\psi(g_1)) +$$

$$+\pi^{\alpha\beta}(g_2)(L_{g1}\partial^l_\alpha\phi(g_2))(L_{g2}\partial^l_\beta\psi(g_1))R_{g1}\partial^l_\alpha\phi(g_1) =$$

$$= \frac{d}{dt}\phi(g_1 e^{tx} g_2)\Big|_{t=0} = \sum \frac{d}{dt}\phi_i'(g_1 e^{tx})\phi_i''(g_2)\Big|_{t=0} L_{g1}\partial_\alpha^l \phi(g_2) = \frac{d}{dt}\phi(g_1 g_2 e^{tx})\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum \frac{d}{dt}\phi_i'(g_1 e^{tx})\phi_i''(g_2)\Big|_{t=0}$$

$$\{\phi,\psi\}(g_1 g_2) = \{L_{g1}(\phi), L_{g1}(\psi)\}(g_2) + \{R_{g2}(\phi), R_{g2}(\psi)\}(g_1)$$

$$\partial_\alpha^l R_g = R_g^{-1}\partial_{Adg}^l$$

$$R_{g2}\partial^\alpha \phi(g_1) = R_{g2}\partial_\alpha^l R_{g2}^{-1}\phi(g_1 g_2) = \partial_{Adg}^l \phi(g_1 g_2)$$

$$\{\phi,\psi\}(g_1 g_2) = \sum \pi^{\alpha\beta}(g_1 g_2)\partial_\alpha^l \phi(g_1 g_2)\partial_\beta^l \psi(g_1 g_2) =$$

$$= \sum \pi^{\alpha\beta}(g_1)\partial_{Adg2}^l \phi(g_1 g_2)\partial_{Adg2}^l \psi(g_1 g_2) + \pi^{\alpha\beta}(g_2)\partial_\alpha^l \phi(g_1 g_2)\partial_\beta^l \psi(g_1 g_2)$$

■

Лекция 10 Пуассонова структура на группе Ли

Существует уравнение

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) + Ad_g \pi(g_1),$$

где

$$\pi(g) = \sum \pi_{\alpha\beta}(g) x_\alpha \wedge x_\beta$$
$$\pi : G \Rightarrow \Lambda^2 ag$$
$$Ad_h(\pi) = \sum \pi^{\alpha\beta}(h x_\alpha h^{-1}) \wedge (h x_\beta h^{-1})$$

Оно выводится с помощью свойства Пуассона-Ли

$$\Delta(\{\phi, \psi\})_A = \{\Delta(\phi), \Delta(\psi)\}_{A \otimes A}$$
$$\{\phi' \otimes \phi \ \psi' \otimes \psi"\} = \{\phi', \psi'\} \phi \ \psi" + \phi', \psi' \{\phi \ \psi"\}$$

из скобки

$$\{\phi, \psi\} = \sum \pi^{\alpha\beta}(g) \partial^l_\alpha \phi(g) \partial^l_\beta \psi(g)$$

Перепишем уравнение

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) + Ad_g \pi(g_1)$$

в другом виде

$$\bar{\pi}(g) = Ad_g \pi(g)$$
$$\bar{\pi}(g_1 g_2) = Ad_{g1} \bar{\pi}(g_2) + \bar{\pi}(g_1)$$

Когомологии групп Ли

Пусть $E - G$-модуль, то есть пространство, на котором действует группа G (то на чем G действует - действие группы на внешней степени алгебры).

Пусть

$$C^n(G, E) = Ham(G^n, E)$$
$$E = \Lambda^2 ag$$
$$C^n : G \times ... \times G \Rightarrow E$$

Рассмотрим элемент из

$$C^n : F(g_1, ..., g_n)$$

Введем оператор из кограницы dn – отображение d^n :

$$C^n(G,E) \Rightarrow C^{n+1}(G,E)$$

$$d^nF(g_1,...,g_n) = g_1F(g_2,...,g_n) + \sum(-1)^iF(g_1,...,g_i,g_{i+1},...,g_n) + (-1)^{n+1}F(g_1,...,g_n)$$

Упражнение 10.1. *Проверить, что*

$$d^{n+1}d^n = 0$$

Можно определить, что является ко-цепью, что границей и группы соответствующих гомологий.

$n = 0$:

$$C^0 : G^0 \Rightarrow E$$

$$(d^0r)(g) = g_1r - r$$

$n = 1$:

$$(d^1F)(g_1g_2) = g_1F(g_2) - F(g_1g_2) + F(g_1) = 0F = \bar{\pi}, E = \Lambda^2ag$$

Полученное уравнение – условие ко-цикла. Его можно разрешить в виде кограницы. Потому что выполняется условие (в упр 1).

Утверждение 10.1. *Для простых групп Ли первые гомологии $H^1(G,\Lambda^2ag)$ тривиальны.*

Гомологии – отношения ядра к образу

$$H^n = \frac{ker(d^n)}{Im(d^{n-1})}$$

Для первой гомологии получается

$$ker(d^1) = Im(d^0)$$

Это означает, что для простых групп Ли нашли все решения и они равны

$$F = d^0r(g)$$

Запишем решение в другом виде:

$$\bar{\pi}(g) = d^0r(g) = Ad_gr - r$$

$$\pi(g) = Ad_{g1}\bar{\pi}(g) = r - Ad_g^-1r$$

Проверим правильность решения, подставив его в запись свойства Пуассона Ли:

$$\pi(g_1 g_2) = r - Ad_g^- 1 Ad_g^- 1 r$$

$$\partial_A^l d_g^- 1 = \partial_x^r$$

$$\pi \Rightarrow \pi + -r + Ad_g^- 1 r$$

Подставим получившееся пи в скобку Пуассона:

$$\{\phi, \psi\} = \sum \pi^{\alpha\beta}(g) \partial_\alpha^l \phi(g) \partial_\beta^l \psi(g) =$$

$$= -\sum r^{\alpha\beta} \partial_\alpha^l \phi(g) \partial_\beta^l \psi(g) + r^{\alpha\beta} \partial_A^l d_g^- 1 \phi(g) \partial_A^l d_g^- 1 \psi(g) =$$

$$= \sum r^{\alpha\beta} (\partial_\alpha^r \phi(g) \partial_\beta^r \psi(g) - \partial_\alpha^l \phi(g) \partial_\beta^l \psi(g))$$

Упражнение 10.2.

$$[\partial_\alpha^l, \partial_\beta^r], [\partial_\alpha^l, \partial_\beta^l] = \sum C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma^l$$

$$[\partial_\alpha^r, \partial_\beta^r] = -\sum C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma^r$$

и классическое уравнение Янга-Бакстера имеет вид

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$$

Тогда показать, что это уравнение является достаточным условием для выполнения тождества Якоби для скобки

$$\{\{\phi, \psi\}\chi\} + cycl = 0$$

Матричная группа

$$T_{ij}(g) = g_{ij}$$

$$X = \rho(x)$$

$$\partial_x^l T_{ij}(g) = \frac{dT_{ij}}{dt}(ge^{tx})\Big|_{t=0} = (T(gX))_{ij} = (gX)_{ij}$$

$$\partial_x^r T_{ij}(g) = (Xg)_{ij}$$

$$E_{ij} \Rightarrow V_i^l{}_j = \sum g_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial g_{\alpha j}}$$

$$X \Rightarrow \sum x_{ij} V_i^l{}_j = \sum x_{ij} g_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial g_{\alpha j}} = \partial_x^l$$

$$\partial_x^l g_{ab} = \sum \delta_{\alpha a} \delta_{ja} x_{ij} g_{\alpha i} = \sum g_{ai} x_{ib} = (gx)_{ab}$$

Упражнение 10.3. *Проверить, что*

$$V_i^r{}_j = \sum g_{\beta k} \frac{\partial}{\partial g_{\beta k}}$$

$$\partial_x^r g_{ab} = (xg)_{ab}$$

$$\{\phi, \psi\}$$

$$\phi = T_{ab}(g) = g_{ab}$$

$$\psi = T_{cd}(g) = g_{cd}$$

$$\{g_{ab}, g_{cd}\} = \sum r^{ijkl} (\partial_x^r g_{ab} \partial_x^r d_{cd} - \partial_x^l g_{ab} \partial_x^l g_{cd}) =$$

$$\sum r^{ijkl} ((x_{ij} g)_{ab} (x_{kl} g)_{cd} - (g x_{ij})_{ab} (g x_{kl})_{cd}) = \sum r^{ijkl} ((E_{ij} g)_{ab} (E_{kl} g)_{cd} - (g E_{ij})_{ab} (g E_{kl})_{cd})$$

$$\sum_{abcd} E_{abcd} \{g_{ab}, g_{cd}\} = \{g_1, g_2\} = [r_{12}, g_1 g_2]$$

$$r_{12} = \sum r^{ijkl} E_{abcd}$$

Получили квадратичную скобку на группе – прямое следствие свойства Пуассона Ли.

Уравнение Янга-Бакстера

$$r \Rightarrow r + 1 \otimes 1$$

$$r \Rightarrow r + P_{12}$$

$$\{g_1, g_2\} = [r_{12}, g_1 g_2]$$

$$\{\{g_1, g_2\} g_3\} + cycle = [[r, r], g_1 g_2 g_3] = 0$$

$$[r, r] = \alpha [t_1, t_2]$$

t_{12} – разнесенный оператор Казимира.

$$t_{12} = \sum E_{ijji}$$

Оператор Казимира – это генератор, сумма универсально обертывающий элементов. разнесенный оператор Казимира – разносим генераторы по разным тензорным компонентам. Если справа у нас величина не равная 0, то получаем модифицированное уравнение Янга-Бакстера.

$$[r,r] = \alpha[t_1,t_2], C = \sum E_{ij}E_{ji}$$

Это расширяет класс решений. В случае конечно мерной группы Ли не так много свободы, так как r-матрицы постоянный элемент, поэтому нужно использовать всю свободу, которая присутствует.

Пример

$$C_{12} = \sum X_\alpha \otimes X_{-\alpha} + \sum_{ij=1}^{dim2} (A^{-1})^{ij} H_i \otimes H_j$$

$$Sl_2 \quad \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2$$

$$C_{12} = e \otimes f + f \otimes e + \frac{1}{2} h \otimes h =$$

$$= E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12} + \frac{1}{2} E_{11} \otimes E_{22} + \frac{1}{2} E_{22} \otimes E_{22} = P_{12} - \frac{1}{2} 1 \otimes 1$$

Упражнение 10.4. *Проверить*

$$C_{12} = \frac{1}{2}(\triangle(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$$

Утверждение 10.2. *На группе существует постоянная матрица.*

$$\triangle(x)\triangle(y) = \triangle(xy)$$

$$h = E_{11} - E_{22}$$

$$\frac{1}{2} h \otimes h = (E_{11} - E_{22}) \otimes (E_{11} - E_{22}) =$$

$$= \frac{1}{2} E_{11} \otimes E_{22} + \frac{1}{2} E_{22} \otimes E_{22} - \frac{1}{2} E_{11} \otimes E_{22} - \frac{1}{2} E_{22} \otimes E_{11}$$

$$r_{12} = \sum_{\alpha \in \triangle} X_\alpha \otimes X_{-\alpha} = \sum_{\alpha \in \triangle} X_\alpha \otimes X_{-\alpha} - X_{-\alpha} \otimes X_\alpha$$

$$Sl_2: \quad = e \otimes f - f \otimes e = E_{12} \otimes E_{21} - E_{21} \otimes E_{12}$$

Тогда простейшая r-матрица на группе будет иметь вид:

$$r_{12} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

r_{12} *удовлетворяет* mYB, $\quad r_{12} = -r_{21}$ *— антисимметрична*

$\widetilde{r}_{12} = c_{12} + r_{12}$ *— удовлетворяет обычному Янга-Бакстера*

Эта матрица будет удовлетворять модифицированному уравнению Янга-Бакстера, а так же она будет антисимметрична.

Упражнение 10.5. *Проверить, что* $[V_i^r{}_j, V_i^r{}_j] = \delta_{kj} V_i^r{}_j - \delta_{il} V_k^r{}_j$

Упражнение 10.6. *Вывести матрицу для*

$$r = e \otimes h - h \otimes e$$

Лекция 11 Q-деформация Алгебры Хопфа

Рассмотрим группу Sl_2 и на ней напишем скобку Пуассона. Sl_2 :

$$r = e \otimes f - f \otimes e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad det\ L = ad - bc = 1$$

$$\{L \otimes L\} = [r_{12} L_1 L_2]$$

У этой скобки $det\ L$ является Казимиром, поэтому его мы можем выбрать любым.

Зададим L_1 и L_2.

$$L_1 = L \otimes 1 = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ \hline c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{array}\right)$$

$$L_2 = 1 \otimes L = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & \\ c & d & & \\ \hline 0 & & a & b \\ & & c & d \end{array}\right)$$

Тогда получим набор ответов:

$$\{a,b\} = ab \quad \{b,c\} = 0 \quad \{b,d\} = bd$$

$$\{a,c\} = ac \quad \{c,d\} = cd \quad \{a,d\} = 2bc$$

Эти полученные скобки можно запараметризовать парой переменных.

$$a = e^p \sqrt{1 + e^{2q}} \quad b = c = e^q$$

$$d = e^{-p} \sqrt{1 + e^{2q}}$$

Упражнение 11.1. *Проверить, что из канонической скобки p,q следуют скобки на Sl_2.*

Тем самым получаем, что скобка задает L

Релятивистская цепочка Тода

Используя квадратичную алгебру, можно построить спиновые цепочки. То есть в каждый соседний узел «можно посадить» матрицу *Лакса* вида L и получится релятивистская цепочка *Тода*.

$$L^n = \begin{pmatrix} e^{p_n}\sqrt{1+e^{2q_n}} & e^{q_n} \\ e^{q_n} & e^{-p_n}\sqrt{1+e^{2q_n}} \end{pmatrix}$$

Возьмем нерелятивистский предел:

$$L \to 1 + e$$

$$\{l_1, l_2\} = [r_{12}, l_1 + l_2] = [r_{12}, l_1] - [r_{21}, l_2]$$

Получается обычная (нерелятивистская) открытая Тода Sl_2. Скобка должна получиться такой же, как коммутатор в алгебре Ли.

$$l = \begin{pmatrix} p & e^q \\ e^q & -p \end{pmatrix} \in Sl_2$$

$$[E_{11}, E_{12}] = E_{12}$$

$$[l_{11}, l_{12}] = l_{12}$$

Именно поэтому 11, 22 элементы – импульс, а 21 и 12 – экспонента.

Двойственность алгебры Хопфа на группе и алгебры Хопфа универсальной обертывающей

Пусть есть A – алгебра Хопфа, как функция на группе в окрестности 1. К ней можно построить двойственную с помощью спаренной и пространства линейных функционалов на A.

$$A = F_{un}(G) \quad < . > \quad l(A)$$

Утверждение

Теорема 8. *Универсальная обертывающая алгебры Ли изоморфна (алгебра обобщенных функций с носителем в единице).*

$$U(g) \cong C_e^{-\infty}(G)$$

— алгебра обобщенных функций с носителем в $e \in G$

Доказательство. Определим спаривание

$$x \in g \to \partial_x^e \quad < x, f >= \partial_x^e f(e)$$

Это спаривание естественно продолжается на произвольный элемент в универсальной обертывающей.

$$x_1 \dots x_n \in U(g) \quad < x_1 \dots x_n, f >= \partial_{x_1}^e \dots \partial_{x_n}^e f(e)$$

Есть функция в окрестности единицы на группе. Ее можно разложить в ряд Тейлора вдоль касательных векторов, которые есть элементы алгебры Ли. Действие этих векторных полей можно понимать, как спаривание с соответствующим элементом из универсальной обертывающей.

Имеются следующие свойства:

1) $\triangle l(a \otimes b) =< \triangle(l), a \otimes b >= l(ab)$

2) $l\widetilde{l}(a) =< k \otimes \widetilde{l}, \triangle(a) >$

Проверка (1):

$$a = f \quad b = g \quad l = \partial_x^l$$
$$\triangle(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$
$$\triangle(\partial_x^l) = 1 \otimes \partial_x^l + \partial_x^l \otimes 1$$
$$\triangle(\partial_x^l)(f \otimes g) = f\partial_x^l g + \partial_x^l f g = \partial_x^l(fg) =< x, fg >$$

Проверка (2):

$$\partial_x^l f(g) = \frac{d}{dt} f(ge^{tx})|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i f_i'(g) \cdot f_i''(e^{tx})\right)|_{t=0} = \sum f_i(g) \otimes \partial_x^l f_i(e)$$

$$\partial_{\widetilde{x}}^l(\partial_x^l f(g))$$

$$\partial_{\widetilde{x}}^l \partial_x^l f(e) = \sum \partial_{\widetilde{x}}^l f_i'(e) \otimes \partial_x^l f_i''(e)$$

Тем самым доказали, что двойственность выполняется на уровне алгебры Хопфа. ■

Некоммутативная деформация алгебры Хопфа на группе

Вспомним определение алгебры Хопфа:

$$G = GL_N$$
$$T_{ij}(g) = g_{ij}$$
$$\triangle T_{ij} = \sum_k T_{ik} \otimes T_{kj}$$
$$\varepsilon(T_{ij}) = \delta_{ij} \quad S(T_{ij}) = (T^{-1})_{ij}$$

Под понятием «*квантовать*» подразумевается действие над скобкой Пуассона. Пусть есть скобка Пуассона вида:

$$SL_2 \to L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad det\ L = ad - bc = 1$$

$$\{a,b\} = ab \quad \{b,c\} = 0 \quad \{b,d\} = bd$$
$$\{a,c\} = ac \quad \{c,d\} = cd \quad \{a,d\} = 2bc$$

Эти полученные скобки можно запараметризовать парой переменных.

$$a = e^p\sqrt{1+e^{2q}} \quad b = c = e^q$$
$$d = e^{-p}\sqrt{1+e^{2q}}$$

Если есть пара канонических переменных, то алгебра Гейзенберга квантуется так, что:

$$a = e^p\sqrt{1+e^{2q}} \quad \{p,q\} = 1$$

$$p \to \hat{P} \quad [\hat{P},\hat{Q}] = it$$

$$q \to \hat{Q} \quad e^{\hat{P}}e^{\hat{Q}} = e^{it}e^{\hat{q}}e^{\hat{P}}$$

$$L \to \hat{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{q+e^{2\hat{Q}+it}}e^{\hat{P}} & e^{\hat{Q}} \\ e^{\hat{Q}} & e^{-\hat{P}}\sqrt{q+e^{2\hat{Q}+it}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AD - qBC = 1$$

Получаем в итоге q-деформацию детерминанта

В алгебре скобок Пуассона детерминант был центром (элементом Казимира), тогда с любыми a,b,c,d посчитать скобку будет 0. Получаем, что и q-детерминант будет коммутировать с любым оператором A,B,C,D.

Упражнение 11.2. *Проверить утверждения:*

$$AD = 1 + qBC, \quad BC = CB$$

$$DA = 1 + q^{-1}BC, \quad AB = qBA$$

$$AC = qCA, \quad BD = qDB, \quad CD = qDC$$

R-матричное квантование

$$R_{12}\widehat{L}_1\widehat{L}_2 = \widehat{L}_2\widehat{L}_1R_{12}$$

$$\widehat{L}_1 = \widehat{L}\otimes 1 \qquad \widehat{L}_2 = 1\otimes\widehat{L}$$

R_{12} — квантовая R-матрица

$$\widehat{L}_1\widehat{L}_2 = R_{12}^{-1}\widehat{L}_2\widehat{L}_1R_{12}$$

$$L_1L_2 = L_2L_1 = L\otimes L$$

$$\widehat{L}_1\widehat{L}_2 = \sum E_{ij}\otimes E_{kl}\widehat{L}_{ij}\widehat{L}_{kl}$$

$$\widehat{L}_2\widehat{L}_1 = \sum E_{ij}\otimes E_{kl}\widehat{L}_{kl}\widehat{L}_{ij}$$

Получаем условие на R-матрицу.

$$R_{12} = \sum R^{ij,kl}E_{ij}\otimes E_{kl}$$

$$\widehat{L}_1\widehat{L}_2\widehat{L}_3 = R_{12}^{-1}\widehat{L}_2\widehat{L}_1R_{12}\widehat{L}_3 = R_{12}^{-1}\widehat{L}_2\widehat{L}_1\widehat{L}_3R_{12} = R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}\widehat{L}_2\widehat{L}_3\widehat{L}_1R_{13}R_{12} =$$

$$= R_{12}^{-1}R_{13}^{-1}R_{23}^{-1}\widehat{L}_3\widehat{L}_2\widehat{L}_1R_{23}R_{13}R_{12}$$

$$\widehat{L}_1\widehat{L}_2\widehat{L}_3 = R_{23}^{-1}\widehat{L}_1\widehat{L}_3\widehat{L}_2R_{23} = R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}\widehat{L}_3\widehat{L}_1\widehat{L}_2R_{13}R_{23} =$$

$$= R_{23}^{-1}R_{13}^{-1}R_{12}^{-1}\widehat{L}_3\widehat{L}_2\widehat{L}_1R_{12}R_{13}R_{23}$$

Чтобы совпадали получившиеся способы задания элементов из тензорного куба, введем достаточное условие – **квантовое уравнение Янга-Бакстера**:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

Определим еще одно условие: Пусть $t \to 0$

$$R_{12} = q\otimes 1 + tr_{12} + O(t^2)$$

$$O(t^2)+\widehat{L}_1\widehat{L}_2+tr_{12}\widehat{L}_1\widehat{L}_2=\widehat{L}_2\widehat{L}_1+t\widehat{L}_2\widehat{L}_1r_{12}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{[\widehat{L}_1,\widehat{L}_2]}{t}=\widehat{L}_2\widehat{L}_1r_{12}-r_{12}\widehat{L}_1\widehat{L}_2+O(t)$$
$$\{L_1,L_2\}=[L_1L_2,r_{12}]$$

Весь набор соотношений, если их возможно записать именно в этом виде, то их можно понимать как квадратичную алгебру (квадратичное соотношение), которая является деформацией квадратичной скобки Пуассона.

Алгебру, которая получилась, понимать как фактор свободной алгебры по идеалу, порожденному всеми независимыми соотношениями, записанными в матричном соотношении. Запишем R-матрицу такую, что эквивалентно набору соотношений из упражнения.

$$R_{12}=\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q\end{pmatrix}$$

Упражнение 11.3. *Проверить RLL соотношения*

$$AB=qBA,\quad AC=qCA,\quad BD=qDB,\quad CD=qDC$$
$$BC=CB\quad AD-DA=(q-q^{-1})BC$$

Запишем ко-умножение:

$$\triangle T_{ij}=(T'T'')_{ij}$$
$$\triangle(T_{ij})=\sum_k T_{ik}\otimes T_{kj}$$
$$\triangle f(g_1,g_2)=f(g_1g_2)$$

$$\triangle T_{ij}(g_1,g_2)=T_{ij}(g_1g_2)=(g_1)_{ik}(g_2)_{kj}=T_{ik}(g_1)T_{kj}(g_2)$$

$$R_{12}\triangle(\widehat{T}_1)\triangle(\widehat{T}_2)=R_{12}\widehat{T}_1'\widehat{T}_1''\widehat{T}_2'\widehat{T}_2''=R_{12}\widehat{T}_1'\widehat{T}_2'\widehat{T}_1''\widehat{T}_2''=\widehat{T}_2'\widehat{T}_1'\widehat{T}_2''\widehat{T}_1''R_{12}=$$

$$=\widehat{T}_2'\widehat{T}_2''\widehat{T}_1'\widehat{T}_1''R_{12}=\triangle(\widehat{T}_2)\triangle(\widehat{T}_1)R_{12}=\triangle(\widehat{T}_2\widehat{T}_1R_{12})$$

Упражнение 11.4. *Убедиться, что :*

$$\triangle(det_q\ L)=det_q\ L\otimes det_q\ L$$

Запишем ответ для Sl_2:

$$\triangle \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\triangle(A) = A \cdot A + B \cdot C$$

$$\triangle(B) = A \cdot B + B \cdot D$$

Упражнение 11.5. *Записать* $\triangle(C)$, $\triangle(D)$.

$$\varepsilon(T_{ij}) = \delta_{ij}$$
$$\varepsilon(1) = \varepsilon(A) = \varepsilon(D) = 1$$

$$\varepsilon(B) = \varepsilon(C) = 1$$

$$S(T) = \begin{pmatrix} S(A) & S(B) \\ S(C) & S(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -q^{-1}B \\ -qC & A \end{pmatrix}$$

$$S(T)T = TS(T) = 1$$

$$-ABq^{-1} + BA$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & -q^{-1}B \\ -qC & A \end{pmatrix} = 1$$

Лекция 12 Универсальная R-матрица

Случай алгебры Ли

Квантование на группы Sl_2 осуществляется с помощью Релей соотношений. R-матрица имеет вид:

$$R_{12}L_1L_2 = L_2L_1R_{12}$$

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q\cdot q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью соотношений деформировали закон умножения. На алгебре ли деформируем ко-умножение. Универсальная обертывающая $U(Sl_2)$ – свободная алгебра полиномов, профакторизованная по соотношениям:

$$x_ix_j - x_jx_i = \sum C_{ij}^k x_k \quad | \quad [x_i, x_j] = \sum C_{ij}^k x_k$$

Ко-умножение задавалось для генераторов в алгебре Ли.

$$\triangle(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \quad S(x_i) = -x_i$$

$$\triangle(1) = 1 \otimes 1 \qquad S(1) = 1$$

$$\varepsilon(x_i) = 0$$

$$\varepsilon(1) = 0$$

$$\triangle(ab) = \triangle(a)\triangle(b)$$

С помощью аксиом можно убедится, что заданное ко-умножение является ко-коммутативным.

$$Sl_2: \qquad X_+, X_-, H$$

$$\begin{cases} [X^+, X^-] = H & \rho(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [H, X^+] = 2X^+ & \rho(X^+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [H, X^-] = 2X^- & \rho(X^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Где X^+ и X^- - повышающие и понижающие операторы, – фундаментальное представление. Конечномерное представление – это оператор, действующий на векторном пространстве конечномерном с размерностью $2s+1$ и базисом V_k Конечномерные представления

$$dimV = 2s+1, \quad 2s \in \mathbb{Z}_+$$

$$\{U_k\} \quad K = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$$

$$s = \frac{1}{2} \quad k = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$U_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Упражнение 12.1. *Проверить равенства*

$$X^+ U_k = \sqrt{(s-k)(s+k+1)} U_{k+1}$$

$$X^- U_k = \sqrt{(s+k)(s-k+1)} U_{k-1}$$

$$HU_k = 2kU_k$$

Для деформированной системы имеем соотношения вида:

$$U_q(Sl_2)$$

1) $[X^+, X^-] = \dfrac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} := [H_q]$

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

2) $q^{\frac{H}{2}} X^+ q^{\frac{-H}{2}} = qX^+$

3) $q^{\frac{H}{2}} X^- q^{\frac{-H}{2}} = q^{-1} X^-$

4) $q^{\pm H} q^{\mp H} = 1$

$$K^{\pm} = e^{\pm \frac{H}{2}}$$

1) $[X^+, X^-] = \dfrac{(K^+)^2 - (K^-)^2}{q - q^{-1}}$

2) $K^+ X^+ K^- = qX^+$

3) $K^+ X^- K^- = q^{-1} X^-$

4) $K^+ K^- = K^- K^+ = 1$

Найдем пределы для этих соотношений:

$$\text{Предел} \quad U_q(Sl_2) \to U(Sl_2) \quad q \to 1 \quad q = e^z$$

$$1) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon H} - e^{-\varepsilon H}}{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\varepsilon H + \dots}{w\varepsilon + \dots} = H$$

Упражнение 12.2. *Получить пределы для соотношений (2) и (3).*

Утверждение 12.1. *Фундаментальное представление для Sl_2 является представлением и для $U_q(Sl_2)$. То есть генератор заменяем матрицами, действующими на двухмерном пространстве, которые порождаются парой векторов V*

Доказательство. Проверим утверждение

$$S = \frac{1}{2}$$

$$q^H = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$[H]_q = \frac{1}{q - q^{-1}} \left(\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$q^{\frac{H}{2}} = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

■

Упражнение 12.3. *Проверить соотношения 2-4.*

Запишем ко-умножение.

$$\triangle(X_+ = X_+ \otimes K_- + K_+ \otimes X_+)$$

$$\triangle(X_-) = X_- \otimes K_- + K_+ \otimes X_-$$

$$\triangle(K_\pm) = K_\pm \otimes K_\pm$$

$$\varepsilon(X_\pm) = 0 \quad \varepsilon(K_\pm) = 1$$

$$S(X_\pm = -q^{\mp 1} X_\pm \quad S(K_\pm) = K_\mp$$

Таким образом полностью определена алгебра Хопфа.

Проведем проверку аксиомы

$$\mu(s\otimes id)\triangle(a)=\mu(id\otimes s)\triangle(a)=\varepsilon(a)$$

1) $a=K_+,\quad \varepsilon(K_+)=1$

$$\mu(s\otimes id)\triangle(K_+)=\mu(s\otimes id)K_{++}=S(K_+)K_+=K_-K_+=1$$

2) $a=X_+\quad \varepsilon(X_+)=0$

$$\mu(s\otimes id)(X_+\otimes K_-+K_+\otimes X_+)=S(X_+)K_-+S(K_+)X_+=-q^{-1}X_+K_-+K_-X_+=0$$

Упражнение 12.4. *Проверить аналогичным способом остальные аксиомы.*

$U_q(Sl_2)$

$$\rho_s(X^+)U_k=\sqrt{[s-k]_q[s+k+1]_q}\;\;U_{k+1}$$
$$\rho_s(X^-)U_k=\sqrt{[s+k]_q[s-k+1]_q}\;\;U_{k-1}$$
$$\rho_s(K^\pm)U_k=q^{\pm 2k}U_k$$

В группе Sl_2 имели соотношения, где R-матрица меняла местами пару компонентов квантовых пространств.

$$R_{12}L_1L_2=L_2L_1R_{12}\quad L_1=L\otimes 1_{2*q}$$

$SL_q(2)$:

$$R_{12}=\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & q\cdot q^{-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}\hat a & \hat b\\ \hat c & \hat d\end{pmatrix}$$

Определение 12.1. *Квазикоммутативная Алгебра Хопфа*

Алгебра Хопфа называется квазикоммутативной, если $\exists\ R\in A^{\otimes 2}$, *что выполняется свойство:*

$$\triangle^{op}(x)=R\triangle(x)R_{-1}\quad \forall x\in A$$

R – универсальная R-матрица, которая действует в паре квантовых пространств.

$$R\triangle(x)=\triangle^{op}(x)R$$

Определение 12.2. *Квазитреугольная алгебра Хопфа*

Пусть задана квазикокоммутативная алгебра Хопфа с обратимым антиподом. Тогда A называется квазитреугольной, если выполняются такие свойства:

1) $(\triangle \otimes id)R_{12} = R_{13}R_{23}$

2) $(if \otimes \triangle)R_{12} = R_{13}R_{12}$

3) $(s \otimes id)R = (id \otimes s^{-1})R = R^{-1}$

Теорема 9. *Пусть A – квази-треугольная алгебра Хопфа с матрицей R. Тогда R удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера:*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

Доказательство.

$$R_{12} = R_i^{(1)} \otimes R_i^{(2)} \quad \text{(Сумма по } i\text{)}$$

$$(1 \otimes \triangle^{op})R_{12} = (1 \otimes \sigma_{23})(1 \otimes \triangle)R_{12} = (1 \otimes \sigma_{23})R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}$$

$$\triangle^{op}(x) = R\triangle(x)R^{-1}$$

$$\begin{aligned}(1 \otimes \triangle^{op})R_{12} = R_i^{(1)} \otimes \triangle^{op}(R_i^{(2)}) = R_i^{(1)}R_{23}\triangle(R_i^{(2)})R_{23}^{-1} = \\ = R_{23}R_i^{(1)}\triangle(R_i^{(2)})R_{23}^{-1} = R_{23}(1 \otimes \triangle)R_{12}R_{23}^{-1} = \\ = R_{23}R_{13}R_{12}R_{23}^{-1}\end{aligned}$$

■

Квантовый дубль Дринфельда

$$D(A) \cong A \otimes A^o$$

A^o — это пространство, которое находится как тензорное произведение алгебры Хопфа на алгебру Хопфа с противоположным умножением.

Запишем в общем случае умноежение, ко-умножение и антипод:

Пусть $\{e_i\}$ — базис в A

$$\begin{cases} \mathrm{e}_i e_j & = \mu(e_i \otimes e_j) = m_{ij}^k e_k \\ \triangle(e_i) & = \triangle_i^{kl} e_k \otimes e_l \\ S(e_i) & = S_i^k e_k \end{cases}$$

l A^o — базис $\{e^i\}$ В двойственной алгебре можно задать свойства как:

$$e^i e^j = \triangle_k^{ij} e^k$$

$$\triangle(e^i) = m_{e_k}^i e^k \otimes e^l$$

$$S(e^i) = S_k^i e^k$$

Рассмотрим элемент $R = e_i \otimes e^i$

Теорема 10. *Оператор R задает структуру квазитреугольной алгебры Хопфа.*

Доказательство.

$$(\triangle \otimes 1)R_{12} = R_{13}R_{23}$$

$$(\triangle \otimes 1)(e_i \otimes e^i) = \triangle_i^{kl} e_k \otimes e_l \otimes e^i = e_k \otimes e_l \otimes e^k e^l =$$

$$= (e_k \otimes 1 \otimes e^k)(1 \otimes e_l \otimes e^l) = R_{13}R_{23}$$

■

Чтобы показать, что квантовый дубль – универсальная обертывающая алгебры Sl_2, рассмотрим такую алгебру, которая является универсальной обертывающей от борелевской части алгебры Sl_2.

Борелевской частью называется такая часть алгебры, которая порождается H и x_+. В случае Sl_2 – это картан и верхняя треугольная часть.

$$A = U_q(b_+) \quad H, x_+$$

$$(U_q(b_+))^o \cong U_q(b_-) \quad H, x_-$$

В конечном итоге квантования $U_q(Sl_2)$ будет иметь вид:

$$U_q(Sl_2) = \frac{D(U_q(b_+))}{H - \widetilde{H}}$$

Фундаментальное представление для (Sl_2) является представлением и для $U_q(Sl_2)$. Докажем, что есть взять форму R с матричным преставлением со спином $1/2$, то форма для R-матрицы совпадет с формой R_{12}.

Введем пару матриц.

$$\rho \otimes \rho R = R_{12}$$

$$R_{12}^{+} = q^{-1/2} R_{12}$$
$$R_{12}^{-} = q^{1/2} R_{21}^{-1}$$

Запишем формулу Дринфельда:

$$R_{12}^{\pm} = q^{\pm\frac{1}{4} H\otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\pm\frac{1}{2}(n^2-n)}}{[n;q]!} \times (\pm(q-q^{-1} X_{\mp} \otimes x_{\pm})^n q^{\pm\frac{1}{4} H\otimes H}$$

$$\rho(X_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_-^2 = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_{12}^{-} = q^{1/2} R_{21}^{-1}$$

$$R^{+} = q^{\frac{1}{4} H\otimes H} (1_{2*2} \otimes 1_{2*2} + (q-q^{-1}) X_- \otimes X_+) q^{\frac{1}{4} H\otimes H} =$$

$$= \begin{pmatrix} q^{1/4} & & & \\ & q^{-1/4} & 0 & \\ & 0 & q^{-1/4} & \\ & & & q^{1/4} \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (q-q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} q^{1/4} & & & \\ & q^{-1/4} & 0 & \\ & 0 & q^{-1/4} & \\ & & & q^{1/4} \end{pmatrix} = q^{-1/2} R_{12}$$

Проверим свойство квазикокоммутативности.

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(q-q^{-1}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

Упражнение 12.5. *Проверить равенство правой и левой частей.*

Соотношение в алгебре $U_q(Sl_2)$

$$R_{12}L_1^{\pm}L_2^{\pm} = L_2^{\pm}L_1^{\pm}R_{12}$$

$$R_{12}L_1^{+}L_2^{-} = L_2^{-}L_1^{+}R_{12}$$

$$L^{\pm} = [(\rho \otimes 1)R_{12}^{\pm}]^T$$

Например:

$$(\rho \otimes id)(H \otimes H) = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{H/4} & 0 \\ 0 & q^{-H/4} \end{pmatrix}$$

$$(L^+)^T = \rho \otimes 1 R_{12}^{+} = \begin{pmatrix} q^{H/4} & 0 \\ 0 & q^{-H/4} \end{pmatrix} \left(\overset{n=0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \right.$$

$$\left. + \overset{n=1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (q-q^{-1})x_+ & 0 \end{pmatrix}} \right) \begin{pmatrix} q^{H/4} & 0 \\ 0 & q^{-H/4} \end{pmatrix}$$

$$L^+ = \begin{pmatrix} K_+ & q1/2(q-q^{-1})X_+ \\ 0 & K_- \end{pmatrix}$$

$$L^- = \begin{pmatrix} K_- & 0 \\ q1/2(q-q^{-1})X_- & K_+ \end{pmatrix}$$

Упражнение 12.6. *RLL соотношения дают соотношение в алгебре* $U_q(Sl_2)$

Лекция 13 Система Шлезингера и уравнения Книжника — Замолодчикова

Модель Годена

Модель задается матрицей Лакса

$$L(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{S^i}{z - z_i}$$

$$S^i \in Ma\ t_N$$

$$H(z) = \frac{1}{2} tr \quad L^2(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Cus_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{z - z_i}$$

$$Cus_i = \frac{1}{2} tr (S^i)^2$$

$$H_i = \sum_{k \neq i} \frac{tr(S^i S^k)}{z_i - z_k}, \quad abcd = 1 \ldots N$$

Пуассонова структура: в каждой отмеченной точке можно рассмотреть скобку Пуассона:

$$\left\{ S^i_{ab}, S^j_{cd} \right\} = \delta^{ij} (S^i_{cb} \delta_{ab} - S^i_{ad} \delta_{bc})$$

$$\{ Cus_i, S^i_{ab} \} = 0$$

$$\{ S^i_1, S^j_2 \} = \delta^{ij} [S^i_1, P_{12}]$$

$$P_{12} = \sum_{a,b=1}^{N} E_{ab} \otimes E_{bd}$$

Каждый i-й гамильтониан вводит свою динамику.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dS^i}{dt_j} = \frac{[S^i, S^j]}{z_i - z_j}, \quad i \neq j \\ \\ \frac{dS^i}{dt_i} = \sum\limits_{k \neq i} \frac{[S^i, S^k]}{z_i - z_k} \end{cases}$$

$$\frac{dL}{dt_j} = \{ H_j, L \} = [L, M_j]$$

$$M_j = -\frac{S^j}{z - z_j}$$

Неавтономное обобщение модели Годена Времена отождествим с параметрами z_i. Это значит, что гамильтонианы явно зависят от времен. Уравнения движения будут записаны аналогично, но с учетом отождествления.

$$L(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{S^i}{z - z_i}$$
$$t_i = z_i$$

$$\text{Система Шредингера} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dS^i}{dz_j} = \frac{[S^i, S^j]}{z_i - z_j} \\ \\ \frac{dS^i}{dz_i} = -\sum\limits_{k \neq i} \frac{[S^i, S^k]}{z_i - z_k} \end{cases}$$

В итоге получается система Шредингера. В неавтономной механике динамика задается уравнением:

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Гамильтониан будет задаваться моделью Годена (см. выше). Рассмотрим уравнение Лакса.

$$\frac{dL}{dz_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial S^i}{\partial z_j}}{z - z_i} + \frac{S^i}{(z - z_j)^2}$$

Но можно записать уравнение, аналогичное уравнению Лакса. Оно будет называться уравнением нулевой кривизны.

$$\frac{\partial L(t)}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial z} M_j(z) = [L(z), M(z)]$$

$[\partial_z + L, \partial_{z_j} + M_j] = 0$ - изомонодромные деформации и Уравнение Пенлеве

$$M_j = -\frac{S_j^{'}}{z - z_j}$$
$$\frac{dL}{dz_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial S^i}{\partial z_j}}{z - z_i} + \frac{S^i}{(z - z_j)^2}$$
$$\frac{\partial M_j}{\partial z} = \frac{S^i}{(z - z_j)^2}$$

Значение системы Шредингера:

1) Изучение изомонодромной деформации

2) Уравнение Пенлеве

Квантовая задача

$$H_i = \sum_{k\neq i} \frac{tr(S^i S^k)}{z_i - z_k}, \quad abcd = 1\dots N$$

$$\left\{S^i_{ab}, S^j_{cd}\right\} = \delta^{ij}\left(S^i_{cb}\delta_{ab} - S^i_{ad}\delta_{bc}\right)$$

$$\{Cus_i, S^i_{ab}\} = 0$$

$$\left\{S^i_1, S^j_2\right\} = \delta^{ij}\left[S^i_1, P_{12}\right]$$

$$P_{12} = \sum_{a,b=1}^{N} E_{ab} \otimes E_{bd}$$

$$H_i = \sum_{k\neq i}^{n} \sum_{a,b=1}^{k} \frac{S^i_{ab} S^k_{ba}}{z_i - z_k} [E_{ab}, E_{cd}] = E_{ad}E_{bc} - E_{cb}\delta_{ad}$$

Сопоставим динамическим переменным операторы, действующие в гильбертовом пространстве. То есть задать операторы так, чтобы коммутационное соотношение имело аналогичный вид, что и скобка Пуассона в модели Годена. Это скобка Пуассона Ли построенная по структурным константам алгебры Ли Sl_n.

$$S^i_{ab} \to S^{1_i}_{ab} = -E_{ab}$$

$$\overbrace{V^1 \otimes \dots \otimes V^n}^{n} = H, \quad dimV = N$$

Гильбертово пространство: тензорное произведение

$$\hat{S}^i_{ab} = -\underbrace{1_N \otimes \dots 1_N \otimes E_{ab} \otimes 1_N \otimes \dots 1_N}_{n}$$

$$\hat{H}^i = \sum_{k\neq i}^{n} \sum_{ab=1}^{N} \frac{E^i_{ab} E^k_{bc}}{z_i - z_k} = \sum_{k\neq i}^{n} \frac{P_{ik}}{z_i - z_k} \text{ - квантовые гамильтонианы Годена}$$

$$\sum_{k\neq i}^{n} \frac{P_{ik}}{z_i - z_k} = z_{ik}(z_i - z_k)\hat{H}_i$$

В итоге получаем квантовый гамильтониан Годена. Решим задачу на собственные значения и вектора для модели Годена.

$$\hat{H}_i\psi = h_i\psi \quad i = 1..n$$
$$[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$$

Проверим, удовлетворяют ли свойству коммутативности полученные операторы. $n = 3, \quad r_{12}(z) = -r_{21}(-z)$

$$\hat{H}_1 = r_{12}(z_1 - z_2) + r_{13}(z_3 - z_2)$$
$$\hat{H}_2 = r_{21}(z_1 - z_2) + r_{23}(z_2 - z_3)$$
$$\hat{H}_3 = r_{31}(z_3 - z_1) + r_{32}(z_3 - z_2)$$
$$z_{12}(z) = \frac{P_{12}}{z}$$

$$[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = [r_{12}, r_{23}] + [r_{13} - r_{12}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \quad [r_{13} - r_{12}] = [r_{12}, r_{13}]$$

Упражнение 13.1. *проверить* $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0 \quad \forall n$

В механике пространства 1,2,3 – матричные пространства для матриц Лакса. Когда составляется тождество Якоби, используется запись:

$$\{\{L_1, L_2\}, L_3\} + cycl = 0$$

$$\partial_{z_1} r_{21}(z_2 - z_1) - \partial_{z_2} r_{12}(z_1 - z_2) = -(\partial_{z_1} + \partial_{z_2} r_{12}(z_1 - z_2)) = 0$$

В нашем случае 1,2,3 – квантовые пространства, пространства операторов, действующих на 1,2,3 компоненты гильбертова пространства квантовой модели Годена.

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial' f}{\partial t} \quad \hat{p} = \frac{\partial}{\partial q} \quad \omega = \omega_0 + dH \times dt, \quad \frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

Омега – расширенная симплектическая структура с добавкой, увеличенная на 1 ранг матрица. В неавтономной квантовой механике будет работать нестационарное уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\psi = \hat{H}_i\psi \quad i = 1..n$$

Определим:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_i} - \hat{H}_i, \frac{\partial}{\partial z_j} - \hat{H}_j\right] \stackrel{?}{=} 0$$

Запишем систему уравнений Книжника-Замолодчикова:

$$t\partial z_i\psi = \left(\nu\sum_{k\neq i}^{n} r_{ik}(z_i - z_k)\right)\psi$$
$$t\partial z_1\psi = (\nu r_{12} + \nu r_{13})\psi$$
$$t^2\partial^2 z_1\psi = (\nu t r'_{12} + \nu t r'_{13} + (\nu r_{12} + \nu r_{13})^2)\psi$$
$$\nu^2 r_{12}^2 + \nu^2 r_{13}^2 + \nu^2[r_{12}, r_{13}]_+$$

$$t^2\partial^2 z_2\psi = (\nu t r'_{21} + \nu t r'_{23} + \nu^2 r_{21}^2 + \nu^2 r_{23}^2 + \nu^2[r_{21}, r_{23}]_+)\psi$$
$$t^2\partial^2 z_3\psi = (\nu t r'_{31} + \nu t r'_{32} + \nu^2 r_{31}^2 + \nu^2 r_{32}^2 + \nu^2[r_{31}, r_{32}]_+)\psi$$

Упражнение 13.2. *Для* $r_{ij} = \frac{p_i j}{z_i - z_j}$ *сумма антикоммут. = 0.*

$$P_{12}P_{23} = P_{23}P_{13} = P_{13}P_{12}$$

$$\frac{1}{2}t^2\sum^{n}\frac{\partial}{\partial z_i^2}\psi = \sum_{i<j}\left((t,\nu) - \frac{P_{ij}}{(z_i - z_j)^2} + \frac{\nu^2}{(z_i - z_j)^2}\right)\psi = \sum_{i<j}^{n}\frac{\nu^2 - \nu t P_{ij}}{(z_i - z_j)^2}$$

Получили уравнение Шредингера на систему взаимодействующих частиц, количество которых равно количеству точек в модели Годена (в системе Шледингера).

То есть получилась квантовая задача для спиновой модели Колоджеро-Мозера. В классической механике:

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2} - \nu^2\sum_{i<j}^{n}\frac{1}{(q_i - q_j)^2} \text{ — безспиновый}$$
$$H^{\text{spin}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2} - \nu^2\sum_{i<j}^{n} \text{ — спиновый}$$

Для квантовой системы

1) Спиновый случай

$$P_{ij} = \sum E_{ab}^i E_{ba}^j$$

$$\sum_{ab}\xi_a^i\eta_b^i\xi_b^j\eta_a^j = \left\{S_{ij} = \sum_c \xi_c^i\eta_c^j\right\} = S_{ij}S_{ji}$$
$$[E_{ab}, E_{cd}] = \delta_{bc}E_{ad} - \delta_{ad}E_{cb}$$

$$E^k_{ab} = \hat{\xi}^k_a \hat{\eta}^k_b$$
$$\left[\hat{\xi}^k_a \hat{\eta}^l_b\right] = \delta^{kl}\delta_{ab}$$
$$\left\{\xi^k_a \eta^l_b\right\} = \delta^{kl}\delta_{ab}$$
$$\Rightarrow \{S_{ij}, S_{kl}\} = S_{kj}\delta_{il} - S_{il}\delta_{kj}$$

2) Бесспиновый случай

$$\left[\sum_i \frac{1}{2} t^2 \frac{\partial^2}{\partial t_i} - \sum_{i<j} \frac{(\nu^2 - \nu t)}{(z_i - z_j)^2}\right] \psi' = E\psi'$$
$$E = \frac{1}{2}\sum M_a \wedge_a^2 = \wedge_1^2 M + \wedge_2^2 (N - M)$$

Квантовые числа в системе годена, количество спинов вверх и вниз определяют в конечном итоге собственные значения в задаче в системе частиц.

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ