



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ТЕОРИИ ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

СТЕПАНЬЯНЦ
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

—
ФИЗФАК МГУ

—
КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

1	Лекция 1. Бозонный сектор Стандартной модели	3
2	Лекция 2. Фермионный сектор Стандартной модели	9
2.1	Лагранжиан лептонного сектора Стандартной модели	9
3	Лекция 3. Лагранжиан кваркового сектора стандартной модели	12
3.1	Лагранжиан кваркового сектора Стандартной Модели	15
4	Лекция 4. Сокращение аномалий в Стандартной модели	19
4.1	Сокращение аномалий в Стандартной Модели	22
5	Лекция 5. $SU(5)$ теория великого объединения	27
5.1	Простейшие сведения о группе $SU(5)$	27
5.2	Представления группы $SU(5)$	29
5.3	Фермионный состав $SU(5)$ ТВО	31
6	Лекция 6. Калибровочные бозоны в $SU(5)$ ТВО и предсказание для угла Вайнберга	35
7	Лекция 7. Квантовые числа калибровочных бозонов X_μ^a и Y_μ^a	39
7.1	Оператор электрического заряда	40
8	Лекция 8. Лагранжиан бозонного сектора $SU(5)$ теории великого объединения	45
9	Лекция 9. Лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ модели	52
9.1	Массы калибровочных бозонов X_μ^a, Y_μ^a	52
9.2	Лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ модели	54
10	Лекция 10. Взаимодействие фермионов с калибровочными бозонами	57
11	Лекция 11. Распад протона и связанного нейтрона	62
11.1	Распад протона и связанного нейтрона	65
12	Лекция 12. Юкавское взаимодействие в $SU(5)$ ТВО	68
13	Лекция 13. Масса нейтрино и Великое объединение	72
14	Лекция 14. Сохранение B-L в $SU(5)$ ТВО. Сокращение аномалий	76

14.1 Сокращение аномалий в $SU(5)$ ТВО	79
15 Лекция 15. Объединение бегущих констант связи в Стандартной модели	81
16 Лекция 16. $SO(10)$ теория великого объединения	86
16.1 Основные сведения о группе $SO(10)$	86
16.2 Представление 16 группы $SO(10)$	88
17 Лекция 17. Гамма-матрицы и алгебра Клиффорда	93
17.1 Разложение представления 16 по представлениям подгруппы $SU(5) \times U(1)$	94
18 Лекция 18. Разложение представления 16 группы $SO(10)$ по подгруппе $SU(5) \times U(1)$	97
19 Лекция 19. Структура лагранжиана и сокращение аномалий в $SO(10)$ ТВО	101
19.1 Лагранжиан $SO(10)$ модели	101
19.2 Сокращение аномалий в $SO(10)$ ТВО	104
20 Лекция 20. Основные сведения о группе E_6	106

Лекция 1. Бозонный сектор Стандартной модели

Стандартная модель - калибровочная теория с группой

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}. \quad (1.1)$$

Каждому сомножителю в этом произведении соответствует своя константа связи e_1, e_2, e_3 для $SU(3), SU(2), U(1)$ соответственно.

Данная калибровочная симметрия нарушается хиггсовским полем

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

находящемся в тривиальном представлении группы $SU(3)$, фундаментальном представлении группы $SU(2)$, с гиперзарядом $Y = +1/2$ относительно группы $U(1)$.

Лагранжиан бозонного сектора Стандартной модели имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{U(1)})^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{SU(2)})^2 - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^{SU(3)})^2 + D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi - v^2)^2, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{U(1)} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ F_{\mu\nu}^{SU(2)} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = ie_2 F_{\mu\nu}^A t_A = ie_2 F_{\mu\nu}^A \frac{\sigma_A}{2}, \\ F_{\mu\nu}^{SU(3)} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = ie_3 F_{\mu\nu}^A t_A = ie_3 F_{\mu\nu}^A \frac{\lambda_A}{2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь t_A - генераторы фундаментального представления, для группы $SU(2)$ это σ_A - матрицы Паули, для $SU(3)$ это λ_A - матрицы Гелл-Манна. t_A удовлетворяют следующему условию нормировки

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (1.5)$$

и образуют алгебру Ли

$$[t^A, t^B] = if^{ABC} t^C. \quad (1.6)$$

Используя разложение калибровочного поля и тензора напряженностей этого поля по генераторам

$$\begin{aligned} A_\mu &= ie A_\mu^A t^A, \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - ef^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \end{aligned} \quad (1.7)$$

можно переписать слагаемые в лагранжиане в следующем виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \underset{SU(2)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} &= \frac{1}{2e_2^2} \text{tr} \underset{SU(2)}{(F_{\mu\nu}^2)}, A = \overline{1,3}, \\ -\frac{1}{4} \underset{SU(3)}{(F_{\mu\nu}^A)^2} &= \frac{1}{2e_3^2} \text{tr} \underset{SU(3)}{(F_{\mu\nu}^2)}, A = \overline{1,8}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для $U(1)$ группы получается такая же запись после масштабирования

$$A_\mu \rightarrow \frac{1}{e_1} A_\mu, \quad -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 = -\frac{1}{4e_1^2} (F_{\mu\nu})^2. \quad (1.9)$$

Но такие обозначения менее удобны.

Далее введем понятие гиперзаряда. Произвольное поле φ преобразуется под действием группы $U(1)$ следующим образом

$$\varphi = e^{i\alpha_1 e_1 Y} \varphi, \quad (1.10)$$

$$A_\mu \underset{U(1)}{\rightarrow} A_\mu \underset{U(1)}{-} \partial_\mu \alpha_1, \quad (1.11)$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ - параметр преобразований, Y - квантовое число, называемое гиперзарядом. Тогда ковариантная производная относительно группы $U(1)$ принимает вид

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= \underset{U(1)}{\partial_\mu} \varphi + ie_1 Y A_\mu \varphi \rightarrow \underset{U(1)}{\partial_\mu} (e^{i\alpha_1 e_1 Y} \varphi) + ie_1 Y (A_\mu - \partial_\mu \alpha_1) e^{i\alpha_1 e_1 Y} \varphi = \\ &= e^{i\alpha_1 e_1 Y} (\underset{U(1)}{\partial_\mu} \varphi + ie_1 Y A_\mu \varphi) = e^{i\alpha_1 e_1 Y} D_\mu \varphi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для поля Хиггса, лежащего в фундаментальном представлении $U(1)$ и $SU(2)$, ковариантная производная тогда принимает следующий вид

$$D_\mu \phi = \underset{SU(2)}{\partial_\mu} \phi + \underset{SU(2)}{A_\mu} \phi + \frac{i}{2} \underset{U(1)}{e_1} A_\mu \phi = \underset{SU(2)}{\partial_\mu} \phi + \frac{i}{2} \underset{SU(2)}{e_2} A_\mu^A \sigma^A \phi + \frac{i}{2} \underset{U(1)}{e_1} A_\mu \phi$$

Здесь выбор $Y = 1/2$ сделан для удобства обозначений. Вакуумное состояние стандартно выбирается в виде

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

При этом малой группой будет $U(1)_{em}$. Действительно, при калибровочных преобразованиях

$$\phi \rightarrow \omega_2 e^{\frac{i}{2} e_1 \alpha_1} \phi = \exp \left\{ \left(\frac{i}{2} e_1 \alpha_1 + \frac{i}{2} e_2 \alpha_2^A \sigma^A \right) \right\} \phi, \quad (1.14)$$

Преобразования малой группы удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} 0 = \delta\phi_0 &= \left(\frac{i}{2}e_1\alpha_1 + \frac{i}{2}e_2\alpha_2^A\sigma^A \right) \phi_0 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2)v \\ (-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1)v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

Преобразования малой группы получаются при $\alpha_2^1 = 0$; $\alpha_2^2 = 0$; $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \exp\left\{ \left(\frac{i}{2}e_1\alpha_1 + \frac{i}{2}e_2\alpha_2^3\sigma^3 \right) \right\} \phi = \exp\left\{ \left(\frac{i}{2}e_1\alpha_1(1 + \sigma^3) \right) \right\} \phi = \exp\left\{ \left(ie_1\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \phi = \\ &= \exp\left\{ \left(ie\alpha_{em} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \phi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

здесь связь e_1 и e будет получена далее). Очевидно, что получившиеся преобразования образуют группу $U(1)_{em}$ с параметром α_{em} . Важно, что она не совпадает с исходной группой $U(1)$ в произведении $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Спектр частиц удобно анализировать в унитарной калибровке, в которой зануляются поля, соответствующие голдстоуновским степеням свободы.

Если

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

то при калибровочных преобразованиях

$$\begin{aligned} \phi' &= \exp\left\{ \left(\frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \right) \right\} \phi \simeq \\ &\left(1 + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 & e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2) \\ e_2(\alpha_2^1 + i\alpha_2) & -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} = \phi + \delta\phi \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2) \\ -e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 + i\frac{v}{2}e_2(\alpha_2^1 - i\alpha_2) \\ v + \varphi_3 + i\varphi_4 + i\frac{v}{2}(-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ясно видно, что выбором α_2^1, α_2 и $-e_2\alpha_2^3 + e_1\alpha_1$ можно занулить φ_1, φ_2 и φ_4 , а $\varphi_3 = \varphi$ - нельзя. Поэтому в унитарной калибровке

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

где $\varphi \in Re$. При этом под действием группы $U(1)_{em}$

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad (1.20)$$

то есть ϕ - электрически нейтральное поле.

Исследуем теперь спектр частиц получившейся теории. Для этого разложим слабые лагранжиана до второго порядка малости по отклонению ϕ и в квадратичном приближении по полям A_μ , A_μ^A , A_μ^A . Ковариантная производная в данном приближении должна иметь первый порядок малости

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} e_2 A_\mu^A \sigma^A \phi + \frac{i}{2} e_1 A_\mu \phi \simeq \\
 &\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \phi \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e_2 \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ SU(2) & SU(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e_1 A_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e_2 v (A_\mu^2 + iA_\mu^1) \\ \partial_\mu \phi + \frac{i}{2} v (-e_2 A_\mu^3 + e_1 A_\mu) \end{pmatrix}. \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

Хиггсовский потенциал в квадратичном приближении

$$\lambda(\phi^\dagger \phi - v^2)^2 = \lambda((\phi + v)^2 - v^2)^2 \simeq \lambda(2\phi v)^2 = 4\lambda v^2 \phi^2. \tag{1.22}$$

Соответствующие напряженности полей в квадратичном приближении

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
 U(1) & \quad U(1) \quad U(1) \\
 & \quad (2) \\
 F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A, \\
 SU(2) & \quad SU(2) \quad SU(2) \\
 & \quad (2) \\
 F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A. \tag{1.23} \\
 SU(3) & \quad SU(3) \quad SU(3)
 \end{aligned}$$

Поэтому в унитарной калибровке в квадратичном приближении

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(2)} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A)^2 + (\partial_\mu \phi)^2 \\
 &\quad + \frac{e_2^2 v^2}{4} ((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) + \frac{v^2}{4} (-e_2 A_\mu^3 + e_1 A_\mu^2)^2 - 4\lambda v^2 \phi^2. \tag{1.24}
 \end{aligned}$$

дартной модели (Particle Data Group, февраль 2024)

$$\begin{aligned}
 A_\mu &\sim m_A = 0 \\
 W_\mu^{1,2} &\sim m_W^2 = \frac{e_2^2 v^2}{2} = 80,377(12) \text{ Gev}, \\
 Z_\mu &\sim m_Z^2 = \frac{(e_1^2 + e_2^2)v^2}{2} = 91,1876(21) \text{ Gev}, \\
 A_\mu^A &\sim m_g = 0, \\
 &SU(3) \\
 \varphi &\sim m_\varphi = 2\sqrt{\lambda}v = 125,25 \pm 0,17 \text{ Gev}, \\
 \alpha_3 &= \frac{e_3^2}{4\pi}, \quad \alpha_3(M_z) = 0,1180(9), \\
 \alpha_{em} &= \frac{e^2}{4\pi}, \quad \alpha_{em}^{-1}(M_z) = 127,951 \pm 0,009, \\
 \sin^2 \theta_W(M_z) &= 0,23121(4).
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

На основе этих величин находим все остальные

$$\begin{aligned}
 \alpha_3^{-1}(M_z) &\simeq 8,4675, \\
 \alpha_{10} &= \frac{e_1^2}{4\pi} = \left(\frac{e}{\cos \theta_w} \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}}{\cos^2 \theta_w} \rightarrow \alpha_{10} \simeq (98,37)^{-1}, \\
 \alpha_1 &\equiv \frac{5}{3} \alpha_{10}(M_z) \simeq (59,02)^{-1}, \\
 \alpha_2 &\equiv \frac{e_2^2}{4\pi} = \frac{\alpha_{em}(M_z)}{\sin^2 \theta_w(M_z)} \simeq (29,58)^{-1}, \\
 v &= \frac{\sqrt{2}m_W}{e_2} = \frac{\sqrt{2}m_W}{\sqrt{4\pi\alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2^{-1}}{4\pi}} m_W \simeq 174,4 \text{ Gev}, \\
 \lambda &= \frac{m_\varphi^2}{4v^2} \simeq 0,1289 \simeq (7,756)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

При этом

$$\frac{m_Z^2}{m_W^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2}{e_2^2} = \frac{\frac{e^2}{\cos^2 \theta_w} + \frac{e^2}{\sin^2 \theta_w}}{\frac{e^2}{\sin^2 \theta_w}} = \frac{1}{\cos^2 \theta_w}. \tag{1.32}$$

Лекция 2. Фермионный сектор Стандартной модели

Фермионы Стандартной модели делятся на 3 поколения, в каждом из которых есть кварки и лептоны.

Правые фермионы являются $SU(2)$ синглетами, а левые - $SU(2)$ дуплетами.

Кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, а лептоны в тривиальном

1G	2G	3G	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$ (Y)	$U(1)_{em}$ (q)
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	фунд.	фунд.	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \right)$
u_R	c_R	t_R	фунд.	трив.	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R	s_R	b_R	фунд.	трив.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	трив.	фунд.	$-\frac{1}{2}$	$\left(0 \quad -1 \right)$
ν_{eR}	$\nu_{\mu R}$	$\nu_{\tau R}$	трив.	трив.	0	0
e_R	μ_R	τ_R	трив.	трив.	-1	1

Далее индекс поколения обозначаем индексом $I = \overline{1,3}$.

Лагранжиан лептонного сектора Стандартной модели

$$\mathcal{L} = i\overline{(\nu, e)}_L^I \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I + i\overline{e}_R^I \gamma^\mu D_\mu e_R^I - (Y_e)_{IJ} \overline{(\nu, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J - (Y_e^+)_{IJ} \overline{e}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} e \\ \nu \end{pmatrix}_L^J + \text{слагаемые, содержащие правые нейтрино}, \quad (2.1)$$

где ковариантная производная принимает вид

$$D_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L + A_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L - \frac{ie_1}{2} A_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (2.2)$$

$$D_\mu e_R = \partial_\mu e_R - ie_1 A_\mu e_R. \quad (2.3)$$

При этом хиггсовское поле ϕ было записано в виде $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, т. ч. $\phi^+ = (\phi_1^*, \phi_2^*)$

Рассматриваемые слагаемые являются $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочно инвариантными, действительно, по группе $SU(3)$ здесь ничего не преобразуется, по группе $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L, \quad e_R \rightarrow e_R, \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}_L \rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}_L, \quad \overline{(\mathbf{v}, e)_L} \rightarrow \overline{(\mathbf{v}, e)_L} \omega_2^+. \quad (2.5)$$

Инвариантность действия получается т. к., например,

$$\overline{(\mathbf{v}, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{(\mathbf{v}, e)_L} \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \overline{(\mathbf{v}, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = inv, \quad (2.6)$$

$$\overline{(\phi_1^*, \phi_2^*)_L} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow \overline{(\phi_1^*, \phi_2^*)_L} \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L = \overline{(\phi_1^*, \phi_2^*)_L} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L = inv. \quad (2.7)$$

По группе $U(1)$ необходимо складывать гиперзаряды в каждом слагаемом:

$$\overline{(\mathbf{v}, e)_L} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R \rightarrow e^{ie_1 \alpha_1 \frac{1}{2}} \overline{(\mathbf{v}, e)_L} e^{ie_1 \alpha_1 \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{-ie_1 \alpha_1} e_R = inv.$$

Таким образом, локальная $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ калибровочная инвариантность полностью проверена.

Вещественность функции Лагранжа следует из того, что

$$\begin{aligned} \left[(Y_e^+)_{IJ} \overline{e}_R^J(\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}_L^J \right]^* &= (Y_e^+)_{IJ}^* \left[\overline{e}_R^J(\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}_L^J \right]^+ = \\ &= (Y_e)_{IJ} \overline{(\mathbf{v}, e)_L}^J \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J = (Y_e)_{IJ} \overline{(\mathbf{v}, e)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что все слагаемые в функции Лагранжа не зануляются по соображениям киральности, так как например

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_R &= \overline{\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi} = \left(\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \right)^+ \gamma^0 = \psi^+ \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\gamma^0 = \\ &= \psi^+ \gamma^0 \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \overline{\psi} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = (\overline{\psi})_L. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично доказывается и равенство $\overline{\psi}_L = (\overline{\psi})_R$.

Важно заметить, что, используя произвол в выборе полевых переменных, можно добиться, чтобы матрица $(Y_e)_{IJ}$ была бы

1. Диагональной
2. Вещественной
3. Положительно определенной

Действительно, если переопределить полевые переменные так, что

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^I \rightarrow (A_e)_{IJ} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^J; \\ e_R^I \rightarrow (B_e)_{IJ} (e_R)^J, \quad (2.10)$$

где A_e и B_e - унитарные 3×3 матрицы, то кинетический член для лептонов не изменится,

$$\begin{aligned} i \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^I \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^I &\rightarrow i \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^J (A_e^+)_{JI} \gamma^\mu D_\mu \left[(A_e)_{IK} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^K \right] \\ &= i \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^J (A_e^+ A_e)_{JK} \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^K = i \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^J \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L^J, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где было учтено, что A_e и B_e не зависят от x .

Но при таком переопределении полевых переменных $Y_e \rightarrow A_e^+ Y_e B_e$, т.к.

$$\begin{aligned} (Y_e)_{IJ} \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J &\rightarrow (Y_e)_{IJ} \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^K (A_e^+)_{KI} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} (B_e)_{JM} e_R^M = \\ &(A_e^+ Y_e B_e)_{KM} \overline{(\mathbf{v}, e)}_L^K \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^M. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Лекция 3. Лагранжиан кваркового сектора стандартной модели

Имеет место

Теорема: если Y - невырожденная матрица, то преобразованием $Y \rightarrow A^{-1}YB$, где $A^+A = 1$ и $B^+B = 1$, ее можно сделать

1. Диагональной
2. Вещественной
3. Положительно определенной

Доказательство: Рассмотрим матрицу YY^+ . Она является эрмитовой, $(YY^+)^+ = YY^+$ и \Rightarrow может приведена к диагональному виду унитарным преобразованием: $A^{-1}YY^+A = D^2$ где $A^+A = 1$, а D - диагональная матрица. Т. к. $\langle x|A^+YY^+A|x\rangle \geq 0$, то D^2 - положительно определенная вещественная матрица.

Извлечем квадратный корень, т. ч. у D на диагонали стояли бы положительные числа.

После этого определим $B \equiv Y^{-1}AD$. Тогда $A^{-1}YB = D$.

Убедимся, что B - унитарная матрица:

$$B^{-1}(B^{-1})^+ = D^{-1}A^{-1}YY^+A = D^{-1}D^2D^{-1} = 1 \Rightarrow B^+B = 1, \quad (3.1)$$

и матрица B действительно является унитарной. Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию низкоэнергетического предела лептонного лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{лепт}} = & i\overline{(v, e)}_L \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + i\overline{e}_R \gamma^\mu D_\mu e_R^I \\ & - (Y_e)_{IJ} \overline{(v, e)}_L \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J - (Y_e^+)_{IJ} \overline{e}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} e \\ v \end{pmatrix}_L, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где Y_e - диагональная, вещественная, положительно определенная матрица, а ковариантная производная

$$D_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L = \partial_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + A_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L - \frac{ie_1}{2} A_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (3.3)$$

$$D_\mu e_R = \partial_\mu e_R - ie_1 A_\mu e_R. \quad (3.4)$$

В низкоэнергетическом пределе хиггсовское поле можно считать равным вакуумному среднему

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

а все массивные возбуждения $(\varphi, W_\mu^{1,2}, Z_\mu)$ равным 0. При этом ранее рассмотренная связь между полями A_μ^3 , A_μ и A_μ, Z_μ имела вид

$$\begin{cases} A_\mu^3 = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu \rightarrow \sin \theta_W A_\mu, \\ SU(2) \\ A_\mu = -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu \rightarrow \cos \theta_W A_\mu, \\ U(1) \end{cases} \quad (3.6)$$

причем $e = e_1 \cos \theta_W = e_2 \sin \theta_W$.

Поэтому в низкоэнергетическом пределе

$$\begin{cases} e_2 A_\mu^3 \rightarrow e_2 \sin \theta_W A_\mu = e A_\mu, \\ SU(2) \\ e_1 A_\mu = e_1 \cos \theta_W A_\mu = e A_\mu. \\ U(1) \end{cases} \quad (3.7)$$

Поэтому в низкоэнергетическом пределе

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{лепт}} &= i \overline{(v, e)}_L \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \frac{i}{2} e A_\mu \sigma_3 \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L - \frac{i}{2} e A_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L \right] + \\ &+ i \overline{e}_R \gamma^\mu [\partial_\mu e_R^I - i e A_\mu e_R^I] - (Y_e)_{IJ} \overline{(v, e)}_L \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} e_R^J - (Y_e^+)_{IJ} \overline{e}_R^I (0, v) \begin{pmatrix} e \\ v \end{pmatrix}_L = \\ &= i \overline{(v, e)}_L \gamma^\mu \left[\partial_\mu \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L - i e A_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L \right] + \\ &+ i \overline{e}_R \gamma^\mu [\partial_\mu e_R^I - i e A_\mu e_R^I] - (Y_e)_{IJ} v \overline{e}_L^I e_R^J - (Y_e^+)_{IJ} v \overline{e}_R^I e_L^J. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определим матрицу

$$(m_e)_{IJ} = v (Y_e)_{IJ} = v \begin{pmatrix} Y_{e11} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{e22} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{e33} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

и ковариантная производная по отношению к низкоэнергетической группе $U(1)_{em}$

$$\begin{cases} D_{\mu em} e_L = \partial_\mu e_L - i e A_\mu e_L, \\ D_{\mu em} e_R = \partial_\mu e_R - i e A_\mu e_R, \\ D_{\mu em} \nu_L = \partial_\mu \nu_L. \end{cases} \quad (3.10)$$

Тогда низкоэнергетический предел лептонной части лагранжиана Стандартной модели примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ЛЕПТ}} = i\bar{\nu}_L^I \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^I + i\bar{e}_L^I \gamma^\mu D_\mu e_L^I + i\bar{e}_R^I \gamma^\mu D_\mu e_R^I - (m_e)_{IJ} (\bar{e}_L^I e_R^J + \bar{e}_R^I e_L^J). \quad (3.11)$$

При этом

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L = \bar{\Psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \Psi + \bar{\Psi} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \Psi = \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.12)$$

следовательно, для лептонов получается стандартное массовое слагаемое, а $(m_e)_{IJ}$ - массовая матрица.

$$\begin{aligned} & i\bar{\Psi}_L^I \gamma^\mu D_\mu \Psi_L + i\bar{\Psi}_R^I \gamma^\mu D_\mu \Psi_R = \\ & i\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) D_\mu \Psi^I + i\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) D_\mu \Psi = i\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

и, следовательно, кинетический член для заряженных лептонов также имеет стандартный вид.

При этом $q(e_L) = q(e_R) = -e$; $q(\nu_L) = 0$.

Таким образом в низкоэнергетическом пределе получается обычная КЭД с 3-мя лептонами + 3 левых нейтрино.

Экспериментально (Particle Data Group, февраль 2024)

$$\begin{aligned} m_e &= 0,51099895000 \pm 15 \cdot 10^{-10} \text{ MeV}, \\ m_\mu &= 105,6583755 \pm 23 \cdot 10^{-7} \text{ MeV}, \\ m_\tau &= 1776,86 \pm 0,12 \text{ MeV}, \\ Y_{11} &\simeq 2,930 \cdot 10^{-6}, \\ Y_{22} &\simeq 6,058 \cdot 10^{-4}, \\ Y_{33} &\simeq 1,02 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что часть лептонного лагранжиана, не содержащая правое нейтрино, инвариантна относительно глобальных преобразований группы $U(1) \times U(1) \times U(1)$, т.ч.

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I \rightarrow e^{i\beta_I} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^I; \quad e_R^I \rightarrow e^{i\beta_I} e_R^I, \quad (3.15)$$

где параметры β_1, β_2 и β_3 не зависят от x . При этом

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

Действительно, инвариантность кинетических слагаемых очевидна т. к. преобразования являются глобальными, а, например

$$(Y_e)_{IJ} \overline{(v, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J = \sum_{i=1}^3 (Y_e)_{II} \overline{(v, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e_R^J \rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^3 (Y_e)_{II} \overline{(v, e)}_L^I e^{-i\beta_i} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{i\beta_i} e_R^J = inv, \quad (3.17)$$

где было учтено, что юкавские константы являются диагональными.

Такая глобальная инвариантность приводит к сохранению 3-х лептонных чисел

$$L_I = \int d^3x \left[\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L^{I+} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L^I + e_R^{+I} e_R^I \right], \quad I = \overline{1, 3}. \quad (3.18)$$

Лагранжиан кваркового сектора Стандартной Модели

Лагранжиан кваркового сектора для трех поколений кварков имеет вид

$$\mathcal{L} = i \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}}_L^I \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i \overline{u}_R^I \gamma^\mu D_\mu u_R^I + i \overline{d}_R^I \gamma^\mu D_\mu d_R^I$$

$$- (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J - (Y_d^+)_{IJ} \overline{d}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J -$$

$$- (Y_u)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J - (Y_u^+)_{IJ} \overline{u}_R^I (\phi_2, -\phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J. \quad (3.19)$$

Ковариантные производные как и в случае лептонного сектора выписываются по известным квантовым числам

$$D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \quad (3.20)$$

$$= \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e_3 \lambda^a A_\mu^a \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e_2 \sigma^b A_\mu^b \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i e_1 Y A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I,$$

$$D_\mu u_R^I = \partial_\mu u_R^I + \frac{i}{2} e_3 \lambda^a A_\mu^a u_R^I + \frac{2i}{3} e_1 A_\mu u_R^I, \quad (3.21)$$

$$D_\mu d_R^I = \partial_\mu d_R^I + \frac{i}{2} e_3 \lambda^a A_\mu^a d_R^I - \frac{i}{3} e_1 A_\mu u_R^I. \quad (3.22)$$

Выписанный лагранжиан будет инвариантным относительно группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Инвариантность относительно $SU(3)$ доказывается элементарно

$$\begin{aligned} \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}}^I_L \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_L &\rightarrow \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}}^I_L \omega_3^+ \gamma^\mu D_\mu \omega_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_L = \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}}^I_L \omega_3^+ \omega_3 \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_L = \\ &= \overline{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}}^I_L \gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^I_L. \end{aligned} \quad (3.23)$$

И аналогично для любого из слагаемых с юкавскими константами

$$\begin{aligned} (Y_d)_{IJ} \overline{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}^I_L d_R^J &\rightarrow (Y_d)_{IJ} \overline{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}^I_L \omega_3^+ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \omega_3 d_R^J = \\ (Y_d)_{IJ} \overline{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}^I_L \omega_3^+ \omega_3 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J &= (Y_d)_{IJ} \overline{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}^I_L \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Инвариантность кинетических слагаемых относительно группы $SU(2)$ доказывается аналогично $SU(3)$ -инвариантности, как и слагаемых содержащих юкавские константы Y_d , однако два остальных юкавских слагаемых с константами Y_u содержат дублет полей хиггса в виде

$$\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

или его эрмитово сопряженное выражение. Однако оказывается, что данный столбец преобразуется, под действием группы $SU(2)$ так же как и столбец $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, то есть

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} &\rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Действительно, запишем столбец с сопряженными хиггсовскими полями в виде

$$\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = i\sigma^2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

где σ^2 есть вторая матрица Паули. Полученное выражение преобразуется так

$$i\sigma^2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \rightarrow i\sigma^2 \omega^{2*} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

При этом произвольный элемент группы $SU(2)$ имеет вид

$$\omega_2 = a_4 I + i\vec{\sigma}\vec{a} \rightarrow \omega_2^* = a_4 I - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3. \quad (3.29)$$

Далее, в виду того, что

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \rightarrow \sigma_i^2 = I, \quad (3.30)$$

можно записать

$$\begin{aligned} i\sigma_2 \omega_2^* &= i\sigma_2 (a_4 I - i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 - i\sigma_3 a_3) = \\ &= (a_4 I + i\sigma_1 a_1 + i\sigma_2 a_2 + i\sigma_3 a_3) i\sigma_2 = \omega_2 i\sigma_2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

так что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} &= i\sigma^2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \rightarrow i\sigma^2 \omega_2^* \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \\ &= \omega_2 i\sigma^2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Подобный закон преобразования и обеспечивает инвариантность выписанного лагранжиана относительно группы $SU(2)$. Например:

$$\begin{aligned} (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J &\rightarrow (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \omega_2^+ \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J = \\ &= (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J = inv. \end{aligned} \quad (3.33)$$

По группе $U(1)$ поля преобразуются следующим образом

$$\varphi = e^{i\alpha_1 e_1 Y} \varphi, \quad (3.34)$$

$$\varphi^* = e^{-i\alpha_1 e_1 Y} \varphi^*. \quad (3.35)$$

То есть инвариантность слагаемых лагранжиана проверяется суммированием гиперзарядов. Инвариантность кинетических слагаемых очевидна. Проверим инвариантность юкавских слагаемых

$$\begin{aligned} (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J &\rightarrow (Y_d)_{IJ} e^{-\frac{i}{6} e_1 \alpha_1} \overline{(u, d)_L}^I e^{\frac{i}{2} e_1 \alpha_1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{3} e_1 \alpha_1} d_R^J = \\ &= (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J = inv, \\ (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J &\rightarrow (Y_d)_{IJ} e^{-\frac{i}{6} e_1 \alpha_1} \overline{(u, d)_L}^I e^{-\frac{i}{2} e_1 \alpha_1} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} e^{\frac{2i}{3} e_1 \alpha_1} u_R^J = \\ &= (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L}^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J = inv. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким образом инвариантность лагранжиана относительно группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ полностью проверена.

Лекция 4. Сокращение аномалий в Стандартной модели

Приведем матрицы юкавских констант Y_d, Y_u к диагональному виду. Для этого совершим, как и для лептонной части лагранжиана СМ, преобразование полевых переменных в следующем виде

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \rightarrow A_{IJ} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J, \quad u_R^I \rightarrow (B_u)_{IJ} u_R^J, \quad d_R^I \rightarrow (B_d)_{IJ} d_R^J. \quad (4.1)$$

Как и для лептонного сектора, для сохранения вида кинетических слагаемых необходимо потребовать унитарность каждой из матриц преобразования

$$A^+ A = 1, \quad B_u^+ B_u = 1, \quad B_d^+ B_d = 1. \quad (4.2)$$

При этом матрицы юкавских констант преобразуются к виду

$$Y_u \rightarrow A^{-1} Y_u B_u, \quad Y_d \rightarrow A^{-1} Y_d B_d. \quad (4.3)$$

Для диагонализации двух матриц Y_u, Y_d вообще говоря необходимо четыре матрицы A_d, B_d, A_u, B_u

$$Y_u \rightarrow A_u^{-1} Y_u B_u = \frac{1}{v} V(m_u)_{IJ}, \quad Y_d \rightarrow A_d^{-1} Y_d B_d = \frac{1}{v} V(m_d)_{IJ}. \quad (4.4)$$

Поэтому в общем случае диагонализировать обе матрицы Y_u, Y_d нельзя, но можно диагонализировать хотя бы одну. Выберем $A = A_u$ диагонализуя матрицу Y_u , в этом случае, очевидно

$$Y_d \rightarrow A_u^{-1} Y_d B_d = (A_u^{-1} A_d) (A_d^{-1} Y_d B_d) = V (A_d^{-1} Y_d B_d), \quad (4.5)$$

где $V = A_u^{-1} A_d$ есть, унитарная, как произведение унитарных, матрица смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскавы. Тогда

$$v A_u^{-1} Y_d B_d = V(m_d)_{IJ}. \quad (4.6)$$

Поэтому в отличие от лептонного сектора, кварковый лагранжиан имеет только одну глобальную $U(1)$ -симметрию

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I \rightarrow e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I, \quad u_R^I \rightarrow e^{i\beta/3} u_R^I, \quad d_R^I \rightarrow e^{i\beta/3} d_R^I \quad \forall I = \overline{1,3}, \quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Действительно, тогда

$$(Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L^I} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J \rightarrow (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)_L^I} e^{-\frac{i\beta}{3}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} e^{\frac{i\beta}{3}} d_R^J = inv, \quad (4.9)$$

только если одновременно преобразуются все 3 поколения. Соответствующим сохраняющимся зарядом является барионное число

$$B = \frac{1}{3} \int d^3x \left[\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^{I+} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + u_R^{+I} u_R^I + d_R^{+I} d_R^I \right] = \\ = \frac{1}{3} \int d^3x [u^{+I} u^I + d^{+I} d^I], \quad I = \overline{1, 3}, \quad (4.10)$$

здесь множитель $\frac{1}{3}$ нужен, чтобы у барионов (p, n) $B = 1$.

Рассмотрим теперь низкоэнергетический предел лагранжиана кваркового сектора, полагая

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$W_\mu^{1,2} = 0, \quad Z_\mu = 0. \quad (4.12)$$

При этом, используя формулы

$$e = e_1 \cos \theta_W = e_2 \sin \theta_W, \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} e_2 A_\mu^3 = e_2 (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) \rightarrow e_2 \sin \theta_W A_\mu = e A_\mu, \\ \quad SU(2) \\ e_1 A_\mu = e_1 (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \rightarrow e_1 \cos \theta_W A_\mu = e A_\mu. \\ \quad U(1) \end{cases} \quad (4.14)$$

Ковариантные производные при этом преобразуются так, для левых кварков

$$D_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e_2 \sigma^A A_\mu^A \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i e_1 Y A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \\ = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{2} e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + \frac{i}{6} e A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \\ = \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + A_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I + i e A_\mu \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I = \\ = \begin{pmatrix} D_\mu u_L^I \\ em \\ D_\mu d_L^I \\ em \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где

$$D_{\mu} u_L^I = \partial_{\mu} u_L^I + A_{\mu} u_L^I + i \frac{2}{3} e A_{\mu} u_L^I, \quad (4.16)$$

$$D_{\mu} d_L^I = \partial_{\mu} d_L^I + A_{\mu} d_L^I - i \frac{1}{3} e A_{\mu} d_L^I. \quad (4.17)$$

Аналогично для правых фермионов

$$D_{\mu} u_R^I = \partial_{\mu} u_R^I + A_{\mu} u_R^I + i \frac{2}{3} e A_{\mu} u_R^I = D_{\mu} u_R^I, \quad (4.18)$$

$$D_{\mu} d_R^I = \partial_{\mu} d_R^I + A_{\mu} d_R^I - i \frac{1}{3} e A_{\mu} d_R^I = D_{\mu} d_R^I. \quad (4.19)$$

Откуда видно, что электрические заряды правых и левых кварков оказались одинаковыми и равными $+2/3$ для верхних кварков и $-1/3$ для нижних кварков.

Далее, слагаемые с юкавскими множителями Y_d и их эрмитово сопряженные

$$(Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} d_R^J \rightarrow (Y_d)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} d_R^J = v (Y_d)_{IJ} \overline{d}_L^I d_R^J, \quad (4.20)$$

$$(Y_d^+)_{IJ} \overline{d}_R^I (\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J \rightarrow (Y_d^+)_{IJ} \overline{d}_R^I (0, v) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J = v (Y_d^+)_{IJ} \overline{d}_R^I d_L^J, \quad (4.21)$$

Для слагаемых с юкавскими множителями Y_u и их эрмитово сопряженными

$$(Y_u)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} u_R^J \rightarrow (Y_u)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} u_R^J = v (Y_u)_{IJ} \overline{u}_L^I u_R^J, \quad (4.22)$$

$$(Y_u^+)_{IJ} \overline{u}_R^I (\phi_2, -\phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J \rightarrow (Y_u^+)_{IJ} \overline{u}_R^I (v, 0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J = v (Y_u^+)_{IJ} \overline{u}_R^I u_L^J. \quad (4.23)$$

Для элементов матрицы $v(Y_u)_{IJ}$ можно ввести обозначения

$$(m_u)_{IJ} = v(Y_u)_{IJ} = v \begin{pmatrix} Y_{u11} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{u22} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{u33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

А матрицу Y_d , после полевого преобразования, можно переписать в виде

$$vY_d \rightarrow VvY_d = Vm_d, \quad (4.25)$$

где

$$(m_d)_{IJ} = v(Y_d)_{IJ}, \quad (4.26)$$

есть диагональная матрица.

В итоге, в низкоэнергетическом пределе лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \Rightarrow & i \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^{\dagger} \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} D_{\mu} u_L^I \\ D_{\mu} d_L^I \end{pmatrix} + i \bar{u}_R^I \gamma^{\mu} D_{\mu} u_R^I + i \bar{d}_R^I \gamma^{\mu} D_{\mu} d_R^I \\ & - (V m_d)_{IJ} \bar{d}_L^I d_R^J - (m_d V^+)_{IJ} \bar{d}_R^I d_L^J - \\ & - (m_u)_{IJ} (\bar{u}_R^I u_L^J + \bar{u}_L^I u_R^J). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Численные значения масс кварков приводятся в Particle Data Group и по состоянию на февраль 2024

$$\begin{aligned} m_u &= 2,16_{-0,26}^{+0,49} \text{ Mev}, \quad m_d = 4,67_{0,17}^{+0,48} \text{ Mev}, \\ m_c &= 1,27 \pm 0,02 \text{ Gev}, \quad m_s = 93,4_{-3,4}^{+8,6} \text{ Mev}, \\ m_t &= 172,69 \pm 0,30 \text{ Gev}, \quad m_b = 4,18_{-0,02}^{+0,03} \text{ Gev}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Матрицу смешивания можно привести к виду

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i, \quad c_i^2 + s_i^2 = 1, \\ s_{12} &\equiv \sin \theta_{12} = 0,22500 \pm 0,00067, \\ s_{13} &\equiv \sin \theta_{13} = 0,00369 \pm 0,00011, \\ s_{23} &\equiv \sin \theta_{23} = 0,04182_{-0,00074}^{+0,00083}, \\ \delta &= 1,144 \pm 0,027. \end{aligned} \quad (4.30)$$

И юкавские константы

$$\begin{aligned} (Y_u)_{11} &= \frac{1}{v} m_u = 1,24 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{1}{v} m_d = 2,68 \cdot 10^{-5}, \\ (Y_u)_{22} &= \frac{1}{v} m_c = 7,28 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{1}{v} m_s = 5,34 \cdot 10^{-4}, \\ (Y_u)_{33} &= \frac{1}{v} m_t = 0,991, \quad \frac{1}{v} m_b = 2,40 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Сокращение аномалий в Стандартной Модели

Стандартная модель представляет собой теорию с киральными фермионами, поскольку левые и правые фермионы по-разному взаимодействуют с калибровочными полями.

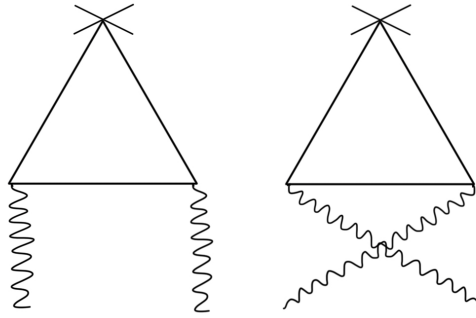


Рис. 4.1. Вклад треугольных диаграмм в аномалию аксиального тока. В вершинах стоит аксиальный ток.

При квантовании киральных теорий возникают проблемы с аномалиями. Аномалиями называется нарушение классического закона сохранения квантовыми поправками.

Так, к примеру, в спинорной электродинамике

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.32)$$

в случае $m = 0$ существует инвариантность относительно глобальных киральных преобразований

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \quad (4.33)$$

относительно которых сохраняется ток $j_5^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0. \quad (4.34)$$

Если $m \neq 0$, то выполняется следующее соотношение

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2imj_5, \quad (4.35)$$

где $j_5 \equiv \bar{\psi}\gamma_5\psi$. Однако данное соотношение нарушается квантовыми поправками до

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.36)$$

аномалия

Это происходит благодаря вкладам треугольных диаграмм

Но в электродинамике аномалия аксиального тока ни к чему плохому не приводит. В СМ происходит подобное нарушение для барионного и лептонного чисел. Однако

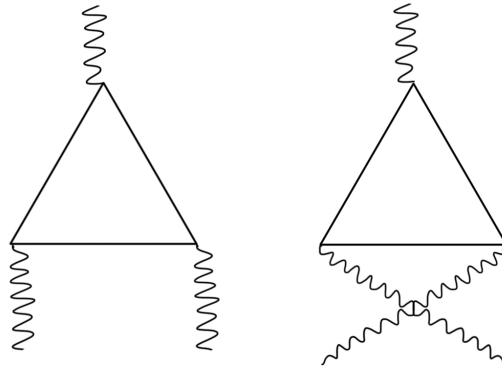


Рис. 4.2. Диаграммы с тремя внешними калибровочными линиями.

аномалий не возникает для следующего закона сохранения

$$\partial_\mu \left[B^\mu - \sum_{I=1}^3 L^{\mu,I} \right] = 0. \quad (4.37)$$

В киральных теориях опасность представляют диаграммы с тремя внешними калибровочными линиями которые имеют структуру, похожую на аксиальную аномалию в электродинамике

$$tr \left[\begin{array}{c} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \cdot \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \frac{\gamma^\alpha p_\alpha + m}{p^2 - m^2} \cdot \dots \\ \text{вершина} \qquad \qquad \qquad \text{пропагатор} \end{array} \right], \quad (4.38)$$

из которого видно, что выживает вклад, содержащий γ_5 . Это, так называемая, неабелева аномалия. Если данная аномалия отлична от 0, то нарушаются тождества Славнова-Тейлора, что делает теорию неперенормируемой и, стало быть, неудовлетворительной на квантовом уровне.

Известно, что неабелевы аномалии пропорциональны

$$\sum_R tr(T^A \{T^B, T^C\}) - \sum_L tr(T^A \{T^B, T^C\}), \quad (4.39)$$

где суммы берутся по правым и левым фермионам, соответственно. Знаки у данных сумм возникают из знаков проекторов

$$R: \frac{1}{2}(1 + \gamma_5),$$

$$L: \frac{1}{2}(1 - \gamma_5).$$

N	A_μ $SU(3)$	A_μ $SU(2)$	A_μ $U(1)$	Причина сокращения аномалий
1	3	0	0	$\sum_R tr(T^A\{T^B, T^C\}) = \sum_L tr(T^A\{T^B, T^C\})$
2	2	1	0	$tr\sigma^A = 0$
3	2	0	1	нетривиально
4	1	2	0	$tr\lambda^A = 0$
5	1	1	1	$tr\lambda^A = 0; tr\sigma^A = 0$
6	1	0	2	$tr\lambda^A = 0$
7	0	3	0	$tr(\sigma^A\{\sigma^B, \sigma^C\}) = 2\delta^{BC}tr\sigma^A = 0$
8	0	2	1	нетривиально
9	0	1	2	$tr\sigma^A = 0$
10	0	0	3	нетривиально

Таблица 4.1. Причины сокращения аномалий для различных вариантов расстановки полей на внешних линиях треугольных диаграмм

Генераторы в данных суммах возникают из слагаемых в ковариантных производных, соответствующие изображенным выше вершинам

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ieA_\mu^A T^A \psi, \quad (4.40)$$

антикоммутор связан с наличием двух диаграмм, дающих вклад в аномалии. Очевидно, что в СМ из-за различного взаимодействия левых и правых фермионов с бозонами суммы в выражении (4.39) не обязательно должны сокращаться.

Однако, как сейчас будет показано, в СМ все подобные аномалии полностью сокращаются.

Варианты расстановки полей на внешних линиях представлены в таблице (4.1). В представленной таблице $t^A_{SU(3)} = \frac{1}{2}\lambda^A$; $t^A_{SU(2)} = \frac{1}{2}\sigma^A$ - в фундаментальном представлении.

В большинстве вариантов отсутствие аномалий доказывается тривиально (см. таблицу).

Однако имеются и существенно нетривиальные варианты (3, 8, 10). Для доказательства сокращения аномалий в этих случаях необходимо знать гиперзаряды полей:

поле	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R	$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$	ν_R	e_R	ϕ
Y	+1/6	+2/3	-1/3	-1/2	0	-1	+1/2

Вариант 3 ($2 \times A_\mu + A_\mu$). Существенны только кварки. В данном случае аномалия пропорциональна следующему выражению

$$\frac{1}{4} \text{tr}(\lambda^A \lambda^B) \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} \\ u_R \quad d_R \\ \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L \end{array} \right] = 0. \quad (4.41)$$

Вариант 8 ($2 \times A_\mu + A_\mu$).
 $SU(2) \quad U(1)$

Существенны только левые фермионы. В данном случае аномалия пропорциональна следующему выражению

$$-\frac{1}{4} \text{tr}(\sigma^A \sigma^B) \cdot \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{цвет} \\ \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ \left(\begin{array}{c} v \\ e \end{array} \right)_L \end{array} \right] = 0. \quad (4.42)$$

Вариант 10 ($3 \times A_\mu$).
 $U(1)$

В данном случае аномалия пропорциональна сумме гиперзарядов

$$\begin{aligned} \sum_R Y^3 - \sum_L Y^3 &= [3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 0 + (-1)^3] - [3 \cdot 2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3] = \\ &= \left[\frac{8}{9} - \frac{1}{9} - 1\right] - \left[\frac{1}{36} - \frac{1}{4}\right] = \frac{32 - 4 - 36 - 1 + 9}{36} = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Таким образом, мы видим, что во всех 10 вариантах аномалии полностью сокращаются, причем это происходит благодаря очень нетривиальным соотношениям, которым удовлетворяют квантовые числа.

Поэтому квантовые числа не являются случайными. Далее мы увидим, что их анализ подразумевает существование более широкой калибровочной симметрии.

Лекция 5. $SU(5)$ теория великого объединения

Простейшие сведения о группе $SU(5)$

Группа $SU(5)$ состоит из унитарных матриц ω размера 5×5 с единичным определителем

$$\omega^+ \omega = 1, \quad \det(\omega) = 1. \quad (5.1)$$

Соответствующая алгебра Ли состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц α

$$\omega = e^\alpha \rightarrow \alpha^+ = -\alpha, \quad \text{tr}(\alpha) = 0. \quad (5.2)$$

Далее, размерность и ранг групп $SU(n)$ определяются как

$$\dim(SU(n)) = n^2 - 1, \quad (5.3)$$

$$\text{rank}(SU(n)) = n - 1. \quad (5.4)$$

Ранг это максимальное количество одновременно диагонализующихся генераторов. Для группы $SU(5)$ размерность и ранг соответственно:

$$\begin{aligned} \dim(SU(5)) &= 5^2 - 1 = 24 \\ \text{rank}(SU(5)) &= 5 - 1 = 4, \end{aligned} \quad (5.5)$$

В тоже самое время для группы Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$:

$$\dim(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) = 8 + 3 + 1 = 12, \quad (5.6)$$

$$\text{rank}(SU(3) \times SU(2) \times U(1)) = 2 + 1 + 1 = 4. \quad (5.7)$$

Поэтому не исключено, что $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ является подгруппой $SU(5)$. Это действительно так:

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5). \quad (5.8)$$

Такое вложение строиться по следующей формуле

$$\omega_5 = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} \in SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5), \quad (5.9)$$

где $\omega_3 \in SU(3)$, $\omega_2 \in SU(2)$, $\alpha - Re$ число. Построенная матрица ω_5 является унитарной и имеет единичный определитель

$$\begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^+ e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^+ e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} = 1_5, \quad (5.10)$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} = (e^{-2i\alpha})^3 \det\{\omega_3\} (e^{3i\alpha})^2 \det\{\omega_2\} = e^{-6i\alpha} \cdot e^{6i\alpha} = 1. \quad (5.11)$$

Генераторы группы $SU(5)$ удобно выбрать так, чтобы они были согласованы с вложением $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$. Они должны быть бесследовыми, эрмитовыми

$$tr(t^A) = 0, (t^A)^+ = t^A, \overline{A} = 1, 24, \quad (5.12)$$

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (5.13)$$

и удовлетворять условию нормировки

$$tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (5.14)$$

Положим $t_{SU(5)}^A = \frac{1}{2} \lambda_{SU(5)}^A$, где $\lambda_{SU(5)}^A$ имеют вид

$$\lambda_{SU(5)}^A = \begin{pmatrix} \lambda_{SU(3)}^A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Если $A = \overline{1, 8}$, что соответствует восьми генераторам группы $SU(3)$, где $\lambda_{SU(3)}^A$ есть матрицы Гелл-Манна. Далее

$$\lambda_{SU(5)}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{A-8} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Если $A = 9, 10, 11$, что будет соответствовать трем генераторам группы $SU(2)$, а $\sigma^i, i = \overline{1, 3}$ есть матрицы Паули. Далее

$$\lambda_{SU(5)}^A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ \hline 1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \text{или} \quad \lambda_{SU(5)}^A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & -i & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ \hline i & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (5.17)$$

Если $A = \overline{12, 23}$, что соответствует 12 генераторам самой $SU(5)$. Легко проверить, что такие $\lambda_{SU(5)}^A$ удовлетворяют условию $tr(\lambda_{SU(5)}^A \lambda_{SU(5)}^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}$.

И наконец генератор, соответствующий $U(1)$

$$t_{SU(5)}^{24} = \frac{1}{2} \lambda_{SU(5)}^{24} \quad \text{где} \quad \lambda_{SU(5)}^{24} = const \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \quad (5.18)$$

Условие нормировки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \text{tr} \left[\frac{1}{2} \lambda_{SU(5)}^{24} \cdot \frac{1}{2} \lambda_{SU(5)}^{24} \right] = \frac{1}{4} \cdot \text{const}^2 \cdot \text{tr} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \text{const}^2 \cdot (3 \cdot 4 + 2 \cdot 9) = \frac{1}{4} \cdot 30 \cdot \text{const}^2 \Rightarrow \text{const}^2 = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{const} = \frac{1}{\sqrt{15}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, правильно нормированная $\lambda_{SU(5)}^{24}$ имеет вид

$$\lambda_{SU(5)}^{24} = \frac{1}{\sqrt{15}} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \quad (5.20)$$

Представления группы $SU(5)$

Все представления группы $SU(5)$ являются тензорными.

Фундаментальное представление действует на пятикомпонентный столбец с нижними индексами как

$$\phi_i \rightarrow \omega_i^j \phi_j \quad \text{где } i, j = \overline{1, 5}. \quad (5.21)$$

Это представление будем обозначать $\mathfrak{5}$.

Антифундаментальное представление $\overline{\mathfrak{5}}$ соответствует вектору с верхними индексами:

$$\phi^i \rightarrow (\omega^*)^i_j \phi^j. \quad (5.22)$$

Это представление, так как

$$(\omega^*)^i_j (\omega^*)^j_k \phi^k = [(\omega_1 \omega_2)^*]^i_k \phi^k. \quad (5.23)$$

Заметим, что если ϕ_i преобразуется по фундаментальному представлению $\mathfrak{5}$, то ϕ_i^* преобразуется по представлению $\overline{\mathfrak{5}}$ ($\phi^{*i} = (\phi_i)^*$).

Можно рассмотреть и тензорное представление действующее по форме

$$\phi_{i_1, \dots, i_n}^{j_1, \dots, j_m} \rightarrow \omega_{i_1}^{k_1} \dots \omega_{i_n}^{k_n} (\omega^*)_{l_1}^{j_1} \dots (\omega^*)_{l_m}^{j_m} \phi_{k_1, \dots, k_n}^{l_1, \dots, l_m}. \quad (5.24)$$

Но обычно такие представления являются приводимыми, то есть содержат некоторые нетривиальные инвариантные подпространства. Например, рассмотрим ϕ_{ij}

$$\phi_{ij} \rightarrow \omega_i^k \omega_j^l \phi_{kl}. \quad (5.25)$$

В нем есть инвариантные подпространства, состоящие из антисимметричных тензоров $\phi_{[ij]}$ и симметричных тензоров $\phi_{(ij)}$, так как

$\omega_i^k \omega_j^l \phi_{[kl]}$ антисимметрично по ij , а

$\omega_i^k \omega_j^l \phi_{[kl]}$ - симметрично по ij .

$\phi_{[ij]}$ имеет размерность $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ и обозначается 10.

$\phi_{(ij)}$ имеет размерность $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ и обозначается 15.

Соответственно

$$\phi^{ij} \sim \overline{10}, \quad \phi^{(ij)} \sim \overline{15}. \quad (5.26)$$

Присоединенное представление 24 строится исходя из тензорного представления

$$\phi_i^j \rightarrow \omega_i^k \phi_k^l (\omega^*)^j_l = \omega_i^k \phi_k^l (\omega^+)^j_l = [\omega \phi \omega^{-1}]_i^j, \quad (5.27)$$

- правильный закон преобразования.

Но есть инвариантные подпространства:

($\delta_i^j \rightarrow \delta_i^j$ - инвариантный тензор для $SU(5)$). Поэтому необходимо наложить условие бесследовости $\phi_i^i = 0$ (как и в алгебре Ли $SU(5)$), а также эрмитовости: $\phi^+ = \phi$, так как

$$\phi^+ \rightarrow (\omega \phi \omega^{-1})^+ = \omega \phi^+ \omega^{-1} = \omega \phi \omega^{-1}, \quad (5.28)$$

то есть $\phi'^+ = \phi'$ - действительно выделяется инвариантное подпространство. Поэтому $Adj = 24$ дается тензорами ϕ_i^j такими что $\phi^+ = \phi$ и $tr \phi = 0$.

Помимо δ_i^j у группы $SU(5)$ есть еще 2 инвариантных тензора: ϵ^{ijklm} и ϵ_{ijklm} .

Действительно,

$$\epsilon_{ijklm} \rightarrow \omega_i^{i'} \omega_j^{j'} \omega_k^{k'} \omega_l^{l'} \omega_m^{m'} \epsilon_{i'j'k'l'm'} = \det\{\omega\} \epsilon_{ijklm} = \epsilon_{ijklm}, \quad (5.29)$$

(ϵ -символ является инвариантным тензором для всех групп, матрицы которых имеют определитель равный 1).

В заключении этой части заметим, что если спинор ψ преобразуется по представлению R группы G (например $SU(5)$), то зарядово сопряженный спинор ψ^C преобразуется по сопряженному представлению \bar{R} . Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{\psi^C} &\equiv \psi^T C \iff (\psi^C)^+ \gamma^0 = \psi^T C \quad (C = i\gamma_0 \gamma_2) \\ \implies \psi^C &= (\psi^T C \gamma^0)^+ = -\gamma^0 C \psi^* \quad (C^* = C, C^T = -C), \end{aligned} \quad (5.30)$$

откуда и следует требуемое утверждение (C - матрица зарядового сопряжения, такая что $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$).

Фермионный состав $SU(5)$ ТВО

Ключевое утверждение:

Квантовые числа фермионов по группе Стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ таковы, что их можно получить разместив фермионы одного поколения в представлениях $1 + \bar{5} + 10$ группы $SU(5)$.

При этом речь идет о левых фермионах.

$$\begin{aligned} (\psi_R)^C &= -\gamma^0 C \psi_R^* = -\gamma^0 C \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \psi^* = [C = i\gamma_0 \gamma_2] = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)[- \gamma^0 C \psi^*] = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \psi^C = (\psi^C)_L. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Другими словами, правые фермионы СМ должны быть зарядово сопряжены перед размещением в представлении $SU(5)$.

$$1 \equiv (\mathbf{v}_R)^C = (\mathbf{v}^C)_L, \quad \bar{5}^i \equiv \psi^i = \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L, \quad 10_{ij} \equiv \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{C3} & -u^{C2} & u_1 & d_1 \\ -u^{C3} & 0 & u^{C1} & u_2 & d_2 \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{array} \right)_L. \quad (5.32)$$

Убедимся, что при этом получаются правильные квантовые числа фермионов по подгруппе $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$.

Правое нейтрино:

При $SU(5)$ преобразованиях $(\mathbf{v}^C)_L = inv \implies \mathbf{v}_R$ инвариантно и при преобразованиях $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \implies \mathbf{v}_R$ лежит в тривиальном представлении $SU(3)$ и $SU(2)$ и $Y = 0$ - верно.

Представление $\bar{5}^i$:

$$\bar{5}^i \equiv \psi^i \rightarrow (\omega^*)^i_j \psi^j \quad \text{где} \quad \psi^i = \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L. \quad (5.33)$$

Для подгруппы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$:

$$\omega = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{так что} \quad \omega^* = \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^* & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^* \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \rightarrow \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^* & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L. \quad (5.35)$$

Поэтому

$$(d^C)_L^a \rightarrow e^{2i\alpha} (\omega_3^*)_b^a (d^C)_L^b, \quad (5.36)$$

$$(d_R)^C \rightarrow e^{2i\alpha} \omega_3^* (d_R)^C, \quad (5.37)$$

$$d_R \rightarrow e^{-2i\alpha} \omega_3 d_R \iff d_{Ra} \rightarrow e^{-2i\alpha} (\omega_3)_a^b d_{Rb}. \quad (5.38)$$

Поэтому d_R лежит в фундаментальном представлении группы $SU(3)$ и тривиальном представлении группы $SU(2)$.

Гиперзаряд нетривиален, но мы не знаем нормировку. У d_R должен быть $Y = -1/3$. Поэтому если мы положим $\alpha \equiv \frac{1}{6}\alpha_0$, то

$$d_{Ra} \rightarrow e^{-\frac{i}{3}\alpha_0} (\omega_3)_a^b d_{Rb}, \quad (5.39)$$

и коэффициент при $i\alpha_0$ будет представлять собой гиперзаряд.

Тогда у d_R будут получаться правильные квантовые числа по $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Левые лептоны:

$$\begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix} \rightarrow e^{-3i\alpha} \omega_2^* \begin{pmatrix} e \\ -\nu \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

применяя к этой формуле зарядовое сопряжение, получаем, что

$$\begin{pmatrix} e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix}^C \rightarrow e^{3i\alpha} \omega_2 \begin{pmatrix} e_L \\ -\nu_L \end{pmatrix}^C. \quad (5.41)$$

Поскольку если $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, то, как было показано ранее, $\begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} \rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{-3i\alpha} \omega_2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = e^{-\frac{i\alpha_0}{2}} \omega_2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L. \quad (5.42)$$

Таким образом, можно видеть, что левые лептоны преобразуются по тривиальному представлению $SU(3)$, фундаментальному представлению $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y = -1/2$ - верно.

Представление 10_{ij} :

$$10_{ij} \equiv \psi_{ij} \rightarrow \omega_i^k \omega_j^l \psi_{kl}, \quad \text{где}$$

$$10_{ij} = \psi_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{C3} & -u^{C2} & u_1 & d_1 \\ -u^{C3} & 0 & u^{C1} & u_2 & d_2 \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{array} \right)_L. \quad (5.43)$$

Разделим индекс $i = \overline{1,5}$ на группы: $i = (a, \alpha)$ где $a = \overline{1,3}$, $\alpha = 4,5$. Тогда

$$\psi_{a\alpha} \rightarrow \omega_a^b \omega_\alpha^\beta \psi_{b\beta}, \quad (5.44)$$

при $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ преобразованиях.

При этом

$$\omega_a^b = e^{-2i\alpha} (\omega_3)_a^b; \quad \omega_\alpha^\beta = e^{3i\alpha} (\omega_2)_\alpha^\beta$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L \rightarrow e^{-2i\alpha} \omega_3 e^{3i\alpha} \omega_2 \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L = e^{\frac{i\alpha_0}{6}} \omega_3 \omega_2 \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L. \quad (5.45)$$

Поэтому левые кварки лежат в фундаментальном представлении $SU(3)$, фундаментальном представлении $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y = +1/6$ - верно.

$$\psi_{\alpha\beta} \rightarrow \omega_\alpha^\gamma \omega_\beta^\delta \psi_{\gamma\delta}, \quad \text{причем } \psi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} (e^C)_L \quad \text{где } \varepsilon_{45} = -\varepsilon_{54} = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta} (e^C)_L \rightarrow e^{3i\alpha} (\omega_2)_\alpha^\gamma e^{3i\alpha} (\omega_2)_\beta^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} (e^C)_L. \quad (5.46)$$

При этом $\alpha = \frac{1}{6} \alpha_0$, а

$$(\omega_2)_\alpha^\gamma (\omega_2)_\beta^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \det \omega_2 = \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (5.47)$$

(ε -символ - инвариантный тензор для $SU(2)$)

$$\Rightarrow \varepsilon_{\alpha\beta} (e^C)_L \rightarrow e^{i\alpha_0} \varepsilon_{\alpha\beta} (e^C)_L$$

$$\Rightarrow e_R \rightarrow e^{i\alpha_0} e_R. \quad (5.48)$$

Поэтому правые заряженные лептоны преобразуются по тривиальным представлениям $SU(3)$ и $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y = -1$ - верно.

$$\psi_{ab} \rightarrow \omega_a^d \omega_b^e \psi_{de} \quad \text{причем } \psi_{ab} = \varepsilon_{abf} (u^C)_L^f. \quad (5.49)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abf}(u^C)_L^f &\rightarrow e^{-2i\alpha}(\omega_3)_a^d e^{-2i\alpha}(\omega_3)_b^e \varepsilon_{def}(u^C)_L^f = \\ &= e^{-\frac{2i\alpha_0}{3}} (\omega_3)_a^d (\omega_3)_b^e (\omega_3^{-1})_h^f (\omega_3)_f^g \varepsilon_{deg}(u^C)_L^h.\end{aligned}\quad (5.50)$$

Поэтому правые верхние кварки преобразуются по фундаментальному представлению $SU(3)$, тривиальному представлению $SU(2)$ и имеют гиперзаряд $Y = 2/3$ - верно.

Таким образом мы убедились, что, разместив фермионы одного поколения в представлениях $1 + \bar{5} + 10$ группы $SU(5)$, мы получим правильные квантовые числа по подгруппе $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$.

При этом этот факт является очень нетривиальным.

С точки зрения теории групп мы доказали, что

$$\begin{aligned}\bar{5} &= (\bar{3}, 1)(+1/3) + (1, 2)(-1/2), \\ 10 &= (3, 2)(+1/6) + (\bar{3}, 1)(-2/3) + (1, 1)(+1).\end{aligned}\quad (5.51)$$

Лекция 6. Калибровочные бозоны в $SU(5)$ ТВО и предсказание для угла Вайнберга

Так как в теориях Янга-Миллса число калибровочных бозонов всегда равно размерности калибровочной группы, то для $G = SU(5)$ будет $\dim SU(5) = 24$ калибровочных бозонов, из которых $\dim SU(3) \times SU(2) \times U(1) = 12$ были в Стандартной Модели, а еще $24 - 12 = 12$ новых.

Так как $SU(5)$ - простая группа, то имеется только одна константа связи e_5 .

$$A_\mu = ie_5 \frac{A_\mu^A \lambda^A}{2} = \frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_{\mu 1}^* & Y_{\mu 1}^* \\ & A_\mu^A & \lambda^A & X_{\mu 2}^* & Y_{\mu 2}^* \\ & SU(3) & SU(3) & X_{\mu 3}^* & Y_{\mu 3}^* \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & A_\mu^A & \sigma^A \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & SU(2) & SU(2) \end{array} \right) + \frac{ie_5}{2} \frac{A_\mu^{24} \lambda^{24}}{SU(5)SU(5)}, \quad (6.1)$$

при этом $X_{\mu a}^* \equiv (X_\mu^a)^*$; $Y_{\mu a}^* \equiv (Y_\mu^a)^*$, так что получившееся выражение является анти-эрмитовой матрицей

$$A_\mu^+ = -A_\mu. \quad (6.2)$$

Также очевидно, что $\text{tr}_{SU(5)} A_\mu = 0$. Поскольку вложение $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ имеет вид

$$\omega = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

то A_μ^A и A_μ^A отождествляются с $SU(3) \times SU(2)$ калибровочными полями, а так как

$$\lambda^{24}_{SU(5)} = \frac{1}{\sqrt{15}} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad (6.4)$$

то $\lambda^{24}_{SU(5)} = A_\mu$ - калибровочное поле, соответствующее подгруппе $U(1)$.

X_μ^a и Y_μ^a - новые комплексные векторные поля, которых не было в Стандартной Модели.

Так как в группе $SU(5)$ только одна константа связи e_5 , а в $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ - $3(e_1, e_2, e_3)$, то, по-видимому, $SU(5)$ симметрия может иметь место только при определенных соотношениях между e_1, e_2, e_3 . Чтобы выявить эту связь, рассмотрим поле $\phi_i \in 5$ (то есть лежащие в фундаментальном представлении $SU(5)$). Тогда

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + (A_\mu)_i^j \phi_j, \quad (6.5)$$

должно переходить в ковариантную производную по $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, если $X_\mu^a, Y_\mu^a \rightarrow 0$ (это получается если X_μ^a и Y_μ^a имеют очень большие массы и не влияют на низкоэнергетическую физику, см. далее)

$$D_\mu \phi_i \rightarrow \partial_\mu \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} + \frac{ie_5}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^A & \lambda^A & & & \\ SU(3) & SU(3) & & & \\ & & 0 & & \\ & & & A_\mu^A & \sigma^A \\ & & & SU(2) & SU(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} + \frac{ie_5}{2\sqrt{15}} A_\mu^{U(1)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

При этом по отношению к $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ части ϕ_i преобразуются так ($\alpha = \frac{1}{6}\alpha_0$ см. ранее)

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & & 0 \\ & & \\ & 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \rightarrow e^{-\frac{i\alpha_0}{3}} \omega_3 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

фундаментальное $SU(3)$, тривиальное $SU(2)$, $Y = -1/3$ по $U(1)$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \rightarrow e^{-\frac{i\alpha_0}{2}} \omega_2 \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

тривиальное $SU(3)$, фундаментальное $SU(2)$, $Y = +1/2$ по $U(1)$.

$$\begin{aligned} D_{\mu}^{(CM)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} &= \partial_{\mu} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} + \frac{ie_3}{2} A_{\mu}^{SU(3)} \lambda^A \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} - \frac{ie_1}{3} A_{\mu}^{U(1)} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \\ D_{\mu}^{(CM)} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} &= \partial_{\mu} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} + \frac{ie_2}{2} A_{\mu}^{SU(2)} \sigma^A \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} + \frac{ie_1}{2} A_{\mu}^{U(1)} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

С другой стороны, из выражения для ковариантной производной по группе $SU(5)$ мы получаем, что при низких энергиях

$$D_{\mu} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \left[\partial_{\mu} + \frac{ie_5}{2} A_{\mu}^{SU(3)} \lambda^A - \frac{ie_5}{\sqrt{15}} A_{\mu}^{U(1)} \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \\ \left[\partial_{\mu} + \frac{ie_5}{2} A_{\mu}^{SU(2)} \sigma^A + \frac{3ie_5}{2\sqrt{15}} A_{\mu}^{U(1)} \right] \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, мы видим, что

$$\begin{aligned} e_5 = e_3 = e_2; \quad \frac{e_1}{3} &= \frac{e_5}{\sqrt{15}}; \quad \frac{e_1}{2} = \frac{3e_5}{2\sqrt{15}} \\ \rightarrow e_5 &= \sqrt{\frac{5}{3}} e_1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Таким образом, мы получаем, что

$$e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} e_1. \quad (6.12)$$

Это позволяет предсказать значение угла Вайнберга

$$\begin{aligned} e &= e_1 \cos \theta_W = e_2 \sin \theta_W \\ \Rightarrow \tan \theta_W &= \frac{e_1}{e_2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5}} e_5}{e_5} = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sin^2 \theta_W + \cos^2 \theta_W &= 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta_W} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_W} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ \Rightarrow \sin^2 \theta_W &= 3/8. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Определим величины

$$\begin{aligned} \alpha_5 &\equiv \frac{e_5^2}{4\pi}; \quad \alpha_3 \equiv \frac{e_3^2}{4\pi}; \quad \alpha_2 \equiv \frac{e_2^2}{4\pi}; \quad \alpha_{10} \equiv \frac{e_1^2}{4\pi}; \\ \alpha_1 &\equiv \frac{5}{3} \alpha_{10} = \frac{5}{3} \frac{e_1^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Тогда условие существования $SU(5)$ симметрии можно записать в виде

$$\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1. \quad (6.15)$$

Напомним, что эксперимент дает

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W(M_Z) &= 0,23129(5) \quad \left(\frac{3}{8} = 0,375\right), \\ \alpha_3(M_Z) &\simeq (8,4674)^{-1}, \\ \alpha_2(M_Z) &\simeq (29,59)^{-1}, \\ \alpha_1(M_Z) &\simeq (59,01)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

- видно, что на масштабе M_Z предсказания $SU(5)$ модели не выполняются. Причина - наличие квантовых поправок. Далее будет показано, что в суперсимметричной версии Стандартной Модели имеется масштаб, на котором предсказания $SU(5)$ модели оказываются верными.

Лекция 7. Квантовые числа калибровочных бозонов

X_μ^a и Y_μ^a

Выясним вначале какие квантовые числа имеют калибровочные бозоны X_μ^a и Y_μ^a по отношению к группе $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$.

При $SU(5)$ преобразованиях

$$A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}. \quad (7.1)$$

Если $\omega \in SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, то $\omega = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix}$. В этом случае

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow & \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} \left[\frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|cc} \frac{A_\mu^A}{SU(3)} & \frac{\lambda^A}{SU(3)} & X_\mu^* & Y_\mu^* \\ \hline X_\mu & Y_\mu & \frac{A_\mu^A}{SU(2)} & \frac{\sigma^A}{SU(2)} \end{array} \right) + \frac{ie_5}{2} \frac{A_\mu^{24}}{SU(5)} \frac{\lambda^{24}}{U(1)} \right] \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^{-1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^{-1} \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{pmatrix} \left[\frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|cc} \frac{A_\mu^A}{SU(3)} & \frac{\lambda^A}{SU(3)} & X_\mu^* & Y_\mu^* \\ \hline X_\mu & Y_\mu & \frac{A_\mu^A}{SU(2)} & \frac{\sigma^A}{SU(2)} \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} \omega_3^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-3i\alpha} \omega_2^{-1} \end{pmatrix} + \\ & + \frac{ie_5}{2} \frac{A_\mu^{24}}{SU(5)} \frac{\lambda^{24}}{U(1)} - i \partial_\mu \alpha \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_3 \partial_\mu \omega_3^{-1} & 0 \\ 0 & \omega_2 \partial_\mu \omega_2^{-1} \end{pmatrix}. \quad (7.2) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} e_1$ и $\alpha = \frac{1}{6} \alpha_0$, получаем, что

$$A_\mu \begin{matrix} = \\ SU(3) \end{matrix} = \frac{ie_3}{2} \frac{A_\mu^A}{SU(3)} \frac{\lambda^A}{SU(3)} \rightarrow \omega_3 \frac{A_\mu}{SU(3)} \omega_3^{-1} + \omega_3 \partial_\mu \omega_3^{-1}, \quad (7.3)$$

$$A_\mu \begin{matrix} = \\ SU(2) \end{matrix} = \frac{ie_2}{2} \frac{A_\mu^A}{SU(2)} \frac{\sigma^A}{SU(2)} \rightarrow \omega_2 \frac{A_\mu}{SU(2)} \omega_2^{-1} + \omega_2 \partial_\mu \omega_2^{-1}, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} A_\mu \begin{matrix} = \\ U(1) \end{matrix} & \frac{e_1}{2} \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{15}} \rightarrow A_\mu \begin{matrix} = \\ U(1) \end{matrix} \frac{e_1}{2} \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{6} \partial_\mu \alpha_0 \\ \implies & A_\mu \begin{matrix} = \\ U(1) \end{matrix} \rightarrow A_\mu \begin{matrix} = \\ U(1) \end{matrix} - \frac{1}{e_1} \partial_\mu \alpha_0 A_\mu \begin{matrix} = \\ U(1) \end{matrix} - \partial_\mu \alpha_1, \quad (7.5) \end{aligned}$$

здесь $\alpha_0 = e_1 \alpha_1$. Гиперзаряд получился как коэффициент при α_0 и следовательно это

правильное отождествление.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} &\rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} \omega_3^{-1} e^{3i\alpha} e^{2i\alpha} = \omega_2 \begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} \omega_3^{-1} e^{\frac{5i\alpha_0}{6}} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_\mu^a \\ Y_\mu^a \end{pmatrix} &\rightarrow \omega_2 \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (\omega_3^+)_b^a e^{\frac{5i\alpha_0}{6}} = \omega_2 (\omega_3^*)^a_b \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} e^{\frac{5i\alpha_0}{6}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Получаем антифундаментальное $SU(3)$, фундаментальное $SU(2)$, $Y = 5/6$ по $U(1)$.

Теперь необходимо также определить электрические заряды X_μ и Y_μ калибровочных бозонов. Это будет сделано в следующем параграфе.

Оператор электрического заряда

Симметрия $SU(5)$ нарушается по цепочке

$$SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}. \quad (7.7)$$

Отбрасывая на каждом шаге массивные векторные поля, получаем, что ($e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}e_1$)

$$\begin{aligned} A_\mu &\xrightarrow{SU(5)} \frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|c} A_\mu^A \lambda^A & 0 \\ \hline 0 & A_\mu^A \sigma^A \end{array} \right) + \frac{ie_5}{2\sqrt{15}} A_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) = \\ &\left(\begin{array}{c|c} A_\mu & 0 \\ \hline 0 & A_\mu \end{array} \right) + \frac{ie_1}{6} A_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_\mu & 0 \\ \hline 0 & \frac{ie_2}{2} A_\mu^3 \sigma^3 \end{array} \right) + \frac{ie_1}{6} A_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_\mu & 0 \\ \hline SU(3) & \\ 0 & ieA_\mu \frac{1}{2} \sigma^3 \end{array} \right) + \frac{ie}{6} A_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad (7.8)$$

так как $e_2 \underset{SU(2)}{A_\mu^3} \rightarrow e_2 \sin \theta_W A_\mu = e A_\mu$; $e_1 \underset{U(1)}{A_\mu} \rightarrow e A_\mu$. Поэтому при очень низких энергиях ($\ll 10^2$ ГэВ)

$$\underset{SU(5)}{A_\mu} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_\mu & 0 \\ \hline SU(3) & \\ 0 & 0 \end{array} \right) + ie A_\mu \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (7.9)$$

Таким образом, мы получаем операторы гиперзаряда и электрического заряда вида

$$\hat{Y} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right); \quad \hat{q} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (7.10)$$

С их помощью можно найти все гиперзаряды и электрические заряды элементарных частиц. Рассмотрим более подробно случай электрического заряда.

Фермионы: $1 + \bar{5} + 10$

$1 \sim (v^C)_L$ - тривиальное представление $\implies q((v^C)_L) = 0 \implies q(v_R) = 0$,

$\bar{5}^i = \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}$ - антифундаментальное представление,

$\bar{5}^i \rightarrow (\omega^*)_j \bar{5}^j = [(\omega^{-1})^T]^i_j \bar{5}^j \simeq \bar{5}^i - (\alpha^T)^i_j \bar{5}^j$ - генераторы для $\bar{5}$ отличаются от гене-

раторов для 5 на знак и транспонирование. Следовательно

$$\begin{aligned} \hat{q} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -v \end{pmatrix}_L &= - \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^T \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -v \end{pmatrix}_L \\ &= \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -v \end{pmatrix}_L \\ \implies q(d_L^C) &= 1/3 \implies q(d_R) = -1/3, q(e_L) = -1, q(v_L) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Получились правильные электрические заряды.

$$\begin{aligned} 10_{ij} &= \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{C3} & -u^{C2} & u_1 & d_1 \\ -u^{C3} & 0 & u^{C1} & u_2 & d_2 \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{array} \right)_L \rightarrow \omega_i^k \omega_j^l 10_{kl} \simeq \\ &\simeq (\delta_i^k + \alpha_i^k)(\delta_j^l + \alpha_j^l) 10_{kl} \simeq 10_{ij} + \alpha_i^k 10_{kj} + \alpha_j^k 10_{ik} \\ &(\hat{q}10)_{ij} = q_i^k 10_{kj} + q_j^k 10_{ik} = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{C3} & -u^{C2} & u_1 & d_1 \\ -u^{C3} & 0 & u^{C1} & u_2 & d_2 \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{array} \right)_L + \\ &\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{C3} & -u^{C2} & u_1 & d_1 \\ -u^{C3} & 0 & u^{C1} & u_2 & d_2 \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^C \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^C & 0 \end{array} \right)_L \left(\begin{array}{ccc|cc} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^T = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & u^{C3} & -u^{C2} \\ -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -u^{C3} & 0 & u^{C1} \\ u^{C2} & -u^{C1} & 0 \end{pmatrix}_L & \frac{2}{3} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_L & -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}_L \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_L & -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}_L \\ \hline \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -u^1 & -u^2 & -u^3 \end{pmatrix}_L & 0 & 1 \cdot (e^C)_L \\ -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} d^1 & d^2 & d^3 \end{pmatrix}_L & 1 \cdot (-e^C)_L & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q((u^C)_L) = -\frac{2}{3} \Rightarrow q(u_R) = \frac{2}{3},$$

$$q(u_L) = \frac{2}{3} \quad q(d_L) = -\frac{1}{3},$$

$$q((e^C)_L) = 1 \Rightarrow q(e_R) = -1. \quad (7.12)$$

Также все электрические заряды получаются верно. Вычислим теперь этим способом электрические заряды калибровочных бозонов.

При глобальных калибровочных преобразованиях

$$A_\mu \xrightarrow{SU(5)} \omega A_\mu \omega^{-1} \simeq (1 + \alpha) A_\mu (1 - \alpha) \simeq A_\mu + [\alpha, A_\mu] \quad (7.13)$$

$$\Rightarrow \hat{q} A_\mu = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu^A & \lambda^A \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 \end{pmatrix}_{SU(3)SU(3)} & \begin{pmatrix} X_{\mu 1}^* & Y_{\mu 1}^* \\ X_{\mu 2}^* & Y_{\mu 2}^* \\ X_{\mu 3}^* & Y_{\mu 3}^* \end{pmatrix} \end{array} \right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \frac{ie_5}{2\sqrt{15}} A_\mu \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_\mu^A & \sigma^A \\ \hline A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{array} \right]_{SU(2)SU(2)} = \left(\begin{array}{c|c} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ \hline A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{array} \right)_{SU(2)SU(2)} =$$

$$(7.14)$$

Лекция 8. Лагранжиан бозонного сектора $SU(5)$ теории великого объединения

Лагранжиан должен включать как поля Янга–Миллса, так и скалярные поля, осуществляющие спонтанное нарушение симметрии

$$SU(5) \xrightarrow{10^{16} \text{ GeV}} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{10^2 \text{ GeV}} SU(3) \times U(1)_{em}. \quad (8.1)$$

Напоминаем, что при выборе представления, в котором должны лежать скалярные поля, нарушающие симметрию, следует его выбрать так, что бы остаточная группа была малой подгруппой для вакуумного среднего исходной симметрии.

Для того, что бы нарушить симметрию (для начала от $SU(5)$ до группы стандартной модели) нужно взять скалярное поле в таком представлении группы, что бы при его разложении по подгруппе (правила ветвления) был бы синглет. Поле скаляров в этом случае будет лежать в представлении $H_i^j \in 24$.

Далее, для нарушения симметрии от группы стандартно модели до группы низкоэнергетической электродинамики следует взять поле скалярных комплексных величин $\phi_i \in 5$.

Разложение для поля H_i^j будем записывать в виде (опуская константу связи)

$$H_i^j = H^A (t^A)_i^j. \quad (8.2)$$

Требования предъявляемые к потенциалу скалярных полей

- 1) Калибровочная инвариантность ;
- 2) Перенормируемость (степени полей не должны быть больше четвертой);
- 3) Для простоты все слагаемые будем выбирать четного порядка по полям (2 и 4);

Выпишем теперь функцию лагранжа, удовлетворяющую все перечисленным требованиям.

Бозонный сектор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{boson} = & \frac{1}{2e_5^2} \text{tr}_{SU(5)}(F_{\mu\nu}^2) + \text{tr}(D_\mu H)^2 + D_\mu \phi^+ D^\mu \phi - V(H) - V(\phi^+ \phi) - \\ & - \lambda_4 \text{tr}(H^2) \cdot \phi^+ \phi - \lambda_5 \phi^+ H^2 \phi, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где

$$V(H) = -m_1^2 \text{tr}(H^2) + \lambda_1 (\text{tr}(H^2))^2 + \lambda_2 \text{tr}(H^4), \quad (8.4)$$

$$V(\phi^+ \phi) = -m_2^2 \phi^+ \phi + \lambda_3 (\phi^+ \phi)^2. \quad (8.5)$$

И ковариантные производные

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \underset{SU(5)}{A_\mu} \phi, \quad (8.6)$$

$$D_\mu \phi^+ = \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \underset{SU(5)}{A_\mu}, \quad (8.7)$$

$$D_\mu H = \partial_\mu H + \underset{SU(5)}{[A_\mu, H]}. \quad (8.8)$$

Калибровочные преобразования

$$\phi \xrightarrow{fund} \omega \phi, \quad (8.9)$$

$$\phi^+ \rightarrow \phi^+ \omega^+, \quad (8.10)$$

$$H \xrightarrow{Adj} \omega H \omega^{-1}, \quad (8.11)$$

$$\underset{SU(5)}{A_\mu} \rightarrow \omega \underset{SU(5)}{A_\mu} \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}, \quad (8.12)$$

$$D_\mu \phi \rightarrow \omega D_\mu \phi, \quad (8.13)$$

$$D_\mu \phi^+ \rightarrow D_\mu \phi^+ \omega^+, \quad (8.14)$$

$$D_\mu H \rightarrow \omega \cdot D_\mu H \cdot \omega^{-1}, \quad (8.15)$$

$$\underset{SU(5)}{F_{\mu\nu}} \rightarrow \omega \cdot \underset{SU(5)}{F_{\mu\nu}} \cdot \omega^{-1}. \quad (8.16)$$

Калибровочная инвариантность доказываться здесь не будет, с помощью выписанных равенств она доказывается элементарно.

По порядку, вакуумные средние полей H , ϕ сравнимы с соответствующими масштабами нарушения симметрии

$$H_0 \sim 10^{16} \text{ Gev}, \quad \phi_0 \sim 10^2 \text{ Gev} \quad (8.17)$$

Так что при исследовании нарушения $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ всеми слагаемыми, пропорциональными ϕ можно пренебречь, т.е. существенным остается только слагаемое $V(H)$, найдем его минимум. При этом используя калибровочную инвариантность, выберем элемент $\omega \in SU(5)$ так, что бы

$$H_0 \rightarrow \omega H_0 \omega^{-1} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

При этом ввиду условий $H^+ = H$, $tr(H) = 0$ должно быть

$$H_i \in Re, \sum_{i=1}^5 H_i = 0. \quad (8.19)$$

То есть среди пяти величин H_i всего четыре независимые. Сам потенциал $V(H)$ переписывается следующим образом

$$V(H) = -m_1^2 \sum_{i=1}^5 H_i^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^5 H_i^2 \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^5 H_i^4 + \mu \cdot \sum_{i=1}^5 H_i, \quad (8.20)$$

где условие связи $\sum_{i=1}^5 H_i$ учтено в последнем слагаемом с неопределенным множителем лагранжа μ . Необходимое условие экстремума

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial H_i} &= -2m_1^2 H_i + 4\lambda_1 H_i \sum_{j=1}^5 H_j^2 + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu = \\ &= -2m_1^2 H_i + 4\lambda_1 H_i A + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu = 0, \quad \overline{1,5} \end{aligned} \quad (8.21)$$

где $A = \sum_{j=1}^5 H_j^2$. У получившихся кубических уравнений может быть не более трех различных корней $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, а сами многочлены представляются в форме

$$-2m_1^2 H_i + 4\lambda_1 H_i A + 4\lambda_2 H_i^3 + \mu = 4\lambda_2 \left(H_i - H^{(1)} \right) \left(H_i - H^{(2)} \right) \left(H_i - H^{(3)} \right) = 0. \quad (8.22)$$

При этом слагаемых второй степени слева нет, а справа есть, значит соответствующий коэффициент должен быть равен нулю

$$H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)} = 0. \quad (8.23)$$

Обозначая количество корней $H^{(i)}$ через n_i , следовательно можно получить следующие соотношения

$$H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)} = 0, \quad (8.24)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5, \quad (8.25)$$

$$tr(H) = 0 \rightarrow n_1 H^{(1)} + n_2 H^{(2)} + n_3 H^{(3)} = 0. \quad (8.26)$$

Из первого уравнения выразим $H^{(3)}$

$$H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(3)} = 0 \rightarrow H^{(3)} = -H^{(2)} - H^{(1)}. \quad (8.27)$$

Подставим в третье и выразим $H^{(2)}$ и $H^{(3)}$

$$H^{(2)} = \frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} H^{(1)}, \quad H^{(3)} = \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} H^{(1)}. \quad (8.28)$$

Подставим все в потенциал $V(H)$, который, после упрощений, примет вид

$$V(H) = -m_n^2(H^{(1)})^2 + \lambda_n(H^{(1)})^4, \quad (8.29)$$

где

$$m_n^2 = m_1^2 \left[n_1 + n_2 \left(\frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 + n_3 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \right)^2 \right], \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n = \lambda_1 \left[n_1 + n_2 \left(\frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^2 + n_3 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \right)^2 \right]^2 \\ + \lambda_2 \left[n_1 + n_2 \left(\frac{n_3 - n_1}{n_2 - n_3} \right)^4 + n_3 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Минимизировать эту функцию несложно

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial H^{(1)}} = -2m_n^2 H^{(1)} + 4\lambda_n (H^{(1)})^3 = 2H^{(1)} \left(-m_n^2 + 2\lambda_n (H^{(1)})^2 \right) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow H^{(1)} = 0, \quad (H^{(1)})^2 = \frac{m_n^2}{2\lambda_n}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Отбрасывая тривиальный минимум (когда все $H^{(i)}$ равны нулю), отбрасываем корень $H^{(1)} = 0$. Далее, необходимо, чтобы в нетривиальном минимуме значение потенциала было меньше нуля

$$V_{min} = V \left(\frac{m_n^2}{2\lambda_n} \right) = -\frac{m_n^4}{2\lambda_n} + \lambda_n \left(\frac{m_n^2}{2\lambda_n} \right)^2 \equiv -\frac{m_1^4}{4(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot f(n_1, n_2, n_3))}, \quad (8.33)$$

где после упрощений

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_1(n_2 - n_3)^4 + n_2(n_1 - n_3)^4 + n_3(n_1 - n_2)^4}{\left[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2 \right]^2} = \\ \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_1 - n_3)^2}{2 \left[n_1(n_2 - n_3)^2 + n_2(n_1 - n_3)^2 + n_3(n_1 - n_2)^2 \right]} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Перебирая все возможные значения чисел n_i выпишем следующую таблицу

№	n_1	n_2	n_3	$f(n_1, n_2, n_3)$	малая группа
1	5	0	0	– (неопределенность)	$SU(5)$
2	4	1	0	$\frac{13}{20}$	$SU(4) \times U(1)$
3	3	2	0	$\frac{7}{30}$	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$
4	3	1	1	$\frac{1}{2}$	$SU(3) \times U(1) \times U(1)$
5	2	2	1	$\frac{1}{4}$	$SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1)$

Требуя, чтобы V_{min} было меньше нуля необходимо должно быть $\lambda_1 + \lambda_2 \cdot f(n_1, n_2, n_3) > 0$. Требуя еще, что бы и $\lambda_2 > 0$, для минимальности значения V_{min} необходимо чтобы функция $f(n_1, n_2, n_3)$ принимала наименьшее значение. То есть правильным будет случай 3. Тогда

$$H_0 = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Из условия безследовости $tr(H_0) = 0 \rightarrow H^{(2)} = -\frac{3}{2}H^{(1)}$, и можно взять, например, $H^{(1)} = -2V$. Тогда

$$H_0 = V \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad (8.36)$$

где V —есть некоторый коэффициент имеющий размерность массы. Получившееся выражение, очевидно, будет инвариантным относительно элемента

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{array} \right), \quad (8.37)$$

принадлежащего $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$. Так что малой группой будет калибровочная группа стандартной модели.

Аналогично разбираются и малые группы всех остальных случаев.

Таким образом, найдено вакуумное среднее поля H , найдем теперь и значение потенциала в этой точке $V(H_0)$

$$\begin{aligned} V(H_0) &= -m_1^2 \sum_{i=1}^5 H_{i0}^2 + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^5 H_{i0}^2 \right)^2 + \lambda_2 \sum_{i=1}^5 H_{i0}^4 = \\ &= -m_1^2 V^2 (3 \cdot 4 + 2 \cdot 9) + \lambda_1 V^4 (3 \cdot 4 + 2 \cdot 9)^2 + \lambda_2 V^4 (3 \cdot 16 + 2 \cdot 81) = \\ &= -30m_1^2 V^2 + V^4 (900\lambda_1 + 210\lambda_2). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Минимизируя это значение по V можно найти

$$\frac{\partial V(H_0)}{\partial V} = -60m_1^2 V + 4V^3 (900\lambda_1 + 210\lambda_2) \rightarrow V = \frac{m_1}{\sqrt{2(30\lambda_1 + 7\lambda_2)}} \sim 10^{16} \text{ GeV}. \quad (8.39)$$

Далее, нарушение симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(4) \times U(1)_{em}$ происходит при энергиях 10^2 GeV , когда поле H сидит очень точно в своем вакуумном значении H_0 . Так что потенциал выписанного лагранжиана бозонной части

$$\begin{aligned} V(H, \phi^+, \phi) &= V(H) + V(\phi^+ \phi) + \lambda_4 \text{tr}(H^2) \cdot \phi^+ \phi + \lambda_5 \phi^+ H^2 \phi \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(H_0) + V(\phi^+ \phi) + \lambda_4 \text{tr}(H_0^2) \cdot \phi^+ \phi + \lambda_5 \phi^+ H_0^2 \phi. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Учитывая явный вид потенциала $V(\phi^+ \phi)$ имея в виду, что

$$\text{tr}(H_0^2) = 30V^2, \quad (8.41)$$

$$H_0^2 = V^2 \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right). \quad (8.42)$$

А так же отбрасывая постоянное слагаемое $V(H_0)$, потенциал $V(H, \phi^+, \phi)$ примет вид

$$V(H, \phi^+, \phi) \rightarrow -m_1^2 \phi^+ \phi + \lambda_3 (\phi^+ \phi)^2 + 30V^2 \lambda_4 \phi^+ \phi + \lambda_5 V^2 \phi^+ \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right) \phi. \quad (8.43)$$

Теперь, вспоминаем, что для поля $\phi_i \in 5$, преобразующегося по подгруппе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, как

$$\left(\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \phi_5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \phi_5 \end{array} \right). \quad (8.44)$$

Мы уже выписывали квантовые числа

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{array} \right) &\rightarrow \begin{array}{l} \text{fund } SU(3) \\ \text{triv } SU(2) \\ Y = -\frac{1}{3} \end{array}, \\ \left(\begin{array}{c} \phi_4 \\ \phi_5 \end{array} \right) &\rightarrow \begin{array}{l} \text{triv } SU(3) \\ \text{fund } SU(2) \\ Y = \frac{1}{2} \end{array}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

где дуплет соответствует в точности дуплету полей Хиггса в стандартной модели. Триплет так же называется хиггсовским триплетом.

Далее, следует позаботиться, что бы для дуплета получился правильный потенциал, а триплет исчез, т.е. его масса должна быть очень большой, он должен сидеть в своем вакуумном среднем очень точно.

Перепишем потенциал начиная со второго слагаемого (все остальные квадратичны по величине ϕ)

$$V(H, \phi^+, \phi) \rightarrow \lambda_3 \left[(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} + (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \right]^2 + (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^* | \phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} -m_2^2 + 30V^2\lambda_4 + 4\lambda_5V^2 & 0 \\ 0 & -m_2^2 + 30V^2\lambda_4 + 9\lambda_5V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

В стандартной модели у нас был потенциал

$$V_{\text{CM}} = \lambda((\phi^+ \phi)^2 - v^2)^2 = \lambda(\phi^+ \phi)^4 - 2\lambda v^2(\phi^+ \phi) + \lambda v^4. \quad (8.47)$$

Отсюда видно, что сравнение слагаемых четвертого порядка по полям дает равенство $\lambda_3 = \lambda$. Сравнение квадратичных слагаемых дает равенство

$$-2\lambda v^2 = -m_2^2 + 30V^2\lambda_4 + 9\lambda_5V^2. \quad (8.48)$$

По порядку величины $v \sim 10^2 \text{ GeV}$, $V \sim 10^{16} \text{ GeV}$ так что без точного подгона величина справа сильно отличается от величины слева.

Вопрос почему две громадные величины в сумме дают очень маленькую называется проблемой точной подстройки и является характерным для многих теорий великого объединения. Чтобы ее решить нужно потрудиться, но есть теории в которых она решается естественным образом.

Что еще касается второго слагаемого, то левый верхний блок дает массу хиггсовского триплета

$$-m_2^2 + 30V^2\lambda_4 + 4\lambda_5V^2 = -2\lambda v^2 - 5V^2\lambda_5. \quad (8.49)$$

Здесь, если выбрать $\lambda_5 > 0$ второе слагаемое (а значит имасса хиггсовского триплета) будет очень большая, как и требуется для их исчезновения.

Лекция 9. Лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ МОДЕЛИ

Массы калибровочных бозонов X_μ^a, Y_μ^a

Вспомним, что вакуумное среднее поля H (дающего массы интегрирующим бозонам) имеет вид

$$H_0 = V \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right), \quad (9.1)$$

где по порядку величины $V \sim 10^{16}$ GeV. Малой группой является подгруппа $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5)$ с элементами

$$\omega = \left(\begin{array}{c|c} e^{-2i\alpha} \omega_3 & 0 \\ \hline 0 & e^{3i\alpha} \omega_2 \end{array} \right). \quad (9.2)$$

Выражение для калибровочных полей группы $SU(5)$ записывалось следующим образом

$$A_\mu = \frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_{\mu 1}^* & Y_{\mu 1}^* \\ & A_\mu^A & \lambda^A & X_{\mu 2}^* & Y_{\mu 2}^* \\ & & & X_{\mu 3}^* & Y_{\mu 3}^* \\ \hline X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 & & \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 & A_\mu^A & \sigma^A \end{array} \right) + \frac{ie_5}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) A_\mu. \quad (9.3)$$

Так же была установлена связь констант связи

$$e_5 = e_3 = e_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} e_1. \quad (9.4)$$

Далее, массы векторных полей появляются за счет вакуумного среднего поля H и возникают из ковариантных производных в хигсовском потенциале для слагаемого $tr(D_\mu H)^2 = tr(\partial_\mu H + [A_\mu, H])^2$. При этом, интересуясь именно массами, следует учесть только слагаемые квадратичные по полям

$$tr(\partial_\mu H + [A_\mu, H])^2 \rightarrow tr([A_\mu, H])^2. \quad (9.5)$$

При этом поле H будет лежать в своем вакуумном среднем. Вычислим коммутатор, при этом второе слагаемое в A_μ очевидно будет коммутировать с H_0 , так что

$$[A_\mu, H] \rightarrow [A_\mu, H_0] = \frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|cc} A_\mu^A & \lambda^A & \\ \hline SU(3) & SU(3) & \\ X_\mu^1 & X_\mu^2 & X_\mu^3 \\ Y_\mu^1 & Y_\mu^2 & Y_\mu^3 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} X_{\mu 1}^* & Y_{\mu 1}^* \\ X_{\mu 2}^* & Y_{\mu 2}^* \\ X_{\mu 3}^* & Y_{\mu 3}^* \\ A_\mu^A & \sigma^A \\ SU(2) & SU(2) \end{array} \right), V \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right). \quad (9.6)$$

Производя почленное умножение, для коммутатора можно получить следующее выражение

$$[A_\mu, H_0] = \frac{ie_5}{2} V \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 5X_{\mu 1}^* & 5Y_{\mu 1}^* \\ \hline 5X_{\mu 2}^* & 5Y_{\mu 2}^* & \\ 5X_{\mu 3}^* & 5Y_{\mu 3}^* & \\ \hline -5X_\mu^1 & -5X_\mu^2 & -5X_\mu^3 \\ -5Y_\mu^1 & -5Y_\mu^2 & -5Y_\mu^3 \\ \hline & & 0 \end{array} \right). \quad (9.7)$$

Откуда след квадрата коммутатора

$$\begin{aligned} tr([A_\mu, H]^2) &= -\frac{e_5^2}{2} V^2 \cdot tr \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 5X_{\mu a}^* & 5Y_{\mu a}^* \\ \hline -5X_\mu^a & & 0 \\ -5Y_\mu^a & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 5X_{\mu a}^* & 5Y_{\mu a}^* \\ \hline -5X_\mu^a & & 0 \\ -5Y_\mu^a & & \end{array} \right) = \\ &= \frac{25}{4} e_5^2 V^2 (X_{\mu a}^* X^{\mu a} + Y_{\mu a}^* Y^{\mu a}) \cdot 2 = \frac{25}{2} e_5^2 V^2 (X_{\mu a}^* X^{\mu a} + Y_{\mu a}^* Y^{\mu a}). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Что и дает массы калибровочных бозонов X, Y . Как и должно быть, бозоны малой группы остались безмассовыми. Однако прежде чем выписывать массы, нужно еще рассмотреть кинетическое слагаемое, отбрасывая все лишние поля

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e_5^2} tr F_{\mu\nu}^2 &\rightarrow \frac{1}{2e_5^2} tr \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right)_{SU(5)}^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2e_5^2} tr \left[\frac{ie_5}{2} \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \partial_\mu X_{\nu a}^* - \partial_\nu X_{\mu a}^* & \partial_\mu Y_{\nu a}^* - \partial_\nu Y_{\mu a}^* \\ \hline \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a & & \\ \partial_\mu Y_\nu^a - \partial_\nu Y_\mu^a & & 0 \end{array} \right) \right]^2 = \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$= -\frac{1}{2e_5^2} \frac{e_5^2}{4} \cdot 2 [|\partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a|^2 + |\partial_\mu Y_\nu^a - \partial_\nu Y_\mu^a|^2] = \quad (9.10)$$

$$= -\frac{1}{4} [|\partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a|^2 + |\partial_\mu Y_\nu^a - \partial_\nu Y_\mu^a|^2]. \quad (9.11)$$

Вспминая, что лагранжиан векторного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu^2. \quad (9.12)$$

Видно, что первое слагаемое (кинетическое) имеет необходимый вид. А значит с квадратом массы, деленным на два, можно отождетить коэффициент при втором слагаемом. То есть можно написать (извлекая корень)

$$m_X = m_Y = 5e_5 V. \quad (9.13)$$

При этом $V \sim 10^{15} \text{ Gev}$.

Лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ модели

Как мы помним, фермионы (левые) могут быть размещены в трех неприводимых представлниях $SU(5)$

$$L: 1 + \bar{5} + 10, \quad (9.14)$$

где

$$1 \rightarrow (v_R)^c = (v^c)_L, \quad (9.15)$$

$$\bar{5}^i = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -v \end{pmatrix}_L, \quad (9.16)$$

$$10_{ij} = -10_{ji} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ \hline -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{array} \right)_L. \quad (9.17)$$

Правые фермионы получаютс применением операции зарядового сопряжения

$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L. \quad (9.18)$$

Записывая ларанжиан, будем требовать калибровочную и лоренц инвариантность. При этом квадратичные комбинации по спинорам будем записывать в виде

$$\bar{\psi}^c \psi. \quad (9.19)$$

Так как в $SU(5)$ -модель входят только левые фермионы и если в выписном выше выражении убрать знак зарядового сопряжения, то такое произведение левых фермионов обратится в ноль.

Лагранжиан фермионного сектора записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & i(\mathbf{v}^c)_L \gamma^\mu \partial_\mu (\mathbf{v}^c)_L + i\bar{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{ij} \gamma^\mu D_\mu \psi_{ij} - \\ & - \left[(Y_1)_{IJ} \varepsilon^{ijklm} \psi_{ij}^{IT} C \psi_{kl}^J \phi_m + (Y_2)_{IJ} \psi_{ij}^{IT} C \psi^{iJ} \phi^{*j} + \right. \\ & \left. + (Y_3)_{IJ} (\mathbf{v}^c)_L^{IT} C \psi^{iJ} \phi_i + \frac{1}{2} M_{IJ} (\mathbf{v}^c)_L^{IT} C (\mathbf{v}^c)_L + \text{к.с.}, \right. \end{aligned} \quad (9.20)$$

где $\psi^i = \bar{5}^i$, $\psi_{ij} = 10_{ij}$. Все юкавские слагаемые (в квадратных скобках) содержат матрицу зарядового сопряжения (что бы соответствующие произведения не обращались в ноль). Последнее массовое слагаемое не преобразуется по группе $SU(5)$, поэтому его наличие не нарушает калибровочной симметрии.

Здесь зададимся вопросом, можно ли, как и в случае фермионного лагранжиана стандартной модели, перейти к новым переменным так, что бы часть, содержащая юкавские константы, сократилась. Преобразование полевых переменных запишется в виде

$$\psi_{ij}^J \rightarrow (A_2^*)_{IJ} \psi_{ij}^T, \quad (9.21)$$

$$\psi^{iJ} \rightarrow (B_2)_{IJ} \psi^{iJ}, \quad (9.22)$$

$$(\mathbf{v}^c)_L^I \rightarrow (A_3^*)_{IJ} (\mathbf{v}^c)_L^J. \quad (9.23)$$

Все входящие сюда матрицы преобразования A_2^* , A_3^* , B_2 являются унитарными (звездочки добавлены для удобства, унитарность матриц приводит к неизменности кинетических слагаемых). Матрицы юкавских констант преобразуются тогда по формулам

$$Y_1 \rightarrow A_2^{-1} Y_1 A_2^*, \quad (9.24)$$

$$Y_2 \rightarrow A_2^{-1} Y_2 B_2, \quad (9.25)$$

$$Y_3 \rightarrow A_3^{-1} Y_3 B_2. \quad (9.26)$$

Преобразуется так же и матрица M_{IJ}

$$M \rightarrow A_3^{-1} M A_3^*. \quad (9.27)$$

Для диагонализации одной матрицы Y нам необходимо две A, B

$$Y \rightarrow A^{-1}YB. \quad (9.28)$$

Ввиду этого матрицу Y_1 мы не сможем упростить, т.к. она преобразуется с помощью одной матрицы A_2 . Это же относится и к матрице M . Из оставшихся матриц Y_2, Y_3 - одну мы можем сделать диагональной. Преобразуем матрицу Y_2 и, таким образом, будем ее считать не только диагональной, но и положительно определенной, и вещественной.

Далее мы попробуем понять, как фермионы взаимодействуют с калибровочными бозонами.

Лекция 10. Взаимодействие фермионов с калибровочными бозонами

Рассматривать пока будем исключительно кинетические слагаемые

$$\mathcal{L}_\Phi \rightarrow i(\overline{\nu^c})_L \gamma^\mu \partial_\mu (\nu^c)_L + i\overline{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + \frac{i}{2} \overline{\psi}^{ij} \gamma^\mu D_\mu \psi_{ij}. \quad (10.1)$$

При этом нам потребуются некоторые тождества. Для получения первого, распишем

$$\begin{aligned} i\overline{\psi^c} \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c &= \left| \begin{array}{l} \overline{\psi^c} = \psi^T C = (\psi^{c+}) \gamma^0 \rightarrow \\ \rightarrow \psi^c = -\gamma^0 C \psi^* \end{array} \right| = i\psi^T C \gamma^\mu \partial_\mu (-\gamma^0 C \psi^*) = \\ &= |C = -C^{-1}| = i\psi^T C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^0 C^{-1} \partial_\mu \psi^* = |C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}| = i\psi^T \gamma^{\mu T} \gamma^{0T} \partial_\mu \psi^* = \\ &= (i\psi^T \gamma^{\mu T} \gamma^{0T} \partial_\mu \psi^*)^T = -i\partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{по частям} \quad i\overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \end{aligned} \quad (10.2)$$

то есть с точностью до поверхностных слагаемых, не влияющих на уравнения движения

$$i\overline{\psi^c} \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c \rightarrow \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (10.3)$$

то есть если упомянутая комбинация встретится, то символ зарядового сопряжения можно будет убрать.

Для получения второго полезного соотношения, распишем

$$\begin{aligned} \overline{\psi^c} \gamma^\mu A_\mu \psi^c &= \psi^T C \gamma^\mu A_\mu (-\gamma^0 C \psi^*) = \\ &= \psi^T C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^0 C^{-1} A_\mu \psi^* = (\psi^T C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^0 C^{-1} A_\mu \psi^*)^T = -\overline{\psi} \gamma^\mu A_\mu^T \psi. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Откуда и получается второе соотношение

$$\overline{\psi^c} \gamma^\mu A_\mu \psi^c = -\overline{\psi} \gamma^\mu A_\mu^T \psi. \quad (10.5)$$

Полученные тождества позволяют переписать кинетические слагаемые с ковариантными производными

$$i\overline{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi = i\overline{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi + T(A_\mu) \psi) \rightarrow i\overline{\psi^c} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi^c - T(A_\mu)^T \psi^c). \quad (10.6)$$

Собственно, так как величина ψ^c лежит в сопряженном к ψ представлении и генераторы сопряженного представления есть как раз величины $-T(A_\mu)^T$, то в круглых скобках, очевидно, есть ковариантная производная для сопряженного представления

$$\partial_\mu \psi^c - T(A_\mu)^T \psi^c = D_\mu \psi^c. \quad (10.7)$$

Учитывая все выше сказанное и равенство $(\mathbf{v}^c)_L = (\mathbf{v}_R)^c$, кинетическое слагаемое для нейтрино переписется как

$$i\overline{(\mathbf{v}^c)_L}\gamma^\mu\partial_\mu(\mathbf{v}^c)_L = i\overline{(\mathbf{v}_R)^c}\gamma^\mu\partial_\mu(\mathbf{v}_R)^c \rightarrow i\overline{\mathbf{v}_R}\gamma^\mu\partial_\mu\mathbf{v}_R. \quad (10.8)$$

Далее, перепишем второе слагаемое. С учетом

$$T(A_\mu)_{\bar{5}} = -A_\mu^T, \quad (10.9)$$

имеем

$$\begin{aligned} i\overline{\psi_i}\gamma^\mu D_\mu\psi^i &= i\overline{\psi_i}\gamma^\mu[\partial_\mu\psi^i - (A_\mu^T)^i_j\psi^j] = \\ &= i\overline{(d^{C1}, d^{C2}, d^{C3}, e, -\mathbf{v})_L}\gamma^\mu \left\{ \partial_\mu - \left(\begin{array}{cc} A_\mu & \frac{ie_5}{2}(X_\mu^*, Y_\mu^*) \\ SU(3) & \\ \frac{ie_5}{2} \begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} & A_\mu \\ & SU(2) \end{array} \right) - ie_1 \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^T \begin{matrix} A_\mu \\ U(1) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L = \\ &= i\overline{d^C}_L\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \begin{matrix} A_\mu^T \\ SU(3) \end{matrix} + \frac{ie_1}{3} \begin{matrix} A_\mu \\ U(1) \end{matrix} \right) (d^C)_L + \\ &+ i\overline{(e, -\mathbf{v})}_L\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \begin{matrix} A_\mu^T \\ SU(2) \end{matrix} - \frac{ie_1}{2} \begin{matrix} A_\mu \\ U(1) \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L + \\ &+ \frac{e_5}{2}\overline{(d^{C1}, d^{C2}, d^{C3}, e, -\mathbf{v})_L}\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{ie_5}{2}(X_\mu^*, Y_\mu^*) \\ \begin{pmatrix} X_\mu \\ Y_\mu \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L = \\ &= i\overline{d^C}_R\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \begin{matrix} A_\mu \\ SU(3) \end{matrix} - \frac{ie_1}{3} \begin{matrix} A_\mu \\ U(1) \end{matrix} \right) d^C + \\ &i\overline{(\mathbf{v}, e)}_L\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_\mu^T \\ SU(2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{ie_1}{2} \begin{matrix} A_\mu \\ U(1) \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ e \end{pmatrix}_L + \\ &+ \frac{e_5}{2}\overline{(d^C)}_{La}\gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} e \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}_L + \frac{e_5}{2}\overline{(e, -\mathbf{v})}_L\gamma^\mu \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (d^C)_L^a. \quad (10.10) \end{aligned}$$

При этом

$$-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma^A)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^A, \quad (10.11)$$

ТАК ЧТО

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}_i\gamma^\mu D_\mu\psi^i &= i\bar{d}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + A_\mu - \frac{ie_1}{3}A_\mu\right)d_R + \\
 & i\overline{(v,e)}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu + A_\mu^T - \frac{ie_1}{2}A_\mu\right)\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \\
 + \frac{e_5}{2}\overline{(d_R)_a^c}\gamma^\mu(X_\mu^a, Y_\mu^a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \frac{e_5}{2}\overline{(v,e)}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix}(d_R)^{Ca} = \\
 & i\bar{d}_R\gamma^\mu\underset{(CM)}{D_\mu}d_R + i\overline{(v,e)}_L\gamma^\mu\underset{(CM)}{D_\mu}\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \\
 + \left[\frac{e_5}{2}\overline{(d_R)_a^c}\gamma^\mu(X_\mu^a, Y_\mu^a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \text{к.с.}\right], \tag{10.12}
 \end{aligned}$$

где D_μ обозначает производные по полям Стандартной Модели. Последнее равенство также следует из формулы

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\chi)^* = (\bar{\psi}\gamma^\mu\chi)^+ = \chi^+\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi = \chi^+\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0\psi = \bar{\chi}\gamma^\mu\psi. \tag{10.13}$$

Можно видеть, что появились новые сланаемые взаимодействия, обеспечивающие переходы между антикварками и лептонами. Данное взаимодействие, как минимум нарушает барионное число, что приводит к возможности распада протона.

Аналогичным образом переписываем второе слагаемое

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}^{ij}\gamma^\mu D_\mu\psi_{ij}. \tag{10.14}$$

Вначале необходимо записать выражение для ковариантной производной:

$$\psi_{ij} \rightarrow \omega_i^k\omega_j^l\psi_{kl} \simeq \psi_{ij} + \alpha_i^k\psi_{kj} + \alpha_j^l\psi_{il}. \tag{10.15}$$

Поэтому

$$D_\mu\psi_{ij} = \partial_\mu\psi_{ij} + (A_\mu)_i^k\psi_{kj} + (A_\mu)_j^k\psi_{ik}. \tag{10.16}$$

Как следствие, рассматриваемое выражение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ij}\gamma^\mu D_\mu\psi_{ij} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ij}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi_{ij} + (A_\mu)_i^k\psi_{kj} + (A_\mu)_j^k\psi_{ik}) = \\
 &= \frac{i}{2}\bar{\psi}^{ij}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{ij} + i\bar{\psi}^{ij}\gamma^\mu(A_\mu)_i^k\psi_{kj}. \tag{10.17}
 \end{aligned}$$

Будем вычислять различные части этого выражения по отдельности. Из формулы $i\bar{\psi}^c \gamma^\mu \partial_\mu \psi^c \rightarrow \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ очевидно, что

$$\frac{i}{2} \bar{\psi}^{ij} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{ij} = i\bar{u}_R \gamma^\mu u \partial_\mu u_R + i(\overline{u, d})_L \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R. \quad (10.18)$$

Рассмотрим теперь слагаемое

$$i\bar{\psi}^{ij} \gamma^\mu (A_\mu)_i^k \psi_{kj}, \quad (10.19)$$

и разобьем индексы на 2 группы: $i = (a, \alpha)$, где $a = \overline{1, 3}$; $\alpha = \overline{4, 5}$.

Калибровочные поля Стандартно Модели получаются из компонент

$$(A_\mu)_a^b = (A_\mu)_{SU(3)}^b - \frac{ie_1}{3} A_\mu \delta_a^b, \quad (10.20)$$

$$(A_\mu)_\alpha^\beta = (A_\mu)_{SU(2)}^\beta + \frac{ie_1}{2} A_\mu \delta_\alpha^\beta. \quad (10.21)$$

Слагаемые, которые содержат эти поля, имеют вид

$$i\bar{\psi}^{\alpha a} \gamma^\mu (A_\mu)_\alpha^\beta \psi_{\beta a} = i(\overline{u, d})_L \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(2)}^\beta + \frac{ie_1}{2} A_\mu \delta_\alpha^\beta] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}, \quad (10.22)$$

$$i\bar{\psi}^{a\alpha} \gamma^\mu (A_\mu)_a^b \psi_{b\alpha} = i(\overline{u, d})_L \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(3)}^b - \frac{ie_1}{3} A_\mu \delta_a^b] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}^{\alpha\gamma} \gamma^\mu (A_\mu)_\alpha^\beta \psi_{\beta\gamma} &= i\varepsilon^{\alpha\gamma} (\overline{e^C})_L \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(3)}^\beta + \frac{ie_1}{2} A_\mu \delta_\alpha^\beta] \varepsilon_{\beta\gamma} (e^C)_L = \\ &= i\delta_\beta^\alpha (\overline{e_R})^C \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(3)}^\beta + \frac{ie_1}{2} A_\mu \delta_\alpha^\beta] (e_R)^C = \\ &= i\bar{e}_R \gamma^\mu (-ie_1 A_\mu) e_R, \end{aligned} \quad (10.24)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}^{ad} \gamma^\mu (A_\mu)_a^b \psi_{bd} &= i\varepsilon^{ade} (\overline{u^C})_{Le} \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(3)}^b - \frac{ie_1}{3} A_\mu \delta_a^b] \varepsilon_{bdf} (u^C)_L^f = \\ &= i(\delta_b^a \delta_f^e - \delta_f^a \delta_b^e) (\overline{u_R})_e^C \gamma^\mu [(A_\mu)_{SU(3)}^b - \frac{ie_1}{3} A_\mu \delta_a^b] (u_R)^{Cf} = \\ &= -i(\overline{u_R})_b^C \gamma^\mu (A_\mu)_a^b (u_R)^{Ca} - i(\overline{u_R})_a^C \gamma^\mu ie_1 [1 - \frac{1}{3}] A_\mu (u_R)^{Ca} = \\ &= i\bar{u}_R \gamma^\mu (A_\mu)_{SU(3)} u_R + i\bar{u}_R \gamma^\mu \frac{2ie_1}{3} A_\mu u_R. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Соединяя полученные слагаемые с предыдущими, получаем

$$\begin{aligned}
 & i\bar{u}_R \gamma^\mu u \partial_\mu u_R + i\overline{(u,d)}_L \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R + \\
 & + i\bar{u}_R \gamma^\mu \left(A_\mu \underset{SU(3)}{+} \frac{2ie_1}{3} A_\mu \underset{U(1)}{+} \right) u_R + \\
 & + i\overline{(u,d)}_L^a \gamma^\mu \left[(A_\mu) \underset{SU(3)}{+} (A_\mu) \underset{SU(2)}{+} \frac{ie_1}{6} A_\mu \underset{U(1)}{+} \right] \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} + i\bar{e}_R \gamma^\mu (-ie_1 A_\mu) e_R = \\
 & = i\bar{u}_R \gamma^\mu u \underset{(CM)}{D_\mu} u_R + i\overline{(u,d)}_L \gamma^\mu \underset{(CM)}{D_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \underset{(CM)}{D_\mu} e_R. \tag{10.26}
 \end{aligned}$$

Таким образом, получены правильные выражения для ковариантных производных по группе Стандартной Модели.

Лекция 11. Распад протона и связанного нейтрона

Рассмотрим теперь слагаемые, содержащее поля

$$(A_\mu)_a^\beta \rightarrow \frac{ie_5}{2}(X_{\mu a}^*, Y_{\mu a}^*), \quad (11.1)$$

$$(A_\mu)_\alpha^b \rightarrow \frac{ie_5}{2}(X_\mu^b Y_\mu^b). \quad (11.2)$$

Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}^{\alpha\gamma}\gamma^\mu(A_\mu)_\alpha^b\Psi_{b\gamma} &= -itr \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{\bar{C}}_L \gamma^\mu \frac{ie_5}{2} \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u, d)_{Lb} \right] = \\ &= tr \left[e^{\bar{C}}_L \gamma^\mu \frac{e_5}{2} \begin{pmatrix} Y_\mu^b \\ -X_\mu^b \end{pmatrix} (u, d)_{Lb} \right] = \\ &= \frac{e_5}{2} e^{\bar{C}}_L \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}^{\alpha a}\gamma^\mu(A_\mu)_\alpha^b\Psi_{ba} &= -i\overline{(u, d)}_L^a \gamma^\mu \frac{ie_5}{2} \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} \varepsilon_{bad} (u^C)_L^d = \\ &= -\frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)}_L^a \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u^C)_L^d, \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}^{a\gamma}\gamma^\mu(A_\mu)_a^\beta\Psi_{\beta\gamma} &= itr \left[\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}_L^a \gamma_\mu \frac{ie_5}{2} (X_{\mu a}^*, Y_{\mu a}^*) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (e^C)_L \right] = \\ &= -\frac{e_5}{2} tr \left[\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}_L^a \gamma_\mu (X_{\mu a}^*, Y_{\mu a}^*) (e^C)_L \right] = \\ &= \frac{e_5}{2} \overline{(u, d)}_L^a \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (e^C)_L, \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}^{ab}\gamma^\mu(A_\mu)_a^\beta\Psi_{\beta b} &= i\varepsilon_{abd} \overline{(u^C)}_{Ld} \gamma^\mu \frac{ie_5}{2} (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{Lb} = \\ &= -\frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u^C)}_{Ld} \gamma^\mu (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Таким образом, результат вычисления этого слагаемого имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{2} \overline{\Psi}^{ij} \gamma^\mu D_\mu \Psi_{ij} = \overline{u}_R \gamma^\mu u \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} u_R + i \overline{(u, d)}_L \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + i \overline{e}_R \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} e_R + \\
 & \frac{e_5}{2} \overline{e^C}_L \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} + \frac{e_5}{2} \overline{(u, d)}_L^a \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (e^C)_{L-} - \\
 & - \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)}_L^a \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u^C)_L^d - \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u^C)}_{Ld} \gamma^\mu (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}. \quad (11.7)
 \end{aligned}$$

Суммируя результаты для всех слагаемых, получаем, что

$$\begin{aligned}
 & i \overline{(v^c)}_L \gamma^\mu \partial_\mu (v^c)_L + i \overline{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi^i + \frac{i}{2} \overline{\Psi}^{ij} \gamma^\mu D_\mu \Psi_{ij} = \\
 & \overline{v}_R \gamma^\mu \partial_\mu v_R + i \overline{(v, e)}_L \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + i \overline{e}_R \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} e_R + \\
 & + i \overline{d}_R \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} d_R + i \overline{u}_R \gamma^\mu u \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} u_R + i \overline{(u, d)}_L \gamma^\mu \underset{\text{(CM)}}{D_\mu} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \\
 & \frac{e_5}{2} \overline{(d_R)}_a^C \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \frac{e_5}{2} \overline{(v, e)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (d_R)^{Ca} + \\
 & + \frac{e_5}{2} \overline{(e^C)}_L \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} + \frac{e_5}{2} \overline{(u, d)}_L^a \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (e^C)_{L-} - \\
 & - \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)}_L^a \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u^C)_L^d - \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u^C)}_{Ld} \gamma^\mu (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}. \quad (11.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеется часть, которая уже была в Стандартной модели, а также присутствуют дополнительные слагаемые, которые содержат тяжелые калибровочные бозоны X_μ^a и Y_μ^a . При этом дополнительные слагаемые автоматически оказываются вещественными. Например

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{e_5}{2} \overline{(d_R)}_a^C \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L \right]^* = \frac{e_5}{2} \left[(d_{Ra}^T C \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L \right]^+ = \\
 & \frac{e_5}{2} (v, e)_L^+ \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} \gamma^{\mu+} C^+ d_R^{*a} = [C^+ = -C] = \\
 & = \frac{e_5}{2} (v, e)_L^+ \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} \gamma^0 \gamma^\mu (-\gamma^0 C d_R^{*a}) = \\
 & \frac{e_5}{2} \overline{(v, e)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (d_R)^{Ca}. \quad (11.9)
 \end{aligned}$$

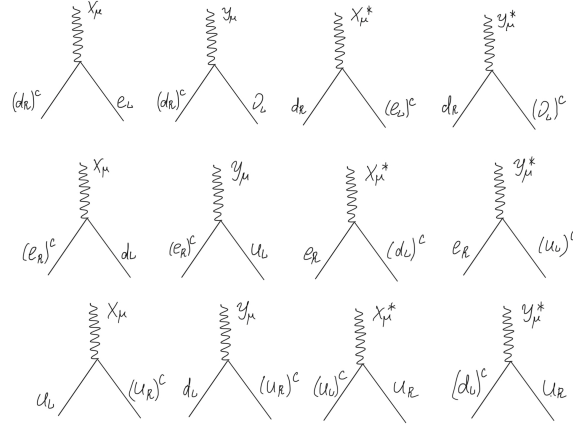


Рис. 11.1. Рис. 3. Вершины взаимодействия с тяжелыми калибровочными бозонами.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\left[\frac{e_5}{2} \overline{(e^C)_L} \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} \right]^* = \frac{e_5}{2} \overline{(u, d)_L} \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu a}^* \\ Y_{\mu a}^* \end{pmatrix} (e^C)_L. \quad (11.10)$$

Последние два слагаемые также взаимно сопряжены

$$\begin{aligned} & \left[\frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)_L} \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u^C)_L^d \right]^* = \\ & = \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \left[(u, d)_L^{+a} \gamma^0 \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (-\gamma^0 C u_L^{*d}) \right]^+ = \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} u_L^T C \gamma^\mu (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} = \\ & = \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u^C)_L} \gamma^\mu (X_{\mu b}^*, Y_{\mu b}^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Таким образом, мы убедились, что все дополнительные слагаемые в сумме дают вещественное выражение, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \frac{e_5}{2} \overline{(d_R)_a} \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L + \\ & + \frac{e_5}{2} \overline{(e^C)_L} \gamma^\mu (X_\mu^a, Y_\mu^a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} - \\ & - \frac{e_5}{2} \varepsilon_{abd} \overline{(u, d)_L} \gamma^\mu \begin{pmatrix} X_\mu^b \\ Y_\mu^b \end{pmatrix} (u^C)_L^d + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (11.12)$$

Изобразим графически вершины, которые соответствуют этим слагаемым

Благодаря этим вершинам оказываются возможными процессы, переводящие кварки в лептоны, кварки в антикварки и наоборот.

Распад протона и связанного нейтрона

Протон является стабильной частицей в силу закона сохранения барионного числа в Стандартной Модели и минимальной массы (для $B = 1$).

Нейтрон в свободном состоянии распадается за $880,2 \pm 0,1$ с (среднее время жизни). Нейтрон в ядрах стабилен в силу сохранения барионного числа и наличия энергии связи. Нейтрон в ядрах стабилен в силу сохранения барионного числа и наличия энергии связи.

Однако в теориях Великого Объединения нет закона сохранения барионного числа, так что возможны распады типа

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \quad n \rightarrow e^+ + \pi^-, \quad (11.13)$$

$$p \rightarrow \tilde{\nu} + \pi^+ \quad n \rightarrow \tilde{\nu} + \pi^0, \quad (11.14)$$

где $M_p = 938,272081 \pm 0,000006$ МэВ, $M_n = 939,56413 \pm 0,000006$ МэВ - массы протона и нейтрона, соответственно, $M_{\pi^\pm} = 139,57061 \pm 0,00024$ МэВ, $M_{\pi^0} = 134,9770 \pm 0,0005$ МэВ. Как можно видеть, получается очень большой выигрыш по энергии, который заведомо перекрывает любую энергию связи.

Нарисуем диаграммы, описывающие распад протона и связанного нейтрона в $SU(5)$ модели: В случае распада нейтрона в ядрах возможны, например, такие диаграммы: Оценим теперь время жизни протона и связанного нейтрона.

Амплитуды очевидно пропорциональны $\frac{1}{M_X^2}$ в силу наличия пропагатора тяжелого калибровочного бозона. Поэтому вероятность распада

$$w \sim \frac{1}{M_X^4}, \quad (11.15)$$

но $[w] = [1/\tau] = m$, следовательно, нужна еще 5-ая степень массы. Но единственный размерный параметр - масса протона M_p . Поэтому

$$w \sim \frac{M_p^5}{M_X^4}, \quad (11.16)$$

а время жизни τ по порядку величины равно

$$\tau \sim \frac{M_X^4}{M_p^5}. \quad (11.17)$$

Сделаем численную оценку:

$$\tau \sim \frac{(10^{15} \text{ГэВ})^4}{(1 \text{ГэВ})^5} = 10^{60} \text{ГэВ}^{-1}, \quad (11.18)$$

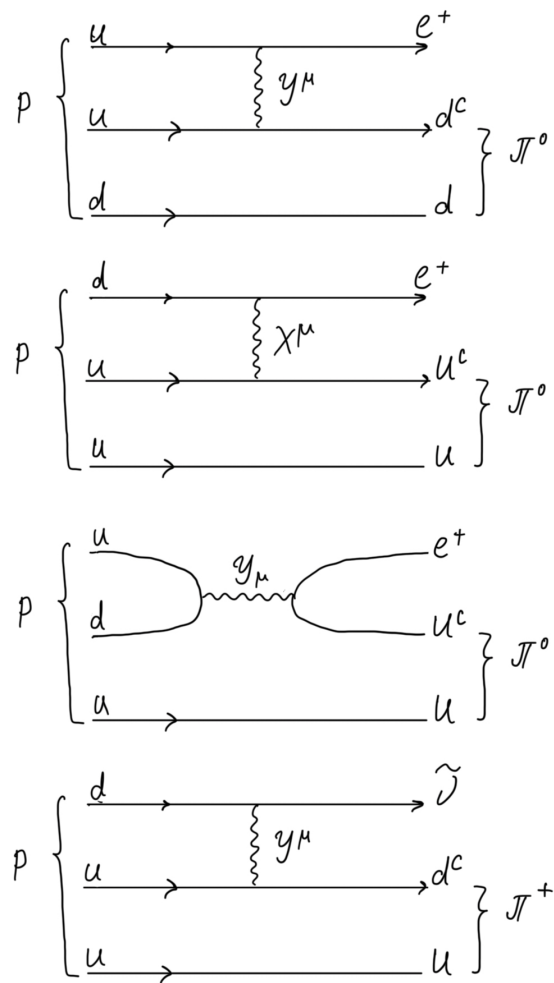


Рис. 11.2. Рис 4. Возможные каналы распада протона.

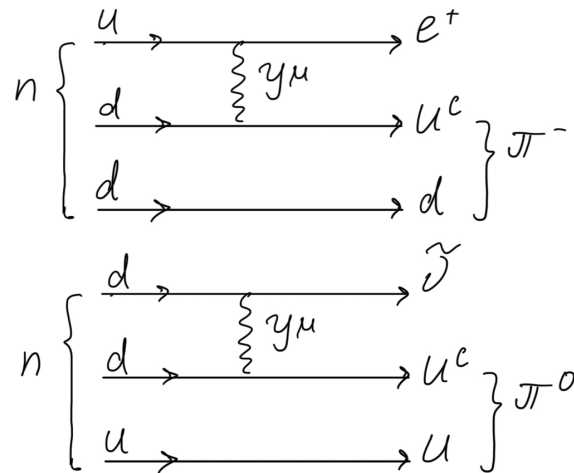


Рис. 11.3. Возможные каналы распада нейтрона.

$1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ} \sim 10^9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 10^{-10} \text{ Дж}$, следовательно, $t[1 \text{ ГэВ}] = \frac{10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{10^{-10} \text{ Дж}} = 10^{-24} \text{ с}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \tau &\sim 10^{60} \cdot 10^{-24} \text{ с} = 10^{36} \text{ с} = \frac{10^{36}}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \text{ лет} \sim \\ &\sim \frac{10^{36}}{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^2} \text{ лет} \sim 10^{29} \text{ лет}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Для сравнения - возраст Вселенной порядка 13,8 млрд лет = $1,38 \cdot 10^9$ лет. Однако время жизни протона порядка 10^{29} лет уверенно наблюдалось бы в современных экспериментах.

Лекция 12. Юкавское взаимодействие в $SU(5)$ ТВО

Распад протона и связанного нейтрона не единственное предсказание $SU(5)$ ТВО. ТВО также предсказывает определенные связи между массами элементарных частиц. В частности, теория великого объединения дает объяснение малости массы нейтрино.

Запишем лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ модели

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{кин}} + \mathcal{L}_{\text{Юкава}}, \quad (12.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Юкава}} = & -[(Y_1)_{IJ}\epsilon^{ijklm}\psi_{ij}^{IT}C\psi_{kl}^J\phi_m + (Y_2)_{IJ}\psi_{ij}^{IT}C\psi^{iJ}\phi^{*j} + \\ & + (Y_3)_{IJ}(v^C)_L^{TI}C\psi^{iJ}\phi_i + \frac{1}{2}M_{IJ}(v^C)_L^{TI}C(v^C)_L^{TJ} + \dots] \end{aligned} \quad (12.2)$$

Ранее было показано, что $(Y_2)_{IJ}$ можно сделать диагональной, вещественной и положительно определенной.

Хиггсовское поле $\phi_i \in 5$ имеет структуру

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}, \quad (12.3)$$

где первые три компоненты (триплет) имеет массу порядка 10^{15} ГэВ и нулевым вакуумным средним, остальные две компоненты (дуплет), отождествляется с хиггсом Стандартной Модели.

При низких энергиях триплет можно заменить на нулевые вакуумные средние, так что

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Выясним теперь, что в этом случае дают юкавские слагаемые $SU(5)$ модели (сла-

гаемые с триплетом не рассматриваются). Учитывая

$$\begin{aligned}\overline{\psi^C} &= \psi^T C \\ (\psi^C)^C &= (\gamma^0 C \psi^*)^C = \gamma^0 C \gamma^0 * C^* \psi = -\gamma^0 C \gamma^0 * C^{-1} \psi = \gamma^0 \gamma^0 + \psi = \psi \\ \frac{1}{2} M_{IJ} (v^C)_L^{TI} C (v^C)_L^{TJ} &= \frac{1}{2} M_{IJ} \overline{v_R^I} (v_R)^{CJ},\end{aligned}\quad (12.5)$$

преобразуем слагаемые в юкавской части Лагранжиана фермионного сектора (12). Последнее слагаемое можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} M_{IJ} (v^C)_L^{TI} C (v^C)_L^J &= \frac{1}{2} M_{IJ} (v_R)^{CTI} C (v_R)^{CJ} \\ &= \frac{1}{2} M_{IJ} \overline{(v_R)^C}^I (v_R)^{CJ} = \frac{1}{2} M_{IJ} \overline{v_R^I} (v_R)^{CJ}.\end{aligned}\quad (12.6)$$

Далее мы увидим, что это майорановская масса для правого нейтрино. Третье слагаемое в (12) запишем в виде

$$\begin{aligned}(Y_3)_{IJ} (v^C)_L^{TI} C \psi^{iJ} \phi_i &= (Y_3)_{IJ} \overline{v_R^I} \psi^{iJ} \phi_i \rightarrow (Y_3)_{IJ} \overline{v_R^I} (0, 0, 0, \phi_4, \phi_5) \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -v \end{pmatrix}_L = \\ &= (Y_3)_{IJ} \overline{v_R^I} (\phi_4, \phi_5) \begin{pmatrix} e \\ -v \end{pmatrix}_L = (Y_3)_{IJ} \overline{v_R^I} (\phi_4, \phi_5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L.\end{aligned}\quad (12.7)$$

Очевидно, что получившееся выражение $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ инвариантно. Заметим, что в лагранжиане Стандартной Модели такого слагаемого не было (правое нейтрино ни с чем не взаимодействовало).

Теперь преобразуем второе слагаемое в (12)

$$\begin{aligned}(Y_2)_{IJ} \psi_{ij}^{IT} C \psi^{iJ} \phi^{*j} &\rightarrow (Y_2)_{IJ} \left[\psi_{\alpha\beta}^{IT} C \psi^{\alpha J} \phi^{*\beta} + \psi_{\alpha\beta}^{IT} C \psi^{\alpha J} \phi^{*\beta} \right] = \\ (Y_2)_{IJ} \left[\overline{(u, d)_L}^I C^I_a (d^C)_L^{aJ} \begin{pmatrix} \phi_4^* \\ \phi_5^* \end{pmatrix} - (Y_2)_{IJ} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overline{e_R^I} \begin{pmatrix} e \\ -v \end{pmatrix}_L (\phi_4^*, \phi_5^*) \right] \right].\end{aligned}\quad (12.8)$$

Используем следующее свойство

$$\begin{aligned}\overline{\psi^C} \chi^C &= [\psi^T C (-\gamma^0 C \chi^*)]^T = \chi^+ C^T \gamma^{0T} C^T \psi = \\ &= [C^T = C^{-1} = -C] = -\chi^+ C \gamma^{0T} C^{-1} \psi = [C \gamma^{\mu} C^{-1} = -\gamma^{\mu T}] = \chi^+ \gamma^0 \psi = \overline{\chi} \psi.\end{aligned}\quad (12.9)$$

Тогда выражение (12) можно переписать в виде

$$(Y_2)_{IJ} \left[\overline{d_R^I}^{aJ} (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La} + \overline{e_R^I} (\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}_L^J \right].\quad (12.10)$$

Данное слагаемое очевидно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ инвариантно. Сравним эти слагаемые с тем, что было в Стандартной Модели:

$$\mathcal{L}_{\text{CM}} \rightarrow -(Y_d^+)_{IJ} \bar{d}_R^{Ja}(\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}^J - (Y_e^+)_{IJ} \bar{e}_R^I(\phi_1^*, \phi_2^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J. \quad (12.11)$$

Поэтому мы можем провести отождествление (с учетом знака в $\mathcal{L}_{\text{Юкава}}$)

$$(Y_e^+)_{IJ} = (Y_2)_{IJ}; \quad (Y_d^+)_{IJ} = (Y_2)_{JI}. \quad (12.12)$$

Таким образом, мы получаем, что

$$Y_e = Y_d^T = Y_2^+. \quad (12.13)$$

Заметим, что юкавские матрицы в лагранжиане Стандартной Модели могут быть разными, в то время как в $SU(5)$ -модели они совпадают. Данное обстоятельство является следствием $SU(5)$ -инвариантности. Следовательно, в области энергий, где имеется $SU(5)$ -симметрия массы заряженных лептонов и нижних кварков совпадают. Это есть новое предсказание $SU(5)$ ТВО.

Напомним, что

$$\begin{aligned} m_e &\simeq 0,51 \text{ МэВ}, & m_d &\simeq 4,7 \text{ МэВ}, \\ m_\mu &\simeq 105 \text{ МэВ}, & m_s &\simeq 96 \text{ МэВ}, \\ m_\tau &\simeq 1777 \text{ МэВ}, & m_b &\simeq 4,18 \text{ ГэВ}. \end{aligned}$$

Но, естественно, очень важную роль играют квантовые поправки.

Наконец, преобразуем первое слагаемое в 12

$$\begin{aligned} &(Y_1)_{IJ} \varepsilon^{ijklm} \psi_{ij}^{IT} C \psi_{kl}^J \phi_m \rightarrow (\text{В виду симметричности } Y_1) \\ &4(Y_1)_{IJ} \varepsilon^{abd\alpha\beta} \psi_{ab}^{IT} C \psi_{d\alpha}^J \phi_\beta = 4(Y_1)_{IJ} \varepsilon^{abd} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{abf} (u^C)_L^{IT} C \psi_{d\alpha}^J \phi_\beta = \\ &= 8(Y_1)_{IJ} \bar{u}_R^{aI} (u^C)_L^{IT} (u, d)_{La}^J \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} \\ &= 8(Y_1)_{IJ} \bar{u}_R^{aI}(\phi_4, \phi_5) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}^J. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Сравним это выражение с аналогичным выражением в лагранжиане Стандартной Модели:

$$\mathcal{L}_{\text{CM}} \rightarrow -(Y_u^+)_{IJ} \bar{u}_R^{aI}(\phi_2, -\phi_1) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{La}^J. \quad (12.15)$$

Поэтому (с учетом знака в $\mathcal{L}_{\text{Юкава}}$)

$$(Y_u^+)_{IJ} = 8(Y_1)_{IJ}. \quad (12.16)$$

Здесь никаких новых предсказаний не возникает, но правильно получаются слагаемые лагранжиана Стандартной Модели.

Таким образом, из $SU(5)$ ТВО в низкоэнергетическом пределе мы получаем следующие Юкавские слагаемые

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Юкава}} = & -8(Y_1)_{IJ} \bar{u}_R^I(\phi_5, -\phi_4) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^J - 8(Y_1^+)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_5^* \\ -\phi_4^* \end{pmatrix} u_R^J - \\ & -(Y_2)_{IJ} \bar{d}_R^J(\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^I - (Y_2^+)_{IJ} \overline{(u, d)}_L^J \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} d_R^I - \\ & -(Y_2)_{IJ} \bar{e}_R^I(\phi_4^*, \phi_5^*) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J - (Y_2^+)_{IJ} \overline{(\nu, e)}_L^I \begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} e_R^J - \\ & -(Y_3)_{IJ} \bar{\nu}_R^I(-\phi_5, \phi_4) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J - (Y_3^+)_{IJ} \overline{(\nu, e)}_L^I \begin{pmatrix} -\phi_5^* \\ \phi_4^* \end{pmatrix} \nu_R^J - \\ & -\frac{1}{2} M_{IJ} \bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} - \frac{1}{2} (M^+)_{IJ} \bar{\nu}_R^{CI}(\nu_R)^J. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Здесь последние четыре слагаемые являются новыми по-сравнению с лагранжианом Стандартной Модели и, как будет показано в следующей лекции, обеспечивают, так называемый, качельный механизм генерации малой массы у нейтрино.

Лекция 13. Масса нейтрино и Великое объединение

Нейтрино отличается от других частиц очень малой (но отличной от 0) массой. Теория великого объединения позволяет дать качественное объяснение этого факта.

Слагаемые, существенные для нахождения массы нейтрино, имеют вид

$$\begin{aligned} & -(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_R^I(-\phi_5, \phi_4) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J - (Y_3^+)_{IJ}(\bar{\nu}, e)_L^I \begin{pmatrix} -\phi_5^* \\ \phi_4^* \end{pmatrix} \nu_R^J - \\ & -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} - \frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_R^{CI}(\nu_R)^J. \end{aligned} \quad (13.1)$$

При нарушении $SU(2) \times U(1)$ до $U(1)_{em}$ поле Хиггса приобретает вакуумное среднее

$$\begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

Поэтому при энергиях много меньших 10^2 ГэВ рассматриваемые слагаемые дадут

$$\begin{aligned} & -(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_R^I(-v, 0) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L^J - (Y_3^+)_{IJ}(\bar{\nu}, e)_L^I \begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R^J - \\ & -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} - \frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_R^{CI}(\nu_R)^J = \\ & = v(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_R^I \nu_L^J + v(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_L^I \nu_R^J - \\ & -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} - \frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_R^{CI}(\nu_R)^J. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Если бы не было слагаемого с M_{IJ} , то нейтрино имело бы дираковскую массу $m_\nu = -vY_3$. Но слагаемые с M_{IJ} все меняют.

Важно понимать порядки величин, входящих в этот лагранжиан. Вакуумное среднее $v \simeq 174,4$ ГэВ $\sim 10^2$ ГэВ, в то время как M может быть только порядка M_X (нет других параметров), следовательно, $M \sim 10^{15}$ ГэВ.

Удобно переписать низкоэнергетический лагранжиан для нейтрино в терминах майорановских спиноров ν_1 и ν_2 , определяемых равенствами

$$\nu_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu_1, \quad \nu_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\nu_2, \implies \quad (13.4)$$

$$\implies \bar{\nu}_L \equiv \bar{\nu}_1 \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad \bar{\nu}_R \equiv \bar{\nu}_2 \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (13.5)$$

$$\begin{aligned} \overline{(\nu_R)^C} &= (\nu_R)^T C = \nu_2^T \cdot \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)C = \nu_2^T \cdot C \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \\ &= \bar{\nu}_2 \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \implies (\nu_R)^C = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu_2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} &= -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\frac{1}{2}(1-\gamma_5)(\nu_2)^J = \\ &= -\frac{1}{4}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I(1-\gamma_5)(\nu_2)^J, \end{aligned} \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_R^{CI}(\nu_R)^J &= -\frac{1}{2}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_2^I\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)(\nu_2)^J = \\ &= -\frac{1}{4}(M^+)_{IJ}\bar{\nu}_2^I(1+\gamma_5)(\nu_2)^J. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Если M_{IJ} - вещественная матрица, то

$$-\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_R^I(\nu_R)^{CJ} + \text{к.с.} = -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I(\nu_2)^J, \quad (13.9)$$

- получается майорановское массовое слагаемое для правого нейтрино.

$$\nu(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_R^I\nu_L^J = \nu(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_2^I\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_1^J, \quad (13.10)$$

$$\nu(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_L^I\nu_R^J = \nu(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_1^I\cdot\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2^J. \quad (13.11)$$

Если Y_3 - вещественная матрица, то

$$\nu(Y_3)_{IJ}\bar{\nu}_R^I\nu_L^J + \nu(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_L^I\nu_R^J = \nu(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_2^I\nu_1^J. \quad (13.12)$$

Поэтому (в случае, когда M и Y_3 - вещественные матрицы) лагранжиан для нейтрино в терминах майорановских спиноров примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{нейтрино}} = \nu(Y_3^+)_{IJ}\bar{\nu}_2^I\nu_1^J - \frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I(\nu_2)^J. \quad (13.13)$$

Рассмотрим вначале случай одного поколения, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{нейтрино}} &= \nu Y_3^+ \bar{\nu}_2 \nu_1 - \frac{1}{2}M \bar{\nu}_2 \nu_2 \equiv -m \bar{\nu}_2 \nu_1 - \frac{1}{2}M \bar{\nu}_2 \nu_2 = \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.14)$$

где $m = -\nu Y_3$. Таким образом, массы нейтрино получаются как собственные значения массовой матрицы $\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}$. Чтобы убедиться, что это массовая матрица запишем кинетические слагаемые

$$\begin{aligned} &i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu\nu_R = \\ &= i\bar{\nu}_2\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\partial_\mu\left[\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2\right] + i\bar{\nu}_1\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_2\gamma^\mu\partial_\mu\left[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_2\right]\nu_1 = \\ &= i\bar{\nu}_1\gamma^\mu\partial_\mu\nu_1 + i\bar{\nu}_2\gamma^\mu\partial_\mu\nu_2. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Последнее равенство получается в силу того, что

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\bar{\nu}_1\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\nu_1 + \frac{i}{2}\bar{\nu}_2\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\nu_2 &= \\ &= \frac{i}{4}\partial_\mu(-\bar{\nu}_1\gamma^\mu\gamma_5\nu_1 + \bar{\nu}_2\gamma^\mu\gamma_5\nu_2). \end{aligned} \quad (13.16)$$

Так как массовая матрица получилась недиагональной, совершим ортогональные преобразования над полями

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \nu'_1 \\ \nu'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_1 \\ \nu'_2 \end{pmatrix}. \quad (13.17)$$

Очевидно, что такие преобразования не изменят кинетических слагаемых. Однако массовые слагаемые поменяются

$$-\frac{1}{2}(\bar{\nu}'_1, \bar{\nu}'_2)A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \nu'_1 \\ \nu'_2 \end{pmatrix}. \quad (13.18)$$

Подберем матрицу A , чтобы сделать массовую матрицу диагональной, тогда на диагонали у такой матрицы, как известно, будут стоять собственные значения

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (13.19)$$

Надем λ_1 и λ_2

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & m \\ m & -\lambda + M \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda M - m^2, \quad (13.20)$$

$$D = M^2 + 4m^2 \implies \lambda_{\pm} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4m^2}}{2}. \quad (13.21)$$

При этом $M \gg m$. Поэтому

$$\lambda_+ \simeq \frac{M + M}{2} = M, \quad (13.22)$$

$$\lambda_- = \frac{M - M\sqrt{1 + 4m^2/M^2}}{2} \simeq \frac{M - M - 2m^2/M}{2} = -\frac{m^2}{M}, \quad (13.23)$$

λ_+ соответствует майорановскому нейтрино с массой порядка 10^{15} ГэВ, которое никак не сказывается на низкоэнергетической физике.

λ_- соответствует наблюдаемому нейтрино, которое оказывается майорановским. При этом по порядку величины $\lambda_- = -\frac{m^2}{M} \sim \frac{(10^2 \text{ ГэВ})^2}{10^{15} \text{ ГэВ}} \simeq 10^{-11} \text{ ГэВ} \simeq 10^{-2} \text{ эВ}$.

Эксперименты по осцилляциям нейтрино позволяют определить Δm^2 - разность квадратов масс для различных поколений

$$\Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \quad (13.24)$$

$$\Delta m_{32}^2 = (2.437 \pm 0.033) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2, \quad (13.25)$$

видно, что порядок величины получается правильным.

Такой механизм возникновения массы нейтрино называется качельным (see-saw) механизм.

Замечания: 1) знак перед массой не существенен. Если $\mathcal{L} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu + m\bar{\nu}\nu$, где ν - майорановский спинор, то определяя

$$\nu' = i\gamma_5\nu, \quad (13.26)$$

$$\bar{\nu}' = \nu^+(-i)\gamma_5\gamma^0 = i\bar{\nu}\gamma_5, \quad (13.27)$$

$$\bar{\nu}'^C = \nu^T i\gamma_5 C = i\bar{\nu}\gamma_5, \quad (13.28)$$

$$\nu'^C = \nu', \quad (13.29)$$

- по-прежнему майорановский. Тогда

$$\mathcal{L} = i(-i)\bar{\nu}'\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu(-i\gamma_5\nu') + m(-i)\bar{\nu}'\gamma_5(-i)\gamma_5\nu' = i\bar{\nu}'\gamma^\mu\partial_\mu\nu' - m\bar{\nu}'\nu', \quad (13.30)$$

- знак перед массой меняется на противоположный.

2) В случае, когда есть несколько поколений нейтрино, можно пренебречь импульсом правого нейтрино (ν_2) по сравнению с массой и выполнить по ν_2 интегрирование в производящем функционале. Тогда

$$\mathcal{L}_{\text{нейтрино}} = -m_{IJ}\bar{\nu}_2^I\nu_1^J - \frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I(\nu_2)^J \rightarrow \quad (13.31)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow -\frac{1}{2}M_{IJ}\bar{\nu}_2^I(\nu_2)^J|_{0=m\nu_1+M\nu_2} &= \frac{1}{2}\bar{\nu}_2 M \nu_2|_{\nu_2=-M^{-1}m\nu_1} = \\ &= \frac{1}{2}\bar{\nu}_1^T m^T M^{-1}m\nu_1 = \frac{1}{2}\bar{\nu}_1^I(m^T M^{-1}m)_{IJ}\nu_1^J, \end{aligned} \quad (13.32)$$

- в общем случае также будет и смешивание за счет недиагональности.

Лекция 14. Сохранение В-Л в $SU(5)$ ТВО. Сокращение аномалий

Лагранжиан фермионного сектора $SU(5)$ модели имеет вид

$$\mathcal{L}_\Phi = i\overline{(v^c)}_L \gamma^\mu \partial_\mu (v^c)_L + i\overline{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi^i + \frac{i}{2} \overline{\psi}^{ij} \gamma^\mu D_\mu \psi_{ij} - \quad (14.1)$$

$$-[(Y_1)_{IJ} \varepsilon^{ijklm} \psi_{ij}^{IT} C \psi_{kl}^J \phi_m + (Y_2)_{IJ} \psi_{ij}^{IT} C \psi^{ij} \phi^{*j} + (Y_3)_{IJ} (v^c)_L^{IT} C \psi^{ij} \phi_i + \frac{1}{2} M_{IJ} (v^c)_L^{IT} C (v^c)_L + \text{к.с.}]. \quad (14.2)$$

Почти все слагаемые в этом лагранжиане инвариантны относительно глобальных $U(1)$ -преобразований $U(1)_F$

$$\psi_{ij}^I \rightarrow e^{-i\alpha/5} \psi_{ij}^I; \quad \psi^{iI} \rightarrow e^{3i\alpha/5} \psi^{iI}, \quad (14.3)$$

$$(v^c)_L^I \rightarrow e^{-i\alpha} (v^c)_L^I; \quad \phi_i \rightarrow e^{2i\alpha/5} \phi_i, \quad (14.4)$$

где $\alpha \neq \alpha(x)$ - вещественное число. Действительно, инвариантность кинетических слагаемых очевидна. Для Юкавских слагаемых имеем

$$\psi_{ij}^{IT} C \psi_{kl}^J \phi_m \rightarrow e^{-i\alpha/5} \psi_{ij}^{IT} C e^{-i\alpha/5} \psi_{kl}^J e^{2i\alpha/5} \phi_m = inv, \quad (14.5)$$

$$\psi_{ij}^{IT} C \psi^{ij} \phi^{*j} \rightarrow e^{-i\alpha/5} \psi_{ij}^{IT} C e^{3i\alpha/5} \psi^{ij} e^{-2i\alpha/5} \phi^{*j} = inv, \quad (14.6)$$

$$(v^c)_L^{IT} C \psi^{ij} \phi_i \rightarrow e^{-i\alpha} (v^c)_L^{IT} C e^{3i\alpha/5} \psi^{ij} e^{2i\alpha/5} \phi_i = inv. \quad (14.7)$$

Неинвариантным будет только майорановское массовое слагаемое для правого нейтрино

$$(v^c)_L^{IT} C (v^c)_L \rightarrow e^{-2i\alpha/5} (v^c)_L^{IT} C (v^c)_L \neq inv. \quad (14.8)$$

Однако можно легко модифицировать массовое слагаемое, так чтобы получить инвариантную теорию

$$\frac{1}{2} M_{IJ} (v^c)_L^{IT} C (v^c)_L \rightarrow \frac{1}{2} (Y_4)_{IJ} S (v^c)_L^{IT} C (v^c)_L, \quad (14.9)$$

где S - комплексное скалярное поле, преобразующееся по закону

$$S \rightarrow e^{2i\alpha} S, \quad (14.10)$$

и приобретающее вакуумное среднее $v \sim 10^{15}$ ГэВ, так что

$$M_{IJ} = v(Y_4)_{IJ}. \quad (14.11)$$

Тогда мы получаем полностью инвариантную теорию.

Выясним смысл данной симметрии. Для этого совершим совокупность 2-х преобразований:

- 1) $U(1)_F$ с параметром $\alpha \neq \alpha(x)$,
- 2) $U(1)_Y \in SU(5)$, параметр которого связан с α так что

$$\phi_i \rightarrow \exp\{i\alpha \begin{pmatrix} 4/15_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & -2/5_2 \end{pmatrix}\} \phi_i \equiv \omega_i^j \phi_j, \quad (14.12)$$

В этом случае под действием указанной совокупности преобразований

$$\begin{aligned} \phi_i &\rightarrow \exp\{i\alpha \begin{pmatrix} 4/15_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & -2/5_2 \end{pmatrix} + i\alpha \begin{pmatrix} 2/5_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & 2/5_2 \end{pmatrix}\} \phi_i = \\ &= \exp\left\{\frac{2i\alpha}{3} \begin{pmatrix} 1_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & 0_2 \end{pmatrix}\right\} \phi_i, \end{aligned} \quad (14.13)$$

так что изменяется триплет, но у него нулевое вакуумное среднее и масса порядка 10^{15} ГэВ

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \rightarrow e^{2i\alpha/3} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (14.14)$$

и не изменяется хиггсовское поле Стандартной модели

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (14.15)$$

Выясним, как под действием этих преобразований изменяются фермионные поля:

$$(\nu^C)_L \rightarrow e^{-i\alpha}(\nu^C)_L \implies \nu_R \rightarrow e^{i\alpha}\nu_R, \quad (14.16)$$

$$\begin{aligned} \psi^i &= \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{3i\alpha/5} \cdot \exp\left\{i\alpha \begin{pmatrix} 4/15_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & -2/5_2 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L = \\ &= \exp\left\{i\alpha \begin{pmatrix} 1/3_3 & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & 1_2 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} d^{C1} \\ d^{C2} \\ d^{C3} \\ e \\ -\nu \end{pmatrix}_L, \implies \\ &\implies \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L, \quad d_R \rightarrow e^{-i\alpha/3}d_R, \end{aligned} \quad (14.17)$$

$$\psi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{-i\alpha/5} \omega_i^k \omega_j^l \psi_{kl}. \quad (14.18)$$

В частности,

$$(u^C)_L \rightarrow e^{-i\alpha/5} \cdot e^{4i\alpha/15} \cdot e^{4i\alpha/15} (u^C)_L = e^{i\alpha/3} (u^C)_L \implies \quad (14.19)$$

$$u_R \rightarrow e^{-i\alpha/3} u_R, \quad (14.20)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow e^{-i\alpha/5} \cdot e^{4i\alpha/15} \cdot e^{-2i\alpha/5} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \left[-\frac{9}{15} + \frac{9}{15} = -\frac{1}{3}\right] = e^{-i\alpha/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad (14.21)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = e^{-i\alpha/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad (14.22)$$

$$(e^C)_L \rightarrow e^{-i\alpha/5} \cdot e^{-2i\alpha/5} \cdot e^{-2i\alpha/5} (e^C)_L = e^{-i\alpha} (e^C)_L \implies \quad (14.23)$$

$$\implies e_R \rightarrow e^{i\alpha} e_R. \quad (14.24)$$

Таким образом, под действием указанной совокупности преобразований все лептонные поля умножаются на $e^{i\alpha}$, а все кварковые на $e^{-i\alpha/3}$.

Так как у лептонов $L = 1$, $B = 0$, а у кварков $L = 0$, $B = 1/3$, то можно видеть, что все поля умножаются на $\exp\{i\alpha(L - B)\}$. Поэтому в $SU(5)$ модели сохраняющейся величиной будет $B - L$, в то время как по-отдельности $B \neq const$ и $L \neq const$.

Поэтому, например, распады протона

$$p_{B=1, L=0} \rightarrow \pi_{B=0, L=0}^0 + e_{B=0, L=-1}^+; \quad p \rightarrow \pi_{B=0, L=0}^+ + \tilde{\nu}_{B=0, L=-1}, \quad (14.25)$$

разрешены, а

$$p_{B=1, L=0, B-L=1} \rightarrow \pi_{B=0, L=0, B-L=-1}^+ + \nu_{B=0, L=1}, \quad (14.26)$$

запрещены.

Сокращение аномалий в $SU(5)$ ТВО

Также как и Стандартная модель, $SU(5)$ ТВО представляет собой теорию с киральными фермионами и может иметь аномалии.

Ранее говорилось, что аномалии пропорциональны

$$\sum_R tr(T^A \{T^B, T^C\}) - \sum_L tr(T^A \{T^B, T^C\}). \quad (14.27)$$

В $SU(5)$ ТВО в наших обозначениях все фермионы являются левыми и лежат в представлениях $1 + \bar{5} + 10$ группы $SU(5)$. Следовательно, $\sum_R tr(T^A \{T^B, T^C\}) = 0$ и для сокращения аномалий необходимо, чтобы

$$0 = \sum_R tr(T^A \{T^B, T^C\}) = tr(T_{\bar{5}}^A \{T_{\bar{5}}^B, T_{\bar{5}}^C\}) + tr(T_{10}^A \{T_{10}^B, T_{10}^C\}), \quad (14.28)$$

так как $T_1^A = 0$.

Убедимся в справедливости этого равенства явным вычислением

$$\psi^i \rightarrow (\omega^*)^i_j \psi^j \simeq \psi^i + (\alpha^*)^i_j \psi^j = \psi^i - (\alpha^T)^i_j \psi^j, \quad (14.29)$$

так как $\alpha^+ = -\alpha$. Поэтому $T_{\bar{5}}^A = -(t^A)^T$, где t^A - генераторы фундаментального представления. Следовательно

$$\begin{aligned} tr(T_{\bar{5}}^A \{T_{\bar{5}}^B, T_{\bar{5}}^C\}) &= -tr((t^A)^T (t^B)^T (t^C)^T + (t^A)^T (t^C)^T (t^B)^T) = \\ &= tr((t^A)^T (t^B)^T (t^C)^T + (t^A)^T (t^C)^T (t^B)^T) = \\ &= -tr((t^C)(t^B)(t^A) + (t^B)(t^C)(t^A)) = -tr((t^A)\{(t^C), (t^B)\}). \end{aligned} \quad (14.30)$$

Аналогичным образом

$$\psi_{ij} \rightarrow \omega_i^k \omega_j^l \psi_{kl} \simeq \psi_{ij} + \alpha_i^k \psi_{kj} + \alpha_j^l \psi_{il}. \quad (14.31)$$

Поэтому с учетом антисимметрии

$$(T_{10}^A)^{kl}_{ij} = \frac{1}{2}[(t^A)_i^k \delta_j^l + (t^A)_j^l \delta_i^k - (t^A)_j^k \delta_i^l - (t^A)_i^l \delta_j^k]. \quad (14.32)$$

При этом

$$tr(T_{10}^A \{T_{10}^B, T_{10}^C\}) = (T_{10}^A)^{kl}_{ij} (T_{10}^B)^{mn}_{kl} (T_{10}^C)^{ij}_{mn} + (B \leftrightarrow C). \quad (14.33)$$

С учетом антисимметрии генераторов

$$(T_{10}^A)^{kl}_{ij} (T_{10}^B)^{mn}_{kl} = \frac{1}{4}((t^A)_i^k \delta_j^l + (t^A)_j^l \delta_i^k - (i \leftrightarrow j))((t^B)_m^k \delta_l^n + (t^B)_l^n \delta_k^m - (m \leftrightarrow n)). \quad (14.34)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} tr(T_{10}^A \{T_{10}^B, T_{10}^C\}) &= [(t^A)_i^k \delta_j^l + (t^A)_j^l \delta_i^k][(t^B)_m^k \delta_l^n + (t^B)_l^n \delta_k^m](T_{10}^C)^{ij}_{mn} + (B \leftrightarrow C) = \\ &= [(t^A t^B)_i^m \delta_j^n + (t^A)_i^m (t^B)_j^n + (t^A)_j^n (t^B)_i^m + (t^A t^B)_j^n \delta_i^m]. \\ &\quad \begin{matrix} 11 \rightarrow 1 & 12 \rightarrow 2 & 21 \rightarrow 3 & 22 \rightarrow 4 \end{matrix} \\ &\cdot \frac{1}{2}[(t^C)_m^i \delta_n^j + (t^C)_n^j \delta_m^i - (t^C)_n^i \delta_m^j - (t^C)_m^j \delta_n^i] + (B \leftrightarrow C) = \\ &= [tr(t^A) = 0] = \\ &= \frac{1}{2} \{ 5tr(t^A t^B t^C) + 0_{12} - tr(t^A t^B t^C)_{13} - tr(t^A t^B t^C)_{14} + 0_{21} + 0_{22} - tr(t^A t^B t^C)_{23} - tr(t^B t^A t^C)_{24} + \\ &\quad + 0_{31} + 0_{32} - tr(t^A t^C t^B)_{33} - tr(t^A t^B t^C)_{34} + \\ &\quad + 0_{41} + 5tr(t^A t^B t^C)_{42} - tr(t^A t^B t^C)_{43} - tr(t^A t^B t^C)_{44} \} + (B \leftrightarrow C) = \\ &tr(t^A \{t^B, t^C\}) \cdot [5 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 5 - 1 - 1] = tr(t^A \{t^B, t^C\}). \end{aligned} \quad (14.35)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} tr(T_{\bar{5}}^A \{T_{\bar{5}}^B, T_{\bar{5}}^C\}) + tr(T_{10}^A \{T_{10}^B, T_{10}^C\}) &= \\ &= tr(t^A \{t^B, t^C\}) - tr(t^A \{t^B, t^C\}) = 0, \end{aligned} \quad (14.36)$$

и, следовательно, аномалии в рассматриваемой модели полностью сокращаются и она является непротиворечивой на квантовом уровне.

Лекция 15. Объединение бегущих констант связи в Стандартной модели

Одним из предсказаний $SU(5)$ ТВО является объединение констант связи на масштабе энергий великого объединения

$$\alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1, \quad (15.1)$$

где

$$\alpha_3 = \frac{e_3^2}{4\pi}; \quad \alpha_2 = \frac{e_2^2}{4\pi}; \quad \alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{e_1^2}{4\pi}. \quad (15.2)$$

При этом на масштабе энергий порядка массы Z -бозона

$$\begin{aligned} \alpha_3(M_Z) &\simeq 8,4675, \\ \alpha_2(M_Z) &\simeq (29,58)^{-1}, \\ \alpha_1(M_Z) &\simeq (59,02)^{-1}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$(15.4)$$

Зависимость констант связи от энергетического масштаба связана с квантовыми поправками. Выясним на каком энергетическом масштабе происходит объединение констант связи 15.1. Известно, что в однопетлевом приближении ренормгрупповая эволюция констант связи описывается следующим выражением

$$\frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{1}{\alpha(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(\frac{11}{3} c_2 - \frac{4}{3} \frac{1}{2} \sum_{\phi} T(R_{\phi}) - \frac{1}{3} \sum_{\text{СК}} T(R_{\text{СК}}) \right). \quad (15.5)$$

Здесь первое слагаемое в скобках представляет собой коэффициент при однопетлевом вкладе от калибровочных полей и духов, второе - от дираковских фермионов (множитель $\frac{1}{2}$ от майорановских или вейлевских фермионов), третье - от комплексных скалярных полей. Также, здесь используется следующая нормировка генераторов T^A произвольного представления R группы G :

$$\text{tr}(T^A T^B) \equiv T(R) \delta^{AB}. \quad (15.6)$$

При этом предполагается, что генераторы фундаментального представления t^A нормированы условием

$$\text{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \text{ т.ч. } T(\text{фунд.}) = \frac{1}{2}. \quad (15.7)$$

Генераторы T^A также удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[t^A, t^B] = if^{ABC}t^C, \quad (15.8)$$

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C, \quad (15.9)$$

где f^{ABC} - структурные постоянные. Так как для присоединенного представления $(T^A_{Adj})_{BC} = -if^{ABC}$, то из (15.6) получим

$$\delta^{AB}T(Adj) = tr(T^A_{Adj}T^B_{Adj}) = -if^{ACD}(-i)f^{BDC} = C_2\delta^{AB} \implies \quad (15.10)$$

$$f^{ACD}f^{BCD} \equiv C_2(G)\delta^{AB}, \quad (15.11)$$

$$T(Adj) = C_2. \quad (15.12)$$

При этом известно, что $C_2(SU(N)) = N; C_2(U(1)) = 0$. Также заметим, что в формуле для однопетлевой эволюции констант связи мы пренебрегли пороговыми эффектами. В реальности вклад каждой частицы появляется, когда энергия превышает их массу.

Исследуем по-отдельности однопетлевую эволюцию каждой из констант связи в Стандартной Модели:

$SU(3)$:

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(\begin{array}{ccc} \frac{11}{3} & \cdot & \frac{4}{3} \cdot \begin{array}{c} \text{ароматы} \\ \frac{1}{2} \end{array} \\ \text{глюоны и духи} & \cdot C_2(SU(3)) & \cdot \frac{6}{3} \cdot \begin{array}{c} \text{кварки} \end{array} \end{array} \right) \implies \quad (15.13)$$

$$\implies \frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (15.14)$$

$SU(2)$:

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \quad (15.15)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(\begin{array}{ccc} \frac{11}{3} \cdot \frac{C_2(SU(3))}{2} & & \frac{1}{2} \cdot \begin{array}{c} T(\text{фунд}) \\ \text{фермионы} \end{array} \\ \text{калибровочные бозоны и духи} & \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{array}{c} (1+3) \cdot 3 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{array} & \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right) \implies \quad (15.16)$$

$$\implies \frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{19}{6} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (15.17)$$

$U(1)$: так в абелевом случае самодействия нет, то

$$c_2 = 0, \quad (15.18)$$

здесь вычисление несколько отличается, поскольку по $U(1)$ характеристикой является не представление, а гиперзаряд Y

$$\alpha_{10} \equiv \frac{e_1^2}{4\pi}, \quad \alpha_1 = \frac{5}{3}\alpha_{10}. \quad (15.19)$$

Сравним выражения для вершин в абелевом и неабелевом случаях. Они получаются из ковариантных производных

$$D_\mu = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ieA_\mu^A T^A \psi \text{ (неабелев случай)}, \quad (15.20)$$

$$D_\mu = \partial_\mu \psi + ieA_\mu Y \psi \text{ (абелев случай)}. \quad (15.21)$$

$$(15.22)$$

Следовательно, вместо $tr(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}$ мы имеем Y^2 в абелевом случае.

Также заметим, что фермионы СМ с группой $U(1)$ взаимодействуют по-разному (СМ - киральная теория), поэтому в ренормгрупповой эволюции нужно учитывать вейлевские фермионы. Поэтому для группы $U(1)$ получаем

$$\frac{1}{\alpha_{10}(\mu)} = \frac{1}{\alpha_{10}(\mu_0)} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\frac{2}{3} \sum_{\phi} Y_{\phi}^2 - \frac{1}{3} \sum_{\text{СК}} Y_{\text{СК}}^2 \right), \quad (15.23)$$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{3}{5} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\frac{2}{3} \sum_{\phi} Y_{\phi}^2 - \frac{1}{3} \sum_{\text{СК}} Y_{\text{СК}}^2 \right). \quad (15.24)$$

Напомним, чему равны гиперзаряды различных полей:

поле	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	ν_R	e_R	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R	ϕ
Y	$-1/2$	0	-1	$1/6$	$2/3$	$-1/3$	$1/2$

Подставим данные величины в формулу 15.24

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} + \frac{3}{5} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \left(-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 + 0 + \right. \right. \\ &+ 1 \cdot 3 + \frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{4}{9} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 3 \left. \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2) = \\ &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{41}{10} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \end{aligned} \quad (15.25)$$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{41}{10} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (15.26)$$

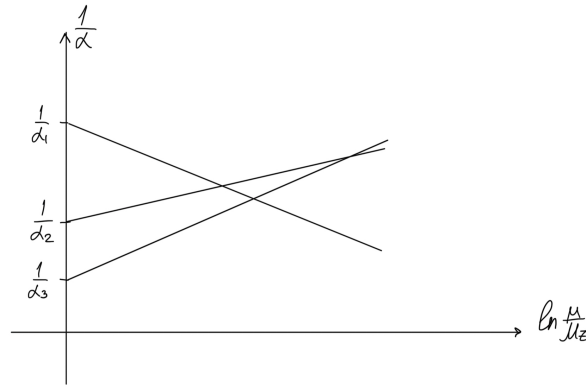


Рис. 15.1. Рис. 5. Объединение бегущих констант связи в $SU(5)$ -ТВО.

Таким образом, окончательные формулы, описывающие однопетлевую эволюцию констант связи в Стандартной Модели имеют вид

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(\mu_0)} + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (15.27)$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(\mu_0)} + \frac{19}{6} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (15.28)$$

$$\frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_0)} - \frac{41}{10} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (15.29)$$

График этих функций изображен на рисунке. Найдем масштабы, на которых пересекаются различные прямые. При этом положим $\mu_0 = M_Z$; $\mu = M_X$ (на массе M_X находится порог рождения X_μ и Y_μ полей и близок порог для хиггсовского триплета. После его прохождения все константы связи должны слиться в α_5 и будут бежать одинаково).

1) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_2(M_X)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{41}{10} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} &= \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} + \frac{19}{6} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} \implies \\ \implies \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} \cdot \left(\frac{41}{10} + \frac{19}{6} \right) &= \frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} \\ \log_{10} \frac{M_X}{M_Z} &= \frac{2\pi}{\ln 10} \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_2(M_Z)} \right)}{\left(\frac{41}{10} + \frac{19}{6} \right)} \simeq 11,05. \end{aligned} \quad (15.30)$$

2) Уравнение $\alpha_1(M_X) = \alpha_3(M_X)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{41}{10} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} &= \frac{1}{\alpha_1(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} \implies \\ \implies \log_{10} \frac{M_X}{M_Z} &= \frac{2\pi}{\ln 10} \frac{\left(\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} \right)}{\left(\frac{41}{10} + 7 \right)} \simeq 12,43. \end{aligned} \quad (15.31)$$

3) Уравнение $\alpha_2(M_X) = \alpha_3(M_X)$:

$$\frac{1}{\alpha_1(M_Z)} + \frac{19}{6} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z} = \frac{1}{\alpha_2(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_X)} = \frac{1}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{M_X}{M_Z}$$
$$\log_{10} \frac{M_X}{M_Z} = \frac{2\pi}{\ln 10} \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right)}{\left(7 - \frac{19}{6}\right)} \simeq 15,04. \quad (15.32)$$

Среднее значение

$$\log_{10} \frac{M_X}{M_Z} \simeq 12,84. \quad (15.33)$$

Поэтому $M_X \sim M_Z \cdot 10^{13} \sim 10^{15}$ ГэВ.

Как можно видеть, разброс значений оказывается большим, поэтому объединение констант связи в несуперсимметричной версии Стандартной Модели происходит с большой погрешностью. Проблема будет решена при переходе к суперсимметричному рассмотрению Стандартной Модели.

Лекция 16. $SO(10)$ теория великого объединения

Наиболее лучшая в настоящее время ТВО, так как все частицы Стандартной Модели можно разместить в одном неприводимом представлении 16 группы $SO(10)$. $SO(10)$ содержит подгруппу $SU(5)$, по которой

$$16 = 1 + \bar{5} + 10. \quad (16.1)$$

Основные сведения о группе $SO(10)$

Группа $SO(10)$ состоит из 10×10 вещественных ортогональных матриц Ω с единичным определителем

$$\Omega^T \Omega = 1_{10}; \quad \det \Omega = 1. \quad (16.2)$$

Размерность и ранг группы $SO(10)$

$$\dim SO(10) = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45, \quad (16.3)$$

$$\text{rank } SO(10) = \frac{10}{2} = 5. \quad (16.4)$$

Можно сразу сказать, что в данной теории будет 5 калибровочных бозонов. Сравнимая с $SU(5)$

$$\dim SU(5) = 24, \quad (16.5)$$

$$\text{rank } SU(5) = 4. \quad (16.6)$$

Можно высказать предположение, что $SU(5)$ является подгруппой $SO(10)$. В действительности, это можно показать. Для начала убедимся, что у группы $SO(10)$ имеется подгруппа $U(5)$

$$U(5) \subset SO(10), \quad (16.7)$$

которая состоит из комплексных 5×5 матриц, удовлетворяющих условию

$$\omega^+ \omega = 1_5. \quad (16.8)$$

Заметим, что определитель данных матриц не обязательно равен 1. Легко показать, что любую такую матрицу можно представить в виде произведения матрицы $\omega_5 \in SU(5)$ на некоторый фазовый множитель

$$\omega = e^{i\gamma_0} \omega_5, \quad (16.9)$$

здесь γ_0 - вещественное число. Поэтому можно было бы записать

$$U(5) = SU(5) \times U(1), \quad (16.10)$$

Однако, на самом деле, единичная матрица в группе $U(5)$ соответствует нескольким структурам (16.9). Можно, например, выбрать

$$\omega_5 = e^{2\pi i k/5} \cdot 1_5, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (16.11)$$

Тогда, если соответственно выбрать $\gamma_0 = -2\pi i k/5$, то условие (16.8) заведомо выполнится. Понятно, что k можно выбрать от 0 до 4. То есть 1 в $U(5)$ соответствует 5 различных элементов из группы $SU(5) \times U(1)$. Поэтому, вообще говоря

$$U(5) = [SU(5) \times U(1)]/Z_5. \quad (16.12)$$

Теперь докажем, что $U(5) = [SU(5) \times U(1)]/Z_5 \subset SO(10)$. Для этого представим ω в комплексной форме

$$\omega = B + iC, \quad (16.13)$$

где B и C - вещественные матрицы размера 5×5 . Запишем в этих обозначениях условие (16.8)

$$1_5 = \omega^+ \omega = (B^T - iC^T)(B + iC) = B^T B + C^T C + i(B^T C - C^T B) \implies \quad (16.14)$$

$$B^T B + C^T C = 1, \quad B^T C = C^T B. \quad (16.15)$$

При действии на комплексный 5-компонентный столбец $x + iy$ получим

$$(x + iy) \rightarrow \omega(x + iy) = (B + iC)(x + iy) = (Bx - Cy) + i(Cx + By). \quad (16.16)$$

Это можно эквивалентно представить в виде преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (16.17)$$

При этом неизвестно, принадлежит ли матрица Ω группе $SO(10)$. Сразу надо заметить, что Ω не является произвольной матрицей, а принадлежит группе $U(5)$. Проверим чему равно произведение $\Omega^T \Omega$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & C^T \\ -C^T & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} B^T B + C^T C & -B^T C + C^T B \\ B^T C - C^T B & B^T B + C^T C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_5 & 0 \\ 0 & 1_5 \end{pmatrix} = 1_{10}. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Вообще говоря, это позволяет лишь сделать вывод, что $\Omega \in O(10)$. Однако, как известно, у $O(10)$ есть две компоненты связности, то есть беря определитель от 16.1 получаем

$$(\det \Omega)^2 = 1 \implies \det \Omega = \pm 1. \quad (16.19)$$

Поскольку $\Omega \in U(5)$, а в силу связности $U(5)$ ее элементы можно связать гладким путем, целиком лежащим в группе, с 1, в этом случае определитель $\det \Omega \neq -1$. Поэтому рассматриваемая матрица принадлежит связной компоненте $O(10)$, то есть $SO(10)$. Таким образом, доказано, что $U(5) \subset SO(10)$.

Выделим теперь подгруппы $SU(5)$ и $U(1)$. Для этого удобно рассматривать окрестность 1 и работать вначале с алгебрами Ли.

Если $\omega = e^\alpha \simeq 1 + \alpha \simeq (1 + \beta + i\gamma)$, то $B = 1 + \beta$; $C \simeq \gamma$ и следовательно элемент $U(5) \subset SO(10)$ запишется в виде

$$A \equiv T(\alpha) = \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \quad (16.20)$$

здесь β, γ - вещественные 5×5 матрицы. При этом $\alpha^+ = -\alpha$ и следовательно $\beta^T - i\gamma^T = \beta - i\gamma$, то есть $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$, так что $A^T = -A$.

В случае, если $\omega \in SU(5)$, $\text{tr} \alpha = 0 \implies \text{tr} \gamma = 0$ ($\text{tr} \beta = 0$ из-за антисимметрии).

Для $\omega \in U(1)$

$$\omega = e^{i\gamma_0} \cdot 1_5 \simeq (1 + i\gamma_0) \cdot 1_5 \implies \beta = 0; \gamma = \gamma_0 \cdot 1_5. \quad (16.21)$$

Поэтому если $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$; $\text{tr} \gamma = 0$, то

$$\exp \left\{ \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right\} \in SU(5) \subset SO(10), \quad (16.22)$$

$$\exp \left\{ \left(\gamma_0 \begin{pmatrix} 0 & -1_5 \\ 1_5 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \in U(1) \subset SO(10). \quad (16.23)$$

Таким образом, $U[SU(5) \times U(1)]/Z_5 \subset SO(10)$.

Представление 16 группы $SO(10)$

Элементарные частицы одного поколения размещаются в спинорном представлении 16 группы $SO(10)$.

Чтобы его построить, вначале запишем коммутационные соотношения генераторов группы $SO(10)$. Для элементов алгебры Ли имеют место следующие соотношения

$$A^T = -A, \quad A = -iA^A t^A. \quad (16.24)$$

Тогда t^A - генераторы являются чисто мнимыми и антисимметричными - в совокупности эрмитовыми. Поэтому, легко сообразить, генераторы фундаментального представления $SO(10)$ имеют вид

$$t^A = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \dots & 1_{ji} \\ -1_{ij} & \dots \end{pmatrix}, \quad j > i, \quad tr(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (16.25)$$

Удобно нумеровать их двумя индексами $A \rightarrow ij$

$$(t_{ij})_{kl} = \frac{i}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j = \overline{1, 10}. \quad (16.26)$$

Данных генераторов всего $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Тогда соответствующий коммутатор будет равен

$$\begin{aligned} [t_{ij}, t_{kl}]_{mn} &= (t_{ij})_{mp} (t_{kl})_{pn} - (t_{kl})_{mp} (t_{ij})_{pn} = \\ &= -\frac{1}{4} (\delta_{im} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jm}) (\delta_{kp} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lp}) + \frac{1}{4} (\delta_{km} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lm}) (\delta_{ip} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jp}) = \\ &= -\frac{1}{4} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \frac{1}{4} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \frac{1}{4} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} - \frac{1}{4} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \\ &+ \frac{1}{4} \delta_{km} \delta_{li} \delta_{jn} - \frac{1}{4} \delta_{ki} \delta_{lm} \delta_{jn} - \frac{1}{4} \delta_{km} \delta_{lj} \delta_{in} + \frac{1}{4} \delta_{kj} \delta_{lm} \delta_{in} = \\ &= \frac{i}{2} \delta_{kj} \frac{i}{2} (\delta_{im} \delta_{ln} - \delta_{lm} \delta_{in}) - \frac{i}{2} \delta_{ki} \frac{i}{2} (\delta_{jm} \delta_{ln} - \delta_{jn} \delta_{lm}) - \\ &- \frac{i}{2} \delta_{jl} \frac{i}{2} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{in}) + \frac{i}{2} \delta_{il} \frac{i}{2} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn}) = \\ &= \frac{i}{2} \delta_{kj} (t_{il})_{mn} - \frac{i}{2} \delta_{ki} (t_{jl})_{mn} - \frac{i}{2} \delta_{jl} (t_{ik})_{mn} + \frac{i}{2} \delta_{il} (t_{jk})_{mn} \implies \\ &\implies [t_{ij}, t_{kl}]_{mn} = \frac{i}{2} [\delta_{kj} t_{il} - \delta_{ki} t_{jl} - \delta_{jl} t_{ik} + \delta_{il} t_{jk}]. \quad (16.27) \end{aligned}$$

Как можно видеть, полученные коммутационные соотношения для группы $SO(10)$ очень похожи на коммутационные соотношения для группы Лоренца. Более того подобные коммутационные соотношения возникают во всех ортогональных и псевдоортогональных группах.

Чтобы построить представление алгебры Ли $so(10)$, достаточно задать генераторы, удовлетворяющие тем же коммутационным соотношениям.

Как и в случае группы Лоренца, генераторы спинорного представления $SO(10)$ строятся на основе Γ -матриц, теперь уже в Евклидовом пространстве сигнатуры $(+ + \dots +)$.

Они должны удовлетворять равенству

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 10}. \quad (16.28)$$

Γ -матрицы строятся рекурсивно:

В $D = 2$:

$$\Gamma_1 = \sigma_1; \Gamma_2 = \sigma_2, \quad (16.29)$$

здесь σ_i - 2×2 матрицы Паули. Также можно построить $\Gamma_3 \equiv -i\Gamma_1\Gamma_2 = -i\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$, которая удовлетворяет условиям $\{\Gamma_3, \Gamma_i\} = 0$, $i = 1, 2$, $(\Gamma_3)^2 = 1$.

В $D = 3$:

$$\Gamma_i = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (16.30)$$

но Γ_4 , такой что $\{\Gamma_4, \Gamma_i\} = 0$, $i = 1, 2, 3$ $(\Gamma_4)^2 = 1$ определить нельзя.

В $D = 4$: здесь необходимо увеличить размер Γ -матриц в 2 раза

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.31)$$

но Γ_4 , такой что $\{\Gamma_4, \Gamma_i\} = 0$, $i = 1, 2, 3$ $(\Gamma_4)^2 = 1$ определить нельзя. Также можно построить

$$\begin{aligned} \Gamma_5 \equiv -\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 &= - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16.32)$$

которая удовлетворяет условиям $\{\Gamma_5, \Gamma_i\} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ $(\Gamma_5)^2 = 1$.

В $D = 5$: $i, i = \overline{1, 5}$ берем из предыдущей размерности.

Далее процесс повторяется, например, в $D = 6$ определены Γ -матрицы размера 8×8

$$\Gamma_i^{D=6} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_i^{D=4} \\ \Gamma_i^{D=4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 5}, \quad (16.33)$$

и существует Γ_7 , такая что $\{\Gamma_7, \Gamma_i\} = 0$.

На основе вышесказанного становится ясной закономерность: Γ_i - эрмитовы ($\Gamma_i^+ = \Gamma_i$). В четной размерности D Γ -матрицы имеют размер $2^{D/2} \times 2^{D/2}$, а также существует матрица Γ_{D+1} , такая что $\{\Gamma_{D+1}, \Gamma_i\} = 0$. В нечетной размерности D Γ -матрицы имеют размер $2^{(D-1)/2} \times 2^{(D-1)/2}$, но не существует матрица Γ_{D+1} , такая что $\{\Gamma_{D+1}, \Gamma_i\} = 0$. В частности, если $D = 10$, то размер Γ -матриц равен $2^{10/2} \times 2^{10/2} = 32 \times 32$, и существует матрица Γ_{11} .

Как и в случае группы Лоренца генераторы спинорного представления пропорциональны

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i) = -\Gamma_{ji}. \quad (16.34)$$

При этом не сложно заметить, что

$$\Gamma_i \Gamma_j = \frac{1}{2}(\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i) + \frac{1}{2}\Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i = \delta_{ij} \cdot 1 + \Gamma_{ij}. \quad (16.35)$$

А также используя соотношение

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = \{A, B\}C - B\{A, C\}, \quad (16.36)$$

найдем

$$\begin{aligned} [\Gamma_{ij}, \Gamma_{kl}] &= [\Gamma_i \Gamma_j - \delta_{ij} \cdot 1, \Gamma_k \Gamma_l - \delta_{kl} \cdot 1] = \\ &= [\Gamma_i \Gamma_j, \Gamma_k \Gamma_l] = \Gamma_i [\Gamma_j, \Gamma_k \Gamma_l] + [\Gamma_j, \Gamma_k \Gamma_l] \Gamma_i = \\ &= [\Gamma_i \Gamma_j, \Gamma_k \Gamma_l] = \Gamma_i (\{\Gamma_j, \Gamma_k\} \Gamma_l - \Gamma_k \{\Gamma_j, \Gamma_l\}) + (\{\Gamma_i, \Gamma_k\} \Gamma_l - \Gamma_k \{\Gamma_i, \Gamma_l\}) \Gamma_j = \\ &= 2\delta_{jk} \Gamma_i \Gamma_l - 2\delta_{jl} \Gamma_i \Gamma_k + 2\delta_{ik} \Gamma_l \Gamma_j - 2\delta_{il} \Gamma_k \Gamma_j = \\ &= 2\delta_{jk} (\Gamma_{il} + \delta_{il}) - 2\delta_{jl} (\Gamma_{ik} + \delta_{ik}) + 2\delta_{ik} (\Gamma_{lj} + \delta_{lj}) - 2\delta_{il} (\Gamma_{kj} + \delta_{kj}) = \\ &= 2\delta_{jk} \Gamma_{il} - 2\delta_{ik} \Gamma_{jl} - 2\delta_{jl} \Gamma_{ik} + 2\delta_{il} \Gamma_{jk}. \end{aligned} \quad (16.37)$$

Таким образом, видно, что получаются коммутационные соотношения похожие на коммутационные соотношения для t_{ij} . Определяем

$$T_{ij} \equiv \frac{i}{4} \Gamma_{ij}. \quad (16.38)$$

Тогда

$$[T_{ij}, T_{kl}]_{mn} = \frac{i}{2} [\delta_{jk} T_{il} - \delta_{ik} T_{jl} - \delta_{jl} T_{ik} + \delta_{il} T_{jk}]. \quad (16.39)$$

Получились те же коммутационные соотношения, что и для t_{ij} . Следовательно, задано представление алгебры Ли $so(10)$ размерности 32.

Представление 32 является приводимым. Действительно, в $D = 10$ существует Γ_{11} , такая что $\{\Gamma_i, \Gamma_{11}\} = 0$. Инвариантными подпространствами размерности 16 будут пространства правых и левых спиноров

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\psi, \quad (16.40)$$

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11})\psi. \quad (16.41)$$

Рассмотрим преобразование данных спиноров при $SO(10)$ -преобразованиях

$$\psi \rightarrow \exp\left\{\left(\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}\right)\right\}\psi. \quad (16.42)$$

Так как $[\Gamma_{11}, \Gamma_{ij}] = 0$, то

$$\psi_R \rightarrow \exp\left\{\left(\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}\right)\right\}\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\psi = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\exp\left\{\left(\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}\right)\right\}\psi = \psi'_R. \quad (16.43)$$

Размерность данного пространства равна 16, так как

$$\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11}) = \frac{1}{2}\left(1 + \begin{pmatrix} 1_{16} & 0 \\ 0 & -1_{16} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1_{16} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.44)$$

Поэтому у ψ_R только 16 верхних компонент будут отличны от нуля. Аналогично

$$\frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{16} \end{pmatrix}, \quad (16.45)$$

у ψ_L 16 нижних компонент будут отличны от нуля. Поэтому соответствующие представления будем обозначать 16 и $\overline{16}$. То есть $32 = 16 + \overline{16}$. Соответствующие генераторы будут иметь вид

$$T_{ij} \equiv \frac{i}{8}\Gamma_{ij}(1 + \Gamma_{11}), \quad (16.46)$$

$$T_{ij} \equiv \frac{i}{8}\Gamma_{ij}(1 - \Gamma_{11}). \quad (16.47)$$

Таким образом, построено спинорное представление 16 группы $SO(10)$.

Лекция 17. Гамма-матрицы и алгебра Клиффорда

Убедимся, что представления 16 и $\overline{16}$ действительно являются сопряженными друг к другу. Для этого вначале определим в $D = 10$ матрицу, являющуюся аналогом матрицы зарядового сопряжения C .

Заметим, что построенные ранее матрицы Γ_{2k} - антисимметричные, Γ_{2k+1} - симметричные. Определим матрицу B как произведение всех симметричных матриц $B \equiv \Gamma_1\Gamma_3\Gamma_5\Gamma_7\Gamma_9$, тогда $B \equiv \Gamma_9\Gamma_7\Gamma_5\Gamma_3\Gamma_1 = B^{-1} = (-1)^{4+3+2+1}B = B$. Кроме того, $B\Gamma_i B^{-1} = \Gamma_i = \Gamma_i^T$ если i - нечетно, $B\Gamma_i B^{-1} = -\Gamma_i = \Gamma_i^T$ если i - четно. Поэтому

$$\Gamma_i B = B^T \Gamma_i^T = (\Gamma_i B)^T, \quad B\Gamma_i = (B\Gamma_i)^T \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_i B)^T &= \frac{1}{2}(\Gamma_i B \cdot B\Gamma_j B - \Gamma_j B \cdot B\Gamma_i B)^T = \\ &= \frac{1}{2}(B(B\Gamma_j)(\Gamma_i B) - B \cdot (B\Gamma_i) \cdot (B\Gamma_j)) = -\Gamma_{ij} B. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Поскольку B есть произведение 5 Γ -матриц ($D = 10$), то

$$B\Gamma_{11} B^{-1} = -\Gamma_{11} \implies \Gamma_{11} B = -B\Gamma_{11} = -(\Gamma_{11} B)^T. \quad (17.3)$$

Поэтому

$$(\Gamma_{ij}\Gamma_{11}B)^T = (\Gamma_{ij}BB\Gamma_{11}B)^T = -\Gamma_{11}BB(-\Gamma_{ij}B) = \Gamma_{ij}\Gamma_{11}B. \quad (17.4)$$

В общем случае, (для $D = 10$) аналогичным образом доказывается, что

$$(\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} B)^T = (-1)^{(5-k)(4-k)/2} \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} B, \quad (17.5)$$

$$(\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} \Gamma_{11} B)^T = (-1)^{(5-k)(6-k)/2} \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_k} \Gamma_{11} B. \quad (17.6)$$

Рассмотрим теперь $-(T_{ij})_{(16)}^T$ - генераторы представления, сопряженного к спинорному представлению 16.

$$\begin{aligned} -(T_{ij})_{(16)}^T &= -\left[\frac{i}{8} \Gamma_{ij} (1 + \Gamma_{11}) \right]^T = -\left[\frac{i}{8} \Gamma_{ij} B B (1 + \Gamma_{11}) \right]^T = \\ &= -\frac{i}{8} (1 + \Gamma_{11}) B (-\Gamma_{ij} B) = \frac{i}{8} B (1 - \Gamma_{11}) \Gamma_{ij} B = \\ &= B^{-1} \frac{i}{8} \Gamma_{ij} (1 - \Gamma_{11}) B^{-1} = B \cdot T_{ij} \cdot B^{-1}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Таким образом, показано, что представление, сопряженное к 16, действительно унитарно эквивалентно $\overline{16}$.

Данное равенство похоже на то, что было для группы $SU(2)$:

$$-(t^A)^T = -(\sigma^A/2)^T = \frac{1}{2}\sigma_2\sigma^A\sigma_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^A, & A = 2 \\ -\frac{1}{2}\sigma^A, & A = 1, 3 \end{cases} = \sigma_2\sigma^A(\sigma_2)^{-1}, \quad (17.8)$$

- представление, сопряженное к фундаментальному, унитарно эквивалентно фундаментальному (по определению, T^A унитарно эквивалентно ST^AS^{-1} , где S - унитарная матрица, $S = S^+$).

Разложение представления 16 по представлениям подгруппы $SU(5) \times U(1)$

Представим Γ -матрицы в $D = 10$ в виде

$$\begin{cases} \Gamma_i = \chi_i + \chi^{+i}, & i = \overline{1,5}, \\ \Gamma_{i+5} = -i(\chi_i - \chi^{+i}), & i = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (17.9)$$

Эквивалентно это можно переписать в виде

$$\begin{cases} \chi_i = \frac{1}{2}(\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}), \\ \chi^{+i} = \frac{1}{2}(\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}). \end{cases} \quad (17.10)$$

В силу эрмитовости Γ -матриц χ^{+i} действительно эрмитово сопряжена к χ_i . Матрицы χ_i и χ^{+i} ($i = \overline{1,5}$) имеют размер 32×32 и ввиду свойства

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij} \cdot 1_{32}, \quad i = \overline{1,10}, \quad (17.11)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j + i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} - 2\delta_{ij}) = 0, \quad (17.12)$$

$$\{\chi^{+i}, \chi^{+j}\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j - i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} - 2\delta_{ij}) = 0, \quad (17.13)$$

$$\{\chi_i, \chi^{+j}\} = \frac{1}{4}\{\Gamma_i + i\Gamma_{i+5}, \Gamma_j - i\Gamma_{j+5}\} = \frac{1}{4}(2\delta_{ij} + 2\delta_{ij}) = \delta_i^j, \quad (17.14)$$

- получается алгебра Клиффорда.

Представления этой алгебры хорошо известны. Вначале необходимо построить

вектор $|0\rangle (\neq 0)$, такой что $\chi_i |0\rangle = 0 \quad \forall i = \overline{1,5}$. Например, в $D = 2$

$$|0\rangle = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17.15)$$

$$\chi = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17.16)$$

$$\chi^+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.17)$$

Так что $\chi |0\rangle = 0$.

Выясним какую киральность имеет $|0\rangle$ в $D = 10$. В наших обозначениях при четных D $\Gamma_{D+1} = (-i)^{D/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_D$. Докажем данную формулу с помощью индукции. В случае $D = 2$

$$\Gamma_3 = (-i)^1 \Gamma_1 \Gamma_2 = -i \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_3. \quad (17.18)$$

В случае произвольного D , принимая истинность утверждения для $D-2$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{D+1}^{(D)} &= -i(-i)^{(D-2)/2} (\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{D-2}) \Gamma_{D-1} \Gamma_D = \\ &= -i \begin{pmatrix} \Gamma_{D-1}^{(D-2)} & 0 \\ 0 & \Gamma_{D-1}^{(D-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{D-1}^{(D-2)} \\ \Gamma_{D-1}^{(D-2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Тогда в $D = 10$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} |0\rangle &= (-i)^5 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} |0\rangle = \\ &= (-i)^5 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-1) \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} |0\rangle = \\ &= (-i)^5 (\Gamma_1 \Gamma_6) (\Gamma_2 \Gamma_7) (\Gamma_3 \Gamma_8) (\Gamma_4 \Gamma_9) (\Gamma_5 \Gamma_{10}) |0\rangle (-1)^{4+3+2+1}. \end{aligned} \quad (17.20)$$

При этом (по i нет суммирования)

$$\Gamma_i \Gamma_{i+5} |0\rangle = (\chi_i + \chi^{+i})(-i)(\chi_i - \chi^{+i}) |0\rangle = i |0\rangle. \quad (17.21)$$

Поэтому

$$\Gamma_{11} |0\rangle = (-i)^5 \cdot (-i)^{10} \cdot i^5 |0\rangle = |0\rangle. \quad (17.22)$$

Построим векторы

$$|0\rangle \text{ (1 шт)}, \quad (17.23)$$

$$\chi^{+i}|0\rangle \text{ (} C_5^1 = 5 \text{ шт)}, \quad (17.24)$$

$$\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle \text{ (} C_5^2 = 10 \text{ шт)}, \quad (17.25)$$

$$\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle \text{ (} C_5^3 = 10 \text{ шт)}, \quad (17.26)$$

$$\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle \text{ (} C_5^4 = 5 \text{ шт)}, \quad (17.27)$$

$$\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle \text{ (} C_5^5 = 1 \text{ шт)}. \quad (17.28)$$

$$(17.29)$$

Они очевидно ортогональны и, следовательно, линейно независимы. Всего этих векторов

$$\sum_{k=0}^5 C_5^k = (1+1)^5 = 2^5 = 32. \quad (17.30)$$

Следовательно, они образуют базис в пространстве столбцов с 32 компонентами. Поэтому произвольный 32-компонентный столбец $|\psi\rangle$ можно разложить по этому базису как

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & |0\rangle\psi + \chi^{+i}|0\rangle\tilde{\psi}_i + \\ & + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle\psi_{ij} + \frac{1}{3!2!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\tilde{\psi}^{lm} + \\ & \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\psi^m + \frac{1}{5!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (17.31)$$

При этом все индексы пробегает значения от 1 до 5. Далее мы убедимся, что это настоящие тензорные индексы, соответствующие подгруппе $SU(5)$. При этом очевидно, что $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$ и $\tilde{\psi}_{ij} = -\tilde{\psi}_{ji}$.

Применим теперь оператор $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})$ к формуле (17.1), принимая во внимание, что $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})|0\rangle = |0\rangle$, а χ^{+i} содержит нечетное число Γ -матриц

$$\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})|\psi\rangle = |0\rangle\psi + \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle\psi_{ij} + \frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\psi^m. \quad (17.32)$$

Причем все слагаемые с нечетным числом χ^{+i} зануляются в силу равенства $\frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11})|0\rangle = 0$. Если i, j, \dots - тензорные индексы $SU(5)$, то мы получаем равенство $16 = 1 + \bar{5} + 10$, где $1 \sim \psi$; $\bar{5} \sim \psi^i$; $10 \sim \psi_{ij}$.

Лекция 18. Разложение представления 16 группы $SO(10)$ по подгруппе $SU(5) \times U(1)$

Чтобы доказать, что i, j, \dots в уравнении (18) - тензорные индексы по $SU(5)$, запишем генераторы подгруппы $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$. Напомним, что $\beta + i\gamma \in U(5)$, где $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$ соответствует $\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \in so(10)$. А для $U(1)$: $\beta = 0$; $\gamma = \gamma_0 \cdot 1_5$. При разложении по генераторам получим

$$\begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} = \beta_{ij}(-i)(t_{ij} + t_{i+5,j+5}) + \gamma_{ij}(-i)(t_{i+5,j} - t_{i,j+5}). \quad (18.1)$$

В спинорном представлении 16 генераторы имеют вид

$$T_{ij} = \frac{i}{8} \Gamma_{ij} (1 + \Gamma_{11}), \quad (18.2)$$

(16)

так как далее будет рассматриваться действие спинорных преобразований только на правые спиноры проектор $\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})$ можно опустить ввиду того, что $\left(\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})$

$$T_{ij} = \frac{i}{4} \Gamma_{ij}. \quad (18.3)$$

(16)

Поэтому соответствующий генератор запишется следующим образом

$$\begin{aligned} T(A) &= \beta_{ij}(-i) \frac{i}{4} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}) + \gamma_{ij}(-i) \frac{i}{4} (\Gamma_{i+5,j} - \Gamma_{i,j+5}) = \\ &= \frac{1}{4} \beta_{ij} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}) + \frac{1}{4} \gamma_{ij} (\Gamma_{i+5,j} - \Gamma_{i,j+5}). \end{aligned} \quad (18.4)$$

Однако для дальнейших вычислений удобно данную величину выразить через операторы χ^{+i} и χ^i . Оказывается это можно сделать следующим образом

$$\begin{aligned} T(A) &= (\beta_i^j + i\gamma_i^j) (\chi^{+i} \chi_j - \frac{1}{2} \delta_i^j) = \\ &= (\beta_i^j + i\gamma_i^j) \frac{1}{4} (\Gamma_i - i\Gamma_{i+5}) (\Gamma_j + i\Gamma_{j+5}) - \frac{i}{2} \text{tr} \gamma = \\ &= (\beta_{ij} + i\gamma_{ij}) \frac{1}{4} (\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_{i+5} \Gamma_{j+5} - i\Gamma_{i+5} \Gamma_j + i\Gamma_i \Gamma_{j+5} - 2\delta_{ij}) = \\ &= (\beta_{ij} + i\gamma_{ij}) \frac{1}{4} \begin{matrix} \text{АНТИСИММ.} & \text{СИММ.} \end{matrix} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5} - i\Gamma_{i+5,j} - i\Gamma_{j+5,i}) = \\ &= \frac{1}{4} \beta_{ij} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+5,j+5}) + \frac{1}{4} \gamma_{ij} (\Gamma_{i+5,j} + \Gamma_{j+5,i}), \end{aligned} \quad (18.5)$$

в силу антисимметрии β и симметрии γ .

Поэтому генераторы подгруппы $U(5)$ можно записать в виде

$$T(\beta + i\gamma) = (\beta_i^j + i\gamma_i^j)(\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{2}\delta_i^j). \quad (18.6)$$

То есть $\chi^{+i}\chi_j$ - образ матрицы $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1_{ij} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ В частности, генераторы $SU(5)$

будут $\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{5}\delta_j^i\chi^{+m}\chi_m$, а генератором подгруппы $U(1)$ будет $\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{5}\delta_j^i\chi^{+m}\chi_m$.

Теперь, зная как преобразуется спинор $|\psi\rangle$

$$\delta|\psi\rangle = T(A)|\psi\rangle = (\beta_i^j + i\gamma_i^j)(\chi^{+i}\chi_j - \frac{1}{2}\delta_i^j)|\psi\rangle, \quad (18.7)$$

можно найти, как преобразуются различные тензоры в формуле

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |0\rangle\psi + \chi^{+i}|0\rangle\tilde{\psi}_i + \\ &+ \frac{1}{2!}\chi^{+i}\chi^{+j}|0\rangle\psi_{ij} + \frac{1}{3!2!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\tilde{\psi}^{lm} + \\ &\frac{1}{4!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\psi^m + \frac{1}{5!}\chi^{+i}\chi^{+j}\chi^{+k}\chi^{+l}\chi^{+m}|0\rangle\epsilon_{ijklm}\tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (18.8)$$

под действием подгрупп $SU(5)$ и $U(1)$. Для этого необходимо выделить коэффициенты в $(\psi_18 : \langle 0|0\rangle = 1$ и Действительно, например,

$$\begin{aligned} \langle 0|\chi_i\chi_j|\psi\rangle &= \frac{1}{2!}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi^{+k}\chi^{+l}|0\rangle\psi_{kl} = \\ &= \frac{1}{2!}\langle 0|\chi_i\chi_{+l}|0\rangle\psi_{jl} = \psi_{ji} = -\psi_{ij}, \\ -\frac{1}{3!}\epsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle &= \frac{1}{2!}\epsilon^{mlkpq}\tilde{\psi}^{pq}\epsilon^{ijklm}\left(-\frac{1}{3!}\right) = \tilde{\psi}^{ij}, \\ -\frac{1}{4!}\epsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l|\psi\rangle &= \epsilon_{lkjin}\psi^n\frac{1}{4!}\epsilon^{ijklm} = \psi^m, \\ \frac{1}{5!}\epsilon^{ijklm}\langle 0|\chi_i\chi_j\chi_k\chi_l\chi_m|\psi\rangle &= \frac{1}{5!}\epsilon_{mlkji}\epsilon^{ijklm}\tilde{\psi} = \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Преобразуем теперь спинор $|\psi\rangle$ по группе $SU(5)$, вложенной в $SO(10)$ указанным ранее образом.

Если $\omega_i^j \simeq (1 + \beta + i\gamma)_i^j$ где $\beta^T = -\beta$; $\gamma^T = \gamma$; $tr\gamma = 0$ - элемент $SU(5)$, то

$$T(\beta + i\gamma) = (\beta_i^j + i\gamma_i^j)\chi^{+i}\chi_j \equiv \alpha_i^j\chi^{+i}\chi_j, \quad \alpha \in su(5), \quad (18.10)$$

так как $\beta_i^j\delta_j^i = 0$ и $\gamma_i^j\delta_j^i = tr\gamma = 0$. Поэтому при рассматриваемом преобразовании

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + \alpha_i^j\chi^{+i}\chi_j|\psi\rangle. \quad (18.11)$$

Тогда

$$\psi = \langle 0 | \psi \rangle \rightarrow \langle 0 | \psi \rangle + \alpha_i^j \langle 0 | \chi^{+i} \chi_j | \psi \rangle = \langle 0 | \psi \rangle = \psi, \quad (18.12)$$

так как $\langle 0 | \chi^{+i} = 0$. Таким образом, получился инвариант по отношению к $SU(5)$ -преобразованиям, то есть представление 1.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i &= \langle 0 | \chi_i | \psi \rangle \rightarrow \langle 0 | \chi_i | \psi \rangle + \alpha_k^l \langle 0 | \chi_i \chi^{+k} \chi_l | \psi \rangle = \\ &= \tilde{\psi}_i + \alpha_i^l \langle 0 | \chi_l | \psi \rangle = (1 + \alpha)_i^j \tilde{\psi}_j, \end{aligned} \quad (18.13)$$

так как $\{\chi_i, \chi^{+k}\} = \delta_i^k$. Получился закон преобразования вектора - получилось фундаментальное представление 5. Таким образом, оказалось, что i - настоящий тензорный индекс по группе $SU(5)$.

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= \langle 0 | \chi_j \chi_i | \psi \rangle \rightarrow \langle 0 | \chi_j \chi_i | \psi \rangle + \langle 0 | \chi_j \chi_i \alpha_k^l \chi^{+k} \chi_l | \psi \rangle = \\ &= \psi_{ij} + \langle 0 | \chi_j \alpha_i^l \chi_l | \psi \rangle - \langle 0 | \alpha_j^l \chi_l \chi_i | \psi \rangle = \psi_{ij} + \alpha_i^l \psi_{lj} - \alpha_j^l \psi_{il}. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Получился закон преобразования антисимметричного тензора второго ранга, то есть $\psi_{ij} \sim 10$.

Аналогичным образом проверяется, что $\langle 0 | \chi_k \chi_l \chi_m | \psi \rangle$ - антисимметричный тензор 3-го ранга. Следовательно, $-\frac{1}{3!} \varepsilon^{ijklm} \langle 0 | \chi_k \chi_l \chi_m | \psi \rangle = \tilde{\psi}^{ij}$ - антисимметричный тензор с 2-мя верхними индексами.

Используя тот же метод доказываем, что ψ^m - вектор с верхним индексом, а $\tilde{\psi}$ - скаляр. Таким образом, по группе $SU(5)$

$$\begin{aligned} \psi &\sim 1, & \psi_{ij} &\sim 10, & \psi^m &\sim \bar{5}, \\ \tilde{\psi}_i &\sim 5, & \tilde{\psi}_{ij} &\sim \bar{10}, & \tilde{\psi} &\sim 1. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Таким образом, мы получаем, что из формулы

$$\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11}) | \psi \rangle = | 0 \rangle \psi + \frac{1}{2!} \chi^{+i} \chi^{+j} | 0 \rangle \psi_{ij} + \frac{1}{4!} \chi^{+i} \chi^{+j} \chi^{+k} \chi^{+l} | 0 \rangle \varepsilon_{ijklm} \psi^m, \quad (18.16)$$

следует разложение $16 = 1 + \bar{5} + 10$, а из формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11}) | \psi \rangle &= \chi^{+i} | 0 \rangle \tilde{\psi}_i + \frac{1}{3!2!} \chi^{+i} \chi^{+j} \chi^{+k} | 0 \rangle \varepsilon_{ijklm} \tilde{\psi}^{lm} + \\ &+ \frac{1}{5!} \chi^{+i} \chi^{+j} \chi^{+k} \chi^{+l} \chi^{+m} | 0 \rangle \varepsilon_{ijklm} \tilde{\psi}, \end{aligned} \quad (18.17)$$

разложение $\bar{16} = 1 + 5 + \bar{10}$.

Остается найти только заряды, соответствующие подгруппе $U(1)$ во вложении $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$.

Ранее было показано, что генератор $U(1)$ подгруппы в спинорном представлении 32 может быть записан в виде

$$T(1 + 2i\gamma) = 1 + i\gamma(2\chi^{+m}\chi_m - 5), \quad \gamma_i^j = 2\gamma\delta_i^j. \quad (18.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \langle 0|\psi\rangle \rightarrow \langle 0|\psi\rangle + i\gamma\langle 0|(2\chi^{+m}\chi_m - 5)|\psi\rangle = \\ &= \langle 0|\psi\rangle - 5i\gamma\langle 0|\psi\rangle = (1 - 5i\gamma)\psi. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Заряд поля ψ (в этой нормировке) равен (-5) . Аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_i &= \langle 0|\chi^i|\psi\rangle \rightarrow \tilde{\psi}_i + i\gamma\langle 0|(2\chi^{+m}\chi_m - 5)|\psi\rangle = \\ &= (1 + i\gamma(2 - 5))\tilde{\psi}_i = (1 - 3i\gamma)\tilde{\psi}_i, \end{aligned} \quad (18.20)$$

$$\psi_{ij} \rightarrow (1 - i\gamma)\psi_{ij}, \quad (18.21)$$

$$\tilde{\psi}^{ij} \rightarrow (1 + i\gamma)\tilde{\psi}^{ij}, \quad (18.22)$$

$$\psi^i \rightarrow (1 + 3i\gamma)\psi^i, \quad (18.23)$$

$$\tilde{\psi} \rightarrow (1 + 5i\gamma)\tilde{\psi}. \quad (18.24)$$

Откуда получаем следующие правила ветвления

$$16 = 1(-5) + \bar{5}(3) + 10(-1), \quad (18.25)$$

$$\bar{16} = 1(5) + 5(-3) + \bar{10}(1). \quad (18.26)$$

Сравним теперь эти формулы с преобразованиями $B-L$:

$$\psi_{ij} \rightarrow e^{-i\alpha/5}\psi_{ij}; \quad \psi^i \rightarrow e^{3i\alpha/5}\psi^i; \quad (\mathbf{v}^C)_L \rightarrow e^{-i\alpha}(\mathbf{v}^C)_L, \quad (18.27)$$

совпадают с точностью до нормировки. Поэтому во вложении $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$ подгруппа $U(1)$ отождествляется с $U(1)_F \equiv U(1)_{B-L}$. Она является генератором преобразований, благодаря которым сохраняется $B-L$.

Лекция 19. Структура лагранжиана и сокращение аномалий в $SO(10)$ ТВО

Теперь изучим теорию поля, построенную на калибровочной симметрии $SO(10)$.

Лагранжиан $SO(10)$ модели

Лагранжиан $SO(10)$ ТВО может быть представлен в виде суммы нескольких характерных частей:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ЯМ}} + \mathcal{L}_{\phi} + \mathcal{L}_{\text{Хиггс}} + \mathcal{L}_{\text{Юкава}}, \quad (19.1)$$

здесь $\mathcal{L}_{\text{ЯМ}}$ - лагранжиан Янга-Миллса, \mathcal{L}_{ϕ} - кинетическое слагаемое для фермионов, $\mathcal{L}_{\text{Хиггс}}$ - хиггсовская часть, ответственная за нарушение симметрии, $\mathcal{L}_{\text{Юкава}}$ - Юкавское взаимодействие. Калибровочная группа $G = SO(10)$ и представление для материи $R = 3 \times 16$ (3 - количество поколений) однозначно определяет $\mathcal{L}_{\text{ЯМ}}$ и \mathcal{L}_{ϕ} . Для лагранжиана Янга-Миллса имеем

$$\mathcal{L}_{\text{ЯМ}} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A)^2 \rightarrow -\frac{1}{8}(F_{\mu\nu}^{ij})^2, \quad (19.2)$$

где $i, j = \overline{1, 10}$, а дополнительная $1/2$ появляется, чтобы избежать двойного суммирования. При этом

$$F_{\mu\nu} = ie\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{ij} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}], \quad (19.3)$$

где $A_{\mu} = ie\frac{1}{2}A_{\mu}^{ij}t^{ij}$. Напомним, что $tr(t^{ij}t^{kl}) = \frac{1}{2}(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk})$, так что

$$\frac{1}{2e^2}trF_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{8}tr(t^{ij}t^{kl})F_{\mu\nu}^{ij}F_{\mu\nu}^{kl} = -\frac{1}{8}(F_{\mu\nu}^{ij})^2. \quad (19.4)$$

Теперь запишем выражение для фермионного лагранжиана. Будем обозначать фермионы 3-х поколений в представлении 16 - ψ_a^I , $I = \overline{1, 3}$; $a = \overline{1, 16}$ (по группе Лоренца они левые, а по группе $SO(10)$ они правые). Тогда кинетическое слагаемое запишется в виде

$$\mathcal{L}_{\phi} = i\bar{\psi}^I \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi^I = i\bar{\psi}^I \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + ieA_{\mu}^A T_{16}^A) \psi^I \rightarrow i\bar{\psi}^I \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + \frac{ie}{2}A_{\mu}^{ij} T_{(16)}^{ij}) \psi^I, \quad (19.5)$$

где $T_{(16)}^{ij} = \frac{i}{8}\Gamma^{ij}(1 + \Gamma_{11})$.

Из этих двух частей лагранжиана при условии правильного нарушения калибровочной симметрии (то есть $SO(10) \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$) получаются все квантовые числа элементарных частиц.

Цепочка нарушения симметрии определяется составом и лагранжианом хиггсовских полей. Например, возможна цепочка

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}. \quad (19.6)$$

Однако данный вариант хоть и является наиболее очевидным, тем не менее, как было показано ранее, при нарушении $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ возникает проблема точной подстройки. Поэтому данная цепочка является не самой реалистичной. Но возможен и другой более реалистичные варианты, например,

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}, \quad (19.7)$$

$SU(5) \times U(1)$ -модель называется перевернутой $SU(5)$ моделью (flipped $SU(5)$). В данной модели не возникает проблемы точной подстройки.

Также возможен вариант

$$\begin{aligned} SO(10) &\rightarrow SU(4) \times SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(4) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow \\ &\rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow \\ &\rightarrow SU(3) \times U(1)_{em}, \end{aligned} \quad (19.8)$$

и так далее. Существует довольно много возможностей. Однозначно сказать, какой вариант реализуется, в настоящее время невозможно.

Однако юкавское взаимодействие может содержать только определенные хиггсовские поля. Так как по соображениям киральности нетривиальной структурой по группе Лоренца является следующая $\mathcal{L}_{\text{Юкава}} \sim \psi^T C \psi \phi = \overline{\psi^C} \psi \phi$. Так как по группе $SO(10)$ спиноры ψ также имеют индексы, то, вообще говоря, нетривиальная комбинация в общем случае будет иметь вид $\psi_a^T C M^{ab} \chi_b$, $a, b = 1, 16$. Рассмотрим билинейные комбинации вида $\psi^T C B \Gamma_{i_1 \dots i_k} \psi$, которые являются скалярами по группе Лоренца, $B = \Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_5 \Gamma_7 \Gamma_9$ - матрица зарядового сопряжения в 10-мерии. Убедимся, что данные комбинации являются тензорами по $SO(10)$. Ввиду того, что $\psi = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\psi$ для $\psi \in 16$ то при $SO(10)$ -преобразованиях

$$\psi \rightarrow \exp\left\{\left(\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}\right)\right\}\psi, \quad (19.9)$$

получаем

$$\psi^T B \rightarrow \psi^T B \cdot B \exp\left\{\left(\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}^T\right)\right\} B = \psi^T B \exp\left\{\left(-\frac{1}{4}\alpha_{ij}\Gamma_{ij}\right)\right\}, \quad (19.10)$$

поскольку $(\Gamma_{ij}B)^T = -\Gamma_{ij}B$ и, следовательно, $B\Gamma_{ij}^T B = -\Gamma_{ij}$. Это означает, что рассматриваемые билинейные комбинации являются тензорами по группе $SO(10)$.

При этом в пространстве матриц размера 32×32 можно выбрать базис

$$1; \Gamma_{11}; \Gamma_i; \Gamma_i \Gamma_{11}; \Gamma_{ij}; \Gamma_{ij} \Gamma_{11}; \Gamma_{ijk}; \Gamma_{ijk} \Gamma_{11}; \Gamma_{ijkl}; \Gamma_{ijkl} \Gamma_{11}; \Gamma_{ijklm}. \quad (19.11)$$

Всего $\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k = (1+1)^{10} = 2^{10} = 32 \cdot 32$ матриц. Поскольку $\chi \in 16$, то это правый спинор, то есть $\chi = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\chi$ и произведения с Γ_{11} можно не рассматривать, так как $\Gamma_{11}(1 + \Gamma_{11}) = 1 + \Gamma_{11}$. Кроме того, поскольку $\psi^T = \psi^T \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})$ - также правый спинор по $SO(10)$, а B есть произведение 5 Γ -матриц, то отличными от нуля будут только величины с нечетным числом Γ -матриц в произведении $\Gamma_{i_1 \dots i_k}$ (то есть с нечетными k). Это означает, что нетривиальными будут величины

$$\psi^T C B \Gamma_i \chi; \psi^T C B \Gamma_{ijk} \chi; \psi^T C B \Gamma_{ijklm} \chi. \quad (19.12)$$

Первых будет $C_{10}^1 = 10$, вторых $C_{10}^3 = 120$, третьих $\frac{1}{2}C_{10}^5 = 126$. $\frac{1}{2}$ возникает поскольку

$$-\frac{1}{5!} \epsilon_{ijklmnpqrst} \Gamma_{pqrst} = \Gamma_{ijklm} \Gamma_{11}. \quad (19.13)$$

Действительно, $\Gamma_{11} = (-i)^{10/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{10}$ и, следовательно

$$\begin{aligned} -i \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} &= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5 \cdot \Gamma_{11} = (-i)^5 \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{10} = \\ &= -i (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5) (\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \Gamma_5) (\Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10}) = \\ &= -i (-i)^{4+3+2+1} \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10} = -i \Gamma_6 \Gamma_7 \Gamma_8 \Gamma_9 \Gamma_{10}. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Получили тождество. Следовательно,

$$-\frac{1}{5!} \epsilon_{ijklmnpqrst} \psi^T C B \Gamma_{pqrst} \chi = \psi^T C B \Gamma_{ijklm} \chi, \quad (19.15)$$

получился аналог (анти)самодуальности, который уменьшает число компонент в 2 раза. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Юкава}} &= (Y_{10})_{IJ} \psi^{TI} C B \Gamma_i \psi^J \phi_i + (Y_{120})_{IJ} \psi^{TI} C B \Gamma_{ijk} \psi^J \phi_{ijk} + \\ &+ (Y_{126})_{IJ} \psi^{TI} C B \Gamma_{ijklm} \psi^J \phi_{ijklm}, \end{aligned} \quad (19.16)$$

где $\phi_i \in 10$; $\phi_{ijk} \in 120$; $\phi_{ijklm} \in 126$ (антисимметричные тензоры, а для 126 есть еще условие $-\frac{1}{5!} \epsilon^{ijklmnpqrst} \phi_{pqrst} = \phi_{ijklm}$). Следовательно, в юкавском взаимодействии могут участвовать только хиггсы в представлениях 10, 120, 126.

$\Psi_a \chi_b$ можно разложить с помощью тождества, аналогичного тождеству Фирца

$$16 \times 16 = 256 = 10 + 120 + 126, \quad (19.17)$$

- тождество из теории групп.

Сокращение аномалий в $SO(10)$ ТВО

Левые (по группе Лоренца) фермионы одного поколения лежат в представлении 16 группы $SO(10)$. Поэтому для проверки условия сокращения аномалий необходимо убедиться, что

$$tr_{(16)}(T_{ij}\{T_{kl}, T_{mn}\}) = 0, \quad (19.18)$$

где $T_{ij} = \frac{i}{8}\Gamma_{ij}(1 + \Gamma_{11})$. Поэтому требуется проверить, что

$$tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}(1 + \Gamma_{11})) = 0. \quad (19.19)$$

Разделим выражение слева на две части

$$tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}(1 + \Gamma_{11})) = tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}) + tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}\Gamma_{11}). \quad (19.20)$$

Докажем, что каждое из слагаемых по-отдельности равны нулю. Начнем с первого. Для этого рассмотрим следующую величину

$$\begin{aligned} tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}\Gamma_{mn}) &= tr(\Gamma_{ij}B \cdot B\Gamma_{kl}\Gamma_{mn}B \cdot B)^T = \\ &= tr(B^T(\Gamma_{mn}B)^T(B\Gamma_{kl})^T(\Gamma_{ij}B)^T) = \\ &= [(\Gamma_{ij}B)^T = -\Gamma_{ij}B] = -tr(B\Gamma_{mn}B \cdot B\Gamma_{kl}\Gamma_{ij}B) = -tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{mn}\Gamma_{kl}). \end{aligned} \quad (19.21)$$

Поэтому

$$tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}) = 0. \quad (19.22)$$

Данное равенство является выражением отсутствия аномалий для вещественного представления $32 = 16 + \overline{16}$. Вообще говоря, для любого самосопряженного представления аномалии должны сократиться.

Но для величины $tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}\Gamma_{11})$ такие аргументы не работают, поскольку $(B\Gamma_{11})^T = -B\Gamma_{11}$. Рассмотрим чему равна следующая величина

$$tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}\Gamma_{mn}\Gamma_{11}). \quad (19.23)$$

В силу того, что $\Gamma_{ij} = \Gamma_i\Gamma_j - \delta_{ij}$, вычисление данного следа сводится к вычислению следующих следов

$$\begin{aligned} tr(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l\Gamma_m\Gamma_n\Gamma_{11}), \\ tr(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_l\Gamma_{11}), \\ tr(\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_{11}), \\ tr(\Gamma_{11}). \end{aligned} \quad (19.24)$$

Так как $\Gamma_{11} = -i\Gamma_1\Gamma_2\dots\Gamma_{10}$, а также $\Gamma_i^2 = 1$, то без ограничений общности, можно считать, что все индексы в соответствующих величинах (19.2) различны, поэтому предлагается рассматривать следующие величины

$$\begin{aligned} &tr(\Gamma_{ijklmn}\Gamma_{11}), \\ &tr(\Gamma_{ijkl}\Gamma_{11}), \\ &tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{11}), \\ &tr(\Gamma_{11}). \end{aligned} \tag{19.25}$$

Так как $\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} 1_{16} & 0 \\ 0 & -1_{16} \end{pmatrix}$, то очевидно $tr(\Gamma_{11}) = 0$. Также после умножения на Γ_{11} для остальных следов получим

$$\begin{aligned} &tr(\Gamma_{ijklmn}\Gamma_{11}) = tr(\Gamma_{ijkl}) = 0, \\ &tr(\Gamma_{ijkl}\Gamma_{11}) = tr(\Gamma_{ijklmn}) = 0, \\ &tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{11}) = tr(\Gamma_{ijklmnpq}) = 0. \end{aligned} \tag{19.26}$$

Так как следы антисимметричных произведений Γ -матриц равны 0. Таким образом, и $tr(\Gamma_{ij}\Gamma_{kl}\Gamma_{mn}\Gamma_{11}) = 0$, а, следовательно, и $tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}\Gamma_{11}) = 0$. То есть мы доказали, что $tr(\Gamma_{ij}\{\Gamma_{kl}, \Gamma_{mn}\}(1 + \Gamma_{11})) = 0$ - аномалии в $SO(10)$ -ТВО сокращаются.

Лекция 20. Основные сведения о группе E_6

Группа E_6 также часто используется для построения теорий Великого Объединения, так как она содержит максимальную подгруппу $SO(10) \times U(1)$. Мы будем рассматривать алгебру Ли группы E_6 . Все простые компактные алгебры Ли перечислены:

$$\begin{aligned} A_n &= su(n+1), \\ B_n &= so(2n+1), \\ C_n &= usp(2n), \\ D_n &= so(2n), \end{aligned} \tag{20.1}$$

- 4 бесконечные серии (индекс внизу обозначает ранг). Также известны 5 исключительных алгебр Ли - G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 .

Алгебра Ли E_6 имеет следующие ранг и размерность

$$\dim E_6 = 78 > \dim SO(10) = 45, \tag{20.2}$$

$$\text{rank} E_6 = 6 > \dim SO(10) = 5. \tag{20.3}$$

При этом, действительно, существует максимальная подгруппа $SO(10) \times U(1) \subset E_6$.

Фундаментальное представление E_6 имеет размерность 27, а присоединенное - 78, следующие представления имеют размерность 351.

Среди исключительных алгебр Ли только E_6 имеет представления, которые не являются унитарно эквивалентными своим сопряженным. Поэтому только ее можно использовать для описания киральных теорий.

Построить явный вид генераторов E_6 и их коммутационных соотношений можно на основе правил ветвления для фундаментального и присоединенного представлений

$$27 = 1(4) + 10(-2) + 16(1), \tag{20.4}$$

$$78 = 1(0) + 16(-3) + \overline{16}(3) + 45(0), \tag{20.5}$$

представления $SO(10)$

здесь в скобках написан $U(1)$ -рзряд. Таким образом, представление 16 получается при разложении фундаментального представления 27 группы E_6 .

Из разложения представления 78 видно, что генераторы E_6 можно представить в виде набора $t_A = \{t_{ij}, t_a, t\}$ где $i, j = \overline{1, 10}, a = \overline{1, 32}$. При этом удобно нормировать

их условием

$$tr(t_A t_B) = \frac{1}{2} g_{AB}, \quad (20.6)$$

где $g_{AB} \neq \delta_{AB}$. В этом случае верхние и нижние индексы различаются

$$[t_A, t_B] \equiv i f_{AB}^C t_C \quad [T_A, T_B] \equiv i f_{AB}^C T_C. \quad (20.7)$$

Антисимметричными по всем индексам теперь будут величины

$$f_{ABC} \equiv g_{CD} f_{AB}^D, \quad (20.8)$$

так как

$$tr(t_A [t_B, t_C]) = i f_{BC}^D tr(t_A t_D) = i f_{BC}^D \frac{1}{2} g_{AD} = \frac{i}{2} f_{BCA}, \quad (20.9)$$

с другой стороны

$$tr(t_A [t_B, t_C]) = tr([t_A, t_B], t_C) = i f_{AB}^D tr(t_D t_C) = \frac{i}{2} f_{AB}^D g_{DC} = \frac{1}{2} f_{ABC}, \quad (20.10)$$

тогда в силу антисимметрии структурных констант по первым двум индексам $f_{BCA} = f_{ABC} = -f_{BAC}$. То есть, действительно, f_{ABC} - полностью антисимметричны.

В общем случае

$$tr(T_A T_B) = T(R) g_{AB}. \quad (20.11)$$

Генераторы присоединенного представления будут иметь вид

$$(T_{Adj A})_B^C = i f_{AB}^C, \quad (20.12)$$

$$-f_{AC}^D f_{BD}^C = C_2 g_{AB} \rightarrow C_2 = T(Adj). \quad (20.13)$$

Определим теперь коммутационные соотношения между генераторами. Для этого требуется, чтобы $SO(10)$ -индексы слева и справа были бы одинаковы, а также выполнялось бы тождество Якоби. Тогда

$$[t_{ij}, t_{kl}] = \frac{i}{\sqrt{12}} (\delta_{il} t_{jk} - \delta_{jl} t_{ik} - \delta_{ik} t_{jl} + \delta_{jk} t_{il}), \quad (20.14)$$

$$[t_{ij}, t] = 0, \quad (20.15)$$

$$[t_{ij}, t_a] = -\frac{i}{2\sqrt{12}} (\Gamma_{ij})_a^b t_b, \quad (20.16)$$

$$[t, t_a] = \frac{1}{4} (\Gamma_{11})_a^b t_b, \quad (20.17)$$

$$[t_a, t_b] = -\frac{i}{4\sqrt{12}} (\Gamma_{ij} B)_{ab} t_{ij} + \frac{1}{4} (\Gamma_{11} B)_{ab} t. \quad (20.18)$$

В этих соотношениях важна антисимметрия правой части. Возникшие коэффициенты в данных соотношениях определяются нормировкой и тождеством Якоби.

Наиболее важно проверить выполнение тождеств Якоби. Их довольно много. Большинство проверяется достаточно легко, но есть и нетривиальные

$$\begin{aligned}
 0 &= [t_a, [t_b, t_c]] + [t_b, [t_c, t_a]] + [t_c, [t_a, t_b]] = \\
 &= \left[t_a, -\frac{i}{4\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{bc}t_{ij} + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{bc}t \right] + \\
 &+ \left[t_b, -\frac{i}{4\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ca}t_{ij} + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ca}t \right] + \\
 &+ \left[t_c, -\frac{i}{4\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ab}t_{ij} + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ab}t \right] = \\
 &= -\frac{i}{4\sqrt{12}}\frac{i}{2\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{bc}(\Gamma_{ij})_a^d t_d + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{bc} \left(-\frac{1}{4} \right) (\Gamma_{11})_a^d t_d - \\
 &- \frac{i}{4\sqrt{12}}\frac{i}{2\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ca}(\Gamma_{ij})_b^d t_d + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ca} \left(-\frac{1}{4} \right) (\Gamma_{11})_b^d t_d - \\
 &- \frac{i}{4\sqrt{12}}\frac{i}{2\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ab}(\Gamma_{ij})_c^d t_d + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ab} \left(-\frac{1}{4} \right) (\Gamma_{11})_c^d t_d = \\
 &= \frac{1}{96} [(\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{bc}(\Gamma_{ij})_a^d + (\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ca}(\Gamma_{ij})_b^d + (\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ab}(\Gamma_{ij})_c^d - \\
 &- 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{bc}(\Gamma_{11})_a^d - 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ca}(\Gamma_{11})_b^d - 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ab}(\Gamma_{11})_c^d] t_d. \tag{20.19}
 \end{aligned}$$

Поэтому должно выполняться тождество

$$\begin{aligned}
 0 &= (\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{bc}(\Gamma_{ij})_a^d + (\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ca}(\Gamma_{ij})_b^d + (\Gamma_{ij}\mathbf{B})_{ab}(\Gamma_{ij})_c^d - \\
 &- 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{bc}(\Gamma_{11})_a^d - 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ca}(\Gamma_{11})_b^d - 6(\Gamma_{11}\mathbf{B})_{ab}(\Gamma_{11})_c^d. \tag{20.20}
 \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства полностью антисимметрична по a, b, c . Поэтому для его доказательства достаточно провести свертки с антисимметричными матрицами

$$(\mathbf{B}\Gamma_{ij})^{ba}, (\mathbf{B}\Gamma_{ijk})^{ba}, (\mathbf{B}\Gamma_{11})^{ba}, (\mathbf{B}\Gamma_{ijk}\Gamma_{11})^{ba}, (\mathbf{B}\Gamma_{ijkl}\Gamma_{11})^{ba}. \tag{20.21}$$

Например, для $(\mathbf{B}\Gamma_{11})^{ba}$ получим

$$\begin{aligned}
 0 &= -2(\Gamma_{ij}\mathbf{B}\mathbf{B}\Gamma_{11}\Gamma_{ij})_c^d + \text{tr}(\Gamma_{ij}\mathbf{B}\mathbf{B}\Gamma_{11})(\Gamma_{ij})_c^d + \\
 &+ 12(\Gamma_{11}\mathbf{B}\mathbf{B}\Gamma_{11}\Gamma_{11})_c^d - 6\text{tr}(\Gamma_{11}\mathbf{B}\mathbf{B}\Gamma_{11})(\Gamma_{11})_c^d. \tag{20.22}
 \end{aligned}$$

При этом

$$\text{tr}(\Gamma_{ij}\mathbf{B}\mathbf{B}\Gamma_{11}) = 0, \tag{20.23}$$

$$\Gamma_{ij}\Gamma_{ij} = \Gamma_i\Gamma_j(-\Gamma_{ji}) = -\Gamma_i\Gamma_j(\Gamma_j\Gamma_i - \delta_{ij}) = (-10^2 + 10) \cdot 1 = -90 \cdot 1, \tag{20.24}$$

$$\text{tr}1 = 32. \tag{20.25}$$

Поэтому

$$-2 \cdot (-90)(\Gamma_{11})_c^d + 12(\Gamma_{11})_c^d - 6 \cdot 32(\Gamma_{11})_c^d = (192 - 192)(\Gamma_{11})_c^d = 0. \quad (20.26)$$

Остальные свертки проверяются аналогичным, но более сложным образом.

Полученное тождество и гарантирует выполнение рассматриваемого тождества Якоби.

Генераторы представления $27 = 1(4) + 10(-2) + 16(1)$, удовлетворяющие рассматриваемым КС, легко построить: при действии на столбец $\begin{pmatrix} X \\ X_l \\ X_b \end{pmatrix}$, где $l = \overline{1, 10}$, $b = \overline{1, 16}$, X_l - $SO(10)$ -вектор, X_b - $SO(10)$ правый спинор, они имеют вид

$$t = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})_a^b \end{pmatrix}, \quad (20.27)$$

$$t_{ij} = \frac{i}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\Gamma_{ij}(1 + \Gamma_{11}))_a^b \end{pmatrix}, \quad (20.28)$$

$$t_d = \frac{1}{\sqrt{96}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}(1 + \Gamma_{11})_a^b \\ 0 & 0 & (\Gamma_k(1 + \Gamma_{11}))_d^b \\ \sqrt{2}((1 + \Gamma_{11})B)_{ad} & ((1 + \Gamma_{11})\Gamma_l B)_{ad} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20.29)$$

$$(20.30)$$

Эти генераторы нормированы условием

$$tr(t_A t_B) = \frac{1}{2} g_{AB}, \quad (20.31)$$

где

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} & 0 & 0 \\ 0 & B_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20.32)$$

а обратная метрика имеет вид

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) & 0 & 0 \\ 0 & B^{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20.33)$$

Например,

$$tr(t^2) = \frac{1}{144}(16 + 4 \cdot 10 + tr(\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11}))) = \frac{1}{144}(16 + 40 + 16) = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}. \quad (20.34)$$

Также видно, что генераторы t_d не являются эрмитовыми. Вместо этого они удовлетворяют условию

$$t_d = B_{de}(t^+)^e. \quad (20.35)$$

Чтобы $-\frac{i}{2}\alpha_{ij}t_{ij} - i\alpha^b t_b - i\alpha t \in A$ был бы антиэрмитов, нужно чтобы

$$i(\alpha^*)_b(t^+)^b = i\alpha^d t_d = i\alpha^d B_{db}(t^+)^b \quad (20.36)$$

и, следовательно, $\alpha^+ = \alpha^T B$ - условие майорановости в $D=10$.

Вычислим теперь групповые константы для группы E_6 . Для этого вначале рассмотрим величину

$$\begin{aligned} g^{AB}[t_A, [t_B, t_C]] &= g^{AB}[t_A, i f_{BC}^D t_D] = \\ &= g^{AB} \cdot i f_{BC}^D \cdot f_{AD}^E t_E = -g^{AB} f_{BC}^D f_{AD}^E t_E = \\ &= -g^{AB} f_{CB}^D f_{DA}^E t_E = -f_{CB}^D g^{EF} f_{FD}^B t_E = \\ &= g^{EF} g_{CF} t_E \cdot C_2 = C_2 t_C \end{aligned} \quad (20.37)$$

где была использована полная антисимметрия структурных констант. Наиболее просто C_2 вычислить для $t_C = t$

$$\begin{aligned} g^{AB}[t_A, [t_B, t]] &= \frac{1}{2}[t_{ij}, [t_{ij}, t]] + [t, [t, t]] + B^{ab}[t_a, [t_b, t]] = \\ &= B^{ab}[t_a, [t_b, t]] = B^{ab}[t_a, -\frac{1}{4}(\Gamma_{11})_b^c t_c] = \\ &= -\frac{1}{4}(B\Gamma_{11})^{ac} \left\{ -\frac{i}{4\sqrt{12}}(\Gamma_{ij}B)_{act} t_{ij} + \frac{1}{4}(\Gamma_{11}B)_{act} \right\} = \\ &= \frac{1}{16}tr(B\Gamma_{11} \cdot \Gamma_{11}B) \cdot t = \frac{32}{16}t = 2t \end{aligned} \quad (20.38)$$

Следовательно, $C_2(E_6) = 2$.



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ