



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГЕОМЕТРИЯ И ГРАВИТАЦИЯ

МУСАЕВ
ЭДВАР ТАВАККУЛОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

Содержание

1 Лекция 1. Ковариантная производная. Геометрический смысл кривизны и кручения	4
1.1 Ковариантная производная	4
1.2 Параллельный перенос	5
1.2.1 Пример	6
1.3 Геодезические	6
1.4 Частица в гравитационном поле	7
1.5 Ruijsenaars-Schneider model	8
1.6 Геометрический смысл кривизны и кручения	8
1.7 Вариация действия с граничными условиями. Внешняя кривизна	10
2 Лекция 2. Действие Гиббонса-Хоккинга. Тетрадная формулировка гравитации	12
2.1 Внешняя кривизна	12
2.2 Граничные члены в действии Эйнштейна-Гильберта	14
2.3 Тетрадная формулировка гравитации	16
2.3.1 Геометрический смысл тетрады	16
2.3.2 Примеры	17
2.3.3 Связность, кручение и кривизна в терминах тетрад	18
3 Лекция 3. ADM формализм. Тетрадный формализм	20
3.1 ADM формализм и гамильтонова формулировка гравитации	20
3.2 Соотношение Гаусса-Кодацци	21
3.3 Тетрадный формализм	23
4 Лекция 4. Нелинейная реализация симметрии	27
4.1 Формализм 1-го порядка	27
4.2 Калибровочная теория группы Пуанкаре	28
4.3 Нелинейная реализация симметрии	30
5 Лекция 5. Гладкие многообразия	34
5.1 Карты и атлас	34
5.2 Согласованность карт	34
5.2.1 Примеры	35
5.3 Связность и размерность многообразия	36
5.4 Примеры гладких многообразий	36

5.4.1	Пример 1. Многообразие матриц	37
5.4.2	Пример 2. Многообразие Грассмана	38
6	Лекция 6. Касательные векторы. Ковекторы	39
6.1	Касательный вектор и касательное пространство	39
6.1.1	Задание S с помощью локальных уравнений	39
6.1.2	Касательные векторы и касательные пространства	41
6.1.3	Касательные вектора как операторы локального дифференцирования	42
6.1.4	Дифференцирование гладкого отображения и кокасательное пространство	43
7	Лекция 7. Главные расслоения	45
7.1	Тензорные поля	45
7.2	Геометрия расслоений	47
8	Лекция 8. Ассоциированное расслоение с главным расслоением	51
8.0.1	Примеры	52
8.1	Сечение расслоения	53
8.1.1	Примеры	54
8.2	Векторные расслоения	54
8.2.1	Касательное расслоение	55
9	Лекция 9. Связность в расслоении	56
9.1	Склеивающий коцикл	56
9.2	Связность в расслоении	57
9.3	Ковариантная производная	58
9.3.1	Пример	59
9.4	Группа голономии	59
9.4.1	Пример	60
9.5	Классификация Бергера	60
9.6	Классификация Бэра	61
10	Лекция 10. Комплексная геометрия	62
10.1	Линейное комплексное пространство	62
10.1.1	Пример	63
10.2	Комплексная структура на эрмитовых многообразиях	64
10.3	Кэлерово многообразие	67

11 Лекция 11. Кэлерово многообразие	68
11.0.1 Пример	69
11.1 Многообразие Калаби-Яу	70

Лекция 1. Ковариантная производная. Геометрический смысл кривизны и кручения

Ковариантная производная

Как известно из теории поля, для произвольного поля Φ^a , находящегося в некотором представлении калибровочной группы ковариантная производная имеет следующий вид

$$D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^a - A_\mu T_b^a \Phi^b = \partial_\mu \Phi^a - (A_\mu)_b^a \Phi^b, \quad (1.1)$$

где $(A_\mu)_b^a$ - символ связности, по латинским индексам представляет собой элемент алгебры калибровочной группы, по греческим - векторное поле в пространстве Минковского.

В ОТО пространство-время является искривленным многообразием, и поэтому для определения производной некоторого объекта на данном многообразии необходимо ввести связность со всеми тремя латинскими индексами

$$\begin{aligned} \nabla_m T^n &= \partial_m T^n + \Gamma_{mk}^n T^k, \\ \nabla_m T_n &= \partial_m T_n - \Gamma_{mn}^k T_k. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Также можно определить коммутатор данных производных

$$[\nabla_m, \nabla_n] V^k = R_{mnl}^k V^l + T_{mn}^l \nabla_l V^k, \quad (1.3)$$

первое слагаемое называется тензором кривизны связности, второе - тензором кручения связности.

В ОТО связность ограничена условием ковариантного постоянства метрики

$$\nabla_m g_{nk} = \partial_m g_{nk} - \Gamma_{mn}^l g_{lk} - \Gamma_{mk}^l g_{nl} = 0, \quad (1.4)$$

откуда возникает согласованность связности с метрикой. Для этого необходимо записать условие ковариантного постоянства метрики три раза переставив индексы

$$\begin{aligned} \nabla_m g_{nk} &= \partial_m g_{nk} - \Gamma_{mn}^l g_{lk} - \Gamma_{mk}^l g_{nl} = 0, \\ \nabla_n g_{mk} &= \partial_n g_{mk} - \Gamma_{nm}^l g_{lk} - \Gamma_{nk}^l g_{ml} = 0, \\ \nabla_k g_{mn} &= \partial_k g_{mn} - \Gamma_{km}^l g_{ln} - \Gamma_{kn}^l g_{ml} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а затем сложить первые два, а последнее вычесть из полученной суммы. Таким образом, получается выражение для символа связности через метрику

$$\Gamma_{mn}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_m g_{nl} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn}), \quad (1.6)$$

в таком случае связность называется связностью Леви-Чевита.

Надо заметить, что данное ограничение приводит к тому что по индексам n, k связность будет принадлежать ортогональной группе.

Для выяснение смысла ковариантной производной, связности, кривизны, кручения необходимо определить понятие параллельного переноса.

Параллельный перенос

Пусть задано векторное поле X , действующее на функцию следующим образом

$$X(f) = X^m \partial_m f, \quad (1.7)$$

необходимо определить действие такого поля на тензор произвольного ранга, например на векторное поле $V^m(x)$. Первый способ задания такой производной - это производная Ли. Однако данная производная определена только для тензоров из касательного пространства. Для взятия производной от тензора не из касательного пространства, а из произвольного слоя, необходимо определить понятие бесконечно малого параллельного переноса.

Пусть $\widetilde{V}^m(x + \Delta x)$ - результат некоторого преобразования, которое мы будем называть бесконечно малым параллельным переносом вектора $V^m(x)$ в точку $(x + \Delta x)$. Данное преобразование линейно по Δx

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^m(x + \Delta x) - V^m(x) &\sim \Delta x, \\ (\widetilde{V} + \widetilde{W})(x + \Delta x) &= \widetilde{V}(x + \Delta x) + \widetilde{W}(x + \Delta x), \end{aligned} \quad (1.8)$$

данные требования задают, так называемую, линейную связность.

Тогда операция бесконечно малого параллельного переноса запишется в виде

$$\widetilde{V}^m(x + \Delta x) = V^m(x) - \Gamma_{nk}^m \Delta x^n V^k(x), \quad (1.9)$$

здесь $\Gamma_{nk}^m \Delta x^n V^k(x)$ - поворот вектора V^m при переносе вдоль компоненты Δx^n векторного поля X .

Ковариантной производной называется

$$\nabla_n V^m(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V^m(x - \Delta x) - \widetilde{V}^m(x - \Delta x)}{\Delta x^n} = \partial_n V^m(x) + \Gamma_{nk}^m V^k(x), \quad (1.10)$$

$DV^m = \nabla_n V^m(x) dx^n$ - вектор потому что представляет собой разницу двух векторов в одной и той же точке.

Пример

Рассмотрим плоское двумерное пространство \mathbb{R}^2 (рис.) в полярных координатах, с интервалом

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1.11)$$

с заданным в каждой точке (r, ϕ) векторным полем $V = (V^r, V^\phi)$, где

$$\begin{aligned} V^r &= V \cos \theta, \\ V^\phi &= \frac{1}{r} V \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Произведем параллельный перенос вектора V в точку $(r + \Delta r, \phi)$, тогда в данной точке результат параллельного переноса запишется в виде

$$\tilde{V} = (\tilde{V}^r(r + \Delta r, \phi), \tilde{V}^\phi(r + \Delta r, \phi)) = (\tilde{V}^r(r, \phi), \tilde{V}^\phi(r, \phi) - \frac{\Delta r}{r} \tilde{V}^\phi(r, \phi)), \quad (1.13)$$

откуда, сопоставляя с формулой для параллельного переноса (1.9), получаем для соответствующей компоненты связности Леви-Чевита $\Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{r}$, аналогично при параллельном переносе в точку $(r, \phi + \Delta\phi)$ можно получить, что компонента связности $\Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$.

Таким образом, определена в общем случае операция параллельного переноса $\nabla_X T$ для тензора T любого ранга вдоль интегральной кривой векторного поля X .

Геодезические

При заданной связности можно определить параллельный перенос вдоль кривой $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow M$, $x^m = x^m(t)$, с касательным вектором $\xi^m = \frac{dx^m}{dt}$.

Определение: векторное поле $X^m(x)$ является ковариантно постоянным (параллельным) вдоль кривой γ если

$$\nabla_\xi X^m = 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1.14)$$

то есть результат параллельного переноса $\tilde{X}^m(x + \Delta x)$ вдоль ξ^m ($\Delta x^m = \xi^m \cdot \Delta t$) совпадает со значением векторного поля в точке $(x + \Delta x)$

$$\tilde{X}^m(x + \Delta x) = X^m(x + \Delta x). \quad (1.15)$$

Примеры ковариантно постоянных векторных полей (синего цвета) вдоль некоторых кривых (красного цвета), представлены на (рис.). Зеленым цветом выделены кривые, вдоль которых векторное поле ковариантно не постоянно.

Определение: параллельный перенос вектора $X^m(x_0)$ вдоль кривой γ - такое векторное поле $X^m(x(t))$, заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль кривой.

Определение: геодезическая - кривая $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow M$, касательный вектор к которой $\xi^m(t) = \dot{x}^m$ параллелен вдоль нее самой.

То есть данный вектор является ковариантно постоянным вдоль самого себя

$$0 = \nabla_{\xi} \xi^m = \xi^n \partial_n \xi^m + \Gamma_{nk}^m \xi^n \xi^k = \frac{d^2 x^m}{dt^2} + \Gamma_{nk}^m \frac{dx^n}{dt} \frac{dx^k}{dt}. \quad (1.16)$$

Полученное уравнение называется уравнением геодезической. Его можно получить как уравнение движения частицы в гравитационном поле, то есть как экстремальное расстояние соединяющее две заданные точки пространства-времени.

Частица в гравитационном поле

Запишем действие для релятивистской частицы во внешнем гравитационном поле

$$S = -mc \int ds, \quad (1.17)$$

где $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ - интервал. Тогда рассмотрим вариацию действия

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \delta \int \sqrt{ds^2} = -\frac{1}{2} mc \int \frac{1}{ds} \delta(g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu) = \\ &= -mc \int \left(\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu}(x) \frac{\delta dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) ds = \\ &= -\frac{1}{2} mc \int \frac{1}{ds} (\partial_\rho g_{\mu\nu}(x) \delta x^\rho dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x) \delta dx^\mu dx^\nu) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Второе слагаемое проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} &-mc \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu g_{\sigma\nu}(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\nu}(x) \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right) \delta x^\mu ds = \\ &-mc \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu g_{\sigma\nu}(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2} \partial_{(\sigma} g_{\nu)\mu}(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\nu}(x) \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right) \delta x^\mu ds = \\ &= mc \int g_{\mu\rho}(x) \left(\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{g^{\mu\rho}(x)}{2} (\partial_{(\sigma} g_{\nu)\mu}(x) - \partial_\mu g_{\sigma\nu}(x)) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \delta x^\mu ds = \\ &= mc \int \left(\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \delta x^\rho ds. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее, воспользуемся принципом наименьшего действия и в силу произвольности δx^ρ получаем уравнение геодезической

$$0 = \frac{\delta S}{\delta x^\rho} = \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (1.20)$$

В данном случае в уравнении движения автоматически получилась связность Леви-Чевита, однако в общем случае в уравнении геодезической связность может быть не метрической. Примером является Ruijsenaars-Schneider модель.

Ruijsenaars-Schneider model

Данная модель описывает динамику N частиц, которая описывается следующим динамическим уравнением

$$\ddot{x}^i = \sum_{i \neq j} \dot{x}^i \dot{x}^j W(x^{ij}), \quad x^{ij} = x^i - x^j, \quad (1.21)$$

где $W(x^{ij})$ - так называемый, суперпатенциал. При этом данная модель интегрируема если

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\sin x} \\ \cot x \end{cases}. \quad (1.22)$$

Уравнение можно переписать в виде уравнения геодезической. Однако связность в полученном уравнении окажется не метрической, но симметричной. При этом для рационального случае тензор кривизны оказывается равным нулю, то есть можно найти локальные координаты, в которых символ Кристоффеля равен 0.

Геометрический смысл кривизны и кручения

Утверждается, что тензор кривизны определяет изменение вектора при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой. Для того чтобы показать это, рассмотрим бесконечно малую замкнутую кривую на многообразии (рис.) и вычислим изменение вектора при параллельном переносе вдоль данной кривой. Для сокращения обозначений вычислим разницу векторов, один из которых параллельно перенесем вдоль кривой 123, а второй 143, результат будет тем же что и для одного вектора, параллельно перенесенного вдоль кривой 1234. Напомним, что при параллельном переносе вектор изменяется на величину

$$\delta V^\mu = \lim_{\delta t \rightarrow 0} (\widetilde{V}^\mu(x - \Delta x) - V^\mu(x - \Delta x)), \quad (1.23)$$

тогда вдоль кривой γ_1 результат параллельного переноса равен:

$$\widetilde{V}^m(t_2) = V^m(t_1) + \Gamma_{nk}^m(t_1) V^k(t_1) dx_{12}^n, \quad (1.24)$$

где $dx_{12}^n = x^n(t_2) - x^n(t_1)$ - бесконечно малое изменение. Воль кривой γ_2 результат параллельного переноса равен:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}^m(t_3) &= \widetilde{V}^m(t_2) + \Gamma_{nk}^m(t_2) \widetilde{V}^k(t_2) dx_{23}^n = \\ &= V^m(t_1) + \Gamma_{nk}^m V^k(t_1) dx_{12}^n + \\ &+ (\Gamma_{nk}^m(t_1) + \partial_l \Gamma_{nk}^m dx_{12}^l) (V^k(t_1) + \Gamma_{np}^k V^p(t_1) dx_{12}^n) dx_{23}^n, \end{aligned} \quad (1.25)$$

Далее, аналогично построим сторону rr'

$$x_{r'}^m = x_p^m + X^m(p)dt + Y^m(p)dt' + \Gamma_{nk}^m Y^k(p)X^n(p)dtdt', \quad (1.33)$$

В результате, получим высказанное утверждение

$$x_{q'}^m - x_{r'}^m = (\Gamma_{nk}^m - \Gamma_{kn}^m)Y^k(p)X^n(p)dtdt' = T_{nk}^m X^k(p)Y^n(p)dtdt', \quad (1.34)$$

здесь $T_{nk}^m = \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{kn}^m$ - тензор кручения.

Таким образом, на пространстве с кручением нельзя построить параллелограмм указанным способом.

Вариация действия с граничными условиями. Внешняя кривизна

Для начала, рассмотрим теорию действительного скалярного поля, описываемого действием

$$S = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) d^4x, \quad (1.35)$$

его вариация равна

$$\begin{aligned} \delta S &= \int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta \phi - m^2 \phi \delta \phi) d^4x = \\ &= - \int (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi \delta \phi d^4x + \int \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta \phi) d^4x, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$\delta \bar{S}$

По теореме Гасса последнее слагаемое можно представить как интеграл по границе

$$\delta \bar{S} = \int d\Sigma^\mu \partial_\mu \phi \delta \phi, \quad (1.37)$$

граничные условия Дирихле и Неймана позволяют занулить данное поверхностное слагаемое

$$\begin{aligned} D: \delta \phi|_\Sigma &= 0, \\ N: \partial_\mu \phi|_\Sigma &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Теперь, предположим, есть похожая теория, действие для которой описывается следующим выражением

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2} \int (\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2) d^4x, \quad (1.39)$$

теперь рассмотрим его вариацию

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S} &= - \int \left(\frac{1}{2} \delta\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu \delta\phi) + m^2 \delta\phi \phi \right) d^4x = \\ &= - \int \delta\phi \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \phi d^4x - \frac{1}{2} \int \phi (\partial_\mu \partial^\mu \delta\phi) d^4x,\end{aligned}\quad (1.40)$$

последнее слагаемое преобразуем

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{S} &= \frac{1}{2} \int \partial^\mu (\phi (\partial_\mu \delta\phi)) d^4x - \frac{1}{2} \int \partial^\mu \phi \partial_\mu \delta\phi d^4x = \\ &= \frac{1}{2} \int \partial^\mu (\phi (\partial_\mu \delta\phi)) d^4x - \frac{1}{2} \int \partial_\mu (\partial^\mu \phi \delta\phi) d^4x + \frac{1}{2} \int \partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi d^4x,\end{aligned}\quad (1.41)$$

в результате получаем

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S} &= - \int \delta\phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi d^4x - \frac{1}{2} \int \partial^\mu (\phi (\partial_\mu \delta\phi)) d^4x + \frac{1}{2} \int \partial_\mu (\partial^\mu \phi \delta\phi) d^4x = \\ &= - \int \delta\phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi d^4x - \frac{1}{2} \int \partial^\mu (\phi (\partial_\mu \delta\phi) - \partial^\mu \phi \delta\phi) d^4x = \\ &= - \int \delta\phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi d^4x - \frac{1}{2} \int n^\mu (\phi (\partial_\mu \delta\phi) - \partial^\mu \phi \delta\phi) d\Sigma,\end{aligned}\quad (1.42)$$

можно видеть, что последнее слагаемое не удастся полностью обратить в ноль с помощью граничных условий Дирихле или Неймана, так как в нем присутствуют слагаемые с производными от вариации $\partial_\mu \delta\phi$. Для преодаления данной трудности необходимо добавить к действию поверхностное слагаемое, вариация которого скомпенсирует поверхностные вклады от вариации исходного действия

$$\tilde{S} + \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) = S. \quad (1.43)$$

Однако не во всех теориях добавление такого типа слагаемых сокращает поверхностные вклады из вариации. Так, в гравитации необходимо добавлять поверхностные слагаемые с внешней кривизной.

Лекция 2. Действие Гиббонса-Хоккинга. Тетрадная формулировка гравитации

Внешняя кривизна

В прошлый раз было показано, что если при вариации действия появляются производные от вариации в поверхностном слагаемом, то для его сокращения необходимо добавить к действию дополнительное слагаемое. Для скалярного поля данное дополнительное слагаемое можно написать в 4-х мерном ковариантном виде. Для теории гравитации же необходимо предварительно ввести понятие внешней кривизны.

Пусть у нас есть пространственно-подобная поверхность, заданная следующим образом

$$\Phi(x^\mu) = 0, \quad (2.1)$$

где x^μ - координаты во всем пространстве (bulk), а y^m - координаты на поверхности. Тогда вектор нормали к данной поверхности будет определен следующим образом

$$n_\mu = \pm \frac{\partial_\mu \Phi}{|g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi|^{1/2}}, \quad (2.2)$$

Если же вектор нормали изотропен

$$n_\rho n^\rho = g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi = 0, \quad (2.3)$$

то вектор нормали определен следующим образом

$$n_\mu = \partial_\mu \Phi. \quad (2.4)$$

Зададим индуцированную метрику. Для этого определим набор касательных векторов

$$e_m^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m}, \quad (2.5)$$

Например, выберем y^1 , тогда

$$e_1^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^1} = \xi^\mu, \quad (2.6)$$

Ясно, что ξ^μ - касательный вектор (см рис.). Используя данные касательные вектора, ограничим метрику на поверхность

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^n} dy^m dy^n = h_{mn} dy^m dy^n, \quad (2.7)$$

где $h_{mn} = g_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu$ - индуцированная метрика. Обратная метрика $g^{\mu\nu}$ будет выражаться следующим образом

$$g^{\mu\nu} = \pm n^\mu n^\nu + h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu. \quad (2.8)$$

Данное выражение определяет проектор

$$\begin{aligned} P_{\pm}^{\mu\nu} &= h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu = g^{\mu\nu} \pm n^\mu n^\nu, \\ P_{\pm\nu}^\mu &= \delta_\nu^\mu \pm n^\mu n_\nu, \end{aligned} \quad (2.9)$$

который, действуя на векторы и тензоры, проецирует их на поверхность

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu A^\nu &= e_m^\mu A^m, \\ P_{\nu_1}^{\mu_1} \dots P_{\nu_p}^{\mu_p} T^{\nu_1 \dots \nu_p} &= e_{m_1}^{\mu_1} \dots e_{m_p}^{\mu_p} T^{m_1 \dots m_p}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее, определим внутреннюю ковариантную производную. Для этого выберем тангенциальное векторное поле ($A^\mu n_\mu = 0$, $A^\mu = A^m e_m^\mu$). Тогда внутренняя ковариантная производная будет определена следующим образом

$$\bar{\nabla}_m A_n = \nabla_\mu A_\nu e_m^\mu e_n^\nu. \quad (2.11)$$

Покажем, что так определенная внутренняя ковариантная производная согласована с метрикой

$$\bar{\nabla}_m h_{nk} = e_n^\rho e_n^\mu e_k^\nu \nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.12)$$

Теперь, определим нормальную компоненту $\nabla_\mu A_\nu$. Для этого разложим тензор $\nabla_\mu A^\nu e_m^\mu$ следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A^\nu e_m^\mu &= g_\rho^\nu \nabla_\mu A^\rho e_m^\mu = (n^\nu n_\rho + h^{kl} e_k^\nu e_l^\rho) \nabla_\mu A^\rho e_m^\mu = \\ &= (n_\rho \nabla_\mu A^\rho e_m^\mu) n^\nu + h^{kl} (\nabla_\mu A_\rho e_m^\mu e_l^\rho) e_k^\nu = \\ &= \nabla_\mu (n_\rho A^\rho) e_m^\mu n^\nu - (\nabla_\mu n_\rho) \cdot A^\rho e_m^\mu n^\nu + h^{kl} \bar{\nabla}_m A_l e_k^\nu = \\ &= [A^\mu n_\mu = 0] = -(\nabla_\mu n_\rho e_m^\mu e_n^\rho) A^n n^\nu + \bar{\nabla}_m A^k e_k^\nu = \\ &= -K_{mn} A^n n^\nu + \bar{\nabla}_m A^k e_k^\nu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

здесь $K_{mn} = \nabla_\mu n_\rho e_m^\mu e_n^\rho$ - внешняя кривизна поверхности (вторая фундаментальная форма). Итого имеем

$$\nabla_\mu A^\nu e_m^\mu = \bar{\nabla}_m A^n e_n^\nu - A^n (\pm) K_{mn} n^\nu, \quad (2.14)$$

Граничные члены в действии Эйнштейна-Гильберта

Теперь исследуем поверхностные слагаемые возникающие при вариации действия Эйнштейна-Гильберта

$$\begin{aligned}
 S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} R, \\
 \delta S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta(\sqrt{g} R) = \frac{1}{16\pi} \int d^4x (\delta(\sqrt{g}) R + \sqrt{g} \delta R) = \\
 &= [\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}] = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Покажем, что последнее слагаемое представляет собой интеграл от ковариантной производной некоторого вектора. Действительно, запишем вариацию тензора Ричи

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}, \\
 \delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} = \\
 &= (\partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}) - (\partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}) = \\
 &= (\partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) - \\
 &\quad - (\partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) = \\
 &= \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}, \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

где дополнительные слагаемые $\Gamma_{km}^p \delta \Gamma_{np}^k$, взаимно компенсирующие друг друга, были добавлены для получения полных ковариантных производных

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}, \\
 \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} &= \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

тогда

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = \nabla_{\alpha} \Delta v^{\alpha}, \quad (2.18)$$

где

$$\Delta v^{\alpha} = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\mu\beta}^{\beta}, \quad (2.19)$$

и последнее слагаемое в (2.2) можно, используя теорему Гаусса, переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{16\pi} \int_V d^4x \sqrt{g} \nabla_{\alpha} \Delta v^{\alpha} = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} d\Sigma_{\alpha} \Delta v^{\alpha} = \\
 &= \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} d^3y \sqrt{h} n_{\alpha} \Delta v^{\alpha} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

однако Δv^α не является полной вариацией, поэтому поверхностное слагаемое не получается исключить, накладывая граничные условия. Поэтому необходимо добавить некоторое дополнительное слагаемое к действию Эйнштейна-Гильберта (2.2), чтобы сократить данный нетривиальный поверхностный интеграл. Такая добавка называется членом Гиббонса-Хокинга. Для того, чтобы его записать, для начала пойдем чему равно произведение $n_\alpha \Delta v^\alpha$ в поверхностном интеграле, с учетом

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha|_{\partial V} &= \left[\delta g^{\alpha\beta}|_{\partial V} = 0 \right] = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu \delta g_{\nu\beta} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}), \\ \delta\Gamma_{\mu\beta}^\beta|_{\partial V} &= \left[\delta g^{\beta\tau}|_{\partial V} = 0 \right] = \frac{1}{2}g^{\beta\tau}(\partial_\mu \delta g_{\beta\tau} + \partial_\beta \delta g_{\mu\tau} - \partial_\tau \delta g_{\mu\beta}) = \frac{1}{2}g^{\beta\tau}\partial_\mu \delta g_{\beta\tau},\end{aligned}\quad (2.21)$$

получим

$$\begin{aligned}n_\alpha \Delta v^\alpha &= n_\alpha g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - n_\alpha g^{\alpha\mu} \delta\Gamma_{\mu\beta}^\beta = \\ &= \frac{1}{2}n^\beta g^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta g_{\nu\beta} + \partial_\nu \delta g_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}n^\mu g^{\beta\tau}\partial_\mu \delta g_{\beta\tau} = \\ &= \frac{1}{2}n^\beta g^{\mu\nu}(2\partial_\mu \delta g_{\nu\beta} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}n^\mu g^{\beta\tau}\partial_\mu \delta g_{\beta\tau} = \\ &= n^\alpha g^{\mu\nu}\partial_\mu \delta g_{\nu\alpha} - n^\alpha g^{\mu\nu}\partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} = n^\alpha g^{\mu\nu}(\partial_\mu \delta g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu})|_{\partial V} = \\ &= [g^{\mu\nu}|_{\partial V} = h^{\mu\nu} = h^{mn}e_m^\mu e_n^\nu, e_m^\mu \partial_\mu \delta g_{\nu\alpha} = 0] = \\ &= -n^\alpha \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} h^{\mu\nu}|_{\partial V},\end{aligned}\quad (2.22)$$

здесь было учтено, что $e_m^\mu \partial_\mu \delta g_{\nu\alpha} = \partial_m \delta g_{\nu\alpha} = 0$ - метрика не изменяется вдоль поверхности. В итоге получаем

$$\begin{aligned}n_\alpha \Delta v^\alpha &= -n^\alpha \partial_\alpha \delta g_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \\ \delta S_{EH} &= \frac{1}{16\pi} \int_V d^4x \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial V} d^3y \sqrt{h} n^\alpha (\partial_\alpha \delta g_{\mu\nu}) h^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Можно показать, что поверхностное слагаемое в последнем выражении можно скомпенсировать, добавив к действию Эйнштейна-Гильберта слагаемое Гиббонса-Хокинга

$$S_B = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} d^3y \sqrt{h} K, \quad (2.24)$$

где $K = h^{mn} K_{mn} = h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu \nabla_\mu n_\nu = \nabla_\mu n^\mu$ - внешняя кривизна.

Данное слагаемое имеет большое значение в квантовой теории поля. Так, к примеру, в случае черной дыры, только действие Гиббонса-Хокинга дает вклад в статсумму

$$Z = \int Dg e^{-S_{EH}[g] - S_B[h]}, \quad (2.25)$$

так как кривизна $R = 0$ для черной дыры. Слагаемое Гиббонса-Хокинга для заряженной черной дыры с зарядом Q и массой M оказывается равным

$$S_B|_{BH} = \kappa^{-1}(M - Q\Phi), \quad (2.26)$$

где $\kappa = \frac{1}{4M}$, Φ - термодинамический потенциал.

Тетрадная формулировка гравитации

Так как спиноры не образуют касательное пространство к криволинейному многообразию (спинорному представлению группы Лоренца $SO(1,3)$ не соответствует ни одно представление $GL(4, R)$), для них не получается определить ковариантную производную в терминах символов Кристоффеля. Поэтому для описания взаимодействия гравитации с фермионами нужно ввести локальную группу Лоренца $SO(1, d - 1)$. То есть определить набор касательных векторов e_μ^a , с помощью которых можно спроецироваться на линейное пространство спиноров, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad (2.27)$$

e_μ^a - $d \times d$ матрицы, которые называется локальным репером или veibain (в $d = 4$ - тетрада) и образуют базис в касательном пространстве в данной точке

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= e_a^\mu \gamma_a, \\ e_a^\mu e_\mu^a &= \delta_a^a, \\ e^a &= e_\mu^a dx^\mu, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где e^a называется 1-формой Муавра-Картана.

Геометрический смысл тетрады

Предположим, некоторый наблюдатель движется по кривой $x^\mu = x^\mu(\tau)$, со скоростью $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Определим $e_0^\mu = u^\mu(\tau)$, тогда ускорение наблюдателя

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{de_0^\mu}{d\tau} = u^\nu \nabla_\nu e_0^\mu, \quad (2.29)$$

где $\nabla_\nu e_0^\mu = \partial_\nu e_0^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_0^\rho$. Для остальных компонент можно определить, так называемый, тензор ускорения Φ_a^b , следующим образом

$$\frac{de_a^\mu}{d\tau} = \Phi_a^b e_b^\mu, \quad (2.30)$$

откуда следует его антисимметричность

$$\Phi_{ab} = e_{b\mu} \frac{de_a^\mu}{d\tau} = -\Phi_{ba}, \quad (2.31)$$

и, следовательно, представляется в виде матрицы

$$\Phi_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & a_a \\ -a_b & \Omega \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

где a_a - компонента линейного ускорения, Ω - угловое ускорение вращения локальной СО по отношению к нормальной СО Ферми, $\Phi_0^a = e_\mu^a \frac{de_0^\mu}{d\tau} = e_\mu^a a^\mu = a^a$ - проекция ускорения в СО, заданную репером.

Таким образом, можно определить локальный базис наблюдателя

1) заданием скорости $e_0^\mu = u^\mu$, а также фиксацией ориентации векторов e_i^μ из симметрий физической системы,

2) заданием тензора Φ_{ab} . То есть разрешив уравнения (2.30) можно определить вектора тетрады e_μ^a .

Примеры

1. Рассмотрим в качестве основного многообразия пространство Минковского, в котором тетрада $e_\mu^a = \delta_\mu^a$ задана для покоящегося наблюдателя. Для подвижного наблюдателя тетраду можно получить совершив преобразование Лоренца над тетрадой покоящегося наблюдателя

$$e_\mu^a = \Lambda_b^a \delta_\mu^b = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

тогда вектор скорости для подвижного наблюдателя будет иметь вид $u^\mu = e_0^\mu = (\gamma, \beta\gamma, 0, 0)$, а вектор линейного ускорения $\Phi_{01} = -\Phi_{10} = \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$, остальные компоненты Φ - нулевые.

2. Теперь, рассмотрим в пространстве Минковского покоящегося наблюдателя во вращающейся СО, тогда $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ и репер имеет вид

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega(t) & -\sin \omega(t) & 0 \\ 0 & \sin \omega(t) & \cos \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

В этом случае все $\Phi = 0$, кроме $\Phi_{12} = \frac{d\omega(t)}{dt}$ - скорость изменения частоты вращения СО.

Нормальными координатами Ферми-Уокера называются такие координаты, в которых $\Phi_{ij} = 0$, $i = 1, 2, 3$, то есть в таких координатах отсутствует вращение. К таким координатам можно перейти подобрав специальным образом Лоренцевы преобразования.

Связность, кручение и кривизна в терминах тетрад

Объекты

$$V^a = e^a_\mu V^\mu, \quad (2.35)$$

являются тензорами относительно локальных лоренцевых преобразований

$$V^a(x)' = \Lambda^a_b(x) V^b(x), \quad (2.36)$$

в то время как $\partial_\mu V^a$ - не являются тензорами. Поэтому необходимо определить ковариантную производную с помощью, так называемой, спиновой связности $\omega^a_{\mu b}$

$$D_\mu V^a(x) = \partial_\mu V^a(x) + \omega^a_{\mu b} V^b(x). \quad (2.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_\mu V^a(x)' &= D_\mu(\Lambda^a_b V^b(x)) = \partial_\mu(\Lambda^a_b) V^b(x) + \Lambda^a_b \partial_\mu V^b(x) + \omega^a_{\mu b}(\Lambda^b_c V^c(x)) = \\ &= \Lambda^a_b(\partial_\mu V^b(x) + \omega'^b_{\mu c} V^c(x)), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\omega'^b_{\mu c} = \Lambda^b_a \omega^a_{\mu d} \Lambda^d_c + \Lambda^b_a \partial_\mu \Lambda^a_c, \quad (2.39)$$

то есть $\omega^a_{\mu b}$ преобразуется как связность, поэтому и называется спиновой связностью.

Аффинная и спиновая связность согласованы с помощью условия ковариантного постоянства репера (veilbein postulate)

$$\nabla_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e^a_\alpha + \omega^a_{\mu b} e^b_\nu = 0, \quad (2.40)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^a_\nu &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e^a_\alpha - \omega^a_{\mu b} e^b_\nu, \\ \partial_\mu e^a_\nu &= -\Gamma^\nu_{\mu\alpha} e^a_\alpha + \omega^b_{\mu a} e^b_\nu, \\ \Gamma^\beta_{\mu\nu} &= e^b_\nu \omega^a_{\mu b} e^a_\beta + e^b_\alpha \partial_\mu e^a_\nu, \\ \omega^a_{\mu c} &= e^b_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e^a_\alpha - e^b_\nu \partial_\mu e^a_\nu, \\ \nabla_\mu g_{\nu\rho} &= 0, \end{aligned}$$

Также, антисимметризуя ковариантную производную терады и коомутатор ковариантных производных, получаем структурные уравнения Картана

$$\begin{aligned} de^a + \omega_b^a \wedge e^b &= T^a, \\ d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c &= R_b^a, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $T^a = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha^a dx^\mu \wedge dx^\nu$ - тензор кручения, $R_b^a = \frac{1}{2}R_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$ - тензор кривизны спиновой связности.

Разложим ковариантную производную (2.37) по генераторам

$$D_\mu V^a(x) = \partial_\mu V^a(x) + \frac{1}{2}\omega_\mu^{cd}(L_{cd})_b^a V^b(x), \quad (2.42)$$

где $(L_{cd})_b^a = 2\eta_{b[c}\delta_{d]}^a$ - генератор фундаментального представления $SO(1, d-1)$. Таким образом, в произвольном представлении $SO(1, d-1)$ имеем

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}L_{ab}, \\ [D_\mu, D_\nu] &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{ab}L_{ab} + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\omega_\nu^{cd}[L_{ab}, L_{cd}] = \\ &= [[L_{ab}, L_{cd}] = 4\eta_{[a[c}L_{b]d}] = \\ &= (2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{ab} + 2\omega_{[\mu}^{c[a}\omega_{\nu]}^{b]c})L_{ab} = R_{\mu\nu}^{ab}L_{ab}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

для спиноров, к примеру, $L_{ab} = \frac{1}{4}\gamma_a\gamma_b$.

Покажем, что тензор кривизны спиновой связности ввиду условия ковариантного постоянства репера совпадает с тензором кривизны аффинной связности

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^a &= [D_\mu, D_\nu]_b^a = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^a + 2\omega_{c[\mu}^a\omega_{\nu]}^c = \\ &= 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\beta}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a + 2\Gamma_{\beta[\nu}\alpha e_b^\beta e_\alpha^a + 2\Gamma_{\beta[\nu}^\alpha e_b^\beta \partial_{\mu]}e_\alpha^a - 2\partial_{[\mu}e_b^\alpha \partial_{\nu]}e_\alpha^a + 2\omega_{c[\mu}^a\omega_{\nu]}^c = \\ &= 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\beta}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a - 2\Gamma_{\beta[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda}^\alpha e_b^\lambda e_\alpha^a + 2\Gamma_{\beta[\nu}^\alpha \omega_{\mu]}^l e_b^\beta e_\alpha^l + \\ &+ 2\Gamma_{\beta[\nu}\Gamma_{\mu]\alpha}^\lambda e_b^\beta e_\alpha^a - 2\Gamma_{\beta[\nu}^\alpha \omega_{\mu]}^l e_\alpha^l e_b^\beta - \\ &- 2(-\Gamma_{\beta[\mu}^\alpha e_b^\beta + \omega_{b[\mu}^l e_\alpha^l)(\Gamma_{\nu]\alpha}^\lambda e_\lambda^a - \omega_{\nu]r}^a e_r^\alpha) + 2\omega_{c[\mu}^a\omega_{\nu]}^c = \\ &= 2\partial_{[\mu}\Gamma_{\nu]\beta}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a + 2\Gamma_{\beta[\mu}^\lambda \Gamma_{\nu]\lambda}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a = R_{\mu\nu\beta}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a, \end{aligned} \quad (2.44)$$

здесь были использованы соотношения (2.3.3). Таким образом, действительно, тензор кривизны спиновой связности совпадает с тензором кривизны аффинной связности

$$R_{\mu\nu}^a = R_{\mu\nu\beta}^\alpha e_b^\beta e_\alpha^a. \quad (2.45)$$

Лекция 3. ADM формализм. Тетрадный формализм

ADM формализм и гамильтонова формулировка гравитации

В прошлый раз было получено действие Эйнштейна-Гильберта с граничным слагаемым в форме действия Гиббонса-Хоккинга

$$S_{GR} = S_{EH} + S_{GH}, \quad (3.1)$$

где

$$S_{GH} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} K. \quad (3.2)$$

Данное слагаемое было введено, чтобы сократить нетривиальные поверхностные вклады, возникающие при вариации действия Эйнштейна-Гильберта. Подобные слагаемые возникают при рассмотрении гамильтонова формализма гравитации (ADM-формализм). В данном формализме задается расслоение пространства времени вдоль некоторого векторного поля

$$t^m = Nn^m + N^m. \quad (3.3)$$

В каждой фиксированной точке $t = const$ слой Σ_t определен уравнением

$$x^\mu = X^\mu(y, t). \quad (3.4)$$

При этом, зададим касательный вектор к X^μ , определяющий кривую между точками P и P' (кривая вдоль временной координаты)

$$t^\mu = \frac{dX^\mu}{dt} = -(t \cdot n)n^\mu + e_m^\mu(t \cdot e^m) = Nn^\mu + N^m e_m^\mu, \quad (3.5)$$

где N - функция хода (lapse function), N^m - функция сдвига (shift function).

Тогда, между точками P и P'

$$dX^\mu = e_m^\mu dy^m + t^\mu dt, \quad (3.6)$$

здесь первое слагаемое представляет собой сдвиг вдоль Σ_t с заданным t , а второе - сдвиг вдоль t . Тогда, интервал и метрика примет следующий вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = g_{\mu\nu} (e_n^\mu dy^n + t^\mu dt)(e_m^\nu dy^m + t^\nu dt) = \\ &= g_{\mu\nu} e_n^\mu e_m^\nu dy^n dy^m + 2g_{\mu\nu} e_n^\mu t^\nu dy^n dt + g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu dt^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

с учетом соотношений

$$\begin{aligned} h_{nm} &= g_{\mu\nu} e_n^\mu e_m^\nu, \\ g_{\mu\nu} e_n^\mu (N n^\nu + N^m e_m^\nu) &= h_{nm} N^m = N_n, \\ g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu &= g_{\mu\nu} (N n^\mu + N^m e_m^\mu) (N n^\nu + N^n e_n^\nu) = N^2 + N^m N^n h_{mn}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

получим интервал и метрику в следующем виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= N^2 dt^2 + h_{mn} (dy^m + N^m dt) (dy^n + N^n dt), \\ g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} N^2 - N^m N^n h_{mn} & N_m \\ N_n & h_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

здесь $h_{mn} = g_{mn} + n^\mu n^\nu$ - индуцированная метрика.

Данный формализм расслоенний используется не только в гамильтоновой формулировке гравитации, но также и для исследований галографических ренорм-групповых потоков в AdS/CFT.

Соотношение Гаусса-Кодацци

Теперь, получим важные для дальнейшего соотношение Гаусса-Кодацци. Для этого вспомним выражение для внутренней ковариантной производной

$$\bar{\nabla}_m A_n = e_m^\mu e_n^\nu \nabla_\mu A_\nu, \quad (3.10)$$

при этом индуцированная метрика $h_{nm} = e_n^\mu e_m^\nu g_{\mu\nu}$ является ковариантно постоянной

$$\bar{\nabla}_m h_{nk} = 0, \quad (3.11)$$

поэтому действие внутренней ковариантной производной можно записать в форме

$$\bar{\nabla}_m A_n = \partial_m A_n - \bar{\Gamma}_{mn}^k A_k, \quad (3.12)$$

с соответственно определенной внутренней кривизной

$$[\bar{\nabla}_m, \bar{\nabla}_n] A_k = \bar{R}_{mnk}^l A_l. \quad (3.13)$$

Следует отличать данную внутреннюю кривизну от внешней

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu, \quad (3.14)$$

Теперь, свяжем кривизну в объемлющем пространстве $R_{\mu\nu\sigma}^\rho$ с внутренней кривизной \bar{R}_{mnk}^l . Во 2 лекции было получено соотношение для проекции ковариантной производной на поверхность только по одному индексу (2.1)

$$\nabla_\mu A^\nu e_m^\mu = -K_{mn} A^n n^\nu + \bar{\nabla}_m A^k e_k^\nu, \quad (3.15)$$

где $K_{mn} = \nabla_\mu n_\nu e^\mu$. Учтем, что в данном соотношении мы рассматривали тангенциальное векторное поле $A^\nu = A^n e_n^\nu$ - параллельное рассматриваемой поверхности ($A^\nu n_\nu = 0$), поэтому его можно переписать в форме

$$e_m^\mu \nabla_\mu e_n^\nu = -K_{mk} \delta_n^k n^\nu + \partial_m (\delta_n^k) e_k^\nu + \bar{\Gamma}_{mn}^k \delta_n^l e_k^\nu = \bar{\Gamma}_{mn}^k e_k^\nu - K_{mn} n^\nu. \quad (3.16)$$

Используем данное соотношение, чтобы связать $R_{\mu\nu\sigma}^\rho$ с \bar{R}_{mnk}^l . Для этого подействуем производной $e_k^\rho \nabla_\rho$ на (3.16) и получим слева

$$\begin{aligned} e_k^\rho \nabla_\rho (e_m^\mu \nabla_\mu e_n^\nu) &= e_k^\rho e_m^\mu \nabla_\rho \nabla_\mu e_n^\nu + (e_k^\rho \nabla_\rho e_m^\mu) \nabla_\mu e_n^\nu = \\ &= e_k^\rho e_m^\mu \nabla_\rho \nabla_\mu e_n^\nu + (\bar{\Gamma}_{mk}^l e_l^\mu - K_{mk} n^\mu) \nabla_\mu e_n^\nu = \\ &= e_k^\rho e_m^\mu \nabla_\rho \nabla_\mu e_n^\nu + \bar{\Gamma}_{mk}^l (e_l^\mu \nabla_\mu e_n^\nu) - K_{mk} n^\mu \nabla_\mu e_n^\nu = \\ &= e_k^\rho e_m^\mu \nabla_\rho \nabla_\mu e_n^\nu + \bar{\Gamma}_{mk}^l (\bar{\Gamma}_{ln}^p e_p^\nu - K_{ln} n^\nu) - K_{mk} n^\mu \nabla_\mu e_n^\nu = \\ &= e_k^\rho e_m^\mu \nabla_\rho \nabla_\mu e_n^\nu + \bar{\Gamma}_{mk}^l \bar{\Gamma}_{ln}^p e_p^\nu - \bar{\Gamma}_{mk}^l K_{ln} n^\nu - K_{mk} n^\mu \nabla_\mu e_n^\nu, \end{aligned} \quad (3.17)$$

справа

$$\begin{aligned} e_k^\rho \nabla_\rho (\bar{\Gamma}_{mn}^l e_l^\nu - K_{mn} n^\nu) &= e_k^\rho \nabla_\rho (\bar{\Gamma}_{mn}^l e_l^\nu) - e_k^\rho \nabla_\rho (K_{mn} n^\nu) = \\ &= e_k^\rho \partial_\rho \bar{\Gamma}_{mn}^l e_l^\nu + \bar{\Gamma}_{mn}^l (e_k^\rho \nabla_\rho e_l^\nu) - e_k^\rho \partial_\rho K_{mn} n^\nu - K_{mn} e_k^\rho \nabla_\rho n^\nu = \\ &= e_k^\rho \partial_\rho \bar{\Gamma}_{mn}^l e_l^\nu + \bar{\Gamma}_{mn}^l (\bar{\Gamma}_{kl}^p e_p^\nu - K_{kl} n^\nu) - e_k^\rho \partial_\rho K_{mn} n^\nu - K_{mn} e_k^\rho \nabla_\rho n^\nu = \\ &= e_k^\rho \partial_\rho \bar{\Gamma}_{mn}^l e_l^\nu + \bar{\Gamma}_{mn}^l \bar{\Gamma}_{kl}^p e_p^\nu - \bar{\Gamma}_{mn}^l K_{kl} n^\nu - e_k^\rho \partial_\rho K_{mn} n^\nu - K_{mn} e_k^\rho \nabla_\rho n^\nu. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Далее, антисимметризуем (3.16) по m и k , получим

$$\begin{aligned} e_{[k}^\rho e_{m]}^\mu [\nabla_\rho \nabla_\mu] e_n^\nu &= (\partial_{[k} \bar{\Gamma}_{m]n}^l + \bar{\Gamma}_{n[m}^p \bar{\Gamma}_{k]p}^l) e_l^\nu - \\ &\quad - \bar{\Gamma}_{n[m}^l K_{k]l} n^\nu - \partial_{[k} K_{m]n} n^\nu - K_{n[m} e_{k]}^\rho \nabla_\rho n^\nu = \\ &= (\partial_{[k} \bar{\Gamma}_{m]n}^l + \bar{\Gamma}_{n[m}^p \bar{\Gamma}_{k]p}^l) e_l^\nu - \bar{\nabla}_{[k} K_{m]n} n^\nu - K_{n[m} e_{k]}^\rho \nabla_\rho n^\nu. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Откуда следует

$$e_k^\rho e_m^\mu R_{\rho\mu\sigma}^\nu e_n^\sigma = R_{kmn}^l e_l^\nu - 2\bar{\nabla}_{[k} K_{m]n} n^\nu - 2K_{n[m} e_{k]}^\rho \nabla_\rho n^\nu. \quad (3.20)$$

Далее, спроецируем данное соотношение на поверхность и на нормаль

$$\begin{aligned} e_l^\nu e_k^\rho e_m^\mu e_n^\sigma R_{\rho\mu\nu\sigma} &= \\ &= [e_l^\nu e_{\nu\rho} = \delta_{\rho l}, n_\nu e_l^\nu = 0, e_k^\rho e_l^\nu \nabla_\rho n_\nu = K_{kl}] = \\ &= R_{kmnl} - 2K_{n[m} K_{k]l}, \\ n^\nu e_k^\rho e_m^\mu e_n^\sigma R_{\rho\mu\nu\sigma} &= [n^\nu n_\nu = 1, n^\nu \nabla_\rho n_\nu = 0] = -2\bar{\nabla}_{[k} K_{m]n}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Полученные выражения получили название уравнений Гаусса-Кадацци. С их помощью можно переписать ОТО в терминах внешней кривизны и нормали

$$\begin{aligned} -2G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= \bar{R} + (K^{mn}K_{mn} - K^2), \\ G_{\mu\nu}n^\mu e_n^\nu &= \nabla_n K_m^n - \nabla_m K, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $K = K^{mn}h_{mn}$. Однако $G_{\mu\nu}e_m^\mu e_n^\nu$ так переписать нельзя. Для скаляра Ричи получим тогда

$$R = \bar{R} + (K^{mn}K_{mn} - K^2) + 2\nabla_\mu (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu). \quad (3.23)$$

Для действия Эйнштейна-Гильберта без граничных членов получим

$$S = \int d^4x \sqrt{g} R = \int d^4x N \sqrt{h} (\bar{R} + (K^{mn}K_{mn} - K^2)). \quad (3.24)$$

Канонический импульс для h_{mn} будет иметь вид

$$\pi^{mn} = \frac{\delta S}{\delta h_{mn}} = \sqrt{h} (K h^{mn} - K^{mn}), \quad (3.25)$$

канонический импульс для N и N^m отсутствует, то есть данные переменные не являются динамическими - они выступают в роли связей.

Тетрадный формализм

На прошлой лекции () был введен тетрадный формализм в гравитации для описания взаимодействия фермионов с гравитационным полем. Напомним основные результаты. Репер e_a^μ (тетрада в $D = 4$) определен следующим образом

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu &= \eta_{ab}, \\ e_a^\mu e_\nu^a &= \delta_\nu^\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тогда в произвольном представлении группы Лоренца $SO(1, D-1)$ некоторое поле V в искривленном пространстве будет преобразовываться по спинорному представлению группы Лоренца по латинским (лоренцевым) индексам, и по группе общекординатных преобразований по греческим индексам. Например для вектора V_μ^a

$$\begin{aligned} V_\mu^a(x) &= \Lambda_b^a(x) V_\mu^b(x), \\ V_\mu^a(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(x) V_\nu^a(x), \end{aligned} \quad (3.27)$$

при этом соответствующие связности оказались согласованы с помощью условия ковариантного постоянства репера (veilbein postulate)

$$\nabla_{\mu} e_{\nu}^a = \partial_{\mu} e_{\nu}^a - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} e_{\alpha}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b = 0. \quad (3.28)$$

Далее из данного условия были получены структурные уравнения Картана (4.3) для 1-форм $e^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}$ тетрады. А именно, антисимметризуя (2.40) в в координатах получим

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}^a + (\omega_{[\mu}^a)_{\nu]}^b = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha} e_{\alpha}^a = 2T_{\mu\nu}^a \quad (3.29)$$

тогда в терминах форм это соотношение примет вид первого структурного уравнения Картана для 1-формы ковариантной производной тетрады

$$De^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b = T^a. \quad (3.30)$$

Антисимметризация произведения ковариантных производных дает второе структурное уравнение Картана

$$\begin{aligned} D \wedge DV^a &= d(DV^a) + \omega_b^a \wedge DV^b = d(\omega_b^a V^b) + \omega_b^a \wedge dV^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b V^c = \\ &= d\omega_b^a V^b - \omega_b^a dV^b + \omega_b^a \wedge dV^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b V^c = d\omega_b^a V^b + \omega_b^a \wedge \omega_c^b V^c = \\ &= (d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c) V^b = (d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c) V^b = R_b^a V^b, \end{aligned} \quad (3.31)$$

таким образом, получаем второе структурное уравнение Картана для 2-формы кривизны

$$d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = R_b^a, \quad (3.32)$$

здесь $R_b^a = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ - 2-форма кривизны по пространственным индексам, по лоренцевым индексам $R_b^a T_a^b \in SO(1,3)$ - это элемент алгебры Лоренца.

Ковариантная производная в произвольном представлении принимает вид

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + (\omega_{\mu})_b^a T_a^b, \quad (3.33)$$

где T_a^b - генераторы группы Лоренца, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям

$$[T_{ab}, T_{cd}] = 4\eta_{[a[c} T_{b]d}], \quad (3.34)$$

в векторном представлении эти генераторы будут иметь вид

$$(T_c^d)_b^a = \delta_d^a \delta_b^c - \eta_{bd} \eta^{ac}, \quad (3.35)$$

в любом другом представлении для поля Φ^I действие ковариантной производной будет иметь вид

$$D_\mu \Phi^I = \partial_\mu \Phi^I + (\omega_\mu)^a_b (T_a^b)^I_J \Phi^J. \quad (3.36)$$

Для спинорного представления генераторы имеют вид

$$T_b^a = \frac{1}{2}(\gamma^a \gamma_b - \gamma_b \gamma^a), \quad (3.37)$$

где гамма-матрицы удовлетворяют следующим соотношениям $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$.

Также в прошлый раз было показано, что кривизна спин-связности и кривизна аффинной связности в силу ковариантного постоянства тетрады связаны следующим образом

$$R^a_{\mu\nu b} = R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} e_b^\beta e_\alpha^a. \quad (3.38)$$

Далее, покажем, что действие Эйнштейна-Гильберта в терминах спин-связности можно переписать в виде

$$S_{EH} = \frac{1}{4} \int R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}. \quad (3.39)$$

Для этого воспользуемся (3.38) и запишем действие в форме

$$S_{EH} = \frac{1}{4} \int R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e_\alpha^a e_\beta^b e_\rho^c e_\sigma^d \epsilon_{abcd} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (3.40)$$

здесь $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x$ - форма объема. Далее

$$S_{EH} = \frac{1}{4} \int R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e_\alpha^a e_\beta^b e_\rho^c e_\sigma^d \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x, \quad (3.41)$$

так как $e_\alpha^a e_\beta^b e_\rho^c e_\sigma^d \epsilon_{abcd} = e \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = \sqrt{g} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$, $\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4\delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$, то

$$S_{EH} = \frac{1}{4} \int \sqrt{g} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x = \int \sqrt{g} R d^4x. \quad (3.42)$$

Таким образом, показано, что действие Эйнштейна Гильберта можно переписать как функционал от e_μ^a, ω_μ^{ab}

$$S_{EH} = S_{EH}(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}). \quad (3.43)$$

Тогда его вариация по e_μ^a, ω_μ^{ab} будет давать уравнения движения

$$\frac{\delta S}{\delta e_\mu^a} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \omega_\mu^{ab}} = 0, \quad (3.44)$$

первое из которых дает уравнение Эйнштейна

$$0 = \frac{\delta S}{\delta e_\mu^a} = R_{[\mu\nu}^{ab} e_\rho^c] \varepsilon_{abcd} = R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_\alpha^a e_\beta^b e_\rho^c \varepsilon_{abcd} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = [e_\alpha^a e_\beta^b e_\rho^c \varepsilon_{abcd} = e \varepsilon_{\alpha\beta\rho\tau} e_d^\tau] =$$

$$-e R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_d^\tau \varepsilon_{\alpha\beta\rho\tau} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -e R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta\tau}^{\mu\nu\sigma} e_d^\tau = -e R_{[\mu\nu}^{\sigma\tau]} e_d^\tau = -\frac{1}{3} e R_{\mu\nu}^{\mu\nu} e_d^\tau - \frac{2}{3} e R_{\sigma\mu}^{\mu\tau} e_d^\sigma, \quad (3.45)$$

после умножения данного уравнения на e_γ^d получим уравнение Эйнштейна

$$\left(-\frac{1}{3} e R_{\mu\nu}^{\mu\nu} e_d^\tau - \frac{2}{3} e R_{\sigma\mu}^{\mu\tau} e_d^\sigma\right) \cdot e_\gamma^d = R_\gamma^\tau - \frac{1}{2} R \delta_\gamma^\tau = 0. \quad (3.46)$$

Однако надо заметить, что при выводе было использовано соотношение (3.38), связывающее аффинную кривизну со спиновой. В общем случае R^Γ не обязательно связана с R^ω . Поэтому необходимо расписать второе уравнение движения, связывающее e_μ^a и ω_μ^{ab} .

Лекция 4. Нелинейная реализация симметрии

Формализм 1-го порядка

На прошлой лекции () было получено действие Эйнштейна-Гильберта в терминах спин-связности и тетрады

$$S_{EH}[e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}] = \frac{1}{4} \int R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}, \quad (4.1)$$

из которого было получено уравнение движения

$$\frac{\delta S}{\delta e_\mu^a} = 0, \quad (4.2)$$

которое в случае согласованности спиновой и аффинной связности ($\omega^{ab} = \omega^{ab}(e, \Gamma)$), следующее из ковариантного постоянства тетрады, дало уравнение Эйнштейна. Однако, данная согласованность не всегда имеет место, так как в общем случае тетрада и аффинная связность независимые переменные. Покажем, что на уравнениях движения для спиновой связности это предположение оказывается верным

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4} \int \delta R^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd} = \\ &= \frac{1}{4} \int (d\delta\omega^{ab} - \delta\omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_c^a \wedge \delta\omega_b^c) \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

преобразуем первое слагаемое

$$\int d\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd} = \int d(\delta\omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}) + 2 \int \delta\omega^{ab} \wedge de^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}, \quad (4.4)$$

тогда вариацию действия перепишем в виде

$$\delta S = \frac{1}{4} \int \delta\omega^{ab} \wedge De^c \wedge e^d \epsilon_{abcd}, \quad (4.5)$$

где

$$De^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b, \quad (4.6)$$

и очевидно тогда, что уравнение движения дает условие ковариантного постоянства метрики или условие нулевого кручения

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \omega_\mu^{ab}} = De^a = T^a. \quad (4.7)$$

Таким образом, показано, что в данном формализме уравнения движения дают те же результаты, что и в случае только одной динамической переменной - метрики.

Вообще говоря существуют три эквивалентных формализма:

1) Формализм Картана или формализм первого порядка (действие содержит производные только первого порядка от динамических переменных). В данном формализме динамическими переменными являются тетрада e_μ^a и спиновая связность ω_μ^{ab} , $S = S(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab})$. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta e_\mu^a} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \omega_\mu^{ab}} = 0. \quad (4.8)$$

2) Формализм ОТО или формализм второго порядка (присутствуют вторые производные в действии). В данном формализме динамической переменной является только метрический тензор $S = S(g^{\mu\nu})$. Тогда вариация будет иметь вид

$$\delta S = \left(\frac{\delta S}{\delta e_\mu^a} + \frac{\delta S}{\delta \omega_\nu^{cd}} \frac{\delta \omega_\nu^{cd}}{\delta e_\mu^a} \right) \delta e_\mu^a. \quad (4.9)$$

1.5) Формализм 1.5 порядка. В данном формализме динамической переменной являются тетрада e_μ^a , а на спиновую связность ω_μ^{ab} накладывается условие нулевого кручения, $S = S(e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}(e))$.

В ОТО данные формализмы одинаковы по сложности вычислений, однако в супергравитационных теориях формализм 1.5-го порядка оказывается более удобным.

Теперь, убедимся, что гравитация не является калибровочной теорией.

Калибровочная теория группы Пуанкаре

В калибровочных теориях калибровочным полем является поле связности локализованной калибровочной группы. Можно предположить, что в гравитации таким полем является поле спин связности, ассоциированное с локальной группой Лоренца. Оказывается это не так, и для того чтобы это показать, рассмотрим для начала произвольную калибровочную группу Ли с набором генераторов T_A ее алгебры, удовлетворяющим коммутационным соотношениям

$$[T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C, \quad (4.10)$$

калибровочное преобразование будет иметь вид

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^A T_A, \quad (4.11)$$

тогда, если локализовать параметр преобразования $\varepsilon^A = \varepsilon^A(x)$, то можно реализовать данную алгебру на полях A_μ

$$\begin{aligned} [\delta_{\varepsilon_1}^A, \delta_{\varepsilon_2}^B] &= \delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}^{AB} f_{AB}^C, \\ \delta_\varepsilon A_\mu^A &= \partial_\mu \varepsilon^A + \varepsilon^C A_\mu^B f_{BC}^A, \end{aligned} \quad (4.12)$$

с соответствующей ковариантной производной и тензором связности

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + A_\mu^A T_A, \\ [D_\mu, D_\nu] &= -F_{\mu\nu}^A T_A, \\ F_{\mu\nu}^A &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^A + A_{\mu\nu}^B A_{BC}^A, \end{aligned} \quad (4.13)$$

при этом тензор $F_{\mu\nu}^A$ преобразуется ковариантно

$$\delta_\varepsilon F_{\mu\nu}^A = \varepsilon^C F_{\mu\nu}^B f_{BC}^A. \quad (4.14)$$

Теперь, рассмотрим алгебру Пуанкаре $ISO(1,3)$:

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0, \\ [P_a, M_{bc}] &= 2\eta_{a[b} P_{c]}, \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= -2\eta_{c[a} M_{b]d} + 2\eta_{d[a} M_{b]c}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

тогда их реализация на калибровочных полях представляется в следующем виде

$$A_\mu^A T_A = A_\mu^a P_a + \frac{1}{2} A_\mu^{ab} M_{ab}, \quad (4.16)$$

где компоненты связности $A_\mu^a = e_\mu^a$ - тетрада, $A_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}$ - спин-связность. Для тензора связности получим

$$F_{\mu\nu}^A = F_{\mu\nu}^a P_a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{ab} M_{ab}, \quad (4.17)$$

где $F_{\mu\nu}^a = T_{\mu\nu}^a$ - тензор кручения, $F_{\mu\nu}^{ab} = R_{\mu\nu}^{ab}$ - тензор кривизны спиновой связности. Теперь напишем как преобразуются записанные связности

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon A_\mu^A &= \partial_\mu \varepsilon^A + \varepsilon^C A_\mu^B f_{BC}^A, \\ \delta_P \omega^{ab} &= 0, \quad \delta_M \omega^{ab} = d\Lambda^{ab} - 2\omega_c^{[a} \Lambda^{cb]}, \\ \delta_P e^a &= D\varepsilon^a, \quad \delta_M e^a = \Lambda_b^a e^b, \end{aligned} \quad (4.18)$$

здесь $\delta_P = \varepsilon^a P_a$, $\delta_M = \Lambda^{ab} M_{ab}$.

Казалось бы, построенная калибровочная теория является теорией гравитации, однако в ОТО налагается дополнительное условие отсутствия кручения $T^a = 0$, которое приводит к следующим проблемам:

1) условие $T^a = 0$ не инвариантно относительно калибровочных преобразований $ISO(1,3)$

$$\delta_P T^a = \delta_P D\varepsilon^a = [\delta_P \omega^{ab} = 0] = D\delta_P \varepsilon^a = DD\varepsilon^a = -\frac{1}{2} R_b^a \varepsilon^b \neq 0, \quad (4.19)$$

2) условие $T^a = 0$ накладывает условие на зависимость спин-связности от тетрады $\omega^{ab}(e^a)$, что влечет нарушение калибровочного преобразования

$$\delta_P \omega^{ab} = \frac{\delta \omega^{ab}}{\delta e^c} \delta_P e^c \neq 0. \quad (4.20)$$

На алгебраическом языке, невозможность построения согласованной теории гравитации как калибровочного поля означает, что коммутационные соотношения для генераторов трансляций нарушаются

$$[\delta_{P_2}, \delta_{P_1}] e^a = -2\delta_{P_2} D \varepsilon_1^a = -2\delta_{P_2} \omega_c^a \varepsilon_1^c \neq 0, \quad (4.21)$$

такие преобразования реализуют алгебру, где $[P_1, P_2] \neq 0$, то есть алгебра $ISO(1,3)$ расширяется до алгебры диффеоморфизмов $Diff(1,3)$.

Нелинейная реализация симметрии

До сих пор были рассмотрены линейные реализации групп симметрий. Теперь рассмотрим нелинейные реализации групп симметрий. Для примера рассмотрим нелинейную связь между метрикой и тетрадой.

Пусть $e_\mu^a \in GL(d)$ - произвольная $d \times d$ матрица. При этом метрика определена по данной матрице следующим соотношением

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \in GL(d)/SO(1, d-1), \quad (4.22)$$

то есть является элементом фактор-группы. Данное вложение можно объяснить исключением из всех возможных матриц, принадлежащих $GL(d)$ антисимметричных матриц, принадлежащих $SO(1, d-1)$, преобразования из которой $e_\mu^a = \Lambda_b^a e_\mu^b$ не изменяют метрического тензора $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

Именно, из-за того, что метрика принадлежит фактор-пространству, группа симметрий на ней реализуется нелинейно. Подобные нелинейные реализации групп симметрий возникают, например, в нелинейных сигма-моделях, или в теориях с голдстоуновскими бозонами.

Общая конструкция для построения таких теорий следующая.

Пусть происходит нарушение симметрии группы $G \rightarrow H$ ($H \subset G$). Тогда генераторы подгруппы H реализуются линейно (например, группа Лоренца), элементы же из фактор-группы G/H реализуются нелинейно.

Рассмотрим пример из теории скалярного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2, \quad (4.23)$$

где ϕ^a $a = 1, 2, 3$ - симметрично относительно группы $SO(3)$.

В нестабильном вакуумном состоянии $\phi_{vac}^a = 0$ симметрия $SO(3)$ реализована линейно на состояниях $\phi^a = \phi_{vac}^a + \varphi^a$.

В стабильном вакуумном состоянии $\phi_{vac}^a \phi_{vac}^a = v^2$ симметрия оказывается нарушенной $SO(3) \rightarrow SO(2)$. При этом $SO(2)$ реализуется линейно, а оставшаяся симметрия $SO(3)/SO(2)$ реализуется нелинейно.

Чтобы это показать выберем удобную параметризацию поля следующим образом

$$\begin{aligned}\phi^1 &= (v + \chi) \cos \theta^1 \cos \theta^2, \\ \phi^2 &= (v + \chi) \cos \theta^1 \sin \theta^2, \\ \phi^3 &= (v + \chi) \sin \theta^1,\end{aligned}\tag{4.24}$$

где θ_1, θ_2 - голдстоуновские бозоны, которые параметризуют выбор вакуума (два угла на рис. , под которым расположен вектор \vec{v}), χ - поле Хиггса. Потенциал в данных обозначениях примет вид

$$\frac{\lambda}{4}(\phi^a \phi^a - v^2)^2 = \frac{\lambda}{4}(2v\chi + \chi^2)^2 = V(\chi),\tag{4.25}$$

надо заметить, что оно не зависит от голдстоуновских бозонов θ_1, θ_2 . Голдстоуновские бозоны присутствуют в кинематическом потенциале

$$\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a = g_{\alpha\beta}(\theta, \chi) \partial_\mu \theta^\alpha \partial^\mu \theta^\beta,\tag{4.26}$$

где $g_{\alpha\beta}$ - метрика на сфере $S^2 = SO(3)/SO(2)$ - пространстве вакуумов (см. рис.). Соответствующая энергия будет иметь вид

$$E = \int d^3x \sum_a (\partial \theta^a)^2,\tag{4.27}$$

смысл данной энергии следующий. Если попытаться изменить вакуумное состояние глобально во всем пространстве, то в этом случае $\theta^a = \theta^a(x)$, то есть для изменения вакуумного состояния глобально требуется, вообще говоря, бесконечная энергия, равная данному интегралу.

Итак, $SO(3)$ - полная группа симметрий, $SO(2)$ - симметрия выбранного вакуумного состояния, реализованная линейно, $SO(3)/SO(2)$ - симметрия оставшихся вакуумных состояний, реализованная нелинейно.

В более общем случае, когда скалярное поле симметрично относительно произвольной группы симметрий G выберем параметризацию в виде

$$\phi^a(x) = (U_\pi)_b^a (\phi_0^b + \chi^b),\tag{4.28}$$

где ϕ_0^b - вакуумное состояние ($\phi_0^2 = v^2$), χ^b - массивное возбуждение над вакуумным состоянием, $(U_\pi)_b^a$ - элемент группы G - группы инвариантности вакуумного состояния.

Теперь, подставим данное разложение в лагранжиан (4.23) и получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\phi_0 + \chi)^b \partial_\mu U_b^a \partial_\mu U_c^a (\phi_0 + \chi)^c + \\ & + \partial_\mu \chi^a \partial_\mu U_b^a (\phi_0 + \chi)^b + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi^a \partial_\mu \chi^a - \frac{\lambda}{4} (2v\chi + \chi^2)^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Если $U \in SO(3)$, $SO(2)$ - симметрия вакуумного состояния ϕ_0 . Это значит, что можно выбрать $e^{i\theta T_3} \in SO(2)$, оставляющее вакуум инвариантным $(e^{i\theta T_3})_b^a \phi_0^b = \phi_0^a$, остальные преобразования изменяют вакуумное состояние $U = e^{i(\pi^1 T_1 + \pi^2 T_2)} \in SO(3)/SO(2)$. Тогда $\partial_\mu U = \frac{\partial U}{\partial \pi^\alpha} \partial_\mu \pi^\alpha$, $\alpha = 1, 2$ и кинетическое слагаемое без учета χ тогда примет вид

$$\mathcal{L}_\setminus = \frac{1}{2} \partial_\mu (U \phi_0)^T \partial_\mu (U \phi_0) = \frac{1}{2} (\phi_0^T \frac{\partial U^T}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial U}{\partial \pi^\beta} \phi_0) \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\mu \pi^\beta, \quad (4.30)$$

где $g_{\alpha\beta} = \phi_0^T \frac{\partial U^T}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial U}{\partial \pi^\beta} \phi_0$ - индуцированная метрика на сфере S^2 (метрика на пространстве модулей теории). В данной параметризации π^α - голдстоуновские бозоны, которые нелинейно реализуют группу симметрий фактор-группы $SO(3)/SO(2)$.

Теперь, вернемся к теории гравитации. Пусть группа симметрий теории G с подгруппой H . Разделим генераторы данной группы следующим образом $T^A = \{T^a, T^\alpha\}$, $T^a \in G/H$, $T^\alpha \in H$. При этом генераторы T^α удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [T_\alpha, T_\beta] &= f_{\alpha\beta}^\lambda T_\lambda, \\ [T_a, T_\beta] &= f_{a\beta}^c T_c + f_{a\beta}^\lambda T_\lambda, \\ [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c + f_{ab}^\lambda T_\lambda, \end{aligned} \quad (4.31)$$

рассмотрим следующий элемент алгебры

$$g^{-1} dg = (e_m^a T_a + \sigma_m^\alpha T_\alpha) dx^m, \quad (4.32)$$

где $g \in G$ - элемент группы, e_m^a - репер, σ_m^α - локальная компазитная связность на

фактор пространстве G/H . Далее возьмем от него производную

$$\begin{aligned}
 d(g^{-1}dg) &= [dg^{-1} = dg^{-1}gg^{-1} = -g^{-1}dgg^{-1}] = -g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg = \\
 &= -(e^a T_a + \sigma^\alpha T_\alpha) \wedge (e^b T_b + \sigma^\beta T_\beta) = \\
 &= -e^a \wedge e^b T_a T_b - e^a \wedge \sigma^\beta T_a T_\beta - \sigma^\alpha \wedge e^b T_\alpha T_b - \sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta T_\alpha T_\beta = \\
 &= -\frac{1}{2}e^a \wedge e^b f_{ab}^c T_c - \frac{1}{2}e^a \wedge e^b f_{ab}^\gamma T_\gamma - \frac{1}{2}\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma - \\
 &\quad -e^a \wedge \sigma^\beta f_{a\beta}^\gamma T_\gamma - e^a \wedge \sigma^\beta f_{a\beta}^c T_c,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

далее, спроецируем данные соотношения на подпространства H (коэффициенты при T_c) и G/H (коэффициенты при T_γ)

$$\begin{aligned}
 d\sigma^\gamma &= -\frac{1}{2}\sigma^\alpha \wedge \sigma^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma - \frac{1}{2}e^a \wedge e^b f_{ab}^\gamma T_\gamma - e^a \wedge \sigma^\beta f_{a\beta}^\gamma T_\gamma, \\
 de^c &= -\frac{1}{2}e^a \wedge e^b f_{ab}^c - e^a \wedge \sigma^\beta f_{a\beta}^c,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

данные уравнения называются структурными уравнениями Картана. Если ввести спин-связность

$$\omega_a^c = \sigma^\beta f_{a\beta}^c + \frac{1}{2}e^b f_{ab}^c, \tag{4.35}$$

то второе уравнение из (4.3) даст условие равенства нулю кручения

$$de^c + \omega_b^c \wedge e^b = 0, \tag{4.36}$$

при этом, первое уравнение не удастся переписать в терминах тензора кривизны. Однако, если рассматривать подкласс преобразований, при которых $f_{a\beta}^\alpha = 0$ (алгебра H действует на G/H как на своем представлении, что соответствует многим физическим теориям), то можно получить выражение для тензора кривизны

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = e^d \wedge e^e \left(\frac{1}{4}f_{dc}^a f_{eb}^c - \frac{1}{2}f_{de}^\alpha f_{\alpha b}^a - \frac{1}{4}f_{de}^c f_{cb}^a \right). \tag{4.37}$$

При этом метрика будет задаваться следующим соотношением

$$g_{mn} = e_m^a e_n^b \kappa_{ab}, \tag{4.38}$$

где $\kappa_{ab} = tr(T_a T_b)$ - метрика Киллинга.

Лекция 5. Гладкие многообразия

До сих пор были рассмотрены различные геометрические понятия на примерах из теории поля на некотором интуитивном уровне. Начиная с данной лекции рассмотренные геометрические объекты будут введены строго. Начнем с понятий гладкого многообразия, карты, атласа.

Карты и атлас

Пусть M - произвольное множество. На данном множестве можно ввести понятие карты $\tau = (W, \varphi, U)$, где $W \subset M$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: W \rightarrow U$ - биекция (картирующее отображение), φ^{-1} - параметризация карты (см. рис. ??). При этом отображение точки p будет выглядеть следующим образом $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$, $\forall p \in M$, x^i - координаты точки p в карте τ , $\varphi^i(p) = x^i$ - система отображений в $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Вообще говоря, в общем случае, нельзя покрыть многообразие только одной картой. Для этого требуется, чтобы $\varphi^i(p)$ были определенного класса гладкости C^r (дифференцируемость функций $\varphi^i(p)$ r раз). Поэтому, в общем случае, требуется несколько карт для покрытия M и соответствующей согласованности между картами.

Согласованность карт

Пусть, имеются две карты $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ и $\tau_\beta = (W_\beta, \varphi_\beta, U_\beta)$, при этом $W_\alpha \cap W_\beta = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Пусть, также $U_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(W_{\alpha\beta})$, $U_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(W_{\beta\alpha})$ (см. рис. ??). При этом, можно определить функцию $f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: U_{\alpha\beta} \rightarrow U_{\beta\alpha}$ - биекция (переопределяет координаты в пересечении). Также существует обратное отображение $f^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: U_{\beta\alpha} \rightarrow U_{\alpha\beta}$. Обозначим координаты в карте τ_α как $\varphi_\alpha^i(p) = x^i$, а в карте τ_β как $\varphi_\beta^i(p) = y^i$, тогда отображение перехода с карты τ_α на карту τ_β : $f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ в координатах запишется в виде $y^i = f^i(x^j)$, $i, j = \overline{1, n}$, что является ничем иным, как преобразованием координат.

Итак, карты τ_α и τ_β называются согласованными, если они удовлетворяют трем свойствам

1. $U_{\alpha\beta} \& U_{\beta\alpha}$ - открытые окрестности в \mathbb{R}^n .
2. f - диффеоморфизм класса C^r ($0 \leq r \leq \infty$). Для $r = 0$ f - гомеоморфизм, а карта τ называется топологическим покрытием, M - топологическое пространство. Для $r > 0$ якобиан преобразования должен быть отличным от нуля $J = \det\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right] \neq 0$, $\forall x \in U_{\alpha\beta}$.
3. Если $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ - карты согласованы в любом атласе.

Атлас: $A = (\tau_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ - объединение карт τ_α , если

1. \forall 2 карты согласованы.
2. A покрывает все M , $M = \bigcup_{\alpha} W_\alpha$.

Примеры

1. Пусть имеется одномерная сфера $M = S^1$, зададим для нее атлас $A = \tau_1, \tau_2$ из двух карт $\tau_1 = (0, 2\pi)$, $\tau_2 = (-\pi, \pi)$. Первая карта задается множеством W_1 , отрезком $U_1 = (0, 2\pi)$, отображением $\varphi_1 : W_1 \rightarrow U_1$ (см. рис. ??). Вторая карта задается множеством W_2 , отрезком $U_2 = (-\pi, \pi)$, отображением $\varphi_2 : W_2 \rightarrow U_2$ (см. рис. ??). Два данных отрезка, очевидно, пересекаются в следующих областях

$$\begin{aligned} U_{12} &= (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi), \\ U_{21} &= (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \end{aligned} \quad (5.1)$$

тогда функция перехода f запишется в следующей форме

$$f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \begin{cases} f(x) = x, & x \in (0, \pi), \\ f(x) = x - 2\pi, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

2. Пусть $M = \mathbb{R}^1$, с двумя картами

$$\begin{aligned} \tau_1 : W_1 = \mathbb{R}^1 &\xrightarrow{\varphi_1} U_1 = \mathbb{R}^1, \quad x = \varphi_1(p) = p, \quad \forall p \in W_1, \\ \tau_2 : W_2 = \mathbb{R}^1 &\xrightarrow{\varphi_2} U_2 = \mathbb{R}^1, \quad y = \varphi_2(p) = p^3, \quad \forall p \in W_2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

(рис.)

Данные карты пересекаются $W_1 \cap W_2 = \mathbb{R}$, $U_{12} = U_{21} = \mathbb{R}^1$. Тогда отображение $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_{12} \rightarrow U_{21}$

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^3, \\ x &= f^{-1}(y) = y^{1/3}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

f, f^{-1} - непрерывны, следовательно карты C^0 согласованы (τ_1, τ_2 - топологические покрытия). f^{-1} - не дифференцируема в точке $y = 0$, карты согласовать гладко невозможно.

Рассмотрение подобных отображений полезно для изучения топологически нетривиальных конфигураций в теории поля, типа монополей.

Пусть, имеются два атласа A_1 и A_2 . Атласы A_1 и A_2 эквивалентны если их карты согласованы между собой. $UA_i = \mathcal{A}$ - объединения согласованных атласов на данном множестве называется максимальным атласом.

(M, \mathcal{A}) - гладкое многообразие класса C^r .

Сформулируем следующую теорему

Теорема: Пусть, на гладком многообразии $M \exists$ атлас карт такой, что каждая карта диффеоморфна \mathbb{R}^n . Тогда $n = \dim M$.

Доказательство: Рассмотрим некоторый атлас A^r на M . Построим атлас, где карты диффеоморфны открытому шару \mathbb{B}_ε^n в \mathbb{R}^n радиуса ε , с центром в $p_0 \in M$, $p_0 \in \tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$, то есть $p_0 \in W_\alpha$, $\varphi_\alpha : W_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha(p_0) = x_0 \in U_\alpha$. Для \mathbb{R}^n верно, что \exists шар $\mathbb{B}_{r_0}^n \subset U_\alpha$ радиуса r_0 с центром в x_0 . Обозначим $\mathbb{B}_{r_0}^n = U(x_0, r_0)$, возьмем прообраз данного шара $\varphi_\alpha^{-1}[U(x_0, r_0)] = W_{p_0} = W_\alpha(x_0) \subset W_\alpha$. Таким образом, показано, что заданный новый атлас $\{W_p\}_{p \in M}$ диффеоморфен шарам \mathbb{B}^n .

Остается доказать, что каждый шар \mathbb{B}^n диффеоморфен \mathbb{R}^n . Пусть, $r_0 = 1$, тогда для каждой точки шара $\{x^\mu\} \in U(x_0, 1)$ можно сопоставить точку $y^\mu = \frac{x^\mu}{1-x^2}$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Связность и размерность многообразия

M - связное многообразие, если $\forall P, Q \in M \exists \{\tau_i\}_{i \in \overline{1, n}} \in A^r$, такие что $P \in W_1$, $Q \in W_n$, $W_k \cap W_{k+1} \neq \emptyset$ (см. рис.).

Теорема: Если M - связное многообразие с атласом $A = \{\tau = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)\} \implies \dim U_\alpha = n$ - одинаковы.

Доказательство: точки можно соединить цепочками пересекающихся карт. Так как многообразие связное, то в каждом пересечении отображение биективно, следовательно $\dim M = n$ - размерность многообразия.

Примеры гладких многообразий

Гладкое аффинное пространство (есть векторы и точки) A ассоциированное с векторным пространством V над полем \mathbb{F} - множество A со свободным транзитивным действием V , то есть с определенной операцией сложения точек A с векторами V :

$$\begin{aligned} 1) (p+v) + w &= p + (v+w), \quad \forall p \in A, v, w \in V, \\ 2) p + 0 &= p, \quad \forall p \in A, \\ 3) \forall p, q \in A \exists! v \in V : p &= q + v, \quad v = \vec{p}q. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Пусть, A_n - n -мерное аффинное пространство над \mathbb{R} . Рассмотрим $p \in A_n$, $p = O + v$, O - точка в A_n (точка 0), $v \in V$ - имеет компоненты $v = \{x^i\}$. Тогда построим отображение $\varphi : A_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, как действие $\varphi : p \rightarrow \{x^i\}$. Отображение φ задает карту $\tau = (W, \varphi, U)$, $W = A_n$, $U \in \mathbb{R}^n$ на всем A_n . Такое отображение задает гладкую структуру на аффинном пространстве A_n .

Теперь, рассмотрим многообразие матриц $Mat_{m,n}\mathbb{R}$ размера $m \times n$ над \mathbb{R} . Отображение данных матриц в \mathbb{R}^{nm} осуществляется с помощью развертки: $M \in Mat_{m,n}\mathbb{R} \rightarrow (M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1m}, \dots, M_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}$. Можно выбрать матрицы $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{nm}, \det M \neq 0\}$ - подмногообразие. Введем гладкую структуру на данном многообразии.

Пример 1. Многообразие матриц

Рассмотрим матрицы $Mat_{m,n}^k\mathbb{R}$ ранга k ($0 \leq k \leq \min(m, n)$). Пусть $M \in Mat_{m,n}^k\mathbb{R}$ и $\exists P \in Mat_m\mathbb{R}, Q \in Mat_n\mathbb{R}$, такие что

$$\tilde{M} = PMQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где $\det\{A\} \neq 0$, $A \in Mat_k\mathbb{R}$ - невырожденная матрица. Если вычислить развертку $\varphi : W \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^N$, с $N = k^2 + (m - k)k + k(n - k) = k(m + n - k)$. Таким образом, задается карта $\tau_0(W, \varphi, U_0)$ на $Mat_{m,n}^k\mathbb{R}$.

Пусть отображение $\alpha : Mat_{m,n}^k\mathbb{R} \rightarrow Mat_{m,n}^k\mathbb{R}$ переставляет строки и столбцы. Множество получившихся матриц обозначим $W_\alpha = \alpha(W)$, а соответствующее отображение развертки $\varphi_\alpha = \varphi \circ \alpha^{-1}$, то есть определена карта $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_0)$.

Утверждение: $\cup_\alpha W_\alpha = Mat_{m,n}^k\mathbb{R}$, и соответственно $\cup_\alpha \tau_\alpha = A$.

Пусть $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$. Рассмотрим отображение

$$\varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) = \varphi(\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)), \quad (5.6)$$

докажем, что существует функция склейки $f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, обладающая некоторым классом гладкости. Запишем

$$f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi \circ (\beta^{-1} \circ \alpha) \circ \varphi^{-1}, \quad (5.7)$$

производящая отображение $\varphi^{-1} : \{x^1, \dots, x^N\} \rightarrow (A, B, C) \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$, затем про-

изводится некоторая перестановка $(\beta^{-1} \circ \alpha) : \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$, и наконец производится развертка $\varphi : \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \rightarrow \{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N\}$. Таким образом, задана рациональная бесконечно раз дифференцируема функция координат, то есть задана гладкая структура многообразия.

Пример 2. Многообразие Грассмана

$G(n, k)$ - совокупность всех линейных подпространств размерности $\dim = k$ координатного линейного пространства $L_n(\mathbb{R})$ размерности $\dim = n$.

Введем в $L_n(\mathbb{R})$ скалярное произведение и ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $E \subset L_n(\mathbb{R})$, при этом существует базисная k -плоскость $E_0 = span(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_k})$ ($i_1 < \dots < i_k$). Спроецируем базисные вектора из E_0 на плоскость E и получим линейно-независимый набор векторов $\vec{e}_{i_1}^E, \dots, \vec{e}_{i_k}^E$. Для оставшихся векторов получим

$$\vec{e}_{i_s}^E = \sum_{l=1}^k h_s^l \vec{e}_{i_l}^E, \quad s = \overline{1, n-k}, \quad (5.8)$$

где $h_s^l \in Mat_{m, n-k}^k \mathbb{R}$. Совокупность h_s^l - карта. Выборов E_0 всего C_n^k - число карт в атласе для данного k (или размерность, если считать пространств). Так как базисные вектора должны быть разные, то, к примеру, формы образуют грассманово многообразие.

Лекция 6. Касательные векторы. Ковекторы

Касательный вектор и касательное пространство

Для введения понятия касательных и кокасательных векторов необходимо введение понятия подмногообразия.

Пусть задано гладкое многообразие M^n с атласом $A^r = \{\tau_\alpha\}$, где $\tau_\alpha = (W_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha)$ - карта, представляющая собой отображение φ_α некоторой окрестности W_α на множестве W в некоторую окрестность U_α в \mathbb{R}^n . Тогда подмногообразием S гладкого многообразия M^n называется такое подмножество $S \subset M^n$, что для любого $p \in S$ существует такая карта $\tau_\alpha = (W, \varphi, U) \in A^r$, что $\varphi(S \cap W)$ - открыто в $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $k = \dim S$ - размерность подмногообразия.

Дифференцируемая структура на S индуцируется структурой на M . То есть для каждой карты τ из M существует карта $\xi = (\Omega, \psi, V)$, где $\Omega = S \cap W$, $\psi = \varphi|_{S \cap W} : \Omega \rightarrow V$, $V = \varphi(S \cap W) = \psi(\Omega)$. Часто, для краткости записывают $\xi = \tau|_S$. $\{\xi_\beta\}_{\beta \in L} = B^r$ - атлас на S , $\mathbb{B}^r = \{B^r\}$ - максимальный атлас.

Для приложений, необходимо уметь задавать S с помощью локальных уравнений.

Задание S с помощью локальных уравнений

Докажем следующее утверждение.

Утверждение: если задавать S с помощью локальных уравнений, то дифференцируемая структура на S будет индуцироваться дифференцируемой структурой на M .

Для того, чтобы задать S с помощью локальных уравнений необходимо рассмотреть две карты $\tau = (W, \varphi, U)$, $\tau' = (W', \varphi', U')$ в окрестности одной точки P_0 , образ которой в карте τ есть x_0 , а в карте τ' есть x'_0 . При этом определен диффеоморфизм $f = \varphi \circ \varphi'^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, который связывает координаты точек x_0 и x'_0 : $x^i = f^i(x'^j)$ (см рис.).

Пусть в карте τ подмногообразие S задано уравнениями

$$x^{k+1} = \dots = x^n = 0, \quad (6.1)$$

тогда в τ' для координат x'_0 возникает набор уравнений

$$\begin{aligned} x^1 &= f^1(x'^j), \dots, x^k = f^k(x'^j), \\ 0 &= f^{k+1}(x'^j), \dots, 0 = f^n(x'^j), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где f^{k+1}, \dots, f^n - функционально независимы, так как $f = \varphi \circ \varphi'^{-1}$ - гладкий диффеоморфизм. Следовательно, для любой точки P на S в карте τ можно задать системой уравнений

$$S^1(P) = \dots = S^{(n-k)}(P) = 0. \quad (6.3)$$

При этом якобиан соответствующего преобразования

$$\text{rang} \left(\frac{D(f^t)}{D(x^t)} \right) = n - k, \quad t = \overline{k+1, n}, \quad (6.4)$$

в данных терминах подмногообразие есть подмножество M , заданное набором функционально независимых уравнений

$$0 = f^{k+1}(x^j), \dots, 0 = f^n(x^j), \quad (6.5)$$

с соответствующим рангом преобразования равным $n - k$ для любой точки x^j . Оказывается, это не всегда выполняется и для того, чтобы это показать рассмотрим примеры.

1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ с картой $\tau = (\mathbb{R}^n, \varphi, \mathbb{R}^n) \in A^\omega$. Далее, зададим функцию $f : M = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенную для любой точки $p \in \mathbb{R}^n$, для примера, следующим образом

$$f(p) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - r^2, \quad r > 0 \quad (6.6)$$

которое задает $(n - 1)$ -гиперсферу, тогда

$$\text{rang} \left(\frac{D(f^t)}{D(x^t)} \right) = \begin{cases} 1, & \forall p \in \mathbb{R}^n / \{0\} \\ 0, & p = 0 \end{cases}$$

Тогда $S = \{p \in \mathbb{R}^n, f(p) = 0\}$, $0 \notin S \implies S = \mathbb{S}^{n-1}$ - подмногообразие.

Замечание: $S = \mathbb{S}^{n-1}$ - гиперсфера является подмногообразием. Однако для других функций f это может быть не так, для того, чтобы это показать, рассмотрим следующие примеры.

2. Пусть $M = \mathbb{R}^2$ с картой $\tau = (\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^2) \in A^\omega$ и с функцией $f : M = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенную для любой точки $p \in \mathbb{R}^2$, следующим образом

$$f(p) = (x^1)^2 - (x^2)^2 - r^2, \quad r \neq 0 \quad (6.7)$$

которое задает гиперболу, тогда

$$\text{rang} \left(\frac{D(f^t)}{D(x^t)} \right) = \begin{cases} 1, & \forall p \in \mathbb{R}^2 / \{0\} \\ 0, & p = 0 \end{cases}$$

Тогда $S = \{p \in \mathbb{R}^2, f(p) = 0\}$, $P = 0 \notin S \implies S$ - несвязное многообразие (две ветви гиперболы - две компоненты связности, см. рис.).

3. Если теперь для того же многообразия $M = \mathbb{R}^2$ рассмотреть

$$f(p) = (x^1)^2 - (x^2)^2, \quad (6.8)$$

для которого $P = 0 \in S \implies \text{rang} \left(\frac{D(f)}{D(x)} \right)$ изменяется на S , следовательно $S = \{p \in \mathbb{R}^2, f(p) = 0\}$ - не является многообразием. При этом, $S' = \{p \in \mathbb{R}^2 / \{0\}, f(p) = 0\}$ - несвязное многообразие (четыре компоненты связности, см. рис.).

Замечание: таким образом, для того чтобы множество S являлось многообразием, необходимо, чтобы ранг соответствующих преобразований оставался постоянным. Поэтому, к примеру, в теории струн разрешены амплитуды вида А на рис. и запрещены амплитуды вида В на рис. Потому как будет плохо определено интегрирование в статсумме по соответствующим многообразиям.

Касательные векторы и касательные пространства

Пусть M - гладкое многообразие класса C^r , $\mathbb{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ - гладкое подмногообразие M с одной картой. Пусть $P_0 \in W \subset M$, $\tau = (W, \varphi, U)$, $\varphi(P_0) = x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$. При этом, определено гладкое отображение $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow M$ - параметризованная кривая класса C^s ($s < r$). Также определено отображение подмногообразия \mathbb{I}_W в \mathbb{R}^n : $\gamma^* = \varphi \circ \gamma: \mathbb{I}_W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{I}_W = \gamma^{-1}(W)$ - открытое множество в \mathbb{I} . Данное отображение также задает кривую уже на \mathbb{R}^n : $x^i = x^i(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ (см. рис.).

Пусть $s \geq 1$, тогда рассмотрим $\mathbb{K}_{P_0}^s = \{\gamma: \mathbb{I} \rightarrow M; \gamma(0) = P_0\}$ - множество всех кривых, проходящих через точку P_0 в $t = 0$.

На данном множестве можно ввести соотношение эквивалентности: две кривые $g, h \in \mathbb{K}_{P_0}^s$ эквивалентны $g \sim h$, если в любой карте $\tau = (W, \varphi, U) \in A(M)$ (см рис.):

$$\left. \frac{\partial g^{*i}}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial h^{*i}}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad (6.9)$$

то есть, если две кривые имеют общий касательный вектор в точке P_0 ($t = 0$).

Таким образом, касательный вектор в точке P_0 есть класс эквивалентности кривых в точке P_0 : $\xi_{P_0} = [g]$. А числа $\xi_{x_0}^i = \left. \frac{dg^{*i}}{dt} \right|_{t=0}$ - компоненты касательного вектора в точке P_0 .

Упражнение: показать, что эквивалентность кривых в данной точке не зависит от выбора карты, а закон преобразования компонент

$$\xi_{P_0}^i = A_j^i \xi_{P_0}^j, \quad (6.10)$$

где

$$A_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j}. \quad (6.11)$$

Касательные вектора как операторы локального дифференцирования

Будем обозначать $\xi_{P_0} \in T_{P_0}M$ касательный вектор, принадлежащий всему множеству касательных векторов $T_{P_0}M$ в данной точке.

Теорема: каждому вектору $\xi_{P_0} \in T_{P_0}M$ можно поставить в соответствие дифференциальное отображение

$$L_{\xi_0} : C^s(M) \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad P_0 \in M, \quad (6.12)$$

где $C^s(M)$ - множество функций класса дифференцируемости s на многообразии M . Отображение L_{ξ_0} обладает следующими свойствами

1. $L_{\xi_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L_{\xi_0}(f_1) + \beta L_{\xi_0}(f_2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f_1, f_2 \in C^s(M)$ - свойство линейности,
2. $L_{\xi_0}(f_1 f_2) = f_1(P_0)L_{\xi_0}(f_2) + f_2(P_0)L_{\xi_0}(f_1)$ - правило Лейбница,
3. $L_{\alpha \xi_0 + \beta \eta_0} = \alpha L_{\xi_0} + \beta L_{\eta_0}$ - структура линейного пространства на множестве функционалов.

Доказательство: определим $L_{\xi_0}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$, где

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{I} &\rightarrow M, \\ f : M &\rightarrow \mathbb{R}^1, \\ f \circ \gamma : \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для каждой карты $\tau = (W, \varphi, U)$ в окрестности P_0 отображение

$$(f \circ \gamma)|_{M \cap W} = f^* \circ \gamma^* : \mathbb{I}_{M \cap W} \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \varphi \circ \gamma : \mathbb{I}_W \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow x^i = x^i(t), \\ f^* &= f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \rightarrow f = f(x^i), \\ \varphi &: W \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

можно дифференцировать по правилу сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(f^* \circ \gamma^*)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f^*(x^1(t), \dots, x^n(t)))|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f^*}{\partial x^m}|_{t=0} \frac{dx^m}{dt}|_{t=0} = \xi_{x_0}^m \frac{\partial f^*}{\partial x^m}|_{t=0} = \left(\xi_{x_0}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) (f^*)|_{t=0}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

то есть доказано, что $L_{\xi_0}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$ удовлетворяет указанным трем свойствам.

Замечание: можно выбрать, так называемый, натуральный базис в пространстве $T_{p_0}M$ для заданной карты, как набор линейных операторов $\{L_m = \frac{\partial}{\partial x^m}|_{p_0}\}$ - базис в касательном пространстве. Соответственно, $L_{\xi_0} = \xi_{x_0}^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ - так называемая, производная Ли.

Итак, определена операция дифференцирования отображений $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$: для каждого касательного вектора $\xi_{p_0} \in T_{p_0}M$ определен оператор

$$L_{\xi} : C^s(M) \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad (6.17)$$

который строит отображение функций $C^s(M)$ в числа \mathbb{R}^1 . Теперь, определим дифференцирование произвольных отображений $f : M \rightarrow N$.

Дифференцирование гладкого отображения и кокасательное пространство

Пусть M, N - два гладких многообразия, $\dim M = m$; $\dim N = n$ - их размерности, соответственно. И пусть $f : M \rightarrow N (q = f(p))$ - произвольное гладкое отображение. Также определены соответствующие картирующие отображения φ , χ и функция перехода между картами \tilde{f}

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow \mathbb{R}^m (x^i = \varphi^i(p)), \quad i = \overline{1, m} \\ \chi : N &\rightarrow \mathbb{R}^n (y^\mu = \chi^\mu(q)), \\ \tilde{f} = \chi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n (y^\mu = \tilde{f}^\mu(x^i)), \quad \mu = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где y^μ , x^i - координаты в картах. Тогда матрица Якоби отображения \tilde{f}

$$J = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right), \quad (6.19)$$

можно понимать как отображение векторных пространств в точке p

$$J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (6.20)$$

то есть произвольный вектор b^μ из \mathbb{R}^m данное отображение переводит в a^i из \mathbb{R}^n

$$b^\mu|_{y_0} = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p a^i|_{x_0}. \quad (6.21)$$

Таким образом, можно интерпретировать J как отображение касательных пространств

$$\begin{aligned} (\varphi^* \circ \gamma^*) : \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}^m (t \rightarrow x^i), \\ \tilde{f} \circ (\varphi^* \circ \gamma^*) : \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n (t \rightarrow y^\mu), \end{aligned} \quad (6.22)$$

тогда касательный вектор

$$\eta^\mu = \frac{dy^\mu}{dt} = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p \cdot \frac{dx^i}{dt} = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p \cdot \xi^i = J_i^\mu|_{t=0} \xi^i. \quad (6.23)$$

Построенное отображение

$$df_p : T_p M \rightarrow T_p N, \quad (6.24)$$

- дифференциал гладкого отображения $f : M \rightarrow N$.

Замечание: можно также интерпретировать J как матрицу отображения в натуральном базисе, то есть натуральный базис в $T_p M$ есть $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$, а натуральный базис в $T_p N$ есть $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\}$, тогда отображение между данными базисами задается матрицей $\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p$.

Замечание: данное определение не зависит от выбора карт.

Замечание: если для двух отображений $f, g : M \rightarrow N$ существует такая окрестность $U \subset M$, что $f|_U = g|_U$, то в данной окрестности также $df|_U = dg|_U$.

Цепное правило: пусть существует два последовательных отображения $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow K$, тогда можно построить композицию отображений $f \circ g$, матрица которой будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\mu} \right)_p \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \right)_p, \quad (6.25)$$

или для дифференциалов отображений

$$d(g \circ f)_p = dg_p \circ df_p. \quad (6.26)$$

Пусть $N = \mathbb{R}^1$, тогда $f : M \rightarrow \mathbb{R}^1$ - функция на многообразии, а ее дифференциал $df_p : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1$ есть функция на касательном пространстве, следовательно, по определению дуального пространства $df_p \in T_p^* M$, которое называется кокасательным пространством.

Действие данного отображения на вектор $\xi_p \in T_p M$:

$$df_p(\xi) = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p \xi_p^i = \xi_p(f). \quad (6.27)$$

Так как $df_p \in T_p^* M$ и имеет компоненты $\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p$, логично определить базис на кокасательном пространстве $\{dx_p^i\}$:

$$df_p = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right)_p dx_p^i. \quad (6.28)$$

Таким образом, дифференциал гладкой функции

$$df = \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial x^i} \right) dx^i, \quad (6.29)$$

является элементом кокасательного пространства $T_p^* M$.

Лекция 7. Главные расслоения

На прошлой лекции был введен базис на касательном пространстве $T_pM : \{\frac{\partial}{\partial x^i}|_P\}$ и на кокасательном пространстве $T_p^*M : \{dx^i|_P\}$. Первый можно понимать, как операторы действующие на функции, вторые как отображения дифференциалов функций. Теперь, введем понятие тензоров

Тензорные поля

Тензором S ранга (p, q) в точке P на касательном и кокасательном пространствах называется тензорное произведение p элементов касательного и q элементов кокасательного пространства

$$S_P = S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}, \quad (7.1)$$

со следующим определением базиса в пространстве тензорного произведения пространств

$$bas(T_pM \otimes T_pM) = \{\partial_i \otimes \partial_j\}. \quad (7.2)$$

Рассмотрим подробнее векторные поля. Так как любому вектору $X_p \in T_pM$ можно сопоставить дифференциальный оператор

$$X_p f = X^m \frac{\partial f}{\partial x^m} |_P, \quad (7.3)$$

то для таких операторов можно определить алгебру с помощью коммутационного соотношения

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad (7.4)$$

которое в заданной карте представляет собой производную Ли

$$[X, Y]f = (L_X Y)(f). \quad (7.5)$$

Также для векторного поля $X_p \in T_pM$ ранее было определено понятие интегральной кривой, как такое отображение $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow M$, производная которого (касательный вектор) совпадает с вектором X_p :

$$\dot{\gamma}(t)|_{t_0} = X_p, p = \gamma(t_0). \quad (7.6)$$

Далее, пусть γ_p^X - локальная интегральная кривая поля X , у которой $\gamma_p^X(t=0) = p$. Определим отображение $\varphi_t^X(p) = \gamma_p^X(t)$, обладающее следующим групповым свойством

$$\varphi_s(\varphi_t(p)) = \varphi_{s+t}(p). \quad (7.7)$$

Определение: поток на многообразии M - семейство таких гладких отображений φ_t .

Замечание: каждое векторное поле индуцирует поток $\{\varphi_t^X\}$.

Пусть, теперь $\varphi : M \rightarrow N$ - произвольный диффеоморфизм гладкого многообразия. И, пусть, S - тензорное поле типа (p, q) на N .

По определению в любой карте $\tau_\alpha = (V_\alpha, \chi_\alpha), V_\alpha \subset N$

$$S|_{V_\alpha} = S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_q}, \quad (7.8)$$

далее, можно построить карту на M , определив обратное отображение $\varphi^{-1}(\tau_\alpha) = \tilde{\tau}_\alpha = (U_\alpha, \tilde{\chi}_\alpha), U_\alpha \subset M$, такое что $V_\alpha = \tau_\alpha(U_\alpha), \tilde{\chi}_\alpha = \chi_\alpha \circ \varphi^{-1}$.

Теперь, определим тензорное поле φ^*S на M в карте U_α :

$$(\varphi^*S)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}|_{U_\alpha} = (S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \circ \varphi)|_{U_\alpha}, \quad (7.9)$$

или

$$(\varphi^*S)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x) = S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(\varphi(x)), \quad (7.10)$$

то есть φ^*S - результат переноса тензорного поля из N в M посредством диффеоморфизма $\varphi : M \rightarrow N$ (pull-back).

Тензорное поле φ^*S можно использовать для сравнения тензорных полей в разных точках: пусть имеется отображение $\varphi : M \rightarrow M$, переводящее точку p в точку q , при этом в точке q задано тензорное поле S' , а в точке p - тензорное поле S . Далее, в точке p зададим тензорное поле φ^*S' . В общем случае, тензорные поля S и φ^*S' отличаются (см. рис.). Рассмотрим примеры.

1. Скалярное поле: $(p, q) = (0, 0), S : N \rightarrow \mathbb{R}$ тогда для такого поля

$$\varphi^*S = S \circ \varphi, \quad (7.11)$$

то есть в некоторой точке

$$(\varphi^*S)(x) = S(\varphi(x)), \quad (7.12)$$

где над тензором совершается активное преобразование или

$$S'(x') = S(x), \quad (7.13)$$

где совершается пассивное преобразование.

2. Векторное поле: $(p, q) = (1, 0), S : N \rightarrow TN$. Для такого поля преобразование записывается в виде

$$(\varphi^* S)_p = (d\varphi_p)^{-1} S_{\varphi(p)}, \quad (7.14)$$

где

$$(d\varphi_p)^{-1} : T_{\varphi(p)}N \rightarrow T_pM, \quad (7.15)$$

- обратное отображение к отображению

$$(d\varphi_p) : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N, \quad (7.16)$$

соответственно

$$(\varphi^* S)^i|_{V_\alpha} = S^i \circ \varphi|_{U_\alpha}, \quad (7.17)$$

или в компонентах

$$S^i(x') \frac{\partial}{\partial x'^i} = S^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (7.18)$$

В общем случае определена производная Ли

$$(\mathcal{L}_X S)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* S)_p - S_p}{t}. \quad (7.19)$$

Геометрия расслоений

Определение: расслоение есть тройка вида

$$\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B}), \quad (7.20)$$

где \mathbb{E}, \mathbb{B} - многообразия (топологические пространства) \mathbb{E} - тотальное пространство. \mathbb{B} - база, $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ - непрерывное отображение (проекция) тотального пространства на базу.

Для любого $p \in \mathbb{B}$ определен $\pi^{-1}(p) = F_p$ - слой над точкой p .

Замечание: отображение $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ само по себе можно называть расслоением, поскольку оно однозначно определяет \mathbb{E}, \mathbb{B} .

Определение: расслоение $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B})$ называется расслоением с типичным слоем, если для любого $p, q \in \mathbb{B}$ соответствующие слои F_p, F_q - гомеоморфны:

$$F_p \simeq F_q. \quad (7.21)$$

Определение: отображение $\varphi : \xi \rightarrow \xi'$ послойно, если для любой точки $p \in \mathbb{E}$

$$\varphi(F_p) = F_{\varphi(p)}. \quad (7.22)$$

Если оно непрерывно, то это отображение называется морфизмом расслоений.

Пример расслоения возникает при установлении соотношения эквивалентности \sim на \mathbb{E} . На множестве $\mathbb{E} = \mathbb{E}/\sim$ естественным образом индуцируется топология (атлас). Слоем при таком расслоении будет

$$F_p = \{q \in \mathbb{E}, q \sim p\}. \quad (7.23)$$

Важный класс соотношений эквивалентности возникает из-за действия группы.

Определение: группа G действует слева на \mathbb{E} , если задано отображение

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E}, \\ (a, p) &\rightarrow ap, \end{aligned} \quad (7.24)$$

где $a \in G$, $p \in \mathbb{E}$, такое что:

1. $ep = p$.
2. $a(bp) = (ab)p$ (слева),
 $(pb)a = p(ba)$ (справа $\mathbb{E} \times G \rightarrow \mathbb{E}$).

Для любого $a \in G$ отображение $L_a : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, $p \rightarrow ap$ - биективно.

Данное отображение $a \rightarrow L_a$ называется представлением группы G в \mathbb{E} , ассоциированное с действием $G \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$.

Замечание: действие G на \mathbb{E} определяет соотношение эквивалентности $p \sim q \iff q = ap$.

Определение: классом $[p]$ называется орбита точки p в \mathbb{E} .

Пример: действие $G = SO(2)$ на \mathbb{S}^2 (см. рис.). Будем называть точки p, q на сфере \mathbb{S}^2 эквивалентными $p \sim q \iff L_a(p) = q$ ($R_a(p) = q$). Каждая орбита над точкой p является слоем pG . Множество всех орбит \mathbb{E}/G данной сферы образуют базу, с естественной проекцией

$$\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}/G : p \rightarrow [p]. \quad (7.25)$$

Пусть \mathbb{E} и \mathbb{E}' - правые G -пространства (топологическое пространство, наделенное непрерывным действием группы G).

Отображение $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ называется эквивариантно, если

$$\varphi(pa) = \varphi(p)a, \quad \forall p \in \mathbb{E}, a \in G, \quad (7.26)$$

на языке коммутативных диаграмм это изобразиться следующим образом (см. рис.): сначала можно подействовать отображением φ , а затем совершить преобразование группы G , а можно сначала совершить преобразование группы G над \mathbb{E} , а затем подействовать отображением φ - результат не поменяется (диаграмма коммутативна).

Утверждение: эквивариантное отображение φ расслоений $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{E}/G)$ и $\xi' = (\mathbb{E}', \pi', \mathbb{E}'/G')$ - послойно.

Доказательство: для доказательства послойности необходимо проверить переходит ли слой $F_p = pG$ при отображении φ в слой. Из определения эквивариантности отображения

$$\varphi(pG) = \varphi(p)G, \quad (7.27)$$

или поэлементно (см. рис.)

$$\forall a \varphi(pa) = \varphi(p)a. \quad (7.28)$$

Замечание: послойность эквивариантного отображения φ необходимо, к примеру, для построения изоморфизма между расслоениями.

Теперь определим понятие главного расслоения. Для этого рассмотрим две точки $(p, q) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Пусть на данном пространстве введено соотношение эквивалентности

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \{(p, q) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}, q \in [p]\} \implies \\ &\implies \exists a \in G, q = pa, \end{aligned} \quad (7.29)$$

для примера, рассмотрим расслоение, показанное на рис. Здесь все точки на узлах решетки ε^* являются эквивалентными по отношению к группе сдвигов $G : x \rightarrow x - n$.

Если действие $\mathbb{E} \times G \rightarrow \mathbb{E}$ свободно ($\forall a, b \in G, pa \neq pb$), то a - единственное и определяет отображение

$$\tau : \varepsilon^* \rightarrow G. \quad (7.30)$$

Утверждение: если τ непрерывно, то расслоение $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{E}/G)$ является расслоением с типичным слоем. Такое расслоение называется главным расслоением со структурной группой G .

Доказательство: $\forall p \in \mathbb{E}$ поставим в соответствие группе G слой pG

$$j_p : G \rightarrow pG, a \rightarrow pa, \quad (7.31)$$

необходимо доказать, что данное отображение является гомеоморфизмом, то есть является непрерывным и биективным. Биективность следует из свободного действия группы G . А обратное отображение

$$j_p(\tau(p, q)) = q, \forall q \in pG, \quad (7.32)$$

следовательно, $q \rightarrow \tau(p, q)$ является обратным к j_p и, следовательно, данное отображение является гомеоморфизмом, то есть построенное расслоение является расслоением с типичным слоем.

Замечание: для сферы \mathbb{S}^2 расслоение не является главным поскольку в полюсах действие группы не биективно.

Лекция 8. Ассоциированное расслоение с главным расслоением

На прошлой лекции было рассмотрено понятие главного расслоения (см. рис.)

$$\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{E}/G), \quad (8.1)$$

где $G : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ - структурная группа (слой), действующая справа на многообразии \mathbb{E} с базой \mathbb{E}/G (множество орбит) и естественной проекцией

$$\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}/G : a \rightarrow [a]_G. \quad (8.2)$$

Замечание: действие группы справа определено по правилу композиции

$$g(ga) = (gg)a, \quad (8.3)$$

Теперь введем понятие расслоения, ассоциированного с главным. Пусть имеется два пространства \mathbb{E}, F и пусть G действует на \mathbb{E} справа, а на F слева

$$\begin{aligned} p &\rightarrow pa, \quad a \in G, \quad p \in \mathbb{E} \\ x &\rightarrow a'x, \quad a' \in G, \quad x \in F \end{aligned} \quad (8.4)$$

тогда можно определить правое действие $a \in G$ на паре $(p, x) \in (\mathbb{E} \times F)$ следующим образом

$$(p, x)a = (pa, a^{-1}x), \quad \forall p \in \mathbb{E}, \quad x \in F \quad (8.5)$$

данное действие, действительно, является правым действием группы. Для того чтобы показать это подействуем на данную пару дважды справа элементом группы a

$$f_{a'} f_a(p, x) \rightarrow f_{a'}(pa, a^{-1}x) = (pa a', a'^{-1} a^{-1}x) = (p\tilde{a}, \tilde{a}^{-1}x). \quad (8.6)$$

Далее, рассмотрим фактор-пространство орбит $(\mathbb{E} \times F)/G = \mathbb{E} \times_G F$ - произведение пространств над G . Заметим, что выполняется равенство классов

$$[(pa, x)] = [(a, px)], \quad \forall a \in G \quad (8.7)$$

построим следующую диаграмму расслоений: пусть имеется расслоение $(\mathbb{E} \times F, pr, \mathbb{E})$, а также имеются соотношения эквивалентности отображающие точки в классы

$$\begin{aligned} (\mathbb{E} \times F) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{E} \times_G F : (p, x) \rightarrow [(p, x)], \\ \mathbb{E} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{E}/G : p \rightarrow [p], \end{aligned} \quad (8.8)$$

тогда можно определить расслоение $(\mathbb{E} \times_G F, \pi, \mathbb{E}/G)$ с проекцией $\pi : [p, x] \rightarrow [p]$, определенной из требования коммутативности построенной диаграммы.

Проверим корректность определенного отображения π . Пусть имеется класс, с двумя представителями $[(p, x)] = [(q, y)]$ в $\mathbb{E} \times F$, то есть $q = pa, x = ay$, тогда все q в классе $[q, y]$ можно получить из всех p в классе $[p, x]$:

$$\pi(p) = \pi(q), \quad (8.9)$$

значит $\pi[(p, x)] = [p]$ корректно определяет отображение $\pi : \mathbb{E} \times_G F \rightarrow \mathbb{B}$. При этом также отдаленно доказывается, что π - открыто и индуцирует топологию на \mathbb{B} . Таким образом, $\xi = (\mathbb{E} \times_G F, \pi, \mathbb{E}/G)$ действительно является расслоением.

Утверждение: типичным слоем в этом расслоении является F .

Доказательство: пусть $F_b = \pi^{-1}(b)$ - слой над $b \in \mathbb{B} = \mathbb{E}/G$. Задача заключается в том, чтобы построить изоморфизм

$$j : F \rightarrow F_b, \quad \forall b \in \mathbb{B} \quad (8.10)$$

построим его следующим образом

$$j(x) = [(p_0, x)], \quad \forall p_0 \in \mathbb{E}, \quad p_0 G = [p_0] = b \quad (8.11)$$

далее доказывается, что оно биективно.

Таким образом, $\xi = (\mathbb{E} \times_G F, \pi, \mathbb{B})$ - расслоение со структурной группой G , с базой \mathbb{B} , ассоциированное главному расслоению $\xi = (\mathbb{E}, \tilde{\pi}, \mathbb{E}/G)$.

Примеры

1. Пусть $ax = x$ для любого $x \in F$, $a \in G$ (тривиальное действие). Тогда для любых точек $p, q \in \mathbb{E}$ будет выполняться соотношение эквивалентности

$$(p, x) \sim (q, y) \in \mathbb{E} \times F, \quad (8.12)$$

тогда и только тогда, когда $x = y$. Следовательно, существует отображение

$$\mathbb{E} \times F \xrightarrow{\pi \times Id} \mathbb{B} \times F : (p, x) \rightarrow (pG, x), \quad (8.13)$$

которое индуцирует отображение

$$\varphi : \mathbb{E} \times_G F \rightarrow \mathbb{B} \times F, \quad (8.14)$$

замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \times F &\xrightarrow{\pi \times Id} \mathbb{B} \times F : (p, x) \rightarrow (pG, x), \\ \varphi : \mathbb{E} \times F &\rightarrow \mathbb{B} \times F, \\ &G \\ \tilde{\pi} : \mathbb{E} \times F &\rightarrow \mathbb{E} \times F, \end{aligned} \quad (8.15)$$

также определен естественный проектор

$$pr : \mathbb{B} \times F \rightarrow \mathbb{B} : ([p], x) \rightarrow [p], \quad (8.16)$$

тогда

$$(pr \circ \varphi)(p, x) = pG = \pi([(p, x)]), \quad (8.17)$$

таким образом, построено расслоение $\xi[F] = (\mathbb{E} \times F, \pi, \mathbb{B})$

$$\pi : \mathbb{E} \times F \rightarrow \mathbb{E}/G = \mathbb{B} \quad (8.18)$$

которое является изоморфным тривиальному $(\mathbb{B} \times F, pr, \mathbb{B})$ (изоморфизм устанавливается с помощью отображения φ), то есть само является тривиальным.

2. Пусть $\xi = (\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R}P^1)$ главное расслоение. Строится следующим образом. Пусть $G = \mathbb{Z}_2$, с образующей

$$t(\vec{x}) = -\vec{x}, \quad (8.19)$$

на $\mathbb{S}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, |\vec{x}| = 1\}$ также определено расслоение с базой $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$.

3. Теперь рассмотрим ассоциированное расслоение с ξ из примера 2. Для этого выберем отрезок

$$F = \mathbb{I} = \{\alpha \in \mathbb{R}^1, -1 \leq \alpha \leq 1\} \quad (8.20)$$

на котором $G = \mathbb{Z}_2$ действует следующим образом

$$t(\alpha) = -\alpha, \quad (8.21)$$

тогда утверждается, что $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} / \mathbb{Z}_2$ - тотальное пространство главного расслоения $\xi = (\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R}P^1)$ является листом Мебиуса.

Сечение расслоения

Пусть $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B})$ - произвольное расслоение. Тогда сечение есть

$$S : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{E} : b \rightarrow p, \quad (8.22)$$

если $\pi \circ S = Id$, то есть $S(b) \in F_b \forall b \in \mathbb{B}$.

Примеры

Тривиальное расслоение $(\mathbb{B} \times F, pr, \mathbb{B})$, в котором сечением будет

$$s(b) = (b, f(x)), \quad (8.23)$$

где $f : \mathbb{B} \rightarrow F$ - непрерывное отображение.

Расслоение $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B})$ локально тривиально, если существует максимальное покрытие $\{U_\alpha\} \in \mathcal{A}(\mathbb{B})$ с отображением $\xi|_{U_\alpha} = \pi^{-1}[U_\alpha]$, таким что

$$\begin{aligned} \xi|_{U_\alpha} &= \pi^{-1}[U_\alpha] \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F, \\ \pi^{-1}[U_\alpha] &\xrightarrow{\pi} U_\alpha, \\ U_\alpha \times F &\xrightarrow{pr} U_\alpha, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где φ_α - локальная тривиализация (гомеоморфизм), действующая послойно, U_α - тривиализующая окрестность.

Локально тривиальное расслоение с типичным слоем $F \simeq \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n)$ и структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ называется векторным расслоением.

Векторные расслоения

$\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B})$ - векторное расслоение ранга n над \mathbb{K} , если

1) $\forall b \in \mathbb{B}$ слой $F_b = \pi^{-1}(b)$ - линейное пространство над \mathbb{K} .

2) $\exists \{U_\alpha\} \in \mathcal{A}(\mathbb{B})$ и $\exists \varphi : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U_\alpha]$:

а) $\forall (b, x) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ диаграмма коммутативна,

б) $\forall b \in \mathbb{B}$ отображение $\varphi_\alpha(b)(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow F_b$, $\varphi_\alpha(b)(x) = \varphi_\alpha(b, x)$.

Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в \mathbb{R}^n . Тогда каждая тривиализация

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}[U] \quad (8.25)$$

определяет сечения

$$s_i(b) = \varphi(b, e_i), \quad (8.26)$$

тогда $\{s_i(b)\} = \text{bas}F_b$. Любое сечение на U можно представить в виде

$$s(b) = \sigma^i s_i(b). \quad (8.27)$$

Касательное расслоение

Пусть M - гладкое многообразие размерности $\dim M = n$, TM - многообразие касательных векторов, $\pi : T_p M \rightarrow p$ - естественная проекция. Тогда определено касательное расслоение $\xi = (TM, \pi, M)$ с базисом в $bas T_p M = \{(\frac{\partial}{\partial x^i})|_p\}$, тогда сечением будет

$$S_p = \sum s_p^i (\frac{\partial}{\partial x^i})|_p. \quad (8.28)$$

Утверждение: если TM - тривиально, то M - параллелизуемо.

Лекция 9. Связность в расслоении

Склеивающий коцикл

На прошлой лекции были пройдены тривиализующие отображения, из которых можно построить, так называемый, склеивающий коцикл. Напомним, основные утверждения.

Если есть расслоение $\xi = (\mathbb{E}, \pi, \mathbb{B})$, при этом база \mathbb{B} определено в карте U_α , то данное расслоение является локально тривиальным, если существует изоморфизм f_α , такой что:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}[U_\alpha] & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow pr & \\ U_\alpha & & \end{array}$$

здесь pr - каноническая проекция: $pr(p, a) = p, \forall a \in F, \forall p \in M$. При этом, если рассматривать пересечение двух карт $U_\alpha \cap U_\beta$, то соответствующая коммутативная диаграмма будет иметь следующий вид

$$\begin{array}{ccccc} U_\alpha \cap U_\beta \times F & \xleftarrow{f_\alpha} & \pi^{-1}[U_\alpha \cap U_\beta] & \xrightarrow{f_\beta} & U_\alpha \cap U_\beta \times F \\ & \searrow pr & \downarrow \pi & \swarrow pr & \\ & & U_\alpha \cap U_\beta & & \end{array}$$

где вообще говоря f_α и f_β - разные тривиализующие отображения. Таким образом, определена композиция отображений

$$\varphi_{\alpha\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times F \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times F, \quad (9.1)$$

которая называется склеивающим коциклом и удовлетворяет следующим условиям

0) является послонной

$$\varphi_{\alpha\beta}(a, x) = (g_{\alpha\beta}(x)(a), x), \quad x \in \mathbb{B}, \quad a \in F \quad (9.2)$$

где $g_{\alpha\beta}(x)$ - функции перехода (склейки), зависящие от координат x точек на базе. Если $F = \mathbb{R}^n$, то $g_{\alpha\beta}(x) \in GL(n)$. В теории Янга-Миллса данные функции представляют собой калибровочные преобразования,

- 1) $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\alpha}(x) = Id$,
- 2) $g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) = Id$ - условие 2-коцикла.

Замечание: вообще говоря, может быть

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x) &= h_{\alpha\beta\gamma}, \\ h_{\alpha\beta\gamma}(x)h_{\beta\gamma\delta}(x)h_{\gamma\delta\alpha}(x)h_{\alpha\beta\delta} &= Id, \end{aligned} \quad (9.3)$$

которое является условием коцикла более высокого порядка и связана с, так называемыми, gerbe bundles, которые представляют собой расслоение, в котором связностью является не 1-форма, а, в общем случае, n -форма. Так, например, в теории струн 2-форма $B_{\mu\nu}$ зачастую упоминается как связность в gerbe. То есть, в то время как взаимодействие точечной частицы с полем связности описывается с помощью 1-формы A_μ

$$S_I = \frac{e}{2} \int A_\mu dx^\mu, \quad (9.4)$$

для струны же взаимодействие описывается 2-формы $B_{\mu\nu}$

$$S_I = T \int B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (9.5)$$

Связность в расслоении

Пусть определено некоторое расслоение $\xi = (E, \pi, M)$, с объемлющим пространством E с размерностью $\dim E = m + n$, и базой M с размерностью $\dim M = m$ (размерность слоя $\dim F = n$). Также задано покрытие $\{U_\alpha\} \in A(E)$, так что для любой точки $p \in E$ определены координаты $p = (a^i, x^\mu)$, $i = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{1, m}$. При этом

$$\pi(U_\alpha) = V_\alpha, \quad (9.6)$$

где $\{V_\alpha\} \in A(M)$.

Определение: говорят, что на многообразии E с размерностью $\dim E = m + n$ задано поле m -мерных подпространств H , если $\forall p \in E$, $H_p \in T_p E$.

Утверждение: следующие условия эквивалентны для U

1. на U существуют гладкие линейные дифференциальные формы θ_p^i , такие что $\forall p \in U$

$$H_p = \text{Ann}(\theta_p^1, \dots, \theta_p^n) \quad (9.7)$$

где $\text{Ann}(\theta_p^1, \dots, \theta_p^n)$ - аннулятор форм, то есть такое векторное пространство, что

$$\forall X_p \in H_p : \theta_p^i(X_p) = 0, \quad (9.8)$$

далее H_p будем называть горизонтальными пространствами, а формы θ_p^i будем называть вертикальными формами.

2. На U существуют гладкие векторные поля X_p^μ , такие что

$$H_p = \text{span}(X_p^1, \dots, X_p^m). \quad (9.9)$$

Замечание: вертикальные формы θ_p^i определены однозначно. Выбор же горизонтальных пространств H_p , вообще говоря, не является единственным и определяет, так называемую, связность в расслоении.

Таким образом, касательное пространство TE_p в каждой точке $p \in E$ представляет собой прямую сумму горизонтального H_p и вертикального $V_p = T_a F_x$ пространств

$$T_p E = H_p \oplus T_a F_x, \quad p = (a, x). \quad (9.10)$$

Итак, данный набор утверждений для касательных пространств эквивалентен определению **связности** в расслоении. Это нетрудно показать. Пусть точка p задана в координатах $p = (a^i, x^\mu)$, а также имеется набор вертикальных форм θ_p^i , которые имеют компоненты в кокасательном базисе к F и к M , то есть их можно разложить по базису $\text{bas}T_p^*E = \{da^i, dx^\mu\}$

$$\theta_p^i(a, x) = f_j^i(a, x) da^j + g_\mu^i(a, x) dx^\mu, \quad (9.11)$$

при этом в слое действует структурная группа, позволяющая переопределить компоненты f_j^i в каждой точке, что $f_j^i = \delta_j^i$, тогда горизонтальная форма примет следующий вид

$$\theta_p^i(a, x) = da^i + g_\mu^i(a, x) dx^\mu, \quad (9.12)$$

где $g_\mu^i(a, x)$ является связностью. Если наложить на нее условие линейности по координатам a^i , то $g_\mu^i(a, x) = \Gamma_{j\mu}^i(x) a^j$.

Далее, поймем, что данная связность согласована с определением параллельного переноса.

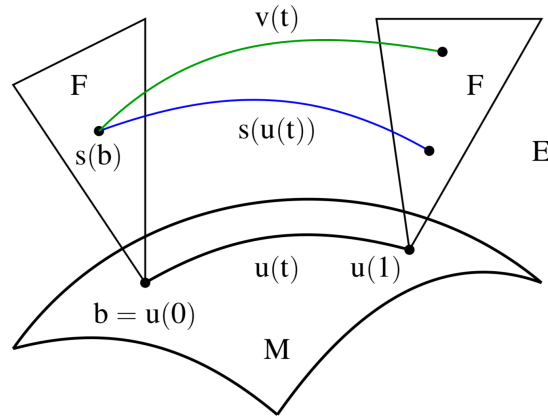
Ковариантная производная

Пусть имеется расслоение $\xi = (E, \pi, M)$, и в нем определено сечение

$$s(t) : M \rightarrow E, \quad (9.13)$$

параллельным переносом называется такое сечение $\tilde{s}(t) = s(u(t))$, ковариантная производная от которого вдоль векторного поля пути $u(t)$ на базе M равна нулю (см. рис. 9.3)

$$\nabla_x \tilde{s}(t) = 0, \quad (9.14)$$



в терминах определения горизонтального пространства, понятие параллельного переноса запишется следующим образом

$$\theta^i(s) = 0, \quad (9.15)$$

при этом s , удовлетворяющее данному условию, называется горизонтальным сечением.

Рассмотрим пример.

Пример

Пусть определено касательное расслоение $\xi = (TM, \pi, M)$, с кривой $x^\mu = x^\mu(\tau)$ на базе M , при этом так как тотальное пространство является касательным TM , то индексы слоя $i = \overline{1, m}$ и индексы на базе $\mu = \overline{1, m}$ пробегают одни и те же значения, поэтому их можно обозначать одним типом индексов.

Условие параллельного переноса запишется тогда следующим образом

$$da^\mu(\tau) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)a^\nu(\tau)dx^\rho = 0, \quad (9.16)$$

где $a^\nu = a^i$ - элементы слоя F . Если $a^\mu = \dot{x}^\mu$, то уравнение параллельного переноса определяет уравнение геодезической

$$d\dot{x}^\mu(\tau) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)\dot{x}^\nu dx^\rho = 0. \quad (9.17)$$

Группа голономии

Теперь, рассмотрим параллельный перенос вдоль замкнутого контура γ

$$\delta v^\mu(x) = [\nabla_\nu, \nabla_\sigma]v^\mu d\Sigma^{\nu\sigma} = R_{\nu\sigma\rho}^\mu v^\rho d\Sigma^{\nu\sigma}, \quad (9.18)$$

где $R_{2V}^\mu = \frac{1}{2}R_{\rho\sigma\nu}^\mu dx^\rho dx^\sigma$ - 2-форма, принимающая значения в алгебре Ли структурной группы G . Например, если $G = GL(d)$, то $R_{2V}^\mu \in gl(d)$.

Далее, рассмотрим все пути γ , которые начинаются и заканчиваются в одной и той же точке p , соответствующее множество преобразований $\{g_\gamma\}_p$ будем называть группой голономии $Hol_p(\nabla) \subset GL(d)$.

Утверждение: группа голономий на односвязном многообразии не зависит от точки p

$$Hol_p(\nabla) \simeq Hol(\nabla), \forall p \quad (9.19)$$

Утверждение: пусть имеется группа голономии связности $H = Hol(\nabla)$, и если существует ковариантно постоянный тензор $S \in \Gamma(TM) : \nabla S = 0$, то $H(S) = 0$.

Следствие: если известен некоторый ковариантно постоянный тензор, то по данному тензору можно восстановить группу голономии.

Пример

Пусть имеется многообразие M размерности $\dim M = d$ со структурной группой $G = GL(d)$ и пусть существует ковариантно постоянный тензор

$$\nabla^{LC} g_{\mu\nu} = 0, \quad (9.20)$$

по отношению к связности Леви-Чевита LC . Очевидно, данный тензор сохраняется группой $SO(d) = Hol(\nabla^{LC}) \subset GL(d)$. То есть $R_{2V}^\mu \in SO(d)$, то есть является антисимметричным и бесследовым тензором, что, действительно, выполняется.

Классификация Бергера

Ясно, что чем больше сохраняющихся тензорных структур на многообразии возникает, тем более узкая группа голономии. Приведем соответствующую классификацию Бергера таких многообразий и групп голономий

№	Hol	Многообразии	\dim
1	$SO(n)$	Риманово	n
2	$U(n)$	Келлерово	$2n$
3	$SU(n)$	Калаби-Яу	$2n$
4	$Sp(n)$	Гипер-келлерово	$4n$
5	G_2	G_2	
6	$Spin(7)$	$Spin(7)$	

Классификация Бэра

Теперь, предположим, имеется сохраняющаяся тензорная структура на произвольном расслоении $S \in \Gamma(E, \pi, M) : \nabla S = 0$. Рассмотрим случай спинорного расслоения, для которого определены, так называемые, параллельные спиноры

$$\nabla \psi = \partial_\mu \psi + \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} \psi = 0, \quad (9.21)$$

при этом $R_{\mu\nu}^{ab} \gamma_{ab} dx^\mu dx^\nu \in \Omega^2 M \otimes spin(4)$. $spin(4) = su_L(2) \otimes su_R(2)$. Тогда можно записать связность в следующем виде

$$\omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \omega_\mu^{Li} \sigma_i & 0 \\ 0 & \omega_\mu^{Ri} \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (9.22)$$

спинор

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

является ковариантно постоянным относительно подгруппы группы голономии $su_R(2)$ со связностью

$$\omega_\mu^{Rab} \gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_\mu^{Ri} \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

Классификация данных многообразий по группе голономии называется классификацией Бэра.

Лекция 10. Комплексная геометрия

Начнем изучение комплексной геометрии с понятия линейного комплексного пространства.

Линейное комплексное пространство

Комплексное линейное пространство V есть пространство размерности

$$\dim V = 2n, \quad (10.1)$$

то есть элементами данного пространства являются столбцы с $2n$ вещественными компонентами. Данное пространство снабжено комплексной структурой, а именно эндоморфизмом

$$\begin{aligned} J: V &\rightarrow V, \\ J^2 &= -Id, \\ J: v &\rightarrow v', \quad \forall v, v' \in V \\ J \circ J: v &\rightarrow -v. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Данная комплексная структура в каноническом базисе имеет следующий вид

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

где I_n - $n \times n$ единичная матрица. При этом данная комплексная структура оказывается необходимой для определения умножения векторов $X \in V$ на комплексные числа

$$(a + ib)X = aX + bJX, \quad (10.4)$$

то есть тензор J играет роль мнимой единицы в смысле, что по вектору X можно построить вектор Z , на который данный тензор будет действовать следующим образом

$$JZ = iZ. \quad (10.5)$$

Чтобы понять как получить данное соотношение, выберем набор линейно независимых векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$, тогда в качестве базиса на V можно выбрать следующий набор векторов

$$\text{bas } V = \{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}, \quad (10.6)$$

который, как оказывается, является каноническим. Далее обозначая первые n компонент за e_i , а вторые n за \tilde{e}_i , тогда вектора X и Z^i примут следующий вид

$$\begin{aligned} X &= x^i e_i + y^i \tilde{e}_i, \\ Z^i &= x^i + iy^i. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Вообще говоря, комплексную структуру можно изменить двумя способами. Во-первых, можно просто изменить базис. Во-вторых, можно изменить саму комплексную структуру так, что полученную таким образом новую комплексную структуру нельзя будет получить каким либо преобразованием базиса.

Любая комплексная структура связана с канонической следующим преобразованием

$$J = S^{-1} J_0 S, \quad (10.8)$$

где $S \in GL(2n, \mathbb{R})$. Можно показать, что полученная таким образом матрица является комплексной структурой, то есть $J^2 = -1$. При этом среди данных преобразований есть такие S_0 , что

$$J_0 = S_0^{-1} J_0 S_0, \quad (10.9)$$

то есть $[S_0, J_0] = 0$. Можно показать, что $S_0 \in GL(n, \mathbb{C})$ и, следовательно, пространство всех остальных комплексных структур принадлежат фактор-пространству $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$ размерности $4n^2 - 2n^2 = 2n^2$.

Пример

Для примера, рассмотрим линейное компактифицированное пространство \mathbb{R}^2 - тор \mathbb{T}^2 . Общий вид комплексной структуры на торе определяется следующим образом

$$J^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

откуда следует

$$J = \begin{pmatrix} \sqrt{-1-bc} & b \\ c & -\sqrt{-1-bc} \end{pmatrix}, \quad (10.11)$$

определенная двумя переменными b, c . Запишем данную комплексную структуру в каноническом базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = J e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1-bc} \\ c \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

любой вектор X в данном базисе будет иметь следующий вид

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \sqrt{-1 - bc} \\ x^2 c \end{pmatrix}, \quad (10.13)$$

и соответственно

$$z^1 = x^1 + y^1 \sqrt{-1 - bc} + icy^1 = x^1 + \tau y^1, \quad (10.14)$$

где $\tau = \sqrt{-1 - bc} + ic$. В частности, при $b = -c = 1$

$$z^1 = x^1 + iy^1. \quad (10.15)$$

При этом, параметр τ преобразуется следующим образом

$$\tau' = \frac{A\tau + B}{C\tau + D}, \quad (10.16)$$

в частности, преобразование $\tau' \rightarrow \frac{1}{\tau}$ называется t -дуальностью, $\tau' \rightarrow \tau + 1$ называется s -дуальностью.

Комплексная структура на эрмитовых многообразиях

Эрмитово многообразие есть комплексный аналог риманова многообразия. На данном пространстве определена метрика

$$g : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad (10.17)$$

которая согласована с комплексной структурой

$$g(JX, JY) = g(X, Y). \quad (10.18)$$

Также на данном пространстве определена, так называемая, эрмитова структура

$$H : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{C}, \quad (10.19)$$

которая удовлетворяет следующим свойствам

$$\begin{aligned} H(a_1 X_1 + a_2 X_2, Y) &= a_1 H(X_1, Y) + a_2 H(X_2, Y), \\ H(Y, X) &= \overline{H(X, Y)}, \\ H(JX, Y) &= iH(X, Y), \\ \forall X, X_1, X_2, Y \in T_p M \end{aligned} \quad (10.20)$$

где $J \in dT_pM$. Эрмитова структура определяет, так называемую эрмитову метрику

$$h(X, Y)|_p = H(X_p, Y_p), \quad (10.21)$$

данная метрика связана с обычной метрикой

$$g(X, Y) = \text{Re } h(X, Y). \quad (10.22)$$

Чтобы понять, как h , H , g могут быть выражены в координатной форме, определим канонический базис

$$\text{bas } TM = \{e_a, \tilde{e}_a\} = \{e_a, J e_a\}, \quad a = \overline{1, \dim_{\mathbb{C}} M} \quad (10.23)$$

любой вектор раскладывается по данному базису следующим образом

$$X = x^a e_a + y^a \tilde{e}_a, \quad (10.24)$$

которому можно поставить в соответствие комплексный вектор

$$Z^a = \frac{1}{2}(x^a + iy^a). \quad (10.25)$$

Тогда касательное пространство T_pM разбивается на голоморфную T_p^hM и анти-голоморфную $T_p^{ah}M$ части

$$T_pM = T_p^hM \oplus T_p^{ah}M, \quad (10.26)$$

T_p^hM и $T_p^{ah}M$ определяются, как собственные пространства оператора J с собственными значениями $\pm i$

$$\begin{aligned} T_p^hM &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z^a} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} - i \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}, \\ T_p^{ah}M &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^a} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} + i \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

При этом

$$X = z^a \partial_a + \bar{z}^a \bar{\partial}_a, \quad (10.28)$$

тогда

$$J(X) = iz^a \partial_a + i\bar{z}^a \bar{\partial}_a. \quad (10.29)$$

Утверждение: если вводится эрмитова структура, комплексная структура, которая согласована с метрикой, то g и h оказываются связанными друг с другом.

Для начала, поймем что согласованность метрики с комплексной структурой ограничивает метрику следующим образом

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g(\partial_a, \partial_b) = g(J(\partial_a), J(\partial_b)) = -g_{ab} \implies g_{ab} = 0, \\ g_{\bar{a}\bar{b}} &= g(\bar{\partial}_a, \bar{\partial}_b) = g(J(\bar{\partial}_a), J(\bar{\partial}_b)) = -g_{\bar{a}\bar{b}} \implies g_{\bar{a}\bar{b}} = 0, \end{aligned} \quad (10.30)$$

также, с учетом симметричности и действительности метрики, имеем

$$\begin{aligned} \overline{g(X, Y)} &= g(X, Y) \implies \overline{g_{ab}} = g_{ab}, \\ g(X, Y) &= g(Y, X) \implies g_{ab} = g_{ba}, \end{aligned} \quad (10.31)$$

следовательно, метрику можно записать в общем виде следующим образом

$$g = g_{\bar{a}\bar{b}}(dz^a \otimes dz^{\bar{b}} + dz^{\bar{b}} \otimes dz^a) = 2g_{\bar{a}\bar{b}}dz^a \otimes dz^{\bar{b}}. \quad (10.32)$$

Теперь, запишем эрмитову метрику в голоморфном базисе

$$\begin{aligned} h(\tilde{e}_a, e_b) &= h(Je_a, e_b) = ih(e_a, e_b) = ih_{\bar{a}\bar{b}}, \\ h(e_a, \tilde{e}_b) &= h(e_a, Je_b) = -ih(e_a, e_b) = -ih_{\bar{a}\bar{b}}, \\ h(\tilde{e}_a, \tilde{e}_b) &= ih(e_a, Je_b) = h(e_a, e_b) = h_{\bar{a}\bar{b}}, \end{aligned} \quad (10.33)$$

откуда видно, что все компоненты в голоморфном базисе выражаются только через одну ненулевую компоненту $h_{\bar{a}\bar{b}} = h(\partial_a, \partial_b)$. Также получаем

$$\begin{aligned} h(\bar{\partial}, \bar{\partial}) &= h(e + i\tilde{e}, e + i\tilde{e}) = \\ &= h(e, e) + h(e, i\tilde{e}) + h(i\tilde{e}, e) + h(i\tilde{e}, i\tilde{e}) = \\ &= 2h(e, e) - 2h(e, e) = 0, \end{aligned} \quad (10.34)$$

аналогично можно показать, что

$$h(\partial, \bar{\partial}) = 0. \quad (10.35)$$

Из данных соотношений следует, что

$$\begin{aligned} h(X, Y) &= h(X^a \partial_a + \bar{X}^{\bar{a}} \bar{\partial}_a, Y^b \partial_b + \bar{Y}^{\bar{b}} \bar{\partial}_b) = \\ &= X^a \bar{Y}^{\bar{b}} h(\partial_a, \partial_b) = h_{\bar{a}\bar{b}} X^a \bar{Y}^{\bar{b}}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

при этом отметим, что ввиду эрмитовости эрмитовой структуры

$$h_{\bar{a}\bar{b}} = \overline{h_{ab}}. \quad (10.37)$$

Действительная компонента данной метрики представляют собой метрику g

$$g = h + \bar{h} = h_{ab}(dz^a \otimes dz^{\bar{b}} + dz^{\bar{b}} \otimes dz^a) = 2h_{ab}dz^a \otimes dz^{\bar{b}}, \quad (10.38)$$

или в матричной форме

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\text{Re } h_{ab} & \frac{1}{2}\text{Im } h_{ab} \\ \frac{1}{2}\text{Im } h_{ab} & \frac{1}{2}\text{Re } h_{ab} \end{pmatrix}, \quad (10.39)$$

мнимая же часть эрмитовой метрики представляет собой 2-форму

$$\omega = \frac{i}{2}(h - \bar{h}) = ih_{ab}dz^a \wedge dz^{\bar{b}}. \quad (10.40)$$

Оказывается, что метрика g и ω оказываются связанными друг с другом

$$\omega(X, Y) = \frac{1}{2}g(JX, Y). \quad (10.41)$$

Кэлерово многообразие

Если мнимая часть эрмитовой метрики замкнута

$$d\omega = \partial_c h_{ab} dz^c \wedge dz^a \wedge dz^{\bar{b}} - \bar{\partial}_c h_{ab} \bar{d}\bar{z}^c \wedge dz^a \wedge dz^{\bar{b}} = 0, \quad (10.42)$$

то соответствующая метрика h называется кэлеровой. При этом, ввиду возникающих условий Коши-Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{ab}}{\partial z^c} &= \frac{\partial h_{cb}}{\partial z^a}, \\ \frac{\partial h_{ab}}{\partial \bar{z}^c} &= \frac{\partial h_{ac}}{\partial \bar{z}^b}, \end{aligned} \quad (10.43)$$

эрмитову метрику можно выразить через, так называемый, Кэлеров потенциал K

$$h_{ab} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^b}, \quad (10.44)$$

который при, так называемых, Кэлеровых преобразованиях

$$K(z, \bar{z}) \rightarrow K(z, \bar{z}) + f_1(z) + f_2(\bar{z}), \quad (10.45)$$

оставляет Кэлерову метрику инвариантной.

Лекция 11. Кэлерово многообразие

На прошлой лекции было введено понятие Кэлерова многообразия и соответствующей метрики на нем

$$h_{ab} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^b}, \quad (11.1)$$

где K - кэлеров потенциал.

Теперь, введем на данном многообразии связность следующим образом

$$\nabla_{X+iY}(U+iV) = \nabla_X U + i\nabla_Y U + \nabla_X V - \nabla_Y V, \quad (11.2)$$

где $X, Y, U, V \in T_p M$ на комплексном многообразии. Если вводить данную связность согласовано с комплексной структурой и метрикой, то возникнут следующие два условия

$$\begin{aligned} \nabla_X JY &= J\nabla_X Y = \nabla_{JX} Y, \\ \nabla_Z g(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \end{aligned} \quad (11.3)$$

то есть связность является связностью Леви-Чивита. Тогда соответствующие символы Кристоффеля в голоморфном базисе $\{e_a, e_{\bar{a}}\} \in T_p M$ определены следующим образом

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c + \Gamma_{ab}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}, \quad (11.4)$$

и аналогично для остальных комбинаций $\nabla_{e_a} e_{\bar{b}}, \nabla_{e_{\bar{a}}} e_b, \nabla_{e_{\bar{a}}} e_{\bar{b}}$. Откуда можно получить следующие условия

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_a} \partial_{\bar{b}} &= 0, \\ \nabla_{\partial_{\bar{a}}} \partial_b &= 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Из данных условий можно получить компоненты символов Кристоффеля

$$g(\nabla_{\partial_a} \partial_b, \partial_c) = [\nabla_{\partial_a} \partial_b = \Gamma_{ab}^c \partial_c + \Gamma_{ab}^{\bar{c}} \partial_{\bar{c}}] = \Gamma_{ab}^{\bar{c}} g_{c\bar{c}}, \quad (11.6)$$

с другой стороны ввиду согласованности с комплексной структурой

$$g(J\nabla_{\partial_a} \partial_b, J\partial_c) = g(\nabla_{J\partial_a} \partial_b, J\partial_c) = -g(\nabla_{\partial_a} \partial_b, \partial_c) = -\Gamma_{ab}^{\bar{c}} g_{c\bar{c}}, \quad (11.7)$$

получаем, что $\Gamma_{ab}^{\bar{c}} = 0$. Ненулевыми компонентами символов Кристоффеля являются

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= g^{c\bar{c}} \partial_a g_{b\bar{c}}, \\ \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} &= g^{c\bar{c}} \partial_{\bar{a}} g_{c\bar{b}}, \end{aligned} \quad (11.8)$$

откуда следует, что инфинитезимальный параллельный перенос голоморфного вектора вдоль замкнутой кривой есть голоморфный вектор

$$\nabla_X Y^b = X^a \Gamma_{ac}^b Y^c, \quad (11.9)$$

той же длины. То есть связность Леви-Чевита по индексам b, c является элементом группы голономии связности $Hol = U(n)$, как и следовало ожидать, так как эрмитова структура инвариантна относительно унитарных преобразований.

Пример

1. Плоское пространство \mathbb{C}^m . На данном многообразии эрмитова метрика задана следующим образом

$$\begin{aligned} h &= \sum_{a=1}^m dz^a d\bar{z}^a, \\ \omega &= \pm \sum_{a=1}^m dz^a \wedge d\bar{z}^a, \end{aligned} \quad (11.10)$$

при этом $d\omega = 0$. То есть комплексное пространство является кэлеровым.

2. Одномерное риманово многообразие также по построению является кэлеровым.

3. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ - комплексное проективное пространство является кэлеровым многообразием. В данном пространстве две точки эквивалентны если отличаются домножением на комплексное число $\zeta \sim \lambda \zeta$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Выберем координаты на \mathbb{C}^{n+1} следующим образом $\zeta = \{\zeta^1, \dots, \zeta^{n+1}\}$, а координаты на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ тогда будут иметь вид $z^A = \left\{ \frac{\zeta^A}{\zeta^j} \right\}_{A \neq j}$ - однородные координаты (покрывают все многообразие кроме точке $\zeta^j = 0$).

Так определенные координаты позволяют ввести кэлерову метрику на проективном пространстве. Для этого зафиксируем для простоты $j = n + 1$, тогда обозначим координаты z^a с $a = \overline{1, n}$, тогда данная метрика и соответствующая кэлерова форма будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} (\delta_{ab}(1 + |z|^2) - z_a \bar{z}_b), \\ \omega &= -\frac{i}{(1 + |z|^2)^2} z_a \bar{z}_b dz^a \wedge d\bar{z}^b, \end{aligned} \quad (11.11)$$

где $|z|^2 = \sum_a z^a \bar{z}^a$. Кэлерова метрика для такого многообразия называется метрикой Фубини-Штуди. Легко показать, что $d\omega = 0$. Таким образом, проективное комплексное пространство является кэлеровым многообразием.

Многообразие Калаби-Яу

Многообразие Калаби-Яу CY_n является компактным Кэлеровым многообразием комплексной размерности n с заданной на нем $(n, 0)$ голоморфной, замкнутой формой Ω

$$\Omega = \frac{1}{n!} \Omega_{a_1 \dots a_n} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_n}, \quad (11.12)$$

то есть не содержащей $\bar{d}z^a$ и соответственно $\bar{\partial}\Omega = 0$ (следствие замкнутости $d\Omega = 0$).

Далее, рассмотрим двумерную (одномерную комплексную) риманову поверхность CY_1 , определенную в $\mathbb{C}P^2$

$$y^2 = 4x^3 - ax - b, \quad (11.13)$$

с локальными координатами $y = z_2/z_0$ и $x = z_1/z_0$ в окрестности $V_0 = U_0/\sim$ на $\mathbb{C}P^2$ ($U_0 = \{z \in \mathbb{C}^3, z_0 \neq 0\}$). Соответствующая $(1,0)$ -форма может быть определена следующим образом

$$\Omega = \frac{dx}{2y(x)}, \quad (11.14)$$

оказывается, что данная форма является замкнутой $d\Omega = 0$. Данная кривая определяет тор поскольку функции

$$x = P(z), \quad y = P'(z), \quad (11.15)$$

где $P(z)$ - функция Вейрштрасса, являются решениями уравнения (11.13). Как известно, функция Вейрштрасса параметризует координаты на торе ввиду свойства периодичности данной функции. Параметры a и b определяют период данного тора.

Пусть вложение поверхности Калаби-Яу в данное многообразие задано следующим образом

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0, \quad (11.16)$$

или если перейти к локальным координатам $y = z_2/z_0$ и $x = z_1/z_0$ ($z_0 \neq 0$), данная поверхность будет задаваться следующей функцией

$$f(x, y) = 1 + x^n + y^n = 0, \quad (11.17)$$

тогда определим соответствующую $(1,0)$ -форму. Для этого, необходимо для начала определить понятие вычета от формы.

Пусть на многообразии M комплексной размерности $\dim M = n + 1$ с координатами $z = \{z^0, z^1, \dots, z^n\}$ определена голоморфная поверхность K комплексной размерности

$\dim K = n$, заданная уравнением $f(z) = 0$. На данном многообразии можно определить форму следующего вида

$$\omega = \frac{df}{f} \wedge r + \theta, \quad (11.18)$$

где $r|_K = \text{Res } \omega$ - вычет формы ω . Тогда

$$\begin{aligned} f\omega &= g dz^0 \wedge dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \frac{g}{\frac{\partial f}{\partial z^0}} \frac{\partial f}{\partial z^0} \wedge dz^0 \wedge dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \implies \\ \omega &= \frac{g}{\frac{\partial f}{\partial z^0}} \frac{df}{f} \wedge dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \frac{df}{f} \wedge r, \end{aligned} \quad (11.19)$$

где

$$r = \frac{g}{\frac{\partial f}{\partial z^0}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n, \quad (11.20)$$

тогда, в частности, для $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ имеем

$$\Omega = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad (11.21)$$

поэтому в случае (11.13) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad (11.22)$$

и получаем форму (11.14).

В случае (11.17) имеем

$$\Omega_0 = \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{1}{n} \frac{dx}{y^{n-1}}, \quad (11.23)$$

если теперь перейти к локальным координатам $\tilde{x} = z_0/z_1$ и $\tilde{y} = z_2/z_1$ в окрестности $V_1 = U_1/\sim$ на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ($U_1 = \{z \in \mathbb{C}^3, z_1 \neq 0\}$), связанные с локальными координатами в окрестности $V_0 = U_0/\sim$ следующим образом $x = \tilde{x}^{-1}, y = \tilde{y}/\tilde{x}$. Тогда соответствующая (1,0)-форма в данных координатах будет иметь следующий вид

$$\Omega_1 = -\frac{1}{n} \frac{\tilde{x}^{n-3} d\tilde{x}}{\tilde{y}^{n-1}}, \quad (11.24)$$

теперь если потребовать глобальной определенности (1,0)-формы, то необходимо, чтобы на пересечении $V_0 \cap V_1$ выполнялось равенство

$$\Omega_0 = \frac{1}{n} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{y}^{n-1}} = -\frac{1}{n} \frac{\tilde{x}^{n-3} d\tilde{x}}{\tilde{y}^{n-1}} = \Omega_1, \quad (11.25)$$

откуда следует что глобальная форма определена при $n = 3$ и поэтому имеет вид (11.13). Соответственно, многообразие Калаби-Яу определено, как гиперповерхность, заданная полиномом третьего порядка

$$F = \sum a_{ijk} z^i z^j z^k. \quad (11.26)$$

Более того, утверждается, что многообразие Калаби-Яу CY_n , определенное в $\mathbb{C}P^{n+1}$ задается полиномом степени $n + 2$.

Данная глобально определенная форма должна быть согласована со связностью

$$\nabla \Omega = 0, \quad (11.27)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{n!} \varphi(z) \varepsilon_{a_1 \dots a_n} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_n}, \quad (11.28)$$

откуда следует, что группа голономии связности становится $SU(n)$.

Таким образом, появляется второе определение многообразия Калаби-Яу, как многообразия с группой голономии связности $SU(n)$ (у кэллера многообразия группа голономии $U(n)$).

Также многообразии Калаби-Яу является Ричи-плоским

$$R_{mn}(g) = 0. \quad (11.29)$$

Наконец, на многообразии Калаби-Яу существует такой спинор ψ , что

$$\nabla \psi = 0. \quad (11.30)$$



ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ