МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ-5. СЕМИНАРЫ

ГУГНИН
ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КАРПАЧЕВА ДЕНИСА ОЛЕГОВИЧА

Оглавление

Семинар 1. Общая топология CW-комплексов

Повторение

Вспомним основные определения данного курса.

Определение. *Метрика это функция – d, причём выполнены аксиомы:* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

1. $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Определение. *Метрическое пространство - (X, d)*

Определение. *Открытым шаром с центром в точке a радиуса R назовём множество*
$\forall R > 0 \, \forall a \in X : \; B_R(a) = \{x \in X \,|\, d(x, a) < R\}$

Определение. *Набор множеств* τ *– топология, причём выполнены аксиомы:*

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. $\forall U_\alpha(\textit{откр.}) \subset X \; (\alpha \in \Lambda) \Rightarrow X \supset U = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha - \textit{открыто}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall U_1, ..., U_n - \textit{открыты}: \; X \supset U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i - \textit{открыто}$

Определение. *Топологическое пространство - (X,* τ*)*

Определение. *На метрическом пространстве* (X, d) *имеется выделенная топология* τ_d *– метрическая топология*

Определение. $U \subset X$ *– открыто, если:*
$\forall x_0 \in U \, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset U$

Утверждение. *Определение выше согласуется с определением открытого множества*

Вопрос. *Возможно ли такое, что два метрических пространства (X, d) и (X, d') с одинаковым множеством, но разной метрикой имели одинаковую топологию?*

Возможно, причём различными способами. Например, можно растянуть скаляр в метрику. Также положительный ответ на данный вопрос можно дать если вспомнить, что борелевские нормы эквивалентны.

Основные аксиомы

Теорема (Аксиома отделимости Хаусдорфа T_2).
$\forall\, x, y \in X (x \neq y)\, \exists U : x \in U \subset X\, \exists V : y \in V \subset X :$
U, V *– открыты и* $U \cap V = \varnothing$

Теорема (Аксиома регулярного топологического пространства T_3 (в слабом смысле)).
$\forall\, x_0 \in X\, \forall\, F \supset X : x_0 \notin F$ *и* F *– замкнуто*
$\exists U : x_0 \in U \subset X\, \exists V : F \subset V \subset X$
$U \cap V = \varnothing$ *и* U, V *– открыты*

Теорема (Аксиома регулярного топологического пространства T_3 (в сильном смысле)).
Подразумевается одновременное выполнение T_3 *и* T_1.

Теорема (Аксиома нормальности топологического пространства T_3 (в слабом смысле)).
$\forall\, A, B \subset X, (A, B$ *– замкнуты*$) : A \cap B = \varnothing$
$\exists A \subset U \subset X\, \exists B \subset V \subset X :$
$U \cap V = \varnothing$ *и* U, V *– открыты*

Теорема (Аксиома нормальности топологического пространства T_4 (в сильном смысле)).
Подразумевается одновременное выполнение T_4 *и* T_1.

Вопрос. *Верно ли, что метрическое пространство нормально?*

Да верно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть в замкнутом множестве A множество всех шаров для каждой точки x с радиусом $r < d(x, B)$. В качестве U рассмотрим объединение такой системы шаров. Аналогично можем построить V для множества B. Утверждение $U \cap V = \varnothing$ доказывается применением неравенства треугольника.

Расстояние от произвольной точки x до замкнутого множества, её не содержащего $B \not\ni x$, будет положительно. Так как если бы $\inf d(x, B) = 0$, то $\exists\, x_n \in B$, сходящаяся к данной точке, следовательно, x – предельная, следовательно $x \in B$, что противоречит условию. $\square$

Пример. *Два замкнутых не пустых не пересекающихся множества на плоскости $\mathbb{R}^2$, между которыми нулевое расстояние.*

В качестве двух таких множеств достаточно рассмотреть гиперболу $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = 1/x\}$ и прямую $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = 0\}$.

Прямая сумма и прямое произведение

Определение. *Пусть имеется набор топологических пространств (X_α, α), $\alpha \in \Lambda$. Назовём дизъюнктным объединением (прямой суммой) топологическое пространство с множеством $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigsqcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Топологию введём следующим образом:*

$W \subset \bigsqcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *– открыто* $\Leftrightarrow W \cap X_\alpha \subset_{op} X_\alpha \;\forall\, \alpha \in \Lambda$.

Определение. *Пусть имеется набор топологических пространств (X_i, τ_i), $i \in \mathbb{N}$. Назовём дизъюнктным пересечением (прямым произведением) топологическое пространство с множеством $\prod\limits_{i=1}^{n} X_\alpha = X$. Тихоновскую топологию введём следующим образом:*

$X \supset U$ *– открыто* $\Leftrightarrow \forall\, w = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$:
$\exists\, x_1^0 \in U_1 \subset_{op} X_1, \ldots, \exists\, x_n^0 \in U_n \subset_{op} X_n$
$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset U$

В случае объединения счётного (континуального аналогично) количества множеств $\prod\limits_{\alpha=1}^{\infty} X_\alpha = X$, топологию вводим следующим образом:

$X \supset U$ *– открыто* $\Leftrightarrow \forall\, w = (x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots)\; \exists\, N \in \mathbb{N}$:
$\exists\, x_1^0 \in U_1 \subset_{op} X_1, \ldots, \exists\, x_N^0 \in U_N \subset_{op} X_N$
$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \cdots \subset U$

Рассмотрим категориальные свойства прямого произведения связанные с проектированием. Если, по прежнему обозначить $X = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, то справедливо следующее: $X \xrightarrow{pr_\alpha} X_\alpha$ – непрерывно, а топология τ такова, что она является самой грубой топологией при которой все проекции X_α - непрерывны.

Домашняя задача 1. *Доказать, что категориальное свойство введённое для прямого произведения эквивалентно Тихоновской топологии.*

Вопрос. *Является ли прямое произведение X хаусдорфовым, если все X_α – хаусдорфовы?*

Да является.

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть введённое определение. Рассмотрим $\forall\, x, y \in X : x \neq y$. Переходя по одной проекции, взятые точки также будут 'падать' также в различные точки. Рассмотрим малые окрестности получившихся проекций и спроектируем их обратно 'наверх'. Умножая U, V на все остальные X_α, получим открытые множества, содержащие исходные точки и не пересекающиеся. Последнее утверждение соответствует определению хаусдорфово множества. □

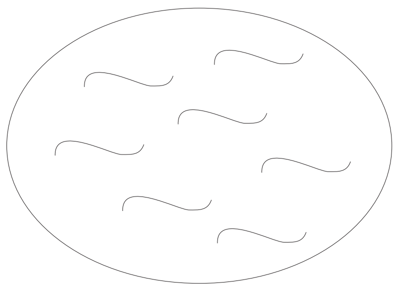
Утверждение. *Прямое произведение компактных множеств также является компактом (следует из **теоремы Тихонова**).*

Для конечного числа множеств, утверждение выше доказывается легко. Однако в случае бесконечного числа членов необходимо использовать **лемму Цорна** и **лемму Александре** об открытой базе.

Фактор-топология

Пусть имеется некое топологическое пространство (см. Рис. 1) с отношением эквивалентности $\sim$.

Тогда существует фактор-множество $X/\sim$ и каноническая проекция на фактор-множество: $X \xrightarrow{\pi} X/\sim$.



(X, τ)

Рис. 1: Топологическое пространство с введённым отношением эквивалентности.

Топологию введём следующим способом:
U – открыто $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset X$ – открыто.

Определение. *Пусть имеем сюръективное "на"и непрерывное отображение (см. Рис. 2): $f : X \to Y$. Назовём это отображение факторным, если:*
$\overline{f} : X/\sim_f \to Y$ *– биекция и гомеоморфизм.*

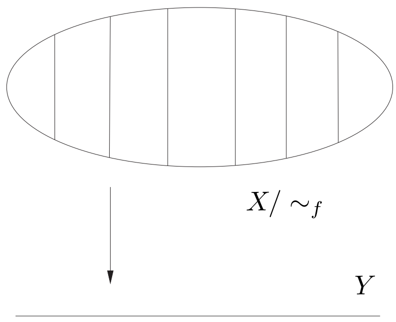


Рис. 2: X над Y образует слои (отношения эквивалентности).
Фактор-топология на них гомеоморфна Y

Дадим ещё одно определение фактор-отображению.

Определение. *Непрерывная сюръекция (см. Рис. 3) $f : X \to Y$ называется фактор-отображением, если выполнено следующее:*
$\forall\, Z\, \forall\, g : Y \to Z$ (g *— необязательно непрерывно*) :
g *— непрерывно* $\Leftrightarrow g \circ f : X \to Z$ *— непрерывно.*

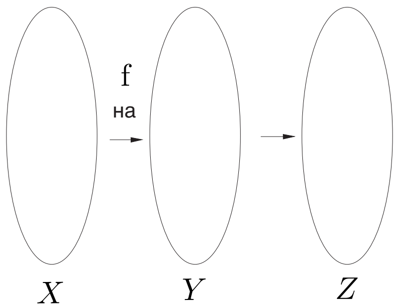


Рис. 3: f – непрерывно переводит X в Y. Произвольное отображение $Y \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна его композиция с f.

Домашняя задача 2. *Доказать, что введённые определения эквивалентны.*

Пример. *Накрытие является факторным отображением, так как является открытым отображением (см. ниже).*

Определение. $f : X \to Y$ *– открытое отображение, если:*
$\forall U \subset_{op} X \Rightarrow f(U) \subset_{op} Y$

Аналогично вводится понятие замкнутого отображения. Помимо открытых и замкнутых отображений существует класс открыто-замкнутых отображений.

Домашняя задача 3. *1. $\forall$ сюръективное + открытое – факторное отображение.*

2. $\forall$ сюръективное + замкнутое – факторное отображение.

Домашняя задача 4. *Найти факторное отображение $f : X \to Y(X, Y \subset \mathbb{R}^2)$ между метрическими пространствами, которое не является ни открытым ни замкнутым.*

Компактность и хаусдорфовость $(K + T_2)$

Теорема. *$f : X(K) \to Y(T_2)$ – непрерывна и биективна $\Rightarrow$ f – гомеоморфизм*

Доказательство. Для доказательства гомеоморфизма необходимо проверить следующее: если f непрерывная биекция, то прообраз открытого открыт, а прообраз замкнутого замкнут. Осталось доказать, что образ замкнутого замкнут. Замкнутый в компакте – компакт, а образ компакта в хаусдорфовом замкнут $\Rightarrow$ образ замкнутого замкнут

(См. Лемму ниже). □

Лемма. *1. Образ компакта является компактом.*

2. X – компакт, $A \subset X$ – замкнуто $\Rightarrow$ A – компакт.

3. Y – хаусдорфово, $K \subset Y$ – компактно $\Rightarrow$ K – замкнуто.

Теорема. $f : X(K) \overset{\text{на}}{\to} Y(T_2), X \overset{\pi}{\to} X/\sim_f$
$\overline{f} : X/\sim_f \to Y$ – биективно и непрерывно $\Rightarrow$ гомеоморфизм.

Пример. *Допустим, что у нас есть произведение окружности на отрезок (цилиндр) – компакт (см. Рис. 4). Пусть мы "стянули"верхнюю окружность в точку и получили конус. Данное отображение является непрерывным, достаточно ввести всеобъемлющее пространство $\mathbb{R}^3$ и написать явную полиноминальную формулу. Конус - хаусдорфов, так как лежит в $\mathbb{R}^3$. Цилиндр – фактор-пространство компакта, следовательно компакт.*

По данной теореме, конус, который определяется как фактор-пространство совпадает с геометрическим конусом.

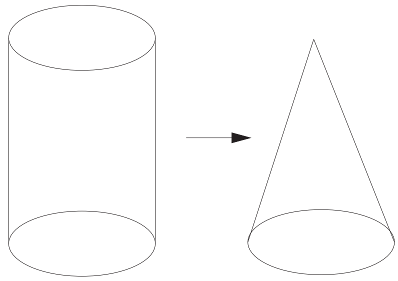


Рис. 4: "Стягивание"цилиндра в конус.

Домашняя задача 5. *Предъявить в координатах непрерывное гомеоморфное отображение f (см. Рис. 5), тем самым докажем:*

$\underset{\text{алгебр.}}{CK} \approx \underset{\text{геом.}}{CK}$

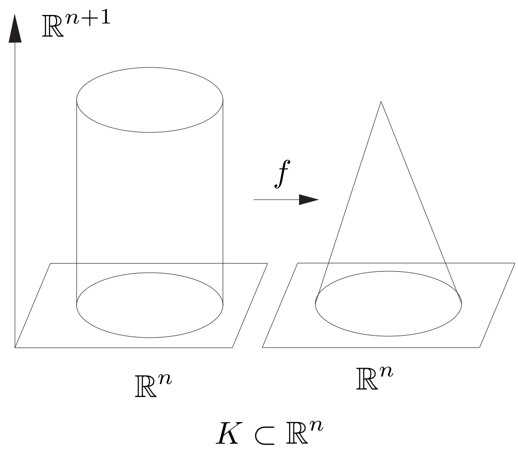


Рис. 5: Предъявить явный гомеоморфизм в координатах.

Домашняя задача 6. *Отказавшись от компактности в теореме мы не сможем гарантировать её выполнение. Доказать, что $C\mathbb{R}$ – не метризуемо.*

Домашняя задача 7. *Доказать, что из компактности и хаусдорфовости следует нормальность ($K + T_2 \Rightarrow T_4$).*

CW-комплексы

Лемма.

$$\overline{e^n_\alpha} = \Phi_\alpha(D^n), D^n = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}, e^n_\alpha \approx \mathbb{R}^n$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\overline{e^n_\alpha} \subset \Phi_\alpha(D^n)$:

D^n – компакт $\Rightarrow \Phi_\alpha(D^n)$ – компакт, компакт лежащий в хаусдорфовом замкнут $\Rightarrow e_\alpha^n \subset \Phi_\alpha(D^n) \Rightarrow \overline{e_\alpha^n} \subset \Phi_\alpha(D^n)$.

Теперь докажем, что $\overline{e_\alpha^n} \subset \Phi_\alpha(D^n)$:

Для внутренних точек утверждение тривиально. Для граничных точек это также верно, так как достаточно рассмотреть последовательность сходящихся внутренних точек к граничной, которые непрерывным отображением Φ_α также перейдут в сходящуюся к граничной (см. Рис. 6). □

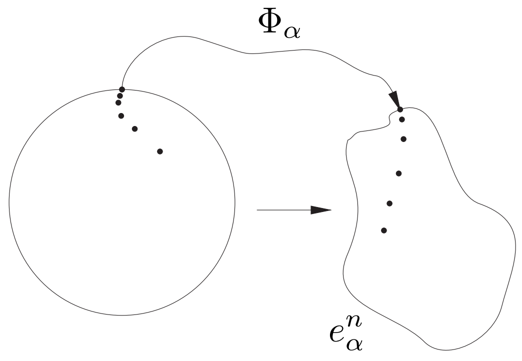


Рис. 6: Иллюстрация к доказательству при $n = 2$.

Определение. *X – CW-комплекс, если X – T_2*

$X = \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigsqcup\limits_{\alpha} e_\alpha^n$, *где* $e_\alpha^n \approx \mathbb{R}^n$

$\forall\, \alpha\, \exists$ *характеристическое отображение* $\Phi_\alpha : D^n \to X$,

где $D^n = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$, *причём выполнено:*

1. $\Phi_\alpha : intD^n \approx e_\alpha^n$
2. $\Phi_\alpha(\partial D^n) \subset \bigsqcup \bigsqcup\limits_{m \leqslant n} e_n^m$

Также должно быть выполнено две аксиомы:

C (англ. Closure finitness):

$$\overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n = \Phi_\alpha(\partial D^n) \subset \bigsqcup \bigsqcup_{m \leqslant n} e_n^m - \textit{finetness}$$

W (англ. Weak topology):

$$A \subset X - \textit{замкнуто} \Leftrightarrow A \cap \overline{e_\alpha^n} \subset X - \textit{замкнуто} \Leftrightarrow A \cap \overline{e_\alpha^n} \subset \overline{e_\alpha^n} - \textit{замкнуто}$$

Контрпример. *Нарушение C-аксиомы:*

Рассмотрим открытый двумерный диск на плоскости e_2 и каждая точка границы - нуль-мерная клетка. Аксиома не выполняется, так как количество точек - континуум.

Контрпример. *Нарушение W-аксиомы:*

Рассмотрим следующее пространство в двумерной плоскости: единичный отрезок с отрезком, примыкающем к нему под углом $\frac{\pi}{4}$, отрезок, примыкающий к ним под углом $\frac{\pi}{8}$ и так далее без учёта горизонтального (предельного) отрезка (см. Рис. 7). Полученное множество является одномерным комплексом, разрезанный на нуль-мерные (граничные точки) и одномерные (интервалы) клетки.

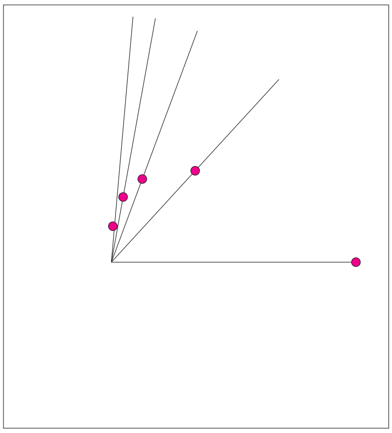


Рис. 7: Иллюстрация к контрпримеру нарушения W-аксиомы.

Рассмотрим на данном множестве подмножество, которое устроено следующим образом: от первого (горизонтального отрезка) берётся точка (изображена на Рис.7 красным) на расстоянии 1 от центра, от второго (под углом $\frac{\pi}{4}$) берётся точка на его середине половина, от третьего точка на расстоянии $\frac{1}{3}$ и так далее...

Определение. *Конструкция: $X_\tau - T_2\{K \subset X | K - \text{компактны}\}$. Введём компактно-порождённую топологию τ_C:*

$$A \subset X (A \in \tau_C) \Leftrightarrow \forall K \subset X : A \cap X - \text{замкнуто в } X \text{ или } K.$$

Домашняя задача 8.

1. *Доказать, что τ_C действительно является топологией по определению.*

2. *Доказать, что $\tau_C \geqslant \tau$.*

3. *Доказать, что* $K \subset X$ *(компакт в* τ*)* $\Leftrightarrow$ K *– компакт в* τ_C.

4. *Доказать, что* $(\tau_C)_C = \tau_C$.

Определение. τ *– компактно-порождённая топология, если* $\tau = \tau_C$.

Семинар 2. Общая топология CW-комплексов (продолжение)

Теоремы посвящённые CW-комплексам

Определение. (X, A) – *CW-пара, если A состоит из клеток и* $A = \overline{A}$.

Задача. *Пусть имеется клеточное пространство X, рассмотрим $B \subset X$ такое, что:*

$$\forall\, e_\alpha^n : B \cap e_\alpha^n = \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ * \end{array} \right.$$

Необходимо доказать, что:

1. *Доказать, что B – замкнутое.*

2. *Доказать, что B – дискретное топологическое пространство.*

Доказательство. Начнём доказывать первое утверждение.

$$\forall\, e_\alpha^n : B \cap e_\alpha^n = \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ * \end{array} \right. \Rightarrow B \cap \overline{e_\alpha^n} = \text{конечное число точек.}$$

Конечное число точек – замкнутое множество в хаусдорфовом X, следовательно, по аксиоме W, B – замкнутое.

Рассмотрим доказательство второго пункта:

Рассмотрим множество $B \setminus B_0$, где B_0 – произвольная точка B. Данное множество удовлетворяет тем же условиям, что и B, следовательно является замкнутым по доказанному выше. Его пересечение с самим собой также является замкнутым, значит дополнение к нему – открытое, следовательно, любая точка B_0 в этой топологии будет открытой и B – дискретное подмножество. □

Теорема. *Пусть X– CW-комплекс, $K \subset X$– компакт. Необходимо доказать, что:*

$$\exists\, \textit{конечное число клеток} - e_{\alpha_1}^{n_1} \dots e_{\alpha_k}^{n_k} : K \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} e_{\alpha_i}^{n_i}$$

Доказательство. Доказательство рассмотрим от противного: пусть компакт K задевает бесконечное число клеток. Рассмотрим по одной точке из каждой клетки, лежащей в данном компакте. Множество, состоящее из рассмотренных точек – $B \subset K$ является замкнутым в X и, как замкнутое подмножество компакта X, также является компактом. Дискретный компакт может состоять только из конечного числа точек – получили противоречие с условием теоремы. □

Теорема. *Пусть X – CW-комплекс, $K \subset X$ – компакт. Необходимо доказать, что:*

$$\exists\, A \subset X - \textit{конечный CW-подкомплекс} : K \subset A$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы известно, что $K \subset \bigsqcup_{i=1}^{k} e_{\alpha_i}^{n_i}$. Также заметим:

$$\overline{e_\alpha^n} = e_\alpha^n \cup \Phi_\alpha(\partial D^n) \subset e_\alpha^n \sqcup e_\beta^m \ (m < n).$$

И при добавлении конечного числа клеток можем получить не замкнутое множество. Необходимо более тонкое рассуждение с использованием аксиом C и W.

Произведём следующую итеративную процедуру:

1. Замыкаем каждую клетку из конечного числа клеток.
2. Замечаем, что $\overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n \subset$ конечное число клеток меньшей размерности.
3. Образуем новое множество из старых клеток и рассмотренных новых, получая конечное множество.
4. Повторяем с полученным множеством итеративную процедуру до тех пор, пока оно не перестанет изменятся (в пункте 2. размерность клеток понижается)

   Окончательно дойдём до конечного числа клеток, таких, что замыкание каждой из клеток содержится в их объединении, то есть, получим конечный подкомплекс.

□

Решение домашней задачи о неметризуемости конуса

Задача. *Разберём домашнюю задачу о том, что конус $C\mathbb{R}$ неметризуем.*

Доказательство. Исходную $\mathbb{R}$ мы стянули в точку x_0 (см. Рис. 1). Предположим противное, что полученный конус метризуем. Рассмотрим шары $B_{1/n}(x_0)$ в исходной метрике d и прообразы шаров. Хотим рассмотреть такое открытое множество U, содержащее x_0 и не содержащее ни один из введённых шаров целиком:
$\forall n \geqslant 1 : U \not\supset B_{1/n}(x_0)$. При построении такого множества получим противоречие с тем, что конус метризуем.

Построим это множество на прообразе конуса следующим индуктивным образом. Левее 0 мы положим его равным прообразу шара $B_1^{-1}(x_0)$ (см. Рис. 1), а внутри $[0, 1]$ мы возьмём область U_1 меньшую, чем прообраз шара $B_1^{-1}(x_0)$ в этом интервале.

Аналогичное делаем внутри $[1, 2]$ область U_2 меньшую, чем прообраз шара $B^{-1}_{1/2}(x_0)$. Также поступим и для всех остальных шаров. Получили множество, удовлетворяющее нашим требованием и приводящее к противоречию. U открыто по определению фактор-топологии, так как её прообраз U^{-1} открыт. Следовательно, конус неметризуем. $\square$

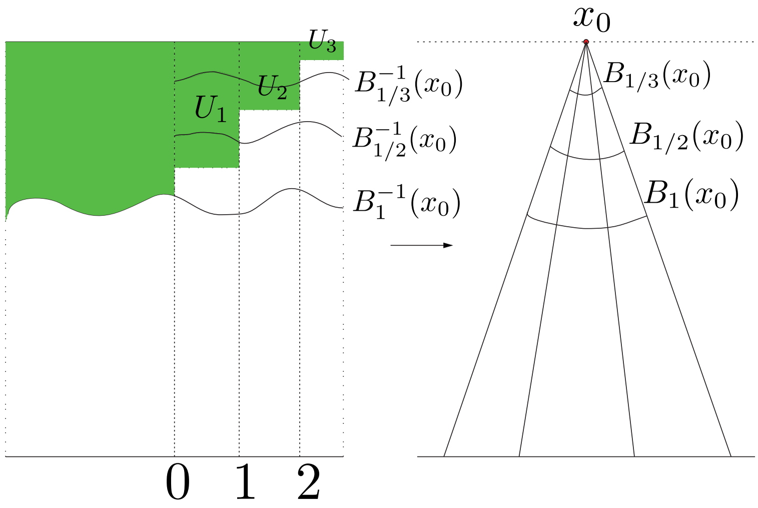


Рис. 1: Зелёным выделена область построенного множества U.

Пространства с выделенной точкой

Определение. *Прямая сумма $\oplus$ пространств с отмеченной точкой (X, x_0) вводится следующим образом:*

$$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (X_\alpha, x_\alpha^0) = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Определение. *Прямое произведение для двух пространств с отмеченной точкой (X, x_0) и (Y, y_0) введём, следующим образом (smash product):*

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0)$$

Берётся прямое произведение $X \times Y$ и берётся фактор, стягивая в одну точку (x_0, y_0), при этом (x_0, y_0) является новой отмеченной точкой для полученного произведения.

Утверждение. *Счётный букет окружностей $\bigvee\limits_{1}^{\infty} S^1$ – не метризуем.*

Доказательство. Докажем от противного: допустим, что полученный букет метризуем. Тогда, существует метрика на этом букете, которая задаёт топологию. На каждой S^1_n окружности выберем точку a_n, находящуюся от x_0 на расстоянии $d(x_0, a_n) < 1/n \times 2\pi$. Тогда, последовательность точек a_n сходится к x_0 в этом метрическом пространстве.

С одной стороны, получаем, что полученное множество не является замкнутым, так как имеется предельная точка. С другой стороны, по аксиоме W оно замкнуто. Получили противоречие, значит букет окружностей не метризуем. □

Домашняя задача 1. *Букет любого набора CW-комплексов является CW-комплексом.*

Замечание. *Не известно существуют ли CW-структуры для любого четырёхмерного многообразия. Для размерности 5 и выше существуют всегда.*

Домашняя задача 2. *Также имеем букет* $\bigvee\limits_1^{\infty} S^1$ *- не метризуемый клеточный комплекс. Доказать, что:*

$$\bigvee_1^{\infty} S^1 \sim Y,$$

где Y – счётный метризуемый CW-комплекс.

Определение. *Сепарабельное пространство - счётное всюду плотное множество.*

Вопрос. *Когда CW-комплекс X является сепарабельным в данном топологическом пространстве?*

Одна клетка является сепарабельной. Если клеток счётное число, то рассмотрим объединение счётных всюду плотных множеств в каждой клетке и получим всюду плотное множество на X.

Таким образом X счётный (конечный) CW-комплекс $\Rightarrow X$ – сепарабельный.

Домашняя задача 3. *Доказать, что если X – сепарабельный $\Rightarrow X$ счётный (конечный)*
CW-комплекс .

Домашняя задача 4. *Пусть имеется произвольная клеточная пара (X, A). Доказать, что пространство с фактор-топологией X/A – CW-комплекс.*

(Начать доказательство с хаусдорфовости – T_2, T_1 – очевидно).

Теорема.

$$(X, A_\alpha) - \textit{клеточная пара}, \alpha \in \Lambda.$$

1.

$$A = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \Rightarrow (X, A) - \textit{клеточная пара.}$$

2.

$$B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \Rightarrow (X, B) - \textit{клеточная пара.}$$

Доказательство. Начнём доказывать первую часть теоремы. Полученное множество A замкнуто, как пересечение замкнутых A_α. Для произвольной клетки из X верно следующее: либо она принадлежит одновременно всем A_α и она остаётся в исходном A, либо найдётся A_α без данной клетки, но тогда и в A она не содержится. Получаем, что $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ есть объединение какого-то набора открытых клеток, что и требовалось доказать.

Перейдём к доказательству второй части. Рассмотрим произвольную $e^n_\omega \subset B$. Заметим, что $\overline{e^n_\omega}$ является компактом и $\overline{e^n_\omega} \subset \bigsqcup\limits_{finit}\bigsqcup e^m_*$. Для того, чтобы доказать замкнутость B, достаточно показать, что $\overline{e^n_\omega} \cap \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda}(\overline{e^n_\omega} \cap A_\alpha)$ является замкнутым.

Так как $\overline{e^n_\omega}$ является компактом, то справедливо, по доказанному выше: $\overline{e^n_\omega} \subset E \subset X$, где E – конечный CW-подкомплекс. Заметим, что $\overline{e^n_\omega} \cap A_\alpha \subset (E \cap A_\alpha) = E_\alpha$ – клеточный подкомплекс. Остальная часть доказательства предоставляется в качестве упражнения. □

Задача. *Рассмотрим два CW-комплекса X, Y. Полагаем $X = \bigsqcup\bigsqcup e^n_\alpha$, $Y = \bigsqcup\bigsqcup f^m_\beta$, $\Phi_\alpha : D^n \to X$, $\Phi_\beta : D^m \to Y$.*

$$X \times Y : \Phi_\alpha \times \Phi_\beta : D^n \times D^m \approx D^{n+m} \to X \times Y$$

Заметим, что C аксиома проверяется элементарно, однако с аксиомой W возникают проблемы. Для выполнения W необходимо исходное пространство $X \times Y$ пополнить по всем компактам $(X \times Y)_C$.

Доказательство. Покажем, что верно утверждение: $F \subset (X \times Y)_C$ ($F-$замкнуто) $\Leftrightarrow$ $F \cap W$ ($W \subset X \times Y$ – компакт). Имеем произвольный компакт $W \subset X \times Y$, проецирующийся в компакт $L \subset X$ и в компакт $M \subset Y$. Но L, как компакт в X, лежал в некотором конечном CW-комплексе $A \subset X$, также, как и B лежал в некотором конечном CW-комплексе $B \subset Y$. Следовательно, $W \subset A \times B$ - конечный (A, B – конечные) CW-комплекс.

Допустим, что мы рассмотрели множество $F \subset (X \times Y)_C$ такое, что в пересечении с каждым $\overline{e^n_\alpha} \times \overline{f^m_\beta}$ даёт компакт, тогда в пересечении с $A \times B$ тоже будет давать компакт, так как $A \times B$ покрывается конечным набором множеств вида $\overline{e^n_\alpha} \times \overline{f^m_\beta}$. Однако любой компакт $W \subset A \times B \Rightarrow F \cap W$ – замкнуто (компактно). $\square$

Вопрос. *Когда имеется совпадение* $(X \times Y)_C = X \times Y$*?*

На этот счёт имеем две следующие домашние задачи:

Домашняя задача 5. X *– конечный CW-комплекс,* Y *–* $\forall$ *CW-комплекс* $\Rightarrow$ $(X \times Y)_C = X \times Y$.

Домашняя задача 6. X, Y *– счётные CW-комплексы* $\Rightarrow (X \times Y)_C = X \times Y$.

Семинар 3. Общая топология CW-комплексов (продолжение)

Пополнение топологии по компакту

Теорема. *Пусть имеется хаусдорфово пространство X с топологией τ. Сделаем пополнение этой топологии по всем компактам:*

$$\overline{\tau_C} = \{F \subset X - \textit{замкнуто в } \tau_C, \textit{если } \forall\, K \subset X - \textit{компакт} : F \cap K - \textit{замкнуто}\}.$$

Замечание.

$$F \cap K - \textit{замкнуто} \Leftrightarrow F \cap K - \textit{компакт}.$$

Имеем следующие свойства:

-1. τ_C *–* T_2*-топология, так как* $\tau_C \geqslant \tau$.

0. $L \subset X$ *– компакт в* $\tau \Rightarrow \tau|_L = \tau_C|_L \Rightarrow L$ *– тоже компакт в* τ_C.

Доказательство. Докажем первую импликацию. $L \subset X$ – компакт в $\tau \Rightarrow \tau|_L \leqslant \tau_C$ – очевидно.

Рассмотрим произвольное $B \subset L$ замкнутое в τ_C, по определению замкнутого подмножества:

$$\exists F - \text{замкнутое в } \tau_C : B = L \cap F \Rightarrow B - \text{компакт и замкнутое в } L.$$

□

1. $W \subset X$ *– компакт в* $\tau_C \Rightarrow W$ *– компакт в* τ.

Доказательство. W – компакт в τ_C, и из любого покрытия большего количества множества существует конечное покрытие. Из любого покрытия меньшего количества множеств тоже существует конечное покрытие, откуда и следует, что W – компакт в τ. □

2. $(\tau_C)_C = \tau_C$.

Доказательство. Набор компактов в топологиях одинаков. И если замкнутое множество пересекается с каждым из этих компактов по замкнутому множеству в τ_C, значит оно пересекает его и по замкнутому множеству в τ. Следовательно, оно также должно лежать в τ_C. □

Лемма 1

Лемма. *Пусть имеется произвольный CW-комплекс X. Для любой его клетки e_α^n верно следующее: $\overline{e_\alpha^n} \subset K$, где K – компакт, состоящий из конечного объединения открытых клеток из $X : K = e_\alpha^n \sqcup \bigsqcup\limits_{m<n\,(fin)} e_\beta^m$.*

$\exists L$ – наименьший компакт с указанным свойством.

Доказательство. Докажем единственность L. Действительно, если мы построим компакты K_1 и $K_2 : \overline{e_\alpha^n} \subset K_1, \overline{e_\alpha^n} \subset K_2$, рассмотрим их пересечение $\overline{e_\alpha^n} \subset K_1 \cap K_2$. Оно также является компактом, состоящим из конечного числа открытых клеток, однако он является меньшим компактом, если K_1 и K_2 различны. Повторяя такую процедуру, получим наименьший компакт.

Докажем существование такого компакта. При $n = 0$ доказательство очевидно – построим компакт в виде одной точки. Далее будем полагать, что $n \geqslant 1$. Имеем: $\overline{e_\alpha^n} = e_\alpha^n \sqcup \partial e_\alpha^n$. Мы знаем, что граница клетки ∂e_α^n задевает конечное число клеток меньшей размерности e_β^m. Рассмотрим объединение всех таких клеток пересечённых с границей: $\bigcup e_\beta^m$.

Имеем доказательство, используя метод конечного спуска. Заметим, что $\overline{e_\alpha^n}$ является компактом, как образ диска $\Phi_\alpha(D^n)$, являющегося компактом. Для каждого ∂e_α^n мы смотрим в какую клетку он попадает, тем самым получим конечное число клеток меньшей размерности e_β^m. Берём замыкание у e_β^m, учитывая, что $\overline{e_\beta^m} = e_\beta^m \sqcup \partial e_\beta^m$. Заметим, что размерность $\partial e_\beta^m - k$ такова, что $k < m < n$, то есть $k \geqslant n - 2$.

Повторяем данный процесс до его прекращения (он конечен, так как размерность каждый раз понижается). Таким образом получаем, что $\overline{e_\alpha^n}$ содержится в конечном объединении открытых клеток – K, таких, что их замыкание также лежит в K. Замыкание каждой клетки – компакт, следовательно имеем:

$$\overline{e_\alpha^n} \subset K = \bigcup \overline{e_\beta^m}.$$

$\bigcup \overline{e_\beta^m}$ – компакт, как конечное объединение компактов. Утверждение доказано конструктивно, так как мы описали процесс построения такого компакта. □

Лемма 2

Лемма. *Пусть имеется (X, A), где X – клеточное пространство и A – произвольное объединение открытых клеток. Тогда верно следующее:*

$$\overline{A} = A \Leftrightarrow \forall e_\alpha^n \subset A : \overline{e_\alpha^n} \subset A.$$

Доказательство. Доказательство $\overline{A} = A \Rightarrow \forall e^n_\alpha \subset A : \overline{e^n_\alpha} \subset A$ очевидно.

Произведём доказательство в обратную сторону. Введём обозначение:

$$\forall e^n_\alpha \subset A : \overline{e^n_\alpha} \subset A \Rightarrow \overline{A} = A \tag{$*$}$$

Для доказательства замыкания, рассмотрим произвольную клетку e^m_β и пересечение её замыкания с $A - \overline{e^m_\beta} \cap A$. Замкнутость рассмотренной конструкции равносильна компактности, так как $\overline{e^m_\beta}$ является компактом.

Рассмотрим возможные варианты расположения клетки e^m_β относительно A:

1.
$$e^m_\beta \subset A \overset{(*)}{\Rightarrow} \overline{e^m_\alpha} \subset A \Rightarrow \overline{e^m_\beta} \cap A = \overline{e^m_\beta} - \text{компакт.}$$

2.
$$e^m_\beta \not\subset A \Rightarrow \overline{e^m_\beta} \cap A = \partial e^m_\beta \cap A.$$

Заметим, что
$$\partial e^m_\beta \subset \bigcup \overline{e^k_\gamma}$$

В данном случае имеем индукцию по m. При $m = 0$ доказательство очевидно, так как производится для одной точки.

Пусть мы имеем доказательство для $m-1, m-2, \ldots, 0$ – докажем для m:

$\partial e^m_\beta = L$ является компактом, как образ сферы. Этот компакт задевает конечное число клеток по доказанному ранее. Для каждой из этих клеток возьмём замыкание и найдём компакт K $(L \subset K)$, удовлетворяющий условиям предыдущей леммы. Тогда справедливо следующее вложение:

$$L \cap A \subset K \cap A$$

$K \cap A$ – компакт, так как клетки K размерности меньше m, а для них $(*)$ уже выполнено $\Rightarrow$ $K \cap A$ – замкнуто. $L \cap A$ является замкнутым подмножеством $K \cap A$, так как верно:

$$L \cap A = L \cap (K \cap A)$$

$K \cap A$ – компакт по предположению индукции, а L – компакт по построению. Таким образом, получили доказательство для шага индукции.

□

Решение домашних задач с использованием лемм

Задача. *Имеем CW-пару $(X, A_\alpha), \alpha \in \Lambda$, то есть все A_α состоят из клеток и являются замкнутыми. Необходимо доказать, что $(X, \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$ – CW-пара.*

Доказательство. Для произвольной клетки верно следующее:

$$e^n_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \Rightarrow \exists A_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha : e^n_\alpha \subset A_\beta \Rightarrow \overline{e^n_\alpha} \subset A_\beta \Rightarrow \overline{e^n_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha.$$

В силу предыдущей леммы $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ является замкнутым множеством. □

Задача. *X – CW-комплекс и сепарабельный $\Leftrightarrow$ X конечен или счётен.*

Доказательство. Импликация $\Leftarrow$ является очевидной. Так как если у X счётное число клеток, то в каждой клетке составим счётное всюду плотное множество и тогда их объединение будет счётным всюду плотным множеством.

Проверим импликацию $\Rightarrow$.

Замечание. *Доказательство импликации осложняет факт того, что не каждое подмножество открытой клетки будет открытым в X.*

Доказательство будем вести от противного. Пусть X состоит из несчётного числа клеток $X = \bigsqcup\limits_{\text{несчётное}} e^n_\alpha$. И пусть

$$\exists Z - \text{счётное} : |Z| = |\mathbb{N}|, \overline{Z} = X.$$

Прийдём к противоречию, что такого множества не существует. Мы получаем счётное число клеток, которые задевают Z. Замкнём эти клетки и теперь рассмотрим клетки "задетые"этим пересечением.

Получаем иттерированную процедуру: рассматриваем задетые клетки $\to$ замыкаем их и присоединяем замыкание к уже рассмотренным клеткам – множество A $\to$ рассматриваем новые клетки задетые пересечением $\to$ повторяем с ними ту же процедуру.

Таким образом получили следующее множество после выполнения процедуры:

$$\forall e^n_\alpha \subset A : \overline{e^n_\alpha} = e^n_\alpha \sqcup \partial e^n_\alpha \subset A.$$

По предыдущей лемме это означает, что A замкнуто. Следовательно, $X \setminus A$ открыто и не пусто.

$$Z \subset A \Rightarrow \overline{Z} \subset \overline{A} = A \neq X.$$

Так как A счётно, а X состоит из несчётного числа клеток по предположенному ранее. Получили противоречие, следовательно X состоит из счётного числа клеток. $\square$

Задача. *Имеем букет* $\bigvee\limits_{1}^{\infty} S^1$ *- не метризуемый клеточный комплекс. Доказать, что:*

$$\bigvee_{1}^{\infty} S^1 \sim Y \subset \mathbb{R}^2,$$

где Y – счётный метризуемый CW-комплекс.

Доказательство. Рассмотрим касающиеся окружности единичного радиуса расположенные в $\mathbb{R}^2$ (см. Рис. 1). Рассмотрим CW-комплекс, где их точки пересечения – вершины, а оставшиеся дуги – одномерные клетки.

Представленный CW-комплекс действительно эквивалентен букету окружностей, так как имеется возможность "стянуть" полученную конструкцию по верхним дугам в точку, при этом нижняя дуга даст окружность. $\square$

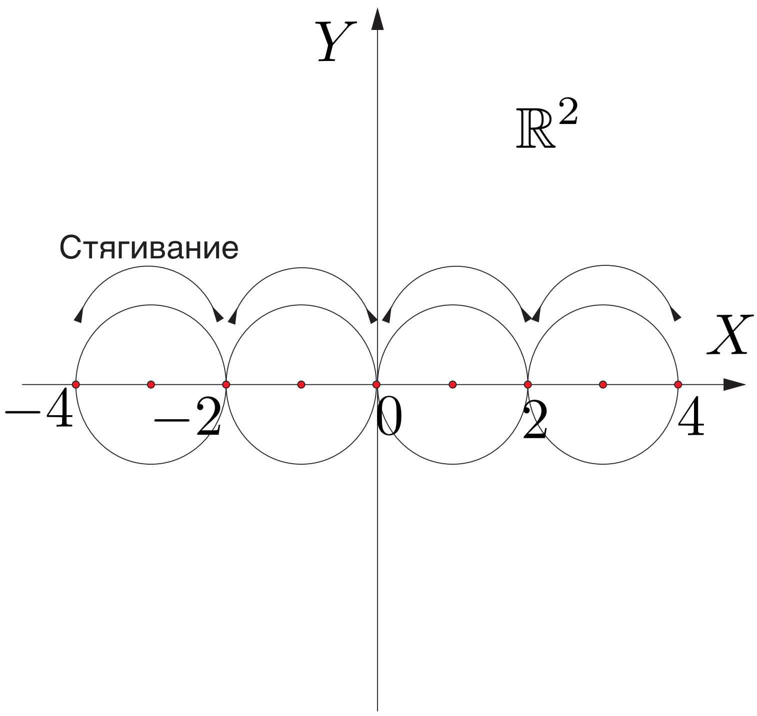


Рис. 1: Представление явного CW-комплекса.

Задача. *Пусть имеется произвольная клеточная пара (X, A). Доказать, что пространство с фактор-топологией $X \setminus A$ – CW-комплекс.*

Доказательство.

Замечание. *Если имеется просто хаусдорфово пространство и замкнутое подмножество в нём, то если это CW-подмножество сложить в одну точку, то фактор-пространство не обязано быть хаусдорфовым.*

Если оно было исходно ещё и регулярным (все точки замкнуты и для любой замкнутого множества её содержащего есть открытая окрестность их не пересекающая), то фактор-пространство будет хаусдорфово.

Достаточно рассмотреть две точки с открытыми окрестностями (см. Рис. 2), одна из которых вне A, а вторая непосредственно на A и стянуть A в точку. Случай, когда обе вне A – тривиален. $\square$

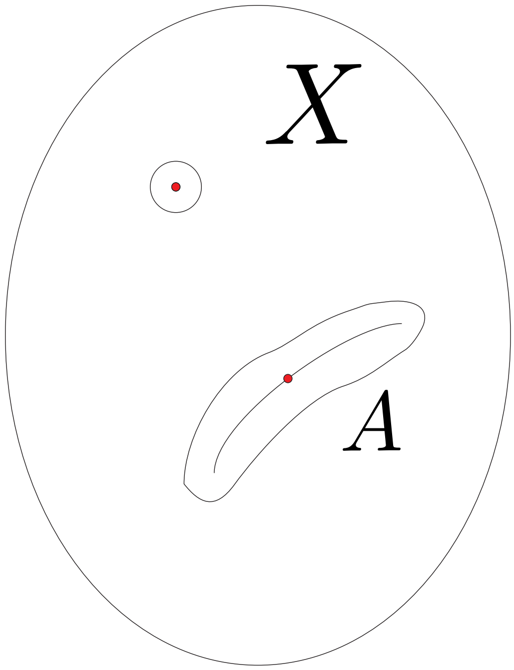


Рис. 2: Рассматриваемые точки изображены красным.

Замечание. *Имеется теорема о том, что любой CW-комплекс является нормальным топологическим пространством.*

Задача. *Если имеем отображение сюрьективное и открытое (или замкнутое), то оно факторное. Предъявить пример двух метрических пространств – подмножеств плоскости, отображение между которыми будет факторным, но не является не открытым и не замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим заполненную полосу (см. Рис. 3) на плоскости в $\mathbb{R}^2$ и её отображение на тор по принципу "наматывания". Тор будем считать гомеоморфным $S^1 \times S^1$. Факторное отображение предъявим следующим образом:

$$(x, y) \mapsto (cos\, x, sin\, x) \times (cos\, y, sin\, y)$$

Оно не является открытым. Достаточно рассмотреть подмножество на полосе в виде открытого полукруга (см. Рис. 3), являющееся открытым, но его отображение на торе открытым не является.

Оно также не является замкнутым. Рассмотрим произвольную геометрическую прогрессию с суммой не равной единице, например a_n, устроенную следующим образом: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2}, \ldots$

На исходной полосе рассмотрим множество образованное точками (см.):
$b_n = (0, a_n + (n-1))$. Полученное множество замкнуто, однако на торе данная последовательность замкнутой не является, так как сходится к точке $(0,0)$ её не содержащей. □

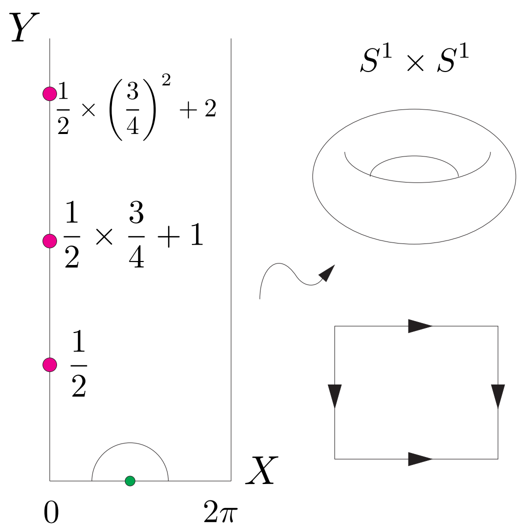


Рис. 3: Зелёная точка к доказательству о не открытости, красные о не замкнутости.

Задача. *Доказать, что из компактности и хаусдорфовости следует нормальность.*

Доказательство. Пусть имеются два замкнутых подмножества A – точка и B, лежащих в X. A, B – компактны.

Докажем регулярность. Рассмотрим произвольную точку z компакта B и рассмотрим не пересекающиеся окрестности точки z и A (см. Рис. 4). Это задаёт внешнее покрытие компакта B открытыми множествами. Заметим, что из каждого такого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Конечному подпокрытию в B соответствует конечный набор из A. Пересечём их и получим открытую окрестность A. Получили окрестность не пересекающуюся с подпокрытием B. Регулярность доказана.

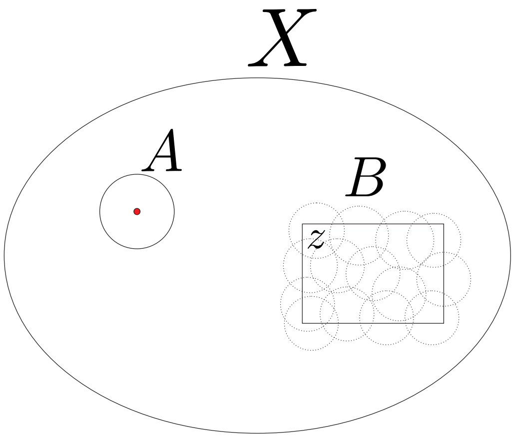


Рис. 4: К доказательству о регулярности.

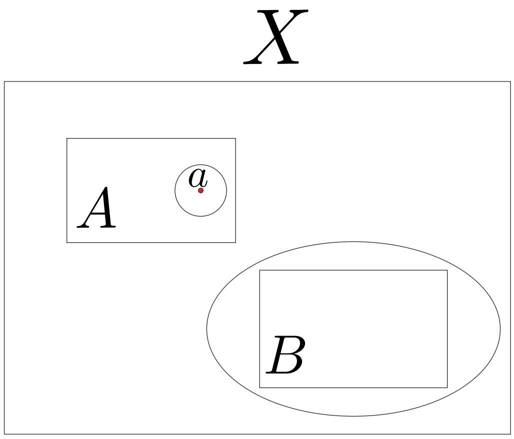


Рис. 5: К доказательству о нормальности.

Докажем нормальность. Рассмотрим два множества A, B и в A выберем точку a с открытой окрестностью (см.Рис. 5) и построим открытое множество содержащее B. Остаётся рассмотреть счётное конечное подпокрытие аналогично рассмотренных ранее. $\square$

Теорема. *Если X – CW-пространство, то $\tau_C = \tau$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный замкнутый в τ_C элемент $F \subset X$ по определению $\Rightarrow \forall$ компакта $K \subset X : F \cap K$ – компакт. Откуда, так как клетка также является компактом, $F \cap \overline{e^n_\alpha}$ – замкнуто $\underset{W\text{-аксиома}}{\Rightarrow}$ F – замкнуто. $\square$

Семинар 4. Симплициальные комплексы

Центр масс точек в аффинном пространстве

Замечание. *Дальнейшие рассуждения возможны в различных полях, но мы приведём их для поля $\mathbb{R}$.*

Определение. *Пусть имеется конечномерное аффинное пространство (векторное пространство без точки отсчёта) $\mathbb{R}^n$, а также набор точек с указанной массой:*

$$(A_1, m_1), (A_2, m_k), \ldots, (A_k, m_k),$$

где A_i – координаты в аффинном пространстве, $m_i \in \mathbb{R}$ – массы заданные в виде скаляров, при этом

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \neq 0.$$

Точка $Z \in \mathbb{R}^n$ называется центром масс системы (A_i, m_i), если выполнено:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}.$$

Теорема 1. *Для произвольного набора точек в аффинном пространстве $\exists!$ центр масс Z.*

Теорема 2.

$$\forall O \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{k} m_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Доказательство. Существование и единственность центра масс в Теореме 1 следует из Теоремы 2.

План доказательства теоремы 2 следующий:

1. Для произвольной $O \in \mathbb{R}^n$ рассмотреть точку Z, определённую в Теореме 2.
2. Доказать, что для введённой Z справедливо тождество в определении центра масс.
3. Рассмотреть другую произвольную O' и связанную с ней точку Z'.
4. Показать, что $Z' = Z$.

Таким образом Теорема 2 будет доказана. Имеем:

$$m\,\overrightarrow{OZ} = \sum m_i\,\overrightarrow{OA_i}.$$

Выразим $\overrightarrow{ZA_i}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{OA_i}.$$

Взяв взвешенную сумму от выражения выше, получим:

$$\sum m_i\,\overrightarrow{ZA_i} = m\,\overrightarrow{ZO} + \underbrace{\sum m_i\,\overrightarrow{OA_i}}_{m\,\overrightarrow{OZ}} = \vec{0}.$$

Если для какой-то другой точки Z' было бы верно выражение выше, то вычитая выражение для Z и для Z' получили бы, что $\overrightarrow{ZZ'} = \vec{0}$. Следовательно такая точка единственна. $\square$

Здесь и далее будем считать, что все массы не отрицательны и вещественны:

$$\forall m_i \in \mathbb{R} : m_i \geqslant 0.$$

Замечание. *Если рассмотреть конечное число точек (A_i, m_i) и перебрать все возможные центры масс с неотрицательной массой, то получится выпуклая оболочка этой системы точек.*

Здесь и далее положим сумму масс m равной единице, так как положение центра масс от этого не изменится.

Определение n-мерных симплексов

Определение. *Введём n-мерный прямолинейный симплекс $\Delta^n_{v_0,\ldots,v_n} = [v_0, \ldots, v_n]$. Пусть имеется $\mathbb{R}^n$ и вершины $v_0, v_1, \ldots, v_n$, причём эти точки общего положения, то есть:*

$$v_0, v_1, \ldots, v_n \not\subset L^{n-1}\,\forall L^{n-1} \subset \mathbb{R}^N \Leftrightarrow v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_n - v_0 - \text{ЛНЗ}.$$

Вводим выпуклую оболочку следующим образом (см. Рис. 1):

$$conv(v_0, v_1, \ldots, v_n) = \{Z | Z(m_0 v_0, m_1 v_1, \ldots, m_n v_n), 0 \leqslant m, \sum_{i=1}^{n} m_i = 1\}$$

Будем говорить, что:

$$t \in \Delta^n_{v_0,\ldots,v_n} = [v_0, \ldots, v_n],$$

имеет барицентрические координаты $(m_0, m_1, \ldots, m_n)$, если t представляет собой центр масс с этими весами.

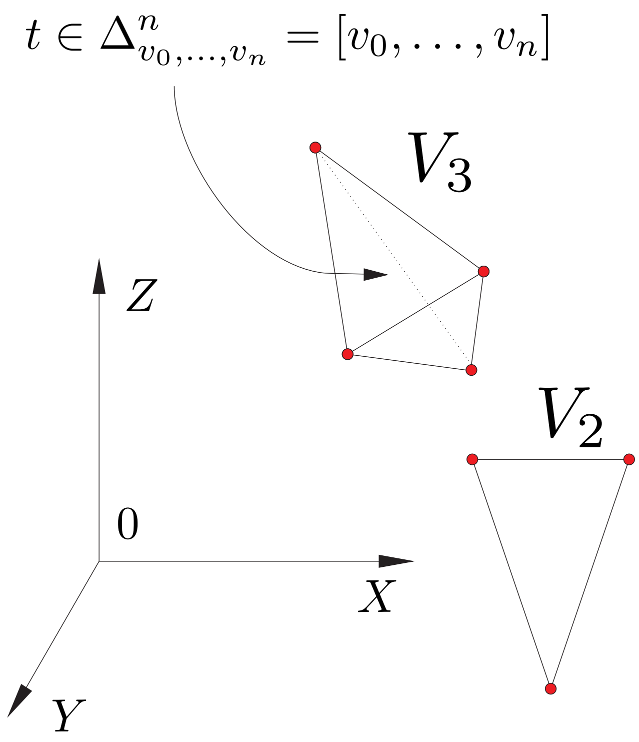


Рис. 1: Изображены двухмерный V_2 и трёхмерный V_3 симплексы.

Замечание. *Симплекс $\Delta^n_{v_0,\ldots,v_n}$ размерности n лежит в n-мерной гиперплоскости. Причём в этой плоскости. любой точки имеются барицентрические координаты, то есть данная точка будет центром масс рассматриваемого симплекса с определёнными массами, сумма которых равна единице, однако некоторые из масс могут быть отрицательными.*

Пример. *На Рис. 2 изображён двухмерный симплекс и отмечены некоторые точки с их барицентрическими координатами.*

Определение. *$K \subset \mathbb{R}^N$ называется конечным прямолинейным симплициальным комплексом, если:*

$$K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i,\ K_i = \Delta^{s_i} \subset \mathbb{R}^N.$$

При этом набор симплексов не произволен, а подчиняется условию:

$$\forall i, j \in \overline{1, p} : i \neq j : K_i \cap K_j = \left[\begin{matrix} \Delta,\ \Delta \subset K_i,\ \Delta \subset K_j \\ \varnothing \end{matrix}\right. .$$

Δ является полной гранью каждого из комплексов K_i и K_j.

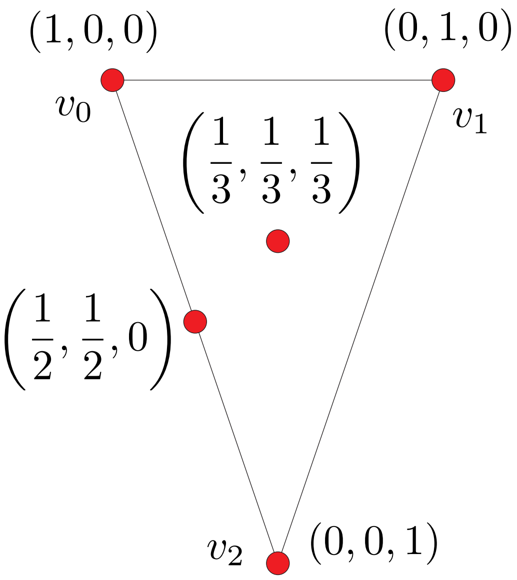


Рис. 2: Изображён двухмерный симплекс V_2 с барицентрическими координатами некоторых точек.

Введение триангуляции топологического пространства

Определение. *Пусть (X,τ) – топологическое пространство. Назовём триангуляцией X пару $K \subset \mathbb{R}^N$ – конечный симплициальный комплекс и гомеоморфизм $f: K \mapsto X : K \approx X$.*

Пример. *Рассмотрим пример триангуляции сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (см. Рис. 3). Достаточно рассмотреть произвольные четыре точки находящиеся на сфере, но не лежащие в одной плоскости. Построим тетраэдр, где в качестве вершин используются рассмотренные точки. В качестве симплициального комплекса возьмём полученный тетраэдр.*

Изоморфизм построим следующим образом:

1. *Рассмотрим произвольную точку O внутри тетраэдра.*
2. *Рассмотрим произвольную точку A на тетраэдре.*
3. *Проведём луч OA до пересечения со сферой.*
4. *Точку пересечения луча и сферы обозначим, как B.*
5. *Получили изоморфизм, который необходимо применить ко всем точкам тетраэдра.*

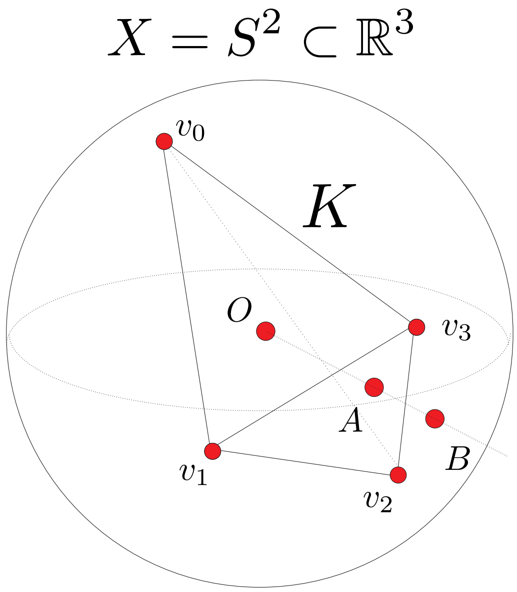


Рис. 3: Пример триангуляции сферы. Ключевые точки отмечены красным.

Вопрос. *Всякое ли топологическое пространство допускает конечную триангуляцию?*

Во-первых, необходимо, чтобы X было компактным, так как объединение конечного числа компактов в $\mathbb{R}^N$ должно являться компактом. Однако существуют линейно-связные и локально-стягиваемые компакты в $\mathbb{R}^N$, которые не допускают конечной и даже счётной триангуляции, например компакт на Рис. 4.

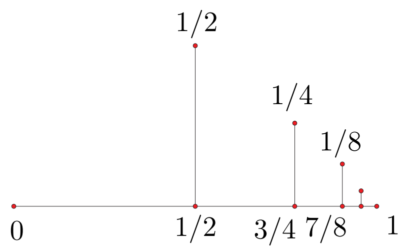


Рис. 4: Компакт в виде счётной системы отрезков.

Замечание. *Любой симплициальный комплекс есть частный случай CW-комплекса.*

Определение. *Правильный симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определяется как:*

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \mid \forall t_i \geqslant 0, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}.$$

Теорема 3.

$$\forall K \subset \mathbb{R}^N - \textit{к.с.к.}\ \exists\ \textit{'линейное' вложение}\ K \subset_{\blacktriangleright} L \subset \Delta^M.$$

Теорема (Уитни)**.** *Рассмотрим произвольное компактное гладкое многообразие (с краем или без края), тогда оно допускает хотя бы одну конечную триангуляцию.*

Любое из доказательств Теоремы Уитни достаточно сложное и в курсе не рассматривается.

Вопрос. *Зададимся вопросом о минимальной триангуляции пространств. Какого наименьшее число вершин в минимальной триангуляции $X = S^2$?*

На самом деле необходимо 4 вершины (например, как реализовывали ранее). Из трёх вершин мы способны получить треугольник, но он не покрывает сферу.

Замечание. *Аналогично можно доказать, что n-мерная сфера S^n должна содержать в минимальной триангуляции не менее $n+2$ вершин.*

Введение эйлеровой характеристики

Определение. *Пусть X – конечный CW-комплекс. Рассмотрим F-вектор $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ этого комплекса, где f_0 – число верши в комплексе, f_1 – число одномерных клеток e^1_α и так далее. Эйлерова характеристика $\chi(X)$ определяется как:*

$$\chi(X) = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \ldots$$

Теорема (Гомотопическая инвариантность эйлеровой характеристики)**.** *Если X и Y – два конечных CW-комплекса, которые гомотопически эквивалентны, то их эйлеровы характеристики совпадают: $\chi(X) = \chi(Y)$.*

Пример (Эйлерова характеристика сферы с g-ручками)**.**

$$\chi(S^2_g) = 2 - 2g.$$

Задача. *Рассмотрим произвольную сферу с g-ручками и триангулируем её. Рассмотрим f-вектор полученной триангуляции (f_0, f_1, f_2):*

$$f_0 - f_1 + f_2 = \chi = 2 - 2g.$$

Необходимо найти связь между числами f_1 и f_2, если это настоящая триангуляция двухмерной поверхности.

Решение. *Проверим, что ответом является:* $3f_2 = 2f_1$. *В выражении* $3f_2$ *мы учитываем число рёбер у треугольника, а в выражении* $2f_1$ *факт того, что на одно общее ребро приходится два смежных треугольника.*

Откуда получаем, что $f_2 = 2s, f_1 = 3s, f_0 = s + \chi,\ s \in \mathbb{N}$.

Пример. *Для тора* T^2 *получим, учитывая, что* $\chi = 0$*:*

$$f_2 = 2s, f_1 = 1s, f_0 = s.$$

Утверждение. *Для тора наименьшее число вершин в минимальной триангуляции больше пяти.*

Доказательство. Докажем, что пяти вершин быть не может. Пусть вершин триангуляции ровно пять $f_0 = s = 5$. Максимальное число рёбер в комплексе, учитывая, что каждое ребро может соединять две различные вершины:

$$3s = f_1 \leqslant C_s^2 = \frac{s(s-1)}{2}.$$

Откуда получаем неравенство на s:

$$6s \leqslant s^2 - s \Rightarrow 7s \leqslant s^2 \Rightarrow 7 \leqslant s.$$

Из данного неравенства следует, что минимальная триангуляция должна содержать как минимум 7 вершин. □

Замечание. *Так как у бутылки Клейна* $\chi = 0$, *то минимальное количество вершин в её триангуляции также не менее семи.*

Домашняя задача 1. *Привести минимальные триангуляции для бутылки Клейна и для* $\mathbb{R}P^2$.

Домашняя задача 2. *Доказать, что для произвольных конечных CW-комплексов* X *и* Y *выполнено:*

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y),$$
$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Семинар 5. Полусимплициальные комплексы

Разбор домашней задачи о минимальной триангуляции $\mathbb{R}P^2$

Задача. *Доказать, что в минимальной триангуляции проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ будет не менее шести вершин.*

Доказательство. Можно вывести, что для любой компактной поверхности M^2 в её триангуляции f-вектор будет равен $(s+\chi, 3s, 2s)$. В случае нашего компакта имеем:

$$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1.$$

По введённой формуле имеем f-вектор $(s+1, 3s, 2s)$, то есть имеем в триангуляции $s+1$ вершину, s рёбер и $2s$ граней. Максимальное число рёбер можно оценить как:

$$C_{s+1}^2 \geqslant 3s \Rightarrow \frac{(s+1)s}{2} \geqslant 3s.$$

Откуда получаем следующую цепочку неравенств:

$$s^2 + s \geqslant 6s \Rightarrow s^2 \geqslant 5s \Rightarrow s \geqslant 5.$$

Подставляя $s = 5$ в наш f-вектор, получаем, что минимальная триангуляция возможна при шести вершинах. □

Полусимплициальные комплексы

Перейдём к определению более общему классу пространств - полусимплициальным комплексам.

Определение. *Одним из способов введения симплициального комплекса – пронумировать вершины прямолинейных симплексов (см. Рис. 1).*

Замечание. *Причём, если мы упорядочили вершины большего симплекса, его грани меньшей размерности должны иметь тот же порядок вершин. Например, на Рис. 1 мы не изменить нумерацию симплекса так, чтобы вершины $(0''')$ и $(1''')$ были поменяны местами, так как тетраэдр уже 'задаёт' его нумерацию.*

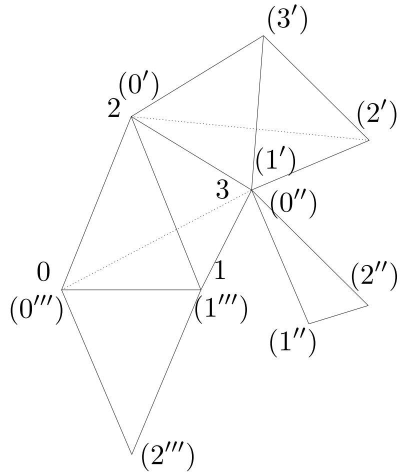


Рис. 1: Пример нумерации вершин прямолинейного симплекса.

Замечание. *Нумерация необходима, так как $\forall n \in \mathbb{R}$ имеется правильный n-мерный симплекс:*

$$\mathbb{R}^{n+1} : \{t_0, t_1, \ldots, t_n \mid 0 \leqslant t_0, \ldots, t_n,\ t_0 + \cdots + t_n = 1\}$$

Упорядочивание вершин аналогично заданию отображения σ_α^n из правильного симплекса в линейный аффинный. Так как мы отобразили вершины, все остальные точки симплекса сохраняют свои барицентрические координаты и отображаются автоматически.

Дадим, наконец, полное определение полусимплициального комплекса.

Определение. *Полусимплициальный комплекс является частным случаем CW-комплекса, при этом все отображения:*

$$\Phi_\alpha : \Delta^n \to X.$$

Таковы, что внутренность n-мерного стандартного симплекса Δ^n это открытая клетка комплекса X. При этом данное отображение замкнутое на гипергрань, также является одним из элементов отображения:

$$\Phi_\alpha|_{\Delta_\beta^{n-1}} = \Phi_\beta : \Delta_\beta^{n-1} \to X.$$

То есть, в частном случае тетраэдра, все точки внутри отображаются в открытые клетки. Однако, возможно такое, что две грани могут 'склеится' при отображении, то есть барицентр одной грани перейдёт в барицентр другой, при этом такая склейка должна быть с сохранением порядка вершин.

При рассмотрении клеточного разбиения такого типа – с упорядоченными вершинами и при переходе на гиперграни которого получаем элемент, который уже раньше был, получаем понятие полусимплициального комплекса (Δ-комплекса).

Примеры построения полусимплициальных комплексов

Пример. *Построение полусимплициального комплекса, изображённого на Рис. 2 слева невозможно, так как нарушается нумерация граней – необходимо следование от большего номера вершины к меньшему.*

Однако мы можем взять барицентр этого треугольника и составить полусимплициальный комплекс из трёх треугольников (см. Рис. 2 справа). Нетрудно проверить, что с введённой нумерацией порядок следования вершин на полученном полусимплициальном комплексе не нарушается.

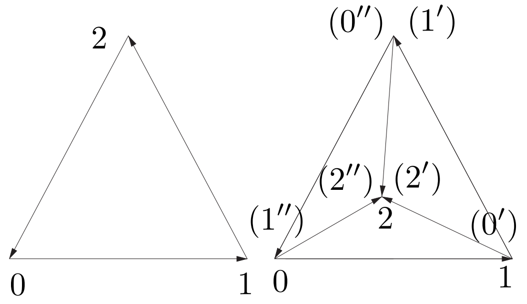


Рис. 2: Пример построения полусимплициального комплекса.

Замечание. *Понятие триангуляции применимо к симплициальным комплексам, здесь и далее для квазисимплициальных комплексов будем использовать термин квазитриангуляция.*

Пример. *Рассмотрим построение такого симплициального комплекса, который не является симплициальным комплексом. Рассмотрим тор, как стандартную склейку квадрата (см. Рис. 3). Получаем склейку двух треугольников L и U по отождествлённым граням.*

Замечание. *Гомологии хорошо и быстро считаются у симплициальных комплексов, однако у полусимплициальных комплексов их расчёт происходит ещё быстрее, именно поэтому они и рассматриваются в качестве отдельного класса.*

Построение граничного гомоморфизма

Пусть X – полусимплициальный комплекс. Обозначим свободную абелеву группу, натянутую на базис, а именно открытые симплексы размерности n, как:

$$\Delta^n(X) = \bigoplus \mathbb{Z} < e^n_\alpha >$$

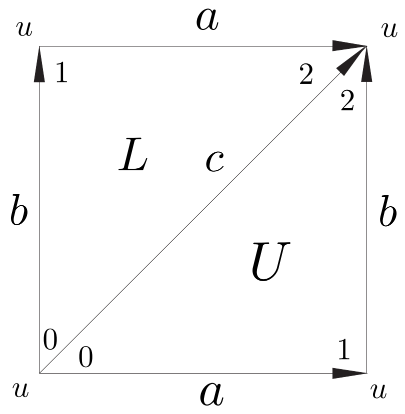


Рис. 3: Пример построения полусимплициального комплекса,
не являющимся симплициальным.

Каждому открытому симплексу e_α^n соответствует отображение стандартного симплекса в X, причём это соответствие биективное:

$$e_\alpha^n \xleftrightarrow{\sigma} \Delta^n \mapsto X.$$

Поэтому можем переписать выраражение, как

$$\Delta^n(X) = \bigoplus \mathbb{Z} < \sigma_\alpha^n > .$$

Далее нам необходимо определить граничный гомоморфизм, чтобы он был гомоморфизмом абелевых групп:

$$\partial : \Delta^n(x) \to \Delta^{n-1}(x).$$

Его достаточно задать только на образующих σ_α^n свободной группы Δ^n. По определению имеем:

$$\partial\sigma^n|_{[v_0,\ldots,v_n]} \overset{def.}{=} \sum_i (-1)^i \sigma^{n-1}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}.$$

Далее необходимо показать, что композиция гомоморфизмов равна нулю:

$$\underbrace{\Delta^n(x) \xrightarrow{\partial_n} \Delta^{n-1}(x) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta^{n-2}(x)}_{\xrightarrow{0}}.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, ребро v_0, v_1. По определению, если мы рассмотрим гомоморфизм $\Delta^0(x)$, имеем:

$$\Delta^0(x) \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0.$$

Также по определению:

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0] \to 0 - 0 = 0.$$

Теперь рассмотрим следующее отображение:

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [\underbrace{v_1}_{w_0}, \underbrace{v_2}_{w_1}] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \to [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0.$$

В общем случае это также выполняется, так как по определению:

$$\partial\sigma^n|_{[v_0,\ldots,v_n]} = \sum_i (-1)^i \sigma^{n-1}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}.$$

И если мы подействуем ∂ ещё раз, то из линейности имеем:

$$\partial^2\sigma^n|_{[v_0,\ldots,v_n]} = \sum_i (-1)^i \partial\sigma^{n-1}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} = \sum_{i\neq j}(\ldots) =$$

$$= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma^{n-2}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} + \sum_{j>i}\underbrace{(-1)^i(-1)^{j-1}}_{(-1)^{i+j-1}}\sigma^{n-2}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n]}.$$

Переобозначим в последнем слагаемом i и j, поменяв их местами, тогда получим:

$$\partial^2\sigma^n|_{[v_0,\ldots,v_n]} = \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma^{n-2}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} - \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\sigma^{n-2}|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]} = 0.$$

Следовательно, утверждение доказано по индукции. □

Определение (Цепной комплекс)**.**

$$C_\bullet = \{\cdots \to C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0\} : \partial^2 = 0.$$

Замечание. *Можно рассмотреть циклы, определяемые, как $Ker\,\partial_n = Z_n$, а также границы, которые вводятся следующим образом: $Im\,\partial_n = B_n$. При этом справедливо следующее:*

$$Z_n \subset B_n.$$

Фактор также является абелевой группой – n-ой группой гомологии комплекса $C_\bullet$:

$$Z_n/B_n = H_n(C_\bullet).$$

Определение. *Симплициальной гомологией полусимплициального (симплициального) комплекса является гомология комплекса $C_\bullet$, где:*

$$C_n = \Delta^n(x) = \bigoplus \mathbb{Z} < \sigma_\alpha^n > .$$

Замечание. *Преимущество полусимплициальных комплексов перед симплициальными также состоит в том, что имеется возможность введения умножения.*

Вычисление гомологий

Пример. *Рассмотрим окружность с вершиной v и ребром e:*

$$\ldots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}\langle e\rangle}_{n=1} \xrightarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}\langle v\rangle}_{n=0} \xrightarrow{0} 0.$$

Тогда имеем:

$$H_n^{\Delta}(S^1) = \left[\begin{aligned}&\mathbb{Z},\ n = 0, 1,\\ &0,\ n \geqslant 2.\end{aligned}\right.$$

Заметим, что при использовании триангуляции данная процедура заняла бы большее время.

Пример. *Рассмотрим двумерный тор T^2 (см. Рис. 3). Его цепной комплекс представляет собой следующую структуру:*

$$\ldots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle U\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle L\rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c\rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\langle u\rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Имеем:

$$H_0(T^2) = 0.$$

При этом соответствующие дифференциалы равны:

$$\partial(u) = b - c + a = a + b - c.$$

$$\partial(L) = a - c + b = a + b - c.$$

Откуда получаем:

$$H_1(T^2) = \underbrace{\mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c\rangle}_{\mathbb{Z}\langle a\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle b\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle a+b-c\rangle} / \, a + b - c = 0.$$

Рассмотрим матрицу перехода C от векторов a, b, c к векторам $a, b, a + b - c$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Так как матрица целочисленная и и-немодулярная (определитель равен -1), следовательно $a, b, a + b - c$ действительно является базисом решётки.

Следовательно имеем:

$$\mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle a + b - c\rangle = \mathbb{Z}([a]) \oplus \mathbb{Z}([b]).$$

Откуда:

$$H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2.$$

Посчитаем теперь чему равно $H_2(T^2)$, так как границы отсутствуют, то факторизовать мы будем по 0 и достаточно найти $Ker\,\partial_2$, учитывая, что произвольный элемент группы выражается, как:

$$pU + qL \xrightarrow{\partial_2} (p+q)(a+b-c) \underset{p=-q}{=} 0$$

$$H_2(T^2) = Ker\,\partial_2 = \mathbb{Z}\left([U-L]\right).$$

Откуда, окончательно получаем:

$$H_2(T^2) = \mathbb{Z}.$$

Из цепного комплекса сразу следует, что

$$H_3(T^2) = 0.$$

Домашняя задача 1. *Рассмотрим полусимплициальное разбиение двухмерной сферы (см. Рис. 4) – склейка двух треугольников U и V только по их границе. Необходимо посчитать группы гомологий H_2, H_1 и H_0 у данного полусимплициального разбиения.*

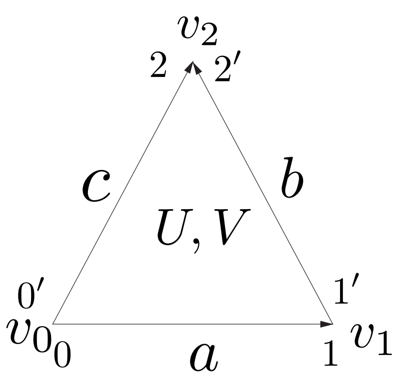


Рис. 4: Полусимплициальное разбиение двухмерной сферы.

Сингулярные гомологии

На данный момент мы умеем вычислять гомологии, зависящие от комбинаторных данных вложенных в рассматриваемое пространство. При этом у одного и того же пространства возможны различные варианты построения триангуляции и не очевидно, что гомологии при этом будут сохраняться. Для доказательства этого факта необходима более общая теория сингулярных гомологий.

Пусть X – произвольное топологическое (хаусдорфово) пространство.

Определение (Сингулярный цепной комплекс)**.**

$$\forall n > 0 : \Delta^n = \{t_0, \ldots, t_n | 0 \geqslant t_0, \ldots, t_n,\ t_0 + \cdots + t_n = 1\}.$$

Определение (Сингулярный симплекс X)**.**

$$\forall \sigma : \Delta^n \to X.$$

При натяжении абелевой группы на все сингулярные симплексы X, имеем:

$$\mathbb{Z}(\sigma^n_\alpha) = C_n(x).$$

Граничные гомоморфизмы пишутся аналогично. Их необходимо задать на образующих, так как рассматриваются на свободной абелевой группе:

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]}.$$

При этом для каждого i имеем подстановку Δ^{n-1}. Далее пишется та же самая формула $\partial^2 = 0$, доказательство которой происходит аналогичным образом.

Замечание. *Сингулярный симплекс является инвариантным гомеоморфизмом, так как является изоморфизмом цепных комплексов.*

В теории гомологий необходимо доказать, что если X – полусимплициальный комплекс, то имеется каноническое отождествление симплициальных гомологий X в виде канонического изоморфизма с его сингулярными n-мерными гомологиями:

$$H^\Delta_n(x) \cong H_n(x).$$

После доказательства этого факта, мы можем говорить о топологической инвариантности полусимплициальной гомологии.

Определение (Сингулярной гомологии пары топологического пространства)**.**

$$C(X, A) = C(X)/C(A).$$

Утверждение. $C(X, A)$ *является свободной абелевой группой.*

Доказательство. Мы отображаем в 0 только те симпликсы, образ которых полностью содержатся в A. То есть остаются только те базисные векторы, образ которых не содержится полностью в A. Это также является базисом абелевой группы, следовательно это свободная абелева группа. □

Семинар 6. Симплициальные и полусимплициальные комплексы. Решение задач

Разбор домашней задачи о расчёте гомологии двухмерной сферы

Задача. *Рассмотрим полусимплициальное разбиение двухмерной сферы (см. Рис. 1) – склейка двух треугольников U и V только по их границе. Необходимо посчитать группы гомологий H_2, H_1 и H_0 у данного полусимплициального разбиения.*

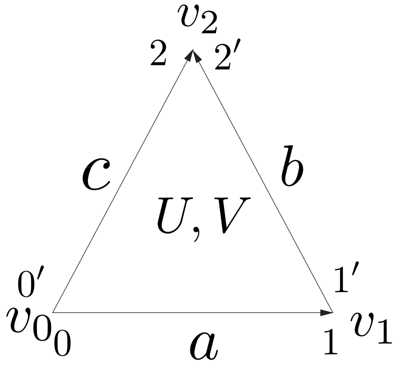


Рис. 1: Полусимплициальное разбиение двухмерной сферы.

Решение. *Рассмотрим симплициальные цепи полученного разбиения:*

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z}(U, V) \to \mathbb{Z}\langle a, b, c\rangle \to \mathbb{Z}\langle v_0\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle v_2\rangle \to 0.$$

Соответствующие образы равны:

$$\partial a = v_1 - v_0,\ \partial b = v_2 - v_1,\ \partial c = v_2 - v_0.$$

В рассмотренном базисе необходимо приравнять к нулю $v_1 - v_0, v_2 - v_1$ и оставить, например, v_2. Три указанных вектора будут составлять базис решётки. Для этого необходимо рассмотреть матрицу перехода C от старого базиса к новому, аналогично тому, как это было сделано ранее. Матрица перехода равна:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица – нижетреугольная с 1 и -1 на диагоналях, следовательно она действительно является матрицей перехода, а рассмотренные вектора – новым базисом решётки.

Приравнивая к нулю базисные вектора:

$$v_2 - v_1 = 0,\ v_1 - v_0 = 0,$$

получаем, что соответствующая гомология равна:

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаем, что все вершины гомологичны, то есть все 0-мерные циклы (вершины) равноправны:

$$\mathbb{Z}\left[v_2\right] = \mathbb{Z}\left[v_1\right] = \mathbb{Z}\left[v_0\right].$$

Рассмотрим циклы в $\mathbb{Z}\langle a, b, c\rangle$:

$$\begin{aligned} ka + lb + mc \to kv_1 - kv_0 + lv_2 - lv_1 + mv_2 - mv_0 = \\ = \underbrace{(-k-m)}_{k=-m} v_0 + \underbrace{(-l+k)}_{k=l} v_1 + \underbrace{(l+m)}_{m=-l} v_2 \Rightarrow k = -m = l. \end{aligned}$$

Следовательно имеем цикл:

$$\mathbb{Z}\langle a + b - c\rangle$$

Также необходимо вычислить границы:

$$\partial U = \partial V = b - c + a.$$

Граница совпадает с циклами и:

$$H_1(S^2) = 0.$$

Для расчёта $H_2(S^2)$ рассмотрим образ:

$$pU + qV \xrightarrow{\partial} \underbrace{(p+q)}_{p=-q}(a + b - c) = 0.$$

Так как границ нет и цикл одномерный:

$$H_2(S_2) = \mathbb{Z}.$$

Задание домашних задач на основе пройденного материала

Домашняя задача 1. *Найти переклейку двухмерных граней тетраэдра, согласованную по порядку вершин, такую, что полученный полусимплициальный комплекс* Δ *был гомеоморфен сфере* S^3.

Определение. *Пусть* X, Y *– два топологических пространства. Определим джойн (от англ. "join") этих пространств* $X * Y$. *Необходимо в* R^n *поместить* X *(см. Рис. 2), аналогично в* R^m *(общего положения, относительно* R^n*) поместить* Y, *и полученные конструкции поместить в* R^N. *Далее необходимо провести между* X *и* Y *все возможные отрезки, соединяющие произвольные точки в этих множествах. Множество точек из всех таких отрезков является джойном* X *и* Y.

Более строгое определение следующее ($\sim$ *– произвольное отношение эквивалентности):*

$$X * Y = X \times Y \times I / \sim .$$

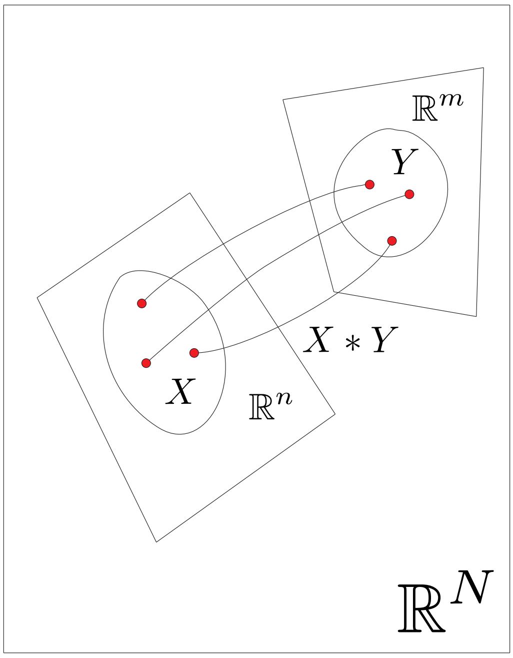


Рис. 2: Геометрическое определение $X * Y$.

Пример. *Джойном двух отрезков общего положения в* $\mathbb{R}^3$ *является тетраэдр. Джойн* X *и двухточечного множества – надстройка. Джойн* X *и одной точки – конус.*

Домашняя задача 2. *Придумать корректное отождествление джойна для произвольных хаусдорфовых X, Y.*

Домашняя задача 3. *Доказать, что справедливо следующее соотношение:*

$$S^n * S^m = S^{n+m+1}.$$

Подсказкой к **Домашнему заданию 1** будет представление сферы в виде джойна двух сфер:

$$S^3 = S^1 * S^1.$$

Аналогично разобранному домашнему заданию n-мерную сферу S^n можно представить в виде двух склеенных n-мерных симпликсов по общей границе. Из этого утверждения нетрудно получить n-мерные гомологии:

$$H_n(S^n) = \mathbb{Z},\ H_0(S^n) = \mathbb{Z}.$$

Введение степени гомеоморфизма

Пусть у нас имеется непрерывное отображение f сферы S^n саму в себя:

$$f : S^n \to S^n.$$

Гомеоморфизм f_* отображает следующим образом:

$$f_* : \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}} \to \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}}.$$

Гомеоморфизм абелевых групп $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ возможен только в виде умножения на целое число n.

Определение. *Степенью гомоморфизм f_* назовём число n, на которое он умножает при отображении $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:*

$$n = deg\, f_*.$$

Степень гомеоморфизма является гомотопическим инвариантом, то есть:

$$f \sim g \Rightarrow deg\, f = deg\, g.$$

Рассмотрим сферу S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. На ней имеется набор естественных инволюций ($\tau^2 = id$), например:

$$\tau : (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1}).$$

Степень такой инволюции: $deg\,\tau = -1$.

Действительно, пусть имеется два отображения f и g:

$$S^n \underbrace{\xrightarrow{f}}_{\xrightarrow{\times deg\, f}} S^n \underbrace{\xrightarrow{g}}_{\xrightarrow{\times deg\, g}} S^n.$$

Имеем свойство на уровне сингулярных гомологий:

$$(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*.$$

Откуда следует выполнение соотношения:

$$deg\, f \times deg\, g = deg(g \cdot f).$$

Имеем, так как степень тождественного отображения – 1:

$$(deg\, \tau)^2 = deg\, id = 1.$$

Замечание. *Из соотношений выше следует, что у любой инволюции на сфере степень равна* ± 1.

Задача. *Доказать, что у введённой инволюции выше степень равна -1:*

$$\tau : (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1}).$$

Доказательство. Ранее мы установили, что сферу S^n можно представить в виде двух симплексов склеенных по общей границе. Также ранее было получено:

$$H_n(S^n) = \mathbb{Z}[U - V].$$

И цикл возможен только при $p = -q$ (следует из соотношения для дифференциала $\partial(pV + qU)$). Отображение меняет симплексы местами:

$$V \to U,\, U \to V.$$

Следовательно, степень этого отображения действительно -1:

$$H_n(S^n) = \mathbb{Z}[U - V] \to \mathbb{Z}[V - U].$$

$\square$

Задача. *Найти степень следующей инволюции:*

$$\tau_k : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (\underbrace{+x_1, \ldots, +x_k}_{k}, \underbrace{-x_{k+1}, \ldots, -x_{n+1}}_{n+1-k}).$$

Решение. *Используя композицию инволюций, получим, что степень, как и ранее, равна -1.*

Определение. *Антиподальное отображение соответствует введённому* τ_0.

Задача. *Пусть имеется произвольное отображение* f *сферы* S^n *самой на себя. Пусть* f *не имеет неподвижной точки, то есть:*

$$\forall x \in S^n : f(x) \neq x.$$

Необходимо доказать, что для любого такого отображения выполнено соотношение:

$$deg\, f = (-1)^{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x для которой по условию верно: $f(x) \neq x$. Соединим по кратчайшему геодезическому $f(x)$ и $\tau_a(x)$, где τ_a – антиподальное отображение (см. Рис. 3).

Рассмотрим гомотопию $F(x,t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$F(x,t) = \frac{t \cdot \tau_a(x) + (1-t)f(x)}{t \cdot \tau_a(x) \cdot (1-t)f(x)}.$$

Полученную гомотопию $F(x,t)$ 'выжимаем' на S^n до кратчайшего геодезического. Откуда получается соединение гомотопией:

$$f(x) \sim \tau_a(x).$$

У гомотопных отображений степень отображения одинакова, а у $\tau_a(x)$ она равна -1, следовательно, у f она также будет равна -1. □

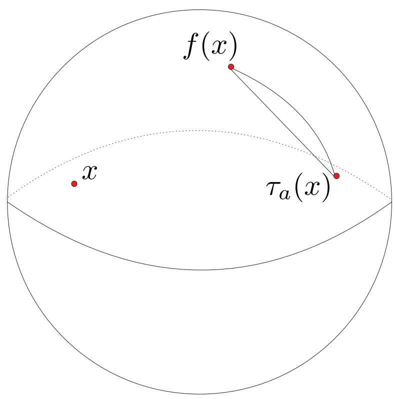


Рис. 3: Построение кратчайшей геодезической дуги.

Задача. *Пусть имеется произвольное отображение f сферы S^n самой на себя. Необходимо доказать, что если f не является сюръективным отображением, то:*

$$deg\, f = 0.$$

Доказательство. Из того, что отображение не сюръективно, найдётся какая-то точка $y_0 \in S^n$, которую оно не задевает. Рассмотрим отображение g:

$$g : S^n \setminus \{y_0\} \to \tau_a(y_0).$$

Соединим гомотопией отображения f и g. g – вырожденное отображение со степенью 0, так как оно является полусимплициальным, но оно отправляет цикл в 0. □

Вопрос. *Мы знаем, что если два отображения f и g на сфере S^n гомотопны, то их степени одинаковы:*

$$f \sim g \Rightarrow deg\, f = deg\, g.$$

Верно ли обратное утверждение:

$$deg\, f = deg\, g \Rightarrow f \sim g?$$

Для решения данной задачи необходимо продвинуться далее по курсу, сейчас мы можем решить более простую частную задачу.

Утверждение.

$$n + 1 - \textit{чётно} \Rightarrow \tau_a \sim id.$$

Доказательство. На окружности возможно построить гомотопию вращением от 0 до π.

Реализуем отображение для четырёхмерной сферы. Будем считать координаты в $\mathbb{R}^4$ в которой лежит сфера заданы, как $OXYUV$. Сначала сделаем поворот на π в плоскости XY, а после поворот на π в плоскости UV. Композиция даёт необходимую гомотопию. □

Действие группы на топологическом пространстве

Определение. *Пусть имеется группа G и топологическое пространство X. Действие G на X определим, как $G \curvearrowright X$:*

$$\forall g : \phi_g : X \to X - \textit{гомеоморфизм}$$
$$\phi_e = id,\ \phi_h \cdot \phi_g = \phi_{hg}.$$

Определение. *$G \curvearrowright X$ – эффективно, если $Ker\,\rho = \{e\}$:*

$$\forall g \neq e\, \exists x_0 \in X : g(x_0) \neq x_0.$$

Определение. *$G \curvearrowright X$ – свободно, если:*

$$\forall g \neq e\, \forall x \in X : g(x) \neq x.$$

Замечание. *Определение свободного действия также означает, что число орбит соответствует числу элементов в группе.*

Замечание. *Для свободных действий g и h легко вывести следующее утверждение из утверждения выше:*

$$g \neq h \Rightarrow g(x) \neq h(x).$$

Замечание. *Рассмотрим S^n, где n – чётно. Верно, что:*

$$\mathbb{Z}_2 \curvearrowright S^n.$$

Задача. *Рассмотрим S^n, где n – чётно, G – свободное. Доказать, что:*

$$G \curvearrowright S^n \Rightarrow G = \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство. Рассмотрим два произвольных не единичных элемента группы g и h. Им соответствуют отображения ϕ_g, ϕ_h. По предыдущей теореме:

$$deg\,\phi_g = deg\,\phi_h = -1.$$

Пусть $g \neq h^{-1}$, тогда мы также знаем, что:

$$\phi_{gh} = \phi_g \cdot \phi_h.$$

Для завершения доказательства рассмотрим произвольный $g \neq e$:

$$\phi_{gg} = \underbrace{\phi_g}_{-1} \cdot \underbrace{\phi_g}_{-1}.$$

Следовательно $g^2 = e$.

Группы, квадрат которых всегда равен единичному элементу, – булева группа, то есть абелева группа и представимая в виде:

$$\mathbb{Z}_{\not\vDash} \oplus \mathbb{Z}_{\not\vDash} \oplus \mathbb{Z}_{\not\vDash} \oplus \ldots.$$

Допустим, что это группа, представимая в виде:

$$\underbrace{\mathbb{Z}_{\neq} \oplus \mathbb{Z}_{\neq} \oplus \mathbb{Z}_{\neq} \oplus \ldots}_{k\text{раз}},$$

где $k \geqslant 2$.

Такого быть не может, так как имеется вектор g_1 и вектор g_2, который ему не равен и их сумма должна давать нетривиальный вектор g_3. Однако по нашему предположению g_3 должен быть единичным вектором. Получили противоречие. □

Домашняя задача 4.

$$\forall n \geqslant 1\, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Построить следующее отображение n-мерной сферы в себя:

$$f : S^n \to S^n \; deg\, f = k.$$

Семинар 7. Эйлерова характеристика конечного клеточного компакта

Разбор домашней задачи о поле непрерывных касательных сфере

Задача. *Необходимо доказать, что на сфере, S^N, существует поле ненулевых непрерывных касательных тогда и только тогда, когда N – нечётно.*

Доказательство. Рассмотрим случай $N = 1$. Сфера, с непрерывным полем касательных, представлена на Рис. 1. Доказательство существования следует из того, что можно явно получить поле, продифференцировав по t выражение $|z| = 1 :\ e^{it}$.

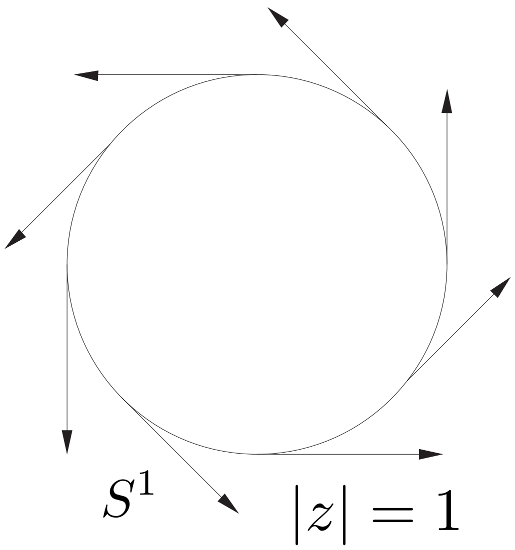


Рис. 1: Пример непрерывного поля в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим $N = 3$:

$$S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4,$$
$$(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Обобщим предыдущий пример, $N = 1$ для данного. Рассмотрим точку с координатами $\left(e^{it}z_1, e^{it}z_2\right)$. Данная точка также должна лежать на сфере, так как при умножении на e^{it} модуль не поменялся. Касательные построим исходя из выражения:

$$\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\left(e^{it}z_1, e^{it}z_2\right) = \lim_{t\to 0}\left(ie^{it}z_1, ie^{it}z_2\right) = (iz_1, iz_2)\,.$$

Получили ненулевой вектор. Убедимся, что это действительно вектор касательной. Плоскость, перпендикулярная вектору (z_1, z_2) задаётся в виде:

$$\operatorname{Re}\langle(z_1, z_2), (a_1, a_2)\rangle,$$

где $<,>$ – эрмитово скалярное произведение.

Рассмотрим выражение:

$$((z_1, z_2) \cdot i(z_1, z_2)) = \overline{z}_1 i z_1 + \overline{z}_2 i z_2 = i\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = i.$$

Так как

$$\operatorname{Re}\langle(z_1, z_2), (a_1, a_2)\rangle = \operatorname{Re} i = 0,$$

то полученный вектор действительно является вектором касательной. □

Рассмотрим невозможность построение такого поля для сферы $S^{2N} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Доказательство. Предположим, что такое поле существует, тогда сделаем нормировку всех векторов в данном поле. Получим единичное поле непрерывных касательных к сфере. Построим гомотопию (см. Рис. 2):

$$\begin{aligned} f_t :\ & S^{2N} \to S^{2N}, \\ t = 0 : & f_0 = id, \\ t = 1 : & f_1 = -id. \end{aligned}$$

Таким образом мы соединили гомотопии id и $-id$. С одной стороны $-id$ степень гомотопии:

$$\deg, f_1 = (-1)^{n+1} = \{n = 2N\} = (-1)^{2N+1} = -1 \Rightarrow \deg f_t = -1.$$

С другой стороны:

$$\deg, f_0 = 1 \Rightarrow \deg f_t = 1.$$

Получили противоречие. □

Эйлерова характеристика конечного клеточного комплекса

Пусть X – произвольный конечный CW-комплекс. По определению имеем:

$$\mu(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n \overset{\text{Th.}}{=} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \operatorname{rank} H_n(X),$$

где a_n – кол-во клеток размерности n.

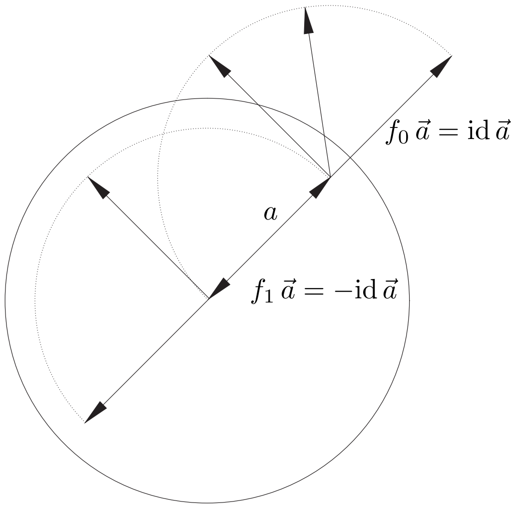


Рис. 2: Построение гомотопии к полю касательных.

Замечание. *Отдельные члены в суммах, в общем случае, не равны:*

$$a_n \neq rank\, H_n(X).$$

Теорема. *Если X, Y – конечные CW-комплексы, то:*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Доказательство. Имеем разбиение:

$$X \times Y = \underbrace{\bigsqcup\bigsqcup}_{\text{fin}} e^n_\alpha \times e^m_\beta.$$

Пусть

$$\chi(X) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \dots$$
$$\chi(Y) = d_0 - d_1 + d_2 - d_3 \dots$$

Перемножая две суммы конечных рядов, получим доказываемое утверждение:

$$\chi(X) \cdot \chi(Y) = \underbrace{c_0 d_0}_{\text{0-мерные}} - \underbrace{(c_0 d_1 + c_1 d_0)}_{\text{1-мерные}} + \underbrace{(c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0)}_{\text{2-мерные}} - \dots = \chi(X \times Y).$$

□

Решение задач

Утверждение. *Для CW-комплексов X, Y ($X \cap Y = \varnothing$) верно:*

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y).$$

Данное утверждение очевидно. Рассмотрим общий случай:

Утверждение. *Для CW-комплексов X, Y $(X \cap Y = \varnothing)$ верно:*

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

Доказательство. Следует из того, что $X \cap Y$ также является CW-комплексом. В сумме для нахождения эйлеровой характеристики, клетки данного CW-комплекса учитываются дважды, поэтому необходимо вычесть $\chi(X \cap Y)$. □

Пример.

$$\chi(S_g) = 2 - 2g,$$
$$\chi(N_g) = 2 - g \text{ (\textit{см. Рис. 3})}.$$

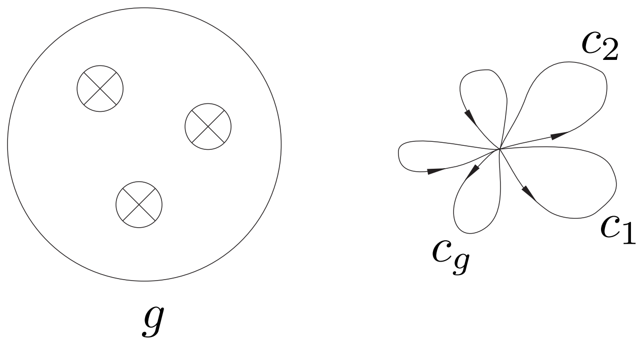


Рис. 3: Разбиение на клетки N_g.

Утверждение. *Проабелизуем π_1. Доказать справедливость выражения:*

$$\pi_1(N_g) \overset{ab}{=} \left\langle c_1, \ldots, c_g \,|\, c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2 = 1,\ c_i c_j = c_j c_i \right\rangle = H_1(N_g) = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство. Имеем:

$$2\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2 + \cdots + \tilde{c}_g = 0.$$

Замечание. *Если X – линейно связное хаусдорфово пространство, то по теореме Пуанкаре:*

$$\pi_1(X) \overset{ab}{=} H_1(X).$$

Перейдём к новому базису:

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{g-1}, \tilde{c}_g \to \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{g-1}, \tilde{c}_1 + \cdots + \tilde{c}_g.$$

Матрица перехода между базисами – верхнетреугольная с единицами на диагонали. Получаем, что рассмотренный базис также является базисом решётки. Для того, чтобы удвоенный последний элемент в новом базисе сократился, имеем:

$$\pi_1(N_g) = \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

□

Задача. *Найти* $H_2(N_g)$.

Пусть образующей была γ, тогда:

$$\mathbb{Z}^g_{[c_1],[c_2],\ldots,[c_g]} \leftarrow \mathbb{Z} < \gamma > \leftarrow 0.$$

Если мы приклеиваем двумерную клетку к Рис. 3 по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2$, то отображение двумерной клетки:

$$2c_1 + 2c_2 + \cdots + 2c_g \leftarrow \gamma.$$

Это никогда не является нулём, так как $\mathbb{Z}^g_{[c_1],[c_2],\ldots,[c_g]}$ – ненулевой элемент, значит, ядро отображения, $\mathbb{Z}^g_{[c_1],[c_2],\ldots,[c_g]} \leftarrow \mathbb{Z} < \gamma >$, – 0. Значит, гомологии нулевые.

Получили

$$\partial_2 \gamma = 2c_1 + 2c_2 + \cdots + 2c_g.$$

Этот элемент имеет бесконечный порядок в группе $\mathbb{Z}^g_{[c_1],[c_2],\ldots,[c_g]}$, поэтому:

$$\forall K_\gamma : \partial_2(K_\gamma) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} \partial_2 = 0.$$

При этом

$$H_2(N_g) = \operatorname{Ker} \partial_2 / 0 = 0.$$

Домашняя задача о значимости эйлеровой характеристики

Замечание. *Достоинство эйлеровой характеристики заключается в том, что нам достаточно знать лишь количество клеток, а не способ их склеивания.*

Домашняя задача 1 (**). *Пусть имеется категория CW-finite. И пусть имеется инвариант:*

$$\chi : X \to \chi(X) \subset M.$$

При этом для инварианта верно следующее:

1. *χ – гомотопический инвариант, то есть:*

$$X \sim Y \Rightarrow \chi(X) = \chi(Y).$$

2. *χ есть функция аргументы которой являются количеством клеток:*

$$\chi = F(c_0, c_1, c_2, \dots).$$

Необходимо доказать:

$$\exists \varphi : \mathbb{Z} \to M$$
$$\varphi(X) = \varphi\left(\chi(X)\right).$$

Теорема о эйлеровой характеристике

Теорема.

$$\chi(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \, rank \, H_n(X).$$

Доказательство. Рассмотрим конечный цепной комплекс, соответствующий X:

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

Пусть $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n$ – циклы, $B_n = \operatorname{Im} \partial_n$ – границы, $H_n = Z_n / B_n$ – гомологии.

Имеем набор:

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0.$$

Это действительно короткая точная последовательность. Очевидно, что $Z_n \to C_n$ – мономорфизм, $C_n \to B_{n-1}$ – эпиморфизм.

Вторая точная последовательность имеет вид:

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0.$$

Замечание. *Если A, B, C – конечно порождённые абелевы группы, то*

$$0 \to A \to C \to B \to 0 \Rightarrow rk C = rk\, A + rk\, B.$$

Следовательно имеем:

$$\operatorname{rk} C_n = \operatorname{rk} Z_n + \operatorname{rk} B_{n-1},$$
$$\operatorname{rk} Z_n = \operatorname{rk} B_n + \operatorname{rk} H_n.$$

Откуда:

$$\operatorname{rk} C_n = \underbrace{\operatorname{rk} B_n + \operatorname{rk} H_n}_{\operatorname{rk} Z_n} + \operatorname{rk} B_{n-1}.$$

Рассмотрим альтернированную сумму (суммы с B_n сократятся):

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{rk} C_n = \sum_n (-1)^n \operatorname{rk} H_n.$$

Доказываемое утверждение получено. □

Семинар 8. Лемма о пяти гомоморфизмах (5-лемма)

Лемма о пяти гомоморфизмах

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_5 \arrow[d, equal] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим элемент $b_3 \in B_3$:

$$b_3 \to b_4 \in B_4 \to 0 \in B_5,$$

Поднимая, получим, что:

$$a_4 \in A_4 \to a_3 \in A_3 \Rightarrow a_3 \to a_4.$$

При этом:

$$a_3 \to \tilde{b}_3 \in B_3 \to b_4,$$

То есть:

$$\begin{tikzcd}
a_3 \arrow[r] \arrow[d] & a_4 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\tilde{b}_3 \arrow[r] & b_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Следовательно:

$$b_2 \in B_2 \to b_3 - \tilde{b}_3 \to 0.$$

Поднимая b_2, получим:

$$a_2 \to \tilde{a}_3 \in A_3 \to b_3 - \tilde{b}_3$$

То есть:

$$\begin{tikzcd}
a_2 \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{a}_3 \arrow[d] & \\
b_2 \arrow[r] & b_3 - \tilde{b}_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Окончательно получаем:

$$\left.\begin{array}{ccc} \tilde{a}_3 & \to & b_3 - \tilde{b}_3 \\ a_3 & \to & \tilde{b}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{a}_3 + a_3 \to b_3.$$

Получили доказательство того, что отображение является эпиморфизмом. Докажем, что оно также является мономорфизмом.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a_3 \in A_3$ такой, что:

$$a_3 \to 0 \in A_4,$$

Опуская, получим:

$$0 \in B_3 \to 0 \in B_4.$$

Рассмотрим также прообраз a_3 – a_2:

$$a_2 \in A_2 \to a_3 \in A_3,$$

При этом

$$a_2 \in A_2 \to b_2 \in B_2 \to 0 \in B_3.$$

Так как b_2 переходит в 0, то:

$$\exists\, b_1 \in B_1 \to b_2 \Rightarrow \exists\, a_1 \in A_1 \to b_1 : a_1 \to a_2 \in A_2.$$

То есть:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r] \arrow[d] & a_2 \arrow[r] \arrow[d] & a_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Следовательно,

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \Rightarrow a_3 = 0.$$

□

Решение задачи 3.13

Задача (3.13)**.** *Вычислить гомологию тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, пользуясь клеточным разбиением.*

Разбивая каждую сферу на точку и всё остальное, получим, что в торе содержится: одна 0-мерная клетка, три 1-мерных клеток, три 2-мерные и одну 3-мерную клетку.

Замечание. *В общем случае, для тора, T^n, имеем C_n^k k-мерных клеток.*

Замечание. *Исходное представление равносильно представлению $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ (см. Рис. 1).*

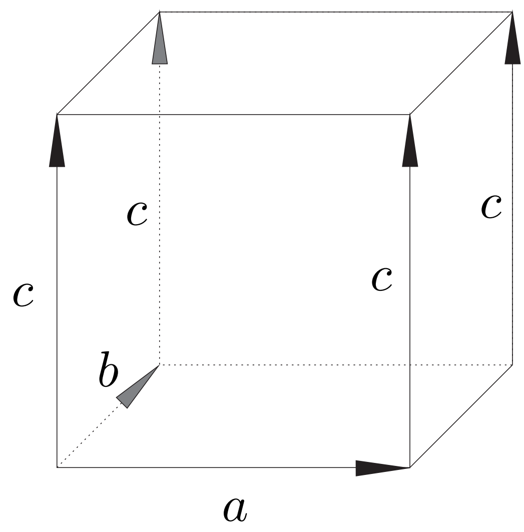


Рис. 1: Представление $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Напомним, как строился комплекс клеточных цепей:

$$C_n(X) = \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z} \left\langle e_\alpha^n \right\rangle.$$

Пусть единственная точка – v, тогда:

$$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \left\langle v \right\rangle \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \left\langle a, b, c \right\rangle.$$

Лемма. *Для произвольного набора вершин и ориентированных рёбер в клеточном пространстве, дифференциал, натянутый на ориентированное ребро, определяется разницей конца ребра и его начала.*

Замечание. *Из данной леммы следует, что дифференциал любой петли – тождественно нулевой.*

Заметим, что для рассмотренного тора замечание уместно, так как вершина, v, единственна.

Получили:

$$H_0(T^3) = \mathbb{Z}.$$

Также напомним, что:

$$\partial \left(e_\alpha^n\right) = \sum_{\text{finite}} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

где $d_{\alpha\beta} = \deg \left(S^{n-1} \to S^{n-1}\right)$.

Причём отображения следующие:

$$\Phi_\alpha : D^n \to X,$$
$$\Phi_\alpha|_{\partial D^n} = \Phi_\alpha|_{S^{n-1}} \to X^{n-1}.$$

Выделим сферу S_β^{n-1}:

$$X^{n-1}/X^{n-2} \cup e_\gamma^{n-1} \forall\, \gamma \neq \alpha = S_\beta^{n-1}.$$

При этом отображение между сферами S^{n-1}, S_β^{n-1} имеет степень в виде целого числа. Сформулируем вспомогательную лемму для дальнейших рассуждений.

Лемма. *Пусть имеется отображение, f:*

$$f : S^n \to S^n.$$

Справедливо следующее:

$$\forall\, g \sim f : deg\, f = deg\, g.$$

Отображение g выберем следующим образом (см. Рис. 2):

$$\forall\, f\, \exists\, g \sim f\, \exists y_0 \in S_2^n\, \exists\, \Omega_\varepsilon(y_0) : g^{-1}\left(D_\varepsilon^n(y_0)\right) = D_1^n(x_1) \sqcup \cdots \sqcup D_s^n(x_s).$$

При этом, каждая такая окрестность $D_i^n(x_i)$ точки $x_i \in S_1^n$ ориентирована определённым образом. При отображении в окрестность $\Omega_\varepsilon(y_0)$ точки $y_0 \in S_2^n$, ориентация либо сохраняется (тогда полагаем $a_i = +1$), либо меняется (полагаем $a_i = -1$). Тогда:

$$deg\, g = \sum_i a_i.$$

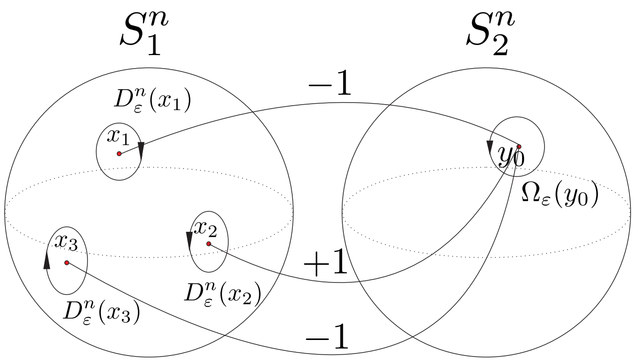


Рис. 2: Построение отображения g.

Рассмотрим степень отображения слова $aba^{-1}b^{-1}$. Используя приведённую лемму, получим, что степень – нулевая, так как ориентация противолежащих рёбер разная.

Аналогично, для 3-мерной цепи, получим, что противоположные грани имеют разную ориентацию и степень нулевая.

Окончательно, получаем цепь для дифференциалов:

$$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\langle v\rangle \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\langle a,b,c\rangle \xleftarrow{0} \langle p,q,r\rangle \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\langle \gamma\rangle .$$

Замечание. *Для T^n доказательство и рассуждения аналогичны.*

Замечание. *Когда у CW-комплекса все дифференциалы нулевые, то гомология изоморфна комплексу.*

Получаем гомологии из приведённых рассуждений:

$$H_0 = \mathbb{Z},\ H_1 = \mathbb{Z}^3,\ H_2 = \mathbb{Z}^2,\ H_3 = \mathbb{Z}.$$

Замечание. *В общем случае, для T^n имеем гомологию k-мерной клетки: $H_k = C_n^k$.*

Замечание. *Частный случай проявления двойственности Пуанкаре:*

$$C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow H_{n-k}(T^n) \simeq H_k(T^n).$$

Решение задачи 13.16

Задача (13.16)**.** *Имеется n-листное накрытие над конечным клеточным пространством:*

$$\begin{array}{c} X \\ \big\downarrow \\ Y \end{array}$$

Y – конечный CW-комплекс.

Тогда для X также имеется клеточное разбиение, причём клетка X переходит в клетку Y.

Доказательство. Рассмотрим двухмерную открытую клетку, $e_\alpha^2 \subset Y$. Рассмотрим её прообраз в X (см. Рис. 3).

Для любого линейно связного пространства $Z \subset Y$:

$$\begin{array}{c} f^{-1}(Z) \\ \Big\downarrow \\ Z \end{array}$$

При этом

$$f^{-1}(Z) \subset_{\blacktriangleright} X.$$

Так как клетка стягиваемая, она является односвязной.

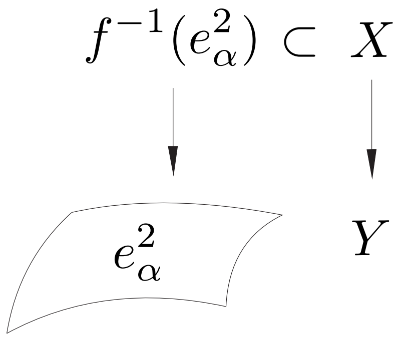


Рис. 3: Отображение двухмерной открытой клетки.

Лемма. *Пусть Z – линейно связное и $\pi_1(Z) = 0$, тогда для n-листного накрытия $g : U \to Z$:*

$$U \simeq Z \times \Gamma.$$

Для любой открытой клетки её прообраз также разбивается на открытые клетки. Необходимо показать, что отображения:

$$\Phi_\alpha : D^n \to Y,$$

соответствуют отображениям полученных клеток.

Доказательство оставшегося факта предлагается читателю. □

Замечание. *Из предыдущей задачи имеем:*

$$\chi(X) = n \cdot \chi(Y).$$

Домашняя задача

Домашняя задача 1.

$$S_g : \chi(S_g) = 2 - 2g.$$

Необходимо найти неориентированную поверхность H, такую, что над ним существует двулистное накрытие, дающее S_g. При этом:

$$\chi(H) = 1 - g.$$

Семинар 9. Цепные отображения цепных комплексов

Аугментированный цепной комплекс

Определение. *Пусть имеется топологическое пространство X и комплекс сингулярных цепей:*

$$X \to C_n(X) \to C_{n-1}(X) \to \dots \to C_1(X) \to C_0(X) \to 0.$$

Заменим последний элемент на эпиморфизм:

$$X \to C_n(X) \to C_{n-1}(X) \to \dots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \to 0.$$

Для этого переведём цепь в 0-цепь:

$$\sum_i k_i \sigma_i \to \sum_i k_i.$$

ε в представленной выше цепи – аугментация.

Замечание. *При этом, получили снова цепной комплекс.*

Доказательство. Для доказательства этого факта необходимо проверить, что выполнено:

$$\varepsilon \partial_1 = 0.$$

Рассмотрим произвольную образующую в цепи $\sigma_1 = \sigma\left([v_0, v_1]\right) = C_1$ – одномерный сингулярный симплекс.

При $v_0 = v_1$:

$$\partial_1\left(\sigma_1\right) = 0.$$

При $v_0 \neq v_1$:

$$\varepsilon \partial_1\left(\sigma_1\right) = \varepsilon\left([v_1] - [v_0]\right),$$

По свойству аугментации:

$$\varepsilon\left([v_1] - [v_0]\right) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon \partial_1\left(\sigma_1\right) = 0.$$

Таким образом, все свойства выполнены и это также является комплексом. □

У рассмотренного аугментированного цепного комплекса имеются гомологии, $\tilde{H}_n(X)$, при этом:

$$n \geqslant 1 : \tilde{H}_n(X) = H_n(X).$$

При $n = 0$ получаем новую группу $\tilde{H}_0(X)$. По определению:

$$\tilde{H}_0(X) = \operatorname{Ker} \varepsilon / \operatorname{Im} \partial_1,$$

При этом:

$$H_0(X) = C_0(X) / \operatorname{Im} \partial_1.$$

Для $\tilde{H}_0(X), H_0(X)$ имеем разные подгруппы факторизованные по одному и тому же. Естественным образом получаем, что смежные классы подгруппы $\operatorname{Ker} \varepsilon$ лежат в большой подгруппе C_0, отфакторизованные по $\operatorname{Im} \partial_1$. Имеет место каноническое вложение (См. Рис. 1):

$$\tilde{H}_0(X) \hookrightarrow H_0(X)$$

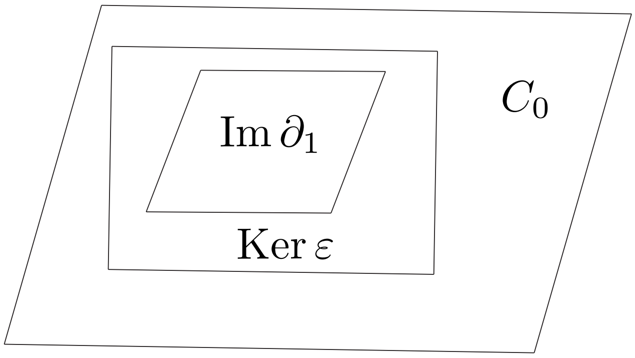


Рис. 1: Вложение подгрупп.

Заметим, что для фактор-пространства верно:

$$H_0(X) / \tilde{H}_0(X) = C_0(X) / \operatorname{Ker} \varepsilon \cong \operatorname{Im} \varepsilon = \mathbb{Z}.$$

Вопрос. *Верно ли следующее утверждение?*

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Введя новые обозначения, имеем доказываемое утверждение:

$$A = B \oplus \mathbb{Z}.$$

А также имеем связь:

$$A/B = \mathbb{Z}.$$

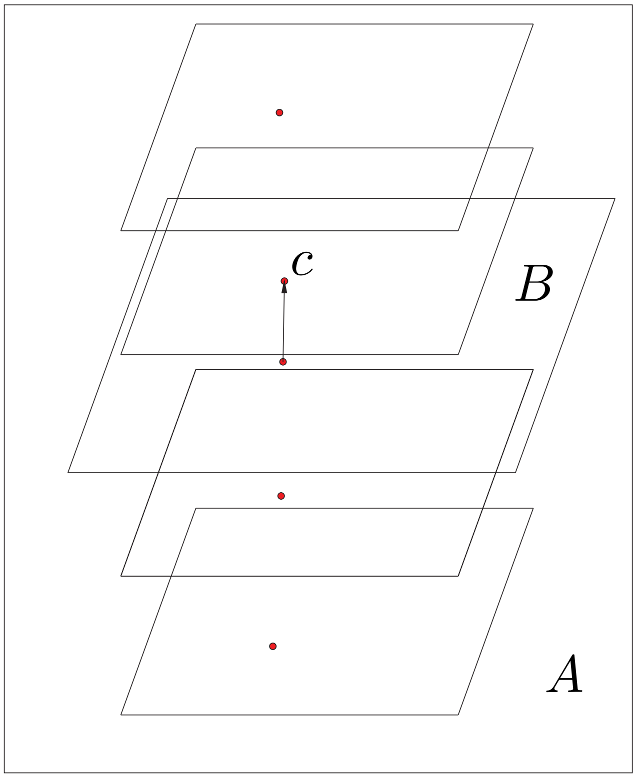


Рис. 2: Построение изоморфизма.

Для доказательства утверждения, необходимо в каждом смежном классе выбрать один элемент – c (См. Рис. 2). Тогда верно следующее утверждение:

$$A = B + k \cdot c, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Получили изоморфизм.

Замечание. *Заметим, что для произвольных не абелевых групп данное утверждение не верно.*

Рассмотрим процесс расщепления в общем случае. Пусть имеется короткая последовательность абелевых групп:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0,$$

где i – вложение, j – эпиморфизм. Соответственно имеем:

$$\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j.$$

Откуда следует:

$$B/i(A) \cong C.$$

При расщеплении, между B, C возможно вставить вложение q такое, что:

$$jq = \mathrm{Id}_C.$$

Домашняя задача 1. *Далеко не всякая короткая последовательность абелевых групп расщепляется, однако, если*

$$C = \oplus \mathbb{Z},$$

то расщепление всегда существует. Необходимо доказать этот факт.

Цепные отображения цепных комплексов

Пусть имеется два цепных комплекса, связанных цепным отображением – $f.$ следующим образом:

$$(C., \partial) \xrightarrow{f.} (C'., \partial').$$

Отображение цепное в том смысле, что задаёт коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_n \arrow[r, "\partial'"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Естественным образом возникает отображение на гомологию:

$$f_* = H_n(C_0) \to H_n(C'_0).$$

Для этого необходимо рассмотреть отображение:

$$c \in H_n(C_n) \to fc.$$

При этом:

$$\partial\, fc = f\partial\, c = f\, 0 = 0.$$

Следовательно, получили цикл. Рассмотрим корректность определения:

$$[c] \to [fc] = f_*[c].$$

Рассмотрим куда перейдёт другой элемент:

$$[c + \partial\, \tilde{c}] \to fc + f\partial\, \tilde{c}.$$

Учитывая, что

$$f\partial\, \tilde{c} = \partial\, f\tilde{c},$$

Получили цикл, к которому добавляется граница, значит сам цикл не меняется:

$$[c] \to [fc] = f_*[c] = f_*[c + f\partial\,\tilde{c}].$$

Пусть имеются теперь два отображения – f, g:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_n \arrow[r, "\partial'"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

При этом f и g гомотопны:

$$f \sim g:\ \exists F : X \times I \to Y.$$

Тогда можем породить отображение на уровне цепей:

$$f \to f_\#:\ C_n(X) \to C_n(Y).$$

Легко показать, что $f_\#$ – цепное отображение. Аналогично можем ввести $g_\#$. Наша задача – показать, что полученные цепные отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм в гомологии. Для этого необходимо показать, что отображения цепно-гомотопны.

Вернёмся к определению цепной гомотопии между двумя цепными отображениями – f, g:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & C_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \arrow[dl, "P_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \arrow[dl, "P_{n-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_n \arrow[r, "\partial'"] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Таким образом имеем набор гомоморфизных групп:

$$P_n:\ C_n \to C'_{n+1},\ n \geqslant 0.$$

При этом выполняется:

$$P\,\partial + \partial\,P = g - f.$$

Определение. *Введённая P, удовлетворяющая условиям выше, называется цепной гомотопией.*

Проверим, что цепная гомотопия удовлетворяет отношению эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность очевидна. При $f = g$ имеем нулевую гомотопию.

Для того, чтобы поменять f и g местами, необходимо умножить P на -1.

Пусть имеются $h-g$ и $g-f$, то необходимо сложить две цепные гомотопии, получив $h - f$. □

Докажем, что цепно-гомотопное отображение индуцирует один и тот же гомоморфизм двух гомологий.

Доказательство. Возьмём из $H_m(C_\bullet)$ гомологии представленные коциклом $[c]$. По определению:

$$P\,\partial c + \partial P c = gc - fc.$$

Учтём, что gc, fc – коциклы, ∂Pc – граница, а $\partial c = 0$, так как c – цикл.

Так как разность двух циклов равна границе, то они гомологичны, то есть:

$$g_*[c] = f_*[c].$$

□

Призменный оператор

Пусть у нас имеется призма (См. Рис. 3), которую мы разрежем на $n+1$ одномерных симплексов:

$$\Delta^n \times I = [v_0, w_0, w_1, w_2] \cup [v_0, v_1, w_1, w_2] \cup [v_0, v_1, v_2, w_2].$$

В общем случае имеем $n + 1$ симплекс вида:

$$[v_0, v_1, \ldots, v_i, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n].$$

Замечание. *Можно показать, что внутренности полученных симплексов не пересекаются, а замкнутость составляет всю призму.*

Доказательство. Расположим, без ограничения общности, начало координат в афинном пространстве в вершине v_0 и рассмотрим два симплекса при $k > m$:

$$[v_0, v_1, \ldots, v_k, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n], [v_0, v_1, \ldots, v_m, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n].$$

Пусть имеется точка пересечения этих симплексов – x_0. Рассмотрим барицентрические координаты этой точки относительно каждого из симплексов. Для первого симплекса имеем:

$$\sum_{J=0}^{m-1} \lambda_J\, \overrightarrow{v_0 v_J} + \lambda_m\, \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J\, \overrightarrow{v_0 v_J} + \lambda_k\, \overrightarrow{v_0 v_k} + \sum_{J=k}^{n} \hat{\lambda}_J\, \overrightarrow{v_0 w_J}.$$

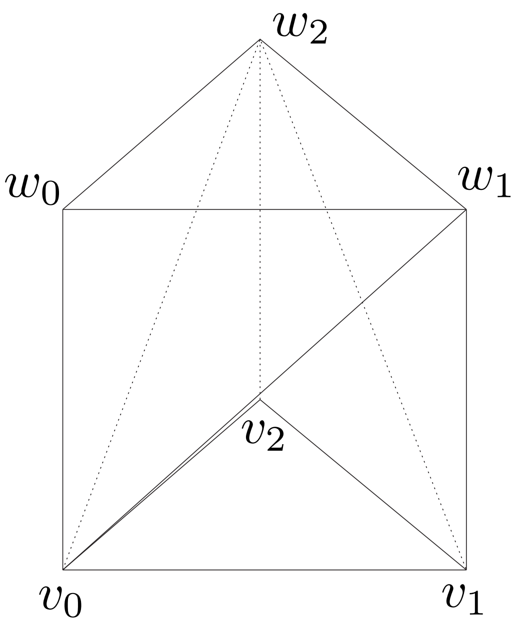


Рис. 3: Разрезание призмы на симплексы.

Для второго симплекса аналогично:

$$\sum_{J=0}^{m-1} \tilde{\lambda}_J \overrightarrow{v_0 v_J} + \tilde{\lambda}_m \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \tilde{\tilde{\lambda}}_J \overrightarrow{v_0 w_J} + \tilde{\tilde{\lambda}}_k \overrightarrow{v_0 w_k} + \sum_{J=k}^{n} \tilde{\tilde{\lambda}}_J \overrightarrow{v_0 w_J}.$$

Спроецируем каждое из полученных соотношений на нижнюю грань призмы. Для первого набора координат получим:

$$P(x_0) = \sum_{J=0}^{m-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 v_J} + \lambda_m \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 v_J} + (\lambda_k + \hat{\lambda}_k) \overrightarrow{v_0 v_k} + \sum_{J=k+1}^{n} \hat{\lambda}_J \overrightarrow{v_0 v_J}.$$

При проекции второго набора координат, получим:

$$P(x_0) = \sum_{J=0}^{m-1} \tilde{\lambda}_J \overrightarrow{v_0 v_J} + (\tilde{\lambda}_m + \tilde{\tilde{\lambda}}_m) \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \tilde{\tilde{\lambda}}_J \overrightarrow{v_0 v_J} + \tilde{\tilde{\lambda}}_k \overrightarrow{v_0 v_k} + \sum_{J=k}^{n} \tilde{\tilde{\lambda}}_J \overrightarrow{v_0 v_J}.$$

За исключением коэффициента при $\overrightarrow{v_0 v_0} = \vec{0}$, коэффициенты при одинаковых векторах должны совпасть, поэтому имеем:

1. $$1 \leqslant J \leqslant m-1 : \ \lambda_J = \tilde{\lambda}_J$$

2. $$J = m : \ \lambda_m = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\tilde{\lambda}}_m$$

3.
$$m+1 \leqslant J \leqslant k-1 : \ \lambda_J = \tilde{\tilde{\lambda}}_J$$

4.
$$J = k : \ \lambda_k + \hat{\lambda}_k = \tilde{\tilde{\lambda}}_k$$

5.
$$k+1 \leqslant J \leqslant : \ \hat{\lambda}_J = \tilde{\tilde{\lambda}}_J$$

Рассмотрим члены, которые останутся после разности:

$$\lambda_m \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 v_J} + \hat{\lambda}_k \overrightarrow{v_0 w_k} + \lambda_k \overrightarrow{v_0 v_k} = \tilde{\lambda}_m \overrightarrow{v_0 v_m} + \tilde{\tilde{\lambda}}_m \overrightarrow{v_0 w_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 w_J} + \tilde{\tilde{\lambda}}_k \overrightarrow{v_0 w_k}.$$

Так как
$$\lambda_m = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\tilde{\lambda}}_m \geqslant \tilde{\lambda}_m,$$

А также
$$\tilde{\tilde{\lambda}}_k = \lambda_k + \hat{\lambda}_k \geqslant \hat{\lambda}_k,$$

То можем переписать:

$$\left(\lambda_m - \tilde{\lambda}_m\right) \overrightarrow{v_0 v_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 v_J} + \lambda_k \overrightarrow{v_0 v_k} = \tilde{\tilde{\lambda}}_m \overrightarrow{v_0 w_m} + \sum_{J=m+1}^{k-1} \lambda_J \overrightarrow{v_0 w_J} + \left(\tilde{\tilde{\lambda}}_k - \hat{\lambda}_k\right) \overrightarrow{v_0 w_k}.$$

Заметим, что левая часть равенства полностью лежит в нижнем основании призмы (См. Рис. 3), а коэффициенты перед векторами в правой части равенства – не отрицательные. Следовательно, все коэффициенты в сумме должны быть нулевыми, так как рассматривается сумма базисных векторов.

Получаем, что ненулевые коэффициенты возможны только при векторах, которые содержатся, как в первом представлении, так и во втором (случаи 1 и 5), то есть точка пересечения x_0 лежит точно на границе симплексов – на следующей выпуклой оболочке:

$$\mathrm{Conv}\,[v_0, v_1, \ldots, v_m, w_{k+1}, \ldots, w_m].$$

□

Отображение призменного оператора

Пусть отображения f и g (См. Рис. 4) – гомотопны и

$$F : \ X \times I \to Y.$$

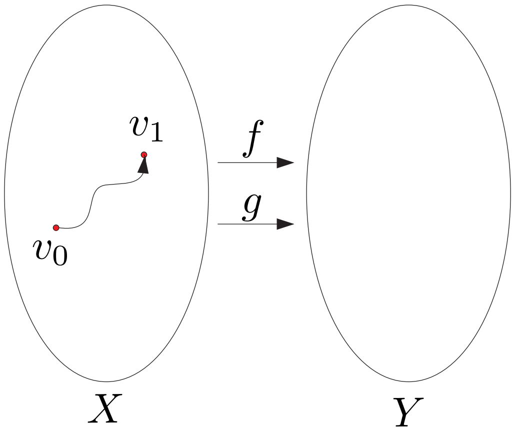


Рис. 4: Гомотопные отображения.

Призменный оператор

$$P_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y),$$

Действует следующим образом:

$$\Delta^n \times I \underbrace{\xrightarrow{\sigma_0 \times \mathrm{id}} X \times Y \xrightarrow{F}}_{F\cdot(\sigma_0 \times \mathrm{id})} Y.$$

Рассмотрим случай $N = 1$ (См. Рис. 5). Имеем отображение:

$$(t_0, s) \to (\sigma(t_0), s)\,.$$

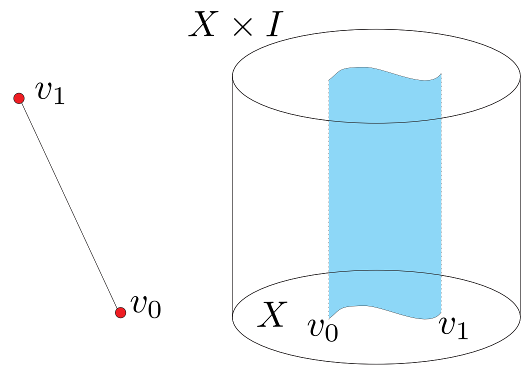


Рис. 5: $X \times I$ при $N = 1$.

Действие призменного оператора описывается как:

$$P_n(\sigma_0) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(F \cdot (\sigma_0 \times \mathrm{id})\right)|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_n]}$$

Замечание. *Призменный оператор задаёт цепную гомотопию.*

Доказательство.
$$\partial P_n + P_n\partial = g_\# - f_\#.$$

При N $=$ 1 (См. Рис. 6) имеем отображение.

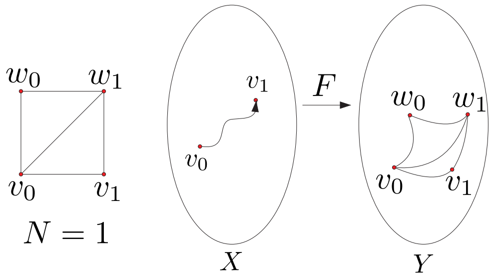


Рис. 6: Пример отображения при $N = 1$.

Необходимо доказать:
$$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial.$$

Применяя симплекс к левой части, получим два треугольника и возьмём у них границу:

$$\partial P = [w_0, w_1]-[v_0, w_1]+[v_0, w_0]-[v_1, w_1]+[v_0, w_1]-[v_0, v_1] = [w_0, w_1]+[v_0, w_0]-[v_1, w_1]-[v_0, v_1].$$

Осталось учесть, что:

$$[v_0, w_0] - [v_1, w_1] = -P\partial = -\left([v_1, w_1] - [v_0, w_0]\right).$$

□

Семинар 10. Теорема вырезания

Формулировка теоремы вырезания

Теорема 1 (Вырезания)**.** *Пусть имеется топологическая пара (X, A) и множество Z, которое мы будем вырезать, при этом*

$$\overline{Z} \subset int\, A$$

Тогда имеем свойство:

$$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus Z, A \setminus Z).$$

Дадим эквивалентную формулировку теоремы вырезания.

Теорема 2. *Пусть*

$$X = A \cup B$$

При этом

$$X = int\, A \cup int\, B.$$

Тогда

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A).$$

Докажем эквивалентность формулировок.

Доказательство. Пусть $Z = X \setminus B$. Тогда

$$\overline{Z} \subset \operatorname{int} A,$$

Так как имеет место трихотомия:

$$X = \operatorname{int} B \sqcup \partial B \sqcup \operatorname{int} (X \setminus B).$$

Тогда

$$\overline{Z} = \overline{X \setminus B} = \partial B \sqcup \operatorname{int} (X \setminus B).$$

Однако

$$X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \Rightarrow \partial B \sqcup \operatorname{int} (X \setminus B) \subset \operatorname{int} A.$$

Аналогично, можно доказать, и вторую формулировку через первую. □

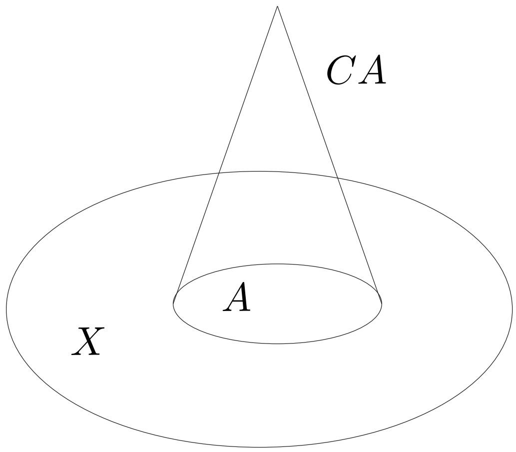


Рис. 1: Пара пространств с конусом.

Следствие из теоремы вырезания

Рассмотрим пару пространств, к которой "приклеен"конус (См. Рис. 1).

Имеет место изоморфизм:

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X, A),\ n \geqslant 0.$$

Доказательство. Заметим, что $(X \cup CA, CA)$ – топологическая пара. Однако, CA – стягиваемый.

Имеем последовательность пар:

$$\underbrace{\tilde{H}_n(CA)}_{0} \longrightarrow \tilde{H}_n(X \cup CA) \longrightarrow \tilde{H}_n(X \cup CA, A) \xrightarrow{\partial} \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(CA)}_{0}, \longrightarrow \dots$$

Следовательно

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong \tilde{H}_n(X \cup CA, A).$$

Пусть $Z = V$ – вершина конуса. Рассмотрим гомморфизм

$$H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus V, CA \setminus V) \cong H_n(X, A).$$

Так как, если $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$, то:

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y, B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

В нашем случае имеем по Лемме о 5 гомоморфизмах:

$$\begin{tikzcd}
H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(CA \setminus V) \arrow[r] & H_n(X \cup CA \setminus V) \arrow[r] & H_n(X \cup CA \setminus V, CA \setminus V) \arrow[r] & H_{n-1}(CA \setminus V)
\end{tikzcd}$$

□

Корасслоение

Определение (Пара Борсука)**.** *Слабое корасслоение:*

$$A \xrightarrow{f-\text{инъективно}} X$$

В случае Хаусдорфовости (T_2) для (X, A), пусть имеется произвольное отображение (См. Рис. 2)

$$F: \; X \to Y, \; f = F|_A.$$

Тогда при включении параметра гомотопии у f – f_t, всегда должна существовать F_t, продолжающая f_t.

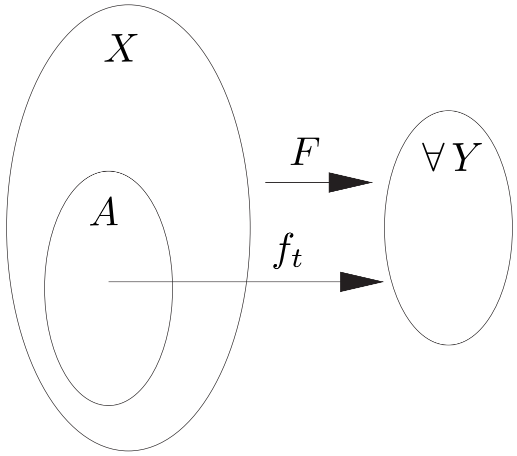


Рис. 2: Иллюстрация к определению слабого корасслоения.

Домашняя задача 1. *Доказать, что (X, A) не является в случае Рис. 3*

Теорема о существовании фактор-отображения

Теорема 3. *Пусть $(X, A)\overset{T_2}{-}$ слабое корасслоение, тогда имеется фактор-отображение:*

$$q: \; (X, A) \to (X/A, A/A)$$

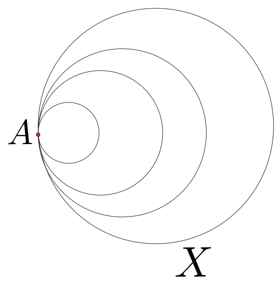


Рис. 3: К формулировке домашнего задания.

Данное отображение индуцирует гомоморфизм в гомологиях:

$$q_* : H_n(X, A) \cong \underbrace{H_n(X/A, pt)}_{\tilde{H}_n(X/A)}, \ \forall n \geqslant 0.$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущей идеей – сделаем конус над A (См. Рис. 4). (X, A) – слабое расслоение, необходимо доказать, что $(X \cup CA, CA)$ – также

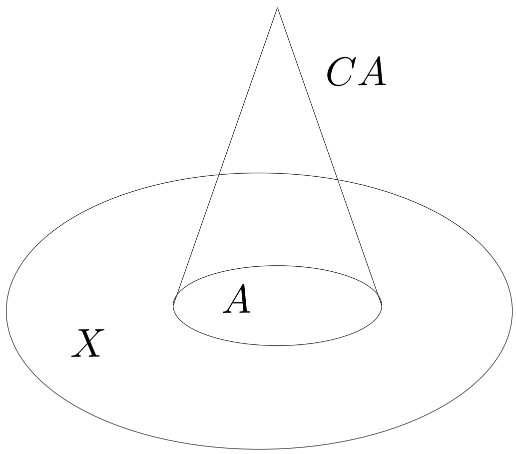


Рис. 4: Воспроизводим конус над A.

слабое расслоение.

Если имеется отображение в Y, то при задании гомотопии на CA, получаем гомотопию, заданную на A, которая продолжается на X для слабого расслоения.

Из предыдущих курсов была теорема:

Если имеется слабая разреженность $(X \cup CA, CA)$ и CA – стягиваемое, то

$$q : \ X \cup CA \to X \cup CA/CA$$

Данное отображение задаёт гомотопическую эквивалентность.

Из гомотопической эквивалентности следует:

$$H_n(X \cup CA) \cong H_n(X/A).$$

Окончательно, имеем:

$$q_* : \underbrace{H_n(X, A)}_{\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong \tilde{H}_n(X/A)} \cong H_n(X/A, \mathrm{pt}) \cong \tilde{H}_n(X/A).$$

□

Домашняя задача 2. *Доказать, что* (CA, A) *– слабое расслоение.*

Приведённая гомология сферы

Теорема.

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}, i = n, \\ 0, i \neq n. \end{bmatrix}$$

Доказательство. Рассмотрим пару (D^n, S^{n-1}). Напишем для неё длинную точную последовательность гомологий $(n > 0)$:

$$\tilde{H}_q(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_q(D^n) \longrightarrow \tilde{H}_q(D^n/S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(D^n).$$

Так как

$$\tilde{H}_q(D^n) = 0,\ \tilde{H}_{q-1}(D^n) = 0,$$

То получаем изоморфизм:

$$\tilde{H}_q(D^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}).$$

Получаем доказательство шага индукции от S^{n-1} к S^n.

При $n = 0$ теорема, очевидно, верна. Тем самым, утверждение доказано по индукции. □

Изоморфизм надстройки

Теорема (Изоморфизм надстройки)**.**

$$\forall\, X :\ \tilde{H}_q(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{q-1}(X).$$

Надстройка ΣX *аналогична стягиванию каждого из оснований цилиндра в точку.*

Доказательство. Рассмотрим пару (CX, X) – надстройка без нижнего основания. Её точная гомологическая последовательность:

$$\tilde{H}_q(X) \longrightarrow \tilde{H}_q(CX) \longrightarrow \tilde{H}_q(CX/X) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(CX).$$

Так как

$$\tilde{H}_q(CX) = 0,\ \tilde{H}_{q-1}(CX),$$

Имеем изоморфизм:

$$\tilde{H}_q(\Sigma X) = \tilde{H}_q(CX/X) \cong \tilde{H}_{q-1}(X).$$

□

Инвариантность размерности

Теорема (Инвариантность размерности)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$*, при этом,* U, V *– открытые множества. Тогда не существует гомеоморфизма:*

$$\nexists h : U \to V.$$

Доказательство. Рассмотрим пару $(U, U \setminus \{x_0\})$. Однако

$$H_q(U, U \setminus \{x_0\}) = H_q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\}).$$

По теореме вырезания, пусть:

$$B = U, A = \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\}, X = \mathbb{R}^m,$$

Тогда:

$$H_q(B, A \cap B) = H_q(X, A).$$

Имеем:

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \to \tilde{H}_q(\mathbb{R}^m) \to \tilde{H}_q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\}) \to \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \to \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^m).$$

Так как

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^m) = 0, \tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^m) = 0,$$

Тогда имеем:

$$\tilde{H}_{q-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{m-1}) = \left[\begin{array}{l}\mathbb{Z}, q = m, \\ 0, q \neq m.\end{array}\right.$$

Откуда получаем

$$H_q(V, V \setminus \{x_0\}) = \left[\begin{array}{l}\mathbb{Z}, q = n, \\ 0, q \neq n.\end{array}\right.$$

Если гомеоморфизм h существует, то

$$H_q(V, V \setminus \{x_0\}) \cong H_q(U, U \setminus \{x_0\}).$$

□

Семинар 11. Решение задач с теоремой вырезания

Вспомогательная лемма для доказательства теоремы вырезания

Рассмотрим произвольный симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^N$, определённый своими вершинами $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n]$. Используя барометрические координаты мы можем произвести барицентрическое разбиение данного симплекса (см. Рис. 1).

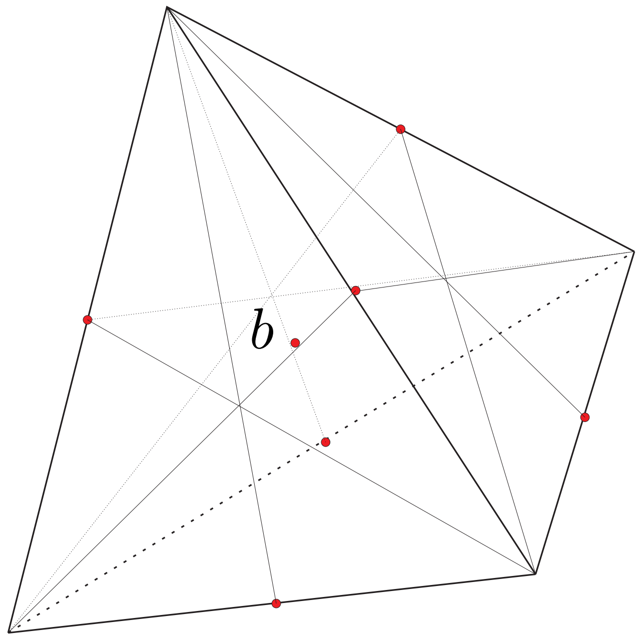


Рис. 1: Барицентрическое разбиение компакта.

Для доказательства теоремы о вырезании необходимо доказательство следующей леммы.

Лемма. *Для любого симплекса из барицентрического разбиения верно:*

$$diam\big([b, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}]\big) \leqslant \frac{n}{n+1}\, diam(\Delta^n),$$

где b – барицентрический центр исходного симплекса (см. Рис. 1).

Доказательство. Для отрезка доказательство очевидно, так как получаем равенство:

$$\big([b, s_0]\big) = \big([b, s_1]\big) = \{n = 1\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}\Delta^1.$$

Рассмотрим доказательство для треугольника. При барицентрическом разбиении получим 6 симликсов (см. Рис. 2). Без ограничения общности будем считать, что исходный симплекс был произвольной формы. Необходимо доказать:

$$\operatorname{diam}\big([b, s_0, s_1]\big) \leqslant \{n = 2\} \leqslant \frac{2}{3}\operatorname{diam}(\Delta^2).$$

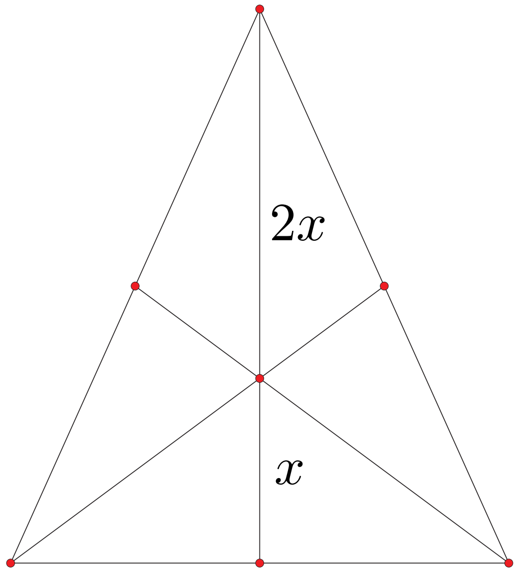


Рис. 2: Барицентрическое разбиение треугольника.

Заметим, что для любого выпуклого компакта находится пара точек на границе, которая осуществляет максимум расстояния в данном компакте, то есть исходный диаметр. Продолжая рассуждение, заметим, что для выпуклых многогранников максимум достигается на паре вершин. Для этого достаточно выполнить построение до треугольника (см. Рис. 3) и заметить, что одна из сторон (AB или AC) больше исходного отрезка – AM. Для медианы треугольника имеем наибольшую оценку – медиана точкой пересечения делится в отношении 2 к 1. Для больших размерностей будем иметь n к 1, откуда и следует оценка в виде $\dfrac{n}{n+1}$. □

Замечание. *Заметим, что коэффициент в оценке –* $\dfrac{n}{n+1} < 1$*, следовательно, применяя лемму многократно, мы получим оценку в виде геометрической прогрессии для диаметра симплекса из разбиения, что позволяет доказать, что такие симплексы могут быть сколь угодно малыми.*

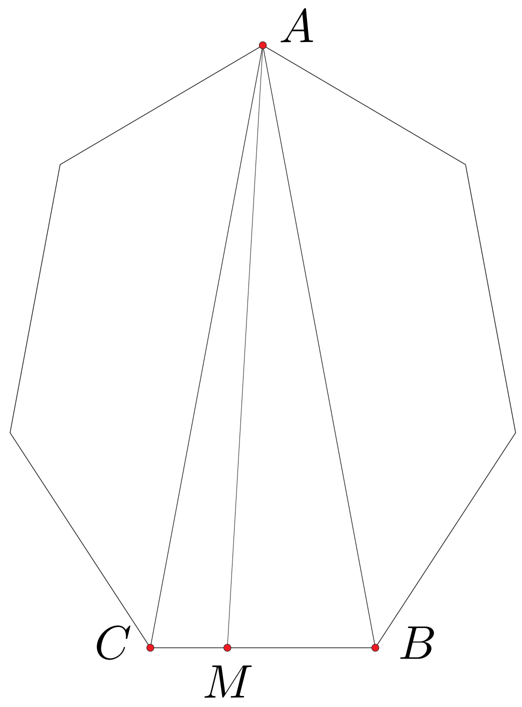


Рис. 3: Построение до треугольника.

Задача о двух расцепленных окружностях в $\mathbb{R}^3$

Задача. *Пусть имеются две окружности в $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ лежащие, без ограничения общности, в плоскости $z = 0$. Необходимо рассчитать:*

$$H_x(\mathbb{R}^3 \setminus C_1 \sqcup C_2).$$

Рассмотрим шар с центром в середине отрезка, соединяющего окружности C_1 и C_2 достаточно большого радиуса. Внешнее пространство рассмотренного шара "аккуратно сожмём"на его сферу (См. Рис. 4). Имеем строго дифракционную ретракцию.

Определение. *В (X, A) имеем ретракцию:*

$$r : X \gg A$$

С параметром гомотопии:

$$r_t : X \to X$$

$$r_t = \left[\begin{array}{c} id, t = 0, \\ r, t = 1, \\ \forall t\, \forall a \in A : r_t(a) = a. \end{array} \right.$$

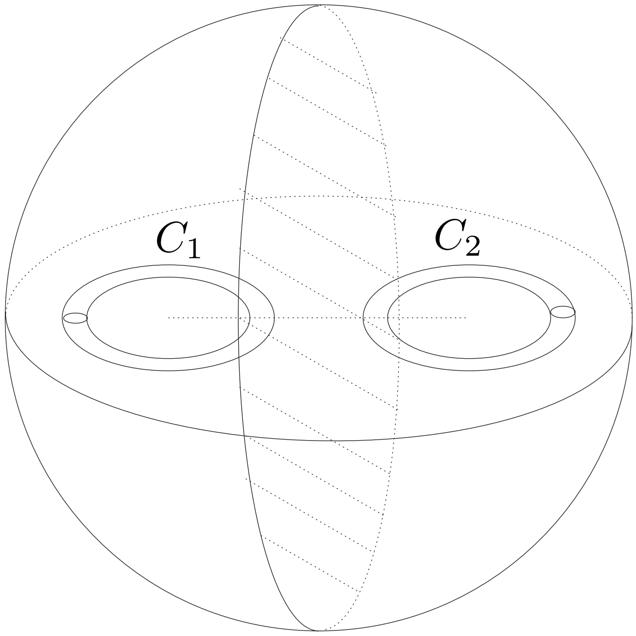


Рис. 4: Задание гомотопически эквивалентного множества.

Имеем гомотопическую эквивалентность рассматриваемого множества и шара без двух окружностей. Каждую из окружностей окружим тором достаточно малого поперечного радиуса так, окружности полностью лежат в каждом торе (См. Рис. 4). Проведём также двумерный диск в шаре, перпендикулярный отрезку, соединяющего окружности, и проходящий через его середину. Стянем пространство по данному диску на основании факта:

$$(X, A) - \text{пара Борсука, } A \sim * \Rightarrow X \setminus A \sim X.$$

Получим новое пространство состоящее из букета двух шаров без двух окружностей (окружённых торами) внутри.

Рассмотрим подробнее шар с вырезанной окружностью (См. Рис. 5 (a)). Вместо окружности вырежем достаточно малый тор. Стянем внешнюю часть шара на тор, не трогая перегородку, натянутую на тор. Получим гомотопически эквивалентный тор без внутренней части с перегородкой в виде двумерного диска (См. Рис. 5 (b)).

Для наглядности можно рассмотреть сжатие среза исходного множества, а после получить тор с перегородкой, вращая сжавшееся множество по вертикальной оси (См. Рис. 5 (c)).

Наше исходное пространство Z представимо в виде букета двух торов с перегородкой – V_1:

$$Z = V_1 \vee V_1$$

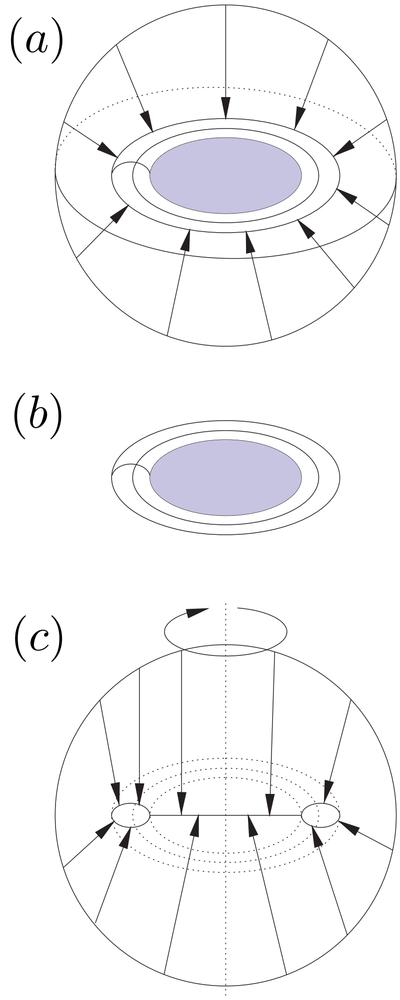


Рис. 5: Получение тора с перегородкой.

Заметим, что если сжать V_1 по перегородке, то получим двумерную сферу с отождествлёнными противолежащими точками:

$$V_1 \sim S^2/N \sim S.$$

Имеем правило гомотопической топологии:

Замечание. *Пусть* (X, A) *– пара Борсука* T_2 *пространств. Пусть имеется отображение:*

$$f:\ A \to Y,$$

И имеем склейку пространств:

$$X \bigcup_f Y = Z_f,$$

При гомотопировании f_t будем получать различные пространства, однако все они будут гомотопически эквивалентны между собой.

На основании этого факта заключаем, что S^2 есть сфера с отрезком, соединяющая противолежащие точки или букет сферы и окружности:

$$V_1 = S^1 \vee S^2.$$

Для всего пространства получаем следующий букет:

$$Z = S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2.$$

А также:

$$\pi_1(Z) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2.$$

Задача о двух зацепленных окружностях в $\mathbb{R}^3$

Заметим, что, гомотопически, R^3 от S^3 отличается выкалыванием точки. Рассмотрим теперь две пересечённые окружности в $\mathbb{R}^3 \setminus *$. Устремим одну из точек одной из окружностей к бесконечности, получив в пределе прямую. Вторая окружность расположена вокруг рассмотренной прямой (См. Рис. 6). Имеем пространство Z:

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus \big(OZ \sqcup \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\} \sqcup a\big).$$

Заметим, что без точки a рассмотрение сильно упрощается. Вокруг оставшейся окружности мы можем провести тор, аналогично предыдущей задаче, и стянуть Z на этот тор. Тогда пространство гомотопически эквивалентно T^2.

Вспомним, что $S^3 = S^1 * S^1$. Также вспомним:

$$X * Y \setminus \big(X \sqcup Y\big) \cong X \times Y \times (0,1).$$

Откуда следует, что при отсутствии a, имели бы:

$$Z \setminus \big(S^1 * S^1\big) = S^1 \times S^1 \times (0,1).$$

Рассчитаем следующую величину:

$$\pi_1\big(T^2 \times (0,1) \setminus *\big).$$

Для этого заметим, что выполнено следующее соотношение:

$$\pi_1(M^3 \setminus *) \cong \pi_1(M^3).$$

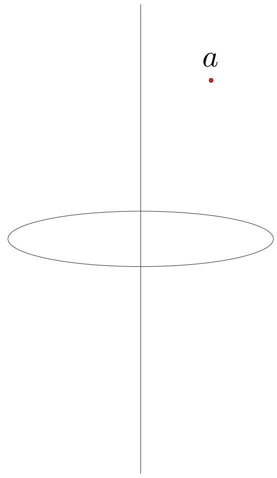


Рис. 6: Упрощение пространства Z.

Действительно, данная характеристика зависит только от двумерной области рассматриваемого пространства. При триангуляции многообразия возможно выбрать такую, что данная точка будет находится внутри какого-либо симплекса. "Выдавим"данную точку из симплекса – то есть отобразим дополнение симплекса на его границу. Тогда двумерный остов не изменяется при сравнении с пространством без выколотой точки.

Замечание. *В рассмотрении ключевую роль играло то, что рассматривалось пространство размерности 3.*

При больших размерностях рассуждения аналогичны и утверждения верны, а при меньших нет.

На основе доказанного соотношения, окончательно получаем:

$$\pi_1(Z) = \pi_1\big(T^2 \times (0,1)\big).$$

Домашняя задача 1. *Свести множество Z из предыдущей задачи к более простому гомотопически эквивалентному и рассчитать $\pi_2(Z)$.*

Семинар 12. Теория категорий

Решение предыдущей задачи

Напомним, что в задаче с пересекающимся окружностями мы получили утолщённый тор без точки (См. Рис. 6):

$$Z \setminus \left(S^1 * S^1\right) = S^1 \times S^1 \times (0, 1).$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо доказать следующую лемму:

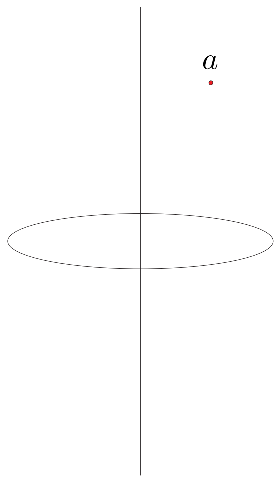


Рис. 1: Упрощение пространства Z.

Лемма 1. *Пусть имеется связное многообразие $M^n (n \geqslant 3)$ с не пустым краем $\partial M^n \neq 0$. Рассмотрим данное многообразие с выколотой точкой из его внутренности. Можно показать, гомотопическую эквивалентность:*

$$M^n \setminus * \cong M^n \vee S^2$$

В общем случае выкалывания нескольких точек имеем:

$$M^n \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \cong M^n \bigvee_{k=1}^{m} S^2.$$

Доказательство. Окружим исходную точку 'пузырьком' – шаром во внутренности M^n (См. Рис. 2 (a)). Заставим 'пузырёк' всплыть на поверхность и за её пределы (См. Рис. 2 (b)). Общий диск, образованный между пузырьком и границей сожмём в точку и получим букет $M^n \vee S^3 \setminus *$ (См. Рис. 2 (c)). Внутренность шара без точки сожмём на границу и получим сферу.

В случае нескольких точек проделываем ту же операцию для каждой из точек. $\square$

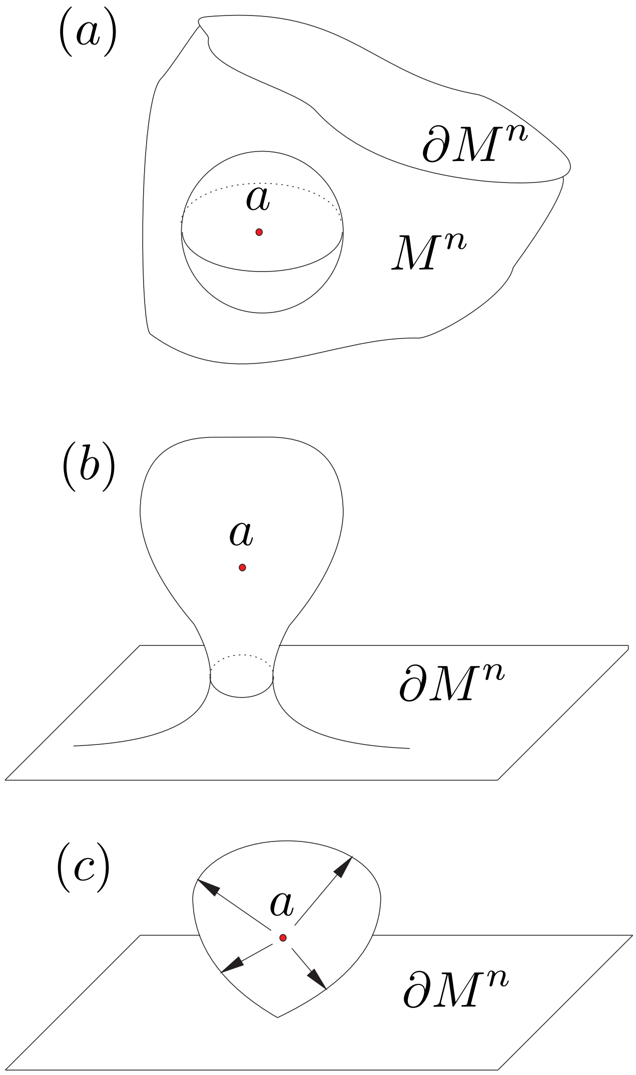


Рис. 2: К доказательству Леммы.

Используя Лемму 1 получаем, что две пересекающиеся окружности в $\mathbb{R}^3$ гомотопически эквивалентны $T^2 \vee S^2$.

Теория категорий

Определение. C – *категория:*

1. $$Ob\,(C) - \textit{класс объектов категории}$$

2. $$\forall X, Y \in Ob\,(C) :\ \exists C(X, Y) = \{\alpha :\ X \to Y\}$$

3. $$\forall X, Y, Z \in Ob\,(C) :\ C(X, Y) \times C(Y, Z) \xrightarrow{\circ} C(X, Z)$$

Причём для операции композиции стрелок должно быть выполнено:

1. $$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

2. $$\forall X \in Ob\,(C)\, \exists\, Id_X : X \to X$$

   Причём
   $$\forall Y\ \forall \alpha \in C(X, Y) :\ \alpha \circ Id_X = \alpha.$$

Пример. *Одним из примеров категорий являются множества: объекты категорий – множества, морфизмы – функции. Группы, абелевы группы также являются категориями.*

Замечание. *В произвольной категории для произвольного X Id_X определён однозначно.*

Доказательство. Воспользуемся категоричным доказательством.

Пусть имеется два различных $\mathrm{Id}_X^1, \mathrm{Id}_X^2$. Тогда исходя из условия на композицию стрелок должны получить:

$$\mathrm{Id}_X^1 \circ \mathrm{Id}_X^2 = \mathrm{Id}_X^1 = \mathrm{Id}_X^2.$$

Получили противоречие с тем, что они различны. □

Свойства в теории категорий

Определение. *Пусть*

$$X, Y \in Ob\,(C) :\ \exists\, \alpha, \beta :\ X \xrightarrow{\alpha} Y,\ X \xleftarrow{\beta} Y.$$

При этом выполнено:

$$\beta \circ \alpha = Id_X.$$

α называют правым обратным к β, а β левым обратным к α.

Замечание. *Пусть*

$$X, Y \in Ob(C) : \exists \alpha, \beta_1, \beta_2 : X \xrightarrow{\alpha} Y, X \xleftarrow{\beta_1} Y, X \xleftarrow{\beta_2} Y.$$

При этом выполнено:

$$\beta_1 \circ \alpha = Id_X, \, \alpha \circ \beta_2 = Id_Y.$$

Тогда:

$$\beta_1 = \beta_2.$$

При этом $\beta = \beta_1 = \beta_2$ называют обратным к α.

Доказательство. Достаточно воспользоваться свойствами композиции, а именно ассоциативностью:

$$\beta_1 \circ \alpha \circ \beta_2 = \beta_1 \circ \underbrace{(\alpha \circ \beta_2)}_{\mathrm{Id}_X} = \beta_1 = \underbrace{(\beta_1 \circ \alpha)}_{\mathrm{Id}_X} \circ \beta_2 = \beta_2.$$

□

Определение. *Отображения – α, β, для которых выполнено:*

$$\alpha \circ \beta = Id_Y, \, \beta \circ \alpha = Id_X,$$

Называют взаимно обратными изоморфизмами.

Пример. *Рассмотрим категорию множеств –$Sets$. В каких случаях к изоморфизму $\alpha : X \xrightarrow{\alpha} Y$ существует правый обратный?*

Нетрудно проверить, что для этого достаточно, чтобы отображение было сюръективным. В случае, когда существует левый обратный, необходима инъективность отображения.

Определение. *Введём понятие подкатегории C относительно категории D: $C \subset D$. Это верно, если выполнены условия:*

1. $$Ob(C) \subset Ob(D).$$

2. $$\forall x, y \in C : C(X, Y) \subset D(X, Y).$$

   При $C(X, Y) = D(X, Y)$ говорят, что C – полная подкатегория.

3. *Правило композиций в C должно сохраняться.*

Пример. *Рассмотрим категорию топологических пространств – Top. В ней имеется подкатегория измеримых пространств: $Tor \supset M$.*

Функтор между категориями

Функтор f между C и D:

$$C \xrightarrow{f} D.$$

Различают два вида функторов: ковариантные и контринвариантные.

Определение. *Ковариантные функторы удовлетворяют условиям:*

1. $$\forall X \in C \,(\textit{Здесь и далее вместо } X \in Ob\,(C))\; \exists!\, f(C) \in D.$$

2. $$\forall X, Y \in C\; \forall \alpha :\; X \xrightarrow{\alpha} Y\; \exists! f(\alpha) :\; f(X) \xrightarrow{f(\alpha)} f(Y).$$

   (a) $$f(\beta \circ \alpha) = f(\beta) \circ f(\alpha).$$

   (b) $$f(Id_X) = Id_{f(X)}.$$

Пример. *Рассмотрим пространство с отмеченной точкой – $Top^\bullet$. Заметим, что имеется функтор:*

$$\pi_1 :\; Top^\bullet \to Groups.$$

Пример. *Рассмотрим векторное пространство над полем чисел – $l = vect(\mathbb{K})$, $dim < +\infty$. Выделим из векторного пространства произвольный элемент $U_0 \in l$. Тогда имеем функтор:*

$$f :\; V \to V \otimes U_0.$$

Замечание. *Ковариантный функтор называется ковариантным, так как выполнено:*

$$\forall x, y\; \forall \alpha :\; x \xrightarrow{\alpha} y :\; \exists! f(\alpha) :\; f(x) \xrightarrow{f(\alpha)} f(y).$$

То есть, при отображении f стрелка сохраняет своё направление. У контрвариантных функций отображение меняет направление стрелки:

$$\forall x, y\; \forall \alpha :\; x \xrightarrow{\alpha} y :\; \exists! f(\alpha) :\; f(x) \xleftarrow{f(\alpha)} f(y).$$

Пример. *Если гомологии, как мы привели выше, являются ковариантным функтором, то когомологии являются контрвариантным функтором.*

Гомологии и когомологии с коэффициентами

Ранее было рассмотрено $X \in Top$, и гомологии:

$$H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z}).$$

При этом имели комплекс цепей:

$$0 \to l_1(X) \to l_2(X) \to \dots$$

Рассмотрим функтор на абелевых группах AG:

$$AG \xrightarrow{-\otimes G} AG,$$

где G – фиксированная абелева группа. При этом каждой группе A соопоставим:

$$A \mapsto A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G = \left(\mathbb{Z} \langle a \otimes g \rangle \Big/ \begin{matrix} (a_1 + a_2) \otimes g = a_1 \otimes g + a_2 \otimes g, \\ a \otimes (g_1 + g_2) = a \otimes g_1 + a \otimes g_2. \end{matrix} \right)$$

При этом $A \xrightarrow{\alpha} B$ продолжается:

$$A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G \xrightarrow{\alpha \otimes Id} B \otimes G.$$

Замечание.

$$\mathbb{Z}_n \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{nod(n,m)}.$$

Доказательство. Рассмотрим образующие a и b. Тогда любой элемент можно записать как:

$$ka \otimes lb = kl \cdot a \otimes b.$$

Получили циклическую группу отфакторизованную по какому-то порядку – $\mathbb{Z} \langle a \otimes b \rangle / \dots$. Имеем:

$$n\,a = 0, m\,b = 0.$$

Знаем, что

$$\exists k, l : \; k\,n + l\,m = (m, n),$$

Откуда получаем требуемое утверждение:

$$k\,n\,a \otimes b + l\,m\,a \otimes b = (n, m)\,a \otimes b = 0.$$

Если же имеем циклическую группу:

$$s\,a \otimes b = 0,$$

Знаем, что

$$(n, m)\, a \otimes b = 0,$$

Следовательно

$$s|(n, m).$$

$\square$

Замечание. *Можно доказать более общий факт:*

$$A/I \otimes B/J \cong A \otimes B/A \otimes J + I \otimes B.$$

Рассмотрим сингулярные гомологии $H_n(X, G)$. Имели сингулярный цепной комплекс:

$$0 \longleftarrow C_0(X) \longleftarrow C_1(X) \longleftarrow \ldots$$

Применим к каждой абелевой группе функтор $\otimes G$:

$$0 \longleftarrow C_0(X) \otimes G \longleftarrow C_1(X) \otimes G \longleftarrow \ldots$$

Получили снова цепной комплекс у которого можно посчитать гомологии. При этом, по определению, его гомологии будут равны $H_n(X, G)$.

Домашняя задача 1. *Доказать, что $\otimes G$ действительно является функтором.*

Рассмотрим группу гомоморфизмов абелевых групп A, B – $Hom(A, B)$. Заметим, что $Hom(A, B)$ также является абелевой группой. Если G – фиксированная группа коэффициентов, то можно рассмотреть функтор – $Hom(-, G)$. Рассмотренный функтор является контрвариантным:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \Rightarrow Hom(B, G) \xrightarrow{H} om(A, G).$$

Домашняя задача 2. *Доказать, что $Hom(-, G)$ является контрвариантным функтором.*

Семинар 13. Спаривание классов когомологий и гомологий

Мономорфизмы и эпиморфизмы

Вопрос. *Пусть имеется произвольная категория C и морфизм α между двумя произвольными элементами категории – $A, B \in C$:*

$$\alpha : \ A \xrightarrow{\alpha} B.$$

Когда морфизм α можно назвать эпиморфизмом?

Дадим на этот счёт определение:

Определение. *Если*

$$\forall C \, \forall \beta_1, \beta_2 \, (\beta_1 \neq \beta_2) : \ A \xrightarrow{\alpha} B \overset{\beta_1}{\underset{\beta_2}{\Longrightarrow}} C,$$

И при этом

$$\beta_1 \circ \alpha \neq \beta_2 \circ \alpha.$$

Тогда α – эпиморфизм.

Пример. *Проверим данное утверждение для Sets – условие сюръективности равносильно условию эпиморфности.*

Доказательство. Если α – сюрьекция, то β_1, β_2 в композиции с α будут давать различные результаты, что и требуется в определении.

Допустим, что условия в определении выполнены и α не является сюрьекцией. Тогда пусть

$$\exists y_0 \in Y : \nexists x_0 \in X : \ \alpha(x_0) = y_0.$$

Пусть Z состоит всего из двух точек

$$Z = \{z_1, z_2\}.$$

Тогда составим два различных морфизма β_1, β_2, действующих следующим образом:

$$\forall y \in Y : \ \beta_1(y) = z_1,$$

$$\forall y \in Y \, (y \neq y_0) : \ \beta_2(y) = z_1 \, (\beta_2(y_0) = z_2).$$

Однако, как нетрудно убедится, композиции будут одинаковыми – получили противоречие. $\square$

Вопрос. *Пусть имеется произвольная категория C и морфизм α между двумя произвольными элементами категории – $A, B \in C$:*

$$\alpha : \ A \xrightarrow{\alpha} B.$$

Когда морфизм α можно назвать мономорфизмом?

Также дадим на этот счёт определение:

Определение. *Если*

$$\forall C \, \forall \gamma_1, \gamma_2 \, (\gamma_1 \neq \gamma_2) : \ D \overset{\gamma_1}{\underset{\gamma_2}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{\alpha} B,$$

И при этом

$$\alpha \circ \gamma_1 \neq \alpha \circ \gamma_2.$$

Тогда α – мономорфизм.

Пример. *Проверим данное утверждение для Sets – условие инъективности равносильно условию мономорфности.*

Доказательство. Если α – инъекция, то γ_1, γ_2, очевидно, в композиции с α будут давать различные результаты, что и требуется в определении.

Допустим, что условия в определении выполнены и α не является инъекцией. Пусть X и Y состоит всего из двух точек, а Z из одной:

$$X = \{x_1, x_2\}, \, Y = \{y_1, y_2\}, \, Z = \{z\}.$$

Тогда составим два различных морфизма γ_1, γ_2, действующих следующим образом:

$$\gamma_1(x_1) = \gamma_1(x_2) = y_1,$$

$$\gamma_2(x_1) = y_1, \, \gamma_2(x_2) = y_2.$$

Однако, как нетрудно убедится, композиции будут одинаковыми – получили противоречие. □

Теорема о эпиморфизме + мономорфизме в T^2

Замечание. *Если морфизм одновременно является эпиморфизмом и мономорфизмом, то он не является изоморфизмом в общем случае для произвольной категории.*

Перед рассмотрением теоремы вспомним следующую лемму:

Лемма (Урысона). *Если имеется пространство X – $T_1 + T_4$, и любые два замкнутых подмножества $A, B: \ A \cap B = \varnothing$, тогда:*

$$\exists f \in \mathbb{C}^1(X): \ X \xrightarrow{f} (0,1), f(A) = 0, f(B) = 1.$$

Теорема. *В категории T_2 компактов, если*

$$\exists f: \ X \xrightarrow{f} Y,$$

где f – мономорфизм и эпиморфизм одновременно, то f – изоморфизм.

Доказательство. Очевидно, что из мономорфности вытекает инъективность.

Покажем, что из эпиморфности следует сюрьективность. Пусть отображения h, g заданы (h можно задать по Лемме Урысона) и отображают Y в интервал $(0,1)$(См. Рис. 1):

$$h(A) = 1, h(B) = 0, g(A) = g(B) = 0.$$

Заметим, что отображения g, h – разные, однако их композиция с f даёт одинаковый результат. □

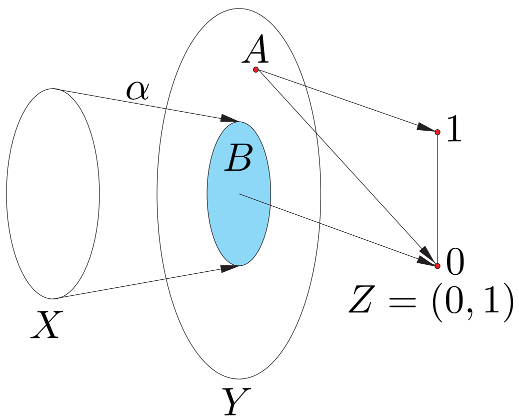


Рис. 1: К доказательству сюрьективности.

Сформулируем лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма. *Пусть имеются T_2 пространства X, Y, и заданы непрерывные отображения:*

$$f, g: \ X \to Y.$$

Тогда, если $f = g$ на всюду плотном подмножестве $X \Rightarrow f = g$.

Доказательство. От противного. Пусть

$$\exists x_0 \in X:\ f(x_0) = y_0,\ g(x_0) = y_1.$$

Окружим каждую из точек в Y малой окрестностью – $y_0 \in V_0, y_1 \in V_1$. Также рассмотрим прообразы этих окрестностей:

$$f(U_0) = V_0,\ g(U_1) = V_1.$$

Следовательно, имеем противоречие с условием Леммы:

$$f(U_0 \cap U_1) \neq g(U_0 \cap U_1)$$

$\square$

Теорема. *В категории сепарабельных метрических пространств M, если*

$$\exists f:\ X \xrightarrow{f} Y,$$

где f – мономорфизм и эпиморфизм одновременно, то f – не является изоморфизмом в общем случае.

Доказательство. Инъективность очевидна, однако сюрьективность не выполняется.

Действительно, рассмотрим отображение

$$f:\ X = (0,1) \xrightarrow{f} Y = [0,1]$$

Очевидно, что f не является изоморфизмом и если мы покажем, что это мономорфизм и эпиморфизм одновременно, то мы конструктивно докажем теорему.

Мономорфность очевидна. На основании доказанной ранее Леммы заключаем, что отображение также является эпиморфизмом. $\square$

Гомологии с коэффициентами

Для топологического пространства X мы имели цепной комплекс из свободных абелевых групп, гомологии которых равны гомологиям X:

$$0 \longleftarrow C_0(X) \longleftarrow C_1(X) \longleftarrow C_2(X) \longleftarrow \ldots$$

Применим следующий функтор $-\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} G$ к исходному комплексу и получим новый комплекс:

$$0 \longleftarrow C_0(X,G) \longleftarrow C_1(X,G) \longleftarrow C_2(X,G) \longleftarrow \ldots$$

Его гомологии обращаются в сингулярные $H_n(X, G)$.
Так как

$$C_n(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} < \sigma^n_\alpha >,$$

То после действия функтором имеем:

$$C_n(X) \times G = \bigoplus_\alpha G < \sigma^n_\alpha > .$$

Иначе говоря, любая сингулярная цепь с коэффициентами G представима в виде:

$$\sum_i k_i \, \sigma^n_i, \; k_i \in G.$$

Дифференциал переходит следующим образом:

$$\sum_i k_i \, \sigma^n_i \longrightarrow \sum_i k_i \, \partial_i(\sigma^n_i)$$

где

$$\partial_i(\sigma^n_i) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \sigma^n|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n]}.$$

В качестве коэффициентов рассматривают либо $\mathbb{Z}$, либо другие поля, такие как: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, либо ограниченные: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p, p > 2$. Здесь и далее будем полагать, что коэффициенты не просто из абелевой группы, а образуют кольцо R, которое коммутативное, ассоциативное и имеет единичный элемент отличный от нулевого.

В таком случае имеем $R-$ модули – $C_n(X, R)$.

Определение. *Пусть R – коммутативное абелево кольцо. Модулем M кольца назовём произвольную абелеву группу с дополнительной структурой умножения:*

$$\cdot : \; R \times M \to M.$$

При этом, оно удовлетворяет следующим свойствам:

1.
$$r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2,$$

2.
$$(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m,$$

3.
$$r_1 \cdot r_2 \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m),$$

4.

$$1 \cdot m = m.$$

Определение. *Если имеем отображение между топологическими пространствами:*

$$X \xrightarrow{f} Y,$$

Тогда имеем отображение гомологий в прямую сторону:

$$f_*: \ H_n(X, R) \longrightarrow H_n(Y, R)$$

f_* – гомоморфизм абелевых групп. Естественность заключается в том, что f_* линейна относительно R.

В случае когда $R-$модули – $C_n(X, R)$, получаем, что $R-$модулями также являются $H_n(X, R), H^n(X, R)$ естественным образом.

Рассмотрим коцепи:

$$C^n(X) = Hom(C_n(X), G) \ni C: \ \{\sigma^n_\alpha, CX\} \to G.$$

Билинейное когомологическое спаривание

Определение. *Билинейным когомологическим спариванием – $< \cdot, \cdot >$ назовём*

$$H^n(X; R) \times H_n(X; R) \xrightarrow{<\cdot,\cdot>} R.$$

А именно переходит из спаривания коцепей с цепями

$$C^n(X; R) \times C_n(X; R) \longrightarrow R$$

Имея билинейное спаривание по R

$$\left\langle c : \sigma^n_\alpha \to R, \sum k_i \cdot \sigma^n_i \right\rangle = \sum k_i \cdot c(\sigma^n_i).$$

В случае гомологий, необходимо канонически спарить коциклы $[\gamma]$ из когомологий и циклы $[c]$ в классе гомологий, чтобы получить число.

Теорема 1. *Если $R = \mathbb{K}$, то*

$$H^n(X; \mathbb{K}) = H_n(X; \mathbb{K}) * .$$

Замечание. *Если X конечно, то размерности $H^n(X;\mathbb{K}), H_n(X;\mathbb{K})*$ соответствуют размерности X.*

Пусть теперь X представим в виде счётного букета сфер, тогда получаем счётномерное векторное пространство:

$$H_1(X;\mathbb{K}) = \bigoplus_1^\infty \mathbb{K}$$

Заметим, что размерность двойственного теперь – континуум.

Вывод: *сингулярные когомологии с коэффициентом поля не бывают счётными.*

Теорема 2. *Пусть имеется отображение*

$$X \xrightarrow{f} Y,$$

И произвольное поле $\mathbb{K}$. Тогда имеем линейное отображение:

$$f_* : \ H_n(X;\mathbb{K}) \longrightarrow H_n(Y;\mathbb{K}),$$

При этом отображение

$$f^* : \ H^n(Y;\mathbb{K}) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{K})$$

Такого, что

$$(f_*)^* = f^*.$$

Теорема Борсука-Улама

Теорема (Борсука-Улама)**.** *Если имеется отображение*

$$S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n,$$

То

$$\exists x \in S^n : \ f(x) = f(-x).$$

Доказательство. Пусть имеется отображение S^n в $\mathbb{R}^n$, но

$$\forall x \in S^n : \ f(x) \neq f(-x).$$

Рассмотрим новую функцию

$$g : \ S^n \to S^{n-1}$$

При этом

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Заметим, что определение, ввиду устройства f, корректно и при этом выполнено:

$$g(-x) = -g(x).$$

Тогда, если теорема не верна, получили нечётное отображение g.

В случае $\mathbb{R}P^n$ имеем:

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/u^{n+1} = 0, deg\, u = 1.$$

Получили усечённое кольцо многочленов. Можем ввести новое отображение

$$\tilde{g}: \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$$

Рассмотрим отображение

$$\tilde{g}_*: \pi_1(\mathbb{R}P^n) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}),\ (n \geqslant 2).$$

Получаем изоморфизм на уровне π_1. На уровне $H_1(\mathbb{Z})$ это тоже является изоморфизмом. Если мы возьмём $\oplus\mathbb{Z}_2$ также получим изоморфизм:

$$H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2).$$

Получаем изоморфизм одномерных векторных пространств

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2$$

При рассмотрении $H_1^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, так как в когомологиях стрелки обращаются, также получим изоморфизм. Однако

$$H^*(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2[v]/v^n = 0$$

$$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[u]/u^{n+1} = 0, deg\, u = 1.$$

И таким образом получен гомоморфизм колец

$$\tilde{g}^* = \phi: \mathbb{Z}_2[v]/v^n = 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2[u]/u^{n+1} = 0$$

При этом:

$$\phi : v \mapsto u$$

Такого гомоморфизма быть не может, так как

$$v^2 \leftrightarrow u^2, v^3 \leftrightarrow u^3, \dots, 0 = v^n \leftrightarrow u^n \neq 0$$

Получили противоречие, следовательно теорема доказана. □

Семинар 14. Когомологии и гомологии с коэффициентами

Некоторые общие сведения

Пусть имеются $\forall A, B$ – абелевы группы, и имеется гомоморфизм абелевых групп

$$\phi:\ A \to B.$$

Тогда индуцировани следующий гомоморфизм

$$\phi_*:\ H_*(X;A) \to H_*(X;B)$$

При этом оно естественно и функториально:

$$\forall f: X \to Y$$

Имеем коммутативный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} \phi_*:\ H_*(X;A) & \longrightarrow & H_*(X;B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \phi_*:\ H_*(Y;A) & \longrightarrow & H_*(Y;B) \end{array}$$

Мы имеем цепной комплекс:

$$0 \xleftarrow{0} C_0(X,A) \xleftarrow{\partial_1} C_1(X,A) \xleftarrow{\partial_2} \dots$$

Рассмотрим элемент

$$C_n(X,A) \ni c = \sum k_i\,\sigma_i^n,\ k_i \in A$$

По определению имеем:

$$\phi(\sum k_i\,\sigma_i^n) = \sum \phi(k_i)\,\sigma_i^n,\ \phi(k_i) \in B$$

Поэтому коциклы с коэффициентами A переходят в коциклы с коэффициентами B.

Чтобы увидеть результат на гомологиях рассмотрим элемент

$$\gamma \in H_n(X;A)$$

Рассмотрим также его представитель $c \in C_n(X;A)$ и применим к нему оператор ϕ, при этом

$$\phi(c) \in C_n(X;B)$$

Получили коцикл с новыми коэффициентами. Берём его класс когомологии

$$[\phi(c)] = \phi_*(\gamma).$$

ϕ_* есть естественное преобразование функторов. Действительно, при фиксированном A получаем функтор $H_*(X; A)$

$$TOP \xrightarrow{H_*(\cdot;A)} GAG$$

Также имеем другой функтор – $H_*(X; B)$. То, что между ними возникают стрелки – называют естественным преобразованием функторов. При этом морфизм функторов f_* коммутирует с преобразованием ϕ_*.

Заметим, что

$$A = H_0(*; A)$$

Можно сказать, что это клеточное пространство состоящее из одной 0-мерной клетки и имеется только одна цепь

$$A \ni k_0\,\sigma_0 = k_0 \in H_0(M, A)$$

Замечание. *Если ϕ является эпиморфизмом или мономорфизмом – это не означает, что ϕ_* таковым является. Свойство сохраняется только для изоморфизма.*

Короткие точные последовательности абелевых групп

Определение. *Имеется последовательность абелевых групп*

$$0 \longrightarrow A \overset{i}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0,$$

Это будет короткая точная последовательность, если при этом B на C – сюръекция, а A в B – вложениеб причём

$$B/i(A) \cong C.$$

Также имеет место расщепление, если

$$\exists s:\ C \to B,$$

При этом

$$j \cdot s = Id_C.$$

Замечание. *В случае расщепимых коротких точных последовательностях имеем*

$$B = A \oplus C.$$

Изоморфизм устроен следующим образом

$$a + c \longrightarrow i(a) + s(c).$$

Замечание. *Даже для конечных абелевых групп не любая короткая точная последовательность конечных абелевых групп является расщепимой.*

Доказательство. Действительно, приведём пример.

Рассмотрим последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Данная группа не является расщепимой, так как

$$\mathbb{Z}_{p^2} \ncong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p.$$

Заметим, что достаточным условием расщепимости является

$$C = \oplus \mathbb{Z}.$$

□

Замечание. *Пусть имеется короткая точная последовательность абелевых групп*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Тогда для каждого n имеем также короткую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow C_n(X;F) \xrightarrow{i} C_n(X;G) \xrightarrow{j} C_n(X;H) \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$C_n(X;F) = C_n(X) \times F$$

Проверим вложение

$$C_n(X;F) \hookrightarrow C_n(X;G)$$

Имеем

$$\sum \underbrace{k_\alpha}_{0} \sigma_\alpha^n \longrightarrow 0$$

Сюрьективность очевидна

$$C_n(X;G) \xrightarrow{j} C_n(X;H)$$

И при этом

$$\bigoplus_\alpha F\left\langle \sigma_\alpha^n \right\rangle \xrightarrow{\bigoplus i} \bigoplus_\alpha G\left\langle \sigma_\alpha^n \right\rangle \xrightarrow{\bigoplus j} \bigoplus_\alpha H\left\langle \sigma_\alpha^n \right\rangle$$

□

Замечание. *Получили не просто наборы коротких точных последовательностей, а коммутирующих между собой:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(X;F) \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X;G) \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X;H) \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(X;F) \arrow[r] & C_n(X;G) \arrow[r] & C_n(X;H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Теорема. *Для короткой точной последовательности цепных комплексов имеем длинную точную последовательность гомологий*

$$H_n(X;F) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_n(X;H) \xrightarrow{d} H_{n-1}(X;F) \longrightarrow$$

Доказательство. Все переходы понятны и естественны, кроме перехода

$$H_n(X;H) \xrightarrow{d} H_{n-1}(X;F).$$

Для него воспользуемся диаграммой поиска. Возьмём из $C_n(X;H)$ класс его гомологий представляющий коцикл – a. После этого перейдём влево в $\tilde{a} \in C_n(X;G)$. Заметим, что

$$d\,a = 0 \Rightarrow d\,\tilde{a} \to d\,a \to 0 \Rightarrow \exists b \in C_{n-1}(X;F) : b \to d\,\tilde{a}.$$

Получили искомый класс гомологий пространства $H_{n-1}(X;F)$. □

Для когомологий аналогично получим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow C^n(X;F) \longrightarrow C^n(X;G) \longrightarrow C^n(X;H) \longrightarrow 0.$$

Гомоморфизмы Бокштейна

Имеем последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0.$$

Для отображения

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\gtrdot}$$

Имеем отображение целочисленных гомологий и когомологий по модулю m. Также называют гомоморфизмом приведения по модулю m. Для когомологии это ещё и кольцевой гомоморфизм:

$$H^*(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho} H^*(X;\mathbb{Z}_m)$$

Для неё имеем два гомоморфизма:

1. $\tilde{b}$ – гомологический гомоморфизм Бокштейна:
$$H_n(X;\mathbb{Z}_m) \longrightarrow H_{n-1}(X;\mathbb{Z})$$

2. $b = \tilde{b}\,\rho$ – гомоморфизм Бокштейна:
$$H_n(X;\mathbb{Z}_m) \longrightarrow H_{n-1}(X;\mathbb{Z}_m)$$

3. $\tilde{\beta}$ – когомологический гомоморфизм Бокштейна:
$$H^n(X;\mathbb{Z}_m) \longrightarrow H^{n+1}(X;\mathbb{Z})$$

4. $\beta = \tilde{\beta}\,\rho$ – гомоморфизм Бокштейна:
$$H^n(X;\mathbb{Z}_m) \longrightarrow H^{n+1}(X;\mathbb{Z}_m)$$

Рассмотрим произвольный элемент $\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z}_m)$. Рассмотрим его представитель a – коцикл, коэффициенты которого есть вычеты по модулю m. При применении к нему оператора d получим ноль. Если теперь рассмотреть не вычеты по модулю m а все целые числа, то
$$d\,\tilde{a} = \sum m\,k_i\,\sigma_i^{n-1}.$$
При этом $\dfrac{\tilde{a}}{m}$ является коциклом, так как
$$d\left(\frac{\tilde{a}}{m}\right) = 0.$$

Расчёт целочисленных гомологий

Пусть $X = \mathbb{R}P^n$. Будем рассматривать его стандартное клеточное разбиение:
$$* \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^n.$$

Рассчитаем цепной комплекс с коэффициентами $\mathbb{Z}$
$$0 \leftarrow \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z}\langle e_2\rangle \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\langle e_2\rangle \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z}\langle e_4\rangle \xleftarrow{0}$$

Получаем
$$H_0 = \mathbb{Z},\ H_1 = \mathbb{Z}_2,$$
$$H_2 = 0,\ H_3 = \mathbb{Z}_2, \dots .$$

Получаем чередование за исключением H_0. Также при нечётном n имеем

$$H_n = \mathbb{Z}.$$

На основе рассчитанного, нетрудно заметить, что

$$H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \ldots, \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{n}, 0, \ldots$$

Рассчитаем теперь когомологии. Для этого подействуем $Hom(-, \mathbb{Z})$

$$0 \to \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \xrightarrow{0} \times 2\mathbb{Z}\langle e_2\rangle \xrightarrow{0} 0\mathbb{Z}\langle e_2\rangle \xrightarrow{0} \times 2\mathbb{Z}\langle e_4\rangle \xrightarrow{0} 0$$

Получаем

$$H_0 = \mathbb{Z},\ H_1 = 0,$$

$$H_2 = \mathbb{Z}_2,\ H_3 = 0, \ldots.$$

Также получаем чередование за исключением H_0.

Семинар 15. Функторы Tor и Ext

Некоторые общие сведения

Мы будем рассматривать категорию R-Mod, где R – это коммутативное ассоциативное кольцо с 1, $(1 \neq 0)$. Объекты M этой категории – абелевы группы, такие что

$$\cdot : \ R \times M \to M,$$

Они обладают следующими свойствами:

1. $$(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m,$$
2. $$r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2,$$
3. $$r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = r_1 \cdot r_2 \cdot m,$$
4. $$1 \cdot m = m.$$

Определение. *Модуль M называется свободным, если*

$$M = \bigoplus_{\alpha} R_\alpha,$$

Где

$$R_\alpha \cong R$$

Это определение можно записать по-другому:

$$M = \bigoplus_{\alpha} R \left\langle x\,\alpha \right\rangle,$$

где x_α – это базис данного модуля. То есть любой элемент этого модуля:

$$M = \sum_{finit,\, \lambda_\alpha \in \mathbb{R}} \lambda_\alpha \, x_\alpha.$$

Определение. *Свободная резольвента модуля M – это*

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{\text{эпиморфизм}} M \to 0.$$

Эта последовательность является точной последовательностью свободных R-модулей.

Замечание. *У каждого модуля есть хотя бы одна свободная резольвента.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $m_\alpha \in M$, которые порождают весь модуль M:

$$\langle m_\alpha \rangle = M.$$

Тогда

$$\bigoplus_{alpha} R\left\langle x_\alpha \right\rangle = F_0.$$

Получили эпиморфизм свободного модуля на произвольные данные. □

Замечание. *При $R = \mathbb{Z}$ мы можем составить короткую резольвенту:*

$$0 \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{\text{эпиморфизм}} M \to 0.$$

Лемма о свободных резольвентах

Лемма. *Пусть имеются два модуля M и M', для которых имеются свои свободные резольвенты:*

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{\text{эпиморфизм}} M \to 0.$$

$$\ldots \to F_2' \to F_1' \to F_0' \xrightarrow{\text{эпиморфизм}} M' \to 0.$$

И пусть имеется произвольный гомоморфизм R-модулей – α:

$$M \overset{\alpha}{\to} M',$$

Тогда существуют продолжения α_i:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] & F_1' \arrow[r] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так что это будет цепное отображение, причем любых два таких продолжения будут цепно-гомотопны.

Доказательство. Пусть в F_0 имеется какой-либо элемент x из базиса. Нам необходимо перевести его в какой-либо элемент $x' \in F_0'$ так, чтобы схема была коммутативна. Пусть x перешёл сначала вправо, а потом вниз по схеме в некоторый элемент $y \in M'$. Необходимо показать, что x' также перейдёт в y.Это эпиморфизм, поэтому такой x' всегда найдется. И так мы сделаем для всякого x из набора базисных элементов для F_0.

Проделаем опять ту же операцию: пусть в F_1 есть какой-то элемент x из базиса. Нам нужно перевести его в какой-либо элемент $x' \in F_1'$ так, чтобы часть схема была коммутативна. Из F_1 перейдём вправо в F_0 и вниз в F_0' в некоторый элемент y. Заметим, что y лежит в ядре эпиморфизма $F_1' \to F_0'$ или в образе $F_2' \to F_1'$. И так далее.

Таким образом мы доказали, что существует продолжение:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] & F_1' \arrow[r] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Теперь нужно доказать, что если у нас есть два таких варианта, то они цепно-гомотопны.

Доказательство. Допустим, что у нас имеются $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i$, необходимо показать, что отображения α_i и $\tilde{\alpha}_i$ будут цепно-гомотопны. Для этого вычтем одно из другого и получим схему:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] & F_1' \arrow[r] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где

$$\beta_i = \alpha_i - \tilde{\alpha}_i.$$

Необходимо показать, что β_i цепно-гомотопны нулю. Для этого надо построить оператор цепно-гомотопии λ:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[dl, "\lambda_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_0"] \arrow[dl, "\lambda_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "\lambda_{-1}"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] & F_1' \arrow[r] & F_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Правило для цепной гомотопии:

$$\partial P - P\,\partial = f - g = \beta - 0 = \beta.$$

В нашем случае:

$$\partial\lambda + \lambda\,\partial = \beta.$$

Можем положить $\lambda_{-1} = 0$. Рассмотрим сегмент схемы $F_0 - M - F_1' - F_0'$. Достаточно проверить соотношение на образующих. Так на уровне F_0:

$$f_1' \lambda_0(x) = \beta_0(x),$$

Следовательно

$$\beta_0(x) \in \operatorname{Ker} F_0'$$

Здесь можно нарисовать схему подробнее:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[dl, "\lambda_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\beta_0"] \arrow[dl, "\lambda_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Разберёмся с первым нетривиальным сегментом. Возьмём произвольный образующий элемент $x \in F_0$. Для него имеем:

$$f_0(0 \cdot x) = 0$$

$$f_1'(\lambda_0(x)) = \beta_0(x)$$

Из того, что ранее мы показали, что один из квадратов цепи – цепно-коммутативен

$$F_0' \ni \beta_0(x) \to 0 \in N,$$

Получаем

$$\beta_0(x) \in \operatorname{Ker} f_0' = \operatorname{Im} F_1'$$

Значит

$$\exists \lambda_0(x) \in F_1',$$

Такой, что он падает на $\beta_0(x)$.

Теперь построим λ_1. Возьмем произвольный базисный элемент x из F_1. Тогда

$$\lambda_0 \cdot (f_1(x)) + f_2' \cdot \lambda_1(x) = \beta_1(x).$$

Мы знаем, что

$$f_1' \cdot \lambda_0(x) = \beta_0(x).$$

Нам необходимо получить

$$f_2' \cdot \lambda_1(x) = \beta_1(x) - \lambda_0 \cdot (f_1(x)),$$

То есть мы должны доказать, что

$$\beta_1(x) - \lambda_0 \cdot (f_1(x)) \in \operatorname{Im} f_2' = \operatorname{Ker} f_1'.$$

То есть мы должны доказать, что

$$f_1' \cdot (\beta_1(x) - \lambda_0 \cdot (f_1(x))) = 0.$$

Проверим это:

$$f_1' \cdot (\beta_1(x)) - f_1' \cdot (\lambda_0 \cdot f_1(x)) = f_1' \cdot (\beta_1(x)) - \beta_0(f_1(x)) = 0.$$

И для дальнейших сегментов схемы действия аналогичные.

Мы доказали, что для любого отображения между модулями и для любых резольвент существует много цепных отображений в ту же сторону и все они цепно-гомотопны. □

Введение Tor

Определение. *Рассмотрим произвольную свободную резольвенту для M:*

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0,$$

И действуем на это $\otimes N$:

$$\ldots \longrightarrow F_2 \otimes N \longrightarrow F_1 \otimes N \longrightarrow F_0 \otimes N \longrightarrow 0$$

Из точного комплекса получили снова комплекс, но на этот раз не точный. Его гомологии будем называть Tor:

$$F_i \otimes N \to Tor_i\,(M, N)$$

Данные гомологии являются R-модулями.

Замечание. *Полученное определение не зависит от резольвенты*

Доказательство. Пусть имеется две резольвенты M и M' и их продолжение:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "id"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\beta_2"] & F_1' \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\beta_1"] & F_0' \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\beta_0"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Умножим тензорно на N. Введём композиции $\gamma_i = \beta_i \cdot \alpha i$. В качестве автоморфизма можем рассмотреть и тождественное отображение – Id, это означает, что γ_i и Id – цепно-гомотопны

$$\beta_i \cdot \alpha_i \sim Id.$$

При тензорном умножении на N – все стрелки умножатся на Id, получим снова цепные комплексы. Имеем комплекс:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & F_2 \otimes N & \longrightarrow & F_1 \otimes N & \longrightarrow & F_0 \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_2 \otimes N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_1 \otimes N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_0 \otimes N} & & & & \\ \ldots & \longrightarrow & F_2' \otimes N & \longrightarrow & F_1' \otimes N & \longrightarrow & F_0' \otimes N & \longrightarrow & M' \otimes N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Наша цель доказать, что полученные гомотопические эквивалентности взаимно обратны. Это верно, так:

$$\beta_i \cdot \alpha_i = \gamma_i \cdot Id,\ \gamma_i \sim Id.$$

Следовательно определения корректно. $\square$

Теорема. $Tor_n(-, N), Tor_n(M, -)$ – *являются ковариантными функторами на категории модулей.*

Семинар 16. Гомологическая формула универсальных коэффициентов

Вспомогательное утверждение

Замечание. *Для любой абелевой группы H имеем свободные резольвенты F_i:*

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

При действии $\otimes G$ имеем:

$$\ldots \longrightarrow F_2 \otimes G \longrightarrow F_1 \otimes G \longrightarrow F_0 \otimes G \longrightarrow 0.$$

Для полученного комплекса абелевых групп рассчитываем гомологии, получая соответствующие Tor:

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{F_2 \otimes G}_{Tor_2\,(H,G)} \longrightarrow \underbrace{F_1 \otimes G}_{Tor_1\,(H,G)} \longrightarrow \underbrace{F_0 \otimes G}_{Tor_0\,(H,G)} \longrightarrow 0.$$

Так как все свободные резольвенты F_i произвольной абелевой группы H эквивалентны, тогда можем рассмотреть короткую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Для неё имеем:

$$Tor_0\,(H,G) = H \otimes G,\; Tor_1\,(H,G) = Tor\,(H,G).$$

Если H – свободная абелева группа, то мы можем взять следующую резольвенту:

$$0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\cong} H \longrightarrow 0,$$

При этом имеем

$$Tor\,(H,G) = 0.$$

Утверждение.

$$Tor\,(\forall \bigotimes_{\alpha} \mathbb{Z}_\alpha, \forall G) = 0.$$

Формула универсальных коэффициентов

Теорема. *$\forall X$ – линейно-связного (T_2) существует расщепимая последовательность абелевых групп:*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes G \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow Tor\left(H_{n-1}(X), G\right) \longrightarrow 0.$$

При $n = 1$ имеем:

$$H_1(X;G) \cong H_1(X) \otimes G.$$

Сформулируем вспомогательную теорему для доказательства исходной.

Теорема 0. *Для комплекса, состоящего из свободных абелевых групп имеем утверждение доказываемой теоремы:*

$$C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0.$$

Имеем формулу:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n=0"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n-1}=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] & B_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

При этом каждая строчка является расщепимой, так как B_{n-1}, B_{n-2} – свободные абелевы группы.

Умножим всё тензорно на G:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "0"] & C_n \otimes G \arrow[r, "\partial_n\otimes\mathbb{1}"] \arrow[d, "\partial_n\otimes\mathbb{1}"] & B_{n-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1} \otimes G \arrow[r] & C_{n-1} \otimes G \arrow[r] & B_{n-2} \otimes G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

По аналогии получаем длинную точную последовательность:

$$\ldots \longrightarrow B_n \otimes G \longrightarrow Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C;G) \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \longrightarrow Z_{n-1} \otimes G \longrightarrow \ldots \qquad (1)$$

Расщепим длинную точную последовательность на короткие:

$$0 \longrightarrow \underbrace{Coker(i_n \otimes \mathbb{1})}_{(Z_n \otimes G)\big/ Im(i_n \otimes \mathbb{1})} \longrightarrow H_n(C;G) \longrightarrow Ker(i_{n-1} \otimes \mathbb{1}) \longrightarrow 0,$$

где

$$i_{n-1}: \ B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1}.$$

Необходимо показать, что полученная короткая точная последовательность расщепима, а также:

$$(Z_n \otimes G)\big/Im(i_n \otimes \mathbb{1}) = H_n(C) \otimes G,$$

$$Ker(i_{n-1} \otimes \mathbb{1}) = Tor(H_{n-1}(C), G).$$

Вспомогательная лемма 1

Лемма 1. *Пусть имеется точная последовательность вида:*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0.$$

Тогда при действии $\otimes G$ также имеем точную последовательность:

$$A \otimes G \xrightarrow{i\otimes\mathbb{1}} B \otimes G \xrightarrow{j\otimes\mathbb{1}} C \otimes G \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Так как j – сюрьекция, то

$$B \otimes G \xrightarrow{j\otimes\mathbb{1}} C \otimes G$$

также является сюрьекцией и правая часть доказываемой леммы верна.

Рассмотрим

$$B \otimes G\big/Im(i \otimes \mathbb{1}) \longrightarrow C \otimes G.$$

Данное отображение определено корректно. Необходимо доказать, что оно является изоморфизмом, для этого построим обратное отображение:

$$\phi :\ C \times G \longrightarrow B \otimes G\big/Im(i \otimes \mathbb{1})$$

По следующему правилу:

$$\phi(c, g) = [b \otimes g],\ g(b) = c.$$

Проверим корректность введённого определения. Рассмотрим

$$g(b') = c.$$

Тогда верно

$$\phi(c, g) = [b \otimes g] = [b' \otimes g],$$

Так как

$$b - b' = i(a).$$

Также очевидно, что введённое отображение ϕ билинейно, следовательно, может быть задано как

$$\phi :\ C \otimes G \longrightarrow B \otimes G\big/Im(i \otimes \mathbb{1}).$$

Заметим, что ϕ – эпиморфизм по построению. Тогда, учитывая, что композиция двух эпиморфизмов – эпиморфизм, а также композицию отображений, задающую тождественное:

$$C \otimes G \xrightarrow{\phi - - \text{эпи}} B \otimes G/Im(i \otimes \mathbb{1}) \xrightarrow{\text{эпи}} C \otimes G.$$

Если композиция эпиморфизмов задаёт тождественное отображение, то каждое из них является мономорфизмом. Следовательно, каждое из отображений является изоморфизмом. $\square$

Рассмотрим короткую точную последовательность:

$$B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \xrightarrow{j_n} H_n(C) \longrightarrow 0.$$

При применении $\otimes G$, в силу Леммы 1, имеем также точную последовательность:

$$B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes \mathbb{1}} Z_n \otimes G \xrightarrow{j_n \otimes \mathbb{1}} H_n(C) \otimes G \longrightarrow 0.$$

Откуда имеем равенство:

$$Coker(i_n \otimes \mathbb{1}) = (Z_n \otimes G)/Im(i_n \otimes \mathbb{1}) = H_n(C) \otimes G.$$

Получили первое из равенств необходимое для доказательства теоремы.

Вспомогательные леммы

Лемма 2. *Пусть имеется произвольная группа H и две её свободные резольвенты:*

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H$$

$$\ldots \longrightarrow F_2' \longrightarrow F_1' \longrightarrow F_0' \longrightarrow H$$

Тогда имеется канонический изоморфизм:

$$\forall n \neq 0: \; H_n(F \otimes G) \cong H_n(F' \otimes G).$$

Доказательство леммы 2 основывается на следующей лемме.

Лемма 3. *Если имеется отображение*

$$\alpha: \; H \longrightarrow H',$$

Тогда имеем цепной комплекс с неоднозначным продолжением, обозначенным пунктиром:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & H \arrow[d, "\alpha"] \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \arrow[r] & F_1' \arrow[r] & F_0' \arrow[r] & H'
\end{tikzcd}$$

Тогда, зная что

$$\alpha_i \cong \alpha_i' \Rightarrow \alpha_i \otimes G \cong \alpha_i' \otimes G,$$

Получаем после действия $\otimes G$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & F_2 \otimes G \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] & F_1 \otimes G \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] & F_0 \otimes G \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] & H \otimes G \arrow[d, "\alpha\otimes\mathbb{1}"] \\
\ldots \arrow[r] & F_2' \otimes G \arrow[r] & F_1' \otimes G \arrow[r] & F_0' \otimes G \arrow[r] & H' \otimes G
\end{tikzcd}$$

Пусть имеется

$$H \xrightarrow{\alpha} H' \xrightarrow{\beta} H''.$$

Тогда

$$(\beta\alpha)_* = \beta_* \cdot \alpha_*.$$

Замечание. *Если*

$$\alpha\beta = \beta\alpha = \mathbb{1},$$

То

$$\alpha_*\beta_* = \beta_*\alpha_* = \mathbb{1}_*.$$

И если α – изоморфизм, то индуцированный α_* также является изоморфизмом.

Положив $\alpha = Id$:

$$H \xrightarrow{\alpha = Id} H,$$

Имеем

$$\mathbb{1}_K: \ H_n(F \otimes G) \longrightarrow H_n(F \otimes G)$$

Доказательство второй части теоремы

Напомним второе равенство доказываемой теоремы:

$$Ker(i_{n-1} \otimes \mathbb{1}) = Tor(H_{n-1}(C), G).$$

Докажем его справедливость.

Доказательство. Имеется короткая свободная резольвента:

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0.$$

Применяя функтор $\otimes G$ имеем точную последовательность по Лемме 1:

$$0 \longrightarrow Ker(i_n \otimes \mathbb{1}) \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes \mathbb{1}} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow 0.$$

Необходимо найти $Ker(i_n \otimes \mathbb{1})$. На основании леммы 2 и леммы 3 имеем:

$$Ker(i_n \otimes \mathbb{1}) = Tor\,(H_{n-1}(C), G).$$

□

Необходимо также проверить расщепимость последовательности из теоремы.

Доказательство. По-прежнему имеем короткую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{B}{}_{n-1} \xrightarrow{0},$$

Со свободной абелевой группой B_{n-1}.
Заметим, что должен существовать проектор P:

$$C_n \xrightarrow{P} Z_n.$$

Это равносильно расщеплению короткой точной последовательности.
Построим этот проектор, для этого рассмотрим комплекс:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "p_{n+1}/B_{n+1}"] & C_n \arrow[d, "p_n/B_n=0"] \\
H_{n+1} \arrow[r, "0"] & H_n
\end{tikzcd}$$

Подействуем на комплекс $\otimes G$:

$$\begin{tikzcd}
C_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & H_n(C) \otimes G \arrow[d, "0"] \\
C_{n-1} \otimes G \arrow[r] & H_{n-1}(C) \otimes G
\end{tikzcd}$$

Таким образом из цепного отображения

$$C \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G,$$

Взяв группу гомологий, получим:

$$H_n(C, G) \longrightarrow H_n(C) \otimes G.$$

Полученное отображение является требуемым расщеплением. □

Семинар 17. Решение задач на тему "Функторы Tor и Ext"

Доказательство свойств Ext

Задача. *Докажем следующее свойство:*

$$Ext(H \oplus H', G) \approx Ext(H, G) \oplus Ext(H', G)$$

Напомним определение Ext.

Определение. *Рассматриваем резольвенты свободной группы A:*

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Если рассмотрим соответствующие $Hom(\cdot, B)$, получим:

$$Hom(F_2, B) \longleftarrow Hom(F_1, B) \longleftarrow Hom(F_0, B) \longleftarrow Hom(A, B) \longleftarrow 0.$$

Можем рассмотреть короткие точные последовательности, тогда при $Hom(A, B) = 0$, имеем:

$$Hom(F_1, B) = Ext_1(A, B) = Ext(A, B).$$

Доказательство. Для группы H выбираем свободную резольвенту:

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Для группы H' также выбираем свободную резольвенту:

$$F_2' \longrightarrow F_1' \longrightarrow F_0' \longrightarrow H' \longrightarrow 0.$$

Так как прямая сумма свободных групп – свободная группа, а прямая сумма комплексов – комплекс, то можем рассмотреть следующий комплекс:

$$F_2 \oplus F_2' \longrightarrow F_1 \oplus F_1' \longrightarrow F_0 \oplus F_0' \longrightarrow H \oplus H' \longrightarrow 0.$$

Для доказательства утверждения достаточно подействовать $Hom(\cdot, G)$ и учесть, что в случае конечной свободной суммы:

$$Hom(A \oplus B, G) \cong Hom(A, G) \oplus Hom(B, G)$$

□

Задача. *Доказать, что если H – свободная абелева группа, то*

$$\forall G\, Ext(H,G) = 0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть самую короткую абелеву группу:

$$\underbrace{0}_{F_1} \longrightarrow \underbrace{H}_{F_0} \longrightarrow H \longrightarrow 0.$$

Применяя $Hom(\cdot, G)$ получим требуемое свойство, так как

$$Ext(H,G) = Hom(F_1, G) = Hom(0, G) = 0.$$

□

Задача. *Доказать, что*

$$Ext(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Подействуем $Hom(\cdot, G)$

$$0 \longleftarrow \underbrace{Hom(\mathbb{Z}, G)}_{G} \xleftarrow{n} \underbrace{Hom(\mathbb{Z}, G)}_{G} \longleftarrow 0$$

Получили доказываемое утверждение. □

Задача. *Если H – конечно-порождённая абелева группа*

$$Ext(H, \mathbb{Z}) = T(H).$$

Доказательство. Действительно, H представима как

$$H = \mathbb{Z}^B \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}.$$

При действии на данную конструкцию $Ext(\cdot, G)$, учитывая первое свойство, а также предыдущее, получим:

$$Ext(H,G) = 0 \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_s},$$

Что доказывает свойство. □

Имеем расщепимую короткую точную последовательность по формуле универсальных коэффициентов:

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \longrightarrow Hom(H_n(X), G). \longrightarrow 0.$$

Пусть $H_{n-1}(X), H_n(X)$ – конечно-порождённые абелевы группы и $G = \mathbb{Z}$, тогда, учитывая, что

$$Hom(\mathbb{Z}^B \oplus T_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^B,$$

Получим

$$Hom(H_n(X), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^B,$$
$$Ext(H_{n-1}(X), G) \cong T_{n-1}$$

Откуда получаем важнейшую формулу:

$$H^n(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{B_n} \oplus T_{n-1}.$$

Задача. *Пусть $C. \xrightarrow{\alpha} C'_.$ – комплексы свободных абелевых групп, тогда имеем последовательность*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ext(H_{n-1}(C.), G) \arrow[r] & H^n(C., G) \arrow[r] & Hom(H_n(C.), G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & Ext(H_{n-1}(C'_.), G) \arrow[r] \arrow[u, "(\alpha_*)^*"] & H^n(C'_., G) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & Hom(H_n(C'_.), G) \arrow[r] \arrow[u, "(\alpha_*)^*"] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Если отображение

$$\alpha_* : \; H_n(C.) \longrightarrow H_n(C'_.)$$

Является изоморфизмом $\forall n \geqslant 0$, то $(\alpha_*)^*$ также является изоморфизмом по лемме о пяти гомоморфизмах.

Доказательство свойств Tor

Задача. *Доказать*

$$Tor(\bigoplus_i A_i, B) \cong \bigoplus_i Tor(A_i, B).$$

Доказательство. Для каждой свободной группы A_i выбираем свободную резольвенту:

$$\ldots \longrightarrow F_1^{(i)} \longrightarrow F_2^{(i)} \longrightarrow A_i$$

Беря прямую сумму $\underset{i}{oplus} A_i$, учитывая, что прямая сумма резольвент сохранит свободный член и применяя к этому $\otimes B$, а также свойство

$$(\bigoplus_i D_i) \otimes G \cong \bigoplus_i D_i \otimes G,$$

Получаем требуемое утверждение $\square$

Задача.

$$Tor(\mathbb{Z}_n, A) \cong Ker(A \xleftarrow{n} A)$$

Доказательство. Построим короткую точную резольвенту

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Применим $\otimes A$

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \otimes A}_{A} \xrightarrow{n} \underbrace{\mathbb{Z} \otimes A}_{A} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_n \otimes A}_{0} \longrightarrow 0.$$

Получили доказываемое утверждение. □

Задача. *Доказать, что $Tor(A, B) = 0$, если A или B свободные группы или, хотя бы, свободные подкручения.*

Доказательство. Если A свободная, то имеем короткую резольвенту:

$$\underbrace{0}_{F_1} \longrightarrow \underbrace{A}_{F_0} \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

И доказываемое утверждение очевидно. Если B свободная группа, то выберем свободную резольвенту для A:

$$\longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

И умножив на $\underset{\alpha}{\otimes}\mathbb{Z}$, получим доказываемое. □

Задача. *Пусть имеется короткая точная последовательность абелевых групп:*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0,$$

Необходимо доказать, что будет выполнена короткая точная последовательность $\forall A$:

$$0 \to Tor(A, B) \to Tor(A, C) \to Tor(A, D) \to A \otimes B \to A \otimes C \to A \otimes D \to 0.$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть короткую резольвенту для A:

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Данную резольвенту умножим поочередно тензорно на B, C и D и расположим по вертикали полученные результаты:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes C \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes C \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Заметим, что при умножении короткой точной последовательности на свободную абелеву группу также получим короткую точную последовательность, поэтому все строки в диаграмме выше точны, а все столбцы представляют из себя цепные комплексы. Поэтому если рассмотрим гомологию, то получим длинную точную последовательность гомологий. Откуда и следует доказываемое утверждение. □

Задача. *Доказать, что*

$$Tor(A, B) \cong Tor(B, A).$$

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность для B

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Для данной короткой точной последовательности применим функтор аналогичный предыдущему свойству – $Tor(\cdot, A)$, получим:

$$0 \longrightarrow Tor(A, B) \longrightarrow A \otimes F_1 \longrightarrow A \otimes F_0 \longrightarrow 0.$$

Для рассмотрения $Tor(B, A)$ имеем

$$0 \longrightarrow Tor(B, A) \longrightarrow F_1 \otimes A \longrightarrow F_0 \otimes A \longrightarrow 0.$$

Так как ядра для соответствующих Tor одинаковы, а

$$A \otimes B \cong B \otimes A,$$

Получим доказываемое утверждение. □

Задача. *Доказать, что*

$$Tor(A, B) = 0,$$

Если A без кручения.

Доказательство. Имеем резольвенту для A:

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Тогда имеем отображение:

$$\varphi \otimes \mathbb{1} : F_1 \otimes B \longrightarrow F_0 \otimes B.$$

При этом

$$Tor(A, B) = Ker(\varphi \otimes \mathbb{1}),$$

Необходимо доказать, что данное отображение инъективно. Будем считать, что B без кручения, используя предыдущее свойство. Пусть отображение равно 0:

$$\sum_i x_i \otimes b_i \longrightarrow \sum_i \varphi(x_i) \otimes b_i = 0$$

Учтём, что если сумма тензорных произведений равна 0, то данную сумму можно преобразовать к 0 конечным числом элементарных преобразований к сумме простых нулей. Следовательно, число b_i конечно и выполнено включение:

$$\sum_i \varphi(x_i) \otimes b_i \in Ker(\varphi \otimes \mathbb{1} : F_1 \otimes B_0 \longrightarrow F_0 \otimes B_0) = 0.$$

□

Задача.

$$Tor(A, B) \cong Tor(T(A), B)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую короткую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow T(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/T(A) \longrightarrow 0.$$

Имеем точную последовательность:

$$0 \longrightarrow Tor(B, T(A)) \longrightarrow Tor(B, A) \longrightarrow \underbrace{Tor(B, A/T(A))}_{0}$$

Откуда возникает тривиальное следствие:

$$Tor(A, B) \cong Tor(T(A), B) \cong Tor(T(A), T(B)).$$

□

Утверждение. *Из доказанного имеем свойство:*

$$Tor(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = Ker(\mathbb{Z}_n \xleftarrow{m} \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_q,$$

где

$$q = nod(n, m).$$

Утверждение. *Если A, B конечно-порождённые абелевы группы, то из предыдущего утверждения получим:*

$$Tor(A, B) \cong T(A) \otimes T(B).$$

Универсальные коэффициенты для гомологий

Теорема.

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes G \longrightarrow H_n(X,G) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(X),G) \longrightarrow 0.$$

1. $$G = \mathbb{Q} \Rightarrow H_n(X) \otimes \mathbb{Q} = H_n(X,\mathbb{Q}).$$

2. $$G = \mathbb{Z}_p, H_n(X), H_{n-1}(X) - \text{конечно-порождённые абелевы группы}$$

   Тогда в $H_n(X,G)$ будет столько же экземпляров $\mathbb{Z}_p$, сколько было в исходной группе и в $Tor(H_{n-1}(X),G)$.

3. *Пусть X – $\mathbb{Z}$ ацикличное пространство, то есть*

   $$\tilde{H}_n(X) \cong 0,$$

   то X коациклично и $\mathbb{Z}_p$ ациклично для любого p в соответствие с формулой. Верно и обратное утверждение.

   Доказательство. Имеем, что X коациклично и $\mathbb{Z}_p$ ациклично для любого p. Необходимо доказать, что X – $\mathbb{Z}$ ацикличное пространство. Имеем чисто алгебраическую задачу для группы A:

   $$A \otimes \mathbb{Q} = 0,\ Tor(A,\mathbb{Z}_p) = 0.$$

   Рассмотрим резольвенту:

   $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

   Применим к данной короткой точной последовательности точную шестичленную последовательность:

   $$0 \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Z})}_{0} \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Z})}_{0} \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Z}_p)}_{0} \to A \xrightarrow{p} A \to A \otimes \mathbb{Z}_p \to 0.$$

   Имеем точную последовательность

   $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{p} A \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0,$$

Следовательно A не имеет p-включения, следовательно A не имеет никакого включения. Рассмотрим

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Применяя точную шеститочечную последовательность получим:

$$0 \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Z})}_{0} \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Q})}_{0} \to \underbrace{Tor(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}_{0} \to$$
$$\to A \otimes \mathbb{Z} \to \underbrace{A \otimes \mathbb{Q}}_{0} \to A \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

То есть

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

Откуда

$$A = 0.$$

□

Семинар 18. Кольцевая структура в когомологиях с коэффициентами в кольце

Введение умножения Колмогорова-Александера

Определение. *Градуированное кольцо есть*

$$\bigoplus_{i\geqslant 0}^{\infty} A^i : \; \forall a \in A^i, b \in A^j \; ab \in A^{i+j}.$$

Определение. *Градуированная коммутация:*

$$\forall a \in A^i, b \in A^j \; ab = (-1)^{ij} ba.$$

Утверждение. *Для произвольного топологического пространства X и кольца с единицей R сингулярные когомологии $H^*_{sing}(X; R)$ являются градуированным ассоциативным и градуированно-комутативным кольцом с единицей и умножением $\smile$ Колмогорова-Александера: Если имеются цепи*

$$c \in C^p(X; R),\; d \in C^q(X; R),$$

Коцепь в X по определению:

$$c : \; \{\sigma^p \to X\} \to R,$$

Продолжается по линейности как

$$c : \; C_p(X) \to R,$$

Где R – линейное отображение. Аналогично задаётся

$$d : \; \{\sigma^q \to X\},$$

Тогда их произведение задаётся следующим образом:

$$(c \smile d)(\sigma^{p+q}_{v_0, v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}}) = c(\sigma|_{v_0, \ldots, v_p}) \cdot d(\sigma|_{v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}}).$$

При этом задаётся R-билинейное умножение:

$$\smile : C^p(X; R) \times C^q(X; R) \to C^{p+q}(X; R).$$

Лемма. *Пусть имеется дифференциал* d

$$d: \, C^n(X;R) \to C^{n+1}(X;R).$$

Тогда

$$d(a \smile b) = da \smile b + (-1)^p a \smile db,$$

Где

$$a \in C^p, b \in C^q.$$

Утверждение. *Из введённой леммы следует, что при умножении коцикла на коцикл получим коцикл, а при умножении коцикла на кограницу (в любом порядке) получим кограницу.*

Следовательно, на классах когомологий можем ввести умножение:

$$[a] \smile [b] = [a \smile b].$$

Утверждение. *Полученная кольцевая структура* $H^*_{sign}(X;R)$ *функториальна, то есть произвольное отображение* f *индуцирует отображение* f^*

$$f: X \to Y \Rightarrow f^*: H^*(Y;R) \to H^*(X;R).$$

Определение. *Для когомологий можно ввести внешнее когомологическое умножение:*

$$\times: \, H^p(X;R) \times H^q(Y;R) \to H^{p+q}(X \times Y;R).$$

Для произвольных элементов

$$\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R)$$

Имеем проекции

$$p_x: X \times Y \to X, \; p_y: X \times Y \to Y.$$

Которые индуцируют образы

$$p_x^*\alpha \in H^p(X \times Y), p_y^*\beta \in H^q(X \times Y).$$

И по определению для них имеем:

$$\alpha \times \beta = p_x^*\alpha \smile p_y^*\beta$$

Определение. *Введём клеточное умножение на гомологиях. Пусть* X, Y *–* CW*-пространства. Рассмотрим клеточный комплексы:*

$$C_n(X) = \bigotimes_\alpha R < e_\alpha^n >$$
$$C_m(Y) = \bigotimes_\alpha R < e_\alpha^m >$$

При этом

$$C_n(X) \times C_m(Y) \to C_{n+m}(X \times Y)$$
$$e_\alpha^n \times e_\beta^m \to e_\alpha^n + e_\beta^m.$$

Обобщение умножения на другие объекты

Замечание. *Если X, Y, Z – произвольные CW-комплексы, то отображение в обычной топологии произведения*

$$f: Z \to X \times Y$$

Является непрерывным тогда и только тогда, когда оно является непрерывным отображением в $X \times Y$, пополненному по компакту.

Лемма. *Введённое отображение $\times$ вместе с клеточным граничным гомоморфизмом*

$$\partial: \ C_\cdot(X \times Y; R) \to C_{\cdot-1}(X \times Y; R)$$

Удовлетворяет свойству:

$$\partial(e^n_\alpha \times e^m_\beta) \to \partial e^n_\alpha \times e^m_\beta + (-1)^n e^n_\alpha \times \partial(e^m_\beta).$$

Замечание. *Пусть имеются произвольные циклы*

$$z_n \in Z_n(X; R), u_m \in Z_m(Y; R).$$

Из введённой леммы имеем

$$\partial(z \times u) = \partial z \times u + (-1)^n z \times \partial u.$$

Получаем внешнее гомологическое билинейное отображение

$$\times: \ H^{cell}_n(X; R) \times H^{cell}_m(Y; R) \to H_{n+m}(X \times Y; R).$$

Определение. *Рассмотрим отображение, введённое для коцепей:*

$$\times: \underbrace{C^p(X; R)}_{c_1} \times \underbrace{C^q(Y; R)}_{c_2} \to \underbrace{C^{p+q}(X \times Y; R)}_{c_1 \times c_2}.$$

Оно устроено следующим образом:

$$(c_1 \times c_2)(e^n_\alpha \times e^m_\beta) = c_1(e^n_\alpha) c_2(e^m_\beta)$$

Замечание. *Если для дифференциала выполнено соотношение*

$$(dc)(e) = c(\partial e),$$

То имеет место градуированное дифференцирование:

$$d(c_1 \times c_2) = dc_1 \times c_2 + (-1)^p c_1 \times dc_2,$$

Где

$$c_1 \in C^p(X; R), c_2 \in C^q(Y; R).$$

В данном случае мы вывели произведение $\times$ из произведения $\smile$, однако можно поступить иначе – вывести $\smile$ из произведения $\times$.

Замечание. *Рассмотрим два элемента*

$$\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(X;R),$$

Тогда

$$\alpha \times \beta \in H^{p+q}(X \times X;R).$$

Пусть имеется диагональное отображение

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X,$$

Где

$$\Delta(x) = (x,x)$$

При этом можно построить обратное отображение

$$\alpha \times \beta \xrightarrow{\Delta^*} \alpha \smile \beta \in H^{p+q}(X;R),$$

Которое определяет произведение $\smile$*.*

Формула Кюннета

Теорема (Формула Кюннета для гомологий с коэффициентами $\mathbb{K}$)**.**

$$\bigoplus_{i+j=q} H_i(X;\mathbb{K}) \underset{\mathbb{K}}{\otimes} H_j(Y;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} H_q(X \times Y;\mathbb{K}).$$

Теорема (Формула Кюннета для когомологий с коэффициентами $\mathbb{K}$)**.**

$$\bigoplus_{i+j=q} H^i(X;\mathbb{K}) \otimes H^j(Y;\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} H^q(X \times Y;\mathbb{K}),$$

Если

$$dim\, H^p(Y,\mathbb{K}) < \infty\, \forall p \geqslant 0$$

Лемма. *Если* $\mathbb{K}$ *– поле, то*

$$H^n(Z;\mathbb{K}) = H_n(Z;\mathbb{K})^*.$$

Из данной леммы в конечномерном случае получается формула Кюннета для когомологий из формулы Кюннета для гомологий.

Лемма. *Пусть имеются векторные пространства U, V над полем $\mathbb{K}$, тогда если одно из пространств конечномерное , то имеется изоморфизм:*

$$(U \otimes V)^* \xleftarrow{\cong} U^* \otimes V^*.$$

Иначе имеем вложение.

Доказательство. Докажем, что в бесконечномерном случае отображение является инъекцией, но не изоморфизмом.

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Q\left\langle p_i\right\rangle\right)^* \otimes\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} Q\left\langle q_j\right\rangle\right)^* \hookrightarrow\left(\bigoplus_{i,j=1}^{\infty} Q\left\langle p_i, q_j\right\rangle\right)^*$$

Получаем

$$\prod_{i=1}^{\infty} Q\left\langle p_i\right\rangle \otimes \prod_{j=1}^{\infty} Q\left\langle q_j\right\rangle \hookrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} Q\left\langle p_i, q_j\right\rangle$$

Например, в случае последовательности рациональных чисел, имеем для

$$\left(r_1, r_2, \ldots\right) \otimes\left(s_1, s_2, \ldots\right)$$

Бесконечномерную матрицу в первой четверти, в которой на клетке с координатами (i, j) находится элемент $a_{ij} = (r_i, s_j)$. Искусственно 'обрежем' данную матрицу до конечной, при этом у неё будет единичный $rank$. И $rank$ конечной суммы таких тензорных произведений будет конечным. Тогда, при рассмотрении разреза другой матрицы с много большим числом элементов – можем сделать её ранг сколь угодно большим, что не соответствует рангу конечной сумме матриц единичного ранга. □

Неточность в теореме из лекции

В лекции была приведена следующая теорема

Теорема (5.6 б)). *Имеем формулу универсальных коэффициентов:*

$$0 \rightarrow H^n(X) \otimes G \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow Tor\left(H^{n+1}(X), G\right) \rightarrow 0.$$

Утверждается, что это всегда расщепимая точная последовательность для любой абелевой группы коэффициентов G.

Замечание. *Неточность заключается в том, что теорема верна в общем случае только когда G – конечно-порождённая абелева группа.*

Доказательство. Достаточно положить

$$G = \mathbb{Q}$$

При этом соответствующий Tor даст 0. И получаем

$$H^n(X;\mathbb{Q}) = H^n(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

для бесконечномерных X данное утверждение неверно. Так, например, если

$$X = \bigvee_{i=1}^{\infty} S^n,\ n \geqslant 2$$

Получим

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}\right) \otimes \mathbb{Q} \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}.$$

Что в общем случае не верно. □

Семинар 19. Продолжение обсуждения формулы Кюннета и умножения в когомологиях

Формула Кюннета в конечном гомологическом типе

Определение. *Если пространство X – хаусдорфово и линейно-связное, то оно является пространством конечного гомологического типа, если $\forall n \geqslant 0, H_n(X, \mathbb{Z})$ – конечно-порождённая абелева группа.*

Замечание. *Для пространств конечного гомологического типа – X из формулы универсальных коэффициентов:*

$$\forall \mathbb{K}: \ dim_{\mathbb{K}} H_n(X; \mathbb{K}) < \infty,$$

А также

$$H^n(X; \mathbb{K}) = (H_n(X; \mathbb{K}))^*.$$

Теорема (Формула Кюннета в конечном гомологическом типе)**.** *Если X, Y – пространство конечного гомологического типа по модулю $\mathbb{K}$ (Здесь и далее коэффициенты поля будем опускать в записи). Имеем:*

$$H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y),$$

Где

$$H^n(X \times Y) = \bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y).$$

Замечание. *Известно, что для $H^n(X), H^n(Y)$ необходимо использовать умножение $\smile$. Возникает проблема в том, чтобы тензорно ($\otimes$) перемножать их между собой.*

Заметим, что элемент $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ представим в виде произведения конечных сумм:

$$(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + \dots + a_s \otimes b_s)\,(a_1' \otimes b_1' + a_2' \otimes b_2' + \dots + a_s' \otimes b_s')\,.$$

Можем раскрыть данное произведение поэлементно и воспользоваться правилом знаков:

$$a_1 \otimes b_1 \smile a_2 \otimes b_2 = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1 \smile a_2) \otimes (b_1 \smile b_2).$$

Для краткости в дальнейшем можем опускать умножение $\smile$. Докажем, что правило знаков действительно выполняется.

Доказательство. Для доказательства сделаем проверку двух выражений:

$$1 \otimes b_1 \cdot 1 \otimes b_2 = 1 \otimes b_1 b_2,$$

$$a_1 \otimes 1 \cdot a_2 \otimes 1 = a_1 a_2 \otimes 1.$$

Этого достаточно, так как имеем представление исходного выражения:

$$a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_2.$$

Так как произведение коммутативно, то при смене b_1 и a_2 возникает соответствующий знак:

$$a_1 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_2 = (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 \otimes 1 \cdot a_2 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_1 \cdot 1 \otimes b_2.$$

Продолжая равенство, получим:

$$a_1 a_2 \otimes 1 \cdot 1 \otimes b_1 b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

То есть, помимо предыдущих двух соотношений, необходимо проверить соотношение:

$$a \otimes 1 \cdot 1 \otimes b = a \otimes b.$$

Верность данных соотношений предлагается проверить читателю. □

Замечание. *Можно было бы ввести умножения и без правила знаков:*

$$a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

При этом введённое умножение также является билинейным, однако оно не является градуированно-коммутативным.

Замечание. *Имеем обобщение формулы Кюннета в виде:*

$$H^*(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) = H^*(X_1) \otimes H^*(X_2) \otimes \cdots \otimes H^*(X_n),$$

Где элементарный тензор правой части представим по правилу знаков в виде:

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) \smile (b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_n) = (-1)^{|a_2||b_1| + |a_3|(|b_1|+|b_2|)+\dots} a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_n.$$

Рассмотрение частных случаев

Пример. *Рассмотрим частный случай пространства*

$$X = S^{2n_1+1} \times S^{2n_2+1} \times \dots \times S^{2n_k+1}$$

С произвольным полем $\mathbb{K}$, здесь и далее рассмотрим случаи, когда $char\,\mathbb{K} \neq 2$. В данном случае имеем:

$$H^*(S^n) = \underbrace{\mathbb{K}\left<1\right>}_{0} \oplus \underbrace{\mathbb{K}\left<a_n\right>}_{n}.$$

Введём обозначение:

$$\alpha_s = 1 \otimes \dots \otimes a_{2n_s+1} \otimes \dots \otimes 1.$$

С соответствующей градуировкой:

$$|\alpha_s| = 2n_s + 1.$$

Тогда произвольный тензор представим в виде $\smile$ произведения элементов α_i. Учитывая, что каждый из тензоров имеет нечётную градуировку, получаем

$$\alpha_t \smile \alpha_s = -\alpha_t\alpha_s.$$

Для данного множества имеем аддитивный базис:

$$1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_k \dots, \alpha_k\alpha_k, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \dots, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k = [X]$$

Получили, что в силу формулы Кюннета $H^*(X;\mathbb{K})$ есть линейная оболочка множества выше.

Заметим, что произведения подчиняются правилу знаков. Так, например

$$\alpha_1\alpha_2 \cdot \alpha_3\alpha_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Однако

$$\alpha_1 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2\alpha_4 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Получаем внешнюю алгебру $\Lambda^*_{\mathbb{K}}\left<\alpha_1, \dots \alpha_k\right>$, порождённую данным набором однородных элементов нечётных степеней или свободно комуттативно-градуированную алгебру над полем $\mathbb{K}$ с образующими нечётных степеней – α_i.

Гомотопическая задача

Любая $\mathbb{R}$ связная группа Ли G изоморфна своей максимальной подгруппе G_C. То есть можем рассматривать $G = X$, как связную компактную группу Ли. При этом имеем отображение:

$$\underbrace{G}_{1} \times G \xrightarrow{\mu} X.$$

И по аксиоме единицы:

$$e \times x = x \times 1 = x$$

Определение. *Пусть X – конечный связный CW-комплекс с умножением:*

$$X \times X \xrightarrow{\mu} X,$$

И выполнением аксиомы единицы:

$$\exists e \in X\, \forall x \in X :\ \mu(e, x) = e \times x = x \times e = x.$$

Такое пространство будем называть H-пространством.

Теорема об инварианте Хопфа

Теорема (Об инварианте Хопфа). *S^m – H-пространство в широком смысле тогда и только тогда, когда*

$$m = 1, 3, 7.$$

Данная теорема весьма сложна, однако с помощью гомологий можем доказать более слабый результат теоремы – m должно быть нечётным.

Доказательство. Будем рассматривать $\mathbb{Q}$ гомологии. Пусть X – CW-комплекс. Имеем прямое отображение:

$$X \times X \xrightarrow{\mu} X$$

И обратное в когомологиях по формуле Кюннета:

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \xleftarrow{\mu^*} H^*(X).$$

Для гомоморфизма $\mu^* = \Delta$ из аксиомы единицы имеем следующее свойство (доказательство даётся в качестве упражнения):

$$\forall\, \alpha \in H^p(X),\ p \geqslant 1$$

Выполняется аксиома коединицы:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i' \otimes \alpha_i'',$$

Где

$$\forall i \in \overline{1, N}: \ |\alpha_i'| \geqslant 1, |\alpha_i''| \geqslant 1.$$

Рассмотрим в качестве частного случая такого пространства $X = S^{2n}$. Тогда имеем следующие когомологии пространства:

$$A^* = H^*(X) = \mathbb{Q}\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{Q}\langle \alpha_{2n} \rangle.$$

При этом, по аксиоме коединицы, имеем:

$$\Delta(\alpha_{2n}) = \alpha_{2n} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_{2n} + 0.$$

Напишем, что это кольцевой гомоморфизм

$$\underbrace{\Delta(\alpha_{2n} \cdot \alpha_{2n})}_{0} = \Delta(\alpha_{2n})\Delta(\alpha_{2n}) = 0$$

Однако, имеем противоречие, так как

$$(\alpha_{2n} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_{2n})^2 = \underbrace{\alpha_{2n}\alpha_{2n} \otimes 1}_{0} + \underbrace{1 \otimes \alpha_{2n}\alpha_{2n}}_{0} + \underbrace{2\alpha_{2n} \otimes \alpha_{2n}}_{\neq 0} \neq 0$$

$\square$

Замечание. *Для нечётно-мерной сферы противоречия не возникает. Действительно, распишем последнюю выкладку:*

$$(\alpha_{2n+1} \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_{2n+1})^2 = 0 + 0 + \alpha_{2n+1} \otimes \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n+1} \otimes \alpha_{2n+1} = 0.$$

Семинар 20. Двойственность Пуанкаре

Вспомогательные сведения

Определение. *Пусть* $dim\, M < \infty$*, тогда имеем группу n-мерных гомологий:*

$$H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_{n-1}(\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}_{S^{n-1}}) = \left[\begin{array}{l} \mathbb{Z}, i = n \\ 0, i \neq n \end{array} \right.$$

Тогда имеется μ_x *– точечно-локальная образующая* $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$*. Будем считать, что* M *ориентируемое, если можно выбрать согласованную ориентацию во всех точках:*

$$\forall B_1 \cong \mathbb{R}^n \in M,\ \forall B \cong \mathbb{R}^n \in M \cap B_1,\ \forall x, y \in B:$$
$$H_n(M, M \setminus \{y\}) \xleftarrow{\cong} H_n(M, M \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M \setminus \{x\})$$

При этом

$$\mu_y \to \mathbb{Z} \leftarrow \mu_x.$$

Замечание. *Если многообразие* M *неориентируемо, то над ним можно построить специальное двухлистное ориентирующее накрытие* $\tilde{M} = \{(x, \mu_x)\}$.

Теорема о двойственности Пуанкаре

Определение. *Для ориентируемого связного замкнутого многообразия* M^n*:*

$$H_n(M^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Фундаментальный класс $[M]$ *есть выбор одной из образующих.*

Определение. *Аналогично* μ_x *можно построить* $\mu_k \in H_n(M, M \setminus k)$*:*

$$\forall x \in K \exists! \mu_k \in H_n(M, M \setminus k):\ H_n(M, M \setminus k) \to H_n(M, M \setminus \{x\}).$$

Теорема (Двойственность Пуанкаре)**.** *Пусть* M^n *– ориентированное связное замкнутое многообразие, тогда имеется фундаментальный класс в когомологиях* $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z})$*:*

$$[M] \frown \phi:\ H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M)\, \forall k \in \overline{1, n-1}$$

Введём новое произведение – $\frown$.

Определение. *Пусть имеется коммутативное кольцо с единицей R. Необходимо задать следующую билинейную опперацию:*

$$C_p(X,R) \times C^q(X,R) \xrightarrow{\frown} C_{p-q}(X,R)$$

Пусть ϕ – функция на цепях:

$$\phi: \ C_q(X,R) \to R$$

Заметим, что $C_p(X,R)$ – свободный модуль над R с базисом, состоящим из всех сингулярных симплексов, поэтому достаточно рассмотреть

$$\sigma: \ [v_q, \ldots, v_p] \to X$$

И тогда

$$(\sigma \frown \phi) = \phi(\sigma[v_0, \ldots, v_q]) \cdot \sigma|_{[v_q, \ldots, v_p]}.$$

Легко проверить, что полученное отображение билинейно:

$$(\sigma_1 + \sigma_2) \frown \phi = \sigma_1 \frown \phi + \sigma_2 \frown \phi$$
$$(\lambda\sigma) \frown \phi = \lambda(\sigma) \frown \phi$$
$$\sigma \frown (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1\sigma \frown \phi_1 + \lambda_2\sigma \frown \phi_2$$

Замечание.

$$\partial(\sigma \frown \phi) = (-1)^q(\partial\sigma \frown \phi - \sigma \frown d\phi)$$

Из билинейности имеем:

$$\partial(c \frown \phi) = (-1)^q(\partial c \frown \phi - c \frown d\phi)$$

Поочерёдно рассматривая в качестве c и ϕ циклы, границы и коциклы, получим:

$$H_p(X;R) \times H^q(X;R) \xrightarrow{\frown} H_{p-q}(X;R)$$

Замечание. *Также можно проверить свойство:*

$$\sigma \frown (\phi_1 \smile \phi_2) = (\sigma \frown \phi_1) \frown \phi_2.$$

Откуда следует

$$c_p \frown (\phi_{q_1} \smile \phi_{q_2}) = (c_p \frown \phi_{q_1}) \frown \phi_{q_2}.$$

Получаем, что $H_*(X;R)$ становится градуированным модулем над $H^*(X;R)$

Общая формулировка двойственности Пуанкаре

Теорема (Двойственность Пуанкаре). *Пусть M^n связное ориентируемое многообразие (компактное или не компактное), тогда имеем отображение:*

$$D:\ H^p_c(M^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M^n)$$

Определение. *Введение $C^i_c(X;R) \subset C^i(X;R)$ возможно, если его элементы ϕ таковы, что:*

$$\exists K = K_\phi \subset X,\ \forall \sigma \in X \setminus K:\ \phi(\sigma) = 0.$$

Откуда получаем когомологии с компактным носителем $H^i_c(X;R)$

Замечание.

$$d:\ C^i_c(X;R) \to C^{i+1}_c(X;R)$$

$$\forall \phi \in C^i_c(X;R):\ \phi \to K_\phi \Rightarrow K\, d\phi = K_\phi.$$

Введение направленности

Определение. *Частично-упорядоченное множество I – множество, для которого верны аксиомы:*

1. $$\forall \alpha \in I:\ \alpha = \alpha$$

2. $$\forall \alpha, \beta, \gamma \in I:\ \alpha \leqslant \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$$

3. *Для направленности*

$$\forall \alpha, \beta \in I,\ \exists \gamma \in I:\ \alpha \leqslant \gamma,\ \beta \leqslant \gamma.$$

Определение. *Пусть имеется множество X с направленными элементами $x_\alpha, \alpha \in I$, тогда прямой предел $x_\alpha \in X$ определяется следующим образом:*

$$\lim_{\xrightarrow{I}} x_\alpha = x_0,$$

где

$$\forall x_0 \in U \subset_{op} X, \exists \beta(x_0) \in I, \forall \gamma \geqslant \beta:\ x_\gamma \in U$$

Теорема. *Множество X – $T_2 \Leftrightarrow \forall x_\alpha \in X, \alpha \in I$ если*

$$\exists \underset{\overset{I}{\to}}{lim}\, x_\alpha = x_0,$$

То он единственный.

Определение. *Пусть имеется частично-упорядоченное направленное множество I и абелевы группы $G_\alpha, \forall \alpha \in I$:*

$$\forall \alpha \leqslant \beta:\ \exists f_{\alpha\beta}:\ G_\alpha \to G_\beta$$

При этом

$$f_{\alpha\alpha} = id,\ f_{\beta\gamma} \cdot f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma}\ \forall \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$$

Тогда можем ввести понятие прямого предела $\underset{\overset{I}{\to}}{lim}\, G_\alpha$:

$$\underset{\overset{I}{\to}}{lim}\, G_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha / a - f_{\alpha\beta}(a)\ \forall \alpha \in G_\alpha, \forall \alpha \leqslant \beta.$$

Замечание. *Прямой предел можно ввести иначе:*

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

При этом

$$\alpha \sim \beta, \text{если} \exists \gamma \geqslant \alpha, \beta:\ f_{\alpha\gamma}(a) = f_{\beta\gamma}(b) \in G_\gamma$$

Теорема. *Пусть имеется некоторое пространство X и абелева группа коэффициентов G, тогда*

$$\{K \subset X\} = I:\ K \leqslant L \Rightarrow K \subset L.$$

При этом имеет место отображение:

$$H^p(X, X \setminus K) \xrightarrow{f_{kl}} H^p(X, X \setminus L),$$

Так как можно построить отображение

$$(X, X \setminus L) \to (X, X \setminus K)$$

И справедливо утверждение теоремы:

$$H_c^p(X) = \underset{\overrightarrow{K \subset X}}{lim}\, H^p(X, X \setminus K).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из соотношения:

$$C_c^i(X) = \bigcup C^i_{K \in X}(X, X \setminus K).$$

□

Пример

Определение. *Конфинальное J вводится от I следующим образом:*

$$\forall \alpha \in I,\ \exists \beta \in J :\ \alpha \leqslant \beta.$$

Пример. *В качестве примера рассчитаем $H_c^p(\mathbb{R}^n)$ по определению.*

$$H^p(X = \mathbb{R}^n, X \setminus B_k(\cdot)) \cong \tilde{H}^{p-1}(X \setminus B_k(\cdot)) \cong S^{n-1}$$

Откуда

$$H_c^p = \left[\begin{array}{l} \mathbb{Z}, p = n \\ 0, p \neq n \end{array} \right.$$

Замечание. *Получили, что гомологии с компактным носителем не являются гомотопическими инвариантами, но являются топологическими инвариантами.*

Для построения морфизмов между рассмотренными пространствами:

$$f :\ X \to Y \Rightarrow H_c^i \to H_c^j$$

Необходимо, чтобы отображение f было собственным, то есть прообраз компакта является компактом.

Замечание. *Если многообразие неориентируемое, то данные рассуждения необходимо провести не для $\mathbb{Z}$, а для $\mathbb{Z}_2$.*

Семинар 21. Двойственность Пуанкаре для замкнутых многообразий

Вспомогательные сведения из общей теории гомологий

Определение. *Будем считать, что топологическое T_2 пространство X является пространством конечного гомологического типа, если $H_q(X;\mathbb{Z})$ конечно порождённые $\forall q \geqslant 0$, при этом выполняется следующее:*

$$H^q(X;\mathbb{Z}) \cong H_q(X;\mathbb{Z})/T_q \oplus T_{q-1},$$

Где $T_k \subset H_k(X;\mathbb{Z})$ – подгруппа кручения.

Замечание. *Для произвольного X имеет место билинейное спаривание*

$$H^q(X;R) \times H_q(X;R) \to R.$$

В том случае, когда $R = \mathbb{K}$, то

$$H^q(X) = H_q(X)^*.$$

При $R = \mathbb{Z}$ имеем

$$H^q(X;\mathbb{Z}) \times H_q(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

При этом (спаривание будем обозначать в треугольных скобках):

$$k\gamma = 0 \Rightarrow \underbrace{k}_{\in\mathbb{N}} \langle \gamma, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma, \alpha \rangle = 0.$$

Получаем, что подгруппа кручений действует тривиальным образом и можем записать следующее

$$\underbrace{H^q(X;\mathbb{Z})/T_{q-1}}_{H^q_{free}(X;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{B_q}} \times H_q(X;\mathbb{Z})/T_q \to \mathbb{Z}.$$

То есть, с учётом новых обозначений:

$$H^q_{free}(X;\mathbb{Z}) \times H_{q,free}(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

Определение. *Можно показать, что спаривание введённое выше является унимодулярным. То есть, для произвольного базиса*

$$\forall \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{B_q} \in H^q_{free}$$

Найдётся двойственный базис

$$\exists e_1, \ldots, e_{B_q} \in H_{free,q}$$

При этом выполняется

$$\langle \epsilon_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Двойственность Пуанкаре для многообразий

Замечание. *Пусть M^n – топологическое связное замкнутое и ориентируемое, тогда имеется двойственность Пуанкаре:*

$$D_M : \ H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(M)$$

В терминах рангов сразу получаем для $\mathbb{Z}$

$$B_k = B_{n-k}$$

Теорема.

$$\forall \gamma \in H^k(M), \forall \tilde{\gamma} \in H^{n-k}(M).$$

Так как

$$H^n(M) \cong H_0(M) = \mathbb{Z},$$

То

$$\langle \gamma \smile \tilde{\gamma}, [M] \rangle = \langle \tilde{\gamma}, D(\gamma) \rangle$$

Замечание. *Имеем фундаментальное свойство произведения $\smile$. Для произвольного базиса*

$$\forall \gamma_1, \ldots, \gamma_{B_k} \in H^k_{free}(M)$$

Найдётся базис

$$\exists \tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_{B_{n-k}} \in H^{n-k}_{free}(M)$$

Такой, что выполняется соотношение

$$\langle \gamma_i \smile \tilde{\gamma}_j, [M] \rangle = \delta_{ij}.$$

Многообразия с нечётной размерностью

Теорема. *Для произвольного замкнутого многообразия M^k(ориентируемого или неориентируемого):*

$$k = 2n + 1 \Rightarrow \chi(M^{2n+1}) = 0.$$

Доказательство. Действительно, имеем для ориентируемых многообразий

$$\sum_i (-1)^i B_i = 0$$

Так как B_n соответствует B_{n+1}, B_{n-1} соответствует B_{n+1} (с другой чётностью) и так далее.

В случае неориентируемых многообразий утверждение теоремы также верно, так как для них существует двулистное накрытие, эйлерова характеристика которого в два раза больше, но равняется нулю по доказанному выше. □

Замечание. *Из формулы универсальных коэффициентов имеем:*

$$H_q(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus Tor\,(H_{q-1}(X, \mathbb{Z}); \mathbb{Z}_2)$$

Так как для конечных абелевых групп имеем формулу

$$Tor\,(A, B) \cong A \oplus B$$

Получаем упрощение

$$H_q(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q(X) \otimes \mathbb{Z}_2 \oplus (T_{q-1}(X) \otimes \mathbb{Z}_2)$$

Начнём расчёт данного выражения. Имеем

$$H_q(X) \otimes \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}^{B_q} \oplus T_q) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^{B_q} \oplus (T_q \otimes \mathbb{Z}_2)$$

Откуда

$$H_q(X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}^{B_q} \oplus (T_q \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus (T_{q-1} \otimes \mathbb{Z}_2)$$

Тогда при подсчёте эйлеровой характеристики получим

$$\chi_{\mathbb{Z}_2}(X) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^q dim\,(H_q(X; \mathbb{Z}_2) = \chi(X)$$

При этом с каждым вторым слагаемым следующее сокращает предыдущее из-за различия в чётности, откуда и получаем выражение написанное выше.

Многообразия с чётной размерностью

Пусть имеется ориентируемое многообразие

$$\underbrace{H^0}_{\mathbb{Z}} \oplus H^1 \oplus \cdots \oplus \underbrace{H^n}_{\mathbb{Z}^{B_n} \oplus T_n} \oplus \cdots \oplus \underbrace{H^{2n}}_{\mathbb{Z}}.$$

Из двойственности Пуанкаре получаем унимодулярное произведение

$$\smile : H^n_{free}(M^n) \times H^n_{free}(M^n) \to \mathbb{Z}.$$

Для нечётных n имеем кососимметрическую билинейную функцию, так как

$$\alpha \smile \beta = -\beta \smile \alpha.$$

Откуда получаем, что если n чётное, то $\chi(M^n)$ тоже чётная.

Пример. *В частности для $M^2 = S_g$ имеем*

$$H^*(S_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle 1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\rangle \oplus \gamma.$$

И соответствующее умножение равно нулю всегда, кроме случая одинаковых индексов:

$$\alpha_i \smile \beta_i = -\beta_i \smile \alpha_i = \gamma_i.$$

В случае чётных n унимодулярную симметрическую билинейную функцию и соответствующую теорему.

Теорема (Конечности типов). *Пусть матрица такая, что выполнено*

$$B = B^T \in GL_m(\mathbb{Z}),$$

Тогда, с точность до замены базиса

$$B \to B' = C^T BC,\ C \in GL_m(\mathbb{Z}),$$

При фиксированном m имеем конечное число типов.

Имеем квадратичную форму для данной матрицы B и предположим, что она знакопеременная, то есть

$$\alpha \smile \alpha > 0,\ \beta \smile \beta < 0.$$

Тогда вводится понятие чётности: если все числа на диагонали b_{ii} чётные, то форму будем называть чётной. Это равносильно тому, что

$$\alpha \smile \alpha \in 2\mathbb{Z}.$$

Теорема Хассе-Минковского

Теорема (Хассе-Минковского). *Пусть матрица B знакопеременная и*

$$B = B^T \in GL_m(\mathbb{Z}).$$

Тогда

1. *Если она нечётная, то имеет вид в некотором базисе*

$$B' = diag\,(1, \dots, 1, -1, \dots, -1).$$

2. *Если она чётная, то*

$$mod(p - q, 8) = mod\,(sgn\,(B), 8) = 0$$

А её блочная структура состоит из матриц вида U:

$$U = \begin{pmatrix} 0\ 1 \\ 1\ 0 \end{pmatrix}$$

И матриц E_8, которые имеют размерность 8 на 8 и унимодулярная положительно определённые в количестве $sgn\,(B)$

$$B' = \begin{pmatrix} U\ 0\ 0\ \dots 0\ \dots\ 0 \\ 0\ U\ 0\ \dots 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 0\ U\ \dots 0\ \dots\ 0 \\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots E_8\ \dots\ 0 \\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots 0\ \dots\ E_8 \end{pmatrix}$$

Семинар 22. Векторное расслоение. Характеристические классы

Введение основных понятий

Определение. (E, F, B, p) *называют локальным тривиальным расслоением, если всё хаусдорфово (T_2) и p – непрерывная сюръекция*

$$E \xrightarrow{p} B,$$

Где E – тотальное расслоение, B – база расслоения, F – слой. Также выполнено

$$\forall x \in B \; \exists x \in U_x \subset_{op} B:$$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[r, equal, "h"] \arrow[d] & U_x \times F \arrow[dl] \\ U_x & \end{tikzcd}$$

Пример. *В качестве примера локального тривиального расслоения можно взять прямое произведение и накрытие.*

Определение. $(E, \mathbb{R}^N (\text{или} \, \mathbb{C}^N), B, p)$ *называют векторным тривиальным расслоением, если всё хаусдорфово (T_2) и p – непрерывная сюръекция*

$$E \xrightarrow{p} B,$$

Где E – тотальное расслоение, B – база расслоения, $\mathbb{R}^N$ – векторное пространство. Также выполнено

$$\forall x \in B \; \exists x \in U_x \subset_{op} B:$$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_x) \arrow[r, equal, "h"] \arrow[d] & U_x \times \mathbb{R}^N \arrow[dl] \\ U_x & \end{tikzcd}$$

Замечание. *Если B – конечный CW-комплекс и $B \sim *$, то $\forall F - T_2$, то произвольное расслоение эквивалентно $B \times F$.*

Пример. *Стягиваемые пространства исследовать не интересно, так как расслоение аналогично прямому произведению, в качестве примера не стягиваемого пространства можем рассмотреть окружность S^1. При этом задаётся гомеоморфизм h с точностью до изотопии h_t*

$$h: \ F \to F.$$

Для окружности на себя имеем два класса гомеоморфизмов с точностью до изотопии: сохряняющий и меняющий ориентацию соответственно. Таким образом можно получить либо тор либо бутылку Клейна.

Определение. *Морфизм это некоторое отображение f, при котором образуется коммутативная диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p", "F"'] & E' \arrow[d, "p'", "F'"'] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Определение. *Индуцированное расслоение задаётся следующим образом*

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p", "F'"'] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Где

$$f^*(E) = \{(b', e) \mid f(b') = p(e)\}.$$

При этом на слоях получаем гомеоморфизм.

Пример. *Пусть имеется гладкое многообразие M^n и касательное пространство τM^n. При этом*

$$\begin{tikzcd} \tau M^n \arrow[d, "\mathbb{R}^N"] \\ M^N \end{tikzcd}$$

Если же имеется два векторных расслоения χ, η над одной и той же базой B

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[d, "\chi"] & E_2 \arrow[dl, "\eta"] \\ B & \end{tikzcd}$$

То можно построить различные расслоения из них над той же базой, например:

$$\chi \oplus \eta, \chi^*, Hom\,(\chi, \eta), \chi \otimes \eta.$$

Характеристический класс

Определение. *Если имеется расслоение*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\mathbb{R}^N"', "\xi"] \\ B \end{tikzcd}$$

То характеристический класс есть $\alpha(\xi) \in H^*(B)$, если для любого отображения f имеем:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[d, "p'"', "\xi'"] & E \arrow[d, "p"', "\xi"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

И выполняется

$$\alpha(\xi') = f^*\alpha(\xi).$$

Определение. *Пусть*

$$w_0 = 1, w_1, \dots, w_n \in H^*(B, \mathbb{Z}_2),$$

При этом

$$w_i(\xi) \in H^i(B, \mathbb{Z}_2).$$

Тогда класс Штифиля-Уитни определяется как

$$w = 1 + w_1 + \dots + w_n.$$

Теорема. *Если для всех векторных расслоений $\mathbb{R}^n$ хотим построить характеристический класс*

$$\alpha(\xi) \in H^*(B; \mathbb{Z}_2),$$

Тогда необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha(\xi) = P(w_1, \dots, w_n).$$

Замечание.

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} w_j(\xi) w_k(\eta).$$

При этом

$$w_0 = 1,\ i > dim\,\xi \Rightarrow w_i(\xi) = 0.$$

Пример. *В случае $\mathbb{P}^n$ имеем*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\gamma_1"] \\ \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

При этом

$$w_1(\gamma_1) = u \in H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u]/u^{n+1}.$$

Классификационная теорема

Замечание. *Для многообразие Грассмана*

$$G_k(\mathbb{R}^N) = \{\pi \subset \mathbb{R}^N \mid dim\,\pi = k\}$$

Имеет место вложение, как и для проекционных плоскостей:

$$G_k(\mathbb{R}^N) \subset G_k(\mathbb{R}^{N+k}) \subset G_k(\mathbb{R}^\infty).$$

Для определения $w_1(\xi)$ необходимо

$$\begin{tikzcd} E = f^*\gamma_1 \arrow[d] & E_1 \arrow[d, "\gamma_1"] \\ B \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^\infty \end{tikzcd}$$

Теорема (Классификационная для векторных расслоений)**.** *Если B – компакт, то любое расслоение снимается Грассмианом:*

$$\begin{tikzcd} f_*(\gamma_n) \arrow[d, "\mathbb{R}^N"] & \cdot \arrow[d, "\gamma_n"] \\ B \arrow[r, "f"] & G_n(\mathbb{R}^\infty) \end{tikzcd}$$

То есть

$$Vect_{\mathbb{R}}(B) = [B, G_n(\mathbb{R}^\infty)].$$

Аналогично

$$Vect_{\mathbb{C}}(B) = [B, G_{\mathbb{C}}(n; \mathbb{R}^\infty)].$$

Замечание. *Формулу Уитни можно интерпретировать следующим образом:*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta).$$

Теорема. *Пусть B – компакт. Будем обозначать тривиальное расслоение как*

$$\underline{\mathbb{R}^N} = B \times \mathbb{R}^N$$

Тогда имеем для произвольного расслоения ξ расслоение η

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\xi"] & E_n(\underline{\mathbb{R}^N}) \arrow[dl, "\eta"] \\ B & \end{tikzcd}$$

При этом

$$\xi \oplus \eta = \mathbb{R}^{n+m}.$$

Замечание. *Из формулы Уитни имеем в $H^*(B, \mathbb{Z}_2)$*

$$1 = w(\xi) \cdot w(\eta),$$

Следовательно получаем, что $w(\eta)$ определена однозначно.

Доказательство. Из формулы имеем

$$1 = (1 + w_1 + \dots + w_n) \cdot (1 + \tilde{w}_1 + \dots + \tilde{w}_m)$$

Введём обозначение

$$A^* = H^*(B; \mathbb{Z}_2)$$

Тогда первое слагаемое в формуле Уитни обратимо по формуле

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots$$

Так как пространство B компактное, то полученный после обращения ряд оборвётся на некотором многочлене и будет конечным. Так получаем

$$\tilde{w}_1 = w_1,$$

$$\tilde{w}_2 = w_1^2 + w_2,$$

$$\tilde{w}_3 = w_1^3 + w_3.$$

Аналогично можно получить и остальные. □

Замечание. *Аналогичная формула справедлива и в случае c_i, однако здесь расчёт будет иным. Так, в качестве примера рассмотрим первые три члена:*

$$\tilde{c}_1 = -c_1,$$

$$\tilde{c}_2 = -c_2 + c_1^2,$$

$$\tilde{c}_3 = -c_3 + 2c_2c_1 - c_1^3.$$

Замечание. *Также можно заметить*

$$w(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}^k}) = w(\xi) \cdot w(\underline{\mathbb{R}^k})$$

Так как

$$w(\underline{\mathbb{R}^k}) = 1$$

Получаем

$$w(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}^k}) = w(\xi)$$

Замечание. *Для двух расслоений* ξ, η *над одной базой* B, *при условии*

$$\xi \oplus \mathbb{R}^k \cong \eta \oplus \mathbb{R}^l.$$

Получаем

$$w(\xi) = w(\eta).$$

Семинар 23. Класс Штифеля-Уитни

Введение основных определений

Определение. *Для двух расслоений ξ, ξ будем называть расслоение $\overline{f}$ послойным, если оно приходит из некоторого отображения базы f так, что между слоями, имеющими одинаковую размерность, строится изоморфизм.*

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\overline{f}} & E(\xi') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi\,\mathbb{R}^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi'\,\mathbb{R}^n} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Замечание. *Можно показать, что при послойном расслоении выполняется*

$$\xi \cong f^*(\xi')$$

Определение. X *– паракомпакт* $\Leftrightarrow T_2+$ *паракомпактность.*

Аксиома. *Если имеется произвольное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ на X, то тогда существует другое покрытие $\{V_\beta\}$, причём*

1. *$\{V_\beta\}$ вписано в $\{U_\alpha\}$:*
$$\forall V_\beta\ \exists \alpha:\ V_\beta \subset U_\alpha.$$

2. *$\{V_\beta\}$ локально-конечно, то есть условие ниже выполняется только для конечного набора β:*
$$\forall x \in X\ \exists U_x \cap V_\beta \neq \varnothing$$

Рассмотрим теперь частный случай базы B' и соответствующую теорему на этот счёт.

Теорема (Об универсальности γ_n). *В случае $B' = Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ имеем:*

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\overline{f}} & E(\gamma^n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi\,\mathbb{R}^n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma^n} \\ B & \xrightarrow{f} & Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

1. *$\forall\xi$ над паракомпактом B и произвольного векторного расслоения $\forall\xi$ существует послойное отображение:*
$$\overline{f}:\ E(\xi) \to E(\gamma^n).$$

2. *Для любых двух таких послойных отображений* $\forall \overline{f_0}, \overline{f_1}$ *верно, что они послойно гомотопны.*

Замечание. *Для двух послойно-гомотопных отображений из теоремы верно:*

$$\overline{f} \sim \overline{g} \Rightarrow f \sim g$$

Замечание.

$$Vect\,(B) \cong [B, Gr_n(\infty)]$$

Аксиоматическое описание классов Штифеля-Уитни

Аксиома 1. *Для произвольной паракомпактной базы* B *и расслоения*

$$\xi : E(\xi) \xrightarrow{\xi} B$$

Мы сопоставляем

$$w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$$

Причём выполняется

$$dim\,\xi = d < i \Rightarrow w_i = 0.$$

Аксиома 2.

$$\xi_1 = f^*\xi_2 \Rightarrow w_i(\xi_1) = f^*(w_i(\xi_2))$$

Аксиома 3 (Формула Уитни)**.** *Для произвольного*

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots$$

Верна формула:

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta)$$

Или в другом варианте:

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} w_i(\xi) \smile w_j(\eta)$$

Аксиома 4. *Пусть* $B = \mathbb{R}P^1$ *имеем класс*

$$w_1(\xi_1^1) = u \neq 0$$

Так как

$$\mathbb{Z}_2(S^1) = \mathbb{Z}_2\,\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{Z}_2[u]$$

Данных аксиом достаточно для существования и единственности классов Штифеля-Уитни для произвольной компактной базы и её конечномерного векторного расслоения.

Полином классов Штифеля-Уитни

Утверждение.

$$H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)]$$

Необходимо доказать, что между $w_i(\gamma^n)$ нет никаких отношений, а также

$$\mathbb{Z}_2(w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)) \subset H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2)$$

Прежде всего докажем отсутствие отношений

Доказательство. Рассмотрим следующую базу

$$B = \underbrace{\mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty}_{n}$$

И пусть над каждым $\mathbb{R}P^\infty$ висит расслоение γ^1. Так как имеется связь

$$\gamma_1 \times \dots \gamma_1 = \pi_1^*(\gamma_1) \oplus \pi_2^*(\gamma_1) \oplus \dots \oplus \pi_n^*(\gamma_1).$$

То в терминах классов Штифеля-Уитни имеем:

$$\begin{gathered} w(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_1) = w(\pi_1^*(\gamma_1)) \smile w(\pi_2^*(\gamma_1)) \smile \dots \smile w(\pi_n^*(\gamma_1)) = \\ = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n), \end{gathered}$$

Где использовались следующие обозначения

$$a_i = w_i(\pi_i^*(\gamma_1)).$$

Учитываем, что

$$\pi_k : \mathbb{R}P^\infty \times \dots \times \mathbb{R}P^\infty \to \mathbb{R}P^\infty,$$

А также

$$\pi_k^* : a_k \leftarrow \mathbb{Z}_2[a_k]$$

Раскрывая данный многочлен, получим

$$\begin{gathered} w(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_1) = 1 + \underbrace{(a_1 + \dots a_n)}_{\sigma_1} + \underbrace{(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)}_{\sigma_2} + \\ + \dots + \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{\sigma_n} \end{gathered}$$

Данные функции, по соответствующей теореме, полиноминально независимы. Если бы существовала зависимость между классами изначально, то она была бы в любой базе и для любого раслоения. Таким образом мы конструктивно доказали её отсутствие. В результате доказано:

$$\mathbb{Z}_2(w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)) =$$
$$= \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \ldots, w_n(\gamma^n)] \subset H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}_2)$$

□

Замечание. *Аналогично можно показать*

$$H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a_1; a_2; \ldots; a_n],\ deg\, c_i = 2i.$$

Замечание. *Задача полного описания* $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ *над* $\mathbb{Z}$ *ещё полностью не решена.*

Семинар 24. Теорема Лере-Хирша. Классы Эйлера. Изоморфизм Тома

Теорема Лере-Хирша

Теорема (Лере-Хирша). *Пусть всё T_2 и линейно-связное и имеется локально-тривиальное расслоение*

$$F \xrightarrow{F} B.$$

И будем рассматривать два различных варианта:

1. *Случай $\mathbb{K}$.*

$$F_b \subset_{\blacktriangleright} E.$$

Получаем сюрьекцию

$$H^*(E) \to H^*(F_b).$$

И при этом

$$dim\, H^*(F_b) = N = 1 + B_1 + \cdots + B_s < \infty.$$

Пусть также имеется базис

$$u_i \in H^{K_i}(F_b)$$

То есть имеем $\mathbb{K}$-базис в $H^*(F_b)$. Так как это сюрьекция, то

$$\exists v_1, \ldots, v_N :\ v_i \in H^{K_i}(E) \to u_i$$

Утверждение теоремы в этом случае состоит в следующем:

$$H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E) = \bigoplus_{i=1}^{N} H^*(B_i).$$

То есть

$$\forall x \in H^*(E)\, \exists! b_1, \ldots b_n \in H^*(B) :\ x = p^*(b_1) \smile v_1 + \cdots + p^*(b_N) \smile v_N.$$

2. *Случай $\mathbb{Z}$. Предполагается, что $H^*(F)$ без кручений:*

$$H^i(F) = \mathbb{Z}^{B_i},\ rank\, H^*(B) < \infty.$$

И F конечного гомологического типа. Тогда верны условия теоремы при случае $\mathbb{K}$.

Пример. *Пусть $E = B \times F$. Если на F наложены условия теоремы под пунктом $\mathbb{K}$, то условия сюръективности выполняются автоматически и имеем:*

$$H^*(E) \cong H^*(B) \otimes H^*(F).$$

Пример. *В случае расслоения*

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[d, "S^1"] \\ S^2 \end{tikzcd}$$

Теорема Лере-Хирша не выполняется, так как не имеется сюръекции.

Применение теоремы Лере-Хирша к векторным расслоениям

Определение. *Пусть имеется расслоение*

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[d, "\xi", "\mathbb{R}^n"'] \\ B \end{tikzcd}$$

Для каждой точки $b \in B$ имеем слой $\mathbb{R}^n$ (см. Рис. 1). Рассмотрим все прямые, проходящие через 0 в $\mathbb{R}^n$ – получим пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$. Получаем ассоциированное расслоение – над каждой точкой 'висит' $\mathbb{R}P^{n-1}$. Возьмём на каждой прямой ещё одну точку и получим тавтологическое одномерное расслоение γ^1 над $\mathbb{R}P^{n-1}$. Данная процедура является проектизацией $P(E(\xi))$

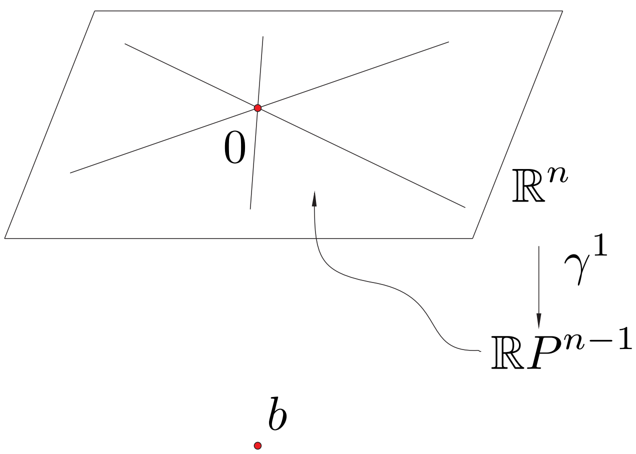


Рис. 1: Проектизация.

$$\begin{tikzcd} E(\eta_1) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_1"] & \cdot \arrow[d, "\gamma^1"] \\ P(E(\xi)) \arrow[r] & \mathbb{R}P^\infty \end{tikzcd}$$

При этом

$$\mathbb{Z}_2[v] = H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2),\ deg\, v = 1.$$

Мы также знаем, что

$$w_1(\gamma^1) = v.$$

И этот класс отображается в

$$w \in H^1(P(E(\xi))).$$

Который также отображается при вложении слоя в образующую u, такую, что

$$\mathbb{Z}_2[u] = H^*(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2).$$

Имеем сюрьекцию в когомологиях:

$$\begin{tikzcd} \gamma_1(PE(\xi)) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^1(\mathbb{R}P^\infty) \arrow[d] \\ P(E(\xi)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{R}P^{n-1}"] & \mathbb{R}P^\infty \\ B & \end{tikzcd}$$

В этом случае условия теоремы Лере-Хирша выполнены и по определению

$$x \in H^*(PE(\xi)) = p^*(b_0) \smile 1 + p^*(b_1) \smile w + \cdots + p^*(b_{n-1}) \smile w^{n-1}.$$

Рассмотрим

$$-w^n = w_1(\xi) \smile w^{n-1} + \cdots + w_n(\xi) \smile 1.$$

Учитывая, что элементы $w_i(\xi) \in H^i(B)$ определены однозначно мы можем перенести выражение выше в одну сторону и получить:

$$w^n + w_1(\xi) \smile w^{n-1} + \cdots + w_n(\xi) \smile 1 = 0.$$

Замечание. *Аналогичную процедуру можно проделать с классом $c_i(\xi)$.*

Классы Эйлера. Изоморфизм Тома

Определение. *Пусть имеется расслоение с линейно-связной T_2 базой B:*

$$\begin{array}{c} E(\xi) \\ \mathbb{R}^n \ or \Big\downarrow \xi \\ B \end{array}$$

Тогда можем ввести класс Эйлера

$$e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z}).$$

Можно рассмотреть пару (E, E_0), где

$$E_0 = (b, \underbrace{e}_{\neq 0}).$$

И рассмотреть когомологии такого пространства

$$H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0,\ 0 \leqslant i < n.$$

$$H^n(E, E_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle u \rangle\,,$$

Где u – класс Тома. И у нас имеется вложение

$$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \subset\!\!\blacktriangleright (E, E_0).$$

Теорема (Изоморфизм Тома). *Если мы знаем класс Тома u, то можем вычислить*

$$H^{n+k}(E, E_0; \mathbb{Z}) \cong u \smile H^k(E; \mathbb{Z}),\ \forall k \geqslant 0.$$

Также необходимо учесть

$$H^k(E; \mathbb{Z}) \cong H^k(B; \mathbb{Z}).$$

Замечание.

$$e(\xi) = \phi^{-1}(u \smile u).$$

При нечётном n

$$u \smile u = -u \smile u \Rightarrow e(\xi) = 0.$$

Замечание. *Для многообразия M^{2n} ориентированного гладкого связного компактного и без края, то*

$$\xi(M^{2n}) = \left\langle e(\tau M^{2n}), [M^{2n}] \right\rangle$$

Если $\xi(M^{2n}) \neq 0$, то не существует нечётномерного подрасслоения.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ